UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

KARINE ANGÉLICA DE DEUS

O RECURSO DA DEMONSTRAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DE DIFERENTES NÍVEIS DO ENSINO DE MATEMÁTICA

SÃO CARLOS - SP
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

KARINE ANGÉLICA DE DEUS

O RECURSO DA DEMONSTRAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DE DIFERENTES NÍVEIS DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos – PPGE/UFSCar, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação. Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Denise Silva Vilela.

SÃO CARLOS - SP
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

D486rd	Deus, Karine Angélica de. O recurso da demonstração em livros didáticos de diferentes níveis do ensino de matemática / Karine Angélica de Deus. -- São Carlos : UFSCar, 2015. 207 p. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015. 1. Educação matemática. 2. Matemática escolar. 3. Livros didáticos. 4. Ciência - aspectos sociais. I. Título. CDD: 372.7 (20[a])

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Karine Angélica de Deus, realizada em 27/02/2015:

Profa. Dra. Denise Silva Vilela
UFSCar

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
UNESP

Dedico este trabalho...

... aos meus pais, Lúcia e Maurício (in memoriam), por sempre me incentivarem e me proporcionarem a oportunidade de prosseguir nos meus estudos. Amo vocês.

... ao meu esposo, pelo companheirismo, apoio, incentivo e amor em todos os momentos.

AGRADEÇO...

... em primeiro lugar à Deus que iluminou o meu caminho durante toda esta caminhada.

... à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro na elaboração da pesquisa.

... à minha mãe Lúcia e ao meu pai Maurício (in memoriam). Mãe, seu cuidado, amor, dedicação, confiança e amizade sempre me motivaram a seguir em frente. Pai, onde quer que esteja, saiba que nos deixou aprendizados e valores que nos acompanham e nos acompanhará por toda a vida. Obrigada por nos mostrar o valor e a importância dos estudos. Amo vocês!

... especialmente ao meu marido, João Paulo, a pessoa com quem amo partilhar a vida e os meus sonhos. Obrigada por ser o grande incentivador em toda minha formação acadêmica. Obrigada, pelo carinho, amor, paciência e pela paz que sempre me transmite.

... aos meus irmãos Fábio e Lilian e aos meus cunhados Alessandro e Camila, que me permitem afirmar que são meus grandes amigos. Obrigada ainda à Ângela, Batista, Elisângela e Tiago por serem pessoas especiais.

... à Professora Denise que orientou esta pesquisa com confiança, dedicação, paciência e incentivo. Obrigada pelos inúmeros ensinamentos, por me auxiliar a ver o que eu não via e por tornar este trabalho mais profundo.

... à Profª. Dr. Maria do Carmo de Sousa e ao Prof. Dr. Antônio Vicente Marafioti Garnica pelas contribuições, leituras e importantes sugestões dadas para o aprimoramento dessa pesquisa.

... aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos pelas valiosas contribuições para minha formação acadêmica.

... aos colegas e amigos da pós–graduação que dividiram comigo momentos de entusiasmos, angústias, dúvidas e alegrias. Foram momentos inesquecíveis.

... ao Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), em especial ao Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente, que contribuiu imensamente com a nossa pesquisa fornecendo gentilmente o CD-ROM “A matemática do ginásio” elaborado por seu grupo de pesquisa.

... ao professor Fábio, à Escola Estadual Firmino Costa e à Escola Cooperativa Gralha Azul pela disponibilização dos livros didáticos utilizados na pesquisa.

... aos professores da Universidade Federal de Lavras, e em especial ao Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade que foi sem dúvida o grande motivador de meu interesse na área da Educação Matemática. Obrigada pela confiança, incentivo e amizade.

RESUMO

A presente pesquisa, de natureza qualitativa, se orientou pela questão: o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações escolares em livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática? A fim de responder essa questão tomamos como documentos três coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e três do ensino médio, avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); e os guias do PNLD para os mesmos níveis de ensino citados. Inspiramo-nos no referencial metodológico da Hermenêutica de Profundidade (HP) e concebemos as demonstrações como formas simbólicas. Primeiramente, destacamos como as pesquisas da área da matemática acadêmica e da Educação Matemática discutem a demonstração e, em seguida, expomos as demonstrações em momentos históricos, como na obra “Os Elementos” de Euclides e em livros didáticos publicados durante reformas do ensino de matemática no Brasil. Por meio de um referencial da sociologia da ciência discutimos o valor simbólico das demonstrações escolares. Os encaminhamentos desse estudo nos apontaram para uma discussão acerca dos processos de naturalização da unicidade, verdade e de valores da lógica. Além disso, a demonstração se apresentou como uma crença atrelada a símbolos de rigor, de precisão, de cientificidade da matemática, comprovação, pujança, respeitabilidade e de autoridade. Da análise de conteúdo realizada nos livros didáticos selecionados foram organizadas quatro categorias para as demonstrações escolares: (1) via experimentos e casos particulares; (2) lógico-dedutiva com caráter de exploração; (3) formal com elementos da lógica clássica; (4) mediante casos particulares, generalização e explicação. A análise nos indicou mudanças quanto: à metodologia para o desenvolvimento de uma demonstração; ao tipo de linguagem empregada; à maneira de se introduzir e concluir um procedimento; ao uso de figuras e de procedimentos indutivos, intuitivos e visuais. Para complementar as interpretações e compreender as diferentes formas de demonstrar expressas nas categorias recorremos aos documentos oficiais, que nos permitiram identificar que as demonstrações escolares nos livros didáticos cumprem o papel de preparação dos estudantes para a compreensão e desenvolvimento futuro de uma demonstração formal, além de estarem atreladas ao objetivo de desenvolvimento do raciocínio lógico e a aproximação ao fazer matemático profissional. Com isso entendemos que a demonstração formal é valorizada e incentivada em propostas curriculares que, apesar de orientarem o uso de diferentes formas de se demonstrar adequadas a cada nível de ensino, almejam a construção de uma ideia única de demonstração.

Palavras-chave: Educação matemática. Matemática escolar. Demonstração escolar. Livros didáticos. Sociologia da Ciência.

ABSTRACT

This present research, of qualitative nature, was guided by the question: what characterizes and what are the functions of school demonstrations in different level textbooks for teaching mathematics? In order to answer this question, three high school and three Junior high school textbook collections – which are assessed and approved by the National Textbook Program (PNLD, in Portuguese), the National Curricular Parameters (PCN, in Portuguese) and the PNLD guides for the same presented school levels – were considered as documents. Inspired by the Depth Hermeneutics methodological referential, these demonstrations were considered symbolical. Firstly, the way how research in academic mathematics and Mathematical Education discuss the demonstrations was pointed out. Afterwards, the demonstrations, in different historical periods, were exposed – such as in the literary work "The Elements" by Euclid and in textbooks which were published during reforms in the teaching of mathematics in Brazil. Through a referential of the sociology of the science, the symbolic value of these school demonstrations was discussed. The development of this study has pointed to a discussion about the naturalization processes of the uniqueness and verity of logical values. In addition, the demonstration was presented as a belief linked to symbols of stringency, precision, mathematical scientificity, proof, subdual, respectability and authority. Upon performing content analysis on the selected books, four categories of school demonstrations were set: (1) through experiments and particular cases; (2) through deductive reasoning with an exploratory character; (3) through formal elements of classical reasoning; (4) through particular cases, generalization and explanation. The analysis has shown changes regarding: the methodology for the development of a demonstration; the type of language applied; the way a procedure was introduced and concluded; the use of pictures and inductive, intuitive and visual procedures. In order to complement interpretations and understand the different demonstration fashions expressed in these categories, official documents were used, what made it possible to identify that the school demonstrations in the textbooks fulfill their role in preparing students for the understanding and future development of a formal demonstration, besides being aligned with the goal of developing deductive reasoning and approximation in forming a professional mathematician. Upon that, it can be understood that the formal demonstration is appreciated and motivated in curricular propositions which, despite guiding the use of different demonstration forms adapted to each teaching degree, seek to build a unique idea of demonstration.

Keywords: Mathematical education. School Mathematics. School demonstrations. Textbooks. Sociology of Science.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A opção de pesquisar a temática demonstração no ensino e aprendizagem de matemática foi sendo amadurecida durante o curso de Licenciatura em Matemática realizado na Universidade Federal de Lavras – UFLA. Naquele momento, a demonstração foi tema de um projeto de iniciação científica ao qual eu[1] estava vinculada e que posteriormente se tornou meu trabalho de conclusão de curso.

Hoje, após minha formação escolar e acadêmica e um período de experiência como professora de matemática dos anos finais do ensino fundamental, posso tecer considerações quanto a minha relação com o procedimento da demonstração.

Voltando ao passado, mais especificamente ao período em que cursei o ensino fundamental e médio, vejo que não tive contato com a demonstração ou, pelo menos, ela não me marcou como outros acontecimentos escolares. Minhas lembranças com a matemática me permitem dizer que eu tinha facilidade em "aprendê-la" e por isso gostava dela. No entanto, a demonstração não é algo que me foi apresentado naquela época. O ensino centrado em regras, algoritmos e exercícios de fixação sem conexão com o mundo, em que a memória era fator importante é que fizeram parte da minha formação escolar.

Recordo-me que a primeira vez que tive conhecimento sobre "o que é demonstrar", ou seja, o procedimento lógico-dedutivo, foi quando assisti aulas em um curso pré-vestibular. Todas as fórmulas, regras e propriedades eram demonstradas de uma forma "muito simples e lógica" – pelo menos era o que o professor aparentava. Eu percebia que as regras e fórmulas tinham um porquê de serem daquela forma: elas não eram "inventadas", mas sim deduzidas. Isso me fazia questionar: por que eu não aprendi a demonstrar na escola? É importante saber demonstrar para cursar Licenciatura em Matemática?

Em 2007 ingressei como aluna do curso de Licenciatura em Matemática da UFLA e me deparei com disciplinas que utilizavam recorrentemente o procedimento da demonstração. As demonstrações eram apoiadas em axiomas e definições e se desenvolviam pelo método dedutivo, pela redução ao absurdo e pelo princípio da indução finita. Demonstrações que, em grande parte, eram extremamente rigorosas, formais, com excessivo uso de simbolismo matemático e que, em geral, não nos ofereciam um entendimento da validade de propriedades, regras e teoremas que eram utilizados.

---

[1] Em um primeiro momento da introdução usarei a primeira pessoa do singular por se tratar da exposição de minha trajetória de vida, em que farei um resgate histórico de meu processo de formação até o surgimento da problemática da presente pesquisa.

Naquele momento a demonstração era um procedimento que eu considerava necessário para desenvolver meus conhecimentos em algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, mas que não havia me despertado maiores reflexões ou interesse. Porém, ao aceitar uma proposta de pesquisa de um professor do Departamento de Ciências Exatas (DEX) da UFLA, pesquisador na área da educação matemática, me aproximei de estudos voltados à temática.

No entanto, a proposta veio na contramão do que eu havia conhecido, até então, como demonstração, isto é, um procedimento com rigor próprio e formal. O objetivo era propor uma abordagem voltada para o ensino e a aprendizagem da álgebra na educação básica, que exigia o delineamento e a compreensão de formas de abordar as demonstrações nesse nível de ensino. Isso se tornou uma tarefa árdua, pois exigia romper com aquilo que já estava incutido em mim em relação ao assunto.

Esta tarefa foi importante para que eu rompesse com a imagem fixa e única da demonstração que eu tinha e que era reforçada a cada disciplina do campo da matemática que eu cursava. Essa ideia me causava certo incômodo e me fazia questionar: como trabalhar com demonstrações na matemática escolar?

A resposta a esse questionamento só surgiu quando vislumbrei, por meio de estudo de pesquisas na área da Educação Matemática, a possibilidade de atenuar esse rigor e formalismo das demonstrações, por meio de procedimentos de validação[2] alternativos como desenhos, dobraduras, argumentos orais e explicações, os quais, embora geralmente não sejam aceitos na matemática acadêmica[3] como demonstração, são mais acessíveis e aceitáveis para estudantes do nível básico de ensino.

A problemática da investigação que realizei durante o curso de Licenciatura em Matemática se resumia nas questões: como abordar as demonstrações em álgebra na educação básica? Que artifícios o professor deve lançar mãos nesse processo? A fim de buscar respostas a estes questionamentos elaborei e desenvolvi uma atividade orientadora de ensino (MOURA, 2001), voltada para o ensino de álgebra. Esta atividade foi desenvolvida em um ambiente exploratório-investigativo em que pretendíamos ir além de meras reproduções existentes em

[2] Utilizaremos no decorrer do texto a expressão “procedimentos de validação” com referência a um conjunto de diferentes formas de se verificar uma afirmativa matemática a fim de convencer a outrem.
[3] Adotaremos a expressão “ matemática acadêmica” com o sentido elaborado por Moreira (2004), ou seja, como sinônimo de matemática científica, e que diz respeito a “um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais” (p. 18).

livros didáticos, colocando os estudantes diante de situações que exigissem o levantamento de conjecturas, a elaboração de argumentos, de justificativas e posteriormente a sua validação.

Hoje, ao pensar sobre aquele trabalho e sobre o que considerei como demonstração ao final da atividade que desenvolvi, questiono: que tipo de demonstração era aquela? A revisão bibliográfica que realizei naquela época mostrou-me que havia divergências no que se entende do assunto no âmbito da Educação Matemática e também que não há consenso quanto à sua forma de concepção. Muitas vezes a demonstração é assumida em seu sentido amplo e não apenas como procedimentos rigorosos e formalistas (PIETROPAOLO, 2005).

Observei também que a discussão sobre o ensino e a aprendizagem da demonstração tem relação com o papel que este procedimento deve desempenhar na educação matemática como, por exemplo, a demonstração vista como uma ferramenta para desenvolver o raciocínio lógico e um elemento importante da cultura matemática, do enfoque que se poderia dar nas aulas de matemática, ou seja, como forma de explicação e compreensão de um teorema ou até mesmo como metodologia de ensino.

Assim, naquele momento, no âmbito da educação matemática, concebi a demonstração na educação básica como sendo os processos de argumentação e validação (BOAVIDA, 2005). As argumentações foram vistas como as conversações desenvolvidas em sala de aula focando a atividade proposta e abrangendo "raciocínios de caráter explicativo ou justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições pela indicação de razões" (BOAVIDA, 2005, p. 7). O processo de validação de uma afirmativa foi concebido por mim, como o conjunto de argumentos ou procedimentos que o estudante pode oferecer com o objetivo de convencer ao outro, a partir da explicação sobre a validade de um enunciado matemático. Entendia que o tipo de argumento oferecido – que poderia ser até mesmo uma demonstração formal – iria depender do tema e nível de escolaridade dos estudantes que estariam envolvidos na atividade.

Naquele primeiro trabalho, portanto, utilizei as demonstrações como meio de testar casos particulares, elaborar contraexemplos, explicar e justificar, podendo observar assim certo contraste do seu uso em relação aos aspectos de rigor e formalidade desejáveis na matemática acadêmica. Entretanto, estamos discutindo a questão na matemática escolar, que é um ambiente que possui características próprias, como por exemplo, a forma de apresentação dos conceitos, e objetivos específicos que a diferencia da matemática acadêmica (MOREIRA, 2004).

A demonstração formal é um dos elementos fundamentais da matemática acadêmica e tem grande importância no desenvolvimento da matemática. Quanto à sua abordagem em nível superior, uma afirmação que não seja um axioma ou uma definição só será considerada verdadeira se houver uma demonstração formal para ela, sendo esta entendida como uma sucessão de inferências lógicas a partir de axiomas ou proposições aceitas a priori, não podendo estar fundamentadas na intuição, experiência[4], figuras, dentre outros. Dessa forma, geralmente os testes de casos particulares, explicações, figuras e justificações, não se constituem, por si só, argumentos aceitos como demonstração para a matemática acadêmica.

O uso (ou não) de imagens e desenhos que auxiliem ou mesmo façam parte de uma demonstração é fato controverso entre matemáticos (ANDRADE (2011); FETISSOV (1994); BROWN (1997)). Por um lado, Andrade (2011) afirma que o trabalho com a figura torna a demonstração mais acessível e facilita seu andamento, mas enfatiza sobre os riscos de se criar evidências ilusórias. Para essa autora, a figura é um apoio intuitivo para o desenvolvimento de uma demonstração. Fetissov (1994) também afirma que o desenho é um meio auxiliar, é um exemplo, um caso particular de uma classe de figuras geométricas. Ambos não aceitam desenhos como parte, de fato, da demonstração, ainda que possa ser inserido um complemento. Por outro lado, Brown (1997) argumenta a favor de que as imagens comprovam fatos, defendendo que elas se constituem como demonstrações matemáticas genuínas.

Portanto, uma definição não garante um consenso no interior da matemática acadêmica acerca do que se aceita por demonstração. Quanto a isso, Pietropaolo (2005) diz que

> (...) existem outros aspectos envolvidos no modo como muitos matemáticos validam suas afirmações. Uma área da Matemática pode privilegiar uma forma e não uma outra, ou seja, procedimentos aceitáveis em uma podem não o ser na outra. Em alguns temas aceitam-se processos de validação diferenciados por meio de demonstrações não-formais, humanamente verificáveis e independentes de peritos que decidam apenas com base na linguagem formal (p. 65).

A partir da aproximação com a temática no curso de Licenciatura em Matemática, do meu interesse pelo tema e da constatação de que não há consenso sobre o que se entende e se aceita por demonstração na educação matemática, buscamos[5] nesta pesquisa

---

[4] Utilizamos a palavra "experiência" ou "experimento" como uma forma de nos referir a formas de validação na matemática escolar que faz uso de materiais de manipulação de maneira a justificar e explicar determinados resultados matemáticos.
[5] A partir desse momento escreveremos em 1ª pessoa do plural por considerarmos que o presente trabalho não é uma produção individual, mas sim uma elaboração proporcionada pelas escritas de diferentes teóricos do tema.

compreender o assunto em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, em que nos guiaremos pelas questões: *o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações escolares em livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática?*

A análise de livros didáticos é tema frequente de pesquisas em Educação Matemática. Grande parte delas se preocupa na análise do livro em si (CHOPPIN, 2004; MACHADO, 1996) e de seus conteúdos (PIMENTEL, 2014; SILVA, 2010), mas há também aqueles que abordam a história, as políticas, a utilização em sala de aula (VALENTE, 2004; VALENTE, 2011; MANTOVANI, 2009; FREITAG et al, 1987), dentre outros elementos relacionados ao livro didático, que é um objeto importante e expressivo da cultura escolar, que faz parte desse ambiente há muitos anos. Assim, compreendê-lo e analisá-lo, a nosso ver, contribui para entendermos alguns aspectos do sistema escolar.

Os livros didáticos destinados às escolas públicas são regulamentados por uma série de exigências do Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD). Os editais desse programa têm o papel de padronizar o que deve ser abordado pelos autores dos livros didáticos em seus respectivos livros. Essa padronização é feita com base em orientações de propostas curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Assim, o livro didático tende a ser fiel ao que o programa deseja porque o autor deverá satisfazer as recomendações do PNLD para ter sua obra aprovada. Entretanto, devemos considerar que em alguns aspectos as orientações, tanto curriculares quanto do PNLD, acabam sendo vagas, apesar de muitas vezes minuciosas, abrindo possibilidades de diferentes interpretações por parte dos autores. Além disso, acreditamos que a concepção que o autor tem do que é demonstrar em sala de aula de matemática, bem como a importância que ele dá a esse procedimento, influenciam a forma como este assunto é tratado nos livros didáticos e também influenciam a finalidade com que se faz o seu uso.

Recorremos ao livro didático como uma das fontes de pesquisa porque ele exerce grande influência na prática do professor, além de ser um importante instrumento para reprodução e distribuição de crenças estabelecidas. Além disso, o livro didático continua sendo um dos mais importantes instrumentos para a transmissão de conhecimentos, sendo muitas vezes a "fonte última de segurança" por parte do professor (OLIVEIRA, 2008, p. 61).

Nesta pesquisa, assumimos as demonstrações como formas simbólicas (THOMPSON, 1999). As formas simbólicas podem ser entendidas como construções carregadas de significados e intenções que requerem interpretação, podendo ser textos, ações, falas, dentre outros, que possuam diferenças dos objetos naturais, pois se caracterizam pela intenção de quem os emite (THOMPSON, 1999). Elas fazem parte de contextos sócio-históricos, dentro dos quais e por meio dos quais são mobilizadas. Para a análise da nossa forma simbólica, contextualizada histórica e socialmente, possuindo estrutura interna complexa, nos inspiraremos no referencial metodológico denominado por Thompson (1999) de Hermenêutica de Profundidade (HP).

Com vistas a compreender as demonstrações nos livros didáticos de matemática, direcionamos nosso olhar para os tópicos de geometria plana e espacial - a partir desse momento chamaremos de geometria - pelo fato de ser nesses tópicos que mais se concentram as práticas de demonstração no que se refere à educação básica (PIETROPAOLO, 2005). Assim, tivemos por objetivos:

- Analisar socio-historicamente as demonstrações internamente à matemática considerando as pesquisas acadêmicas, as reformas do ensino de matemática no Brasil e as especificidades da matemática acadêmica e escolar; e externamente à matemática, por meio de um referencial da sociologia da ciência;
- Mapear e caracterizar as demonstrações escolares em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio;
- Identificar as considerações referentes à abordagem da demonstração dos guias do PNLD e dos PCN, para embasar nossa interpretação quanto ao que caracteriza e qual o papel cumprem a demonstração nos livros voltados para o ensino, explicitando-a como forma simbólica.

Espera-se assim ampliar o significado da demonstração e discutir seu papel no campo da Educação Matemática por meio de livros didáticos, PCN e Guias do PNLD.

Para desenvolver e abordar os objetivos específicos listados acima o presente texto está estruturado em capítulos, que são: introdução e revisão da bibliografia, procedimentos metodológicos, a análise sócio-histórica das demonstrações, a análise formal dos livros didáticos e as considerações finais.

Nesta seção introdutória foi apresentado como nos aproximamos da temática, delineado a questão de pesquisa e os objetivos, além da revisão da bibliografia que será tratada posteriormente.

No capítulo 1 serão apresentados os procedimentos metodológicos e destacados que esta pesquisa, inspirada na HP, possui abordagem qualitativa. Será apresentada ainda a metodologia de constituição e análise dos documentos de pesquisa, bem como os livros didáticos que fizeram parte de nossa pesquisa.

No capítulo 2, foi desenvolvida a análise sócio-histórica das demonstrações. Em um primeiro momento, apresentaram-se considerações quanto à demonstração formal, destacando elementos da lógica aristotélica, para posteriormente elaborarmos uma caracterização do método axiomático dedutivo a partir da obra *Os Elementos* e de textos de pesquisadores do tema. Em seguida, foram contextualizadas as demonstrações nos livros didáticos, olhando para esse procedimento em três momentos históricos distintos que ocorreram mudanças para o ensino de matemática: as reformas educacionais ocorridas na primeira metade do século XX, o movimento da matemática moderna e o ensino de matemática após a década de 80. Além disso, apresentou-se uma discussão sobre as especificidades da matemática escolar e acadêmica no que se refere à demonstração, tendo como referência Moreira (2004) e Chevallard (1991). Nessa seção, procurou-se ainda apresentar uma perspectiva de ampliação na forma de conceber as demonstrações na matemática escolar. Por fim, diferentemente do que foi realizado num primeiro momento do texto, olhamos para as demonstrações externamente à matemática por meio de um referencial da sociologia da ciência, procurando elaborar uma compreensão sobre o seu valor simbólico.

No capítulo 3, foram apresentadas as análises formais dos livros didáticos de matemática que constituíram os documentos de nossa investigação. Além disso, identificamos as considerações referentes à abordagem da demonstração dos guias do PNLD e dos PCN, para embasar nossa interpretação quanto ao que caracteriza e qual o papel cumprem as demonstrações nos livros voltados para o ensino.

Nas considerações finais, retomamos brevemente a trajetória desta pesquisa, realizando interpretações quanto aos resultados e nossas questões de pesquisa.

Revisão da bibliografia: a demonstração na pesquisa acadêmica

Fazendo um levantamento bibliográfico de artigos, teses e dissertações[6] publicadas no Brasil e em outros países, percebemos o aumento no interesse de pesquisadores, ao longo dos anos, em discutir a demonstração em diferentes níveis do ensino de matemática. Apresentamos a seguir alguns desses trabalhos que contribuem para nossa discussão e nos permitem contextualizar o que nossa pesquisa significa no ambiente de pesquisas sobre o tema.

Encontramos, ao revisar a bibliografia referente ao tema demonstração, diversas pesquisas que estudam as demonstrações nos contextos de ensino e aprendizagem (BALACHEFF, 2000; HANNA, 1990; BOAVIDA, 2001; RODRIGUES, 2008, 2010, 2013,

---

[6] Foi realizada uma pesquisa no Banco de Teses e Dissertações da Capes, pelo site http://bdtd.ibict.br/, www.capesdw.capes.gov.br/capesdw, bem como em revistas da área da Educação Matemática, como o Bolema, a Zetetiké, a Educação Matemática e Pesquisa, dentre outras.

dentre outros), na formação de professores (GARNICA, 1995, 1996, 2002; PIETROPALO, 2005) e na análise de materiais de ensino como o livro didático (CARLOVICH, 2005; RAMA, 2005; MARTINS, 2012, dentre outros). Obtemos ainda pesquisas que discutem e apresentam a demonstração dentro da matemática acadêmica (FOSSA, 2005; FETISSOV, 1994; GARBI, 2010), que discutem se desenhos/figuras são demonstrações (BROWN, 1997; FOLINA, 1999; CASSELMAN, 2000) e apresentam os significados das demonstrações em diferentes contextos (GODINO; RECIO, 1997).

Observamos nas pesquisas desenvolvidas sobre o tema, em um primeiro momento, o uso de diferentes expressões para se referir às demonstrações, tais como: demonstrações rigorosas, provas rigorosas, provas formais, ou simplesmente provas, dentre outras nomenclaturas. Muitas vezes os pesquisadores se preocupam em diferenciar os termos "provas" e "demonstrações", e outros os tratam como sinônimos. Assim, os termos prova e demonstração na literatura podem aparecer adjetivados. Dessa forma, é importante entendermos o que se entende por prova e demonstração para que sejam tratados ora como sinônimos, ora com somente algumas similaridades.

Para isso, primeiramente, é interessante partirmos das definições de prova e demonstração presentes em dicionários de língua portuguesa e de filosofia.

No dicionário Michaelis[7] encontramos muitos significados para as palavras, assim, selecionamos aqueles que se referem ao tema da presente pesquisa:

> **Demonstração**
> 1 Ação de demonstrar. 2 Raciocínio de que se conclui a verdade de uma: proposição. 3 Prova. (...) D. a posteriori: a que é baseada no acordo da proposição enunciada com outras proposições conhecidas. D. a priori: aquela cujo raciocínio se baseia na natureza das coisas ou no estudo direto do objeto. D. direta: aquela em que a conclusão é a imediata sequência dum raciocínio baseado em premissas axiomáticas ou preestabelecidas. D. indireta: a que se baseia no absurdo das consequências a que conduziria a negação da proposição enunciada; demonstração negativa, demonstração por absurdo. D. negativa: demonstração indireta. D. por absurdo: demonstração indireta. D. positiva: demonstração direta.
> **Prova**
> 1 Filos Aquilo que serve para estabelecer uma verdade por verificação ou demonstração. 2 Aquilo que mostra ou confirma a verdade de um fato. (...) 8 Demonstração.

No dicionário Aurélio[8] encontramos as seguintes definições:

> **Demonstração**
> s.f. Raciocínio pelo qual se estabelece a verdade de uma proposição: a demonstração de um teorema.
> **Prova**
> s.f. O que demonstra a veracidade de uma proposição, ou a realidade de um fato.

[7] Dicionário da língua portuguesa online.
[8] Dicionário da língua portuguesa online.

Nas definições presentes nos dicionários Aurélio e Michaelis tem-se que a demonstração, que também é uma prova, pode ser de diferentes tipos, sendo que no geral constitui-se em um raciocínio que permite a verificação da validade de uma proposição. A prova seria uma forma de estabelecer a veracidade de uma proposição e essa forma se daria por verificação ou demonstração. Assim, de acordo com os dicionários a demonstração seria um caso particular de prova, não se excetuando possibilidades de que ambas sejam vistos como sinônimos.

No dicionário de filosofia Nicola Abbagnano, temos as definições:

> **Demonstração**
> O termo D[9]. e seu conceito (...) foram introduzidos na Lógica por Aristóteles *(Top.,* I, 100 a 27; *An. post.,* I, 2 e *passim)* como silogismo que deduz uma conclusão de princípios primeiros e verdadeiros ou de outras proposições deduzidas silogisticamente de princípios primeiros e evidentes. Sua estrutura formal é a do silogismo (ABBAGNANO, 1998, p. 248).
>
> **Prova**
> Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P[10]. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que *demonstração* (v.): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações. O conceito foi estabelecido no sentido restrito por Aristóteles, que, ao dizer "Dizem que P. é o que produz saber", fez a distinção entre prova e indício, que proporciona apenas conhecimento provável *(An. pr.,* II, 27, 70 b 2). Em *Retórica* acrescentou: "Quando se acha que o que foi dito não pode ser refutado, acredita-se ter apresentado uma P., porquanto a P. é sempre demonstrada e perfeita"; o próprio silogismo é uma P. necessária nesse sentido *(Ret.,* I, 2,1357 b 5) (ABBAGNANO, 1998,p. 819)

O termo prova é definido de forma mais ampla que demonstração, pois, as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações. A demonstração é, neste caso, definida a partir da lógica aristotélica, consistindo sua estrutura em silogismo. Logo, a prova aborda, segundo o dicionário, além da demonstração, outras formas de validação ou verificação. Nesse sentido, não se tem a prova como sinônimo de demonstração, mas sim como subproduto da prova.

Quanto às definições apresentadas nos dicionários de língua portuguesa e de filosofia, podemos identificar a presença de símbolos que permeiam a ideia de demonstração, ficando em evidência a associação da verdade com a demonstração.

[9] Demonstração.
[10] Prova.

Podemos também, a partir da leitura de artigos, livros, teses e dissertações, compreender as formas como esses termos são empregados no âmbito da educação matemática e da matemática acadêmica.

Loureiro e Bastos (2002) nos mostram os termos que vêm sendo utilizados para se referir à demonstração. Na literatura francesa utiliza-se *preuve* e *démonstration*, na inglesa somente *proof*, mas distingue *mathematical proof* e *formal proof*, além das já citadas acima, na literatura brasileira. A quantidade de termos associados às demonstrações se torna uma dificuldade por não haver consenso sobre seu uso e por ser um sinal de que os usos são muitos.

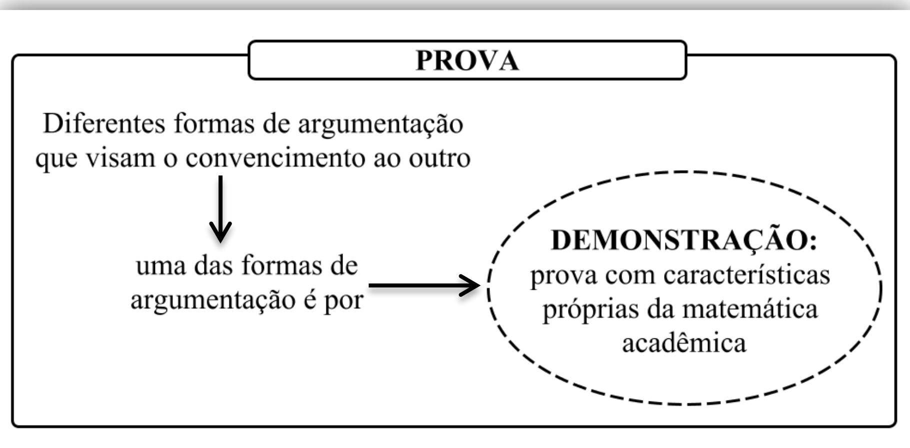
Segundo Garnica (1995), enquanto que na literatura da matemática ou da lógica clássica, prova, demonstração, prova rigorosa, dentre outros termos, são tratadas como sinônimos, que significam "convencer, validar, verificar", ou seja, são usados para legitimar um resultado, na literatura da educação matemática, "prova ou demonstração vêm sempre adjetivadas" (GARNICA, 1995, p. 12). Para Garnica (1995), a necessidade de tal adjetivação depende do que está em foco. Por exemplo, para matemáticos puros não faz sentido falar em prova rigorosa, uma vez que ela já é em si rigorosa; para outros, o rigor se estabelece, "entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas do programa estabelecido por Euclides, n'Os Elementos" (GARNICA, 1995, p. 12). No entanto, há autores que, segundo Garnica (1995), corroborando com Balacheff (1987), fazem uma explicitação dos termos para distinguir prova e demonstração:

> uma prova é uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento, podendo ser debatida, refutada ou aceita. No interior da comunidade Matemática, porém, só são aceitas como provas as explicações que adotam uma forma particular, um conjunto de enunciados válidos organizados segundo certas regras, sendo que um enunciado ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido a partir do precedente por regras de dedução válidas e pré-fixadas, do domínio da Lógica. A esse tipo particular de prova BALACHEFF chama demonstração (GARNICA, 1995, p. 13).

A partir desta última citação, tem-se que a prova é uma demonstração para um grupo específico, que compartilha e aceita sua explicação, mas que seu resultado pode ser refutado a qualquer momento. Os resultados comprovados a partir desse tipo de demonstração não possuiriam a característica de irrefutabilidade e imutabilidade que o tipo de demonstração utilizada na comunidade da matemática acadêmica conduziria.

Sintetizamos em um diagrama essas diferenciações de prova e demonstração na figura 1 a fim de facilitar a sua compreensão:

Figura 1 - Esquema para diferenciação de prova e demonstração por Balacheff



Fonte – Elaboração própria

Há autores como Fossa (2005), Fetissov (1994) e Garbi (2010) que definem a demonstração dentro da matemática acadêmica e que não fazem a diferenciação acima citada, ou seja, prova e demonstração são sinônimos.

Fossa (2005) apresenta em seu livro uma introdução às técnicas de demonstração. Para isso, explicita a função desse procedimento para a matemática acadêmica, para assegurar a verdade dos teoremas, bem como os motivos pelos quais os matemáticos fazem demonstrações:

> Mas, afinal, porque esta preocupação toda com demonstrações? Bem, o matemático tem pelo menos dois motivos para demonstrar todos os seus teoremas. O primeiro motivo é que algumas proposições que parecem intuitivamente óbvias são de fato falsas (...). Portanto, demonstrações são necessárias para assegurar a verdade dos teoremas. Curiosamente, o segundo motivo para a insistência em demonstrar todos os teoremas matemáticos é geralmente esquecido, pelos que refletem sobre a natureza da matemática, embora que este motivo seja da maior importância. A matemática é um tipo de conhecimento. Mas, para conhecer uma coisa não é meramente suficiente se acreditar nela. É necessário, também ter boas razões para nela acreditar. Assim, não dizemos, por exemplo, que **sabemos** que Deus existe, pois não temos razões suficientemente fortes para sustentar esta afirmação. Dizemos meramente que **acreditamos** na sua existência (FOSSA, 2005, p. 46).

Neste trecho vemos que a função da demonstração é entendida como a de verificação da verdade, e só se pode saber da verdade de um teorema mediante uma demonstração. Ou seja, há uma associação desse procedimento com a ideia de verdade. Fossa (2005) afirma ainda que a demonstração é o que possibilita conhecer um teorema matemático e, ainda, se constitui em dar razões para garanti-lo. Em outras palavras, a demonstração é um argumento em que o teorema é a conclusão. Os argumentos que compõem o procedimento são formados por premissas que necessariamente devem ser verdadeiras, no entanto, o autor diz que é impossível demonstrar todas as premissas uma vez que

> cada demonstração destas premissas terá novas premissas que precisariam ser demonstradas, e assim, por diante sem nunca chegar ao fim. Desta forma, precisamos de um ponto de partida, um lugar firme a partir de que podemos começar nossas deduções. Esse ponto de partida são os axiomas. Um **axioma** é uma proposição aceita sem demonstração (FOSSA, 2005, p. 47).

Com essa explanação, Fossa (2005) apresenta um elemento importante que compõe as demonstrações formais que são os axiomas.

Garbi (2010) assume a demonstração como a essência verdadeira da matemática e a define da seguinte maneira: "uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é o processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, evidencia-se a veracidade da afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas" (p. 33). Para o autor, em uma demonstração não se utiliza argumentos do tipo: "intuitivamente vê-se que; por uma questão de bom senso conclui-se que; é evidente ou óbvio que; da figura, fica claro que" (GARBI, 2010, p. 33).

Fetissov (1994) no tópico "O que é uma demonstração?" inicia suas considerações explicando o que é a argumentação: "Cada uma das ponderações usadas para convencer seu interlocutor chama-se argumento da demonstração, e o conjunto de todos os argumentos constitui a argumentação" (p. 18). Para ele, o que garante a força de persuasão de um argumento é que ele se apoia nos fatos que conhecemos por nossa experiência e que recorremos à dedução. Vejamos um exemplo citado por Fetissov (1994):

> Suponhamos que você queira convencer seu interlocutor de que a Terra tem a forma esférica. Para tanto, lhe falará de como o horizonte se alarga à medida que um observador se eleva acima da superfície da Terra, das viagens ao redor do mundo, da sombra redonda que a Terra projeta sobre a Lua quando dos eclipses lunares, etc. (...) Consideremos, por exemplo, o último dos argumentos mencionados. Nele se afirma que a Terra é redonda porque sua sombra é redonda (p. 18).

Pela citação acima vemos que os argumentos vêm de elementos de nossa própria experiência, de que todo corpo redondo projeto uma sombra redonda (FETISSOV, 1994). A dedução se dá da seguinte forma:

> Todos os corpos redondos que, em posições diversas, projetam sombra redonda, têm forma esférica". "A Terra, quando dos eclipses lunares, em suas posições diversas relativamente à Lua, sempre projeta sobre esta uma sombra redonda". Conclusão: "Portanto, a Terra tem forma esférica (p. 18).

Fetissov (1994) define demonstração da seguinte forma: "Uma demonstração consiste em um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios através dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição" (p. 22).

Pelas palavras de Garbi (2010), Fetissov (1994) e Fossa (2005), vemos a ideia de demonstração nos moldes da lógica clássica. Suas definições se assemelham as demonstrações contidas na obra *Os Elementos* de Euclides[11], assumindo elementos como postulados, conceitos primitivos e definições. Além disso, fica clara a exclusão de elementos concretos e visuais que poderiam acarretar na aceitação de um teorema. As definições destes autores seguem uma linha bem definida e que convergem, em teoria, para um significado único. Observamos ainda que a demonstração é um símbolo que garantiria a verdade, que nos daria certeza e segurança quanto aos resultados matemáticos e motivos para crer nessa matemática.

Portanto, até o momento, temos em teoria que a demonstração utilizada pela matemática acadêmica é a sucessão de inferências lógicas a partir de axiomas ou proposições aceitas a priori. No entanto, Bicudo (2002) no resumo de um artigo intitulado "Demonstração em Matemática", salienta que na prática o desenvolvimento de uma demonstração não segue esta definição:

> a demonstração, como definida nos textos de Lógica Matemática, deveria modelar as demonstrações matemáticas. Não é, no entanto, o que se vê nos livros e nos jornais matemáticos. A demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico (BICUDO, 2002, p. 65).

Bicudo (2002) apresenta como a lógica define a demonstração centrada em um sistema formal, que, segundo o autor, é "a parte sintática de um sistema axiomático" (p. 67). A primeira parte de um sistema formal é sua linguagem e, para especificá-la, devemos mencionar os seus símbolos e suas fórmulas. A sequência finita de símbolos é denominada expressão da linguagem, e do conjunto de expressões destaca-se um subconjunto, que são as fórmulas da linguagem. A segunda parte de um sistema formal são os axiomas: "A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal" (BICUDO, 2002, p. 67). A terceira parte de um sistema formal seriam as regras de inferência que permitem concluir teoremas por meio dos axiomas: "cada uma delas afirma que, sob certas condições, uma fórmula, chamada a CONCLUSÃO da regra, pode ser INFERIDA de certas outras, chamadas as HIPÓTESES da regra" (BICUDO, 2002, p. 67).

Segundo Bicudo (2002), uma regra em um sistema formal será finita se houver um número finito de hipóteses. Assim, o autor define a demonstração da seguinte forma:

---

[11] Estas demonstrações serão tratadas posteriormente.

> Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma seqüência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada (BICUDO, 2002, p. 67).

Nesta citação, vemos um modelo teórico de demonstração a partir da lógica formal com etapas definidas que se sucedem necessariamente. Conforme Bicudo (2002), as demonstrações matemáticas deveriam ser modeladas conforme esta definição. No entanto, a demonstração matemática não é desenvolvida por matemáticos do modo descrito pela lógica, pois, no decorrer da elaboração de uma demonstração, passos são omitidos, há a introdução de hipóteses e produção de novas definições. Assim, Bicudo (2002) aponta que a demonstração na prática é diferente da teoria, ou seja, a definição não corresponde ao que é feito na prática.

Nesse sentido, podemos citar a pesquisa de Pietropaolo (2005). Dentre os tópicos discutidos em sua pesquisa, encontra-se a busca aos significados dos termos provas e demonstração no âmbito da matemática acadêmica e da educação matemática. No que concerne à matemática acadêmica, ele aponta que muitas vezes é entendido sobre a demonstração que “a validade de um enunciado deve ser comprovada por meio de uma cadeia de raciocínios dedutivos a partir de um número reduzido de proposições aceitas” (PIETROPAOLO, 2005, p. 60). No entanto, segundo o autor, a demonstração muitas vezes não leva em conta somente essa perspectiva da lógica matemática; a aceitação ou não da validade de uma afirmativa passa por uma comunidade de matemáticos. Segundo Pietropaolo (2005), a confiabilidade matemática está condicionada ao acordo estabelecido entre os matemáticos e não propriamente à linguagem utilizada. Logo, o processo de validação de uma afirmativa é social, “ou seja, não é o formalismo que necessariamente vai referendá-la, mas sim, o convencimento de um grupo de especialistas qualificados no assunto e de reconhecida notoriedade na comunidade dos matemáticos” (PIETROPAOLO, 2005, p.68).

Assim como Bicudo (2002), Pietropaolo (2005) argumenta sobre o papel que a comunidade de matemáticos assume em uma demonstração matemática, ampliando o entendimento do que se aceita por demonstração, ou seja, alargando o significado atribuído pela lógica.

Dessa forma, temos que a demonstração matemática, na perspectiva desses pesquisadores, possui uma definição bem delimitada pela lógica, mas, na prática, o que se vê são aspectos externos entrando em ação, além de diferentes comunidades dentro da própria matemática acadêmica divergindo quanto aos aspectos que devem estar envolvidos na demonstração. Podemos assim observar que há, portanto, diferentes formas de se utilizar a demonstração, variando de acordo com a comunidade a quem ela se dedica.

Quanto a essa variedade de formas de se utilizar e de se significar as demonstrações ou prova, podemos citar o artigo de Godino e Recio (1997). Estes autores analisam as principais caraterísticas do significado das demonstrações em diferentes contextos: lógica, matemática acadêmica, ciências empíricas, vida cotidiana e na escola. Os diferentes sentidos das demonstrações são reconhecidos por meio dos termos como explicação, argumentação e demonstração, entretanto apesar destes diferentes termos se mantém uma ideia comum: de justificar e validar afirmativas utilizando argumentos que se diferenciam nas diferentes ocasiões de usos (GODINO; RECIO, 1997). Para os autores, são as diferentes situações e práticas argumentativas que modificam o sentido da prova ou demonstração, denunciando, assim, não haver uma teoria uniforme estabelecida sobre demonstrações matemáticas.

Para Godino e Recio (1997) a ideia de prova varia de cultura para cultura e de geração para geração, devendo ser alargada em se tratando de problemas psicológicos e didáticos.

No contexto da lógica, Godino e Recio (1997) nos dizem que a verdade dos teoremas repousa na validade das regras da lógica que foram mobilizadas na demonstração. O teorema é consequência necessária que surge de inferências dedutivas de premissas. Sendo assim este teorema assumirá caráter universal e imutável. Em meio a esses esclarecimentos os autores enfatizam que os argumentos indutivos fazem parte dos dedutivos, pois, os axiomas e postulados são originados pela intuição.

Quanto ao contexto da matemática acadêmica os autores alertam que as demonstrações mobilizadas são diferentes da lógica. Para eles as demonstrações nesse contexto são dedutivas, mas não formais e não existe para elas um padrão de rigor. Elas acabam se tornando argumentos convincentes julgados por juízes qualificados. Sendo assim, os teoremas que decorrem das demonstrações não devem assumir o caráter de verdades absolutas e necessárias, mas acaba dando a matemática um caráter falibilista, social, convencional e temporário.

Nas ciências experimentais e na vida cotidiana as demonstrações constituem-se em argumentos empíricos, mas não se exclui o uso de argumentos dedutivos. Geralmente são mobilizados recursos da linguagem comum e materiais concretos. Segundo Godino e Recio (1997) o caráter de verdade de uma afirmação depende dos casos que a satisfazem. Nesse caso, para os autores, a validade das afirmativas não será universal e absoluta.

E no contexto de sala de aula, os autores nos dizem que os alunos devem adquirir a capacidade de compreender e desenvolver provas matemáticas. Além de buscar estabelecer a verdade deve convencer a si e aos outros quanto a essa verdade dos teoremas. Os autores assumem que as provas informais (mediante desenhos, linguagem comum, etc) não são incorretas ou deficientes, mas são etapas para se dominar a prática matemática de argumentação.

Com o artigo de Godino e Recio (1997), temos considerações sobre as demonstrações de um modo mais amplo. E com isso os autores nos instigam a ver que não há um único conceito e uso de provas ou demonstrações, ou seja, há diversos significados para a demonstração em diferentes contextos de usos. Além disso, podemos dizer, com base nas elaborações de Godino e Recio (1997), que a forma de concepção de uma demonstração acaba por implicar na caracterização de um tipo de conhecimento matemático, pois, se seguirmos as regras da lógica clássica, teríamos uma matemática com caráter universal e imutável; mas, a partir do momento em que há interferências humanas nesse procedimento, a matemática assumiria um caráter falibilista, social, convencional e temporário. Essa importância dada à demonstração na perspectiva da lógica clássica nos indica um símbolo forte e valorativo que permeia esse procedimento: a segurança e a certeza.

Podemos ainda destacar as discussões em torno da relação desenhos/imagens e as demonstrações.

Brown (1997) apresenta em seu artigo uma crítica quanto ao ceticismo ao redor dos desenhos em matemática. Ele argumenta a favor dos desenhos, dizendo que sua potencialidade vai além de um papel heurístico, e que são úteis e legítimos para se validar resultados matemáticos. Para ele, tanto a demonstração formal quanto os desenhos explicam um teorema e a reflexão sobre figuras é perfeitamente razoável para deduzir uma conclusão. Além disso, para ele, assim como os desenhos, as provas verbais/simbólicas também enganam e não são piores que eles, mas "podem mesmo corrigir deduções equivocadas" (p.178). A proposta de Brown (1997) é que os desenhos mobilizados como provas sejam tratados como evidências extraídas de microscópios, por exemplo, que também podem levar a erros, pois, nos levam a "'observar' coisas que não eram reais, mas meros artefatos do processo de observação" (p. 178).

Com as explanações de Brown (1997), vemos que a ideia de um mundo matemático platônico de verdades matemáticas absolutas permeia suas colocações, em que os desenhos são vistos como formas de capturar essa verdade. Forma essa tão boa quanto as demais, inclusive as provas lógico-dedutivas. Assim, Brown (1997) mostra-nos que demonstrar é observar o que é intuitivamente óbvio e aconselha-nos que devemos aprender a forma de usar os desenhos.

Nesse sentido, temos ainda o artigo de Casselman (2000), que defende os desenhos como parte integrante de uma prova. Para o autor, “apesar de termos imagens melhores e piores (...), estas muitas vezes desempenham um papel crucial na demonstração lógica. Além de como ferramenta de compreensão ser indispensável” (CASSELMAN, 2000, p.1257).

Folina (1999) busca em seu artigo questionar a ideia de Brown (1997), na qual identifica vários problemas, dentre eles a fragilidade de seus argumentos, pois, apesar dele objetivar suplantar a concepção tradicional de prova, ele não apresenta uma ideia alternativa. O autor muitas vezes se limita a dizer que as “provas-imagens” podem nos convencer da verdade de resultados matemáticos. Folina (1999) por sua vez argumenta não ser necessário nem suficiente ser convencido para uma prova ser válida.

Para Folina (1999) ao comparar as “provas-imagens” com telescópios, Brown (1997) prejudicou sua visão, pois telescópios são instrumentos que nos permite ver o que não está visível a olho nu. Dessa forma, as imagens funcionariam como instrumentos que nos permitem ver o fato matemático em questão, que está no “céu de Platão” (FOLINA, 1999, p. 426). Brown (1997) acaba, portanto, indicando que as imagens são meramente ferramentas que nos permitem ver as provas.

Folina (1999), no decorrer de seu artigo, discute diferentes aspectos dos argumentos apresentados por Brown (1997), entretanto no deteremos às colocações acima.

Diante das diferentes ideias acerca da relação prova e desenhos, observamos o quanto é complexo e divergente seu uso no processo ou como uma prova matemática, pois os desenhos podem ser utilizados para representar e permitir uma compreensão de uma demonstração, isto é, pode ser um apoio intuitivo para o seu desenvolvimento, mas também pode manter e reforçar uma ideia platônica de conhecimento matemático; uma matemática estática, a-história e independente dos homens. A relação prova e desenhos apresentada se situa no âmbito de pesquisa na matemática acadêmica, mas não se restringe a ela. Posteriormente mostraremos que essa discussão também se faz presente na educação matemática.

Na literatura da educação matemática também podemos destacar diferentes formas de compreender a demonstração. Nesta área, o tema demonstração há pouco vem ganhando espaço. Conforme salientam Mariotti e Balacheff (2008), o papel e a importância atribuída à prova e à demonstração conduziram a uma enorme variedade de pesquisas nesta área. Para encontrarmos pesquisas sobre o tema, as palavras-chave na busca não se reduzem a “prova” e “demonstração”, mas incluem “argumentação”, “justificação” e “validação”. É importante considerar que, para cada um destes termos, os pesquisadores apresentam significados ligeiramente diferentes (NAGAFUCHI, 2009).

Segundo Aguilar Jr. e Nasser (2012) algumas pesquisas vêm indicando que o argumento dado para se comprovar uma afirmativa matemática na escola não deve seguir os padrões rígidos defendidos pela matemática acadêmica. Nesse sentido, educadores matemáticos vêm assumindo uma postura de afastar da matemática escolar esta rigidez e dependência extrema a provas rigorosas, adquirindo uma concepção de prova ou demonstração como argumento convincente (AGUILAR JR.; NASSER, 2012). Há também pesquisadores que indicam a necessidade de se trabalhar com diferentes níveis de provas para que os estudantes possam compreender o significado da demonstração e, futuramente, reproduzi-la, sendo este o caso de Balacheff (2000).

Nicolas Balacheff é um autor que trata da temática das provas e demonstrações[12] nas salas de aula de matemática. Seus trabalhos são muito utilizados por alguns pesquisadores do tema, tal como Carlovich (2005), Ordem (2010), Serralheiro (2007), dentre vários outros, e muitas vezes sua teoria sobre os níveis de prova é tomada por referência para analisar livros didáticos e propor situações didáticas para desenvolver as habilidades de provar e demonstrar na matemática escolar. No Brasil, as suas ideias contribuíram para o surgimento de muitas pesquisas, principalmente, desenvolvidas por alguns estudantes e professores[13] da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Balacheff (2000) busca diferenciar provas e demonstrações. Para o autor, as demonstrações são as únicas aceitas por matemáticos e respeitam certas regras da lógica:

> alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas; trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (ALMOULOUD, 2012, p. 24).

Balacheff (2000), em seu livro, disserta sobre os processos de prova matemática por estudantes. Para isso, organiza em duas categorias os tipos de provas produzidos por eles. O autor traz para a discussão a gênesis cognitiva da demonstração e orienta para a necessidade da evolução da cognição para que os estudantes compreendam o significado da demonstração e assim possam produzi-la.

Balacheff (2000) inicia a discussão enfatizando que, na área da matemática ou de qualquer outro ramo de conhecimento, é preciso ter em mente que a demonstração não

[12] Balacheff (2000) diferencia provas e demonstrações.
[13] Essas pesquisas fazem parte de um projeto maior denominado “AProvaME” (Argumentação e Prova na Matemática Escolar) desenvolvido na PUC-SP.

deve ser ensinada do mesmo modo em sala de aula e em um ambiente científico. Para ser convertida em objeto de ensino, a demonstração precisaria sofrer uma transformação adaptativa, uma transposição didática[14] (CHEVALLARD, 1991) sob um conjunto de limites específicos do sistema de formação.

Segundo Balacheff (2000), a demonstração é ferramenta essencial de prova, assumindo-a na perspectiva da lógica, ou seja, a demonstração é objeto de estudo da lógica e, assim, possui uma definição precisa dentro de uma teoria.

Para nossa pesquisa são interessantes as definições e diferenciações que Balacheff (2000) traz sobre explicação, prova e demonstração; já trouxemos um pouco dessa discussão através das palavras de Garnica (1995). Geralmente, estes termos são tidos como sinônimos na prática de ensino de matemática, no entanto, tratá-los dessa forma, segundo Balacheff (2000), pode se constituir em obstáculo para investigação do tema demonstração. Por esse motivo ele as distingue, conforme indicamos a seguir.

Segundo Balacheff (2000), explicar no contexto das ciências dedutivas é oferecer razões para responder a um "porquê", é dar justificativas do teorema. Logo, explicar e demonstrar serão processos distintos. A explicação se situa no nível de quem fala e que, para estabelecer e garantir a validade de uma proposição utiliza seus conhecimentos e seu raciocínio; em outras palavras, dita suas próprias regras para a decisão da verdade. No momento em que a explicação é dada, a pretensão é a de que quem a ouve adquira a compreensão da verdade já adquirida por quem fala. A explicação não se reduz necessariamente a uma cadeia dedutiva e a linguagem utilizada é essencialmente a língua natural.

A prova constitui-se como uma explicação reconhecida e aceita por determinado grupo ou comunidade[15]. Assim, essa passagem da explicação para a prova é um processo social, em que a aceitação não é definitiva, podendo mudar com os avanços dos saberes nos quais a explicação se apoia. Além disso, a prova pode ser aceita por um grupo e não por outro. Balacheff (2000), para exemplificar esta não aceitação de uma prova, cita o Teorema das quatro cores[16], em que a prova do teorema não foi feita no sentido clássico, mas é aceita por certos matemáticos e não por outros.

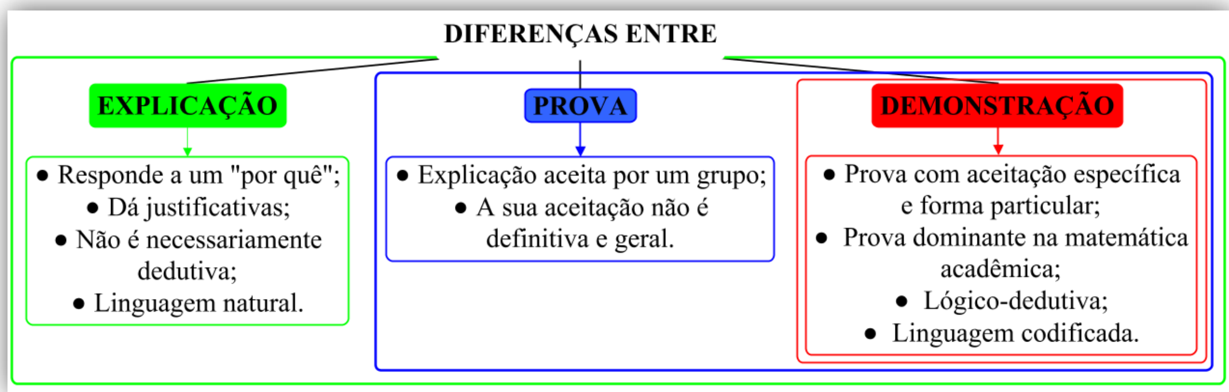
A demonstração, para Balacheff (2000), é um tipo de prova que possui uma aceitação muito específica e possui uma forma particular. É um tipo de prova dominante em

[14] Posteriormente trataremos da transposição didática.
[15] Balacheff nos alerta que a comunidade matemática não é monolítica, uma vez que há doutrinas que se opõem.
[16] O Teorema das quatro cores diz que todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes.

matemática, sendo uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto de regras, possuindo uma forma estritamente codificada.

No esquema abaixo sintetizamos em um diagrama as diferenças entre explicação, prova e demonstração que Balacheff (2000) apresenta:

Figura 2 - Diferenças entre explicação, prova e demonstração em Balacheff (2000)



Fonte: Diagrama inspirado em Balacheff (2000)

Pelas definições de Balacheff (2000), a prova e a demonstração se constituem como explicações. No entanto, elas são dedicadas a uma comunidade em específico. Por esse motivo, a nossa representação acima inclui a demonstração como subconjunto da prova, que é um subconjunto da explicação. Quando a comunidade a quem se destina a prova é a de matemáticos profissionais, ela seria moldada por regras bem definidas, assumindo uma forma particular.

As provas e as demonstrações são vistas por Balacheff (2000) como produtos do processo de validação, em que o nível de validação deverá depender do contexto em que o estudante se insere e dos conhecimentos que possui. Nesse sentido, Balacheff (2000) classifica dois tipos de provas que dependem do tipo de ação do estudante: as provas pragmáticas e as intelectuais.

As provas pragmáticas são as que recorrem à ação e à exibição, ou seja, são as validações apoiadas em conhecimentos práticos, em experimentações, figuras, isto é, são aquelas que utilizam os recursos da ação. As provas intelectuais são as provas que não envolvem a ação, se apoiando em formulação e relações entre propriedades, não se sustentando em casos particulares, mas possuindo como objetivo a generalização. Balacheff (2000) defende que, para que os estudantes compreendam o significado e sejam capazes de elaborar uma demonstração, é necessário que eles passem por estes dois níveis.

A transição e evolução das provas pragmáticas para as intelectuais se apoiam nas formas de ação, formulação e validação e passam por diferentes níveis e tipos de provas. Balacheff (2000) distingue, de forma hierárquica, quatro tipos principais de provas pragmáticas e intelectuais que têm um importante lugar na construção da demonstração: o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental. A posição que cada tipo de prova assume dentro da hierarquia é determinada pela generalidade e nível de conceitualização dos conhecimentos que ela exige (BALACHEFF, 2000).

Os dois primeiros tipos, segundo Balacheff (2000), não permitem estabelecer a verdade da afirmativa. A condição de prova destes dois tipos depende de quem a considera como tal. Há uma ruptura entre os dois primeiros e os dois últimos tipos de prova. A transição do exemplo genérico para a experiência mental deve ser marcada pela transição da ação para a ação interiorizada e para a descontextualização, o que mostra o progresso da construção do conhecimento (BALACHEFF, 2000). A seguir apresentaremos os níveis e tipos de provas que compõem as provas pragmáticas e intelectuais[17], acompanhadas de exemplos.

O empirismo ingênuo: consiste em afirmar a veracidade de uma afirmação depois de verificar a validade para alguns casos particulares. É tida como uma das primeiras formas de validação e uma resistente forma de generalização.

Exemplo: prove que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

Solução: após desenhar alguns triângulos, dos mais diversos possíveis, medir os seus ângulos internos e somá-los, verifica-se que realmente a soma é 180º.

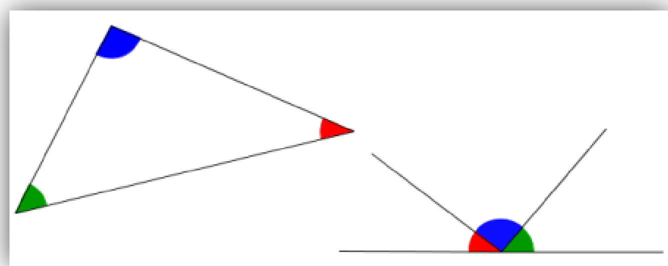
A experiência crucial: consiste em verificar a validade da proposição para um caso especial, geralmente não familiar, no qual se verifica que se a proposição “funciona agora, funcionará sempre”. A distinção do empirismo ingênuo está na busca pela generalização de algo que se conhece pouco.

Exemplo 1: prove que a soma dos ângulos internos de triângulo qualquer é 180º.

Solução: desenhar um triângulo em uma folha de papel, identificar seus ângulos, recortar de forma a separar os ângulos em três figuras, e unir esses ângulos, obtendo assim a soma, um ângulo raso.

[17] Alguns exemplos tiveram inspiração no texto de Luís (2006).

Figura 3 - Ilustração de uma experiência para verificar a soma dos ângulos internos de triângulo qualquer



Exemplo 2: demonstre que o número das diagonais de um polígono de n lados é dado pela fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$.

Solução: o estudante encontra um exemplo, ou seja, um polígono com um número grande de lados e verifica para este caso. Por exemplo, ele desenha um polígono de 10 lados e verifica que o número de diagonais é 35; depois substitui o número de lados na fórmula e percebe que também deu 35. Isso comprova a validade da fórmula.

O exemplo genérico: é a afirmação da verdade da proposição mediante a manipulação de alguns exemplos, de forma a fazê-los adquirir características que representam uma classe de objetos.

Exemplo: demonstre que o número das diagonais de um polígono de n lados é dado pela fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$.

Solução: o estudante parte de um caso; por exemplo, um polígono com 5 vértices. Ele observa que de cada vértice parte duas diagonais. Logo se obtém um total de 10 diagonais. Mas observa também que cada diagonal foi contada duas vezes. Assim, é necessário descontar metade do valor obtido, ou seja, 5 das 10 diagonais. Ele precisa, então, dividir as 10 diagonais por 2. Observar que isso acontece com outros polígonos pode levar o estudante à generalização.

A experiência mental: está centrada na ação, interiorizando e separando-a de sua execução sobre um representante em particular:

> a explicação é depreendida de concretização em representante particular; a argumentação flui através de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação, e não mais através de situações particulares, como no *exemplo genérico* (GRAVINA, 2001, p. 82).

Exemplo: demonstre que a soma de dois números pares é um número par.

Solução: para isso o aluno procede da seguinte forma: afirma que todo número par é múltiplo de 2. Logo assumem a forma, $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Sejam, $2n$ e $2p$, com $n \in \mathbb{Z}$ e

$p \in \mathbb{Z}$ números pares. Logo $2n + 2p = 2(n + p)$. Assim, a soma é múltiplo de 2, e portanto, é par.

Segundo Balacheff (2000), o exemplo genérico se situa na fase intermediária, transitando entre a categoria de prova pragmática e a de prova intelectual, dependendo do tipo de ação que é realizado sobre o exemplo: "ou ação ainda dependente de concretização particular, ou ação que usa a concretização apenas como suporte para expressar raciocínio generalizador" (GRAVINA, 2001, p.82). O último nível, a experiência mental, marca a passagem das provas pragmáticas às intelectuais. Na experiência mental, as ações se dirigem à generalidade, livre de elementos concretos, convergindo para um tipo de explicação definida por demonstração, se transformando nesta quando passa a considerar que não se deve mais procurar por argumentos onde se quer. Para elaborar uma demonstração deve-se reorganizar e utilizar de conhecimentos explicitados e aceitos pela comunidade de matemáticos. Os conhecimentos e argumentos precisam agora partir de definições, teoremas e regras de dedução. Assim, o nível de formalização dos conhecimentos que se utiliza é ponto crucial na demonstração.

Observamos que Balacheff (2000) busca apresentar a prova como alternativa e como um processo importante para que seja possível abordar, mesmo que após um longo processo, a demonstração. Esta é vista como um procedimento abstrato e formal e como um objetivo a ser atingido no ensino e aprendizagem da matemática. Sua ideia de demonstração se assemelha, assim como nas pesquisas já citadas, às demonstrações de *Os Elementos*.

As considerações de Balacheff (2000) são importantes e nos colocam a pensar não somente sobre a demonstração na perspectiva da lógica, mas sobre as diferentes formas de validação nas aulas de matemática. Além disso, nos indicam que a evolução das provas pragmáticas à demonstração formal permite que haja também um “progresso” quanto ao tipo de conhecimento abordado pelas demonstrações, isto é, parte-se um conhecimento falível e social para uma ideia de imutabilidade, generalidade, infalibilidade gerado por esta demonstração. Esse “progresso” quanto aos argumentos utilizados no momento de prova, indica que quanto mais geral ele for mais alta será sua posição na hierarquia dos tipos de provas. Consequentemente uma demonstração formal está no ponto mais alto desta hierarquia, enquanto as provas que se apoiam em argumentos intuitivos e dedutivos, estariam numa posição inferior.

Os tipos de validação citados por Balacheff (200) são discutidos por outros pesquisadores, que não necessariamente utilizam os mesmos termos que ele. As discussões giram em torno de compreender e aceitar ou não procedimentos informais, como o empirismo ingênuo e a experiência crucial, como demonstração para os diferentes níveis do ensino de matemática.

Boavida (2001), quanto a isso, diz que, ao considerarmos a demonstração sob um ponto de vista educativo, o seu papel seria o de promover a compreensão em matemática. Assim, o formato final da demonstração é "a atividade de a produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correcta das ideias matemáticas que estão em jogo" (p. 14). Entendendo dessa forma, o formato da demonstração se subordinaria ao nível de escolaridade e ao contexto a que se destina. Logo, para Boavida (2001), a demonstração em determinado nível de escolaridade pode ser um cálculo, uma apresentação visual, uma discussão pautada na argumentação, uma demonstração informal ou até mesmo aquela que se aproxime das regras restritas de rigor. Dessa maneira, a demonstração se constituiria não somente um procedimento de verificação de uma afirmativa, nos moldes da lógica, por exemplo, mas como algo que convence, explica e possibilita avançar na compreensão. Entretanto, é importante ressaltar que não há consenso quanto a este tipo de validação ser uma demonstração.

Também na área da educação matemática temos a pesquisa de Rodrigues (2008; 2010; 2013). No que se refere à demonstração nas salas de aula de matemática, Rodrigues (2013), com base em Balacheff (1991), diz ser importante haver uma "revolução copernicana" (p. 332), no sentido de focalizarmos nas práticas que efetivamente ocorrem em sala de aula de matemática e não no que é desejável que seja feito, e nesse sentido abrirmos os olhos para as formas de validação que vêm sendo mobilizadas nesse ambiente. A pesquisadora apresenta então a ideia de esquemas demonstrativos, que surgiu dessa necessidade de tentar descrever as formas de validação utilizadas pelos estudantes.

Os esquemas demonstrativos são constituídos pela necessidade de obtenção da certeza e da persuasão, desde que ambas ocorram simultaneamente e possuam como característica principal a subjetividade, uma vez que o professor precisa considerar e identificar na relação em sala de aula o conhecimento do estudante ao trabalhar com a demonstração. Segundo Rodrigues (2010), um esquema demonstrativo pode ser classificado em esquema demonstrativo de convicção externa; empíricos; e dedutivos:

> 1. *Esquemas demonstrativos de convicção externa*
> a. *autoritário* (a autoridade pode ser o professor ou o manual escolar)
> b. *ritual* (baseado na aparência do argumento; por exemplo, a existência de duas colunas para provas em geometria)
> c. *simbólico não-referencial* (depende da manipulação simbólica, com símbolos ou manipulação sem sistema potencial de referentes coerentes, aos olhos dos alunos)

> 2. *Esquemas demonstrativos empíricos*[18]
> d. *indutivo* (evidência de exemplos, sendo às vezes unicamente um exemplo)
> e. *perceptivo*
>
> 3. *Esquemas demonstrativos dedutivos*[19]
> f. *transformativo* (possui três características: generalidade, pensamento operacional e inferência lógica; o pensamento operacional é usado quando o indivíduo forma objetivos e subjetivos e tenta antecipar os seus resultados durante o processo)
> g. *axiomático* (além de ser transformativo, inclui a compreensão de que o processo inicia-se a partir de axiomas) (RODRIGUES, 2010, p. 440).

Podemos dizer que estes esquemas incluem diferentes formas de validação que se assemelham ao colocado por Balacheff (2000). Segundo Rodrigues (2008), os esquemas demonstrativos estão relacionados a “perspectiva compreensiva de demonstração”, e incluem diversas formas de se estabelecer a verdade na matemática escolar, que não se restringe aos esquemas demonstrativos dedutivos axiomáticos.

Rodrigues (2010) encara a demonstração como um processo em que os alunos, ao longo dos níveis escolares e por meio da argumentação, vão buscando justificar e defender suas afirmativas, e assim construindo a ideia de demonstração.

A pesquisadora, ao investigar o papel que as funções da demonstração podem assumir no desenvolvimento dos esquemas demonstrativos dos alunos (RODRIGUES, 2010) nas aulas de matemática por meio de atividades investigativas, observa que na fase de conjecturação os estudantes utilizam o segundo tipo de esquema demonstrativo, em que suas conjecturas se apoiam na observação de casos particulares. Essa etapa, segundo Rodrigues (2008), é marcada pelo convencimento dos estudantes quanto à validade de suas hipóteses. Em seguida, os estudantes são motivados a explicar as razões da validade de uma dada propriedade. Essa etapa é marcada pela utilização de esquemas demonstrativos dedutivos “com a única função de explicar por que é verdadeira a conjetura, formulada antes com base em exemplos específicos” (p. 453).

Para a pesquisadora, a função de explicação da demonstração constituiu como

> o motor da atividade matemática dos alunos, fazendo-os evoluir de um patamar mais rudimentar, circunscrito a exemplos particulares, para um patamar de maior sofisticação matemática, alcançando um nível superior de compreensão matemática, sustentada pela fundamentação teórica alusiva a entes matemáticos gerais (RODRIGUES, 2010, p. 453).

[18] Segundo Rodrigues (2008) este esquema demonstrativo se refere às provas pragmáticas na terminologia de Balacheff (1987).
[19] Este esquema demonstrativo se refere às provas intelectuais na terminologia de Balacheff (1987).

Dessa forma, a demonstração, segundo Rodrigues (2010), ultrapassa a função de verificação para a de explicação e de compreensão.

Quando não havia a fase de conjecturação, Rodrigues (2010) observou o uso de esquemas demonstrativos dedutivos por parte dos estudantes a fim de descobrir a solução dos problemas. Desconhecendo a propriedade a ser descoberta e demonstrada, os estudantes passaram a lidar com objetos matemáticos gerais. Assim, nesta situação, a função de descoberta foi o que motivou a demonstração, levando os estudantes a utilizarem os esquemas demonstrativos dedutivos com várias funções como: “descoberta, verificação, explicação e comunicação” (p. 454).

Podemos observar, portanto, que Rodrigues (2010) busca articular os esquemas demonstrativos ou diferentes formas de validação com as funções da demonstração (VILLIERS, 2001). Procura assim contestar a ideia generalizada, restrita e predominante na matemática acadêmica, de que a função da demonstração é a de verificação e convencimento. Essa constatação é importante para esta pesquisa por dois motivos: em primeiro lugar, porque amplia o sentido da demonstração, em termos de função deste procedimento na matemática escolar, e em segundo, nos mostra que apesar de indicar a necessidade de uma “revolução copernicana”, Rodrigues (2013) ainda valoriza, na matemática escolar, o esquema demonstrativo dedutivo, que não surgiu naturalmente pelos estudantes, mas foi estimulada pelo professor de matemática.

Outro tema também presente nas discussões sobre demonstração na educação matemática se refere à relação entre a argumentação e o processo de aprendizagem da demonstração. É importante relembrar que estamos falando em argumentação como um conjunto de ponderações utilizadas para se verificar e convencer a outrem. Há autores (RODRIGUES, 2010; PAIS (2006), etc.) que são a favor do trabalho com argumentação e outros (BALACHEFF, 1991; PERELMAN apud RODRIGUES (2010), etc.) a veem como um obstáculo epistemológico para a aprendizagem da demonstração, uma vez que a argumentação é um processo social aberto enquanto a demonstração obedece a regras predefinidas. É importante então entender as similaridades e divergências que há entre a argumentação e o processo de demonstração.

Balacheff (1991) entende que a argumentação e a demonstração são de naturezas diferentes, pois a primeira se refere ao estabelecimento de acordo entre parceiros e não necessariamente estabelece a verdade. Para ele a argumentação é um obstáculo ao aprendizado da demonstração uma vez que entra em conflito com esta, pois a demonstração tem relação com um sistema de axiomas e isso não se dá necessariamente com a argumentação. Na argumentação há liberdade de escolha sobre que forma utilizar para convencer.

Rodrigues (2010) cita alguns filósofos, como Perelman, que concebem a argumentação distinta e até oposta à demonstração. Para ele a demonstração está associada à lógica formal, sendo impessoal e isolada de todo o contexto. Para ser válida, ela não depende da opinião e nem da adesão de um auditório. A argumentação, segundo Rodrigues (2010), que cita Perelman, é pessoal e situada, visando à adesão e a persuasão. Sobre a linguagem utilizada pela argumentação, é natural que ela possa ser ambígua e pouco precisa, o que não acontece com a demonstração, que utiliza da linguagem artificial, não dando espaço para diferentes interpretações. Rodrigues (2010), em contraposição à Perelman, encara a demonstração como um caso particular de argumentação, que possui uma especificidade própria.

Em contraposição à Balacheff (1991), Pais (2006) considera que a argumentação deve ser objetivo de ensino de matemática e assim relaciona argumentação e demonstração formal. Ele diferencia a argumentação didática da argumentação científica, em que a argumentação didática seriam as estratégias (dobradura de papel, desenhos, medições, etc.) utilizadas para levar o estudante a compreender a validade de um enunciado. A demonstração é uma argumentação que está na dimensão científica, e se caracteriza pelos encadeamentos lógicos. Para Pais (2006), a demonstração é um tipo de argumento que deve estar presente na escola a partir do 8º Ano.

A nosso ver, a ideia de argumentação didática e científica é de mesma natureza que os tipos e níveis de prova de Balacheff. No entanto, Balacheff (2000) vai além, subdividindo estas argumentações didáticas em etapas, com diferentes níveis de formalidade e rigor, comparando-as hierarquicamente.

Segundo Pais (2006), argumentar com base na observação e na constatação de casos particulares não é um tipo de raciocínio aceito pela comunidade matemática, pois nem sempre se chega a um resultado verdadeiro. Este tipo de raciocínio se chama indutivo e serve, conforme o autor diz, para conjecturar, ou seja, não demonstra nenhuma afirmação. No entanto, Pais (2006) aponta que devemos observar no que se refere às demonstrações e argumentações, o que aproxima e o que distancia a prática científica da prática escolar, para não priorizar a utilização de demonstrações típicas da lógica e excluir as demonstrações do ensino:

> No contexto didático, o desafio é perceber a proximidade e a distância entre a argumentação circunscrita ao território das ciências e aquela pertinente à educação escolar. Como existem conexões e diferenças entre os saberes escolar e científico,

> não se trata de priorizar, no contexto escolar, a utilização das demonstrações típicas de argumentação lógica da Matemática. A atitude extrema consiste em um engano da mesma natureza, ou seja, excluir as demonstrações do ensino seria negar uma parte considerável da especificidade desse saber escolar (PAIS, 2006, p. 55).

A tentativa de Pais (2006) é de reforçar a diversidade nos tipos de argumentos que levem o estudante a desenvolver e expressar seu pensamento lógico de outras formas, como através das verificações de casos particulares, dos desenhos, das comprovações experimentais, dentre outros.

Podemos, ainda dentro da educação matemática, citar duas pesquisas (GARNICA, 1995; 1996; 2002; PIETROPAOLO, 2005) que trazem contribuições para que compreendamos o significado da demonstração na formação de professores.

Garnica (1995), ao buscar o significado da prova rigorosa (ou demonstração formal) na formação de professores, mostra-nos que ela é vista como elemento fundamental. No entanto, essa importância admite duas leituras distintas classificadas pelo autor como leitura crítica e leitura técnica. Segundo ele,

> os campos técnico e crítico apresentavam concepções divergentes sobre verdade (em particular, a verdade matemática) e sobre os terrenos nos quais poderiam ser situadas essas duas distintas leituras: a técnica no da produção científica de Matemática e a crítica no da Educação Matemática (GARNICA, 2002, p. 3)

Segundo Garnica (1995), "pelo viés da leitura técnica prova é prova rigorosa" (p.199). Trabalhar a partir desta afirmação é partir do pressuposto de que a função da prova é validar o conhecimento que ela gera, garantindo-a pelo rigor que emprega. Já a leitura crítica propõe o questionamento, "foca a prova em seus relativismos, expondo-a" (GARNICA, 1996, p. 22). Outras formas de rigor passam a ser aceitas e outras normas de conduta, além da formal, passam a ser tidas como válidas. No entanto, para o autor, na formação de professores todos os aspectos da prova precisam ser levantados, inclusive os da proposta técnica.

Cada uma das leituras é modelada em concepções diferenciadas: "A leitura técnica funda-se na prática científica da matemática, enquanto a crítica se estabelece como ponto de vista a ser defendido pela educação matemática" (GARNICA, 1996, p. 26). No entanto, cada uma delas carrega consigo visões divergentes no que se refere às características que permeiam o trabalho com a prova rigorosa, incluindo aí o que é tomado por conceito de prova, de como ela é validada e de como veiculá-la em sala de aula.

Garnica (2002) considera a prova rigorosa (ou demonstração formal) como uma das formas de argumentação sobre o objeto matemático. E esse ponto é importante para as discussões do tema demonstração em educação matemática. Para isso, o autor concebe a matemática acadêmica como uma dentre as matemáticas (etnomatemáticas) que existem:

> Disso, as classificações das formas de argumentação poderiam ser revistas, não se constituindo mais o formal/semi-formal/não-formal em oposições tão definitivas. Por agora, entretanto, afirmo que (a) o estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas (GARNICA, 2002, p. 6).

Dessa forma, segundo o autor, passa-se a falar em diferentes formas de argumentação que coexistem em sala de aula, diferentemente do que se tem na matemática acadêmica, ou seja, uma matemática em que o modo de argumentação é a prova rigorosa. Assim, a proposta de Garnica (2002) é a relativização das posições hegemônicas sobre a demonstração e o estudo da forma de sua utilização em salas de aula.

Na perspectiva de Garnica (2002), a educação matemática concebe a matemática acadêmica como uma das matemáticas existentes, que atribui significados que são mais amplos que o da matemática acadêmica:

> Constitui-se, portanto, um outro regime de verdade, o da Educação Matemática, no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas, nesse regime, como etnoargumentações) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional (p. 8).

Garnica (1995) conclui em seu trabalho que a prova rigorosa é um elemento importante para se entender a prática científica da Matemática e também o é na formação de professores; no entanto, ela deve ser entendida não como um mero recurso técnico, mas de uma forma que aborde a leitura crítica e possibilite "uma visada panorâmica aos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais" (p. 3).

Partindo das considerações de Garnica (2002) sobre a relativização do uso das demonstrações nas diferentes etnomatemáticas, e tendo em mente que a sala de aula se constitui em uma delas, o entendemos como uma possibilidade de ampliar o significado do tema no âmbito da Educação Matemática. Assim, não se trata de discutir o que é formal ou não, mas de conhecer e compreender as diferentes formas de argumentação presentes em sala de aula.

Pietropaolo (2005) procura discutir a necessidade de (re) significar as provas nos currículos de matemática dos ensinos fundamental e médio e das licenciaturas em matemática. Na pesquisa, ele considera os professores da educação básica e pesquisadores da área da educação matemática e investiga o que eles pensam sobre a demonstração. Além disso, o autor buscou diferentes pontos de vista sobre o tema demonstração, por meio de pesquisas bibliográficas e documentais, além de entrevistas com pesquisadores em educação matemática e professores da educação básica.

Pietropaolo (2005) destaca que os sujeitos de sua pesquisa são favoráveis à inclusão de demonstrações nas aulas de matemática desde o ensino fundamental, mas condicionam esta inclusão a uma nova compreensão de demonstração, não no sentido dado pela matemática acadêmica, mas com significado mais alargado. A demonstração é relacionada ao convencimento e à explicação. Assim, a pesquisa de Pietropaolo (2005) indicou, dentre outros aspectos, que o trabalho com provas na matemática escolar precisa ter diferentes finalidades, não tendo necessariamente o mesmo rigor da matemática acadêmica:

> a prova deve fazer parte da formação dos alunos da Educação Básica, desde que o significado a ela atribuído seja ampliado e que se caracterize por um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não com o sentido formalista. (...) No entanto, essa concepção não significa que não se possa discutir com os alunos algumas demonstrações rigorosas (PIETROPAOLO, 2005, p. 212).

Garnica (1995) e Pietropaolo (2005) trazem elementos importantes e que contribuem para justificar nossa abordagem nesta pesquisa. Os autores mostram que o significado da demonstração na matemática escolar não se reduz ao da lógica e falam em produção de formas alternativas de argumentação, diferentemente do pressuposto da matemática acadêmica, ou seja, uma matemática em que o modo de argumentação é a prova rigorosa. Assumimos essas ideias como uma tentativa de desnaturalizar e problematizar a demonstração nas escolas. Além disso, compreendemos suas elaborações como uma forma de questionar e subverter alguns símbolos por trás das demonstrações, pois, ao falar em ampliar a ideia de demonstração na escola considerando formas alternativas que cumpririam este mesmo papel, passa-se a questionar o símbolo de “necessário” da demonstração, daquilo que não pode ser de outra forma, bem como amplia a possibilidade de se abordar em sala de aula outra maneira de pensar, que não somente a lógico-dedutiva.

Hanna (1990) tece suas considerações em torno da prova formal, a prova aceitável e o ensino de prova. Vale ressaltar que a autora não diferencia prova e demonstração. A prova formal é vista nos moldes da lógica, ou seja, como um conceito teórico da lógica formal, do qual a prática matemática apenas se aproxima. A prova aceitável é um conceito normativo que diz o que é aceitável para matemáticos qualificados. Assim, as provas passam a ter diferentes graus de validade formal possuindo o mesmo grau de aceitação. Nesse contexto, a aceitação de um teorema é um processo social, que está mais atrelado à compreensão e ao significado da demonstração do que propriamente a demonstração.

Segundo Hanna (1990), as pesquisas têm colocado mais ênfase no conceito de prova como um argumento convincente, procurando diferentes maneiras de se demonstrar em sala de aula, que não sejam somente pela prova formal. Esse fato motivou uma série de estudos, que, conforme a autora, se restringem ao argumento válido, se esquecendo da necessidade de que ele seja válido e explicativo, uma vez que se destina ao ensino de matemática. Assim, a autora introduz e diferencia provas que provam e provas que explicam. É importante ressaltar que Hanna usa a palavra “explicar” somente quando a prova se revela e faz uso de ideias matemáticas que as justificam.

Para Hanna (1990), uma prova que prova e uma que explica são ambas legítimas, servindo para estabelecer a validade de uma afirmação matemática, não sendo necessariamente diferentes em grau de rigor. A diferença entre ambas está no fato de que a primeira somente mostra que é verdadeiro, enquanto a segunda mostra por que é verdadeiro. A prova que explica deve fornecer uma justificativa baseada nas ideias matemáticas envolvidas, propriedades que fazem com que o teorema afirmado seja verdadeiro (HANNA, 1990). O foco da prova que explica está no entendimento e não na dedução.

Com as considerações de Hanna (1990), vemos três ideias sobre a demonstração. A primeira é a prova formal, conforme a definição dada pela lógica clássica, que será abordada adiante. Para a autora, a prática de demonstrar apenas se aproxima desta ideia. Assim, esta definição de demonstração não corresponde ao que é feito na prática: há modificações e, portanto, diferentes usos. Já a prova aceitável, que é dependente de matemáticos para avaliá-la, terá relação ao significado que estes atribuem ao que é demonstrar, que pode não ter um significado único. No que se refere ao ensino de prova, temos também modificações, uma vez que ela passa a estar atrelada ao argumento convincente, ou seja, às maneiras alternativas de se demonstrar. Com isso, podemos observar uma ampliação da ideia de demonstração, pois, ao dizer que no seu desenvolvimento o que é feito apenas se aproxima da definição e que a sua aceitação depende de matemáticos qualificados, a ideia de neutralidade e pureza da demonstração se mostra abalada, e torna o conhecimento matemático algo social e com interferências humanas.

No que se refere às pesquisas que analisam a demonstração nos livros didáticos, podemos citar as de Carlovich (2005), Rama (2005) e Martins (2012).

Carlovich (2005) discute em sua pesquisa o ensino de geometria dedutiva nos livros didáticos dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Para isso, seleciona os livros didáticos mais utilizados em escolas públicas do estado de São Paulo, em dois períodos: no início de 1990 e 2000. Buscou identificar como as coleções abordam a geometria dedutiva e quais as diferenças nesses dois períodos.

Carlovich (2005) percebe nas coleções de 1990 uma tendência para o ensino de geometria nesta época: a intenção de romper com a apresentação no estilo euclidiano, que fora usado em tempos anteriores, e uma ênfase menos formal, voltada para aplicações práticas. Nas coleções de 2000, percebeu uma mudança, pois, além de exercícios de aplicação, são solicitadas validações empíricas e dedutivas. Assim, Carlovich (2005) observa um equilíbrio entre estes dois tipos de validação, o que para ela se constitui em um risco à geometria dedutiva. Além disso, vale ressaltar que a autora observa a predominância da demonstração somente na última série do 4º ciclo, atual 9º ano. Nas demais séries, as verificações empíricas se fazem mais presentes.

Rama (2005) analisou três coleções de livros didáticos e um dos seus objetivos foi verificar como os autores de tais livros abordaram os números inteiros, destacando, dentre outros aspectos, as estratégias para a demonstração referente ao assunto. Em seu trabalho, o autor diz que a demonstração pode ser apresentada na matemática escolar de diferentes maneiras, sendo que o "julgamento sobre a validação do resultado obtido, em função da forma escolhida, não pode desconsiderar a maturidade do público que se espera convencer" (RAMA, 2005, p. 98). Na perspectiva de Rama (2005), as provas apresentadas na Educação Básica não carecem do rigor formal que caracteriza a matemática acadêmica, podendo esse rigor ser compensado com a utilização de argumentos adequados sobre casos particulares, de desenhos, da observação de regularidades, dentre outros, recorrendo quando necessário a mais de uma dessas estratégias.

Martins (2012) desenvolveu um estudo no qual buscava compreender a abordagem da prova e da demonstração de conteúdos geométricos presentes em livros didáticos do 6° ao 9° ano. Martins (2012) também observa que não há um consenso entre os pesquisadores da educação matemática sobre o significado com que usam os termos "prova", "demonstração" e "argumentação". Não há também um consenso sobre de que maneira este tema deve ser desenvolvido nas aulas de matemática. A pesquisadora é da opinião de que a simples apresentação de demonstrações nos livros didáticos, sem que se levem os estudantes a pensarem sobre o processo de desenvolvimento de uma demonstração, provavelmente não terá muito sucesso. Ela sugere que, desde o ensino fundamental, os estudantes comecem a se familiarizar com diferentes tipos de validação, para que no Ensino Médio atinjam competências que os permitam desenvolver uma demonstração.

Martins (2012) observa que, em geral, os autores de livros didáticos mesclam validações empíricas e dedutivas para validar teoremas e propriedades: alguns introduzem conteúdos com atividades de natureza exploratório-investigativa; outros apresentam demonstrações formais e outros desenvolvem experiências para depois concluírem com uma demonstração formal. A autora emite sua opinião quanto ao tipo de demonstrações que encontrou, destacando que algumas propriedades poderiam ser demonstradas com mais rigor matemático, mas assume que esse rigor poderia ser visto pelos estudantes apenas como complicação.

Nossa pesquisa se insere na temática das demonstrações, assumindo-as como formas simbólicas em que procuramos observar o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações escolares em livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática. Dessa forma, é importante, em um primeiro momento, conhecermos pesquisas sobre o tema, a fim de compreendermos as diferentes ideias e abordagens quanto à esse assunto.

Na revisão da bibliografia realizada, procuramos compreender como é discutida e vista a demonstração por diferentes pesquisadores. Vimos pesquisas em que se discutem a demonstração quanto aos aspectos do ensino e aprendizagem, à formação de professores e à presença da demonstração nos livros didáticos. Além disso, apresentamos autores que discutem a demonstração no âmbito da matemática acadêmica.

As pesquisas mostraram diferentes compreensões de demonstração: formal, não formal, explicativa, como forma de convencimento, com figuras, dentre outros. Acreditamos que essas compreensões estão sendo levantadas pelos autores de livros didáticos que consideraremos em nossa pesquisa, sendo que procuraremos identificá-las no momento de nossa análise.

Foi observado ainda que, entre as pesquisas apresentadas, poucas reconhecem ou explicitam as especificidades da matemática escolar e acadêmica. Apesar disso, há tentativas de apresentar alternativas quanto à demonstração na matemática escolar. Dentre elas podemos citar a minimização do rigor das demonstrações, o ensino gradativo da demonstração, considerando outras formas de validação e a ideia de demonstração como um processo que requer intuição, provas, argumentações e justificações. Entretanto, vemos que as alternativas ou as diferentes formas de validação, empíricas e dedutivas, têm como referência frequente a demonstração nos moldes da lógica e possui uma intencionalidade, isto é, um objetivo, que é contribuir para uma posterior compreensão, por parte dos estudantes, do que é a demonstração formal.

Acreditamos que propor diferentes formas de lidar com as demonstrações na matemática escolar pode contribuir para desestabilizar e desnaturalizar as formas reinantes de raciocínio presente nesta matemática. Entretanto, apesar de indicar diferentes formas de proceder para se validar afirmativas matemáticas, os autores acabam mantendo estável, intacta e sem questionamento a ideia de demonstração formal, que é a forma de validação da matemática acadêmica. Assim, mesmo falando em diferentes formas de validação, vemos que permanece uma referência de demonstração e privilegia-se um modo de pensar que é rigoroso e lógico-dedutivo.

Além disso, ao apresentarmos a multiplicidade de olhares acerca da questão de demonstrações na matemática escolar e acadêmica, pudemos perceber como seus significados se modificam de acordo com o contexto de uso. Inclusive, os livros didáticos representam um dentre os contextos possíveis e foram eleitos por nós para identificarmos como se caracterizam as demonstrações escolares nos diferentes níveis.

Ao percorrer as diferentes ideias sobre as demonstrações, passamos a vislumbrar outras formas de encarar esse procedimento na matemática escolar, ou seja, a entender melhor sobre as diferentes alternativas para o trabalho com demonstrações, o que contribui para ampliarmos o significado das demonstrações nas aulas de matemática da escola e também os seus significados no âmbito da Educação Matemática. E nesse sentido podemos levantar o seguinte questionamento: Destas definições e entendimentos sobre as demonstrações, quais estão presentes nos livros didáticos? Como elas vêm sendo abordadas nos livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática?

É importante ressaltar que, ao buscarmos a caracterização das demonstrações escolares nos livros didáticos, nos distanciaremos em alguns aspectos das pesquisas apresentadas, pois não objetivamos procurar nos livros por uma ideia de demonstração, que é a mais tradicional e que se autodenominam demonstração, ou seja, não direcionaremos o nosso olhar somente na procura de demonstrações da matemática acadêmica na matemática escolar, mas partiremos de uma perspectiva ampla considerando diferentes formas de validação, com níveis de formalidade e rigor variáveis, como formas de se demonstrar na matemática escolar. Nesse contexto, buscaremos observar por meio da caracterização das demonstrações escolares o seu papel simbólico.

Pretendemos ainda discutir as especificidades da demonstração no âmbito da matemática acadêmica e escolar, e a partir dessa explanação nos posicionar e nos fundamentar quanto à forma que estamos encarando as demonstrações em nossa pesquisa.

CAPÍTULO 1

CAMINHOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

A presente pesquisa possui natureza qualitativa. A pesquisa qualitativa preocupa-se com a compreensão ou interpretação de fenômeno social (SANTOS FILHOS, 2007). Assim, nesta modalidade, o termo pesquisa passa a ser entendido como uma trajetória em torno do que se deseja compreender, "não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador" (GARNICA, 1995, p. 103). Nesse sentido, se exclui a neutralidade do pesquisador, uma vez que será ele quem atribuirá significados, selecionará e interagirá com o que quer conhecer.

Os caminhos metodológicos desta investigação tiveram inspiração[20] na Hermenêutica de Profundidade (HP), que é um referencial metodológico desenvolvido por John B. Thompson, no livro "Ideologia e cultura moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa" (1999), para a interpretação das formas simbólicas. Nesta obra, mais especificamente no capítulo VI, o autor apresenta um método de análise de formas simbólicas inseridas em discursos dos meios de comunicação de massas. Apesar de não estarmos lidando com meios de comunicação de massas, consideramos que alguns aspectos da metodologia da HP, como a possibilidade de relacionar elementos internos da forma simbólica com seu contexto de produção e recepção, são apropriados ao nosso objetivo com este trabalho e nos permite elaborar uma compreensão plausível acerca das demonstrações.

1.1. O referencial metodológico da Hermenêutica de Profundidade: inspiração para os caminhos da pesquisa

A HP é "um referencial metodológico geral para análise de fenômenos culturais, isto é, para a análise das formas simbólicas em contextos estruturados" (THOMPSON, 1999, p. 33).

Assumimos neste trabalho as demonstrações como formas simbólicas, que são entendidas como qualquer tipo de construção significativa, como, por exemplo, textos e

[20] A HP compreende diversas fases que requer profundidade. Adotar a HP exige, portanto, um aprofundamento teórico do contexto sócio-histórico das formas simbólicas que dificilmente seria comportada num curto espaço de dois anos de mestrado. Por esse motivo, considerando a potencialidade da metodologia da HP e da consciência da profundidade exigida por ela, optamos em nos inspirar na HP não a executando, portanto, em todas as suas etapas.

imagens que possuam diferenças dos objetos naturais, pois se caracterizam pela intenção de quem os emite (THOMPSON, 1999). Elas fazem parte de contextos sócio-históricos, dentro dos quais e por meio dos quais elas são mobilizadas.

O referencial metodológico, HP, articula diferentes fases e práticas que são convenientes às pesquisas em Educação Matemática, pois contribuem para que a análise dos livros didáticos vá além da mera descrição, nos fazendo olhar para sua estrutura interna e para o contexto de produção e transmissão da forma simbólica, que no caso da presente pesquisa é a demonstração.

A HP inicia-se com a hermenêutica do cotidiano[21], "isto é, de como as formas simbólicas são interpretadas e compreendidas no cotidiano, pelo senso comum" (CARDOSO, 2009) e prossegue em três fases: a análise sócio-histórica, a análise formal ou discursiva e a interpretação e re-interpretação. Para Thompson (1999), estas fases não devem ser vistas de forma linear e independente umas das outras e podem ser adaptadas pelo pesquisador de acordo com seu objeto de análise. Assim, elas devem ser compreendidas nos caminhos da investigação.

A primeira fase da HP é a análise sócio-histórica. Esta etapa possui como objetivo "reconstruir as condições sociais e históricas de produção circulação e recepção das formas simbólicas" (THOMPSON, 1999, p. 366), sendo importante porque as formas simbólicas não aparecem no vazio, elas são produzidas, transmitidas e recebidas em contextos sócio-históricos específicos. Segundo Garnica e Oliveira (2008), reconstruir é construir novamente, mas pode-se reconstruir de outro modo, com uma nova criação. Por esse motivo, o momento da análise sócio-histórica pode compreender diversas (re)construções e ter, entre estas, diferenças e semelhanças (ANDRADE, 2012).

A maneira como abordar essa etapa varia de um estudo para outro, mas Thompson (1999) apresenta alguns tipos de condições que podem ser relevantes, sendo eles: situações espaço-temporais; campos de interação; instituições sociais; estrutura social e meios técnicos de transmissão. Ao realizar a análise sócio-histórica, acabamos por esbarrar e abordar estes diferentes tipos de condições; no entanto, dentre esses tipos, focaremos principalmente nos meios técnicos de transmissão, pois com esta pesquisa buscamos em um primeiro momento compreender o que caracteriza as demonstrações escolares nos livros didáticos, ou seja, almejamos compreender as demonstrações em um material específico, os livros

---

[21] Na presente pesquisa esta etapa não fora realizada.

didáticos. Assumiremos, portanto, os livros didáticos, os PCN e os guias do PNLD como meios técnicos de transmissão.

As formas simbólicas são produzidas e transmitidas, o que supõe um meio de transmissão. “Os meios técnicos conferem às formas simbólicas determinadas características, certo grau de fixidez, certo grau de reprodutibilidade, e certa possibilidade de participação para os sujeitos que empregam o meio” (THOMPSON, 1999, p. 368). Os meios técnicos também estão inseridos em contextos sócio-históricos. Segundo Thompson (1999), estes meios “supõem certas habilidades, regras e recursos para codificar e decodificar mensagens”. Além disso, são muitas vezes desenvolvidos dentro de uma instituição que pode regular, produzir e fazer circular as formas simbólicas. Por esse motivo, Thompson (1999) considera importante a análise sócio-histórica dos meios técnicos de construção de mensagens e de transmissão.

Os livros didáticos, os PCN e os guias do PNLD são documentos em que são refletidas, com maior ou menor fidelidade, ideias educacionais de seu tempo e que podem ter sido influenciadas por reformas e ideias educacionais passadas.

Um exemplo dessa afirmação pode ser vista nos critérios de avaliação das obras para o ensino médio inscritas no edital do PNLD de 2012. Alguns dos critérios eliminatórios comuns são: “(1) respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino médio; (2) observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social Republicano (...)” (BRASIL, 2012, p. 19).

Por recomendação do edital do PNLD do ano de 2012, o livro didático deve estar de acordo com as Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (Lei 9394/96), Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e diversas outras leis, resoluções e estatutos oficiais[22]. Além disso, o edital dá destaque às perspectivas educacionais que estão em evidência desde a publicação dos PCN/99, como por exemplo, a construção da cidadania.

No que se refere às orientações quanto à disciplina matemática, vemos reflexos de diversas ideias educacionais que foram colocadas em pauta em reformas anteriores e que serão abordadas posteriormente, como, por exemplo, a matemática ser associada às aplicações práticas e à especulação, “voltada para problemas gerados no próprio edifício da Matemática

[22] (1) Constituição da República Federativa do Brasil; (2) Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, com as respectivas alterações introduzidas pelas Leis nº 10.639/2003, nº 11.274/2006, nº 11.525/2007 e nº 11.645/2008; (3) Estatuto da Criança e do Adolescente; (4) Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; (5) Resoluções e Pareceres do Conselho Nacional de Educação, em especial, o Parecer CEB nº15, de 04/07/2000, o Parecer CNE/CP nº 003, de 10/03/2004 e a Resolução CNE/CP nº 01 de 17/06/2004.

e que, em muitos casos, revelaram-se fonte de surpreendentes aplicações" (BRASIL, 2012, p. 32).

Assim, podemos dizer que mudanças no ensino de matemática ocorridas no passado influenciaram as novas orientações curriculares e metodológicas e devem ser abordadas nos livros didáticos. Além disso, acreditamos que os autores de livros didáticos fazem uso da demonstração em sua obra considerando não somente suas concepções de educação, mas discussões educacionais e orientações curriculares que foram elaboradas dentro de um contexto sócio-histórico. Por esse motivo é importante, por meio de recortes singulares, compreender algumas reformas educacionais que influenciaram na constituição da matemática que temos hoje; mais especificamente olharemos para o ensino de geometria e a forma como a demonstração passa a ser orientada e modificada dentro dessas reformas. Mais que isso, olharemos também para o que simboliza as demonstrações nesses diferentes momentos. Dessa forma, acreditamos que compreender as mudanças ocorridas pode contribuir para entendermos o sentido das demonstrações nos livros didáticos atuais, ou seja, pode contribuir para compreender o contexto social, político e educacional que influenciou a forma de mobilização da demonstração nos livros didáticos. Optamos, portanto, por desenvolver a primeira etapa da HP realizando uma análise sócio-histórica contextualizando as demonstrações nos livros didáticos.

Segundo Andrade (2012), reconstruir as condições sócio-históricas - em nosso caso, das demonstrações - exige do pesquisador um envolvimento com as tramas da história e suas cercanias. Por esse motivo, nessa etapa traremos inicialmente considerações quanto à demonstração formal, destacando elementos da lógica aristotélica, para posteriormente elaborarmos uma caracterização do método axiomático dedutivo a partir da obra *Os Elementos* e de textos de pesquisadores do tema. Esse movimento se faz necessário pelo tipo de demonstrações presente nessa obra ser uma referência forte de demonstração, além da grande influência que ela exerceu no desenvolvimento da matemática e no ensino da disciplina.

Após apresentarmos alguns aspectos históricos das demonstrações, direcionaremos nosso olhar para o ensino de matemática, buscando, por meio de algumas reformas educacionais ocorridas, a partir da década de 20, olhar como a demonstração passa a ser discutida e permanece no ensino de matemática. Esse recorte se justifica por ser a partir dessa década que algumas reformas educacionais trouxeram mudanças significativas ao ensino de matemática e à produção de livros didáticos. Para desenvolver a etapa de análise histórica, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica, utilizando estudos realizados por pesquisadores como Miorim (1995, 1998), Valente (2004, 2005, 2008, 2011), Carvalho et al. (2000), dentre outros.

Ainda nessa etapa, traremos uma discussão sobre as especificidades da matemática escolar e acadêmica no que se refere à demonstração, tendo como referência Moreira (2004) e Chevallard (1991), em que procuraremos apresentar uma perspectiva de ampliação na forma de conceber as demonstrações na matemática escolar. Por fim, diferentemente do que fizemos num primeiro momento do texto, olhamos para as demonstrações externamente à matemática por meio da sociologia da ciência, procurando elaborar uma compreensão sobre o seu valor simbólico.

Dessa forma, a proposta de Thompson (1999) será considerada nos aspectos pertinentes à presente pesquisa, e assim iremos aprofundar alguns aspectos da demonstração, contextualizando-as nos livros didáticos, observando, por exemplo, as modificações estruturais, metodológicas e simbólicas das demonstrações em diferentes momentos da educação.

A segunda etapa da HP é a análise formal ou discursiva. Segundo Thompson (1999), realizar essa análise é estudar as formas simbólicas como construções complexas que apresentam uma estrutura articulada. É uma fase importante, pois a característica estrutural da forma simbólica diz alguma coisa, significa algo, diz sobre algo:

> Formas simbólicas são os produtos de ações situadas que estão baseadas em regras, recursos, etc., disponíveis ao produtor; mas elas são também algo mais, pois elas são construções simbólicas complexas, através das quais algo é expresso ou dito. Formas simbólicas são produtos contextualizados e algo mais, pois elas são produtos que, em virtude de suas características estruturais, têm capacidade, e têm por objetivo, dizer alguma coisa sobre algo (THOMPSON, 1999, p. 369).

Por esse motivo, é necessário um tipo de análise que se interesse pela organização interna das formas simbólicas. Nesse momento, passa-se a olhar para as suas estruturas, observando como elas funcionam e como se relacionam os elementos que a compõe. Thompson (1999) alerta que esta fase não deve ser feita em separado das condições sócio-históricas.

No caso da presente pesquisa, procuramos nos livros didáticos o entendimento da questão de pesquisa, ou seja, buscamos compreender o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações escolares em livros didáticos, sua importância e papel simbólico. Procuramos entender ainda como as demonstrações são apresentadas no material, em que conteúdos da geometria aparecem, o nível de escolaridade a que são destinadas, menções sobre a demonstração nos manuais para o professor, as ilustrações, as informações adicionais e curiosidades, ou seja, consideramos os aspectos que compõem os livros didáticos analisados que nos auxiliariam na compreensão da demonstração presente neles.

Para esta etapa da HP, é necessária uma metodologia de análise dos dados que nos possibilite ver estas estruturas. Assim como na análise sócio-histórica, existem muitas maneiras de realizar esta etapa, que varia de acordo com o objeto e com as circunstâncias da investigação (THOMPSON, 1999).

Optamos em nos inspirar na análise de conteúdo, que é um procedimento utilizado para se observar o que está por trás de uma mensagem, que pode ser "verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada" (FRANCO, 2008, p. 19). Quanto a isso, são necessários esclarecimentos, pois, em um primeiro momento, ao caracterizar brevemente a análise de conteúdo, temos a ideia da busca por uma essência, de um significado único por trás da mensagem emitida pelos livros didáticos. Entretanto, nossa análise ultrapassa essa ideia, em que realizaremos interpretações, que podem ser múltiplas, quanto a forma simbólica e buscaremos olhar para o que simboliza as demonstrações escolares nos livros didáticos. Desta forma, a análise de conteúdo se constituirá como uma metodologia de pesquisa utilizada para interpretar o conteúdo de textos e documentos. Ela se organiza em três pólos: (1) a pré-análise; (2) a exploração do material e (3) no tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação (BARDIN, 1977, p. 95).

Segundo Bardin (1977, p. 95), a pré-análise é o momento de organização dos documentos, em que se possuem três missões que não se sucedem necessariamente, mas estão interligadas: "a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final". Esta primeira etapa inicia-se com a leitura flutuante, por meio da qual o pesquisador, em diversas leituras, estabelece idas e vindas ao documento selecionado e às suas próprias anotações, se deixando impregnar pelos dados, sem se preocupar em produzir análise e inferências sobre eles. Aos poucos as leituras se tornam mais precisas.

Demarcado o "universo" de documentos, precisamos constituir o "corpus", que é definido da seguinte forma por Bardin (1977, p. 96): "é o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos". Na pesquisa, primeiramente selecionamos todos os capítulos de temáticas envolvendo a geometria plana e espacial dos livros didáticos que seriam analisados e que foram devidamente selecionados. Nestes capítulos selecionados, destacamos todos os procedimentos de validação – que são diferentes formas de se estabelecer a veracidade de uma afirmativa e de convencer a outrem - podendo ser baseados na experiência - conhecimentos adquiridos por prática, observação e tentativas -

ou na dedução, encontrados em tarefas, exercícios resolvidos, desafios e teoria. Estes constituíram o "corpus" desta pesquisa.

Buscamos, após a delimitação do "corpus", identificar nos livros didáticos os modos como os autores sugerem que uma argumentação ou validação seja conduzida, como eles as mobiliza e as utiliza. Para isso, utilizamos um roteiro de análise, que será apresentado no tópico seguinte, para a exploração do material (FRANCO, 2008). Este é o momento para desmembrarmos o texto em temas[23], no caso desta pesquisa, e reorganizá-las em categorias para uma posterior análise. O tema é "uma afirmação acerca de um assunto. Quer dizer, uma frase, ou uma frase composta, habitualmente um resumo ou uma frase condensada, por influência da qual pode ser afectado um vasto conjunto de formulações singulares" (BARDIN, 1977, p. 105).

Ao apresentar as análises dos livros didáticos, teceremos com maiores detalhes considerações quanto à análise de conteúdo e à forma como ela foi utilizada na etapa de análise formal.

Como terceira etapa da HP, tem-se a fase de interpretação/reinterpretação. Segundo Garnica e Oliveira (2008), este é o momento da reflexão sobre os dados construídos, relacionando contextos e elementos das outras fases de maneira a construir significado à forma simbólica.

O processo de interpretação, segundo Thompson (1999), é facilitado pelos métodos de análise formal, mas se diferencia dela. Enquanto a análise formal procura quebrar, desconstruir, dividir, desvelar os padrões que constituem e agem dentro de uma forma simbólica, a interpretação constrói sobre esta análise e sobre os resultados da análise sócio-histórica. Essa criação, segundo o autor, é uma "construção criativa de significados" (THOMPSON, 1999, p. 375), ou seja, uma explicação interpretativa do que é visto ou dito na forma simbólica. O processo de interpretação é, para Thompson (1999), também um processo de reinterpretação: "as formas simbólicas que são o objeto de interpretação são parte de um campo pré-interpretado, elas já são interpretadas pelos sujeitos que constituem o mundo sócio-histórico" (THOMPSON, 1999, p. 376).

O que Thompson (1999) sugere como reinterpretação será feito no decorrer da pesquisa, permeando todo o texto. Neste momento buscaremos interpretar resultados obtidos com as fases de análise sócio-histórica e formal, pois, "o texto da interpretação/reinterpretação nada é sem os textos das análises "anteriores", e as análises

[23] Em nosso caso, os temas serão constituídos por recortes de frases dos livros didáticos que fazem parte da demonstração.

"anteriores" se complementam, se entrelaçam, são sintetizadas, ganham força e coesão no texto da interpretação/reinterpretação" (ANDRADE, 2012, p. 266).

1.2. A pesquisa documental e a constituição dos documentos para análise

A forma de constituição dos dados, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 98), "deve estar de acordo com a natureza do problema ou questão de investigação e dos objetivos de pesquisa". Desta forma, optamos pela pesquisa documental.

A pesquisa documental no âmbito da educação, segundo Silva *et al* (2009), é "uma "visita" que o pesquisador faz a documentos que tenham significado para a organização da educação ou do ensino, com o objetivo de empreender uma análise, em geral crítica, das propostas em questão" (SILVA *ET AL*, 2009, p. 32). O documento se constitui em uma fonte importante para todo pesquisador em ciências sociais e humanas. A grande variedade de informações que podemos extrair de documentos justifica seu uso em pesquisas nas ciências humanas, uma vez que "possibilita ampliar o entendimento de objetos cuja compreensão necessita de contextualização histórica e sociocultural" (SILVA *ET AL*, 2009, p. 2).

Estabelecemos critérios para a seleção dos livros didáticos de matemática e documentos que seriam considerados na pesquisa. Estes critérios foram estabelecidos visando atender nossa questão de pesquisa, ou seja, abranger diferentes níveis do ensino de matemática.

Uma primeira escolha se deu quanto aos níveis a serem considerados: anos finais do ensino fundamental e médio, por nesses níveis estar presente o procedimento da demonstração. Uma segunda escolha foi quanto às coleções de livros didáticos. Optamos pelos livros didáticos que foram avaliados e aprovados pelo PNLD e que foram distribuídos nas escolas públicas. A seleção dos guias do PNLD e das orientações curriculares que fariam parte da análise estaria condicionada às coleções que fossem obtidas.

Foi selecionado um total de 6 coleções de livros didáticos sendo, 3 destinadas aos anos finais do ensino fundamental em que cada uma delas contém 4 volumes e 3 ao ensino médio, com 3 volumes cada uma. Analisamos, portanto, um total de 21 livros didáticos, listados a seguir:

Tabela 1- Livros didáticos selecionados para a pesquisa

Ano de aprovação no PNLD	Referências bibliográficas das coleções	Nível escolar
2008	PROJETO ARARIBÁ. **Matemática.**1.ed. São Paulo: Moderna, 2006.	5ª a 8ª série do Ensino Fundamental
2011	GIOVANNI JUNIOR, J. R; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.	6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental
	IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.	
2012	DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.	1º ao 3º ano do Ensino Médio
	SOUZA, J. **Novo olhar matemática**. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010	
	PAIVA, M. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.	

A partir das coleções coletadas, selecionamos e organizamos os documentos oficiais que fariam parte da análise na pesquisa, sendo estes: os PCN de matemática para o Ensino Fundamental (PCN/1998); os PCN do Ensino Médio (PCNEM/99) para a matemática e as publicações posteriores PCNEM+/02 e Orientações Curriculares/06 para matemática e os guias do PNLD (2008, 2011, 2012) referentes à avaliação e à aprovação das coleções consideradas na pesquisa.

Olharemos para o movimento da demonstração nos livros didáticos, ou seja, para a sua utilização, estrutura e mobilização pelos autores. O foco da pesquisa é a demonstração nos diferentes níveis e não na obra didática em si. Dessa forma, não é objetivo nosso, apesar de considerarmos importante, contextualizar os autores dos livros didáticos utilizados.

Para a constituição dos documentos e para guiar nosso olhar para os livros didáticos selecionados, formulamos um roteiro de análise composto por questões que nos permitiram observar a utilização da demonstração nos livros didáticos. Este roteiro foi formulado a partir da revisão da bibliografia, dos estudos sobre o papel da demonstração no conhecimento matemático formal e com base na ficha de avaliação presente nos guias do PNLD. O foco central da análise são as demonstrações presentes na seção de geometria. Desta forma, o roteiro nos permitiu observar além de como são utilizadas as demonstrações, as razões para seu emprego, as etapas e os procedimentos lógicos envolvidos. Seguem as questões que compuseram o roteiro, acompanhadas pelas devidas justificativas de seu uso:

- *Que termos são utilizados pelos autores dos livros didáticos para se referir à demonstração escolar?*

Com a questão buscamos identificar, por meio de enunciados de tarefas a serem feitas pelos estudantes e pela exposição do conteúdo presentes nos livros didáticos, quais termos são utilizados para se referir à demonstração escolar. Assim, acreditamos ser possível vislumbrar a qual tipo de procedimento se refere cada termo, ou seja, se, por exemplo, se fala em demonstração ou em constatar empiricamente, qual é e como é o procedimento utilizado.

- *Há a utilização de diferentes formas de demonstrar, ou seja, qual o procedimento utilizado? É lógico-dedutivo, indução, desenhos, dobraduras, argumentos simbólicos ou linguagem corrente? Utiliza-se axiomas?*

Esta questão, de certa forma, vem complementar a anterior. Procuramos, a cada demonstração escolar no decorrer da teoria e dos exercícios propostos, identificar e analisar os diferentes procedimentos utilizados pelos autores, para que possamos entender quando este procedimento é a demonstração formal ou um experimento, bem como outros, como está sendo feito, qual a importância dada a ela, qual seu papel, e assim compreender como as demonstrações escolares estão sendo utilizados pelos autores do livro didático.

- *A demonstração está vinculada a alguma metodologia de ensino, tal como investigação matemática, resolução de problemas, dentre outras?*

Com esta questão, buscamos identificar como e se o autor busca vincular a demonstração aos processos de ensino-aprendizagem.

- *A menção de demonstrar indica que tipo de valores?*

A ideia com este questionamento é identificar valores associados ao procedimento da demonstração nos livros didáticos. Por exemplo, temos muitas vezes associados à demonstração valores de precisão, verdade, progresso, irrefutabilidade, dentre outros. Desta forma, buscaremos ver se as demonstrações presentes nos livros didáticos reproduzem estes ou outros valores.

- *Em que momentos do material e como é aberto espaço para que os estudantes demonstrem? (Exercícios, exposição da teoria, material complementar, etc.).*

Buscamos identificar quais os objetivos que são almejados com a tarefa.

- *Qual o papel da demonstração na seção de geometria? A demonstração é isolada ou vinculada? Com que frequência a demonstração aparece na seção de geometria dos livros didáticos?*

Por fim, buscamos compreender qual a expectativa quanto à aprendizagem da demonstração. Além disso, visamos conhecer a finalidade e a importância dada a este procedimento, ou seja, qual a sua valorização.

Conforme explicitamos no tópico anterior, as formas simbólicas são construções complexas que possuem uma estrutura, que pode nos falar sobre algo. Acreditamos que este conjunto de questões possibilita olharmos para as demonstrações nos livros didáticos, procurando entender este procedimento para além do que está exposto, ou seja, para além do que podemos ver, do que está explícito.

Entretanto, anteriormente a análise interna da forma simbólica, iremos no capítulo 2, discorrer sobre ela a partir da primeira etapa da HP, isto é, da análise sócio-histórica.

CAPÍTULO 2

UMA ABORDAGEM SÓCIO-HISTÓRICA DAS DEMONSTRAÇÕES

Nesta pesquisa, assumimos as demonstrações como formas simbólicas, que seriam criações humanas intencionais. Para a análise da forma simbólica nos inspiramos na HP, que pressupõe três etapas, já mencionadas. Neste capítulo trataremos da primeira etapa que consiste da análise sócio-histórica:

> A análise sócio-histórica (...) decorre dessa necessidade de perceber, em contextos sociais, culturais e históricos situados, em "lugares" e "tempos" específicos, elementos a partir dos quais se criam tanto o conjunto de símbolos quanto as intenções presentes na produção e na apropriação de formas simbólicas. Busca-se produzir interpretações situadas sócio-historicamente que, longe de serem totalizantes, sejam suficientemente plausíveis (ANDRADE, OLIVEIRA, 2014, p. 24).

Thompson (1999) elenca cinco elementos que devem ser considerados na análise sócio-histórica. Deve-se levar em conta o lugar e o tempo em que a forma simbólica foi produzida e recebida. No caso da presente pesquisa, a forma simbólica é a demonstração e estamos considerando como um marco a obra *Os Elementos* de Euclides e a lógica de Aristóteles. Há de se considerar também o espaço de circulação da forma simbólica, além das influências advindas de diferentes segmentos sociais, sendo aqui consideradas as escolas, a mídia, dentre outros. Outro elemento citado é a estrutura social, implicando na identificação e análise das assimetrias e diferenças relacionadas às instituições sociais e campos de interação que produzem e mantém regras que "rege e disciplina o tecido social" (ANDRADE, OLIVEIRA, 2014, p. 29), isto é, podemos considerar o caso de duas instituições sociais que são a matemática escolar e acadêmica e olhar para a demonstração nesses contextos. É importante levar em consideração ainda os meios técnicos de construção e transmissão da forma simbólica, como os livros didáticos e os documentos oficiais.

Inspirada na HP, esta pesquisa buscou abordar alguns desses aspectos, contextualizando a demonstração nos livros didáticos, que foram eleitos como material empírico deste estudo. Dessa forma abordamos aspectos históricos da demonstração, retomando as demonstrações presentes na obra *Os Elementos,* que foi selecionada por ter sido, e ainda ser, uma referência neste tema, tal como apontamos na revisão da bibliografia. E ainda fez-se necessário compreender como esta obra incorporou a lógica aristotélica e transpôs para a matemática a forma axiomática dedutiva preconizada pelo filósofo Aristóteles.

Ao tratarmos de aspectos históricos da demonstração, trouxemos uma discussão sobre sua abordagem em reformas do ensino de matemática. Fizemos um recorte histórico a partir da década de 20 e olhamos para as orientações curriculares para o ensino de matemática. Reportamos-nos a diferentes períodos da história da educação matemática marcados por reformas educacionais porque trouxeram mudanças significativas na forma de se tratar as demonstrações na matemática escola. E, nesse contexto, olhamos em particular para a circulação de demonstrações em livros didáticos e orientações educacionais.

Nesta seção apresentamos ainda, uma discussão sobre as especificidades da matemática escolar e acadêmica no que se refere à demonstração. Buscamos ainda olhar para as demonstrações externamente à matemática por meio de um referencial da sociologia da ciência, para melhor compreensão de seu valor simbólico.

2.1. As demonstrações em "*Os Elementos*" de Euclides

A demonstração é um procedimento secularmente valorizado e associado à geometria euclidiana. Euclides de Alexandria é um nome importante ao se tratar das demonstrações dedutivas na Grécia por, pelo menos, duas razões: primeiro, Euclides, na obra *Os Elementos*, reuniu e apresentou de modo sistemático uma parte importante do conhecimento matemático desenvolvido por seus precursores e, segundo, a grandeza de seu trabalho se expressa na ampla apropriação e influência no pensamento ocidental, sendo que sua obra foi considerada por alguns como modelo do que o pensamento científico deveria ser (BARKER, 1969).

Os Elementos de Euclides exerceram grande influência no desenvolvimento da matemática, estabelecendo paradigma de raciocínio. Além disso, foi utilizado como livro-texto moldando o ensino de matemática até o final do século XIX e início do século XX. Ainda hoje podemos perceber que esta obra e as demonstrações têm alguma presença no ensino de matemática, em pesquisas sobre o tema e é um modelo de forma de pensar que merece atenção. Assim, consideramos importante para a pesquisa conhecer as demonstrações presentes em *Os Elementos* de Euclides.

Buscaremos para isso, no seguinte tópico compreender e caracterizar o método axiomático dedutivo a partir da obra de Euclides e de textos de pesquisadores do tema (BARKER, 1969; VILELA, 1990; BOYER, 1999; MLODINOW, 2004; DOMINGUES, 2002; EVES, 2004; EUCLIDES, 2009).

Euclides de Alexandria não fora autor do conteúdo exposto em *Os Elementos*. Mas é a ele atribuído o mérito da forma de organização dos resultados matemáticos conhecidos na ocasião. A maneira de organizar os conteúdos matemáticos por meio do método axiomático dedutivo é de certa forma, uma "aplicação" da lógica elaborada por Aristóteles.

Diante disso, consideramos que, para melhor compreender e caracterizar as demonstrações em *Os Elementos*, faz-se necessário trazer algumas considerações a respeito da lógica aristotélica juntamente às exposições das características da obra de Euclides. Para isso consideraremos os seguintes autores: Vilela (1990), D'Ottaviano e Feitosa (2009), Machado e Cunha (2008), Faria (1994), Liard (1968), Vilela e Dorta (2010), Reale (1992) e Wolff (2004).

Aristóteles (384-322 a.C.) foi um filósofo grego que se dedicou à lógica e a outros conhecimentos tais como física, biologia, ética, poética e metafísica. Muitos dos conhecimentos organizados por Aristóteles caíram por terra a partir da idade moderna, no entanto, categorizar, demonstrar e classificar permanecem como formas essenciais de pensamento.

D'Ottaviano e Feitosa (2009) esclarecem que a maior parte da contribuição de Aristóteles para a lógica encontra-se na obra *Organon.* Dentro dessa obra há as Categorias, Sobre a Interpretação, os Analíticos primeiros e segundos e os Tópicos e Refutações sofísticas.

Por volta de 300 a 400 anos a. C., a lógica[24] teve origem como disciplina com Aristóteles, que caracterizou as formas de argumentação que seriam válidas e não válidas (MACHADO; CUNHA, 2008). A lógica seria o estudo das "regras do pensamento correto a partir da análise da linguagem" (FARIA, 1994, p. 33). Segundo Machado e Cunha (2008), o ponto de partida de Aristóteles foi a estrutura da língua grega, em que se buscava evitar ambiguidades e incertezas e fazer um uso adequado das palavras para se apresentar uma argumentação coerente:

> (...) Aristóteles pretendeu excluir do terreno da lógica sentenças que não fossem proposições e proposições que não fossem categóricas[25]. Examinou com percuciência, como se pusesse uma lupa nas formas de argumentação, os argumentos formados por duas proposições admitidas inicialmente – as premissas - e uma outra proposição, que delas deveria decorrer – a conclusão. Partindo de tais formas básicas, examinou todas as maneiras possíveis de interconectar causas e consequências" (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 31).

[24] O termo "lógica" está sendo empregado aqui como lógica formal, uma área do conhecimento que trata dos conceitos, dos juízos e dos raciocínios, que independem de seu conteúdo, tal como desenvolvido por Aristóteles.
[25] As proposições categóricas são as incondicionais, ou seja, a afirmação ou negação expressa por elas não dependem de condição alguma (LIARD, 1968, p. 31).

Na lógica de Aristóteles, assim como em toda lógica que se seguiu, não se consideram os conteúdos das sentenças que compõem a argumentação, mas sim a forma de conectar as sentenças que a constitui, ou seja, “o modo como umas são deduzidas das outras” (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 14). Por isso, não se diz que um argumento é verdadeiro ou falso, o que cabe à proposição, e sim que o argumento é válido ou não válido. Neste sentido pode-se dizer que a lógica se caracteriza pela primazia da forma sob o conteúdo.

A primeira sistematização desta lógica, chamada clássica, assenta-se em três princípios que regem as leis formais do pensamento lógico:

- Princípio da identidade (cada coisa é igual a si mesma; em símbolos: A=A);
- Princípio da não contradição (algo não pode ser e não ser ao mesmo tempo; em símbolos: $\neg$ (A $\wedge\neg$A));
- Princípio do terceiro excluído (uma proposição é verdadeira ou falsa, e não existe terceira opção; em símbolos: A $\vee\neg$A).

Segundo Vilela e Dorta (2010), esses princípios e a relação da lógica com a argumentação permaneceram e tiveram poucas alterações até o final do século XIX, quando Frege (1848 – 1925), ao elaborar os Fundamentos da Aritmética, utilizou símbolos, que são o marco inicial da lógica simbólica ou matemática. Ainda segundo estas autoras, Bertrand Russel (1872 – 1970) encontrou paradoxos nas formulações de Frege, comprometendo seu projeto. Isto propiciou a formulação de outras lógicas chamadas “lógicas não-clássicas”[26] que alteram os princípios consolidados nesse campo de conhecimento (VILELA; DORTA, 2010).

Por meio dos três princípios, Aristóteles desenvolveu o silogismo, que é um processo substancialmente dedutivo (REALE, 1992), como sendo a forma mais rigorosa e eficaz de construir um argumento:

> o silogismo implica o encadeamento de três termos e três proposições ou juízos. A primeira chamada premissa é o princípio no qual se funda o silogismo; é uma proposição já demonstrada, ou uma verdade evidente (...) A segunda, tem a mesma característica de evidência ou veracidade já comprovada (...) Da comparação entre os três termos (...) e das duas premissas, retira-se a conclusão “lógica” que dela deriva necessariamente” (FARIA, 1994, p. 38)

Um exemplo de estrutura (figura 4), em símbolos contemporâneos, do silogismo seria:

---

[26] As lógicas não clássicas podem ser divididas basicamente em duas espécies: as complementares e as heterodoxas. As complementares respeitam as regras e os princípios da lógica clássica, apenas inserindo alguns novos operadores, de maneira a completar sua linguagem. Já as heterodoxas questionam e negam a lógica clássica, surgem com a intenção de substituí-la (VILELA; DORTA, 2010). Ver D’Ottaviano e Feitosa (2009, p. 22).

Figura 4 - Exemplo de estrutura de silogismo

1ª premissa	$A \rightarrow B$		B é o termo médio
2ª premissa	$B \rightarrow C$		
Conclusão:	$A \rightarrow C$		

Vejamos também um exemplo de silogismo:

> Se me garantem, por exemplo, que Todo homem é forte e que Darci é um homem, logo, posso concluir que Darci é forte, e tal conclusão depende apenas da forma da argumentação. É como se me dissessem que Todo a é b e que x é a – disso podemos concluir que x é b, independentemente do significado de a, b e x" (MACHADO; CUNHA, 2008, p. 14).

As proposições ou premissas se constituem em frases que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, nunca podendo ser ambas ao mesmo tempo, ou seja, devem satisfazer o princípio do terceiro excluído. A primeira proposição é chamada premissa maior (contém o termo médio e o grande), a segunda, premissa menor (contém o termo pequeno e médio). A conclusão é formada por dois termos, os quais são chamados de extremo menor (no exemplo, termo A) e extremo maior (termo C). O termo B, no exemplo, seria o termo médio, que liga as duas premissas.

Aristóteles classifica os modos de conhecer em conhecimento intuitivo, indutivo e dedutivo (VILELA; DORTA, 2010). A intuição seria a apreensão imediata e gera as noções comuns, axiomas ou princípios (termos). É o procedimento que extrai o universal do particular, é a captação pura dos primeiros princípios (REALE, 1992). A indução comporta certo grau de probabilidade, em que a partir do particular se demonstra o geral, ou seja, por meio da verificação de casos particulares em que certas características sempre surgem, leva-se a afirmar uma regra geral que supõe ser válida para casos ainda não verificados.

A dedução é um modo de conhecer típico de se obter o conhecimento matemático e é, segundo Aristóteles, um procedimento que garante a verdade. É por meio do procedimento dedutivo que extrai o particular do universal, sendo que na dedução de duas verdades implica-se, se articuladas, necessariamente uma terceira verdade. De maneira resumida: é um tipo de raciocínio que parte de premissas e destas se retira a conclusão, ou seja, a conclusão deriva logicamente das premissas. Para Aristóteles, a dedução é uma forma superior à indução, uma vez que esta última não goza do mesmo rigor e grau de veracidade da dedução (VILELA; DORTA, 2010).

Segundo Liard (1968) a dedução é um procedimento em que do todo se concluem as partes, e é oposta à indução neste sentido, ou seja, das partes conclui-se o todo. A lógica se ocupa de todos os casos de uma espécie ou gêneros, diferenciando-se da indução, que parte de alguns casos particulares. Veja um exemplo: “os corpos A, B, C, D atraem o ferro; Ora, os corpos A, B, C, D são, todos, ímãs. Logo, os ímãs atraem ferro” (LIARD, 1968, p. 59). Assim como na dedução há três termos e três proposições, a diferença está no fato de que na indução, se prova o termo grande do médio através do pequeno; já na dedução, se prova o termo grande do pequeno por meio do médio: “o silogismo indutivo e o silogismo dedutivo seriam, portanto, dois processos inversos, opostos, simetricamente um ao outro, sob a garantia das mesmas leis gerais do pensamento” (LIARD, 1968, p. 60).

Para Aristóteles, demonstração é o silogismo verdadeiro, que se diferencia do silogismo em geral porque diz respeito, além da formalidade da inferência, à veracidade das premissas e das consequências. Assim, no silogismo científico não só a forma, mas também o conteúdo se fazem importante, pois, somente do verdadeiro se precede o verdadeiro. A demonstração é então um silogismo elaborado tendo por base premissas necessárias:

> Por demonstração entendo o silogismo que leva ao saber, e digo que leva ao saber o silogismo cuja inteligência é para nós a ciência. Supondo que o conhecimento por ciência consiste deveras nisso que propusemos, é necessário também que a ciência demonstrativa arranque de premissas verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas do que a conclusão, ou anteriores a esta, e da qual elas são as causas. Pode haver silogismo sem estas características, mas não será uma demonstração (ARISTÓTELES, 71b p.12).

Segundo Wolff (2004), para Aristóteles, “conhecer é não somente conhecer o fato, mas também o por que, e a resposta a esse por que se reduz à colocação em evidência de um elo dedutivo que faz com que uma verdade dependa necessariamente de outras verdades, já conhecidas” (WOLFF, 2004, p. 47). Para este filósofo, todo conhecimento deve ser demonstrado, exceto os princípios, que são proposições necessárias assumidas, indemonstráveis e suficientes para demonstrar as demais. São esses princípios que permitem edificar, por meio da dedução, um conjunto ordenado dos conhecimentos.

Reale (1992) descreve que, para Aristóteles, cada ciência deve assumir a existência do objeto “sobre o qual versarão todas as suas determinações” (p. 156), e deverá caracterizar este objeto pela definição. Deste modo, se a veracidade das definições e premissas está garantida, e se elas forem, quanto à *quantidade,* universais, sua conclusão, conforme as regras dos silogismos, garante uma conclusão verdadeira, universal e eterna.

Para Aristóteles Será necessário, também, definir o significado de cada um dos termos que pertencem a determinada ciência, mas só será aceita sua existência após a demonstração. As definições, enquanto princípio, nada devem dizer sobre a existência de algo, a definição, para Aristóteles, não prova nada.

As noções comuns, ou axiomas, também são princípios e são proposições a partir das quais a demonstração é feita (WOLFF, 2004, p. 52). Para Aristóteles, os axiomas devem ser comuns a muitas ciências.

Vejamos algumas dessas considerações em um trecho dos Segundos Analíticos de Aristóteles:

> Toda a arte demonstrativa gira em torno de três elementos: isso cujo ser se supõe (ou seja, o gênero cujas propriedades essenciais ela contempla); os princípios comuns, chamamos axiomas, verdades primeiras através das quais se processa a demonstração; e, em terceiro lugar, as propriedades, de que a ciência supõe, para cada uma delas, o significado. Todavia, algumas ciências podem sem inconveniente, negligenciar alguns destes elementos, por exemplo: uma ciência pode dispensar-se de propor o ser do gênero, se este for evidente (é assim que o ser do número não é tão óbvio como o ser do frio e do calor); podemos ainda não propor o significado das propriedades quando elas são óbvias. Não há também necessidade de propor o significado de axiomas comuns quais estes – *se de coisas iguais subtraímos coisas iguais, os restos são iguais*, pois este princípio é bem conhecido. Mas não é menos verdadeiro que, por natureza, os elementos da demonstração são deveras três: o sujeito da demonstração, as propriedades que se demonstram, e os princípios que se parte (ARISTÓTELES, 76b, p. 40).

Dessa forma, a demonstração, nos escritos de Aristóteles, é o silogismo verdadeiro, que possui três elementos: o sujeito, as propriedades que se deseja demonstrar e os princípios dos quais se parte a demonstração, ou seja, os axiomas.

Conforme já dissemos, para Aristóteles, a dedução é uma forma superior à indução e é o modo de obter a verdade. Essa ideia de superioridade pode ser vista em seus escritos indicada nos trechos a seguir:

> Ora, a demonstração efectua-se a partir dos universais, e a indução, a partir dos particulares (ARISTÓTELES, 81a, p. 65).
>
> Ora, quem detém o universal também conhece o particular, enquanto o que conhece o particular não conhece o universal. De onde resulta que, ainda por esta razão, a demonstração universal é preferível (...) A prova mais clara da superioridade da demonstração universal é: se, de duas proposições conhecemos a anterior, conhecemos também, de certo modo, a posterior - conhecemo-la em potência. Se soubermos, por exemplo, que todo triângulo tem ângulos iguais a dois retos, sabemos de certo modo, isto é, em potência que o isósceles também têm os ângulos iguais a dois retos (ARISTÓTELES, 86a, p.89).

Diante do exposto sobre a lógica aristotélica e a demonstração, é importante ressaltar a crença na associação da dedução com a verdade, em que se desconsidera que a dedução opera mediante princípios que são “verdades intuitivas” (VILELA; DEUS, 2015).

Quanto a isso, Vilela e Deus (2015) e Garnica (1995) argumentam que essa veracidade não é de fato garantida, em que salientam a diferença entre validade do argumento e veracidade da premissa. Na lógica aristotélica, os silogismos ditos científicos, em que os pressupostos são verdadeiros, ou foram demonstrados ou são axiomas ou postulados verdadeiros. Dessa forma vê-se o quão determinante são as premissas num sistema axiomático. Se elas forem alteradas, como ocorreu com o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, os sistemas podem continuar válidos mas o caráter de verdade, associado aos princípios, não se sustenta:

> Esta potencialidade dos sistemas axiomáticos traz questões estruturais para a filosofia da matemática. Além da existência de outras geometrias, várias, se quisermos, a existência de paradoxos e a confirmação na filosofia da impossibilidade de conhecimentos definitivos, teorema demostrado por Gödel, comprometem a ideia da matemática como verdade (VILELA; DEUS, 2015, p. 21).

Com esse trecho, estamos salientando o fato de que a validade do argumento não garante a verdade do conhecimento dedutivo. Posteriormente abordaremos mais profundamente estes e outros aspectos associados à demonstração.

Euclides em *Os Elementos* sistematizou o conhecimento matemático de seus precursores através do método axiomático dedutivo presente na obra de Aristóteles.

Os Elementos é uma obra essencialmente dedutiva, na qual podemos encontrar inúmeros silogismos, sendo composto por treze livros: “os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço” (BOYER, 1999, p. 72).

Euclides utilizou em sua obra tanto o procedimento dedutivo como as opções de demonstração direta, por redução ao absurdo, entre outras mencionadas por Aristóteles, assim como elencou os princípios intuitivos como definições, axiomas e postulados. Ele inicia sua obra explicitando as definições, postulados e axiomas. Dessa forma, traz no início de seu texto, no livro I, vinte e três definições, e entre elas há aquelas sobre os termos ponto, linha, ângulos, círculo, dentre outros. No modelo de Euclides não há conceitos primitivos. Todos os objetos geométricos são definidos como, por exemplo, ponto, linha, superfície, ângulo plano, dentre outros.

No livro I[27], após a exposição das 23 definições, temos na obra uma lista com 5 postulados e 9 noções comuns. Os postulados são colocados como verdades evidentes que se referem à geometria. Por exemplo, no postulado 1 temos: “Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto” (EUCLIDES, 2009, p. 98). As noções comuns eram proposições lógicas não-geométricas que fazem parte do senso comum, por exemplo: “Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 99).

[27] Nos demais livros (II ao XIII) são mencionadas outras definições relacionadas ao assunto matemático tratado.

As diferenciações feitas sobre postulados e noções comuns foram realizadas por Aristóteles:

> Se o discípulo não tiver nenhuma opinião ou se tiver uma opinião contrária, esta mesma suposição é, nesse caso, um postulado, e daqui vem a diferença entre a hipótese e o postulado: o postulado é contrário à opinião do discípulo, demonstrável, mas proposto e utilizável sem demonstração (ARISTÓTELES, 76b, p.42).

No entanto, por meio dos trabalhos de Euclides não é possível chegar à conclusão nenhuma sobre uma possível diferenciação entre tais termos, ou seja, não se sabe se Euclides adotava estas definições nem mesmo se diferenciava estes dois tipos de pressuposições. Ao que parece, Euclides não faz distinção.

Segundo Domingues (2002), Euclides trabalhou explicitamente com 5 postulados e 5 noções comuns, mas acabou utilizando outros pressupostos, implícitos, que foram detectados posteriormente. Euclides demonstrou pelo processo dedutivo 465 proposições por meio do método sintético, que consiste em "derivar o desconhecido e mais complexo do conhecido e mais simples" (EVES, 2004, p. 179).

Barker (1969) nos apresenta os traços característicos das técnicas utilizadas por Euclides: primeiramente, as leis enunciadas são todas de caráter universal, ou seja, as leis não falam de uma reta, mas se referem à propriedade de todas as retas de tal espécie existentes; suas leis são elaboradas para que sejam rigorosas e absolutas; demonstra todas as leis geométricas enunciadas; as demonstrações são organizadas de maneira sistemática e não possuem caráter indutivo, todas são demonstradas pela via da dedução, não se preocupando com experimentos.

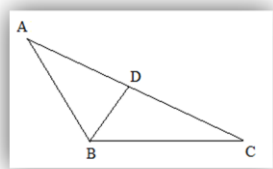
Na obra de Euclides, vemos que demonstrar uma proposição é argumentar para se comprovar sua veracidade, fazendo uso de regras válidas de inferências fornecidas pela lógica, com base em proposições já demonstradas:

> Assim, um certo conceito c_o é definido recorrendo-se aos conceitos $c_1, c_2, \ldots, c_k$, todos eles já definidos, tendo tais definições dos $c_1, c_2, \ldots, c_k$, ocorrido em função de outros conceitos, anteriores na estrutura, "e assim por diante". De modo análogo, para provarmos uma proposição, utilizamo-nos de proposições anteriormente provadas e que foram provadas com o auxílio de outras já provadas que as antecedem na ordenação da teoria, "e assim por diante". (EUCLIDES, 2009, p. 82).

Vejamos um exemplo da forma como Euclides procede por meio da proposição 18 do livro I e da demonstração fornecida no livro *Os Elementos*, traduzido e introduzido por Irineu Bicudo (2009, p.111).

Proposição 18: "O maior lado de qualquer triângulo subtende o maior ângulo"

Figura 5 - Ilustração representando a situação da proposição 18



Fonte: EUCLIDES (2009, p. 111)

Seja, pois, o triângulo ABC, tendo o lado AC maior do que o AB; digo que também o ângulo sob ABC é maior do que o sob BCA. Pois, como a AC é maior do que a AB, fique posta a AD igual à AB, e fique ligada a BD. E, como o ângulo sob ADB é exterior ao triângulo BCD, é maior do que o sob DCB, interior e oposto; mas o sob ADB é igual ao sob ABD, visto que também o lado AB é igual ao AD; portanto, também o sob ABD é maior do que o sob ACB; portanto, o sob ABC é, por muito, maior do que o sob ACB. Portanto, o maior lado de todo triângulo subtende o maior ângulo; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 111).

Para a demonstração foi utilizada três proposições (Proposição 3 (P3), Proposição 16 (P16) e Proposição 5 (P5)) anteriormente demonstradas. Não encontramos de forma explícita os silogismos à maneira de Aristóteles, mas podemos, a partir da demonstração, destacá-los:

Primeiramente ao afirmar que "pois, como a AC é maior do que a AB, fique posta a AD igual à AB, e fique ligada a BD" temos que Euclides utilizou como argumento a proposição 3 já demonstrada anteriormente para desenvolver a dedução.

Premissa 1 (P3): Dadas duas linhas retas desiguais, cortar da linha maior uma parte igual a linha menor.

Premissa 2: AC > AB

Conclusão 1: Pode-se cortar uma linha igual a AB em AC. Digamos que esse segmento seja AD.

Em seguida, ele utiliza a proposição 16 para mostrar que o ângulo ADB é maior que DCB.

Premissa 3 (P16): O ângulo externo de um triângulo é sempre maior que cada um dos ângulos internos e opostos.

Premissa 4: O ângulo ADB é externo ao triângulo BCD.

Conclusão 2: O ângulo ADB é maior do que o ângulo BCD.

Para mostrar que o ângulo ABD também é maior que o ângulo ACB, Euclides utiliza da proposição 5.

Premissa 5 (P5): Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base, são iguais e produzidos os lados iguais, os ângulos, que se formam debaixo da base, são também iguais.

Premissa 6: o lado AB é igual ao lado AD.

Conclusão 3: Os ângulos ABD e ADB são iguais.

Neste momento, há a retomada de resultados obtidos na própria demonstração.

Premissa 7 (ou conclusão 2): O ângulo ADB é maior do que o ângulo BCD

Premissa 8 (ou conclusão 3): Os ângulos ABD e ADB são iguais.

Conclusão: O ângulo ABD é maior que o ângulo BCD.

Assim, obtém-se a conclusão final, que é a proposição 18: ABC se faz muito maior que BCA.

Buscamos explicitar nesta demonstração elementos da lógica aristotélica. Segundo Aristóteles, para se obter a conclusão, da demonstração precisa ocorrer por meio do termo médio, que deve aparecer universal pelo menos uma vez. Na demonstração acima, as conclusões ocorrem por meio dos termos médios, por exemplo, observe que no último silogismo, o termo médio é o ângulo ADB, que é universal.

As premissas utilizadas por Euclides foram todas demonstradas e são por isso, consideradas verdadeiras. A sua conclusão então, segundo Aristóteles, é irrevogável.

A forma de desenvolvimento de uma demonstração na obra *Os Elementos* segue um modelo padrão com etapas bem definidas:

> Primeiro, consta o enunciado que estabelece o que é dado e o que é procurado; em segundo lugar, a exposição ou hipótese vai designar os objetos referidos no enunciado com o uso de letras; a explicação ou determinação em que consta a única frase com verbo na voz ativa enunciando a conclusão, ou seja, explicando claramente o que é pedido; a construção ou preparação traz informações adicionais ao enunciado, precisando o que é procurado; a demonstração traça a inferência exigida para se raciocinar cientificamente a partir de premissas admitidas previamente; a conclusão volta de novo ao enunciado, confirmando o que se demonstrou (ALMEIDA, 2008, p. 25).

Não se pode falar se Euclides escreveu *Os Elementos* para ser utilizado no ensino ou para ser uma sistematização dos conhecimentos existentes até então. No entanto, estes dois aspectos foram alcançados. A obra de Euclides foi utilizada no ensino de matemática por mais de dois milênios (ÁVILA, 2001, p.2) e com isso a geometria euclidiana esteve presente na matemática escolar sem grandes questionamentos até o final do século XIX. Ela era ensinada da forma como Euclides organizou em *Os Elementos* e era vista como uma disciplina indispensável para a formação intelectual dos indivíduos e para o desenvolvimento do espírito (ANDRADE, 2004, p. 9).

A maneira formal como Euclides apresentou o conteúdo matemático da época tornou-se o "protótipo da forma matemática moderna" (EVES, 2004, p. 178) e fez com que a obra se constituísse em paradigma de demonstração rigorosa. O que nos permite dizer que *Os Elementos* deixou marcas fortes na matemática:

> A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio

> matemático é postulacional, mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático (EVES, 2004, p. 179).

Os Elementos foi, portanto uma peça importante no processo de propagação e condução desse modo de proceder em matemática.

Concluindo este tópico em que buscamos caracterizar as demonstrações da obra *Os Elementos* de Euclides, destacamos a influência que esta obra teve sobre o ensino de matemática. O fato de que o método euclidiano tenha se constituído como um paradigma de demonstração rigorosa o torna uma referência forte de demonstração.

A partir dessa constatação podemos questionar: frente a influências que *Os Elementos* e suas demonstrações tiveram no ensino de matemática, como a abordagem das demonstrações na escola foi se modificando ao longo do tempo? Como a demonstração é utilizada atualmente?

2.2. As demonstrações em reformas do ensino de matemática no Brasil

Elegemos como fontes de pesquisa os livros didáticos referentes aos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio avaliados e aprovados pelo PNLD de 2008, 2011 e 2012; elencamos concomitantemente os documentos oficiais que fariam parte e dariam base à nossa análise, anteriormente citados.

Estes documentos foram lançados a partir do final da década de 90 e suas ideias educacionais estão relacionadas ao contexto sócio-político da época, ou seja, das necessidades educacionais emergentes, como por exemplo, o lançamento da Lei de Diretrizes e Bases para a Educação de 1996 (LDB/96) que propunha ampla reforma na educação básica brasileira. Os PCN foram elaborados como material de apoio previsto pela LDB/96.

As novas orientações curriculares e as recomendações para os livros didáticos surgem em vista de mudanças ocorridas no passado e perspectivas futuras quanto a educação. Nesse sentido, olhar para alguns períodos relativos à educação no passado, contribui para discussões e compreensão da educação atualmente. E, em nosso caso, traz elementos para compreender as demonstrações que encontramos nos livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática.

Atualmente, ao abrir um livro didático de matemática, nos deparamos com conteúdos e com suas formas de disposição e abordagens. Por meio de relatos históricos (MIORIM, 1995, 1999; VALENTE, 2004, 2005, 2008, 2011; CARVALHO et al., 2000, dentre outros) vemos que estes conteúdos e suas disposições e abordagens nos livros didáticos sofreram alterações ao longo dos tempos, ou seja, houve fatores determinantes legais e extraoficiais que influenciaram a entrada e a saída de conteúdos, a modificação de metodologias e o surgimento de novas ideias educacionais.

Dessa maneira, inspirados na HP, podemos compreender as demonstrações nos livros didáticos considerados nessa pesquisa, buscando na história como foi o ensino da matemática em vários momentos da educação brasileira. Especificamente, optamos por entender as modificações provocadas por meio das principais reformas educacionais que influenciaram os conteúdos e a sua forma de exposição nos livros didáticos. O foco será observar como a demonstração em geometria era vista e permanecia dentro dessas reformas, o que poderá nos oferecer uma dimensão da forma como a demonstração é utilizada e mobilizada por autores de livros didáticos considerados nessa pesquisa.

Essa etapa se justifica e corrobora com a afirmação de Pietropaolo (2005) de que a importância dada às demonstrações como conteúdo a ser ensinado na matemática escolar "podem ser influenciadas pelas concepções de ensino e de aprendizagem que, em cada momento, teorias educacionais formulam" (p. 101). Sendo assim, ao contextualizar as demonstrações nos livros didáticos nos guiaremos pela seguinte questão: O que as orientações curriculares e metodológicas para o ensino de matemática, mais especificamente no conteúdo de geometria, que ocorreram em diferentes momentos históricos nos dizem a respeito das demonstrações na matemática escolar?

Sabemos que o currículo efetivo é o que se faz nas salas de aula. No entanto, temos também consciência de que as reformas implicam em mudanças nas produções didáticas, que podem ou não ser aplicadas em sala de aula de matemática. Sendo assim, consideramos importante olhar para as orientações curriculares, pois elas sinalizam modos de se compreender a demonstração.

Neste tópico faremos recortes em três momentos históricos considerados a partir das mudanças na educação brasileira: as reformas educacionais ocorridas na primeira metade do século XX, o movimento da matemática moderna e, o ensino de matemática após a década de 80. Nosso olhar para estes momentos se restringirão ao ensino de geometria, por ser neste tema que buscaremos observar o que caracteriza as demonstrações nos livros didáticos.

Até o final da década de 60, o ensino se dividia em primário e secundário. O ensino primário era responsável pela alfabetização e tinha duração de três ou quatro anos enquanto o ensino secundário era a continuação do ensino primário e teve sua duração variada ao longo dos tempos; por exemplo, durava 5 anos em 1932 e 4 anos em 1942. A pesquisa foca os anos finais do ensino fundamental e médio, por esse motivo, daremos destaque nesse tópico ao ensino secundário que é equivalente a esses níveis que estamos considerando.

Ao pensar em mudanças no ensino de matemática, podemos relembrar o Movimento da Matemática Moderna, que ocorreu no Brasil por volta da década de 60/70 e foi um movimento que provocou discussões e amplas reformas no ensino de matemática. No entanto, este movimento não foi o primeiro a tentar modernizar o ensino de matemática das escolas secundárias. Segundo Miorim (1995), o Movimento da Matemática Moderna seria a continuidade de outro movimento iniciado no início do século XX, sendo esse chamado Primeiro Movimento Modernizador do Ensino de Matemática. Ambos buscavam diminuir o descompasso entre os estudos científico-tecnológicos e o ensino desenvolvido no nível médio, no entanto, apesar desse objetivo comum, os movimentos se diferenciaram quanto aos conteúdos a serem incluídos no ensino. Mesmo com propostas opostas, os movimentos tiveram grande influência no ensino de matemática em diante.

Alguns dos princípios da proposta para o ensino de matemática do primeiro movimento resumem-se em: eliminar a organização excessivamente sistemática e lógica dos conteúdos da escola e considerar a intuição como um ponto de partida importante para a futura sistematização (MIORIM, 1998).

Para Miorim (1995), estes princípios estariam ligados a três tendências que orientavam a ideia de modernização: “(1) Preponderância essencial do ponto de vista psicológico. (2) Escolha da matéria a ensinar em dependência com as aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas. (3) Subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da nossa época” (p. 159). Segundo a autora, apesar destes princípios não terem sido aplicados de forma unificada e com a mesma velocidade nos diferentes países, eles ofereceram elementos para futuras discussões e alteraram a fisionomia do ensino de matemática que era, até então, a estrutura da demonstração:

> O ensino de matemática sofreu recentemente, quase em todos os países, uma transformação notável. Até há pouco, eram a estrutura da demonstração, o encadeamento impecável das proposições que preocupavam nossos mestres. Hoje visa-se, ao contrário, a tornar intuitivas as concepções matemáticas, isto é, a apresentá-las sob uma forma viva e concreta; não se separam de suas aplicações e espera-se, desse modo, fazer com que elas correspondam a necessidades reais, que não meras estruturas de silogismos, elaborados, em horas de lazer por espíritos sutis e maníacos (ROXO, 1937 apud MIORIM, 1995, p. 160).

Do século I a. C. até a modernização, o ensino de geometria era baseado na obra *Os Elementos* de Euclides, sendo um ensino preocupado com o rigor das demonstrações e sem conexões com as experiências e com as aplicações práticas. A aritmética também era desenvolvida ao modo apresentado em *Os Elementos* (MIORIM, 1995). Dessa forma, para Miorim (1995), foi no primeiro movimento que se iniciou o alerta “Abaixo Euclides”, pois, o culto a Euclides era um forte empecilho à entrada de ideias mais modernas na escola. Ou seja, este primeiro movimento pode ser visto como a primeira tentativa de romper com o ensino de matemática tradicional que era ensinado na escola secundária.

A moderna matemática, referente a esse primeiro movimento, estava ligada ao contexto sócio-político-econômico que exigia um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo quantitativo que permitisse medir e prever (MIORIM, 1998). Dessa forma, ela se constituiria em um instrumento importante para explicar fenômenos da natureza sendo, portanto, a união da matemática teórica com a prática, isto é, “da parte da Matemática que havia sido desvalorizada pelo pensamento grego com aquela que seria sua maior contribuição” (MIORIM, 1998, p. 105).

As ideias do primeiro movimento começariam a influenciar o ensino de matemática no Brasil somente a partir do final da década de 20, sendo Euclides Roxo seu maior defensor. A mudança teve início a partir de 1929 quando fora aprovado o Decreto nº 18564, de 15 de janeiro de 1929, alterando o ensino de matemática do Colégio Pedro II.

O século XX foi marcado por pelo menos dois momentos importantes que visavam reformar os programas de ensino. Um desses momentos é a tentativa de criar a disciplina matemática unificando os ramos da aritmética, álgebra e geometria. O outro momento também buscava unificar estes ramos, mas por via diferente do primeiro. Estes momentos possuem suas particularidades e produziram vestígios quanto à conteúdos e metodologias, que podem ser vistos até hoje no ensino de matemática (DASSIE, 2008). No que se refere à temática desta pesquisa, isto é, a demonstração, podemos dizer que dois pontos da primeira reforma, que foram transpostos para as posteriores, influenciaram em mudanças na forma de se utilizar as demonstrações nos livros didáticos, sendo estes pontos a geometria intuitiva e o método heurístico, que serão tratados posteriormente.

2.2.1. A demonstração em geometria durante a constituição da disciplina escolar matemática no Brasil

As pesquisas em História da Educação Matemática no Brasil (MIORIM, 1995; 1999; VALENTE, 2004; 2008; 2011) indicam que desde o início do século XX ocorreram tentativas de reestruturação do ensino de matemática no nível secundário. Dentre essas tentativas podemos citar a Reforma Francisco Campos e a Reforma Capanema. Essas reformas ocorreram no período de 1931 a 1951 e correspondem ao momento de criação e constituição da unidade da disciplina matemática.

Segundo Miorim (1995), em 1928, a Congregação do Colégio Pedro II apresentou uma proposta de seriação do curso secundário, em que se propunham mudanças no ensino de matemática. As ideias para a mudança foram defendidas no Primeiro Movimento Modernizador do Ensino de Matemática, e apesar de o Brasil ter sido convidado a participar das atividades da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática desde 1908, isso não interferiu em mudanças na prática de ensino de matemática no país. Somente a partir de 1928, com a proposta do Colégio Pedro II, as ideias da comissão começaram a penetrar em nosso país.

Euclides Roxo foi considerado o maior responsável por elaborar a proposta modernizadora brasileira do início do século XX (MIORIM, 1995), e é também a ele atribuído o protagonismo da criação da disciplina escolar matemática no Brasil (VALENTE, 2008, p. 76), pois, até então as disciplinas de aritmética, álgebra e geometria eram ensinadas separadamente e, no final dos anos 20, coube a ele propor à Congregação do Colégio Pedro II a unificação destas disciplinas.

Com a revolução de 1930 que colocou Getúlio Vargas no poder, Euclides Roxo foi convidado, pelo Ministro da Educação e Saúde Pública Francisco Campos, a participar da comissão que visava elaborar um projeto de reforma do ensino (VALENTE, 2008, p. 84), que ficou conhecido por Reforma Francisco Campos. Segundo Miorim (1995), a intenção do então ministro era conferir um caráter mais educativo e não apenas de preparação para ingresso no ensino superior:

> Em resumo: o ensino secundário é um simples curso de passagem e um mero sistema de exames destituído de virtudes educativas e reduzido às simples linhas essenciais de sua estrutura estreitamente pragmática e utilitária de instrumento de acesso aos cursos superiores. O primeiro ato que se impõe na reconstrução do ensino secundário é o de conferir-lhe, de modo distinto e acentuado, um caráter eminentemente educativo.
>
> A sua finalidade (...) deve ser a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional, construindo no seu espírito todo um sistema de hábitos, atitudes e comportamentos que o habilitem a viver por si mesmo e a tomar em qualquer situação das decisões mais convenientes e mais seguras (BRASIL, 1931 apud VALENTE, s/p).

Além disso, segundo Pietropaolo (2005), no período anterior a essa reforma, havia a predominância de ensino formalizado das demonstrações sem um trabalho intuitivo que o precedesse. O ensino de matemática a partir da intuição era uma das mudanças sugeridas.

Para ele, essa preocupação com as demonstrações mostra que Euclides Roxo e consequentemente a Reforma de Francisco Campos sofria influências da Escola Nova:

> Certamente, essas “restrições” à prova formal ocorrem porque esta seria, a despeito de sua importância, contra-exemplo dos princípios dessa Escola, uma vez que estes incluiriam atividades experimentais e o uso de materiais concretos para a “descoberta” das noções e conceitos pelos alunos.” (PIETROPAOLO, 2005, p.102).

Carvalho et al. (2000) também afirma que Euclides Roxo estava imbuído dos ideais da Escola Nova.

As propostas de Euclides Roxo contrapunham às orientações para o ensino de matemática da época: “caracterizado por uma apresentação seca, abstrata e lógica” (CARVALHO ET AL, 2000, p. 415). A proposta levava em consideração, dentre outros aspectos, o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, enfatizava a intuição e a contextualização em matemática, em que assuntos mais abstratos e rigorosos seriam tratados nos últimos níveis (CARVALHO ET AL, 2000).

Essas novas orientações quanto ao ensino intuitivo possuíam raízes nos finais do século XVIII e foram transpostas para o ensino na primeira metade do século XIX. O ensino intuitivo surgiu na Alemanha nos finais do século XVII, sob a influência da Pedagogia de Henri Pestalozzi. Essa ideia era contrária à abstração e a pouca utilidade do ensino. Foi sugerida a mudança desse método de ensino para o ensino intuitivo, pois para Pestalozzi “havia uma ordem natural na evolução do desenvolvimento moral, físico e intelectual, as quais deveriam ser desenvolvidas mediante exercício apropriado”. (SOUZA, 2009 apud PINHEIRO; VALENTE, 2013, p.4):

> Assim, as primeiras experiências de aprendizagem deveriam ser via objetos, precedendo o ensino pelas gravuras. Estas desempenhariam uma função secundária auxiliando a criança na transição para o desenho, a escrita e a leitura. Pelos sentidos as crianças entrariam em “contato direto com os objetos, depois o conteúdo do objeto observado se expressaria em palavras, permitindo a atividade mental”, pois para Pestalozzi a experiência sensorial era um processo ativo que comprometia, discriminava, analisava e abstraia as qualidades dos objetos (PINHEIRO; VALENTE, 2013, p.4).

O ensino intuitivo considerava a observação de fatos e contava com o incentivo do professor para que nos momentos de aprendizagem o conhecimento emergisse.

O ministro adotou todas as ideias modernizadoras que estavam presentes na proposta da Congregação do Colégio Pedro II no que se refere à matemática, e dessa forma, as ideias de Euclides Roxo deveriam ser implantadas em todo o país.

Com a reforma ficou estabelecido a seriação do currículo, a frequência obrigatória, os ciclos fundamental e complementar com duração, respectivamente, de 5 anos e

2 anos e a exigência de habilitação nestes ciclos para o ingresso no ensino superior. O objetivo do ensino de matemática não se reduziria somente à desenvolver o raciocínio, por meio da lógica dedutiva, mas deveria incluir o desenvolvimento de outras competências que estariam ligadas a utilidade e aplicação da matemática (MIORIM, 1995). Dessa forma, o ensino que era extremamente formal e sem aplicações práticas passou a considerar outros elementos exigidos pelo contexto social da época.

A Reforma Francisco Campos, não somente propôs a reordenação dos conteúdos como também mudanças didático-pedagógicas (VALENTE, 2004). Segundo Valente (2004), por meio da análise das “Instruções Metodológicas” que fazia recomendações didático-metodológicas pode-se obter as mudanças em quatro grandes categorias:

> - a introdução do conceito de função, desde a primeira série do Curso Fundamental, e o seu desenvolvimento como conceito unificador dos ramos matemáticos (Aritmética, Álgebra e Geometria);
> - um curso de Geometria Intuitiva que progressiva e articuladamente à Aritmética e à Álgebra caminharia para a Geometria Lógico-Dedutiva;
> - o uso do método heurístico para a introdução e desenvolvimento dos conteúdos de ensino;
> - a utilização de questões práticas, definidas nas Instruções como “(...) as aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessem às cogitações dos alunos” (VALENTE, 2004, p. 5).

Para alcançar os objetivos da reforma, o ensino deveria levar em conta o que se denominava grau de desenvolvimento mental dos estudantes e assim os conceitos deveriam ser introduzidos de forma intuitiva e experimental, sem preocupação com o formalismo, para que de forma gradativa fosse introduzido o raciocínio lógico. O foco não era a memorização e sim a descoberta. Por isso era sugerido o uso do método heurístico, mudando assim o papel do aluno que antes era de receptor passivo e, com a reforma, passou a ser de descobridor.

No que ser refere à geometria, Miorim (1995) nos diz que era sugerido o ensino propedêutico, de caráter intuitivo e experimental, além de ser necessário “renunciar completamente à prática à memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estilo sistemático das demonstrações já feitas” (p. 188). Assim, fica clara a ideia de introduzir o raciocínio lógico somente após um trabalho inicial intuitivo e experimental das noções básicas contidas nas figuras geométricas. Essa afirmação pode ser constatada em um trecho das orientações dadas ao ensino de geometria na reforma, em 1931:

> (...) partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, pouco a pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; ou por outras palavras, os conhecimentos serão adquiridos primeiro por experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à Geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo. (BRASIL, 1931 apud VALENTE, 2005, s/p).

O curso propedêutico da geometria intuitiva e experimental deveria

> a) exercitar a percepção e a imaginação espaciais; b) desenvolver a faculdade de abstração; c) despertar o interesse pela estimativa e a mediação, bem como pelo uso da régua, do compasso, dos esquadros, do transferidor, e pela construção de modelos (BRASIL, 1931 apud VALENTE, 2005, p. 12).

A ideia era que o aluno, antes de concluir esta etapa propedêutica, conseguisse realizar deduções por meio das relações descobertas, estabelecendo uma base para o estudo lógico dedutivo posterior, "sentindo, ao mesmo tempo, por si mesmo, a necessidade da demonstração rigorosa" (BRASIL, 1931 apud VALENTE, 2005, p.12). Dessa maneira, o estudo da geometria dedutiva deveria levar em consideração os elementos inferidos intuitivamente no curso propedêutico, adotando-os como ponto de partida. Além disso, o conjunto de axiomas fundamentais para a exposição lógica da geometria deveria constituir-se das observações intuitivas (VALENTE, 2005). Portanto, o estudo da geometria dedutiva deveria compreender: "o enunciado das proposições, sua demonstração e aplicações; b) a compreensão e a justa apreciação do raciocínio dedutivo; c) o valor da exposição clara e sucinta, do encadeamento lógico das ideias e da memória matemática (BRASIL, 1931 apud VALENTE, 2005, p.12).

Segundo o programa de ensino secundário, o "adestramento" com a demonstração seria obtido com o estudo da geometria plana e a ênfase poderia ser menos acentuada com a geometria espacial, tendo em vista desenvolver a "faculdade de apreensão visual das figuras e das relações espaciais, da representação de tais figuras no plano e da resolução de problemas de cubatura" (BRASIL, 1931 apud VALENTE, 2005, p.12). Portanto, a geometria dedutiva não foi eliminada do ensino de matemática, mas ficou restrita à geometria plana e solicitada de ser desenvolvida de forma gradual.

Por meio das instruções metodológicas podemos observar como se organizou o programa de ensino de matemática para os níveis de 1ª à 5ª séries, principalmente no que se refere à geometria: nas 1ª e 2ª séries, a ideia era uma "iniciação geométrica", trabalhando-se com os conceitos de forma intuitiva; na 3ª série seria iniciado o estudo da geometria dedutiva, abordando proposições que servem de base a ela; essa organização da 3ª série se manteria na 4ª série; e na 5ª série os três ramos deveriam ser articulados e introduzidos os conteúdos do cálculo diferencial integral. Com essa organização, a abordagem dos conceitos geométricos se daria gradualmente com foco na demonstração formal.

Observamos que a demonstração formal mantinha seu status e o seu valor no ensino de matemática, sendo que em nenhum momento da reforma se questionou o uso desse procedimento na matemática escolar. Com o ensino intuitivo as orientações didático-pedagógicas trataram de dissolver a demonstração nos níveis elementares e de introduzi-la de forma a considerar o desenvolvimento mental dos estudantes, ou seja, acreditava-se numa forma progressiva para se chegar a uma sistematização lógico-dedutiva dos conhecimentos geométricos. O fato de se trabalhar primeiramente com uma geometria mais intuitiva, nos mostra que outras formas de verificar propriedades na matemática escolar passaram a serem almejadas como desenhos, materiais concretos[28], medições, dentre outros. Essas diferentes maneiras seriam utilizadas para se estabelecer a base para o estudo lógico-dedutivo, que abordaria o enunciado de proposições, demonstrações, raciocínio dedutivos e o encadeamento de ideias.

A mudança de um ensino tradicional caracterizado por uma apresentação abstrata e lógica para uma proposta que buscava introduzir aspectos radicalmente opostos em termos de uma abordagem intuitiva e prática encontrou dificuldades e resistências para ser implantada (MIORIM, 1995). Um dos motivos das dificuldades era a falta de livros didáticos que seguissem tal proposta, visto que "os livros adotados até então, que seguiam as orientações do ensino, eram compêndios separados de aritmética, álgebra, geometria ou trigonometria, que apresentavam, em geral, uma exposição formal dos conteúdos e uma quantidade extensa de exercícios" (p. 193). A situação foi se modificando quando foram produzidos novos livros didáticos que buscavam seguir as orientações da reforma.

Quanto a isso, podemos questionar: apesar das novas orientações curriculares, como a demonstração aparece nos livros didáticos daquela época? Nossa intenção não é fazer essa análise, mas nos apropriar de análises feitas por pesquisadores do tema, e assim, contextualizar e exemplificar as demonstrações nos livros didáticos, além de observarmos como a demonstração se insere nas mudanças ocorridas. Para isso, utilizamos um CD-ROM elaborado pelo grupo GHEMAT[29] e direcionamos nosso olhar para o conteúdo de geometria e as metodologias utilizadas para se validar as afirmativas matemáticas.

---

[28] "O ensino seria baseado em atividades desencadeadas pelo uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais. No entanto, esses ideais em nada influenciaram o ensino de Matemática, naquela época, quer pelo despreparo dos professores, quer pelas poucas inovações que foram introduzidas pelos livros didáticos" (NACARATO, 2005, p.8).

[29] Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil. Esse grupo analisou obras didáticas de matemática da época da Reforma Francisco Campos e Capanema. Por meio desse CD-ROM é possível que tenhamos contato com os livros didáticos mais utilizados nas escolas brasileiras, no ginásio, no período de 1930 à 1950. O grupo também dispõe de um DVD em seu site (http://www.unifesp.br/centros/ghemat/index.htm) com base de dados de livros didáticos destinados ao colegial, do período de 1930 à 1980.

O livro “Curso de Matemática Elementar” de Euclides Roxo teve seu primeiro volume publicado em 1929. Um dos pontos da reforma era a unificação da Aritmética, Álgebra e Geometria e vemos que Euclides Roxo, no primeiro volume, buscou entrelaçar inicialmente a geometria com a aritmética, que era um conteúdo já familiar aos estudantes.

A abordagem das noções de geometria era feita por meio do raciocínio intuitivo, que era outro ponto de destaque da Reforma Francisco Campos. A metodologia usada por Euclides Roxo traçou um caminho oposto ao que era feito na geometria lógico-dedutiva, em que se iniciou com as noções primitivas: ponto, reta e plano.

Quanto à forma de validação das afirmativas matemáticas, observamos que, com a introdução do método heurístico e da intuição, esta é motivada, principalmente na 1ª e 2ª série do curso ginasial, por meio de perguntas e situações propostas.

Na figura 6, vemos uma situação em que se apresenta o conceito de ângulos opostos pelo vértice, e em seguida, exercícios para exploração do conceito. No exercício de número 1 é solicitado que o estudante copie a figura que representa ângulos y e z e sobreponha a cópia sob os ângulos x e w. Com isso espera-se que os estudantes observem que os ângulos opostos pelo vértice y e w e x e z são iguais. A partir dessa percepção, sugere-se que o estudante construa duas retas que se cortem e verifique se a sua observação se repete para este novo caso. Por meio de outro desenho que representa ângulos opostos pelo vértice, pede-se para mostrar a igualdade de medidas de alguns ângulos.

Observamos que o autor utiliza um conjunto de perguntas que possuem a intencionalidade de desenvolver o conceito de ângulos opostos pelo vértice. A página 192 (figura 6), iniciou-se com o teorema a ser estudado, que não foi seguido de sua demonstração formal, mas sim, por exercícios que tinham o objetivo de validar este teorema. Os exercícios foram compostos por perguntas e por experimentos que visavam levar os estudantes à criar afirmações e à validá-las. Segundo Valente (2005), muitas vezes o autor solicitava o exame das soluções dos exercícios e isso fez com que este não se reduzisse à aplicações diretas, “mas é um meio pelo qual o aluno desenvolve a pesquisa de teoremas e sua presteza em conclusões lógicas” (p.9).

Figura 6 - A geometria intuitiva no livro didático “Curso de Matemática Elementar” de Euclides Roxo

— 192 — VOLTAR

129. Angulos oppostos pelo vertice. — *Dois angulos dizem-se oppostos pelo vertice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro.*

Mostre na fig. 120 dois pares de angulos oppostos pelo vertice. Mostre que nessa mesma figura 120, formada por

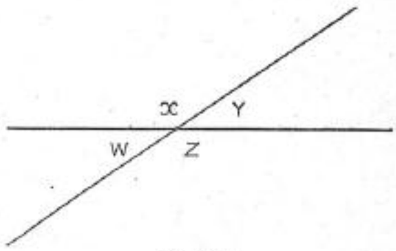


Fig. 120

duas rectas que se cortam, dois angulos quaesquer ou são oppostos pelo vertice ou são adjacentes.

EXERCICIOS

1. Com um papel transparente copie a figura formada pelos angulos y e z (fig. 120) e colloque essa copia sobre a figura formada pelos angulos x e w e veja si z coincide com x e y com w. Que relação resulta dahi para dois angulos oppostos pelo vertice ?

2. Verifique a conclusão a que chegou no exercicio 1 traçando duas rectas quaesquer que se cortem e medindo com o transferidor, os dois pares de angulos oppostos pelo vertice.

3. Mostre que na fig. 121 se tem:

$$x+y=180$$
$$y+z=180$$
$$x+y=y+z$$

e, portanto, $x=z$ Porque?

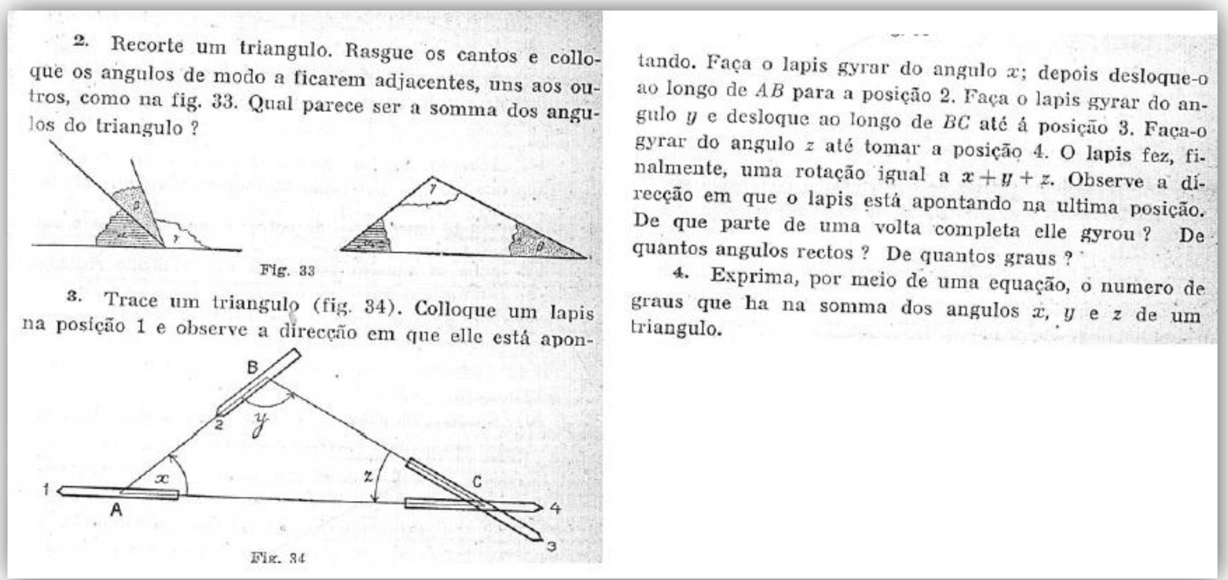
4. Mostre, do mesmo modo, que $y=w$.

5. Trace o angulo opposto pelo vertice a um angulo dado.

Fonte - (VALENTE, 2005).

Vejamos também o uso de experimentos nos tópicos de geometria, que atualmente são considerados como formas de validação na matemática escolar por alguns pesquisadores da educação matemática:

Figura 7 - Propriedades dos triângulos no livro didático “Curso de Matemática Elementar” da 2ª série do curso ginasial.



2. Recorte um triangulo. Rasgue os cantos e colloque os angulos de modo a ficarem adjacentes, uns aos outros, como na fig. 33. Qual parece ser a somma dos angulos do triangulo ?

Fig. 33

3. Trace um triangulo (fig. 34). Colloque um lapis na posição 1 e observe a direcção em que elle está apontando. Faça o lapis gyrar do angulo x; depois desloque-o ao longo de AB para a posição 2. Faça o lapis gyrar do angulo y e desloque ao longo de BC até á posição 3. Faça-o gyrar do angulo z até tomar a posição 4. O lapis fez, finalmente, uma rotação igual a $x + y + z$. Observe a direcção em que o lapis está apontando na ultima posição. De que parte de uma volta completa elle gyrou ? De quantos angulos rectos ? De quantos graus ?

Fig. 34

4. Exprima, por meio de uma equação, o numero de graus que ha na somma dos angulos x, y e z de um triangulo.

Fonte - (VALENTE, 2005).

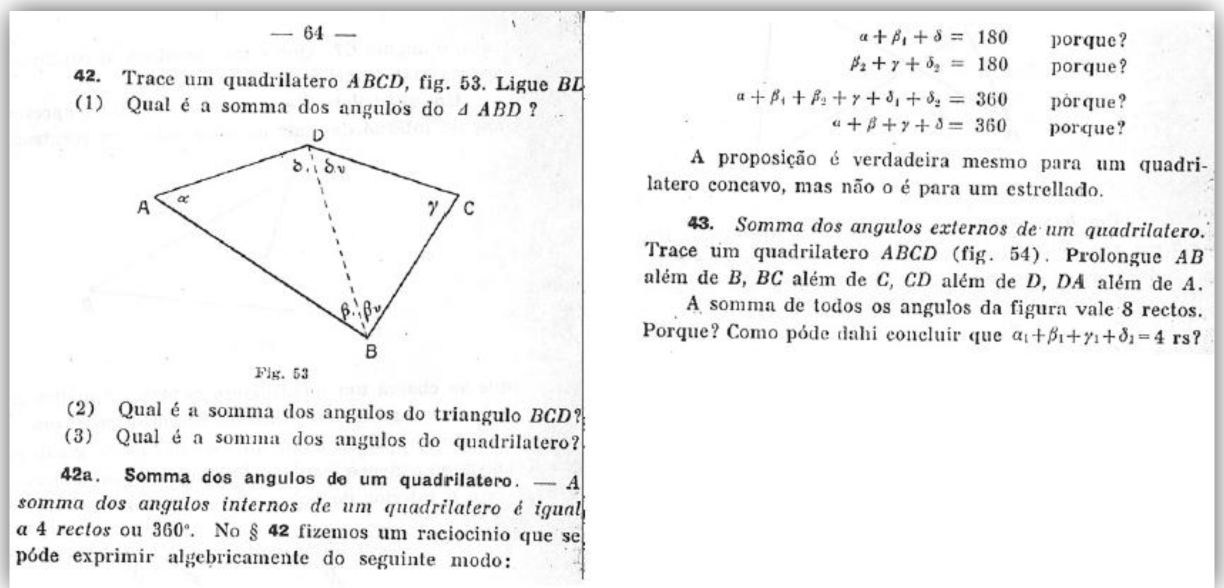
Na figura 7, há duas situações em que se mostra como usar instrumentos de medição para se validar a afirmativa “A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º”. Na atividade de número 2, presente na figura 7, é sugerido o desenho e recorte de um triângulo, seguido da separação de seus três ângulos internos. Procede-se solicitando que o estudante reorganize os três ângulos de modo a ficarem adjacentes uns aos outros e por fim questiona-os sobre o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Com a terceira atividade, pretende-se por outra via, inferir sobre esta propriedade dos triângulos. É solicitado que o estudante desenhe um triângulo e coloque o lápis na posição 1, isto é, numa posição horizontal. A propriedade será deduzida por meio do deslocamento do lápis de acordo com os ângulos internos do triângulo. Com isso, pede-se que primeiramente o estudante gire o lápis deslocando–o um ângulo x, assumindo a segunda posição representada na figura 7; em seguida, ele deve deslocar o lápis em um ângulo y, assumindo a terceira posição; e por fim deslocar o lápis em um ângulo z, concluindo em uma quarta posição. Com isso, almeja-se que o estudante observe que o lápis, ao girar formando ângulos x, y e z, assumiu uma posição final com mesma direção, mas sentido oposto ao lápis na posição 1, e assim conclua que o lápis sofreu uma rotação de 180°.

Tanto na primeira quanto na segunda atividade representada na Figura 7, há o uso de desenhos, recortes e materiais manipuláveis para se deduzir de forma intuitiva o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Na figura 8, há a conjecturação e a validação da propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Figura 8 - Propriedades dos quadriláteros no livro didático “Curso de Matemática Elementar” para a 2ª série do ginasial



— 64 —

42. Trace um quadrilatero *ABCD*, fig. 53. Ligue *BD*
(1) Qual é a somma dos angulos do Δ *ABD* ?

Fig. 53

(2) Qual é a somma dos angulos do triangulo *BCD*?
(3) Qual é a somma dos angulos do quadrilatero?

42a. Somma dos angulos de um quadrilatero. — *A somma dos angulos internos de um quadrilatero é igual a 4 rectos* ou 360°. No § **42** fizemos um raciocinio que se póde exprimir algebricamente do seguinte modo:

$\alpha+\beta_1+\delta = 180$ porque?
$\beta_2+\gamma+\delta_2 = 180$ porque?
$\alpha+\beta_1+\beta_2+\gamma+\delta_1+\delta_2 = 360$ porque?
$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360$ porque?

A proposição é verdadeira mesmo para um quadrilatero concavo, mas não o é para um estrellado.

43. *Somma dos angulos externos de um quadrilatero.* Trace um quadrilatero *ABCD* (fig. 54). Prolongue *AB* além de *B*, *BC* além de *C*, *CD* além de *D*, *DA* além de *A*. A somma de todos os angulos da figura vale 8 rectos. Porque? Como póde dahi concluir que $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=4$ rs?

Fonte - (VALENTE, 2005).

Para a tarefa de número 42 exposto na figura 8, vemos o uso de deduções e explicações para se obter a propriedade da soma dos ângulos de um quadrilátero. Para conjecturar esta propriedade, utiliza-se um resultado já verificado acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo e este mesmo resultado para validar tal propriedade. Entretanto, as deduções são acompanhadas por questões que visam levar o estudante a pensar sobre o que foi feito. Por exemplo, no exercício 42, utiliza-se um caso em particular para afirmar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Em seguida, no exercício 42a, o autor expressa a situação anterior algebricamente, cabendo ao estudante justificar cada etapa de dedução.

Dessa forma, tem-se, como era de se esperar, que nos volumes da 1ª e 2ª série de Euclides Roxo se atende as instruções metodológicas, ou seja, um ensino propedêutico da geometria partindo da intuição viva e concreta, exercitando a percepção e a imaginação espacial.

A partir da 3ª série, seria iniciado um estudo mais formal e lógico-dedutivo. Euclides Roxo, no prefácio do livro didático da 3ª série, relembra estes aspectos das instruções:

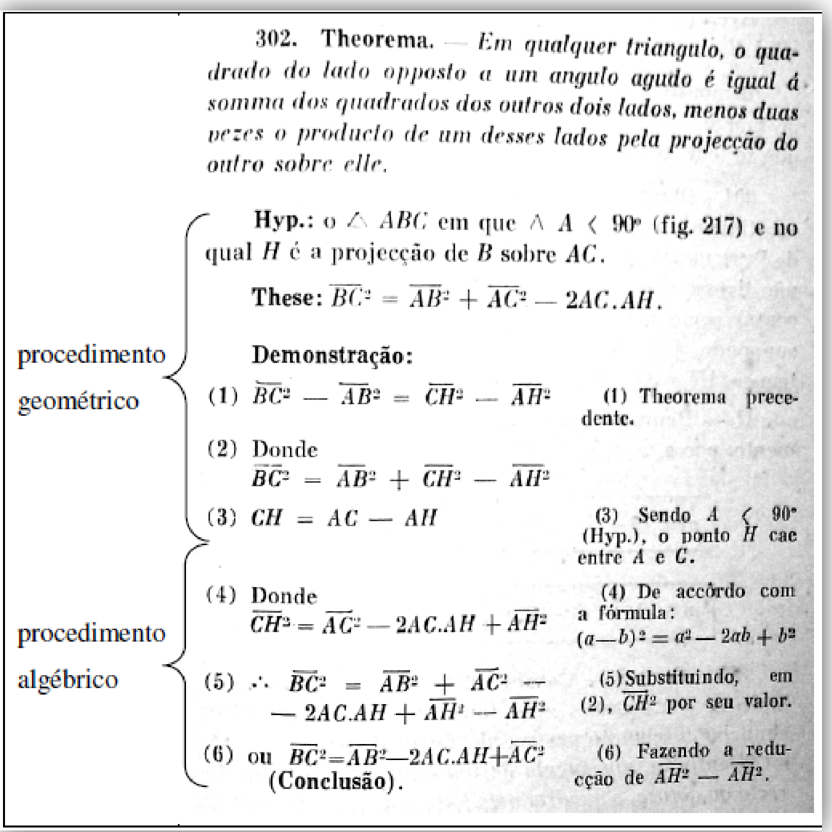
> O ensino da Geometria, que começou nos dois primeiros anos por um curso intuitivo e experimental, attinge agora a fase da exposição formal. Ao iniciar este estudo deductivo, o nosso primeiro cuidado, ainda de accordo com as instrucções ministeriais, foi “fazer sentir ao alumno o que significa uma demonstração, utilizando como ponto de partida, os próprios factos inferidos intuitivamente no curso preparatório (ROXO, 1931 apud VALENTE, 2005).

Euclides Roxo assume que houve excesso no uso das demonstrações no volume da 3ª série, mas deixa para o professor decidir o que deve ser omitido:

> Poderíamos ter reduzido um pouco mais o número de theoremas demonstrados, acceitando sem prova deductiva muitos daqueles factos que no 1º e 2º anno foram estabelecidos intuitiva ou experimentalmente. Receando, entretanto, parecer demasiado innovador, demos as respectivas demonstrações que ficará a critério do professor omitir, segundo as circunstancias (ROXO, 1931 apud VALENTE, 2005).

Segundo Almeida (2008), o volume da 3ª série ressalta um aspecto didático das demonstrações formais, ou seja, este procedimento se tornou, neste volume, objeto de ensino. Roxo (1931) busca ensinar como se faz uma demonstração. Para Almeida (2008), esse aspecto pode ser visto na forma de exposição de uma demonstração utilizada por Euclides Roxo no volume:

Figura 9 - Demonstração do Teorema de Pitágoras em Roxo (1931)



302. Theorema. — *Em qualquer triangulo, o quadrado do lado opposto a um angulo agudo é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o producto de um desses lados pela projecção do outro sobre elle.*

procedimento geométrico

Hyp.: o $\triangle$ ABC em que $\wedge$ $A < 90°$ (fig. 217) e no qual H é a projecção de B sobre AC.

These: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AH$.

Demonstração:

(1) $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$ — (1) Theorema precedente.

(2) Donde $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$

(3) $CH = AC - AH$ — (3) Sendo $A < 90°$ (Hyp.), o ponto H cae entre A e C.

procedimento algébrico

(4) Donde $\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.AH + \overline{AH}^2$ — (4) De accôrdo com a fórmula: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(5) $\therefore$ $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AH + \overline{AH}^2 - \overline{AH}^2$ — (5) Substituindo, em (2), $\overline{CH}^2$ por seu valor.

(6) ou $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2AC.AH + \overline{AC}^2$ (**Conclusão**). — (6) Fazendo a reducção de $\overline{AH}^2 - \overline{AH}^2$.

Fonte – Figura extraída de Almeida (2008, p. 184)

Na demonstração acima (figura 9) vemos a seguinte estrutura: de um lado há as asserções, isto é, as proposições tidas como verdadeiras, e do outro lado há as justificativas. A partir do item 4, as justificativas são algébricas e as conclusões decorrem das manipulações algébricas. Segundo Almeida (2008), essa seria uma estratégia didática nova para aquela época, pois não se priorizava a memorização da demonstração, mas sim a inserção do estudante no processo de demonstrar e se importava com sua compreensão dos passos. Estas são algumas das modificações que observamos quanto a demonstração na obra de Euclides Roxo.

Pode-se dizer que Euclides Roxo, por meio de sua obra inovadora, buscou mudar o ensino de geometria no Brasil; no entanto, observamos que o tratamento lógico-dedutivo, mesmo que se preocupando com seu aspecto didático, continuou a prevalecer em seus livros didáticos e nos posteriores e consequentemente permaneceu nas práticas escolares (CAMARGO, 2009). Inclusive o próprio Euclides Roxo abandonou sua proposta original ao se juntar a Cecil Thiré e Mello e Souza na escrita de outra obra didática.

Quanto a obra "Curso de Matemática" de Cecil Thiré e Mello e Souza, tem-se que foi concebida em um total de 5 volumes, sendo que, a partir do terceiro, Euclides Roxo passou a ser também autor da coleção juntamente aos outros dois.

Os prefácios dos livros didáticos (THIRÉ; MELLO E SOUSA, 1931; 1934; ROXO. THIRÉ; MELLO E SOUSA; 1934; 1936; 1940) são textos ricos em informações sobre a forma que os autores adotaram ou não as orientações da reforma. Muitas vezes os prefácios foram utilizados como um espaço para justificativas sobre a omissão das propostas. Dessa forma, por meio deles podemos ver como o autor pretende usar a demonstração e como a vê em sua obra.

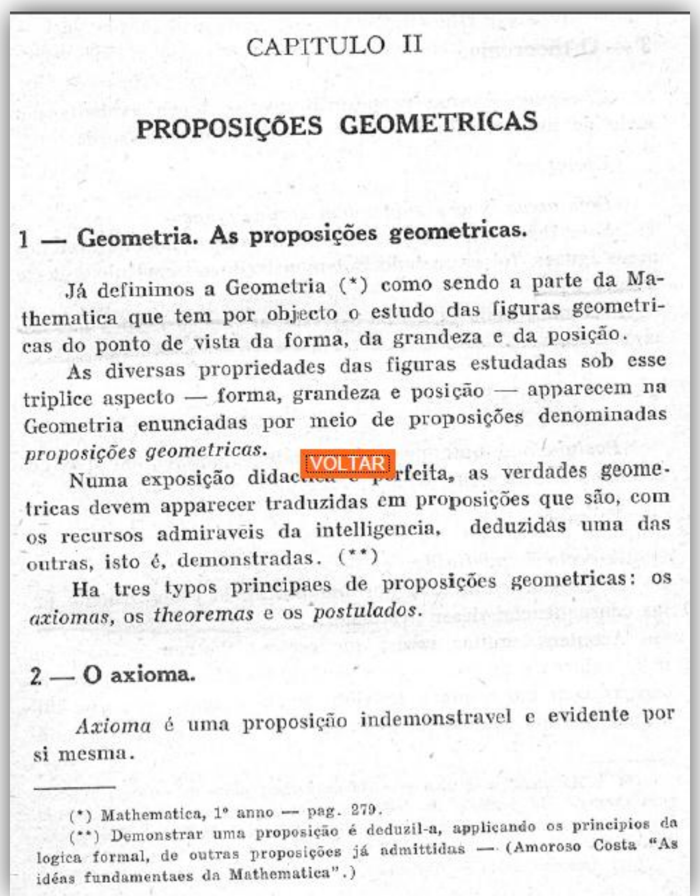
No prefácio referente à 6ª edição do volume do 1º ano do curso ginasial publicada Thiré e Mello e Souza (1934) definem o volume como acentuadamente prático que proporcionará ao estudante uma base para os estudos teóricos que serão feitos nos anos seguintes. Já no volume do 2º ano começará a aparecer, de forma gradativa, "diversos princípios e suas demonstrações rigorosas; os alunos, exercitarão, sem esforço, as suas faculdades de raciocínio sobre teoremas de aplicação quase imediata. Só então poderia o estudante apreciar a profunda verdade que está contida no belíssimo aforisma de Bacon: "Omnis scientia requirit mathematicam" (VALENTE, 2005). Para os autores, seria um erro demonstrar uma série de teoremas complicados no ensino secundário, com a ilusão de desenvolver o raciocínio lógico, mas também seria um erro reduzir esta etapa do ensino a algo infantil e inadequado ao desenvolvimento mental dos estudantes.

A obra “Curso de Matemática” de Cecil Thiré e Mello e Souza foi elaborada como alternativa à de Euclides Roxo, e concorreu e ganhou desta em número de vendas e edições (VALENTE, 2005). Nessa obra os três ramos da matemática voltaram a serem apresentados de forma separada e com poucas conexões; a geometria deixou de ser apresentada de forma dinâmica e voltou a ser estática.

A partir do volume da 3ª série, Euclides Roxo passou a integrar a autoria da coleção, mas precisou eliminar algumas de suas ideias modernas como o método heurístico, o raciocínio intuitivo e o desenvolvimento do pensamento funcional (VALENTE, 2005).

As coleções da 1ª e 2ª série contrariaram as instruções da Reforma Francisco Campos, não explorando a intuição e tratando os conceitos de forma dedutiva já nesses níveis. Segundo Valente (2005), o texto já nestes níveis utiliza termos como axioma, teorema e postulado no ensino de geometria. Vejamos exemplos nas imagens abaixo:

Figura 10 - Trechos da obra “Matemática” de Cecil Thiré e Mello e Souza referente à 2ª série do curso ginasial



CAPITULO II

PROPOSIÇÕES GEOMETRICAS

1 — Geometria. As proposições geometricas.

Já definimos a Geometria (*) como sendo a parte da Mathematica que tem por objecto o estudo das figuras geometricas do ponto de vista da forma, da grandeza e da posição.

As diversas propriedades das figuras estudadas sob esse triplice aspecto — forma, grandeza e posição — apparecem na Geometria enunciadas por meio de proposições denominadas *proposições geometricas.*

Numa exposição didac[illegible]rfeita, as verdades geometricas devem apparecer traduzidas em proposições que são, com os recursos admiraveis da intelligencia, deduzidas uma das outras, isto é, demonstradas. (**)

Ha tres typos principaes de proposições geometricas: os *axiomas*, os *theoremas* e os *postulados.*

2 — O axioma.

Axioma é uma proposição indemonstravel e evidente por si mesma.

(*) Mathematica, 1º anno — pag. 279.

(**) Demonstrar uma proposição é deduzil-a, applicando os principios da logica formal, de outras proposições já admittidas — (Amoroso Costa “As idéas fundamentaes da Mathematica”.)

Fonte - (VALENTE, 2005).

Dessa forma, ao contrário do que estava prescrito nas instruções pedagógicas, já no livro didático do 2º ano do curso ginasial, os autores iniciam a geometria dedutiva, definindo demonstração, axioma, teorema, postulado e definições (figura 10).

A coleção de Jacomo Stávale “1º, 2º, 3º, 4º e 5º ano de Matemática” é composta por cinco volumes. Pode-se dizer que o autor utiliza os prefácios para fazer severas críticas a Euclides Roxo e justificar o porquê de não seguir alguns tópicos da reforma. Uma das suas justificativas se refere a não concordância do não uso do método dedutivo no primeiro ano do curso ginasial:

> Não me é possível concordar com a interdição do método dedutivo no primeiro ano ginasial. Os meninos que constituem esta classe não são anormais; não são incapazes de raciocinar, como geralmente se supõe. São criaturas que têm cérebro; que ainda não sabem pensar com acerto, mas às quais devemos ensinar a pensar. O nosso dever é adextrá-las[30] na arte de raciocinar e a Matemática é uma excelente escola para desenvolver o raciocínio. Eis por que, nestas noções elementares de Matemática, há algumas aplicações simples do método dedutivo (STÁVALE, 1940 apud VALENTE, 2005).

Pelas palavras de Stávale (1940), pode-se dizer que ele valorizava o método dedutivo na matemática escolar. Para ele, era o método dedutivo que desenvolvia o raciocínio com “acerto” e era por meio dele que os alunos deveriam ser adestrados na arte de raciocinar. Entretanto, mesmo não concordando com o não uso do método dedutivo, Stávale (1940), após a introdução do conteúdo de geometria a partir de definições formais, faz uso na 1ª e 2ª série de atividades experimentais para verificar algumas propriedades, como a igualdade entre dois ângulos formados por retas perpendiculares.

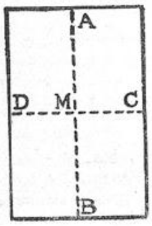
Com o recorte abaixo (figura 11), retirado do volume para o 1º ano do curso ginasial, exemplificamos uma situação em que após a exposição formal da propriedade dos ângulos formados por duas retas perpendiculares, se indica o uso de atividades experimentais para verificar esta propriedade. Num primeiro momento, o autor indica uma maneira de verificar a afirmação de que os ângulos formados por duas retas perpendiculares são iguais: dever-se-ia sobrepor dois ângulos de forma a coincidir o vértice e um dos lados. Se os outros dois lados do ângulo coincidissem, significava que eles eram iguais. Em seguida, o autor ainda faz uso de uma folha para que através de dobraduras mostre que os quatros ângulos serão iguais.

[30] Escrita fiel à do autor.

Figura 11 - Verificação da igualdade entre dois ângulos (STAVALE, 1940, p. 50)

52. Retas perpendiculares. Para verificar a igualdade de dois ângulos, coloca-se um sôbre o outro, de modo que os vértices coincidam e um lado de um dos ângulos coincida com um lado do outro. Se os outros dois lados também coincidirem, os dois ângulos serão iguais.

Exercício. Desenhar dois ângulos com 40° cada um. Recortá-los e verificar, pela justaposição, se êles são realmente iguais. Desenhar um terceiro ângulo com 50°, recortá-lo e verificar que não é possível fazer êste ângulo coincidir com o ângulo de 40°. Os comprimentos dos lados dêstes três ângulos deverão ser diferentes.



Tomemos uma fôlha de papel e dobremo-la em duas partes iguais, no sentido do comprimento. Em seguida, abrindo a fôlha, tracemos a reta AB, ao longo da dobradura. Dobremos novamente a folha de papel em duas partes iguais, mas desta vez no sentido da largura. Em seguida, abrindo a fôlha, tracemos a reta CD ao longo desta segunda dobradura. As duas retas AB e CD se cortam no ponto M, formando 4 ângulos; AMC, CMB, BMD, DMA. Estes 4 ângulos são iguais. Para verificar sua igualdade, é bastante dobrar a fôlha de papel em 4 partes iguais, mas de modo que as linhas retas AB e CD, em lugar de ficarem na parte interior da fôlha dobrada, fiquem na parte exterior. Verifica-se imediatamente que os 4 ângulos coincidem.

Diz-se que *uma reta* AB *é perpendicular a uma reta* CD *quando as duas retas, cortando-se, formam 4 ângulos iguais.* E a reta CD é também perpendicular à AB.

Diz-se que *uma semirreta* AM *é perpendicular a uma reta* CD *quando a semirreta* AM, *encontrando a reta* CD, *forma com ela dois ângulos iguais.* E a reta CD é também perpendicular à AM.

Fonte - (VALENTE, 2005).

No livro didático do 2º ano do colegial (STÁVALE, 1942) também há atividades experimentais como:

Figura 12 - Verificação da propriedade da soma dos ângulos externos de um triângulo (STAVALE, 1942, p. 253)

A soma dos três ângulos externos de um triângulo é igual a 360°.
Copiando os três ângulos externos com papel transparente. e colocando-os um ao lado do outro, na posição de adjacentes (§ 118), veremos imediatamente que sua soma é igual a 360 graus.

Figura 13 - Verificação da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo (STAVALE, 1942, p. 258)

131. Soma dos ângulos de um triângulo. *A soma dos três ângulos de um triângulo é sempre igual a* 180 *graus.*
Tracemos um triângulo qualquer; medindo os três ângulos e somando os resultados, acharemos 180°.

Para provar que a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a 180°, podemos recorrer ao seguinte processo.
Traça-se um triângulo qualquer ABC; em seguida, com papel transparente, copiam-se os três ângulos e colocam-se os mesmos, um ao lado do outro, na posição de adjacentes (§ 118);

ver-se-á imediatamente que os três ângulos reunidos formam um ângulo raso ou ângulo direito, isto é, um ângulo de 180 graus.

Fonte - (VALENTE, 2005).

Nas figuras 12 e 13, mostramos o uso de desenhos, de medições e de comparação de figuras para se verificar afirmativas matemáticas. Pode-se dizer que o autor buscava solicitar construções geométricas para se verificar propriedades e possibilitar que o estudante chegasse às conclusões desejadas. Entretanto, isso não é feito para introduzir o estudo da geometria, mas é mobilizado para exemplificar os conceitos já apresentados formalmente. Segundo Valente (2005), há na obra de Jacomo Stávale, nos primeiros dois volumes, uma grande quantidade de questões de ordem prática, sendo a partir do terceiro volume que o autor passa a utilizar e a ter preferência por exercícios mais conceituais e com demonstrações formais.

Com os exemplos dos livros didáticos, buscamos apresentar nossa interpretação de como os autores adaptaram o uso das demonstrações matemáticas em suas obras às orientações das reformas. É possível ver a resistência em eliminar das primeiras séries a geometria abstrata e formal, e nesse caso as demonstrações formais. Podemos então afirmar que a geometria dedutiva não perdeu espaço para a geometria intuitiva.

Propor mudanças não significa que no cotidiano escolar todas as propostas seriam implantadas. E esta não implantação pode ter sido motivada por diversos aspectos que não cabe à esta pesquisa explorar. No entanto, há pesquisas como a de Alvarez (2004), que nos ajuda a compreender, por exemplo, as apropriações dos princípios da reforma realizadas por professores do ginásio do estado de São Paulo. Alvarez (2004) utilizou diários de classe, questões de provas, cadernos e depoimentos de ex-alunos para compreender a prática pedagógica de professores, no momento da Reforma Francisco Campos.

No que é de interesse dessa pesquisa, observamos pelos escritos de Alvarez (2004) que o método de ensino ainda privilegiava a exposição teórica por meio de teoremas e definições acompanhadas da demonstração ou de métodos de resolução. Alvarez (2004) não identificou o uso da geometria intuitiva, que era uma forma de amenizar o uso do método dedutivo em determinados níveis de ensino, na análise dos diários de classe dos professores, exceto em uma anotação no diário da 3ª série. Segundo a pesquisadora, os professores que participaram da pesquisa concordavam em não exigir um desenvolvimento tão formal da matemática, nos moldes da reforma, mas mesmo assim, o ensino ainda privilegiava as definições de teoremas e definições, mostrando que a geometria continuava sendo abordada pelo método dedutivo.

É possível dizer por meio do que expusemos que o ensino de matemática foi marcado por avanços e retrocessos. Utilizamos a palavra “avanço” não única e exclusivamente com o sentido de melhorar o ensino de matemática, mas no sentido de que indica mudanças e tentativas de rupturas com o tradicional, com o convencional. Vemos o "retrocesso" como dificuldades e resistências de romper com esse tradicional. As reações dos autores de livros didáticos e de professores frente às mudanças indicam o tradicionalismo da matemática, além de mostrar-nos o quanto a geometria euclidiana é valorizada e se mantém presente na escola.

O atual ensino médio, conforme Valente (2011), tem como antepassado os cursos complementares que foram criados na Reforma Francisco Campos, e se constitui nas duas últimas séries do ensino secundário. O curso complementar consistia em preparar os estudantes para o ensino superior e se dividia em três modalidades em que a matemática poderia ou não ser uma disciplina obrigatória. Entretanto, por extrapolar os conteúdos de geometria plana e espacial que estamos considerando na pesquisa, não teceremos considerações quanto aos cursos complementares.

Em 1931, a Reforma Francisco Campos se preocupou com conteúdos e a metodologia a ser utilizada na disciplina Matemática. Em 1942, a Reforma Capanema elencou os conteúdos das disciplinas que deveriam ser abordados em cada série do ensino secundário (VALENTE, 2004), além de reestruturar o curso secundário em dois ciclos em que o primeiro seria o curso ginasial com duração de 4 anos e o segundo ciclo abrigaria tanto os cursos clássicos – estudo das letras antigas – quantos os científicos – estudo das ciências – ambos com duração de 3 anos. Com a reforma, os cursos ministrados em anexos da universidade passaram a ocorrer nas escolas e ser conhecido por colégio.

A finalidade do ensino secundário passou a ser proporcionar uma cultura geral e humanística. Visava-se por meio do ensino secundário preparar o homem para assumir responsabilidade dentro da sociedade e da nação. Segundo Marques (2005), com o ensino secundário, tinha-se a "intenção de alimentar uma ideologia política definida em termos de patriotismo e nacionalismo de caráter fascista" (p.40). Além disso, o ensino deveria dar condições ao ingresso no ensino superior e a formação de lideranças (MARQUES, 2005). Assim, as finalidades do ensino secundário nessa nova reforma são marcadas pelo momento histórico e "acentuam a velha tradição do ensino secundário acadêmico, propedêutico e aristocrático" (p. 40):

> O que constitui o caráter específico do ensino secundário é a sua função de formar nos adolescentes uma sólida cultura geral, marcada pelo cultivo a um tempo das humanidades antigas e das humanidades modernas, e bem assim, de neles acentuar e elevar a consciência patriótica e a consciência humanística (...) O ensino secundário tem mais precisamente por finalidade a formação da consciência patriótica (BRASIL, 1942 apud VALENTE, 2005).

Em 1942, com a nova reforma, Gustavo Capanema expediu os programas de matemática no documento chamado Lei Orgânica do Ensino Secundário e Legislação Complementar. Esta lei não dispunha de instruções metodológicas, mas podemos observar que os novos programas de matemática suprimiram o ensino articulado da aritmética, álgebra e geometria por meio da noção de função. Além disso, respeitou a ideia presente na Reforma Francisco Campos quanto à iniciar o ensino de geometria de maneira intuitiva. Dessa forma, vemos a predominância de ideia de uma matemática mais concreta, sem muita abstração na 1ª e 2ª série, e de uma matemática que aborda aspectos que exigem mais do raciocínio lógico-dedutivo nas 3ª e 4ª séries.

Os programas de matemática da Reforma de Capanema eram mais extensos do que a da Reforma Francisco Campos e as orientações quanto ao trabalho com as demonstrações eram menos claras e tinha menos destaque do que na primeira (PIETROPAOLO, 2005). Pietropaolo (2005) apresenta o único trecho em que aparece a palavra demonstração:

> Ao estudo das ciências num e no outro caso, orientará sempre o princípio de que não é papel do ensino secundário formar extensos conhecimentos, encher os espíritos dos adolescentes de problemas e demonstrações, de leis e hipóteses, de nomenclatura e classificações, ou ficar na superficialidade, na mera memorização de regras, teorias e denominações, mas cumpre-lhe essencialmente formar o espírito científico [...] nas aulas os alunos terão que discutir e verificar, terão que ver e fazer (p. 16). (BRASIL, 1942 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 103)

Deveria haver cuidado ao se utilizar as demonstrações, evitando sua memorização e reprodução, mas proporcionando uma formação ao estudante em que ele participaria ativamente, discutindo e verificando resultados.

Observamos ainda por meio da leitura das Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos e da Lei Orgânica da Reforma Capanema que estes documentos não fazem referência à importância da demonstração para a formação do aluno, conforme vemos em momentos anteriores da educação. Pietropaolo (2005) conjectura que isso pode ter ocorrido pelo fato de ser óbvia essa importância, pois se tratava do ensino de matemática. O que vemos são critérios para o uso desse procedimento em salas de aulas pelos professores, com precauções, pré-requisitos, cuidando para que este não cometa exageros.

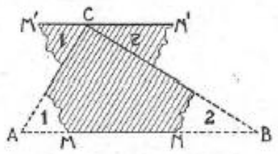
Com relação aos livros didáticos que se diziam de acordo com a reforma, Valente (2004) observa que mesmo chamando a disciplina de matemática, alguns autores mantiveram os conteúdos aritmética, álgebra e geometria separados.

A coleção “Matemática Ginasial” de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza foi elaborada para substituir a coleção “Curso de Matemática” lançado em 1931. No que se refere à geometria, diferentemente do que ocorreu nos dois primeiros volumes da coleção lançada em 1931, em que a abordagem da geometria se mostrou extremamente formal, a coleção para a Reforma Capanema se mostrou preocupada com a experimentação e a intuição (VALENTE, 2005). Valente (2005) conjectura que a mudança pode ter ocorrido por conta da presença de Euclides Roxo desde a escrita do primeiro volume da coleção "Matemática Ginasial". Vejamos abaixo um exemplo de uma atividade experimental:

Figura 14 - Verificação da soma dos ângulos de um triângulo (ROXO et al, 1943, p. 55)

83. Soma dos ângulos de um triângulo.

Recortemos um triângulo em papel ou cartolina. Rasguemos dois cantos (1 e 2) da figura e somemos os ângulos que eles representam com o terceiro colocando-os como está indicado na figura ao lado. Verifica-se que o pedaço *AM* do lado *AB*, que parte de *A*,



vai ficar no prolongamento *CM'*, da nova posição *CN'* que vai ocupar o pedaço *BN*, do mesmo lado, que parte de *B*.

Da experiência acima se conclui a seguinte propriedade:

A soma dos ângulos de um triângulo vale dois retos, isto é, 180°.

Representando-se por *A*, *B* e *C* as medidas em graus, dos ângulos de um triângulo qualquer, podemos escrever:

$$\boxed{A + B + C = 180^\circ}$$

Temos a relação geralmente conhecida pelo nome de *lei angular de Tales* (*)

(*) *Tales de Mileto*, (640-546 a J.C), um dos sete sábios da Grécia, foi o primeiro a estudar logicamente a Matemática e a ele devemos a demonstração das primeiras propriedades das figuras.

Fonte - (VALENTE, 2005).

Com a figura 14, ilustramos o uso de uma atividade experimental pelos autores. Nessa situação, é solicitado que os estudantes recortem um triângulo e separe os seus ângulos internos e em seguida os justaponham. A experiência permite concluir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Entretanto, apesar de a coleção explorar situações experimentais e intuitivas, Valente (2005) diz que ainda se apresentava de maneira formal algumas noções de geometria nas duas primeiras séries.

Conforme era esperado a partir da 3ª série do curso ginasial, passou-se a desenvolver a geometria dedutiva, ou seja, essa área passou a assumir uma abordagem formal e carregada de demonstrações. Vejamos a seguir, como um exemplo dessa afirmação, um recorte do sumário do volume da 3ª série:

Figura 15 - Sumário do livro Matemática Ginasial 3ª série (ROXO et al, 1945, p. 294)

GEOMETRIA DEDUTIVA

UNIDADE VI

Introdução à geometria dedutiva

Fonte - (VALENTE, 2005).

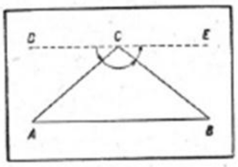
Na figura 15, apresentamos o recorte do sumário do livro "Matemática Ginasial" da 3ª série. A partir da unidade VI do livro, o autor passou a tratar dos conceitos geométricos de forma lógico-dedutiva, em que iniciou apresentando o que são proposições, hipóteses e conclusões; elementos importantes para a elaboração e compreensão de uma demonstração. O autor prosseguiu, apresentando as noções comuns – ponto, linha, superfície, reta e plano -, e em seguida trabalhou como diversas demonstrações de teoremas.

Podemos ver também na obra de Algacyr Maeder "Curso de Matemática" de que forma a demonstração era utilizada. Maeder (1944), no prefácio do primeiro volume, defendeu a matemática intuitiva e experimental. Entretanto, segundo Valente (2005), isso não foi condizente com a forma que desenvolveu seu livro: "as análises nos mostram que a apresentação das noções geométricas é baseada no uso da linguagem formal, com pouco espaço para situações experimentais a serem vivenciadas pelos alunos" (VALENTE, 2005, p. 4). A seguir apresentamos um exemplo:

Figura 16 - Verificação da soma dos ângulos de um triângulo presente no volume da 2ª série

72. **Somma dos angulos de um triangulo.** — *A somma dos tres angulos de um triangulo é egual a dois angulos rectos* (¹).

Com effeito, pelo vertice C do triangulo ABC, figura ao lado, tiremos DE, parallela a AB, e notemos que (n.º 20)



$$BCE + ACB + ACD = 2R. \quad (1)$$

Mas, tendo em vista que

$$BCE = ABC \quad e \quad ACD = BAC,$$

como angulos alternos de parallelas cortadas por transversal (n.º 57) segue-se, fazendo-se as substituições correspondentes na egualdade (1).

$$ABC + ACB + BAC = 2R$$

ou, simplesmente,

$$A + B + C = 2R.$$

Fonte - (VALENTE, 2005).

O exemplo acima está presente no volume da 1ª série ginasial, no qual o autor já para esta série faz uso da geometria dedutiva. Com o recorte (figura 16), podemos dizer que o autor faz uso de uma figura como apoio visual para desenvolver as deduções.

Observamos que os livros didáticos se diziam seguir as orientações curriculares, mesmo que indicassem a não concordância com algumas decisões; muitas vezes antes da 3ª série a geometria dedutiva estava presente na matemática escolar, ainda que, temos de reconhecer, sua maior recorrência acontecia a partir da série mencionada.

Apresentamos nesta seção algumas das alterações, com foco nas demonstrações, que ocorreram nos livros didáticos da época mediante a reforma ocorrida. Entretanto, segundo Fiorentini (1995), no geral os livros didáticos anteriores à década de 50, com algumas exceções, reproduziam o modelo euclidiano, que se caracterizava pela "sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos primitivos (definições, axiomas, postulados). Essa sistematização é expressa através de teoremas e corolários que são deduzidos dos elementos primitivos" (p. 5). Após a apresentação dos teoremas demonstrados surgiam os exercícios de aplicação.

Essa grande ênfase nas demonstrações podem ser justificadas, por que no final do século XIX e inicio do século XX, havia uma tendência em que tudo deveria ser "justificado e argumentado, ou melhor, demonstrado logicamente" (FIORENTINI, 1995, p. 6). E assim, a geometria assumiu um lugar importante no currículo escolar.

Fiorentini (1995) aponta uma dualidade curricular no ensino de matemática: o ensino não era o mesmo para as classes menos favorecidas e à dominante. Quanto as classes menos favorecidas, "privilegiava-se o cálculo e a abordagem mais mecânica e pragmática da Matemática", e quanto a classe dominante o ensino era "mais racional e rigoroso, o que seria garantido pela geometria euclidiana" (p. 7). Ou seja, o ensino de matemática tinha o poder de separar classes sociais e de enfatizar suas diferenças por meio de sua abordagem. A demonstração em meio a esse contexto servia como um símbolo de valorização da matemática.

Considerando-se o ensino de matemática no Brasil até o final da década de 50, esse ensino era, salvo raras exceções, caracterizado pela ênfase ao modelo euclidiano e à concepção platônica da matemática (FIORENTINI, 1995). Frente a críticas que surgiram ao formalismo clássico pelos escolanovistas, surgem livros didáticos com atividades mais práticas e diminuem-se a ênfase nas justificativas. Essas ideias, que Fiorentini (1995) chama de tendência empírico-ativista, surgem no Brasil a partir da década de 20, em que Roxo é um dos seus representantes.

Com isso, passa-se a valorizar a manipulação ou a experimentação na aprendizagem da matemática. Um exemplo é o uso de recortes e dobraduras para se verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180º. Segundo Fiorentini (1995), além de contribuir para a constituição da disciplina Matemática, essa tendência favoreceu o surgimento de livros com figuras e com uma abordagem mais prática.

Em relação a temática das demonstrações, essa forma mais pragmática do ensino de matemática implicou em mudanças na forma de lidar com as demonstrações na escola, pois, por meio de manipulações e atividade práticas, passou-se a elaborar "generalizações ou abstrações de forma indutiva e intuitiva (FIORENTINI, 1995, p. 12). Entretanto, essas mudanças ficaram restritas aos níveis de ensino mais elementares, e muitas vezes até nesses níveis as demonstrações formais se faziam presentes. Para as séries finais do curso ginasial, era consenso a necessidade de propor demonstrações formais excluindo qualquer tipo de experimentação.

Apesar de observar exceções, podemos afirmar que a demonstração era bem estabelecida nos livros didáticos, os quais em sua grande maioria, demonstravam todos os teoremas.

2.2.2. A demonstração em geometria e o Movimento da Matemática Moderna

A geometria presente no ensino secundário no Brasil que antecede o Movimento da Matemática Moderna (MMM) era, segundo Matos e Silva (2011), basicamente a geometria euclidiana, ou seja, baseada em axiomas de Euclides. Quanto às demonstrações, Vianna (1988) nos diz que:

> Antes do advento da Matemática Moderna no ensino, o dedutivo era tido como bem estabelecido, nos livros e para os professores. As demonstrações eram apresentadas com certa reverência e estavam rodeadas por uma auréola de autoridade que impunha respeito (VIANNA, 1988, p. 6).

Por meio das reformas ocorridas entre as décadas de 30 e 50 este ensino passou a sofrer modificações, se não na prática ao menos curriculares.

O período de 1950 até o final do século XX compreendeu mudanças no ensino de matemática, tendo sido provocadas principalmente pelo MMM, que, diferentemente dos que foram mencionados anteriormente, não foi um movimento brasileiro e institucional, mas internacional.

Segundo Miorim (1995), assim como ocorreu no primeiro movimento, no início do século XX, uma das fortes motivações a favor do MMM está relacionada ao descompasso entre a matemática ensinada nas escolas de nível médio e os avanços científicos e tecnológicos. A preocupação em modernizar o ensino de matemática foi provocada principalmente pelo campo político-econômico, em que podemos citar a baixo nível de conhecimentos matemáticos dos soldados americanos durante a Segunda Guerra Mundial e o lançamento do foguete Sputnik, pondo-se em destaque a desvantagem tecnológica dos Estados Unidos em relação a então União Soviética, e o obrigando a repensar o ensino de ciências e matemática.

O MMM tinha os seguintes propósitos: unificar os três ramos fundamentais da matemática por meio da teoria dos conjuntos, estruturas algébricas, relações e funções; dar maior ênfase aos aspectos lógicos e estruturais da matemática em detrimento do prático, mecanizado e não-justificado; e abordar uma matemática mais contemporânea nos 1º e 2º graus (FIORENTINI, 1995).

Além disso, segundo Sousa (1999), a matemática moderna que foi para o currículo teve o objetivo de

> (...) tratar simultaneamente várias estruturas que vão determinar sua forma, (...) é necessariamente axiomática, dedutiva e abstrata. É o resultado direto da multiplicidade de espaços e geometrias e da multiplicidade de estruturas algébricas desenvolvidas pela Matemática Clássica. (...) está para a clássica assim como a álgebra elementar está para a aritmética elementar" (ADLER, 1970 apud SOUSA, 1999, p. 28).

Pelas palavras de Miorim (1998): com o MMM "os alunos não precisariam "saber fazer", mas, sim, "saber justificar" por que faziam" (p. 114).

Esta matemática moderna considerava os trabalhos desenvolvidos por matemáticos no século XIX, enfatizavam o rigor, a abstração e trouxe "embutido em si" (SOUSA, 1999), o programa desenvolvido pelo grupo Bourbaki[31]. Os trabalhos deste grupo procuravam considerar a "economia de pensamento" (SOUSA, 1999, p. 28), eliminando qualquer recurso à intuição, o que para eles daria uma base sólida à matemática. Além disso, o MMM foi reforçado por estudos psicológicos, principalmente os desenvolvidos por Jean Piaget.

Quanto a isso, Pires (2008) nos diz que no período do MMM

> o grande empenho era o de aproximar o ensino escolar da ciência, de se ter uma Matemática útil para a técnica, útil para a ciência, útil para a economia moderna. Assim, o que se colocou em prática estava distante de ser um ensino renovado e democrático da Matemática, preparando o aluno para a compreensão da ciência, mas

[31] "(...) foi o nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, na maioria franceses, dentre eles, Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil, que tinham a intenção de apresentar toda a Matemática de seu tempo em uma obra intitulada Élements de mathématique. O primeiro volume dessa obra apareceu em 1939." (MIORIM, 1998, p. 110).

> um ensino formalizado ao extremo, decepado de todo suporte intuitivo, apresentado a partir de situações artificiais e, além de tudo, bastante seletivo (PIRES, 2008, p.3).

O MMM provocou também mudanças no currículo de geometria. Entretanto, segundo Matos e Silva (2011), as propostas de modernização não apresentaram um consenso quanto ao ensino da geometria. Nos fóruns de discussão da conferência em Royaumont[32] apresentaram-se duas posições diferentes quanto ao seu ensino. Uma delas seria a proposta de Jean Dieudonné, muitas vezes simplificada com a frase "Abaixo Euclides!". Segundo Matos e Silva (2011), a proposta de Dieudonné,

> segue uma visão kleiniana da geometria como o estudo de grupos de transformação ocorrendo em espaços específicos e traduz-se sobretudo numa valorização da Álgebra e da Geometria Vetorial suportadas numa linguagem e simbologia precisas, com a correspondente desvalorização da geometria de Euclides (p. 173).

A contestação de Dieudonné não era quanto à eliminação da geometria de Euclides, mas quanto à metodologia do ensino da geometria usada na época.

Uma segunda posição se resumia em manter uma abordagem axiomática, mas utilizando outros conjuntos de axiomas.

Com relação ao MMM no Brasil, as primeiras manifestações oficiais foram feitas por meio de Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática, que ocorreram em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1962) e Belém (1967).

Uma maneira de compreendermos como se colocava em pauta as demonstrações no ensino de geometria é olharmos para a discussão dos anais dos primeiros congressos. Por meio da análise realizada por Camargo (2009), pode-se dizer que a geometria lógico-dedutiva ainda prevalecia no ensino e nas discussões educacionais. Segundo a autora, por meio dos anais, pode-se ver que em momento algum se buscou solucionar o problema do ensino da geometria dedutiva nas propostas levantadas por professores que discutiam o ensino dessa área. O que se buscou, assim como nas reformas passadas, foi retomar o uso da geometria experimental, outrora, defender a não necessidade de demonstrar todos os teoremas, ou seja, a geometria lógico-dedutiva seria desenvolvida para "iniciar os alunos nos métodos demonstrativos" (CAMARGO, 2009, p. 69), destacando quais os teoremas deveriam ser demonstrados e quais não. Houve também quem buscou apresentar alternativas para que

[32] Em 1959, a Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE) organizou a Conferência Internacional em Royaumont, com duração de duas semanas e contou com a participação de matemáticos de vinte países (MIORIM, 1995), onde discutiram propostas de mudanças para o ensino de matemática. Nessa conferência ficaram estabelecidas as bases para o MMM. A matemática escolar deveria ser estudada para atingir os seguintes objetivos: "a) formativo, com a finalidade de desenvolver as capacidades mentais e intelectuais; b) preparação dos alunos para prosseguir os estudos; c) instrumental, com a finalidade do aluno, ao final do curso, inserir-se na vida profissional" (CAMARGO, 2009, p. 43).

não houvesse dificuldades quanto à geometria lógico-dedutiva, em que indicava que "para que não houvesse dificuldades por parte dos alunos, dever-se-ia iniciar o estudo da geometria lógico-dedutiva utilizando a demonstração experimental e pouco a pouco introduzir a demonstração rigorosa" (CAMARGO, 2009, p. 69).

Segundo Camargo (2009), por meio da análise dos três primeiros congressos, pode-se dizer que as discussões giravam em torno de se ensinar geometria intuitiva antes da dedutiva, como uma forma de sanar e evitar dificuldades futuras quanto às demonstrações formais.

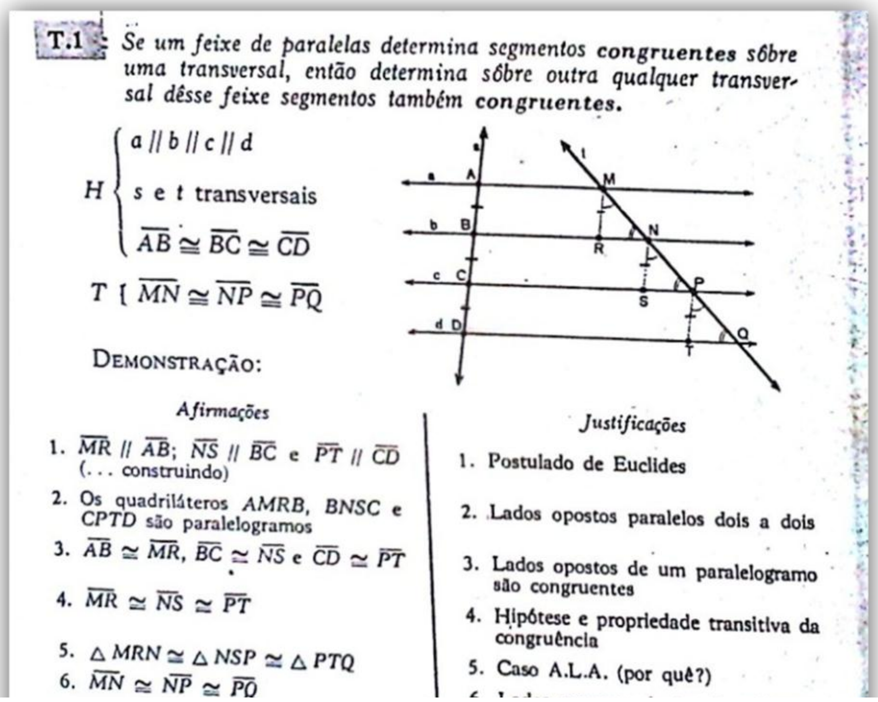
A geometria, no decorrer do MMM, não poderia mais ser ensinada à maneira tradicional. Assim, acentuam-se nos livros didáticos as noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano. A abordagem intuitiva aparece nos livros didáticos pela utilização de teoremas como postulados, a partir dos quais é possível resolver problemas. "Não existe, agora, uma preocupação em construir uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas" (PAVANELLO, 1989, p.163).

Com o enfoque formalista prescrito pelo movimento, era natural que o método dedutivo tivesse ênfase no ensino. Segundo Vianna (1988), longe de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes, passou-se a abordar nos livros didáticos atividades para se demonstrar, por meio de esquemas de completar espaços. Dessa forma, houve uma preocupação didática em fazer com que a demonstração passasse a ser feita e que se justificasse os passos utilizados em vez de observar e repetir sem compreensão.

Ainda com relação aos livros didáticos, Vianna (1988) nos diz que anteriormente ao movimento parecia haver neles uniformidade na abordagem da geometria. Com o MMM, começam a surgir distinções, que variaram de acordo com o envolvimento do autor com o movimento, mas também da "crença se seriam pedagogicamente aplicáveis e da coragem de romper com os padrões tradicionalmente aceitos" (p. 16). Isso se dava também quanto à abordagem das demonstrações nos livros didáticos.

Houve também em alguns livros didáticos mudanças quanto à forma de apresentar as demonstrações. Um exemplo (figura 17), retirado do 4º volume da coleção de Sangiorgi (1970), mostra que as demonstrações eram desenvolvidas em duas colunas denominadas "afirmações" e "justificações", havendo na primeira coluna o uso de proposições tidas como verdadeira e na segunda coluna as justificativas quanto a elas.

Figura 17 - Demonstração do Teorema de Tales em Sangiorgi (1970)



T.1 *Se um feixe de paralelas determina segmentos* **congruentes** *sôbre uma transversal, então determina sôbre outra qualquer transversal dêsse feixe segmentos também* **congruentes.**

$$H \begin{cases} a \parallel b \parallel c \parallel d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$; $\overline{NS} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PT} \parallel \overline{CD}$ (. . . construindo)	1. Postulado de Euclides
2. Os quadriláteros $AMRB$, $BNSC$ e $CPTD$ são paralelogramos	2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. $\overline{AB} \simeq \overline{MR}$, $\overline{BC} \simeq \overline{NS}$ e $\overline{CD} \simeq \overline{PT}$	3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. $\overline{MR} \simeq \overline{NS} \simeq \overline{PT}$	4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. $\triangle MRN \simeq \triangle NSP \simeq \triangle PTQ$	5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. $\overline{MN} \simeq \overline{NP} \simeq \overline{PQ}$	

Fonte – Matemática: curso moderno (SANGIORGI, 1970, p. 145)

Entretanto, é importante salientar que nem todas as demonstrações apresentadas por Sangiorgi (1970) tinham essa estrutura. Encontramos demonstrações também no seguinte estilo: indica-se a hipótese, tese e em seguida a demonstração.

Há também outra diferença com a forma de desenvolver uma demonstração por Sangiorgi (1970): o uso da álgebra e das manipulações algébricas no desenrolar da demonstração. Se formos comparar às demonstrações de Euclides, por exemplo, esse fato não ocorria.

Na figura 18, exemplificamos uma situação em que Sangiorgi (1970) faz uso da álgebra e das manipulações algébricas no desenrolar da demonstração. No exemplo, o autor cita inicialmente o teorema que diz sobre uma relação do ângulo agudo de um triângulo. Em seguida, há o uso de uma imagem representativa da situação, bem como a exposição da hipótese e da tese, isto é, do resultado que se deseja demonstrar. A partir do triângulo construído, duas relações de igualdade são explicitadas e utilizadas para se deduzir a tese por meio de manipulações algébricas.

Figura 18 - Demonstração das propriedades de um triângulo qualquer

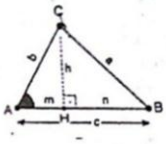
Relações métricas num triângulo qualquer

14. *Relação com o ângulo agudo*

T.12 : *Num triângulo qualquer o quadrado da medida do lado oposto a um ângulo **agudo** é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, **menos** duas vêzes o produto da medida de um dêstes lados pela medida da projeção do outro sôbre aquêle lado.*

H { $\triangle ABC \mid \hat{A}$ é agudo

T { $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$



DEMONSTRAÇÃO:

Traçando $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, vem:

$\triangle CHB$, retângulo $\Longrightarrow a^2 = h^2 + n^2$ (Pitágoras)

$\triangle CHA$, retângulo $\Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2$ e $n = c - m$ (porque: $c = m + n$)

Substituindo êsses valôres em:

$$a^2 = h^2 + n^2$$

temos: $$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2$$

ou $a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Longleftrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cm}$ c.q.d.

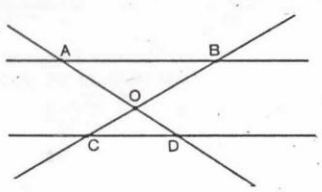
Fonte - Matemática: curso moderno (SANGIORGI, 1970, p. 195)

Pode-se dizer ainda que as demonstrações faziam parte dos exercícios propostos aos estudantes, como se pode observar no recorte que fizemos de uma série de exercícios em que a demonstração era solicitada:

Figura 19 - Exercícios propostos (SANGIORGI, 1970)

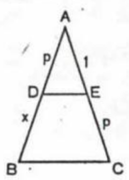
5. *Dados:* $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{O\}$

Prove que: $AB = DC \cdot \frac{BO}{CO}$



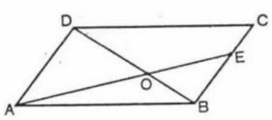
6. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$

Prove que: $x = p^2$



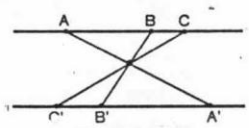
7. *Dado:* paralelogramo $ABCD$

Prove que: $DO \cdot EO = BO \cdot AO$



8. *Dado:* $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overline{A'C'}$

Prove que: $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$



TEOREMAS (acêrca de Semelhança) — GRUPO 58

Demonstre que

1. Dois triângulos isósceles são semelhantes quando os seus ângulos dos vértices são congruentes.
2. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando um ângulo agudo de um dêles é congruente a um ângulo agudo do outro.
3. Dois triângulos que têm os lados correspondentes paralelos ou perpendiculares, são semelhantes.

Fonte - Matemática: curso moderno (SANGIORGI, 1970, p. 167 e 168)

Por meio dos escritos de Sangiorgi (1971) e pelo uso em seu livro didático, podemos dizer que se manteve a valorização da demonstração no ensino de matemática. No volume da 3ª série do curso ginasial, inclusive, o autor fala sobre a demonstração:

> Suponhamos que você tenha verificado experimentalmente que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Mesmo que essa propriedade seja verdadeira para "um milhão de triângulos isósceles" sem que a verificasse para um triângulo de cada vez!
> Daí a necessidade de se ter um processo dedutivo – denominado demonstração – que possa justificar plenamente ser verdadeira a citada propriedade para qualquer triângulo isósceles, independentemente do tamanho da figura ou da precisão com que foi desenhada. Este é o poder de generalização de uma demonstração em Matemática, que permite construir logicamente a Geometria.
> Demonstra-se que a informação expressa numa sentença é verdadeira, mediante um processo dedutivo, desenvolvido sucessivamente por intermédio de resultados conhecidos, mais elementares, já comprovados ou aceitos como verdadeiros (SANGIORGI, 1971 *apud* FERREIRA, 2008, p. 88).

A demonstração é mobilizada pelo autor da maneira tradicional e com o mesmo objetivo: verificar a verdade de fatos matemáticos mediante resultados conhecidos. Desse modo, podemos dizer que mesmo através de tamanha reforma no ensino de matemática, a demonstração foi mantida no ensino com algumas diferenças metodológicas.

Apesar de diversos grupos e dos congressos oferecerem orientações quanto ao ensino da matemática moderna, particularmente quanto à geometria, esse novo enfoque não conseguiu se manter na escola. O que acabou acontecendo foi que posteriormente houve a relegação da geometria a um segundo plano, assumindo um lugar não muito significativo no currículo.

Para Vianna (1988), há pelo menos dois motivos que influenciaram o abandono da geometria: ser rigorosa e abstrata. Por ela ser rigorosa, era ultrapassada, "tolhe a liberdade e criatividade do aluno" (p. 20); ser abstrata era visto como sinônimo de difícil, além da não valorização dos "aspectos práticos-utilitários (...) numa época de crescente popularização do pragmatismo, parecia muito grave" (p. 20). Dessa forma, a geometria foi abandonada:

> O reflexo começou a ser sentido nos livros didáticos, se bem que de uma forma mais lenta que nas salas de aula. Talvez porque registrar a desvalorização do dedutivo seja por demais audaciosa e já a postura dos professores não é publicada. Os livros didáticos conservaram as demonstrações dos teoremas mais tradicionais, como o de Tales e o de Pitágoras, mas na parte de exercícios mudaram drasticamente. Diminuíram ou mesmo aboliram quaisquer exercícios de caráter lógico ou para demonstrar (VIANNA, 1988, p. 20).

Essa tendência de ensino que relega a demonstração no ensino de matemática ao segundo plano ocorreu no final da década de 60 até o final da década de 70. Isso não se deu, em vista de questionamento quanto a pertinência desse procedimento típico da matemática acadêmica na escola, mas por conta de uma nova pedagogia, que visava tornar os estudantes eficientes e funcionais. Segundo Fiorentini (1995), nessa época os livros didáticos procuraram seguir essa tendência.

Dessa forma, a matemática foi reduzida a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos sem necessidade de justificá-los. A prioridade era o fazer e não o compreender, refletir, analisar e provar (FIORENTINI, 1995).

No fim da década de 70, começa-se a buscar pela superação dessa situação, ou seja, ao retorno da geometria, sendo motivada pelo “esvaziamento do ensino de geometria” (MIGUEL et al, 1992, p. 50):

> Este “retorno” à geometria não consiste nem na retomada pura e simples da geometria euclidiana, na sua abordagem clássica, nem na reafirmação do papel que ela desempenha no currículo escolar dos períodos anteriores; mantêm-se, sobretudo, conceitos e propriedades fundamentais próprios da geometria euclidiana numa abordagem inicial que privilegia os aspectos intuitivos e experimentais encaminhando-se, gradativamente, para deduções locais daquelas proposições mais fundamentais (MIGUEL et al, 1992, p. 50).

Ou seja, nesse momento a ênfase recaiu nos aspectos empíricos da geometria, que segundo Andrade (2004), foi marcado pela busca por motivações para o seu ensino. Com isso, a ênfase a uma abordagem mais experimental começou a substituir a geometria axiomática.

Esse quadro passou a ser modificado também por meio das avaliações nacionais dos livros didáticos, em que atividades envolvendo processos de inferência, análise, argumentação, tomada de decisões, críticas e validação de resultados passaram a ser novamente valorizadas e por meio das produções da comunidade de educadores matemáticos (ANDRADE, 2004).

Apesar de na primeira metade do século XX ter havido no Brasil mudanças curriculares significativas focando conteúdos, metodologias e objetivos para o ensino de matemática, vimos, pelo exposto, que no que concerne às demonstrações, seja nas prescrições dos documentos oficiais ou nos livros didáticos, houve poucas alterações. As mudanças que envolviam de forma direta ou indireta as demonstrações eram de caráter metodológico. Elas continuaram a fazer parte do ensino de geometria, até que houve seu abandono no ensino de matemática.

Mudanças no ensino dessa disciplina continuaram ocorrendo, das quais podemos citar as reformas contrárias ao MMM (1980 a 1994) e a influência dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

2.2.3. A demonstração em documentos oficiais elaborados a partir da década de 80

Na segunda metade do século XX, mais especificamente a partir da década de 80, houve uma renovação de ideais educacionais brasileiros motivados, dentre outros fatores, pelo fim da ditadura militar. Duas das reformas educacionais provenientes das políticas públicas que podemos citar são: o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a instituição de Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Os debates que ocorreram sobre o MMM motivaram as secretarias estaduais e municipais de educação a elaborarem propostas para o ensino de matemática. Conforme nos mostra Pires (2008), as propostas curriculares nacionais que surgiram nas reformas Campos e Capanema foram gradualmente substituídas por propostas regionais (não obrigatórias) que eram elaboradas pelas secretarias estaduais e municipais de ensino (década de 70/80). Esse fato possibilitou uma flexibilização do currículo escolar, mas acarretou, segundo Pires (2008), graves problemas, pois com essa elaboração, enfatizou-se ainda mais as diferenças regionais, ou seja,

> regiões mais desenvolvidas economicamente e socialmente, com maior acesso à produção de conhecimentos, reuniam melhores condições de elaborar projetos curriculares contemporâneos, incluindo avanços das pesquisas (...) as demais (regiões) continuavam reproduzindo listas de conteúdos sem maior reflexão sobre a relevância destes e sem discutir questões referentes à sua abordagem (PIRES, 2008, p. 9).

Uma proposta curricular que surgiu foi a do estado de São Paulo em 1992, e que é considerada por alguns dos livros didáticos que iremos analisar nessa pesquisa.

Em 1985, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo passou a elaborar as Propostas Curriculares para o ensino de 1º e 2º graus. Esta elaboração contou com uma equipe da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), com professores da educação básica pública e docente de universidades estaduais paulistas. Segundo Ferreira

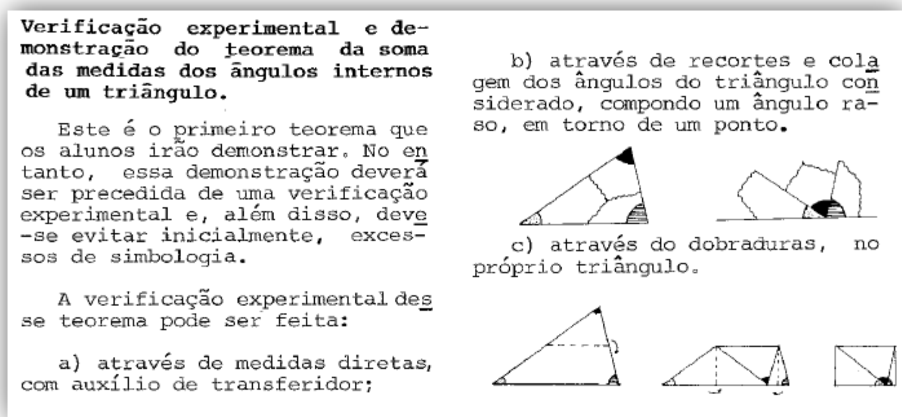
(2008), este documento apresenta reflexões sobre o papel da matemática no currículo e sobre problemas no ensino, relacionadas ao MMM.

O documento apresenta justificativas para sua elaboração, estando entre elas, o abandono da geometria e a formalização precoce no ensino de matemática que não respeita o desenvolvimento do aluno. Vemos que se mantém o ensino gradativo, partindo-se da intuição até o pensamento lógico-dedutivo, mas se orienta um trabalho em “espiral”:

> diferentes ocasiões, que sejam convenientes, de modo a permitir sua elaboração e reelaboração por parte do estudante, desde um primeiro contato, em que ele capta intuitivamente as idéias básicas e as aplica em situações-problema, até a fase em que é utilizado o pensamento lógico-dedutivo, permitindo uma progressiva formalização e sistematização do conceito enfocado (PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 1º GRAU apud FERREIRA, 2008, p. 124).

No que se refere à Geometria, Ferreira (2008) destaca quais eram os objetivos por séries, observando que para a 5ª e 6ª série, há a presença do experimentalismo, sugerindo o uso de dobraduras, compasso e transferidor. O documento sugere também o uso de materiais concretos do cotidiano, como papéis, para estudar propriedades geométricas. Vejamos uma sugestão dada pela proposta curricular:

Figura 20 - Verificação experimental


Verificação experimental e demonstração do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Este é o primeiro teorema que os alunos irão demonstrar. No entanto, essa demonstração deverá ser precedida de uma verificação experimental e, além disso, deve-se evitar inicialmente, excessos de simbologia.

A verificação experimental desse teorema pode ser feita:

a) através de medidas diretas, com auxílio de transferidor;

b) através de recortes e colagem dos ângulos do triângulo considerado, compondo um ângulo raso, em torno de um ponto.

c) através do dobraduras, no próprio triângulo.

Fonte – (Ferreira, 2008, p. 128).

Com a figura 20, mostramos uma das orientações presentes na proposta curricular para o ensino de matemática 1º grau do estado de São Paulo. A sugestão ao se trabalhar com o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo era a verificação experimental e a demonstração formal. No caso da figura 20, há um exemplo da forma como se poderia propor a verificação empírica, podendo ser feita via: medição com auxílio de um transferidor; recorte dos ângulos e uma nova organização dos mesmos; e por meio de dobraduras.

Segundo Pietropaolo (2005), a proposta curricular apresenta sugestões de como fazer a verificação experimental, como ilustramos na imagem acima, entretanto o mesmo não ocorre quanto à demonstração lógico-dedutiva.

Para a 7ª série, ainda se sugere a experimentação, entretanto, menciona-se também a demonstração de propriedades relativas a triângulos e equiláteros. Para a 8ª série se menciona a demonstração bem como as propriedades e teoremas que devem ser demonstradas.

Os conteúdos são distribuídos da seguinte forma, no que diz respeito à geometria: 5ª série - geometria intuitiva; 6ª série - geometria intuitiva e construções geométricas; 7ª série - introdução ao emprego do raciocínio hipotético-dedutivo da geometria e; 8ª série - homotetia e semelhança: aplicações e medidas: comprimento do círculo e áreas (FERREIRA, 2008).

Observamos que estas orientações quanto ao ensino de geometria influenciaram e influenciam atualmente a produção de livros didáticos, que será tratada no próximo capítulo. Inclusive a proposta curricular do estado de São Paulo é uma referência bibliográfica dos PCN.

Quanto às propostas curriculares regionais, Pires (2008) nos diz, que com isso constatou-se uma "profunda segmentação social" (p. 9), provocada pela má distribuição de renda no Brasil. Sendo assim, foi por meio da Lei Federal nº 9.394, implantada em 20/12/96, ou seja, com a LDB/96, que se elaboraram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "de modo a assegurar uma formação básica comum" (p. 9).

Os PCN se denominam como uma "proposta aberta", de caráter não obrigatório e flexível, ou seja, é uma proposta que pode ser adaptada para que se respeitem os contextos a que se destina (TEIXEIRA, 2000). Apesar de alegar a não obrigatoriedade deste documento nas escolas brasileiras, é possível verificar a entrada indireta dos PCN e a influência deste material no ambiente escolar, como, por exemplo, através das avaliações externas, das formas de seleção de livros didáticos e materiais de apoio (BITTENCOURT, 2004, p. 72). Os PCN trouxeram propostas metodológicas para todas as áreas do conhecimento, dentre elas a matemática. Sua nova estruturação buscou ser diferente das propostas curriculares das décadas de 70 e 80, tendo como principal foco a resolução de problemas, além de apresentar caminhos para se fazer matemática.

A proposta curricular dos PCN teve por base o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), dos Estados Unidos. Em 1980, o NCTM, apresentou orientações para o ensino de Matemática no documento Agenda para Ação. Neste documento a resolução de problemas era indicada como o foco do ensino de matemática nos anos 80 (BRASIL, 1998, p. 20).

Segundo Pires (2008), para a elaboração dos PCN utilizaram-se das investigações e experiências na área da educação matemática e assim buscou banir a perspectiva euclidiana do ensino incorporando recursos disponíveis para a educação como a história da matemática, os jogos e as novas tecnologias.

Pietropaolo (2005) passou a integrar em 1997 a equipe de elaboração dos PCN (5ª à 6ª série). De acordo com o autor, havia um relativo consenso entre os integrantes da equipe quanto a focar na resolução de problemas como eixo norteador da reforma, e, nesse contexto de elaboração da proposta curricular, discussões de diferentes naturezas surgiram. Entretanto, foram poucas as discussões quanto as argumentações e provas e suas potencialidades pedagógicas no ensino de matemática. Isso refletiu, como era de se esperar, na pouca ênfase do assunto nos PCN. O tema pode ser encontrado apenas quando se discute ao eixo temático da geometria. Outro aspecto apontando por Pietropaolo (2005) é que naquela época não havia estudos brasileiros que indicavam a possibilidade de usar demonstrações no currículo de matemática. Para ele, esse é um dos motivos de os PCN[33] não trazerem muitas orientações quanto à demonstração.

Observamos que os PCN recomendam as demonstrações desde o ensino fundamental, assim como nas reformas passadas, entretanto, daremos maiores detalhes quanto a essa orientação na seção de análise dos livros didáticos.

Com relação aos livros didáticos, em 1929 o Estado criou um órgão específico para estabelecer políticas do livro didático, sendo o Instituto Nacional do Livro (INL). Em 1938, o Estado criou a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), que tinha como uma de suas funções examinar, avaliar e julgar livros didáticos, autorizando ou não seu uso na escola (MANTOVANI, 2009; PIMENTEL, 2014). Esse exame não tinha como objetivo avaliar a qualidade dos livros didáticos, mas verificar se eles seguiam os programas oficiais. É importante ressaltar que, na época de criação do CNLD, estávamos em um momento político autoritário, e dessa forma ela veio a controlar o que se expunham nas obras. Segundo Mantovani (2009), os critérios de análise das obras valorizavam mais aspectos políticos-ideológicos do que pedagógicos.

Outras instituições foram sendo criadas, substituídas e reformuladas até que em 1985, por meio do Decreto nº 91.542, em 19 de agosto de 1985, surge o PNLD.

[33] É importante ressaltar que aqui estamos nos referindo a aspectos pertinentes a presente pesquisa. Por isso, não abordamos de maneira ampla os diversos aspectos que permeiam os PCN, como as questões sociais.

Para selecionar os livros didáticos que poderão ser distribuídos às escolas públicas, o PNLD lança um edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas. Este edital especifica os critérios para a aceitação das obras inscritas. As coleções selecionadas são avaliadas pelo Ministério da Educação (MEC), que elabora o Guia de Livro Didático, que então é disponibilizado às escolas participantes do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Este guia é composto por textos sobre os princípios e critérios que foram utilizados na avaliação dos livros; pela ficha usada pelos avaliadores; e pelas resenhas das coleções aprovadas.

No que se refere à Matemática, dentre os critérios específicos eliminatórios da coleção de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio tem-se:

> - apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no Manual do Professor e, quando houver, no glossário (...);
> - apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas;
> - deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de idéias matemáticas, memorização (...) (BRASIL, 2010, p. 25).

Pelos critérios específicos eliminatórios que guiam as avaliações dos livros didáticos participantes do PNLD, vemos que a argumentação e as demonstrações matemáticas devem fazer parte dos livros didáticos que desejam ser aprovados pelo programa. Nesse sentido, vemos que está assegurado pelos PCN e PNLD a manutenção das demonstrações matemáticas na escola. Quanto à forma de orientações destes dois documentos oficiais teceremos considerações na seção de análise dos livros didáticos.

Por meio do artigo de Lorenzato e Vila (1993), temos ainda algumas perspectivas para o ensino de matemática no século XXI. Diante de suas considerações, observamos que, dentre os objetivos com esse ensino, é necessário que os estudantes apresentem habilidades em comunicar ideias matemáticas; tenham desenvolvido o raciocínio matemático; e consigam inferir e verificar a razoabilidade dos resultados matemáticos. Com isso, o estudante precisa compreender ideias matemáticas transmitidas por alguém e também produzir e emitir ideias matemáticas por meio de diferentes recursos: desenho, gráfico, material concreto, dentre outros. A orientação vem no sentido de estimular o estudante a produzir argumentações nas aulas de matemática (LORENZATO, VILA, 1993).

No que se refere ao raciocínio matemático vemos por meio de Lorenzato e Vila (1993) que o documento "Basic Mathematical Skills for the 21st century" lançado em 1988 pela associação americana "The Nacional Council of Supervisors of Mathematics" (NCSM), salienta a importância do raciocínio lógico em matemática. Dessa forma, os estudantes devem elaborar conclusões por meio de algumas condições. Segundo os autores, outra ênfase é na validação: "o aluno deverá ser capaz de justificar seu pensamento e seu processo de solução, seja através de modelos ou, então, usando fatos conhecimentos, propriedades e generalizações (argumentos lógicos)" (p. 44). O aluno ainda deverá observar padrões, levantar conjecturas e fazer uso de contra-exemplos (LORENZATO, VILA, 1993).

Ao selecionar os livros didáticos que participam da pesquisa, devemos considerar também que eles estão inseridos nas ideias educacionais prescritas para o século XXI em que algumas foram destacadas. Sendo assim, temos fortes indícios, assim como observamos ao longo da história da educação matemática, de mudanças quanto ao seu papel, função e abordagem metodológica no ensino de matemática. São esses e outros aspectos que buscaremos abordar na seção posterior a essa.

Por meio das reformas ocorridas no ensino de matemática, esta seção nos mostra o contexto em que estavam inseridas as propostas de modernização, o papel que a demonstração acaba assumindo, além de permitir que compreendamos o pano de fundo ao qual estão inseridos os documentos que compõem este pesquisa: os livros didáticos, os PCN e PNLD.

Podemos dizer que as demonstrações no ensino de matemática passaram por situações extremas, desde o formalismo clássico e da matemática moderna até seu abandono quando o foco no ensino era a perspectiva construtivista. O que se vê agora, segundo Motta (s/d), apesar de que outras questões ainda serão colocadas por nós, o foco está para a "expressão do raciocínio lógico, de desenvolvimento da capacidade de argumentar e significar a atividade matemática" (MOTTA, s/d, p. 1).

Observamos que as demonstrações são adaptadas às necessidades didáticas de cada época, mas prevaleceram valorizadas dentro da matemática e do ensino. Observamos também que a ênfase dada ao ensino intuitivo influenciou na forma de se mobilizar e de se orientar o trabalho com a geometria nas reformas do ensino de matemática. E assim, oportunizou o uso de argumentos mais flexíveis e com rigor próprio da matemática escolar como forma de demonstrar nesse ambiente. Com isso o que era uma preparação para a demonstração formal, tornou-se uma das formas de se demonstrar na matemática escolar.

Com relação às mudanças sofridas pelas demonstrações na geometria em livros didáticos no Brasil, Almeida (2008) cita algumas:

- mudanças na redação do texto: as etapas da demonstração se reduzem a três: hipótese, tese e demonstração. Além disso, em alguns momentos a forma de expor e organizar uma demonstração passa a ser em duas colunas, uma com as asserções e outra com as justificativas de cada passo. Há a algebrização da geometria dedutiva, em que se passa a utilizar fórmulas e equações associadas a propriedades de figuras planas;
- mudança na função escolar da atividade demonstrativa: "a demonstração em geometria plana cada vez mais tem como alvo a expressão algébrica das proposições dos teoremas para ser usada na resolução de questões numéricas e, enfim, para o estudo com base em aplicações práticas." (ALMEIDA, 2008, p.248)

Entretanto, ainda que ao longo da história a demonstração tenha sofrido modificações, ela conservou três características: "o caráter a priori, que permite fazer a economia da experiência; o caráter necessário, que supõe o respeito a leis rígidas e o caráter universal, pois os objetos sobre os quais o raciocínio se baseia têm um estatuto de abstração" (p. 247).

Com isso podemos dizer que demonstração é rodeada por símbolos que contribuem para a sua manutenção e valorização na matemática escolar. Símbolos esses que se mantém apesar de mudanças metodológicas no ensino de geometria. Ao manter as características citadas, a demonstração permanece como símbolo de verdade, de segurança, certeza e de daquilo que não pode ser de outra forma, do necessário.

2.3. A demonstração na matemática escolar e na matemática acadêmica: diferentes papéis em práticas distintas

Ao realizar a revisão da bibliografia da pesquisa, percebemos que alguns autores da educação matemática fazem uma diferenciação entre a matemática escolar e a acadêmica, mesmo que isso algumas vezes não ocorra de modo explícito e que este aspecto seja tema de discussão.

Para nossa pesquisa, acreditamos ser importante assumi-las como práticas matemáticas distintas, pois romper com a ideia de que a matemática escolar é uma redução da matemática acadêmica contribui para a não "desqualificação do conhecimento matemático escolar frente ao saber acadêmico" (MOREIRA, 2004, p. 35). Além disso, possibilita que possamos compreender e identificar de que forma a demonstração é utilizada e mobilizada e qual o papel que ela assume também na educação básica, não restringindo o uso da demonstração na matemática escolar ao que é feito na matemática acadêmica. Concebemos, portanto, nesta pesquisa que a matemática escolar e a acadêmica possuem características diferentes e se desenvolvem em ambientes distintos, com objetivos específicos (MOREIRA, 2004; MOREIRA; DAVID, 2003).

Moreira (2004) e Chevallard (1991) fazem uma distinção entre a matemática escolar e a acadêmica, mas com pontos de vista diferentes que, a nosso ver, favorecem um entendimento do papel que a demonstração assume na escola e o modo de sua utilização nesse ambiente.

Yves Chevallard trata no livro "La transposición didáctica – del saber sábio al saber ensenãdo", em que tomamos por base a 2ª edição do ano de 1991, do conceito de transposição didática. Suas elaborações dizem sobre uma diferenciação do saber acadêmico com relação ao saber escolar, que pode ser associado à matemática acadêmica e à escolar, respectivamente.

A teoria da transposição didática fala sobre a possibilidade de "transpor" o saber sábio (saberes da matemática acadêmica) para o saber a ensinar (que seriam os saberes determinados por orientações curriculares e livros didáticos) e, assim, para o saber ensinado (saber que ocorreria na sala de aula e que poderia não ser exatamente o que era previsto pelo saber a ensinar). A transposição didática seria, portanto, o movimento, as transformações adaptativas do saber sábio ao saber ensinado e é o que permitiria que o saber sábio possa ocupar um lugar entre os objetos de ensino (CHEVALLARD, 1991):

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que faz de um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (Chevallard, 1991, p.45).

Chevallard (1991) explica o que é um objeto de saber, bem como o saber a ensinar e o saber ensinado. Para o autor, um objeto do saber somente passa a ser caracterizado como tal se a sua inclusão no sistema dos objetos a ensinar for "útil para a economia do sistema didático" (p. 57).

Segundo Chevallard (1991), para um professor de matemática, podem ser entendidos como um objeto do saber noções matemáticas como "a adição, o círculo, a derivação, as equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, etc" (p. 57). Juntamente a essas noções matemáticas se encontrariam as paramatemáticas, que são, por exemplo, noções de equação, noções de demonstração e de parâmetro. Para ele, as noções paramatemáticas são úteis na atividade de matemático, mas não se torna objeto de estudo para tal profissional. Chevallard (1991) classifica essas noções como noções ferramentas da atividade matemática.

Para o autor, somente os objetos do saber podem se tornar objetos de ensino, e nesse caso as demonstrações, que estariam inclusas nas noções paramatemáticas, não se constituiriam em objetos de ensino, pois, elas seriam objetos de saber auxiliares, sendo necessárias no processo de ensino e aprendizagem; são objetos que "devem ser "aprendidos" (ou melhor "conhecidos"), mas não são "ensinados" (segundo o plano de ensino das noções matemáticas)" (CHEVALLARD, 1991, p. 60). Dessa forma, se a demonstração não é um objeto de ensino, conforme Chevallard (1991), ela em partes acaba por assumir o mesmo significado na matemática escolar e na acadêmica e é mobilizada para o mesmo fim, comprovar a verdade de objetos matemáticos. Para nós, ao contrário do que diz Chevallard (1991), a demonstração é objeto de ensino, uma vez que ela é indicada como conteúdo em propostas curriculares. Por um lado, ela é um mecanismo lógico-dedutivo que permite a elaboração de saberes matemáticos e se encaixaria na noção paramatemática citada por Chevallard (1991), mas por outro, ela é o próprio conteúdo matemático que deve ser ensinado na matemática escolar.

Quanto a isso, podemos citar um exemplo. A demonstração, conforme vimos por meio de referências da História da Educação Matemática, é vista como um objeto inerente à matemática, inclusive à matemática escolar. O ensino de matemática foi por muito tempo marcado pelas demonstrações, ou seja, o ensino de matemática era como que estruturado pela demonstração.

Com o passar dos anos, ocorreram reformas educacionais que colocaram em pauta o ensino da geometria dedutiva nos níveis mais elementares. Essas reformas provocaram modificações, nos currículos, inclusive, pressupondo um ensino intuitivo precedendo o dedutivo. Provocaram também, na coleção de livros didáticos de Euclides Roxo, mudanças na forma de se apresentar a demonstração a partir do 3º ano do curso ginasial, quando o foco era o aluno aprender a fazer e compreender as demonstrações. Ou seja, a demonstração passou a ser um objeto de ensino na escola, com livros didáticos apresentando demonstrações incompletas a fim de que o aluno as completassem e justificassem seus passos. A nosso ver, a demonstração acaba assumindo, nessa época, um caráter mais didático, mas ainda voltado para a matemática acadêmica, ou para dizer em termos da época, científica, mantendo sua valorização, e se torna objeto de ensino na matemática escolar.

Dessa forma, assim como Chevallard (1991) alerta quanto à não-delimitação tão rígida do que são noções matemáticas e paramatemáticas e, nesse sentido, do que vem a se tornar objeto de ensino, a pesquisa realizada mostrou, no caso das demonstrações, que elas podem muitas vezes ultrapassar o papel de ferramenta auxiliar na atividade do matemático para se tornar uma noção matemática.

Na teoria transposição didática, ocorreriam pelo menos duas transformações, sendo a primeira externa e a segunda interna, ou seja, o saber proveniente da matemática acadêmica sofreria uma primeira transformação para se tornar um saber a ensinar, conteúdo escolar que estaria presente nos livros didáticos. A segunda transposição ocorreria quando se transformaria o saber a ensinar em saber ensinado, isto é, o que ocorre na sala de aula, que nem sempre é compreendido conforme pretendido pelo professor.

Nessa perspectiva de Chevallard (1991), o saber ensinado deve ter semelhanças com o saber da academia, mas adquire outros significados dentro do novo contexto de uso. Dessa forma, esse saber precisa ter em vista o conhecimento científico e a sala de aula, em nosso caso, de matemática.

Para Pais (2011), são diversas as influências que os saberes sofrem para sua seleção e reformulação, sendo que o conjunto destas influências é chamado de “noosfera” por Chevallard (1991), que é constituída, por exemplo, por professores, políticos e autores de livros didáticos que pretendem viabilizar a manutenção da compatibilidade entre sistema didático - composto por professor, aluno e saber ensinado - e o seu entorno social no que se refere ao saber. O resultado dessas influências condiciona a forma de funcionamento do sistema didático e definem “valores, objetivos e métodos, que conduzem o sistema de ensino” (PAIS, 2011, p. 19).

Segundo Chevallard (1991), a transposição didática pressupõe um controle social das aprendizagens. Um exemplo de controle social são as orientações curriculares que agem na designação dos objetos de ensino e que também controla o que deve ser apresentado nos livros didáticos e nas avaliações internas e externas.

Dessa forma, o processo de transposição didática consistiria na adaptação da escola a métodos, técnicas e conceitos da matemática acadêmica. Essa adaptação estaria sujeita a uma “vigilância epistemológica”, uma forma de controle sobre os saberes a serem ensinados¸ que procura evitar desvios em relação ao conhecimento. Nesse contexto, a “autonomia” é dada ao professor no momento de transformar o saber a ensinar em saber ensinado. É nesse momento que surgem as “criações didáticas” (CHEVALLARD, 1991) suscitadas pelas necessidades do ensino que visam facilitar a aprendizagem, sendo o que diferencia o saber acadêmico do ensinado.

Quanto a isso, Vilela e Meneghetti (2011) afirmam que a transposição didática ocorre em dois momentos: “o primeiro que transforma o saber sábio em saber ensinado, ou a matemática acadêmica em matemática escolar; o segundo que afirma a necessidade de retomar o saber sábio na escola, pois essa seria sua “fonte legitimante”” (p. 186). O que isso significa? Significa que no processo de transposição didática o saber acadêmico sofre muitas transformações, “esquecimentos, ressignificações e criações de conhecimento” (p. 187), o que faz com que o saber acadêmico esteja a uma distância enorme do saber ensinado. Dessa forma, quando há o “desgaste biológico e moral” (CHEVALLARD, 1991) destes saberes, haveria a necessidade de “reestabelecer a compatibilidade com o saber sábio” (VILELA; MENEGHETTI, 2011, p. 187).

Na transposição didática a compatibilidade entre os saberes ocorrem, segundo Chevallard (1991), por meio de duas condições:

> Por um lado, o saber ensinado – o saber tratado no interior do sistema – deve ser visto pelos mesmos “sábios”, como suficientemente próximo ao saber científico a fim de não provocar a desautorização pelos matemáticos, os quais minaria a legitimidade do projeto social, socialmente aceito e sustentado, de seu ensino. Por outro lado, e simultaneamente, o saber ensinado deve aparecer como algo suficientemente distanciado do (...) saber banalizado pela sociedade (e notoriamente banalizado muito especialmente pela escola!) (CHEVALLARD, 1991, p. 30).

Diante do exposto, concordamos com Moreira (2004) quando diz que Chevallard (1991) acaba assim por tomar a matemática acadêmica como

> fonte privilegiada de saber à qual o sistema escolar sempre recorre para recompatibilizar-se com a sociedade. E toma, também, esse saber científico como a referência última que permitiria à comunidade dos matemáticos desautorizar o objeto de ensino que não seja considerado “*suficientemente próximo ao saber sábio”* (CHEVALLARD, 1991, p. 30) (MOREIRA, 2004, p. 16).

Assumir a matemática acadêmica dessa forma pode indicar uma hierarquia entre outras práticas matemáticas, inclusive a matemática escolar, que passam a ser vistas como “fragmentos, formas imperfeitas, germens ou vulgarização da matemática científica” (VILELA; MENEGHETTI, 2011, p. 189).

Para Chevallard (1991), a transposição didática é inerente a qualquer processo de ensino, e sendo assim entendida, os conteúdos presentes na matemática escolar deveriam ter correspondência na matemática acadêmica.

Vilela e Meneghetti (2011) observam em seu artigo que o saber escolar não possui correspondente ao saber científico para o caso dos números cardinais e ordinais. Essa constatação contradiz a ideia de transposição didática de Chevallard, pois na matemática acadêmica não há diferenças entre estes dois conceitos, enquanto há na matemática escolar. Para resolver essa contradição as autoras mobilizam outro referencial teórico, considerando o conceito de matemática escolar por Moreira (2004) e elaborando suas concepções sobre práticas matemáticas, ou seja, compreendendo esta contradição por meio das especificidades da matemática escolar e acadêmica, "assumindo assim que não há ligações necessárias ou hierárquicas que permitam relações de legitimação entre as práticas matemáticas escolares e acadêmicas, no sentido de uma correspondência entre estes objetos particulares, o número ordinal e cardinal" (p. 180). Reconhecem que na escola se ensinam conceitos e usos da matemática escolar que não possui necessariamente correspondente na matemática acadêmica.

Vilela e Meneghetti (2011) denunciam a não aplicabilidade da ideia de transposição didática a todas as situações de ensino e mostram a pertinência de mudar este referencial assumindo a matemática escolar e acadêmica como práticas distintas, não reduzindo à matemática escolar à vulgarização e didatização da acadêmica. Dessa forma, pode-se trabalhar os significados dos conceitos "sem considerar seu fundamento científico ou a formalização axiomática desse conteúdo" (p. 194).

A demonstração é, segundo Chevallard (1991), um instrumento auxiliar na atividade do matemático e não um conteúdo ou noção matemática, em que já indicamos nossa discordância quanto a isso. No entanto, quanto a isso podemos questionar: pode-se falar em transposição didática para a demonstração no que se refere à matemática escolar? Se sim, de que forma ela aparece nessa matemática? Se não, há algo que se transfere?

Para Balacheff (2000), é necessária e há a transposição didática, pois a demonstração não deve ser ensinada na escola assim como no ambiente acadêmico, e esta deve ocorrer sob um conjunto de limites específicos do sistema de formação. Klisinska (2009) também assume que há transposição didática e as exemplifica com as diferentes versões de provas informais, ou seja, as provas intuitivas e experimentais por exemplo.

A nosso ver, compreender as demonstrações presentes na matemática escolar como as adaptações e transformações que as demonstrações da matemática acadêmica sofrem, carrega em si a ideia de que a primeira é um extrato da segunda, algo insuficiente e ilegítimo.

Em contrapartida a isso, Moreira (2004), em sua tese de doutorado, nos apresenta alguns elementos por meio dos quais podemos ver distinções entre a matemática escolar e a matemática acadêmica, como, por exemplo, a forma de apresentação dos conceitos, os significados das definições e demonstrações, a forma como essas áreas lidam com os erros, dentre outros.

Diferentemente de Chevallard (1991), Moreira (2004) não reduz a matemática escolar à didatização da matemática acadêmica, mas busca incorporar à sua ideia outros conhecimentos associados à prática do professor de matemática "que envolve conteúdos, métodos, contextos, valores e outros condicionantes sociais" (p. 54).

A matemática acadêmica é então entendida por Moreira (2004) como sinônimo de matemática científica, e se refere a "um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais" (p. 18). Já a matemática escolar é o "conjunto dos saberes "validados"[34], associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (MOREIRA, 2004, p. 18). Dessa forma, a escolar assumirá os saberes produzidos e mobilizados pelos professores em sua prática pedagógica, assim como as pesquisas que se referem ao ensino e aprendizagem da disciplina. A matemática escolar passa a ser entendida como um "conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente" (MOREIRA, 2004, p. 18), em que podemos listar os seguintes saberes:

> o professor de Matemática deve saber não só os conceitos matemáticos, mas também deve ter conhecimentos de conteúdos, currículos, programas, materiais curriculares, pedagogia, pedagogia do conteúdo específico, características cognitivas dos alunos, contexto educacional, comunidade escolar e social, particularidades culturais, finalidades e valores filosóficos e científicos da Educação (CARDOSO, 2009, p. 13).

Dessa forma, a matemática escolar

> (...) parece ultrapassar tanto a noção de transposição didática regulada pela comunidade matemática científica e pela didática da matemática, como também a ideia de que as disciplinas escolares sejam construções endógenas que não devam nada a ninguém a não ser à sua própria história[35] (MOREIRA, DAVID, 2003, p. 64).

Nesse sentido, concordamos com Moreira (2004) e Cardoso (2009) e entendemos que a matemática escolar é, portanto, resultado da prática do professor que "incorpora a retradução crítica" (CARDOSO, 2009, p. 13) feita por ele, o que amplia ideia de que seria uma didatização da matemática acadêmica.

---

[34] Moreira (2004) esclarece da seguinte forma a constituição da matemática escolar por meio de saberes "validados": "A exigência de validação impõe restrições ao corpo de conhecimentos que integram a matemática escolar. Seria impraticável, por razões óbvias, trabalhar com uma noção de matemática escolar que incluísse todo "saber" associado à educação matemática na escola, independente de qualquer tipo de escrutínio público" (p. 19). Para Moreira (2004) para que um saber seja incluído aos saberes escolares eles devem passar por alguma forma de validação pública.

[35] A segunda ideia de matemática escolar mencionada por Moreira (2004) se refere à Chervel (1990).

Segundo Moreira (2004), a matemática escolar e a acadêmica são "referenciadas, *em última instância*[36], nas condições em que se realizam as práticas respectivas do matemático e do professor de matemática da escola" (p. 20). Enquanto a prática do matemático da academia tem por algumas características produzir resultados originais, buscar pela máxima generalidade possível por meio de processos rigorosamente lógico-dedutivos e utilizar linguagem precisa, a prática do professor de matemática ocorre num ambiente educativo (o que já indica uma visão diferente) e a "natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada — e, muitas vezes, é o que dá sentido — aos princípios, às definições, às justificativas e argumentações, aos métodos e aos resultados da matemática escolar" (MOREIRA, 2004, p. 20). Moreira e David (2003) nos oferecem exemplos para entendermos essas diferenças:

> Tomemos, para concretizar as idéias, o exemplo dos números reais. São cortes de Dedekind? São classes de equivalência de seqüências de Cauchy? São seqüências de intervalos encaixantes? Para o matemático profissional, a distinção entre essas formas de conceber o número real não é relevante (...).
> Agora pensemos na forma como o professor do ensino básico precisa conhecer esse mesmo objeto. Em primeiro lugar é fundamental concebê-lo como "número", o que faz toda a diferença, porque números são coisas que já estão concebidas como tal: 1, 2, 3, 2/5, etc., são números (...). Em segundo lugar são números que estendem os já conhecidos racionais, isto é, são números tais que os racionais são uma parte deles. E, finalmente, são objetos criados com alguma finalidade, ou seja, devem responder, de certa forma, a alguma necessidade humana. A estrutura de corpo ordenado completo é reconhecida a posteriori (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 65).

Dessa forma, entendemos que a matemática escolar e acadêmica possuem características específicas, que são moldadas dentro do ambiente em que se executam as práticas dos profissionais responsáveis por elas. Então os significados dos conceitos (e em nosso caso, do conceito de demonstração), serão, segundo Moreira (2004), diferentes:

> Para além das questões estritamente cognitivas, um aspecto geral a partir do qual também se pode perceber certas distinções importantes entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, diz respeito ao papel e aos significados das definições e das demonstrações, em cada um desses campos do conhecimento matemático (MOREIRA, 2004, p. 23).

Tanto na matemática escolar quanto na acadêmica se validam afirmações e explicam-se as razões porque alguns fatos são aceitos como verdade e outros não. No entanto, Moreira (2004) esclarece que o papel das demonstrações para ambos é distinto. Para ele, na matemática acadêmica, "devido à sua estruturação axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos" (p. 23). As definições carecem de ser precisas, a fim de que se evitem ambiguidades de um objeto

[36] Itálico do autor.

matemático. As demonstrações juntamente com as definições formais são elementos importantes no momento de avaliação da comunidade de um novo resultado, sendo o que permite à incorporação de um novo resultado àqueles já aceitos como válidos.

No caso da matemática escolar, há dois aspectos, segundo Moreira (2004), que modificam o papel da demonstração. O primeiro é o fato da validade de um resultado não ser posto em dúvida, pois já é garantida pela matemática acadêmica. O segundo se refere à aprendizagem, à compreensão do fato e à construção de justificativas, pois:

> há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições e conceitos primitivos da teoria e, por outro lado, promover entre os alunos da escola o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade deste mesmo resultado (MOREIRA, 2004, p. 24).

Dessa forma, o julgamento da validade de um resultado ou das argumentações passa pela comunidade escolar e “pela elaboração de formas de convencimento próprias” (MOREIRA, 2004, p. 24). Nesse sentido, Moreira (2004) no diz que: “Na matemática escolar, a prova dedutiva rigorosa não é a única forma aceitável de demonstração” (p. 24), pois as justificativas mais livres, menos formais, como as verificações feitas a partir de dobraduras de papel podem levar a uma compreensão mais aprofundada da matemática. Conforme o autor, elas podem contribuir para a verificação de fatos da geometria, podendo ser mais convincentes na escola do que as demonstrações formais. Logo, os conceitos primitivos e os postulados seriam conhecimentos oriundos da experiência dos estudantes, da vida cotidiana deles.

Segundo Moreira (2004), dificuldades podem surgir se, por um lado, utilizarmos na matemática escolar as argumentações menos formais ou, por outro, ficarmos restritos às demonstrações formais. O autor cita alguns exemplos que mostram algumas dificuldades que poderiam surgir com o uso de argumentações menos formais: um possível relaxamento nos raciocínios utilizados, podendo até cair na circularidade lógica; a compreensão equivocada do papel e da necessidade de validar resultados e redução da importância da demonstração. Quanto ao uso de somente demonstrações formais, Moreira (2004) diz que isso pode provocar censura às tentativas ou buscas por uma compreensão de maneiras informais.

Essas dificuldades não sugerem, segundo Moreira (2004), abandonar as formas de demonstrar mais flexíveis na matemática escolar, mas sinalizam para que se desenvolva uma atitude permanentemente crítica quanto a essas formas de validação.

Dessa forma, na matemática escolar, a demonstração desempenharia papel pedagógico, que pode contribuir para desenvolver a capacidade de argumentação e para uma visão da matemática em que seus saberes são socialmente construídos e podem ser validados por meio da negociação e argumentação (MOREIRA, 2004). Esse papel da demonstração, portanto, não é o mesmo para a matemática acadêmica, pois não se trata de convencer a comunidade matemática que determinado resultado é verdadeiro, mas de uma negociação em um contexto educativo por estudantes que estão desenvolvendo os saberes matemáticos e que podem ser convencidos por alguns tipos de argumentos e não por outros em certos momentos (MOREIRA, 2004):

> Se os papéis da demonstração na matemática escolar são dessa natureza, então os cânones não serão os mesmos da matemática científica. As relações com os conceitos primitivos, com as definições, com os axiomas, com a própria linguagem e simbolismo, com o rigor etc. são necessariamente muito mais flexíveis, pois não se trata de convencer a comunidade científica de que o fato em questão pode ser inscrito no conjunto de resultados matemáticos “verdadeiros” (MOREIRA, 2004, p. 28).

Diante das considerações de Moreira (2004), podemos dizer que este autor não nega as demonstrações típicas da matemática acadêmica na matemática escolar. Em vez disso, busca indicar a limitação quanto à compreensão dos conceitos matemáticos ao se utilizar estritamente as demonstrações formais legitimando e valorizando as formas alternativas de validação que se fazem presentes na matemática escolar. Nesse sentido, a matemática escolar para Moreira (2004) possui um rigor próprio, que pode não coincidir com o da matemática acadêmica, o que não deve ser visto como algo incompleto e incorreto.

No que diz respeito ao assunto, podemos citar Garnica (2002). Para ele, há dois eixos de discussão no que se refere às formas de argumentação matemática, sendo uma voltada para a prática escolar e outra para a científica. A prática de argumentação da matemática científica qual seja a demonstração formal precisa ser, segundo o autor, relativizada na matemática escolar.

Garnica (2002) tece considerações sobre as demonstrações em educação matemática e acaba por considerar a matemática escolar. Para ele, as demonstrações são uma dentre as várias formas de argumentação sobre o objeto matemático. Além disso, ele entende a matemática acadêmica como uma das várias matemáticas existentes, uma dentre as etnomatemáticas. Nesse contexto, conforme já mencionamos, não faz mais sentido falar em argumentação formal, não-formal ou semi-formal, pois isto pressupõe “A” matemática.

Assumindo a existência de diferentes matemáticas, Garnica (2002) nos diz que na matemática acadêmica a demonstração formal é o “fio condutor de seu regime de verdade”

(p. 7), ou seja, é o que estabelece a verdade. A educação matemática trata das diferentes etnomatemáticas, inclusive da matemática acadêmica, e atribui significados a elas. No entanto na educação matemática há outro regime de verdade, diferente e mais amplo do que o da matemática acadêmica.

Sendo assim, "as demonstrações (...) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional" (p. 8):

> Etnoargumentações – "demonstrações" em sentido amplo – têm, sempre, a função de convencer, tomado "convencimento", aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. A essa ampliação de escopo vincula-se uma ampliação das próprias concepções sobre Matemática. Ao invés de tomar "A" Matemática como um conjunto de objetos que pode ser atingido de vários modos, segundo várias práticas, chamaremos de "Matemática" (ou "Matemáticas" ou ainda "Etnomatemáticas") um conjunto de práticas (e, consequentemente, dos valores vinculados a essas práticas). (GARNICA, 2002, p. 8).

Diante do exposto e corroborando com as colocações de Moreira (2004) e Garnica (2002) quanto a demonstração na educação matemática e na matemática escolar, assumimos nesta pesquisa as demonstrações na educação básica de forma ampla, que não se restringe às demonstrações formais. Por esse motivo, denominaremos de *demonstrações escolares* às diferentes formas de demonstrar na matemática escolar, ou seja, às formas alternativas e tradicionais de argumentar, verificar, justificar, convencer e explicar resultados matemáticos.

Dessa forma, por considerar seus aspectos didáticos, assumimos na escrita desta dissertação as demonstrações na matemática escolar, no sentido de considerar práticas e formas de validação de conhecimentos matemáticos presentes na sala de aula.

2.4. A demonstração e a sociologia da ciência

Até o presente momento, olhamos para as demonstrações internamente à própria matemática destacando: a forma como as pesquisas acadêmicas da área da matemática acadêmica e da Educação Matemática discutem o assunto; as demonstrações em diferentes reformas do ensino de matemática no Brasil; além de uma discussão em que buscamos trazer uma perspectiva de ampliação na forma de conceber as demonstrações na matemática escolar.

Diferentemente do que fizemos no primeiro momento do texto, nesta seção pretendemos olhar para as demonstrações externamente à matemática por meio da sociologia da ciência, procurando elaborar uma compreensão sobre o seu valor simbólico, consoante com Thompson (1999). A pergunta nesta etapa pode ser formulada nos seguintes termos: as demonstrações escolares são símbolos de quê?

A sociologia da ciência se mostra com grande potencialidade para ampliar discussões no âmbito da educação matemática no que se refere a compreender a matemática como uma disciplina construída socialmente (VILELA, 2009).

> As discussões sociológicas, incorporadas com mais vigor recentemente no campo educacional, propiciam descortinar a dimensão sócio-histórica da concepção de matemática como verdades absolutas e transcendentes, assim como possibilitam perceber aspectos das relações de poder em que tais fatos estariam envolvidos (VILELA, 2009, p. 1).

As discussões sociológicas ainda trazem contribuições para melhor compreender a nossa forma simbólica em estudo, isto é, a demonstração, símbolo de rigor e precisão, e um procedimento que carrega consigo diferentes ideias valorativas como a de verdade, pureza, unicidade e universalidade, por exemplo. Essas ideias associadas à demonstração são utilizadas como forma de legitimar a matemática e de valorizar a forma de pensar que este procedimento conduz. E ainda, este "poder" das demonstrações contribuiria para manter a matemática longe dos "domínios social e material da experiência" (BAUCHSPIES; RESTIVO, 2001).

Geralmente a matemática vem associada à demonstração formal, isto é, "na opinião de alguns, o nome do jogo da matemática é demonstração; sem demonstrações, nada de matemática" (DAVIS; HERSH, 1987, p. 178). Para esses, as demonstrações representam respeitabilidade, é o "sinete da autoridade" (p. 182) e mais: são "um ritual, e uma celebração do poder da razão pura" (p. 182). Ou melhor, a demonstração é a "cola sagrada da lógica e da razão" (BAUCHSPIES; RESTIVO, 2001, p. 112). Com isso, sendo a demonstração simbólica, ela carrega consigo símbolos de autoridade, de poder, de verdade, da razão pura e de certeza.

Bloor (2009), em relação a isso, diz que o pensamento lógico e matemático está rodeado por uma aura protetora. "Eles (o pensamento lógico e matemático) representam o santo dos santos. Aqui, mais que em qualquer lugar, a aura do sagrado incita a um desejo supersticioso de evitar tratar o conhecimento de modo naturalista" (BLOOR, 2009, p. 129).

A ideia de pureza gerada pela demonstração faz com ela seja comparada por Restivo (1998), segundo Vilela (2007), com uma máquina em que se neutraliza a ação humana e, com isso, gera uma ideia de autonomia do processo lógico-dedutivo, que pode nos levar a crer que a matemática escapa do mundo material. Assim, "a validação e o reconhecimento pela demonstração representa a ‘validação pública do conhecimento’” (p. 196).

Em contrapartida a isso, Bloor (2009) e seu programa forte em sociologia do conhecimento pressupõem que a ciência não é uma esfera autônoma de operações intelectuais, protegida de qualquer dimensão social, mas é uma atividade socialmente determinada (VILELA, 2007).

Podemos destacar na literatura, ideias e valores que estão associados à matemática, à demonstração e seu papel nesta ciência. Vejamos algumas extraídas de textos da área da matemática acadêmica, da educação matemática e de documentos oficiais em que prevalece um significado da demonstração:

- “Uma *verdade matemática*[37] provada na Grécia há 24 séculos c*ontinuará válida por toda a eternidade*, na Terra, em Marte ou *em qualquer outro local* do Universo” (GARBI, 2010, p. 20), ou seja, “*As verdades matemáticas são eternas*” (GARBI, 2010, p. 11);
- “A prova, demonstração ou justificativa lógica é a essência, *a verdadeira marca registrada da Matemática*. É ela que distingue a *Rainha das Ciências* de todos os demais campos do conhecimento” (GARBI, 2010, p. 21);
- “A Matemática é uma ciência com características próprias, que *se organiza via teoremas e demonstrações*” (BRASIL, 2006, p. 69);
- “(...) o método dedutivo, especialmente a partir da civilização grega, predomina na Matemática e assume a primazia de ser *o único método aceito*, na comunidade científica, para comprovação de um fato matemático. Os conceitos de axioma, definição, teorema, demonstração são o cerne desse método e, por extensão, passaram a ser, para muitos, *a face mais visível da Matemática*.” (BRASIL, 2012, p. 32);
- **“**Tem (a demonstração) *papel fundamental* para a Matemática, e por diversas vezes se torna *imprescindível* no ensino de diferentes conteúdos que se encontram nos programas curriculares de matemática” (ANDRADE, 2011, p. 13).
- “Uma vez que uma afirmativa foi demonstrada, devemos entender que a afirmativa é *verdadeira sem nenhuma sombra de dúvida*” (DAVIS; HERSH, 1987, p. 180).

Com os trechos citados, vemos associações da matemática com a demonstração, da demonstração com a verdade e imutabilidade, além da valorização da matemática em detrimento de outras ciências, por ela fazer uso das demonstrações. A demonstração aparece ainda como um símbolo da força da matemática e da lógica. Além

[37] Itálico nosso.

disso, prevalece nestes trechos uma ideia de demonstração que são as utilizadas por matemáticos profissionais.

Algumas dessas ideias podem ser vistas em livros didáticos e geralmente são emitidas em textos informativos, que buscam trazer elementos históricos da geometria. Por exemplo, no livro didático “Matemática e realidade”, podemos encontrar as seguintes frases: “a certeza de um resultado geométrico deriva de uma justificativa baseada em raciocínios lógicos consistentes” e “o método dedutivo, que hoje fundamenta toda a Matemática” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 143-144). Estes textos enaltecem a contribuição de povos como egípcios e babilônicos e engrandecem os feitos dos gregos e do método dedutivo como o único aceito para se comprovar um resultado matemático e o que garante a certeza destes resultados.

Com essas poucas palavras, se destacam algumas ideias que rodeiam a de demonstração e que consequentemente fazem com que ela seja valorizada e mantida também dentro da matemática escolar.

Diante da importância dada ao procedimento da demonstração, que é uma forma de pensar valorizada e incentivada em propostas curriculares, acreditamos que olhá-la do ponto de vista da sociologia da ciência pode contribuir para discussões educacionais.

O desejo de se obter a certeza e a possibilidade de se chegar a ela por meio da demonstração é algo que está presente em nossa história há muitos anos. Segundo Guillen (1987), é como se a certeza fosse um tesouro escondido e quiséssemos obter o mapa para encontrá-lo. Muitos acreditaram ter obtido o mapa por volta de 300 a. C. “nas linhas mestras da lógica de Aristóteles” (p. 19). Posteriormente, Euclides seguiu a lógica de Aristóteles para organizar os conhecimentos matemáticos em sua obra, que foi também concebido por anos como modelo de certeza.

> A onda da certeza matemática teve o seu ponto mais alto cerca de 300 a.C., com o aparecimento de Organon, de Aristóteles (organon, palavra latina que significa “instrumento da razão”), e dos Elementos, de Euclides. Nesse tempo acreditava-se que o Organon oferecia o caminho para a certeza lógica, enquanto os Elementos eram o tesouro da própria certeza (GUILLEN, 1987, p. 20).

A obra *Os Elementos* foi por muitos anos considerada como modelo de verdade, rigor e certeza, transformando-se por vários séculos no paradigma da ciência (PONTE et al, 1997).

Segundo Ponte et al (1997), nos séculos XVII e XVIII, a geometria de Euclides continuava sendo objeto de admiração, sendo um dos motivos o fato de seus teoremas continuarem sendo considerados verdadeiros por mais de 2000 anos, mas o quinto postulado utilizado por Euclides em sua obra passou a ser questionado por não ser tão evidente quanto os demais. A procura por solucionar este problema permitiu o desenvolvimento das geometrias não euclidianas:

> Ao longo dos séculos foram feitas inúmeras tentativas para resolver os problemas relacionados com este axioma. Umas tentavam substituí-lo por um enunciado aparentemente mais evidente; outras procuravam deduzi-lo dos outros nove apresentados por Euclides. No entanto, todas estas tentativas se revelaram vãs. Pelo contrário, evidenciaram que, adoptando um axioma que fosse essencialmente diferente do axioma das paralelas, não só não se chegava a nenhuma contradição mas, mais do que isso, mostraram que havia lugar para a existência de várias outras geometrias, diferentes da de Euclides, mas com estruturas lógicas igualmente válidas. Estava aberto o caminho para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas (PONTE ET AL, 1997, p 11).

Conforme já salientamos neste texto, num sistema axiomático as premissas são determinantes. As geometrias não euclidianas são ótimos exemplos de sistemas válidos com premissas contrárias num sistema em relação a outro. Com esse exemplo, vemos que os sistemas axiomáticos continuam válidos, mas o caráter de verdade, associado aos princípios, não se mantem. Nesse sentido, é importante relembrar o alerta dado na seção de análise histórica sobre a diferença entre validade do argumento e veracidade da premissa, pois muitas vezes na matemática validade e verdade acabam se confundindo (GARNICA, 1995; VILELA, DEUS, 2015).

Logo, por mais de 2000 anos acreditava-se que, por meio da lógica de Aristóteles e do raciocínio dedutivo, podia-se obter a certeza plena e não restrita aos pressupostos e restrições do método. Exemplos da ampla apropriação da lógica aristotélica e da fé no raciocínio dedutivo, além da admiração à obra de Euclides, é o fato de que matemáticos buscaram fazer com a aritmética o que foi feito para a geometria, ou seja, organizar seus resultados de forma lógico-dedutiva, além de se provar a existência de Deus (GUILLEN, 1987). A partir desse desejo de se realizar essa sistematização lógico-dedutiva dos resultados aritméticos, que foi desenvolvido e concluído primeiramente por Gottlob Frege, colocou-se em destaque o fato de que, ao seguir as regras da lógica, podemos ser levados a resultados contraditórios. Desse modo, caiu por terra a ilusão aristotélica de alcançar, pela intuição, verdades iniciais de um sistema. Ao contrário, a distância entre o conhecimento científico e o senso comum foi ficando evidente ao longo da mesma história que, às vezes, insiste em ocultar os paradoxos e incompletudes da matemática (GUILLEN, 1987).

Objetivamos com essa curta exposição dos trechos do texto de Guillen (1987), complementado pelas considerações de Ponte et al (1997), mostrar as crenças por trás da lógica e das demonstrações matemáticas. Crenças essas que foram sendo disseminadas por anos e que ainda deixam vestígios em livros didáticos de matemática mais recentes – que destacaremos a seguir -, por ser reforçada e mantida pelas comunidades de matemáticos e pelas orientações curriculares brasileiras para a educação básica e PNLD.

As discussões sociológicas, em que tomamos Bloor (2009) por referência principal, trazem contribuições e possuem potencialidade elucidativa para compreender a matemática em uma dimensão social, e para que questionemos a ideia de matemática como uma ciência única, pura e transcendente, e em consequência disso, para desnaturalizarmos os valores e estranharmos ideias engendradas que permeiam a nossa forma simbólica, a demonstração.

Bloor (2009) pressupõe a não-neutralidade da ciência, sendo esta entendida como uma atividade social, ou seja, como uma atividade que possui interesses e busca por privilégios e poder. Além disso, em suas elaborações, discute a naturalização da lógica e a forma com que nossa tradição racional a torna socialmente “protegida”.

Ao dizer que são “as pessoas que governam as idéias, não as idéias que controlam as pessoas”, Bloor (2009) possibilita perpassar um entendimento de matemática como uma ciência autônoma em relação a intervenções humanas e dessacralizar esse universo sagrado do qual a matemática faz parte. Assim, Bloor (2009) ao abordar a natureza social do conhecimento matemático e lógico, nos traz possibilidades de questionar ilusões e crenças que sustentam a ideia de verdade, unicidade e universalidade destes conhecimentos, elaborando formulações que buscam explicar essas crenças (VILELA, 2007), e com isso nos mostra que o conhecimento matemático longe de ser verdadeiro e universal, traz marcas de seu contexto sócio-histórico (VILELA; ANDRADE, 2013, p. 149).

A partir das elaborações de Bloor (2009) e da sua sugestão de olharmos o pensamento lógico e matemático como crenças e “decorrente disso, para os processos de naturalização da verdade e dos valores da lógica” (VILELA; ANDRADE, 2013, p. 150), a demonstração passa a ser vista por nós como culturais. E ainda, a certeza absoluta pretendida e evocada pela demonstração matemática é então entendida como um fenômeno cultural, gerado e mantido por determinada prática matemática, isto é, pela prática científica.

Para Bloor (2009), o conhecimento ser entendido como crença significa que todo conhecimento é aquilo que as pessoas concebem como tal. Entretanto, os conhecimentos serão as crenças que são mantidas com confiança pelas pessoas:

> O sociólogo estará interessado em particular pelas crenças que são assumidas como certas, institucionalizadas ou, ainda, investidas de autoridade por grupos de pessoas. O conhecimento, é claro, deve ser distinguido da mera crença – algo que pode ser

> feito ao reservar a palavra “conhecimento” para aquilo que é endossado coletivamente, deixando valer como mera crença o idiossincrático e o individual (BLOOR, 2009, p. 18).

Conceber o conhecimento científico e, em particular, a demonstração como uma crença, nos leva a compreender que ela é um processo nitidamente social, mantido e endossado por ser símbolo de segurança e certeza. Com isso, não se exclui a intervenção humana em seu desenvolvimento e também não a reduz unicamente a uma “rigorosa exatidão do modelo lógico-formal” (HANNA, 1987, p. 11).

Bloor (2009) ainda traz uma compreensão interessante quanto à generalização e a universalização de resultados científicos, que é importante para esta pesquisa, pois a demonstração é também valorizada por sua potencialidade de garantir a irrefutabilidade e imutabilidade de um resultado matemático. Para Bloor (2009), segundo Shinn (1999) (apud Vilela (2007)), um modo eficiente de distribuição de uma crença seria o processo de “universalização dos resultados” (p. 191). E nesse sentido, “a transferência de um resultado científico “fabricado” localmente” (p.191), não indica a obtenção da verdade, mas “reflete a capacidade dos praticantes de impor seu ponto de vista” (p.191):

> A transferência de um resultado científico “fabricado” localmente para um estado global não é uma conseqüência de sua capacidade para descobrir o mundo físico com exatidão e para esquadrinhar a natureza, mas melhor seria dizer a conseqüência, unicamente, da habilidade dos praticantes para impor seu ponto de vista a outros atores. Nesta sociologia, “universalidade” é a universalidade da dominação do produto na competência em um mercado capitalista global (SHINN, 1999, apud VILELA, 2007, p. 191).

A partir dessa ideia sociológica, a universalidade se restringe “ao universo global, aos limites do globo terrestre” (VILELA, 2009, p. 4). A escola, nesse caso, é um meio de propagação, divulgação e legitimação da crença na universalidade e verdades dos resultados matemáticos.

Com isso, Bloor (2009) acaba por esbarrar na noção de verdade, que, em vez de ser definida pelo autor, é apresentada através do seu uso. Segundo Bloor (2009), “há poucas dúvidas sobre o que queremos dizer quando falamos de verdade. Queremos dizer que alguma crença, julgamento ou afirmação corresponde à realidade e que ela capta e retrata como as coisas são no mundo. Falar assim é provavelmente universal” (p. 64). Entretanto, ele mostra o quanto essa relação entre realidade e conhecimento é complexa e muda de acordo com a evolução e questionamentos de teorias. Podemos exemplificar isso por meio de um dos resultados da pesquisa. Ao apresentarmos as mudanças que o campo da geometria sofreu ao se questionar o quinto postulado de Euclides, dissemos que isso provocou o desenvolvimento das geometrias não euclidianas. Nesse caso, ao modificar este postulado, os sistemas continuaram válidos, mas o caráter de verdade, associado aos princípios, se reestruturou.

Apesar de a ideia de verdade se mostrar complexa e contraditória, Bloor (2009) argumenta sobre o fato de não a abandonarmos. Segundo o autor, essa ideia desempenha funções "que surge com naturalidade", de forma conveniente e desempenha pelo menos três funções: a discriminatória, a retórica e a materialista. Com essas funções passamos a separar nossas crenças, ordenando-as entre "verdadeiras" ou "falsas". Utilizamos esses rótulos ainda para argumentarmos, criticarmos e persuadirmos. Estes rótulos podem ser vistos com ares de transcendência e autoridade.

> A autoridade é uma categoria social e apenas nós podemos exercê-la. Esforçamo-nos para transmiti-la às nossas opiniões e assunções mais arraigadas. A natureza tem o poder sobre nós, mas apenas nós possuímos autoridade (BLOOR, 2009, p. 70).

Além disso, a palavra verdade é utilizada para se dizer como o mundo é, por acreditar-se haver um ambiente externo comum a todos e que possui determinada estrutura, isto é, indica a crença numa ordenação externa.

À demonstração muitas vezes está associada à verdade, e mais, é um procedimento que de verdades se extrai verdades, que está incluída na afirmação que se conclui. Essa ideia de verdade desempenha papeis de extremo convencimento e persuasão, pois está interligada a autoridade e a ideia de autonomia do conhecimento.

Bloor (2009) ainda nega a ideia de pureza e neutralidade da matemática, que a torna uma ciência incapaz de transmitir valores e independente de sua condição sócio-histórica e cultural. Além disso, conduz as discussões a fim de negar ainda que há matemática definitiva e exterior ao individuo, observando variações no pensamento matemático que podem ser explicados por causas sociais. Bloor (2009) cita, por exemplo, variações no rigor da matemática e no tipo de raciocínio utilizado nas demonstrações matemática.

Bloor (2009) nos fala também sobre o pensamento lógico, sua naturalização e da sensação de autonomia provocada pelas deduções lógicas, pois há um forte pressuposto de que nossa mente funciona de forma lógica:

> Quando nos comportamos de modo racional ou lógico, é tentador dizer que nossas ações são governadas pelas condições da razoabilidade ou da lógica. A explicação de por que concluímos algo com base em um conjunto de premissas pareceria, assim, estar nos próprios princípios da inferência lógica. A lógica seria constituída de um conjunto de conexões entre premissas e conclusões, e nossas mentes poderiam seguir tais conexões (BLOOR, 2009, p. 22).

Nosso pensamento ocidental é fortemente marcado por traços da lógica aristotélica. Entretanto, isso não significa que pensamos de forma lógica. Essa sensação de que somos governados "pelas condições da razoabilidade ou da lógica" pode ser sentida porque somos treinados a pensar de determinada forma e a crer nesta lógica. Podemos dizer que há aí um estreitamento e adestramento na forma de pensar. Entretanto, é importante ressaltar que a própria natureza humana rompe com os princípios lógicos, como por exemplo, o princípio do terceiro excluído, pois há opções entre o sim e o não, entre o certo e o errado.

Vilela e Andrade (2013) também tecem considerações quanto aos efeitos sociais da naturalização da lógica. Para eles, a naturalização da lógica pode ser compreendida no encontro entre a educação matemática e as teorias psicogenéticas de Piaget:

> As apropriações de educadores das teorias de Piaget possibilitaram conformar os condicionantes normativos das práticas escolares aos axiomas da lógica formal e criar, a partir disso, critérios de julgamento das condições de cognição dos estudantes, em que aspectos culturais não são suficientemente considerados (VILELA; ANDRADE, 2013, p. 152).

Andrade e Vilela (2013) compreendem a "naturalização da lógica" como uma crença promovida por um contexto político. Dessa forma, passa-se a estipular e a pretender que seja desenvolvido, em uma sequência fixa, "o raciocínio pré-lógico ao raciocínio lógico-matemático" (VILELA; ANDRADE, 2009, p. 153).

Para Vilela e Andrade (2013), a "naturalização da lógica" é uma maneira de imposição de demandas específicas da sociedade, além de haver um pressuposto de autonomia do conhecimento matemático. Além disso, não podemos desconsiderar que a valorização da matemática se deve também pela potencialidade em desenvolver o raciocínio lógico. Essa potencialidade é inclusive muito citada nos livros didáticos e nos documentos oficiais.

No entanto, Vilela e Andrade (2013), veem ainda o outro lado dessa valorização. Para eles, ao se valorizar a crença em uma lógica formal, a escola acaba controlando comportamentos visando uma determinada finalidade, o que pode ser perverso,

> porque não dá o direito ao outro de fazer de outro modo, muito menos de negar. A negação implicaria na loucura, na punição. No caso do ensino, impõe-se ações estratégicas visando habilidades específicas, baseadas em determinadas crenças hegemônicas, independente das diferenças pessoais e culturais (VILELA; ANDRADE, 2013, p. 153)

Desse modo, podemos retomar Bloor (2009) que diz que ser persuadido pela lógica é o mesmo que ser persuadido a aceitar determinada forma de vida como certa e aceitar determinados comportamentos como errados. Nesse caso, a demonstração conduz a uma perspectiva de uma maneira correta de pensar, e quanto a isso acreditamos que a lógica por trás do procedimento da demonstração é uma forma e não "a" forma de pensar.

Buscando articular essa ideia de Bloor (2009) com nossa pesquisa, vemos que essa "persuasão" pode ocorrer pela presença persistente da demonstração em praticamente todos os anos escolares.

Bloor (2009) diz que pode haver casos em que algo pode ser explicado por uma prova, mas essa explicação pode ser mais persuasiva de outra maneira. Inventar novas ideias de prova ou modelos de inferência pode mudar o significado de um resultado lógico informal ou matemático informal. Para ele, qualquer regra pode ser reinterpretada, constatação essa que é de extrema importância para esta pesquisa, pois, o uso da demonstração formal como uma forma privilegiada de se validar os conhecimentos matemáticos foi por muito tempo uma regra. Ao pretendermos ampliar essa ideia de demonstração na escola, passamos de certa maneira a reinterpretar essa regra e a valorizar outras formas de pensar.

Por meio do que expusemos nesta seção, podemos dizer que o procedimento da demonstração possui muitos valores agregados e é um método importante porque é a forma de validação e de construção dos resultados matemáticos. Podemos ainda dizer, com base em Bloor (2009), que a demonstração é uma crença atrelada a símbolos fortes de rigor, de precisão, de cientificidade da matemática, de respeitabilidade, autoridade e de verdade. Além disso, a demonstração é vista como uma forma de neutralizar a interferência humana nos resultados matemáticos, sendo então um procedimento que promove a ideia de pureza da matemática. Acreditamos que estes símbolos atrelados à demonstração são provenientes de seu contexto de produção e se mantém, pois, como diz Bauchspies e Restivo (2001), todas as instituições devem proteger seus edifícios sociais por meio da sacralização de seus princípios, o que acaba dando sentido à frase desses autores: "a demonstração é a cola sagrada da lógica e da razão" (p. 112).

CAPÍTULO 3

AS DEMONSTRAÇÕES ESCOLARES NOS LIVROS DIDÁTICOS DESTINADOS AOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Nos capítulos anteriores, discutimos a demonstração em uma perspectiva histórica e social, em que argumentamos com base em discussões sociológicas que a demonstração é uma crença atrelada a símbolos fortes que contribuem para sua valorização e manutenção, inclusive na matemática escolar. Apresentamos neste tópico as análises dos livros didáticos realizadas nesta pesquisa, em que buscaremos observar como se caracteriza e que funções cumprem as demonstrações escolares.

Conforme dissemos na seção de procedimentos metodológicos, nos inspiraremos na análise de conteúdo para compreender as demonstrações nos livros didáticos. Nessa metodologia, a descrição dos textos a serem submetidos ao processo analítico é a primeira etapa a ser realizada, sendo nesse momento que ocorre a exposição das características do texto após um tratamento inicial (FRANCO, 2007). A fase intermediária da análise de conteúdo é a de produzir inferências, ou seja, passa-se da etapa da descrição para a de interpretação, que consiste em significar essas características observadas.

Sendo assim, nessa seção trataremos, em um primeiro momento, da descrição interpretativa e análise inicial das coleções de livros didáticos que compõem os documentos desta pesquisa, considerando as características gerais da coleção e as partes na seção de geometria em que há demonstrações escolares. É importante relembrar que denominamos de *demonstrações escolares* às diferentes formas de demonstrar na matemática escolar, que podem ser empíricas – baseado na experiência - ou dedutivas. Nesse contexto, a demonstração formal, as justificativas ou experimentos que visam verificar uma propriedade, por exemplo, estão sendo entendidas por nós como demonstrações escolares.

As partes na seção de geometria foram analisadas considerando nosso roteiro de análise e a revisão da bibliografia, o que possibilitou a construção de quatro categorias: (1) demonstração escolar via experimentos e casos particulares; (2) demonstração escolar lógico-dedutiva com caráter de exploração; (3) demonstração escolar formal com elementos da lógica; e (4) demonstração escolar via casos particulares, generalização e explicação. Além disso, como uma maneira de contextualização e de compreensão do sentido das demonstrações escolares nos livros didáticos, recorremos às orientações curriculares para o ensino de matemática dos níveis que nos são de interesse e aos guias do PNLD.

3.1. Descrição interpretativa e análise inicial das coleções

Nesta seção, apresentamos a descrição interpretativa e análise inicial das coleções de livros didáticos. Apresentamos as seguintes informações referentes às coleções de livros didáticos: autoria, nome da coleção, níveis a que se dedica o livro didático, edição, editora, ano de publicação, número total de páginas do livro e dos tópicos relacionados à geometria, número de páginas dentre as destinadas à geometria que possuem demonstrações escolares no decorrer do conteúdo e exercícios propostos. Destacamos na descrição como se apresentam as demonstrações, bem como sua frequência nos diferentes níveis do ensino de matemática. A exposição foi organizada da seguinte forma: primeiro serão descritos, observando a ordem cronológica, os livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e em seguida, os do ensino médio. É importante ressaltar que as interpretações feitas nas descrições tiveram por base as questões que compuseram o roteiro de análise.

3.1.1. As coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental

3.1.1.1. Matemática

PROJETO ARARIBÁ. ***Matemática****. 5ª à 8ª série do Ensino Fundamental. 1ed. São Paulo: Moderna, 2006.*

Esta é uma obra coletiva, que foi concebida, desenvolvida, produzida e publicada pela editora Moderna. Ela é composta por quatro livros didáticos destinados aos níveis de 5ª à 8ª série, que estão estruturados cada um em 8 unidades.

Por meio da estrutura da coleção, observamos as tendências indicadas pelos PCN/98 para os anos finais do ensino fundamental. Inclusive este documento é uma referência bibliográfica utilizada pelos autores. Os PCN fazem as seguintes orientações: a resolução de problemas é um modo de ensino e aprendizagem da matemática; a história da matemática é um dos caminhos para se fazer matemática em sala de aula; é objetivo trabalhar com gráficos e tabelas visando selecionar, organizar, produzir e interpretar informações; deve-se fazer uso de situações-problemas para desenvolver o raciocínio; fazer conexões da matemática com outras áreas do saber e; motivar o trabalho em grupo.

Analisando a estrutura da obra, vemos que ela busca seguir as orientações dos PCN. As unidades são esquematizadas da seguinte forma: inicia-se com as seções “Para começar...” e “O que você já sabe?” nas quais é apresentada uma série de questões baseadas em uma imagem de abertura, que visa, segundo os autores da coleção, levantar os conhecimentos prévios dos estudantes quanto aos conteúdos já estudados e traz questões específicas sobre eles que serão estudados na unidade; em seguida, ocorre o desenvolvimento dos conteúdos que se inicia com situações-problemas acompanhadas de questões introdutórias e de exercícios propostos relacionados ao que fora desenvolvido; há também a seção "Trabalhando com a informação", que aborda atividades interpretativas acompanhadas de gráficos e tabelas; na seção "Atividades integradas", há uma série de exercícios de múltipla escolha que pretende dar continuidade ao estudo da unidade; na seção "Resolução de problemas", tem uma proposta de problemas acompanhada de um roteiro de estudo que visa problematizar diversos aspectos apresentados nesses problemas; na seção "Compreendendo um texto", busca-se relacionar os conceitos estudados com textos publicados em revistas, livros, dentre outros; e por fim, há a seção "Trabalho em equipe" em que são propostas pesquisas a serem realizadas em grupo, e a seção "Organize suas ideias", que consiste em autoavaliação do aprendizado do estudante. Uma característica da coleção é que, na exposição dos conteúdos, não há exercícios resolvidos. Ao final de cada livro da coleção, há as respostas dos exercícios propostos e a referência bibliográfica utilizada.

A coleção foi avaliada e aprovada pelo PNLD do ano de 2008. O guia do PNLD de 2008 destacou características da obra: por um lado há a exploração bem sucedida de diferentes significados dos conceitos e várias situações em que o aluno pode registrar suas estratégias de resolução; por outro lado, há a sistematização precoce de certos conceitos, o que dificulta a elaboração de significados pelos alunos, além de pouco incentivo à validação de diferentes estratégias, ficando muitas vezes a cargo do professor estimulá-la.

Na tabela abaixo apresentamos o número de páginas de cada volume da coleção destinadas à seção de geometria e o número de vezes que as demonstrações escolares aparecem na seção como exposição do conteúdo e como exercícios propostos:

Tabela 2 - Informações quanto à coleção "Projeto Araribá"

Volume	**Número de páginas do livro**	**Número de páginas destinadas à geometria**	**Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria**	**Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria**
5ª série	352	74	0	16
6ª série	326	104	8	16
7ª série	320	144	31	31
8ª série	319	142	36	18

A construção da tabela acima e das referentes aos demais livros didáticos se deu da seguinte forma: com a coleção de livros didáticos em mãos, inicialmente observamos o número total de páginas do livro, bem como o número de páginas referentes aos conteúdos de geometria plana e espacial que compuseram nosso "universo" de documentos e de onde extraímos o "corpus" da pesquisa. O "corpus" da pesquisa foi composto por todas as demonstrações escolares – experimentos, justificativas, explicações, argumentos em linguagem corrente, dedução, indução, dentre outros - mobilizados pelos autores dos livros didáticos, podendo ser na exposição dos conteúdos, em exercícios ou desafios. Tendo sido delineado o "corpus" da pesquisa para cada série, tínhamos assim o número de demonstrações na exposição de conteúdos e nas tarefas propostas referentes a cada nível de ensino. Estes números foram expostos nas quarta e quinta colunas da tabela acima.

É importante ressaltar que não nos restringimos à demonstração formal. Nosso movimento foi de considerar qualquer argumento que visava validar uma afirmativa como uma maneira de demonstrar na matemática escolar. Posicionando-nos dessa forma, passamos a olhar para os exercícios e desafios propostos procurando pelos momentos em que estes desempenhavam algum papel no desenvolvimento da prática de argumentação e de justificação.

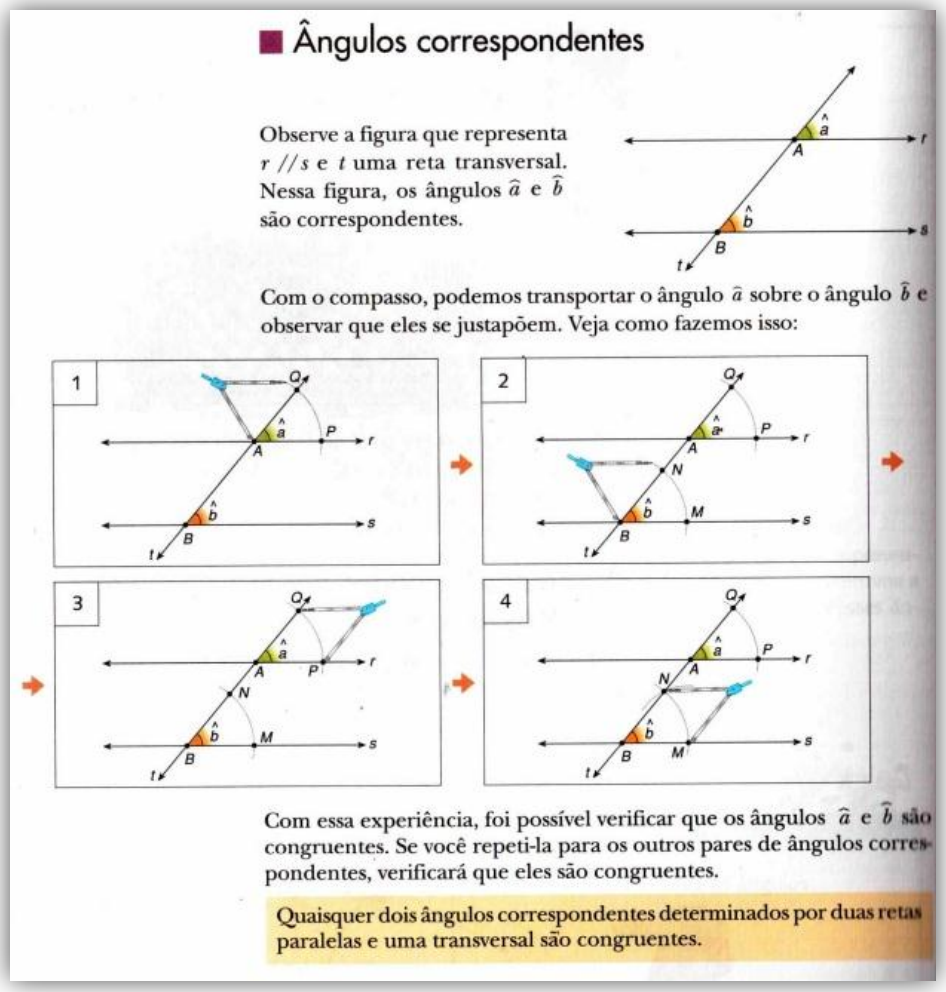
A coleção "Projeto Araribá" apresenta no decorrer dos livros didáticos dos diferentes níveis, em termos quantitativos, poucas demonstrações escolares em relação ao número de páginas destinadas ao tópico de geometria, sendo que estão presentes em aproximadamente 16% do total de páginas. As demonstrações escolares obtidas na coleção possuem diversas formas de desenvolvimento e níveis de formalidade, em que as denominados por: procedimentos realizados mediante experimentos e testes de casos particulares; procedimentos lógico-dedutivos em que alguns têm caráter de exploração; procedimentos formais acompanhados por um texto demonstrativo no qual se vê o uso de termos como hipótese, teses, axiomas e postulados e; procedimentos que visam explicar e justificar a validade de determinado resultados.

Exemplificaremos cada tipo de procedimento de demonstração citado, trazendo imagens dos livros didáticos. Esses servirão também como exemplo para compreender os procedimentos obtidos nas demais coleções. Maiores detalhes quanto a cada tipo de demonstração serão dados na próxima seção.

- *1º tipo: Procedimentos realizados mediante experimentos e testes de casos particulares;*

Estamos chamando de “experimento” ou “experiência” as formas de validação que fazem uso de materiais concretos de maneira a justificar e explicar os resultados matemáticos, e testes de casos particulares às situações em que o autor utiliza de um exemplo, ou um número reduzido de exemplos, de onde se constata a validade de uma propriedade matemática.

Figura 21 - Verificação da propriedade dos ângulos correspondentes

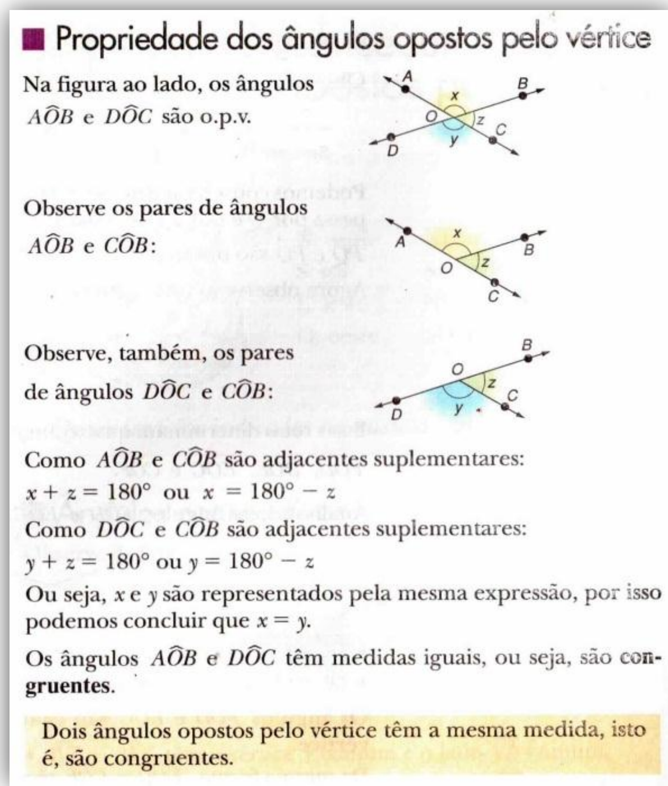


Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p.82).

- *2º tipo: Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração*

Estamos considerando neste segundo tipo os procedimentos de demonstração que ocorrem via dedução, mas que seu desenvolvimento se dá mediante a investigação de uma figura representativa da propriedade a ser demonstrada. Os argumentos que compõem as deduções são criados pela observação de relações nesta figura.

Figura 22 - Demonstração da propriedade dos ângulos opostos pelo vértice


Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice

Na figura ao lado, os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são o.p.v.

Observe os pares de ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$:

Observe, também, os pares de ângulos $D\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$:

Como $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$ são adjacentes suplementares:
$x + z = 180°$ ou $x = 180° - z$

Como $D\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são adjacentes suplementares:
$y + z = 180°$ ou $y = 180° - z$

Ou seja, x e y são representados pela mesma expressão, por isso podemos concluir que $x = y$.

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ têm medidas iguais, ou seja, são **congruentes**.

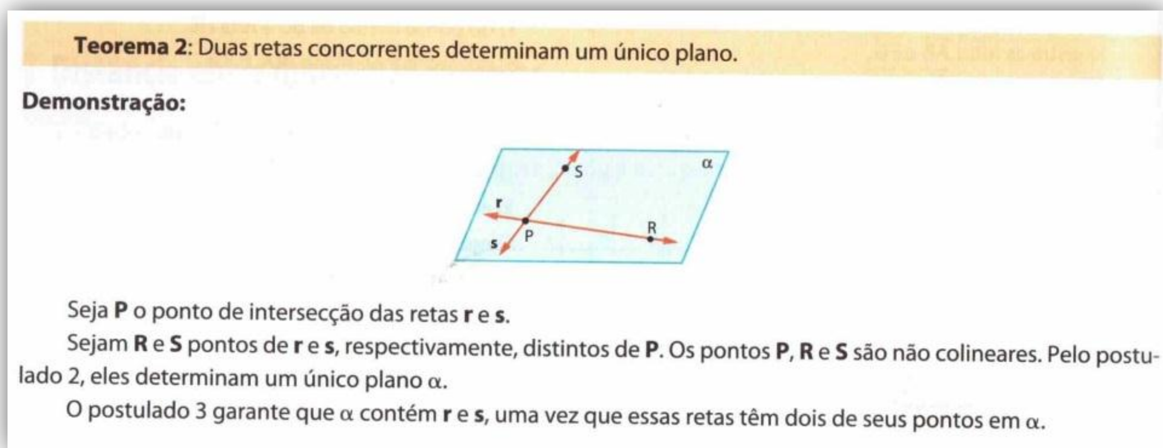
Dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida, isto é, são congruentes.

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 6ª série, 2006, p.102).

- *3º tipo: Procedimentos formais em que no texto demonstrativo vemos o uso de termos como hipótese, teses, axiomas e postulados;*

Quanto a esse tipo de procedimento, estamos considerando as demonstrações escolares que decorrem necessariamente por axiomas, postulados e proposições verificadas a priori e que são explicitados no decorrer da demonstração.

Figura 23 - Demonstração do teorema 2


Teorema 2: Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Demonstração:

Seja **P** o ponto de intersecção das retas **r** e **s**.

Sejam **R** e **S** pontos de **r** e **s**, respectivamente, distintos de **P**. Os pontos **P**, **R** e **S** são não colineares. Pelo postulado 2, eles determinam um único plano α.

O postulado 3 garante que α contém **r** e **s**, uma vez que essas retas têm dois de seus pontos em α.

Fonte - (MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES – 2ª ano, 2011, p.200).

- *4º tipo: Procedimentos que visam explicar e justificar a validade de determinados resultados.*

Neste caso, têm-se as demonstrações escolares que estabelecem uma relação entre conhecimentos indutivos e dedutivos. São procedimentos que visam explicar determinada propriedade porque surge da observação de casos particulares e da generalização do que se observa.

Figura 24 - Justificação da propriedade do número de diagonais de um polígono convexo

Número de diagonais de um polígono convexo

O número de diagonais que partem de um vértice de um polígono depende do número de lados desse polígono. Logo, o número total de diagonais de um polígono também dependerá do número de lados desse polígono.

Vejamos como relacionar o número de diagonais d com o número de lados n de um polígono qualquer.

- Já sabemos que, de um único vértice, partem $(n - 3)$ diagonais.
- Como há n vértices, seriam $n(n - 3)$ diagonais.
- Porém, cada diagonal tem extremidades em dois vértices e, por isso, foi contada duas vezes. Então o número de diagonais d de um polígono é a metade de $n(n - 3)$, ou seja:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p.91).

Na tabela a seguir, organizamos de acordo com o nível de escolaridade os tipos de demonstrações escolares obtidas na coleção “Projeto Araribá” e o número de vezes em que aparecem nos livros didáticos:

Tabela 3 - Informações quanto aos tipos de demonstrações escolares da coleção “Projeto Araribá”

Nível de ensino	Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
5ª série	0	0	0	0
6ª série	2	6	0	0
7ª série	6	5	18	2
8ª série	1	23	10	2

As demonstrações escolares via experimentos e casos particulares ocupam pouco espaço dentre as demonstrações presentes na seção de geometria: 12% do total obtido. Há maior uso na 7ª série, sendo mobilizado 6 vezes pelos autores da obra.

Os procedimentos dedutivos com caráter de exploração são o tipo de demonstração mais mobilizado pelos autores e se referem a 45% das demonstrações encontradas, estando mais presentes na 8ª série do ensino fundamental. Já as demonstrações formais representam a segunda forma de validação mais utilizada, sendo 37% dos procedimentos. Por fim, temos as explicações e justificações de propriedades, que são a forma de demonstração menos utilizada, sendo 6% dos procedimentos.

Nesta coleção, vemos que nas duas primeiras séries são raros os momentos em que se mobiliza alguma demonstração escolar. Isto ocorre com mais frequência nas duas últimas séries. Pelas informações da tabela podemos afirmar que os procedimentos lógico-dedutivos são mais presentes e valorizados nas 7ª e 8ª séries. Além disso, observamos que muitas vezes os autores não denominam este procedimento como demonstração.

Observamos na seção de geometria do volume da 5ª série que são apresentadas na maior das vezes definições de conceitos, classificações de sólidos, nomenclaturas e se relaciona tais definições e classificações com objetos ou situações cotidianas. Não há ainda o trabalho com argumentações visando justificativas e explicações no desenvolvimento de tais conceitos. Podemos afirmar que há uma introdução aos conceitos geométricos de forma intuitiva e concreta.

Com a figura 25, ilustramos uma situação no volume da 5ª série em que se introduzem as noções de ponto, reta e plano e os associa a um pingo numa folha de papel, a uma corda esticada e a superfície de uma mesa, respectivamente.

Figura 25- Ideia intuitiva de conceitos matemáticos

Fonte – (PROJETO ARARIBÁ – 5ª série, 2006, p.93)

No volume da 6ª série, mobilizam-se poucas demonstrações escolares. Vemos que o foco, assim como na 5ª série, é apresentar conceitos e exemplificá-los com situações reais.

Nos volumes da 7ª e 8ª série, vemos que as demonstrações muitas vezes acabam assumindo um papel importante e até mesmo central para o desenvolvimento da seção de geometria, em que geralmente os resultados são retomados para o desenvolvimento de outros conceitos.

Quanto aos exercícios e desafios propostos, podemos dividi-los nos seguintes tipos: (1) o uso de experimento ou tabelas para levantar conjecturas que devem se justificadas depois; (2) tabelas para serem completadas e, se observados padrões, deve-se generalizá-los ou explicá-los; (3) justificativas de afirmativas; (4) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas; (5) questões abertas; (6) justificativas de teoremas; (7) conferência de demonstrações; (8) demonstrações lógico-dedutivas e; (9) verificação de semelhanças e congruências. Na tabela abaixo organizamos conforme o nível de escolaridade os tipos de exercícios que encontramos:

Tabela 4 - Informações quanto aos exercícios e desafios presentes na coleção “Projeto Araribá”

Nível de ensino	Tipos de exercícios e desafios obtidos em cada nível
5ª série	(1), (2), (3), (4) e (5)
6ª série	(2), (3) e (4)
7ª série	(1), (2), (3), (4), (6), (7) e (8)
8ª série	(3), (4), (9) e (7)

Observamos com relação aos exercícios propostos que somente há solicitação de demonstrações lógico-dedutivas a partir da 7ª série. Geralmente os enunciados de tarefas desse tipo são diretos com frase no imperativo afirmativo: “prove”, “mostre” e “demonstre”.

No geral, em todos os níveis se encontram tarefas que buscam fazer com que os estudantes levantem conjecturas por meio da observação de padrões em tabelas ou experimentos e a partir daí sejam capazes de justificar seu pensamento e processo de solução. Outro tipo de exercício muito mobilizado é o de justificar a verdade das afirmativas, do tipo “verdadeiro ou falso?”. A nosso ver, esse tipo de tarefa contribui para o desenvolvimento da argumentação e do uso de ideias plausíveis acerca do assunto estudado, mas muitas vezes fica a cargo do professor dar esse caráter à tarefa. A “conferência de demonstração” é uma tarefa pouco utilizada na coleção e visa levar o estudante a observar uma demonstração gráfica ou lógico-dedutiva e buscar por erros no seu desenvolvimento.

Obtemos ainda no livro da 8ª série, na seção “Compreendendo um texto”, um texto sobre o Teorema de Fermat (figura 26 e 27):

Figura 26- O enigma da margem – Teorema de Fermat

COMPREENDENDO UM TEXTO

O enigma da margem

[Em 1637], enquanto estudava o Livro II da *Aritmética* [de Diofante de Alexandria, século III], Fermat encontrou toda uma série de observações, problemas e soluções relacionadas com o teorema de Pitágoras e os trios pitagóricos. [...] Subitamente, num instante de genialidade [...], ele criou uma equação que, embora fosse muito semelhante à de Pitágoras, não tinha solução. [...]

No lugar de considerar a equação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Fermat contemplava uma variante da criação de Pitágoras:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

[...] Fermat tinha apenas mudado a potência de 2 para 3, do quadrado para o cubo, mas sua nova equação aparentemente não tinha solução para qualquer número inteiro. O método de tentativa e erro logo mostra a dificuldade de encontrar dois números elevados ao cubo que, ao serem somados, produzam outro número elevado ao cubo. Poderia acontecer dessa pequena modificação transformar a equação de Pitágoras, com um infinito número de soluções, em uma equação insolúvel?

Fermat alterou mais a equação, trocando a potência para números maiores do que 3 e descobrindo que a busca de soluções para essas equações era igualmente difícil. De acordo com Fermat, parecia não existir um trio de números que se encaixasse perfeitamente na equação

$x^n + y^n = z^n$, onde n representa 3, 4, 5...

Na margem de [seu volume da] *Aritmética*, ao lado do Problema 8, Fermat escreveu uma nota de sua observação:

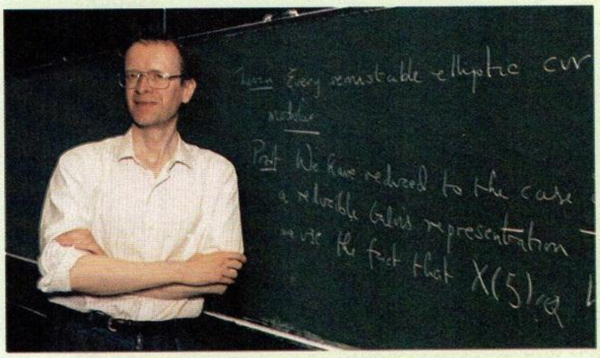
É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes.

Entre todos os números possíveis parecia não haver razão por que pelo menos um conjunto de soluções não poderia ser encontrado. E, no entanto, Fermat declarava que em parte alguma do infinito universo de números existiria um "trio fermatiano". Era uma afirmação extraordinária, mas Fermat acreditava que poderia prová-la. Depois da primeira nota na margem, esboçando sua teoria, o gênio travesso colocou um comentário adicional que iria assombrar gerações de matemáticos:

Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la.

Este era Fermat no seu modo mais frustrante. Suas próprias palavras sugerem que ele estava particularmente satisfeito com sua demonstração "realmente maravilhosa", mas não se daria ao incômodo de escrevê-la em detalhe, quanto mais de publicá-la. Ele nunca falou a ninguém sobre sua prova e, no entanto, apesar dessa combinação de indolência e modéstia, o Último Teorema de Fermat, como mais tarde seria chamado, seria famoso no mundo inteiro pelos séculos seguintes.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat.* Rio de Janeiro: Record, 2002. p. 78-80.



DENISE APPLEWHITE/CORBIS SYGMA-STOCK PHOTOS

O matemático britânico Andrew Wiles (1953-) conheceu o teorema de Fermat aos 10 anos de idade e, a partir de então, passou a vida tentando demonstrá-lo. Em 1993, Wiles apresentou uma primeira demonstração do teorema para um reduzido grupo de matemáticos. Porém, uma falha nessa demonstração adiou por catorze meses a solução definitiva. Finalmente, em 1995, com a ajuda de Richard Taylor, Wiles realizaria seu sonho de infância: desvendar o enigma da margem com que Fermat atormentou estudiosos do mundo durante mais de três séculos!

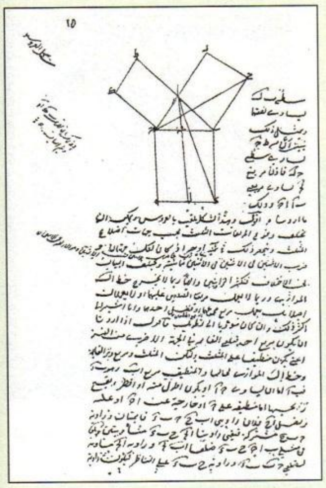
146

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 8ª série, 2006, p. 146)

Figura 27 - Atividades sobre o texto “O enigma da margem – Teorema de Fermat”

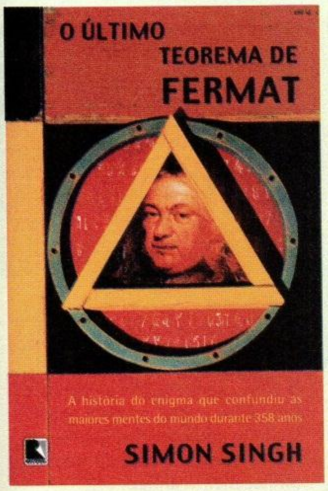
Atividades

CID



Tradução em árabe do teorema de Pitágoras. Essa tradução foi revisada em cerca de 890.

CID



Este livro conta a história de como foi desvendado um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

1 Qual o objetivo principal do texto da página ao lado?

a) Apresentar um dos problemas mais famosos da História da Matemática e sua relação com o teorema de Pitágoras.

b) Informar que os matemáticos nem sempre conseguem provar as hipóteses que elaboram a respeito de um problema difícil.

c) Afirmar que as provas e descobertas matemáticas demandam um longo período de tempo para serem elaboradas.

2 Responda.

a) Você já havia ouvido falar do “último teorema de Fermat”?

b) Você conhece outro problema famoso por deixar os matemáticos instigados por um longo período?

c) Estudar a obra de outros pensadores ajuda os matemáticos a descobrir a solução de problemas difíceis?

3 Pesquise.

Você sabe o que é um *teorema*? Pesquise o termo no dicionário (ou em livros de Matemática) e escreva um texto resumindo o que descobriu.

4 Releia o texto e resolva.

a) O que você entende por *trios pitagóricos*?

b) Encontre um trio de números que, substituídos no teorema de Pitágoras, torne a sentença verdadeira.

c) O trio de números inteiros 9, 12 e 17 é um trio pitagórico? Por quê?

d) Os números 5, 12 e 13 formam um trio pitagórico? Explique.

e) Encontre um trio de números que, substituídos na equação de Fermat, prove que a equação não é verdadeira para esses números.

5 Pense e responda.

Por que era necessário provar o teorema de Fermat? Não bastaria substituir números na equação e verificar que ela não era verdadeira?

6 Dê sua opnião.

“Em 1993, passados 358 anos desde o desafio de Fermat, Wiles assombrou o mundo ao anunciar a demonstração. Mas sua luta ainda não tinha terminado. Um erro o fez voltar às pesquisas [...] até que em 1995 ele ganhou as páginas de jornais do mundo inteiro e 50 mil libras da Fundação Wolfskehl.”

O que você acha da alegação de Fermat de não demonstrar seu teorema por falta de espaço na margem do livro em que fazia anotações? A comprovação do teorema depois de mais de trezentos anos pesa, de algum modo, em sua opinião?

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 8ª série, 2006, p. 147)

O desenvolvimento desta atividade, ilustrada nas figuras 26 e 27, possibilita que os estudantes tenham contato e conhecimento sobre o que é um teorema, a necessidade de demonstrar e a ideia de não ser suficiente apenas verificar alguns casos em um teorema. Compreendemos que este texto e a atividade vêm no sentido de explicar para o estudante o que é demonstração, diferenciá-la de procedimentos não formais, inserir o estudante em um procedimento de validação, e assim iniciar a criação de uma ideia do que seria uma demonstração formal.

Podemos exemplificar essa afirmação trazendo a solução da questão 5, apresentada pelo autor: "Substituir número na equação de Fermat não era suficiente para provar seu teorema porque poderia existir um trio de números que tomasse a equação verdadeira, invalidando o teorema" (PROJETO ARARIBÁ, 2006, p. 304).

Com essa explicação o autor deixa claro que a demonstração do teorema não deve ser feita sob casos particulares, pois podem surgir contraexemplos, ou seja, situações não vislumbradas. Com isso, o estudante tem contato com a ideia de generalização, de objetividade e de verdade que acompanha a noção de demonstração.

3.1.1.2. A conquista da matemática

GIOVANNI JUNIOR, J. R; CASTRUCCI, B. ***A conquista da Matemática****. 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009. : FTD, 2009*

A coleção foi publicada em 2009 pela editora FTD, tendo como autores José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci e é composta por quatro livros didáticos do 6º ao 9º ano. Cada volume está subdividido em unidades, sendo que os livros didáticos do 6º ao 9º possuem, em ordem crescente, 9, 10, 13 e 12 unidades.

Pelas referências bibliográficas da obra, vemos que ela utiliza como orientação curricular os PCN/98 e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1992.

A metodologia para exposição do conteúdo contempla momentos com atividades para preparar o estudante para o conteúdo a ser trabalhado, que aborda uma situação motivacional com questões e histórias que envolvem os conceitos a serem estudados; traz exercícios de aplicação dos conceitos desenvolvidos; busca fazer conexões da matemática com outras áreas do conhecimento; ao final das unidades, apresenta exercícios para retomar os conceitos desenvolvidos. No final de cada livro, há as seções "Projetos Pedagógicos interdisciplinares", "Indicações de leitura", "Glossário" e "Respostas e Bibliografia".

A coleção foi aprovada e teve sua avaliação divulgada no guia do PNLD referente ao ano de 2011. O guia do PNLD de 2011 observa, numa visão geral, que as validações encontradas nos livros didáticos possuem encadeamento lógico adequado, são bem conduzidas, mas há generalizações sem as devidas justificativas.

Vejamos, de maneira quantitativa, o espaço que tem a seção de geometria nos livros didáticos e as demonstrações dentro desta seção:

Tabela 5 - Informações quanto à coleção "A conquista da matemática"

Volume	Número de páginas do livro	Número de páginas destinadas à geometria	Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria	Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria
6º ano	36	60	5	2
7º ano	36	184	3	2
8º ano	84	160	23	16
9º ano	68	143	23	8

Na coleção "A conquista da matemática", há maior espaço para as questões da geometria a partir do 7º ano. Em termos quantitativos, as demonstrações escolares ocupam cerca de 10% das páginas destinas à geometria. Observamos que há os mesmos tipos de demonstrações encontrados na coleção anterior.

Na tabela a seguir, organizamos de acordo com cada volume os tipos de demonstrações escolares obtidos e sua frequência nos livros didáticos:

Tabela 6 - Informações quanto aos tipos de demonstrações escolares presentes na coleção "A conquista da matemática"

Nível de ensino	Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
6º ano	3	2	0	0
7º ano	2	1	0	0
8º ano	4	11	6	2
9º ano	3	17	3	0

Para a coleção "A conquista da matemática", vimos que são mobilizadas poucas demonstrações. A maior frequência ocorre nos dois últimos anos do ensino fundamental, sendo os procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração o mais utilizado, representando 57% dos tipos encontrados. Os experimentos aparecem em média 3 vezes em cada nível, sendo o segundo tipo de demonstração mais utilizado, ou seja, representa 22% do total. As demonstrações que estamos chamando de formais aparecem nos dois últimos níveis e as explicações e justificações somente no 8º ano. Eles representam respectivamente, 17% e 4% dos procedimentos.

Também para esta coleção, vemos que as demonstrações escolares no 6º e 7º ano são raras. Nestes níveis, o foco também é na apresentação de conceitos, definições e propriedades relacionando-os com situações reais.

Assim como na coleção “Projeto Araribá”, esta obra utiliza em maior número de vezes as demonstrações escolares nas duas últimas séries. No entanto, em poucos momentos se denomina ou faz menção à ideia de demonstração. Nos volumes do 8º e 9º ano, vemos que as validações muitas vezes acabam assumindo um papel importante e até mesmo central para o desenvolvimento da seção. Geralmente os resultados são retomados para o desenvolvimento de outros conceitos.

No que se refere aos exercícios propostos observamos um menor número de vezes em que são mobilizados, se compararmos à coleção anterior. Encontramos os seguintes tipos: (1) o uso de experimento ou tabelas para levantar conjecturas e que devem ser justificadas depois; (2) justificativas de afirmativas; (3) verificação de semelhanças e congruências; (4) questões abertas; (5) verificação de teoremas; (6) demonstrações lógico-dedutivas e; (7) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas.

Na tabela abaixo estão organizados, conforme o nível de escolaridade, os tipos de exercícios que encontramos:

Tabela 7 - Informações quanto aos exercícios e desafios presentes na coleção “A conquista da matemática”

NÍVEL DE ENSINO	TIPOS DE EXERCÍCIOS E DESAFIOS OBTIDOS EM CADA NÍVEL
6º ano	(2)
7º ano	(1) e (4)
8º ano	(2), (5), (6) e (7)
9º ano	(2) e (3)

Observamos que, no geral, a coleção apresenta exercícios de aplicação direta com enunciados que se inicia com palavras do tipo “qual é?”, “quanto há?”, “determine”, “calcule”, etc.

Praticamente não há exercícios para os 6º e 7º anos, e muito pouco nos demais níveis, que estimulem o raciocínio lógico, o desenvolvimento da prática da argumentação e de justificação.

No livro do 8º ano, grande parte dos exercícios listados solicitam explicitamente que o estudante “prove”, “mostre” ou “demonstre”. Não se orienta o que deve ser feito, mas indicam-se no máximo resultados já estudados que podem ajudar na tarefa.

São raras as tarefas que fazem uso da observação de padrões para estimular a conjecturação e a justificação de percepções. Podemos afirmar que este não é um ponto que é dado importância na seção de geometria da coleção.

Esses aspectos por nós destacados também estão presentes na avaliação da coleção no guia do PNLD:

> Além disso, há destaque para regras e algoritmos, com pouco espaço para o aluno formular conjecturas e exercitar a criatividade. A apresentação muito diretiva dos conteúdos também não favorece uma participação ativa dos alunos na construção de seus conhecimentos. Alguns desafios, no entanto, propiciam maior liberdade para a aplicação dos conhecimentos adquiridos. São raras as atividades envolvendo cálculo mental e estimativas, bem como as que solicitam a utilização de materiais didáticos ou da calculadora (BRASIL, 2011, p. 45).

Vemos na estrutura dos livros didáticos da coleção que a cada unidade há uma capa com ilustrações que dão ideia do que vem pela frente. Enquanto nos 6º e 7º anos estas capas se referem à arte e às curiosidades, o livro do 8º ano apresenta nas duas primeiras unidades de geometria informações sobre a geometria prática dos egípcios e a contribuição dos gregos para a sistematização dos conhecimentos deste povo. Para isso, cita a obra de Euclides, destacando sua importância na história da matemática (Figura 28).

Figura 28 - Texto informativo sobre a geometria

Fonte - (A CONQUISTA DA MATEMÁTICA – 8º ano, 2009, p.194).

Além disso, traz como curiosidade o fato de que Euclides utilizava o método axiomático para a organização dos conhecimentos matemáticos. Ainda é proposto que o estudante pesquise o significado dos termos axioma, postulado e teorema.

No livro do 6º ano, por exemplo, apesar de haver poucos procedimentos de validação, já na primeira página da seção de geometria há um texto sobre o desenvolvimento do conhecimento geométrico e os povos antigos. Nesse texto, os autores comentam sobre o papel dos babilônios, egípcios e gregos para a geometria. Comenta-se também sobre a geometria prática dos dois primeiros povos e de que alguns gregos foram até o Egito para buscar por novas aplicações da geometria. É dado ao povo grego o crédito da sistematização dos conhecimentos geométricos, fazendo com que a geometria deixasse de ser puramente experimental. É destacado principalmente o papel de Euclides nesse processo: “para se ter uma ideia da importância dessa organização, a Geometria que ensinamos hoje é praticamente a mesma de Euclides” (GIOVANNI JR.; CASTRUCCI, 2009, p. 132).

Podemos dizer que, conforme há maior ampliação e formalização dos conhecimentos matemáticos apresentados nos livros didáticos, os autores se preocupam em apresentar para os estudantes a ideia de uma matemática mais teórica, além da prática, pois não deixam de lado a conexão da matemática com outros temas como as artes, a agricultura, a navegação, dentre outros, destacando que a geometria está em toda parte.

Essa percepção se justifica ao analisar os princípios norteadores dos PCN, que propõem adequar o trabalho na escola à uma nova realidade, que mostra a presença da matemática em diferentes ramos do conhecimento e atividade humanas. Assim, a necessidade ultrapassa a questões teóricas e de especulação da matemática, sendo necessário apresentar ao aluno uma matemática mais pragmática e útil ao desenvolvimento humano.

3.1.1.3. Matemática e realidade

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. ***Matemática e realidade****. 6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.*

A coleção foi publicada pela editora Atual em 2009, em 6º edição, tendo como autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado. A obra foi aprovada e teve sua avaliação divulgada no guia do PNLD referente ao ano de 2011. O guia do PNLD de 2011 observa que há espaço destinado para o aluno demonstrar resultados, mas poucas oportunidades de conjecturar.

Os livros contêm as seções “Matemática em notícia”, “Desafios”, “Teste seu conhecimento”. Os conteúdos abordados são seguidos por alguns exemplos. Em seguida, encontram-se os exercícios de aplicação e fixação dos conteúdos matemáticos estudados. Há também a seção “Matemática no tempo”, que aborda temas da história da matemática. Uma característica dos livros é a presença, em praticamente todos os capítulos, de desafios relacionados aos temas estudados.

Na tabela abaixo, organizamos as informações referentes ao espaço que tem a seção de geometria nos livros didáticos e as demonstrações dentro desta seção:

Tabela 8- Informações quanto à coleção “Matemática e realidade”

Volume	Número de páginas do livro	Número de páginas destinadas à geometria	Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria	Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria
6º ano	04	53	0	0
7º ano	71	42	5	0
8º ano	52	138	33	21
9º ano	35	127	26	4

Na coleção “Matemática e realidade”, as demonstrações escolares ocupam 18% do total de páginas destinada à geometria. Os tipos de demonstração mencionados para a coleção “Projeto Araribá” também estão presentes nesta coleção.

Na tabela a seguir, organizamos de acordo com cada volume da coleção os tipos de demonstrações escolares obtidos e sua frequência nos livros didáticos para cada nível:

Tabela 9 - Informações quanto aos tipos de demonstração escolar na coleção “Matemática e realidade”

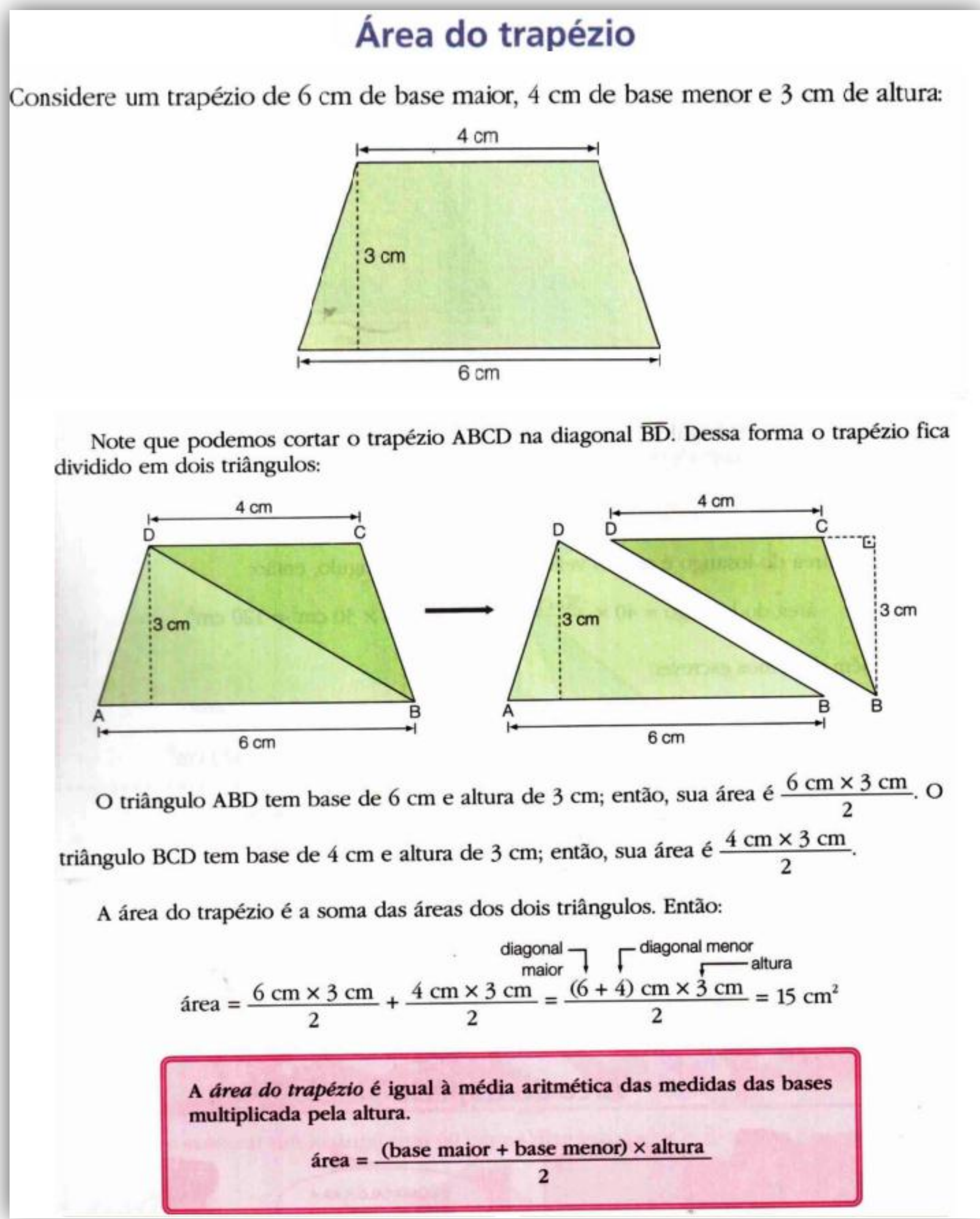
Nível de ensino	Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
6º ano	0	0	0	0
7º ano	4	1	0	0
8º ano	3	30	0	0
9º ano	0	22	2	2

Observamos que, nos livros didáticos dos 6º e 7º anos, os autores procuraram fazer uma abordagem mais intuitiva, experimental e concreta, enquanto nos 8º e 9º anos há um avanço nas abstrações, no simbolismo e no encadeamento lógico, não deixando de lado as bases concretas. Para exemplificar, nas figuras 29 e 30 apresentamos a forma como é tratado o cálculo da área do trapézio nos volumes do 7º e 9º ano.

Com as figuras 29 e 30, mostramos como os autores determinam a fórmula para cálculo da área de trapézios. No primeiro caso, o autor faz uso de um caso particular de um trapézio com as seguintes medidas: 6 cm (base maior), 4 cm (base menor) e 3cm (altura).

Em seguida, esse trapézio é dividido em dois triângulos cujas áreas somadas equivalem à área do trapézio. A partir dessa constatação e da organização dos dados do problema, deduz-se a fórmula para cálculo dessa figura. Com a figura 30, o mesmo procedimento é realizado, entretanto, ao invés de haver uma medida da base maior, menor e altura determinada, o que se tem é o uso de símbolos para representar essas medidas.

Figura 29 – Área do trapézio



Área do trapézio

Considere um trapézio de 6 cm de base maior, 4 cm de base menor e 3 cm de altura:

Note que podemos cortar o trapézio ABCD na diagonal $\overline{BD}$. Dessa forma o trapézio fica dividido em dois triângulos:

O triângulo ABD tem base de 6 cm e altura de 3 cm; então, sua área é $\frac{6\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2}$. O triângulo BCD tem base de 4 cm e altura de 3 cm; então, sua área é $\frac{4\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2}$.

A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos. Então:

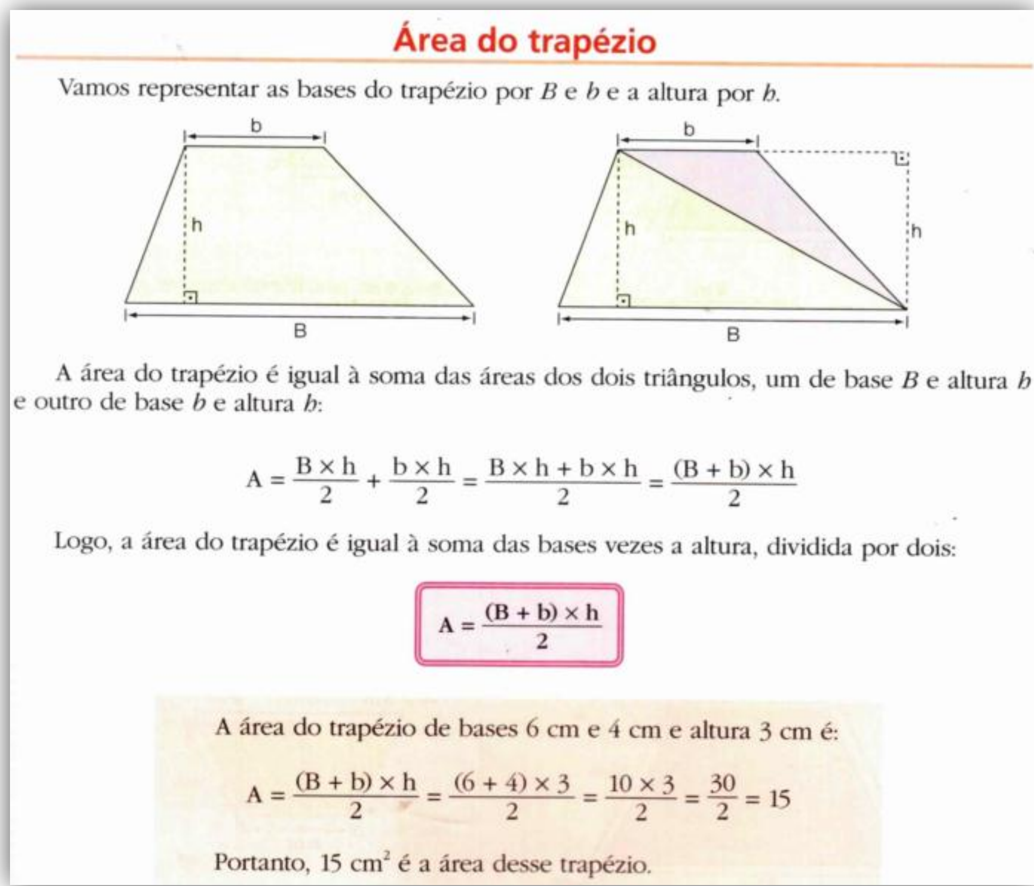
$$\text{área} = \frac{6\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2} + \frac{4\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2} = \frac{(\overbrace{6}^{\text{diagonal maior}} + \overbrace{4}^{\text{diagonal menor}})\text{ cm} \times \overbrace{3\text{ cm}}^{\text{altura}}}{2} = 15\text{ cm}^2$$

A *área do trapézio* é igual à média aritmética das medidas das bases multiplicada pela altura.

$$\text{área} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

Fonte - (MATEMÁTICA E REALIDADE, 7º ano, 2009, p. 155)

Figura 30 - Área do Trapézio



Área do trapézio

Vamos representar as bases do trapézio por *B* e *b* e a altura por *h*.

A área do trapézio é igual à soma das áreas dos dois triângulos, um de base *B* e altura *h* e outro de base *b* e altura *h*:

$$A = \frac{B \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} = \frac{B \times h + b \times h}{2} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Logo, a área do trapézio é igual à soma das bases vezes a altura, dividida por dois:

$$\boxed{A = \frac{(B + b) \times h}{2}}$$

A área do trapézio de bases 6 cm e 4 cm e altura 3 cm é:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(6 + 4) \times 3}{2} = \frac{10 \times 3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Portanto, 15 cm^2 é a área desse trapézio.

Fonte - (MATEMÁTICA E REALIDADE, 9º ano, 2009, p. 203).

No livro didático do 6º ano a seção de geometria se inicia com uma pequena introdução histórica. Por meio de ilustrações de objetos reais, os autores buscam apresentar conceitos geométricos abstratos como ponto, reta e plano. São apresentadas também outras figuras geométricas, bem como o cálculo de áreas. No livro do 7º ano, continua-se a apresentar conceitos geométricos, relacionando-os a objetos reais. É no volume do 8º ano que se concentra a maior parte dos conceitos de geometria. Há para este nível e para o 9º ano o aprofundamento dos conceitos estudados nas séries passadas; é desenvolve-se conceitos geométricos; articula-se álgebra e geometria; e trabalha-se com construções geométricas. Observamos que há a articulação entre procedimentos intuitivos e dedutivos.

As nossas percepções quanto às duas primeiras obras se repetem para esta. Nas duas primeiras séries são poucos os momentos em que há demonstrações escolares. No livro didático do 6º ano não há demonstrações. Já no livro didático do 7º ano, das poucas demonstrações presentes na seção de geometria, praticamente todas são feitas por meio de experimentos com materiais concretos. Essa frequência aumenta quanto olhamos para os dois últimos volumes. E da mesma forma como nas demais obras o procedimento mais mobilizado é o lógico-dedutivo. No caso dos volumes dos 8º e 9º anos, as demonstrações escolares fazem parte e são importantes para o desenvolvimento dos conteúdos.

No que se refere aos dois últimos níveis do ensino fundamental vemos, assim como nas coleções anteriores, um considerável uso de procedimentos lógico-dedutivos, sendo 83% do total de procedimentos obtidos.

Da mesma forma como nas duas últimas coleções descritas, o tipo de demonstração que visa explicar e justificar a validade de determinado resultados e que, ao nosso ver, contribuem para a prática da argumentação e para a compreensão dos conceitos matemáticos, é o menos utilizado, aparecendo em conteúdos específicos: “soma dos ângulos internos de um polígono” e “número de diagonais de um polígono convexo”.

Quanto aos exercícios, observamos que são poucos os que podemos considerar como mobilizadores de demonstração (tabela 9). Nos volumes dos 6º e 7º anos não encontramos nenhum exercício. Nos volumes do 8º ano e 9º ano, obtemos, respectivamente 21 e 4. Encontramos os seguintes tipos de exercícios: (1) demonstrações lógico-dedutivas; (2) justificativas de afirmativas; (3) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas; e (4) o uso de experimento ou tabelas para levantar conjecturas e após deve-se justificá-las.

Veja na tabela a seguir os tipos de exercícios de acordo com o nível de escolaridade:

Tabela 10 - Informações quanto aos exercícios e desafios

Nível de ensino	Tipos de exercícios e desafios obtidos em cada nível
6º ano	-
7º ano	-
8º ano	(1), (2) e (3)
9º ano	(1) e (4)

A maior parte dos exercícios que exigiam algum tipo de justificativa estava presente no volume do 8º ano, em que encontramos um número considerável de exercícios do tipo “prove”, “demonstre” ou “mostre”.

Não há tarefas que fazem uso da observação de padrões para estimular a conjecturação e a justificação de percepções. Podemos afirmar, assim como para a coleção anterior, que este não é um ponto a que é dada importância na seção de geometria da coleção.

O guia do PNLD indica que há poucas atividades experimentais, o que também constatamos. Além disso, apesar de haver atividades para se demonstrar raramente ao estudante é dado a oportunidade de conjecturar.

Quanto à formalização dos conceitos, os autores trazem esclarecimentos quanto a suas posições assumidas na escrita da coleção. Há um texto no manual do professor esclarecendo a opção dos autores contra a formalização, argumentando que apresentar a geometria em termos de enunciado, hipótese, tese e demonstração pode trazer dificuldades à aprendizagem. Da seguinte forma os autores apresentaram as suas opções:

> Quanto à formalização da Geometria, definir conceitos e colocar as proposições em termos de enunciado, hipótese, tese e demonstração – como se fazia no passado – continuaria trazendo as dificuldades já conhecidas à aprendizagem. Isso porque esse método desrespeita as etapas básicas em que o indivíduo incorpora significativamente novos conhecimentos.
>
> Não podemos subestimar o fato de que a Geometria é a parte da Matemática Elementar que mais se presta à exemplificação do que é uma estrutura lógico-formal. Entretanto, somos da opinião que, numa primeira etapa, o estudante deve ter contato com os "fatos" geométricos e suas justificativas lógicas para depois, ter acesso à formalização.
>
> De acordo com essa concepção, optamos por apresentar gradualmente os conceitos e as proposições, reduzindo-os ao número mínimo necessário. Optamos também por usar a intuição do aluno antes de dar novos conceitos e por argumentar com lógica antes de enunciar uma nova proposição. Cabe ao professor decidir se isso é suficiente (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 9).

Mesmo argumentando em favor da não formalização da geometria, vemos no decorrer do livro do 8º ano um excesso de simbolismo matemático e grande parte dos procedimentos de validação são rigorosos e com alto grau de abstração, mesmo que os autores utilizem raramente a palavra demonstração. Observamos no livro didático de todos os níveis que a formalização no sentido em que os autores usam (definir conceitos e colocar as proposições em termos de enunciado, hipótese, tese e demonstração) realmente não está presente em seu conteúdo. No entanto, nos livros didáticos dos 8º e 9º anos, mesmo que não se faça uso de tais termos, há significativo uso do método dedutivo. Essa afirmativa pode ser justificada pelo número de demonstrações lógico-dedutivas que listamos acima.

Assim como na coleção anterior, no 6º ano já se traz a história da matemática destacando o desenvolvimento da geometria. Citam-se os povos (chineses, assírios, babilônios e gregos) que deram grandes contribuições para a geometria, mas se destaca a participação dos gregos, bem como o papel de Euclides:

> O pensador grego que mais se destacou em Geometria foi Euclides (século III A. C.). Ele reuniu as descobertas já feitas, complementou-as e as organizou de forma sistemática em uma obra chamada Os elementos, escrita em 12 volumes. (...) A importância do trabalho de Euclides para a Geometria foi tanta que os conhecimento reunidos em Os elementos – somados aos que derivaram – passaram a ser conhecidos como Geometria euclidiana (IEZZI,; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 85).

Há no livro didático do 8º ano, na seção "Matemática no tempo", um texto sobre as "origens da geometria". Nessa seção fala-se sobre o uso da geometria pelo homem primitivo, em que mesmo “notável a geometria” não se apoiava em nenhuma base científica. Comenta-se que os egípcios estabeleceram relações geométricas, por meio de um método indutivo rudimentar, que se baseava na observação e na experimentação. Após, passa-se a falar dos gregos, que inauguraram o padrão da geometria moderna. Nesse padrão, “a certeza de um resultado geométrico deriva de uma justificativa baseada em raciocínios lógicos consistentes, e não em um processo experimental indutivo” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009, p. 143). O método dedutivo é citado como o que fundamenta toda a matemática, sendo que nesse contexto os autores citam os feitos de Euclides na obra *Os Elementos*.

3.1.2. As coleções de livros didáticos do ensino médio

3.1.2.1. Matemática: contexto e aplicações

DANTE, L. R. ***Matemática:*** *contexto e aplicações. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.*

A coleção foi publicada pela editora Ática, sendo da autoria de Luiz Roberto Dante e divulgada no guia do PNLD do ano de 2012. Ela é composta por 3 livros didáticos, sendo cada um deles subdividido em capítulos: o livro do 1º ano tem 12 capítulos; o livro do 2º ano 14 capítulos e o livro do 3º Ano possui 8 capítulos. Nesse último volume, não há o tópico de geometria plana e espacial.

O autor cita no manual do professor, que vem em anexo aos volumes da obra, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, e também os PCN. Entretanto, não deixa claro qual das orientações está utilizando em sua obra ou até que ponto está utilizando uma ou outra. Mas, pelos itens de discussão presentes no manual do professor, vemos que muitos dos aspectos indicados pelos PCN/99 estão presentes e estão sendo considerados pelo autor, como por exemplo: os temas transversais como meio ambiente, pluralidade cultural e trabalho e consumo; a resolução de problemas e o uso de tecnologias.

Podemos ver essa aproximação aos ideais dos PCN pela organização da obra. A metodologia para exposição do conteúdo contempla uma seção para a abertura do capítulo, dando uma ideia geral do que será estudado. Há exemplos que mostram as formas de resolução de um dado problema e também exemplos comentados, que mostram as fases da resolução de um problema, além de abordá-lo com outras questões; há também outras seções como “Desafios”, “Um pouco de história”, “Para refletir”, “A matemática e as práticas sociais”, “Leituras”, dentre outros.

Observamos no guia do PNLD algumas críticas à obra: ao exagero em procedimentos e no uso de símbolos; ao encaminhamento das atividades; ao excesso de conteúdos; e ao não-equilíbrio na distribuição dos campos da matemática em cada volume - por exemplo, a geometria plana e espacial não são tratadas no 3º ano do ensino médio. Em relação a avaliação do campo da geometria, a coleção é bem elogiada pelo cuidado nas revisões de conteúdos e pela boa estruturação das deduções.

Vejamos na tabela abaixo o espaço destinado à geometria e às demonstrações neste campo:

Tabela 11 - Informações quanto à coleção "Matemática: contexto e aplicações"

Volume	**Número de páginas do livro**	**Número de páginas destinadas à geometria**	**Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria**	**Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria**
1º ano	504	53	26	14
2º ano	384	100	18	14
3º ano	264	0	0	0

Pelas informações acima, vemos que das 1152 páginas dos livros didáticos, considerando todos os níveis, há 153 destinadas às questões da geometria. Em outras palavras, aproximadamente 13% de toda a coleção se discute a geometria plana e espacial. Podemos assim ver o desequilíbrio entre os campos de conhecimento matemático a que se refere o guia do PNLD.

Encontramos também nessa coleção os diferentes tipos de demonstração escolar mencionados nas descrições anteriores. Relembrando-os: procedimentos realizados mediante experimentos e testes de casos particulares; procedimentos lógico-dedutivos em que alguns têm caráter de exploração; procedimentos formais acompanhados por um texto demonstrativo no qual se vê o uso de termos como hipótese, teses, axiomas e postulados e; procedimentos que visam explicar e justificar a validade de determinado resultados.

Na tabela a seguir, organizamo-los de acordo com o nível de escolaridade e sua frequência nos livros didáticos:

Tabela 12 - Informações quanto aos tipos de demonstração escolar presentes na coleção "Matemática: contexto e aplicações"

Nível de ensino	**Experimentos e casos particulares**	**Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração**	**Demonstrações formais**	**Explicações e justificações de propriedades**
1º ano	0	17	7	2
2º ano	1	11	6	0
3º ano	0	0	0	0

Pelos dados acima, vemos que os procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração são os mais utilizados e valorizados na coleção, seguidos das demonstrações formais.

Há ainda uma valorização de elementos típicos das demonstrações formais, pois a seção de geometria é organizada e padronizada no sentido de sempre indicar o que é postulado, teorema e definições. Para isso, o fundo de uma frase que corresponde a um postulado, por exemplo, é sempre colorido pela cor azul. As definições possuem fundo rosa e os teoremas fundo laranja (figura 31 a 33).

Figura 31 - Definição de retas coplanares

Retas coplanares que não têm ponto comum são chamadas de *retas paralelas distintas*.

Figura 32 - Postulados

Postulado 1: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma, reta que os contém.
Postulado 2: Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.
Postulado 3: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Figura 33 – Teorema 1

Teorema 1: Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Fonte – (MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES – 2º ano, 2011, p.180 e 200).

A valorização da demonstração formal pode ser observada também em um curto capítulo do livro didático do 2º ano intitulado "O método dedutivo: algumas demonstrações (leitura optativa)". Neste capítulo, o autor apresenta o método dedutivo, definindo e utilizando postulados e noções primitivas. Relembra também que os teoremas são demonstrados a partir dos postulados e de outras propriedades já verificadas, por meio do raciocínio lógico:

> A geometria assim desenvolvida usa o método dedutivo. Partimos de algumas noções para as quais não é apresentada definição (entes primitivos) e algumas propriedades aceitas como verdadeiras sem demonstração (postulados ou axiomas). Isso não é exclusividade da Geometria – ocorre em qualquer teoria matemática (DANTE, 2011, p. 200).

Conjecturamos que o objetivo do autor pode ser diferenciar os procedimentos via experiência e casos particulares, por exemplo, do dedutivo. Isso pode ser verificado no seguinte recorte que fizemos no volume do 1º ano:

> Há uma grande diferença entre constatar empiricamente uma propriedade geométrica medindo, recortando, justapondo, etc, e demonstrar ou provar logicamente essa propriedade. (...) Você pode constatar concretamente que "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º" recortando triângulos e justanpondo-os para formar um ângulo raso (...) Você pode fazer isso para alguns triângulos. Mas isso não prova, não demonstra que essa propriedade é válida para qualquer triângulo no plano (DANTE, 2011, p. 396).

No manual para o professor, vemos que a intenção é que o procedimento lógico-dedutivo esteja presente em todo o livro didático, como, por exemplo, em temas como propriedades da análise combinatória, de probabilidade, de trigonometria, de áreas e volumes. No entanto, a demonstração não é feita sempre que se enuncia uma propriedade.

Analisando os exercícios propostos, vemos os seguintes tipos: (1) justificativas de afirmativas; (2) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas; (3) conferência de demonstrações; (4) demonstrações lógico-dedutivas e; (5) verificação de semelhanças e congruências. Na tabela abaixo podemos ver os tipos de exercícios encontrados em cada nível:

Tabela 13 - Informações quanto aos exercícios e desafios da coleção "Matemática: contexto e aplicações"

Nível de ensino	Tipos de exercícios e desafios obtidos em cada nível
1º ano	(1), (2), (4) e (5)
2º ano	(1), (2) e (4)
3º ano	-

Grande parte das tarefas que obtemos fazem parte da seção "Para refletir", que é descrita pelo autor como uma seção que trabalha o raciocínio: "Esta é uma seção importante (...) ela chama a atenção do aluno para refletir sobre alguma propriedade ou fato, constatar, descobrir, perceber ou provar algo" (DANTE, 2011, p. 21).

Vemos que os exercícios, com exceção aos listados por nós, muitas vezes são de aplicação direta de conceitos e as sugestões que acompanham algumas delas direciona as soluções, não possibilitando o desenvolvimento da imaginação e argumentação do estudante.

Encontramos nas coleções do 1º e 2º ano do ensino médio, textos informativos sobre o desenvolvimento da matemática. No livro do 1º ano, assim como nas coleções do ensino fundamental, vemos informações sobre os feitos de Euclides. Além desse matemático é citado ainda outros que vieram após ele e que contribuíram para o desenvolvimento da geometria.

3.1.2.2. Matemática

PAIVA, M. ***Matemática****. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2009.*

A coleção "Matemática" foi publicada no ano de 2009 e é subdividida em três volumes destinados aos três anos do ensino médio. Ela foi publicada pela editora Moderna, sendo da autoria de Manoel Paiva e divulgada no guia do PNLD do ano de 2012. A coleção é composta por livros didáticos do 1º ao 3º ano, que têm respectivamente 11, 15 e 9 capítulos – neste último, não há espaço para os conceitos de geometria plana e espacial. A coleção também adota os PCN/99 e os PCN+ como orientações curriculares para desenvolver os conteúdos.

A obra segue o seguinte padrão de apresentação: aborda uma situação contextualizada que dá ideia do que será apresentado posteriormente; em seguida há os conteúdos do capítulo acompanhados por exercícios resolvidos e propostos; há momentos para se desenvolver em grupo como na seção "Roteiro de trabalho" e exercícios complementares, além da seção "Matemática sem fronteiras", que contém aplicações práticas dos assuntos desenvolvidos no capítulo. A maior parte das atividades propostas se caracteriza pela aplicação do conteúdo exposto.

O guia do PNLD indica o não-equilíbrio dos conteúdos referentes aos diferentes campos da matemática. A geometria fica concentrada no livro didático do 2º ano, aparecendo pouco ou nada nos demais volumes. Apesar desse desequilíbrio, o guia do PNLD elogia o número razoável de páginas de cada volume da coleção. Quanto à avaliação da seção de geometria, não se comenta sobre as demonstrações.

Vejamos na tabela abaixo, como se distribui a geometria e as demonstrações neste campo em todos os volumes:

Tabela 14 - Informações referentes à coleção "Matemática"

Volume	Número de páginas do livro	Número de páginas destinadas à geometria	Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria	Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria
1º ano	256	22	8	3
2º ano	312	98	19	6
3º ano	200	0	0	0

As demonstrações em geometria ocupam pouco espaço na coleção, e consideramos que isso ocorra porque a própria geometria tem um espaço reduzido nela. As demonstrações escolares estão presentes em 22% do total de páginas destinada à geometria.

Encontramos apenas dois dos quatro tipos de demonstração encontrados nas demais coleções, sendo eles: procedimentos lógico-dedutivos em que alguns têm caráter de exploração e outros mais formais em que no texto demonstrativo vemos o uso de termos como hipótese, teses, axiomas e postulados. A seguir há uma tabela com estas informações, organizadas por níveis:

Tabela 15 - Informações quanto aos tipos de demonstração escolar presentes na coleção "Matemática"

Nível de ensino	Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
1º ano	0	5	3	0
2º ano	0	15	4	0
3º ano	0	0	0	0

Podemos constatar que o procedimento lógico-dedutivo seja o tipo explorativo ou mais formal é praticamente a única demonstração escolar utilizada e mais valorizada nas seções de geometria de toda a coleção.

O autor não demonstra todos os teoremas, ficando a critério do professor demonstrar os demais ou não. A posição do autor, que podemos ver no manual para o professor, é que as demonstrações devem ser feitas para que o aluno compreenda o seu significado e o método da ciência matemática. Entretanto, em contraste com esta ideia, estão as raras atividades na obra que possibilitariam essa aprendizagem. Além disso, a forma de encaminhar as demonstrações escolares não permite a interação e participação do estudante e o desenvolvimento da argumentação e da prática de justificação.

Encontramos, considerando os três volumes da coleção, nove exercícios que não são de aplicação de conceitos e que permitem que os estudantes se mobilizem no sentido de pensar sobre a validade de afirmativas matemáticas. Podemos subdivir esses exercícios em 6 tipos: (1) tabelas para serem completadas e, se observados padrões, deve-se generalizá-los ou explicá-los; (2) justificativas de afirmativas; (3) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas; (4) justificativas de teoremas; (5) experimentos para verificar demonstração e; (6) verificação de semelhanças e congruências.

A seguir organizamos os tipos de exercícios de acordo com o nível de ensino:

Tabela 16 - Informações quanto aos exercícios e desafios na coleção "Matemática"

Nível de ensino	Tipos de exercícios e desafios obtidos em cada nível
1º ano	(1), (2) e (4)
2º ano	(2), (3), (5) e (6)
3º ano	-

Assim como todas as obras descritas, esta também enfatiza a importância de Euclides para a construção da geometria.

3.1.2.3. Novo olhar matemática

SOUZA, J. ***Novo olhar matemática****. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.*

A coleção foi publicada pela editora FTD, sendo da autoria de Joamir Souza e divulgada no guia do PNLD do ano de 2012. A coleção é composta por três livros didáticos destinados aos 1º, 2º e 3º anos, sendo que os dois primeiros possuem 9 capítulos e o do 3º ano, 8 capítulos.

O autor utiliza os PCN/99, PCNEM+/02 e as Orientações Curriculares/06 como referência curricular. Isso justifica a metodologia adotada por ele para a abordagem dos conceitos matemáticos. Os livros didáticos possuem páginas de abertura das unidades em que se apresentam os assuntos a serem tratados posteriormente. Os conteúdos são seguidos de atividades resolvidas e, após a seção de atividades propostas, há a seção "Explorando o tema", que apresenta textos extraídos de diferentes fontes. Logo após, há a seção "Refletindo sobre o capítulo", em que se levantam questões sobre o que foi apresentado no capítulo. Ao final dos livros didáticos há questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de vestibulares, sugestões de leituras e sites, respostas das atividades propostas e a bibliografia consultada.

Assim como nas demais coleções de livros didáticos do ensino médio anteriormente apresentadas, a abordagem da geometria na coleção se concentra em maior volume no 3º ano do ensino médio.

O guia do PNLD observa que na coleção não há referência à demonstração lógica. Entretanto, ele destaca outras características da coleção como: há a contextualização dos conteúdos matemáticos, fazendo conexões com as práticas sociais, a própria matemática e sua história, dentre outros; o manual para o professor possui muitas informações para o trabalho em sala de aula; e há excesso de figuras, ilustrações e textos para a contextualização.

Vejamos, de maneira quantitativa, o espaço que tem a seção de geometria nos livros didáticos e as demonstrações dentro desta seção:

Tabela 17 - Informações referentes à coleção “Novo olhar matemática”

Volume	Número de páginas do livro	Número de páginas destinadas à geometria	Demonstrações na exposição do conteúdo de geometria	Demonstrações em exercícios propostos na seção de geometria
1º ano	336	0	2	3
2º ano	320	28	9	3
3º ano	320	104	17	14

A geometria possui pouco espaço na coleção, o que pode justificar o número reduzido de demonstrações escolares.

Diferentemente das duas obras do ensino médio descritas, esta apresenta os conteúdos de geometria plana e espacial com maior ênfase no 3º ano, sendo nesse nível em que se vê maior uso de demonstrações escolares.

Assim como na coleção “Projeto Araribá”, as demonstrações escolares obtidas na coleção possuem diversas formas de desenvolvimento e níveis de formalidade, sendo os seguintes: procedimentos realizados mediante experimentos e testes de casos particulares; procedimentos lógico-dedutivos em que alguns têm caráter de exploração; procedimentos formais acompanhados por um texto demonstrativo no qual se vê o uso de termos como hipótese, teses, axiomas e postulados e; procedimentos que visam explicar e justificar a validade de determinado resultados.

Veja como se organiza os tipos de demonstração em cada nível:

Tabela 18 - Informações quanto aos tipos de validação presentes na coleção “Novo olhar matemática”

Nível de ensino	Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
1º ano	0	1	1	0
2º ano	1	7	0	1
3º ano	1	12	4	0

Pela tabela acima, vemos que a concentração das demonstrações escolares está nos volumes do 2º e 3º ano do ensino médio. No livro didático do 2º ano não se menciona o termo demonstração, ao contrário do que ocorre no volume do 3º ano.

A coleção, no que se refere a seção de geometria, não dá espaço significativo para que os estudantes elaborem demonstrações. Nas 132 páginas destinadas a esse conteúdo, obtemos somente 20 exercícios que possibilitam justificativas e demonstrações lógico-dedutivas. Os demais exercícios da seção são geralmente de aplicação de conceitos, sendo compostos por questões do tipo “qual é?”, “determine”, “calcule”, dentre outros.

Quanto aos exercícios e desafios propostos podemos dividi-los nos seguintes tipos: (1) completa-se tabelas se observa padrões, generaliza-os e explica-os; (2) justificativas de afirmativas; (3) tarefas para indicar a verdade ou falsidade de afirmativas; (4) justificativas de teoremas e ; (5) demonstrações lógico-dedutivas.

Tabela 19 - Informações quanto aos exercícios e desafios na coleção "Novo olhar matemática"

NÍVEL DE ENSINO	TIPOS DE EXERCÍCIOS E DESAFIOS OBTIDOS EM CADA NÍVEL
1º ano	(2) e (5)
2º ano	(1), (2) e (3)
3º ano	(2), (3) e (5)

Observamos na coleção vários momentos em que se utiliza a história da matemática como informação e motivação. Por exemplo, no volume do 1º ano do ensino médio, há um texto sobre Tales de Mileto, em que o apresenta como o pai da geometria demonstrativa.

No livro do 3º ano do ensino médio há, na abertura do capítulo "Geometria espacial de posição", um texto sobre alguns elementos históricos da geometria. Neste texto, comenta-se sobre a geometria demonstrativa, citando, assim como no volume do 1º ano, que ela teve início com Tales de Mileto. Comenta-se também sobre Euclides, considerando-o o mais importante contribuinte com a geometria demonstrativa. Este texto, "Geometria espacial de posição", é utilizado como informativo e uma maneira de introduzir a geometria plana na seção.

Ainda no volume do 3º ano vemos uma nota sobre a demonstração, enfatizando a sua necessidade para se comprovar a veracidade de ideias matemática:

> Na Matemática nem tudo se manifesta de maneira imediata. Existem situações em que é necessário comprovar a veracidade de alguma proposição, ideia ou teoria. Para que isso seja possível, são considerados alguns princípios, chamados axiomas, que são reconhecidos como verdadeiros, ou, então, proposições que já foram comprovadas como verdadeiras. Por meio da dedução e do raciocínio lógico, é elaborado um método que torne visível ou de fácil percepção a veracidade do que se está questionando. Esse processo de dedução e investigação foi introduzido por Aristóteles (384 a.C. – 322 a. C.) e ficou conhecido como demonstração (SOUZA, 2010, p. 46).

Há também textos sobre poliedros de Platão e a Relação de Euler.

Nesta seção fizemos a descrição interpretativa e análise inicial dos livros didáticos selecionados. Nos preocupamos em mostrar não só que as demonstrações escolares aparecem nos diferentes níveis, mas a frequência e os diferentes tipos, além de, em alguns momentos, os posicionamentos dos autores.

Olhando para a seção de análise sócio-histórica das demonstrações desta pesquisa, vemos que, apesar de algumas exceções, a ênfase nos livros didáticos recai no formalismo típico das demonstrações lógico-dedutivas, com grande uso de termos próprios da matemática como axioma, postulado, teorema, hipótese, tese, contraexemplo, etc. Por meio dos livros didáticos que analisamos, vemos que a tendência é o não uso destes termos, com raras exceções, para as atividades da educação básica. Inclusive muitas vezes não se menciona nem as palavras demonstração e dedução, por exemplo.

Entretanto, notamos que as mudanças vão além: o objetivo é desenvolver ideias relativas à prática da argumentação, como indicada pelos PCN. Quanto a isso os autores dos livros didáticos passaram a diversificar as estratégias de abordagem das demonstrações escolares. Apesar de colocarmos estas estratégias em quatro grupos, demo-nos conta que elas possuem algumas especificidades entre elas; assunto que será tratado posteriormente.

Quanto as coleções referentes aos anos finais do ensino fundamental, constatamos que a abordagem intuitiva que precede a geometria dedutiva - preconizada a partir da década de 30 no currículo de matemática - se manteve. Entretanto, nos dois últimos níveis, não há a ênfase que era dada a geometria dedutiva no passado, pois neles se mescla uma abordagem intuitiva com a dedutiva. Ou seja, podemos dizer que há uma tendência em reduzir o uso de aspectos formais nas seções de geometria e utilizar os procedimentos mais intuitivos e experimentais. Além disso, constatamos que apesar de o currículo dar a ênfase à resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico, estes aspectos não são enfatizados em grande parte das obras, com exceção do “Projeto Araribá”. Em sua grande maioria, as tarefas são de aplicação direta dos conceitos.

Com relação às coleções referentes ao ensino médio, não podemos afirmar se aumenta ou não o uso de algum tipo de demonstração de acordo com os níveis de escolaridade, pois, diferentemente das coleções do ensino fundamental em que podemos falar de um padrão quanto aos conteúdos abordados em cada volume, nas coleções do ensino médio há uma variação de coleção para coleção na distribuição dos tópicos de geometria nos três níveis. Por exemplo, as obras de Dante e Paiva não abordavam a geometria plana e espacial no volume do 3º ano, ao contrário de Souza, que deixa praticamente todo o conteúdo de geometria para o último ano do ensino médio. Assim, apoiados em nossas análises iniciais, observamos que para as coleções destinadas ao ensino médio não é significativo o uso de procedimentos intuitivos, predominando o uso de procedimentos lógico-dedutivos.

Foi possível constatar, ao contrário de um padrão, uma diversificação considerável quanto às formas de se trabalhar com demonstrações na educação básica, o que contribui para ampliar a ideia de demonstração na matemática escolar e na Educação Matemática, sendo neste caso, essa ampliação da ideia de demonstração formal, do tipo silogística para experimentais, intuitivas e indutivas. Além disso, há a presença de tarefas que exploram aspectos formais e experimentais das demonstrações e uma redução considerável quanto as demonstrações formais, se compararmos com livros didáticos do século passado.

Para complementar a exposição desse primeiro momento de análise, é conveniente para nossa pesquisa, que busca compreender o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações nos diferentes níveis do ensino de matemática, sistematizar e aprofundar as análises. Para tanto, apresentamos na seguinte tabela e gráfico de barras informação quanto a frequência[38] dos tipos de validação no ensino de matemática por nível:

Tabela 20 – Frequência dos tipos de demonstrações por nível de ensino

Níveis de ensino		Experimentos e casos particulares	Procedimentos lógico-dedutivos com caráter de exploração	Demonstrações formais	Explicações e justificações de propriedades
Anos finais do ensino fundamental	6º ano	60%	40%	0%	0%
	7º ano	50%	50%	0%	0%
	8º ano	15%	53%	27%	5%
	9º ano	5%	73%	17%	5%
Ensino médio	1º ano	0%	64%	31%	5%
	2º ano	4%	72%	22%	2%
	3º ano	6%	70%	24%	0%

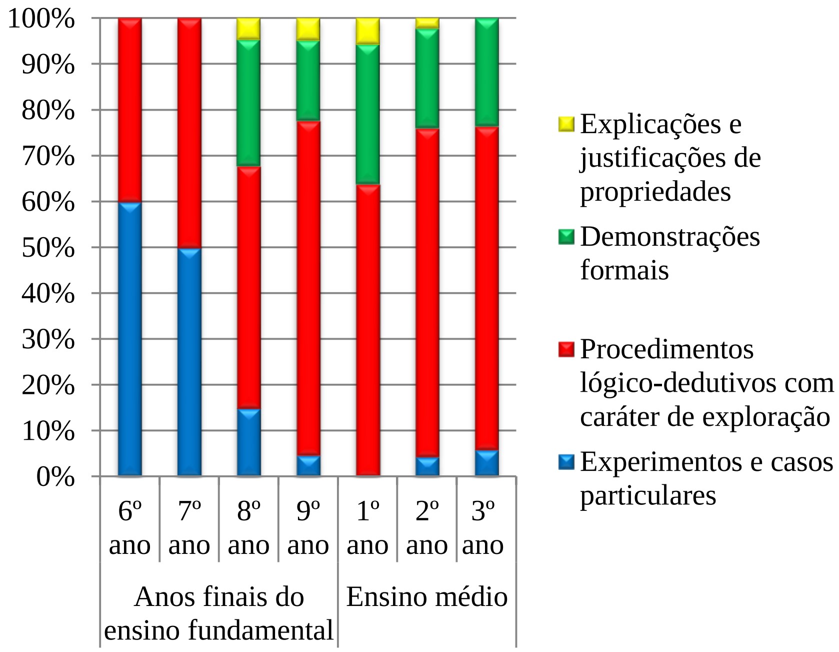
A tabela foi construída da seguinte forma: ao mapear as demonstrações escolares e as organizarmos na tabela exposta na seção de descrição, tivemos o número total de demonstração para cada nível. Dessa forma, vimos que para o 6º ano, por exemplo, há 5 demonstrações considerando os volumes para o nível das três coleções. Após esse mapeamento, organizamos os procedimentos semelhantes em quatro grupos. Nos livros didáticos para o 6º ano, há 3 procedimentos do grupo 1 e 2 do grupo 2. Assim, para observar a frequência, organizamos os dados em taxas percentuais, sendo que para o 6º ano os procedimentos do grupo 1 são 60% do total de procedimentos obtidos no nível, e os procedimentos do grupo 2 representam 40%.

Para melhor visualizarmos os usos de cada tipo de demonstração escolar por nível de ensino, apresentamos os dados na tabela acima e no seguinte gráfico de barras:

---

[38] Valores aproximados.

Figura 34 - Gráfico de frequência das demonstrações escolares por níveis



O gráfico (figura 34) justifica nossas considerações acima de que, conforme se aumenta o nível de escolaridade, as demonstrações formais se tornam mais presentes e diminuem consideravelmente a mobilização dos procedimentos intuitivos nos livros didáticos.

Analisando do ponto de vista da história, observamos que havia demonstrações nas seções dos livros didáticos em que se apresentavam trechos da história da matemática. Observamos que o papel de Euclides para o desenvolvimento da geometria é tão forte que ele é mencionado em todos os livros. Além disso, o que nos chama a atenção é a ênfase dada a este matemático em detrimento de demais matemáticos e povos que tiveram um papel tão importante quanto Euclides e a Grécia para o desenvolvimento da geometria. Interpretamos com isso que nos livros didáticos, apesar de algumas abordagens práticas e intuitivas, mantém-se a valorização do conhecimento teórico sobre o prático. E ainda, que a demonstração formal parece cada vez mais menos universal e mais eurocêntrica.

Diante dessa primeira etapa de análise, que contou com a descrição dos livros didáticos em aspectos pertinentes à pesquisa, constatamos que as formas de demonstrar na escola levam em consideração os aspectos didáticos do ensino, entretanto, a demonstração formal é ainda preservada, e compõe um rol de possibilidades alternativas e mais didáticas de desenvolver esta noção matemática na escola.

Organizamos na próxima seção os tipos de demonstração em categorias e os analisamos. Nossas considerações e conclusões quanto a análise serão apresentadas no tópico

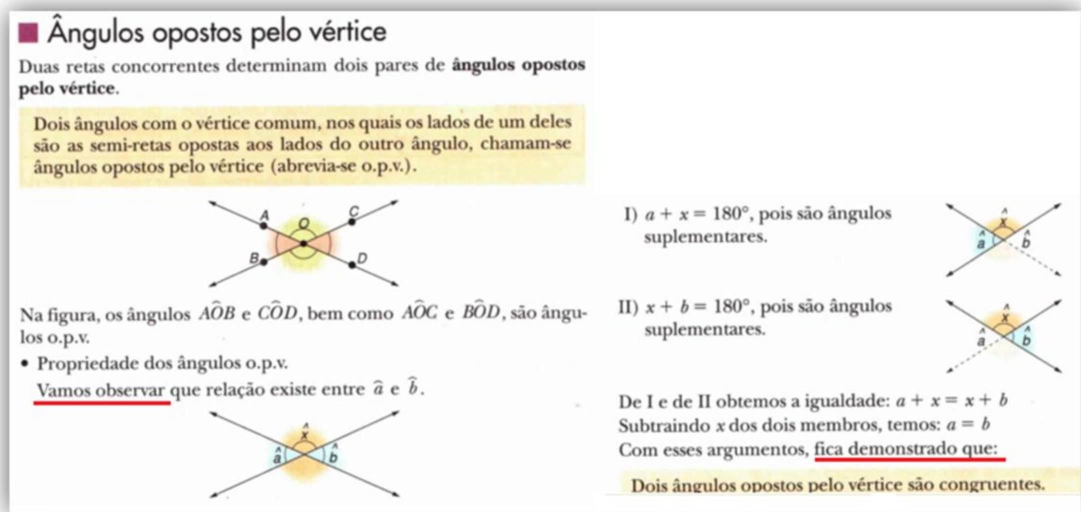
3 desta seção, em que consideraremos as orientações curriculares e guias do PNLD para aprofundar nossa compreensão quanto as demonstrações nos livros didáticos.

3.2. Caracterizando as demonstrações escolares nos livros didáticos e nos documentos oficiais

Após um primeiro contato com o "corpus" da pesquisa, de leituras e releituras e da descrição dos livros didáticos selecionados para esta investigação, percebemos que as demonstrações escolares abordadas não se restringem à formal. Isto vai ao encontro do que apresentamos na revisão da bibliografia, em que observamos que a demonstração na matemática escolar é vista de diferentes maneiras por diferentes autores e muitas vezes outras formas de demonstrar, que não somente a formal, são citadas.

Para a análise de conteúdo, após termos delineado o "corpus" da pesquisa, iniciamos a etapa de "elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final" (BARDIN, 1977). Para isso, primeiramente por meio de nosso roteiro de análise, procuramos a cada demonstração escolar identificarmos expressões, que chamamos de temas[39]. Essas expressões eram compostas por palavras/frases que introduziam e concluíam tais demonstrações ou que somente os introduziam. Por exemplo, "*Vamos observar que (...) Fica demonstrado*"[40] (Figura 35) é um tema extraído dos documentos selecionados em que se introduz a demonstração com a frase "*vamos observar que*" e conclui-se com " *fica demonstrado*" e a este tema está vinculado um tipo demonstração escolar.

Figura 35 - Validação da relação entre os ângulos opostos pelo vértice



Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p. 77)

[39] Chamamos de temas as expressões retiradas do texto que compõe a demonstração dos livros didáticos que constituem os documentos da pesquisa.
[40] Os temas retirados dos livros didáticos estão destacados em itálico.

Consideramos importante olhar para os termos utilizados pelos autores, pois eles contribuem para identificarmos se o procedimento se trata ou não de uma validação, ou seja, são os termos utilizados que nos indicam que está ocorrendo um movimento de validação, de justificação ou de argumentação. Os termos compõem a demonstração e são importantes para ela, sendo por meio deles que recebemos as mensagens que os autores querem nos passar. Além disso, pela frase que conclui a demonstração, podemos ver a generalidade do resultado e observar a qual tipo de procedimento cada termo utilizado se refere. É, portanto, por meio dos termos que acompanham a demonstração que temos subsídios para categorizar os tipos de validação presentes nos livros didáticos.

Após extrairmos todos os temas encontrados, passamos a descrevê-los quanto à demonstração escolar vinculada a eles. Por exemplo, para o tema “*Da observação acima (...) Logo, para qualquer polígono*” observamos que a demonstração escolar é indutiva – procedimento que a partir da verificação de casos particulares em que certas características sempre surgem, leva-se a afirmar uma regra geral que supõe ser válida para casos ainda não verificados. Para o tema “*Vamos analisar (...) podemos concluir que*”, observamos que não há menção de que se trata de movimento de validação, mas o procedimento é dedutivo. Dessa forma, agrupamos aqueles temas que possuíam similaridades quanto à sua descrição.

Na tabela abaixo organizamos em grupos, por meio de um indicador, os temas extraídos dos documentos para análise, bem como os tipos de demonstração escolar vinculados a eles:

Tabela 21 – Organização dos temas

<table>
<tr><th colspan="4">Termos utilizados para se referir ao processo de validação e tipos de procedimentos</th></tr>
<tr><th colspan="2">Temas</th><th>Tipos de procedimentos</th><th>Observações sobre os agrupamentos</th></tr>
<tr><td>GRUPO 1</td><td>• Observe a experiência (...) Portanto temos;
• Conclusões práticas;
• Constatar empiricamente;
• Vamos observar que (...) Fica demonstrado;
• Veja a decomposição;
• (...) por meio da experiência (...) essa relação vale para qualquer;
• Observe como estes (...);
• Neste quadrado (...);
• Vamos verificar de forma experimental (...);
• Basta transformar (...);
• Considere a seguinte figura (...);
• Comprovar experimentalmente (...).</td><td>• Exemplos ou testes de casos particulares;
• Desenhos;
• Dobraduras.</td><td>Não há menção de que se trata de uma demonstração.

A demonstração é desenvolvida por meio da experiência.</td></tr>
</table>

GRUPO 2	• *Vamos observar que (...) Fica demonstrado;* • *Não menciona nada[41];* • *Observe que (...) concluímos que /;* • *Vamos deduzir;* • *Vamos analisar (...) podemos concluir que;* • *Vamos mostrar que (...) concluímos que;* • *Justificativa;* • *Vamos comprovar esse teorema;* • *Pelo Princípio de Cavalieri (...) concluímos que;* • *Veja o porquê;* • *Demonstrar ou demonstração;* • *Vamos provar que;* • *Observe (...) então podemos garantir;* • *Veja a decomposição (ou composição) feita;* • *Da observação acima (...) Logo, para qualquer polígono;* • *Vamos tomar um polígono de n lados;* • *Consideremos as retas r e s;* • *Na figura (...) generalizando;* • *Vamos verificar a demonstração algébrica (...);* • *Da relação (...) fica demonstrado;* • *Vamos calcular a soma de todos (...).*	• Dedução sem indicar hipótese, tese e conclusão; • Dedução que se baseia em princípios, como o Principio de Cavalieri; • Desenhos, experimentos seguidos da dedução de propriedades; • Indução finita.	Raramente há menção de que se trata de uma demonstração, que é no geral é lógico-dedutiva.
GRUPO 3	• *Vamos demonstrar (...) para qualquer (...) essa é a tese que queríamos demonstrar;* • *Vamos apresentar a demonstração (Hipótese, tese e demonstração);* • *Para qualquer (...) fica demonstrado;* • *Todo triângulo (...) demonstrar;* • *Toda reta (...);* • *Em qualquer (...) consequência (...);* • *Examine a demonstração;* • *Demonstração lógica;* • *Vamos provar;* • *Para justificar (...) concluímos.*	• Dedução que menciona postulados e definições explicitamente; • Dedução que indica hipótese, tese e conclusão.	A demonstração é formal explicitando elementos da lógica clássica.
GRUPO 4	• *Vejamos como relacionar;* • *Sabe por que isso acontece?;* • *Vamos deduzir;* • *Veja como podemos calcular;* • *Observando a sequência (...) como vimos anteriormente;* • *Note que a soma (...) para qualquer (...);* • *Observe a tabela a seguir (...) qual é a soma?;* • *Inicialmente, dividimos (...).*	• Exemplos, observação de padrões, generalização seguidos da explicação.	Utiliza-se resultados já verificados e exemplos para generalizar uma situação. Por fim é explicado o porquê de o resultado ser aquele.

A segunda etapa da análise de conteúdo consiste na exploração do material, em que desmembramos o texto por meio dos temas. Esse movimento nos possibilitou organizar

[41] Significa que identificamos a existência de procedimento de validação, mas não há termos vinculados a ele que o expresse.

esses temas em grupos e, por fim, em categorias. A categorização “é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação seguida de um reagrupamento baseado em analogias, a partir de critérios definidos” (FRANCO, 2007, p. 59)

As categorias de análise podem ser constituídas “a priori” ou não (FRANCO, 2007). Em nosso caso, não definimos as categorias “a priori”, mas deixamos que surgissem na constante ida e volta ao material de análise. Dessa forma, ao olhar e interpretarmos nossos documentos, percebemos pelos temas acima descritos elementos que apresentam características comuns: a) procedimento de validação com apelos visuais e experimentais; b) procedimentos de validação lógico-dedutivos com diferentes tipos de enunciados e que possuem geralmente características exploratórias; c) procedimentos de validação lógico-dedutivos e formais; d) procedimentos de validação que se iniciam com exemplos e testes de casos particulares, que possibilitam a generalização das propriedades e em seguida são explicados mediante deduções.

Dessa forma, definimos as seguintes categorias de análise:

(1) demonstração escolar via experimentos e casos particulares;

(2) demonstração escolar lógico-dedutiva com caráter de exploração;

(3) demonstração escolar formal com elementos da lógica;

(4) demonstração escolar via casos particulares, generalização e explicação.

Passaremos a seguir a etapa da análise de conteúdo onde fazemos o tratamento dos dados, elaboramos inferências e nossas interpretações. Nesse momento, as categorias serão analisadas separadamente.

3.2.1. Demonstração escolar via experimentos e casos particulares

Nesta categoria, estamos considerando as demonstrações baseadas em experimentos, isto é, formas de validação que fazem uso de materiais concretos de maneira a justificar e explicar os resultados matemáticos (desenhos ou dobraduras); exemplos ou casos particulares.

As expressões que são utilizadas pelos autores dos livros didáticos para referir-se a este tipo de demonstração indicam algum tipo de ação, seja ela uma decomposição, transformação de figuras, experiências, dentre outros. Exemplos de expressões que fazem parte das demonstrações que compõe esta categoria seriam: *“conclusões práticas*”, *“constatar empiricamente”, “vamos verificar de forma experimental”* e *“basta transformar*”. Além disso, há expressões como "*observe como estes (...)", "neste quadrado"* e *"considere a seguinte figura",* que sinalizam que ação é feita sob um objeto particular.

Este tipo de demonstração está presente em todos os volumes das coleções destinadas aos anos finais do ensino fundamental; quanto ao ensino médio, ele apenas não aparece nos livros do 1º ano. Entretanto, apesar de esse procedimento ser utilizado em quase todos os livros destinados aos diferentes níveis, quantitativamente, ele não é o mais recorrente e qualitativamente valorizado.

Observamos também certo padrão quanto este tipo de demonstração em conteúdos determinados da geometria plana e espacial: é frequente quando se busca determinar as fórmulas para cálculo de área de figuras e volume de sólidos geométricos, para calcular a soma dos ângulos internos e externos de polígonos e na validação do Teorema de Pitágoras.

Na demonstração escolar via experimentos e casos particulares, as justificativas não são formais, ou seja, não decorre de axiomas, postulados e de outras proposições demonstradas a priori. Elas são frutos da experimentação, da manipulação de objetos e da busca por exemplos que se enquadram na propriedade. Neste tipo de procedimento, o foco está muitas vezes na descoberta, na convicção e/ou nas justificativas. Aliás, são as justificativas que permitem a compreensão da propriedade. É um procedimento que não se preocupa com rigor e formalismo e sim com as justificativas e convencimentos baseados em representações de objetos, isto é, a generalização de resultados se dá de maneira indutiva, em que da observação de casos específicos que compartilham certas características, leva-se a afirmar a validade geral de uma propriedade. Uma das características principais desse procedimento é o aspecto visual. Além disso, o que compõe os argumentos da demonstração são observações de experiências, o que reforça a esse procedimento essa tônica indutiva.

Nossa análise inicial possibilitou constatar algumas variações deste tipo de procedimento, além da observação da frequência de tal método e da sua distribuição em cada nível de ensino. Entretanto, o princípio do procedimento, ou seja, as ações sob objetos particulares se manteve para todos.

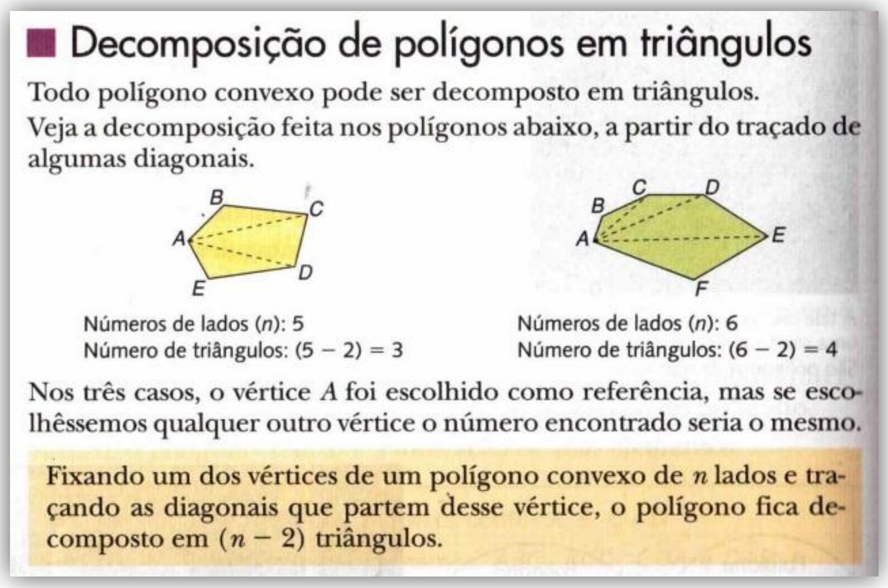
As análises indicam diferentes propostas de atividades nos livros didáticos que se encaixam dentro dessa categoria. Identificamos, após a leitura da seção de geometria de todos os volumes considerados na pesquisa, quatro tipos de atividades: os testes de casos particulares, os experimentos utilizando material concreto, medições (desenhos e instrumentos de medida) e experimentos acompanhados de justificações. Esclarecimentos quanto cada tipo serão dados a seguir.

O primeiro exemplo seria os testes de casos particulares (figura 36), procedimento em que são utilizados um exemplo ou um número reduzido de exemplos, de onde se constata a validade de uma propriedade matemática.

Apresentamos o exemplo da decomposição de um polígono em triângulos. Nesse exemplo, as justificativas são realizadas mediante dois casos: polígonos de 5 e 6 lados. Podemos dizer que o objetivo da atividade era levar os estudantes por meio da observação de alguns casos, constatar um padrão e generalizá-lo. Desse modo, é solicitada a decomposição dos polígonos em triângulos e se indica que o número de triângulos formados pela decomposição é o número de lados menos 2 “$n - 2$".

Por meio destes dois casos (polígonos de 5 e 6 lados) se afirma de maneira geral a propriedade relativa a decomposição de polígonos em triângulos.

Figura 35 - Propriedade das diagonais dos polígonos



Decomposição de polígonos em triângulos

Todo polígono convexo pode ser decomposto em triângulos.
Veja a decomposição feita nos polígonos abaixo, a partir do traçado de algumas diagonais.

Números de lados (n): 5
Número de triângulos: $(5 - 2) = 3$

Números de lados (n): 6
Número de triângulos: $(6 - 2) = 4$

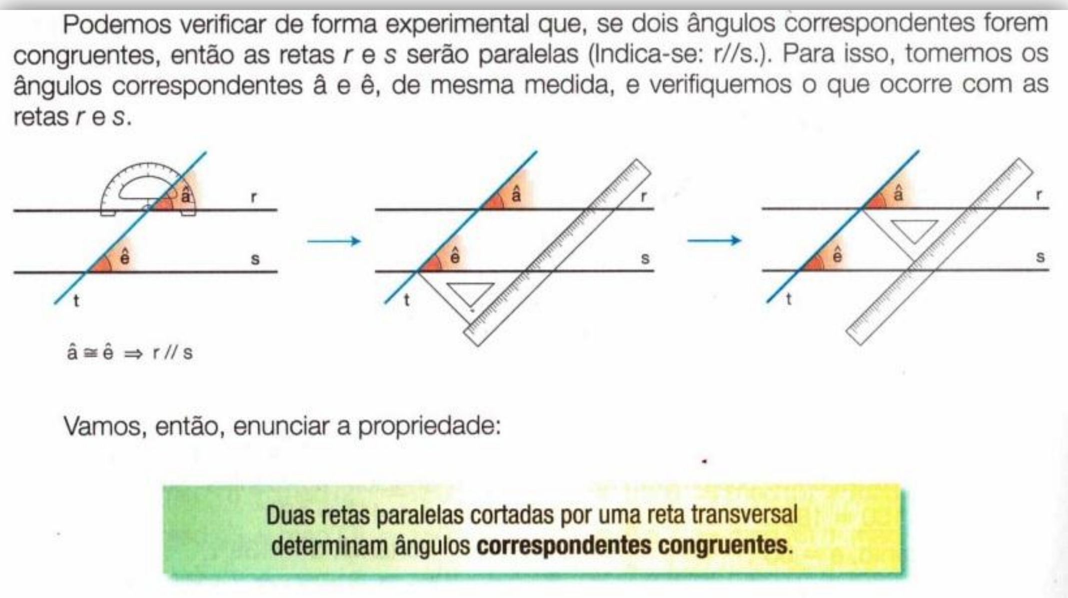
Nos três casos, o vértice A foi escolhido como referência, mas se escolhêssemos qualquer outro vértice o número encontrado seria o mesmo.

Fixando um dos vértices de um polígono convexo de n lados e traçando as diagonais que partem desse vértice, o polígono fica decomposto em $(n - 2)$ triângulos.

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p.90)

Com a figura 37, exemplificamos um caso em que a verificação de uma propriedade se deu por medição. O autor enuncia o que se deseja verificar: “se dois ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas r e s serão paralelas”. Então, para verificar a propriedade, o autor parte de um desenho de uma reta t transversal e um par de retas paralelas r e s, onde são destacados os ângulos correspondentes a e b. Nesse caso, o procedimento consiste em verificar se as propriedades anunciadas – ângulos correspondentes são congruentes – estão presentes na figura. Para isso ele usa o recurso da medição, isto é: primeiramente verifica se os ângulos correspondentes são congruentes por meio de um instrumento de medida de ângulos (transferidor), depois, com o auxílio de régua e esquadro, verifica que as retas r e s têm a mesma inclinação, isto é, são paralelas.

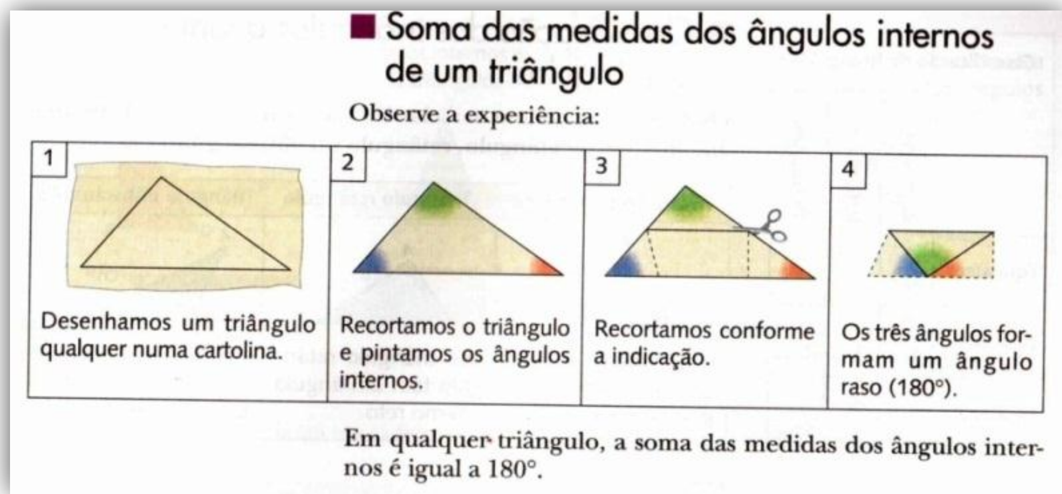
Figura 36 – Ângulos correspondentes



Fonte – (A CONQUISTA DA MATEMÁTICA - 8º ano, 2009, p. 226)

No caso das figuras 38 e 39, que trata da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e do cálculo do volume do cone, respectivamente, temos o uso de materiais concretos para verificar as propriedades. Esse procedimento também depende da interpretação do estudante e do professor, pois, ele não vem acompanhado de explicações de seus passos.

Figura 37 - Validação por meio da experiência

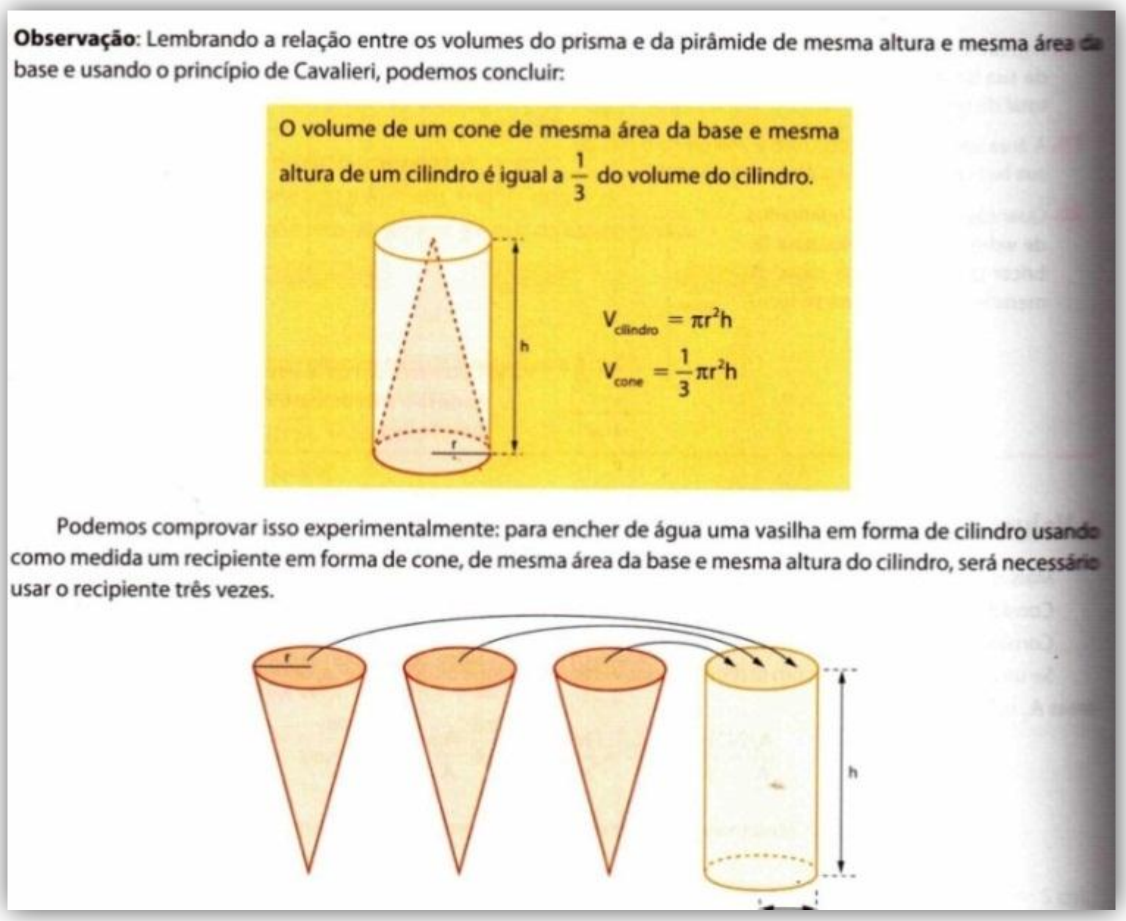


Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 6ª série, 2006, p. 243).

Pelas demonstrações, vemos que a sua conclusão necessita do pensamento dedutivo e relacional, ou seja, no caso da figura 38, da observação da construção e separação dos ângulos e nova disposição dos mesmos deduz-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em um ângulo raso, um ângulo medindo 180º. Há a necessidade de relacionar conceitos e relembrar outros já estudados.

Para a figura 39, observamos que o fato de juntar a água que contém em cada cone em um cilindro e este volume de água completar o do cilindro, nos leva a deduzir que o volume do cilindro equivale a três vezes ao de um cone de mesma área da base e altura que o cilindro.

Figura 38 - Comprovação da fórmula para cálculo do volume de um cone



Observação: Lembrando a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma área da base e usando o princípio de Cavalieri, podemos concluir:

O volume de um cone de mesma área da base e mesma altura de um cilindro é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro.

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

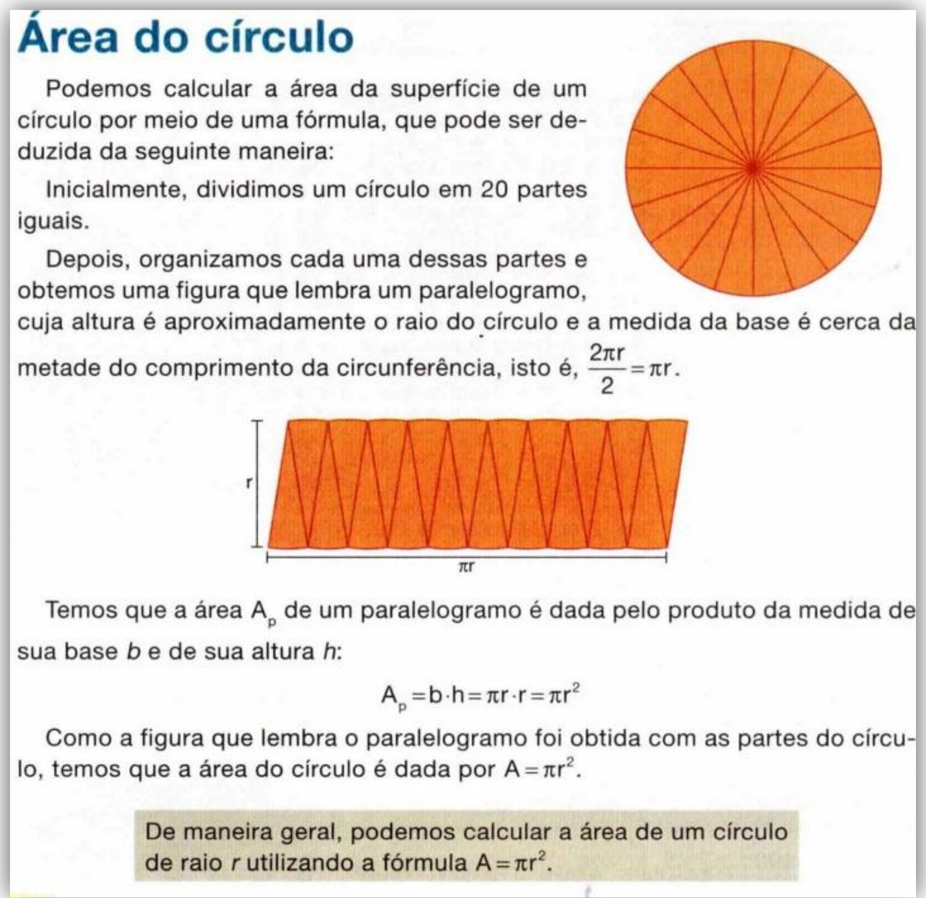
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Podemos comprovar isso experimentalmente: para encher de água uma vasilha em forma de cilindro usando como medida um recipiente em forma de cone, de mesma área da base e mesma altura do cilindro, será necessário usar o recipiente três vezes.

Fonte - (Matemática contextos e aplicações – 2º ano, 2011, p. 258).

Interpretamos o procedimento exemplificado pela figura 40, como uma evolução do procedimento tratado anteriormente. Nesse caso, a atividade não é concluída em si mesma, mas vêm acompanha por uma explicação das etapas.

Figura 39 – Área do círculo



Área do círculo

Podemos calcular a área da superfície de um círculo por meio de uma fórmula, que pode ser deduzida da seguinte maneira:

Inicialmente, dividimos um círculo em 20 partes iguais.

Depois, organizamos cada uma dessas partes e obtemos uma figura que lembra um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o raio do círculo e a medida da base é cerca da metade do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.

Temos que a área A_p de um paralelogramo é dada pelo produto da medida de sua base *b* e de sua altura *h*:

$$A_p = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, temos que a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

De maneira geral, podemos calcular a área de um círculo de raio *r* utilizando a fórmula $A = \pi r^2$.

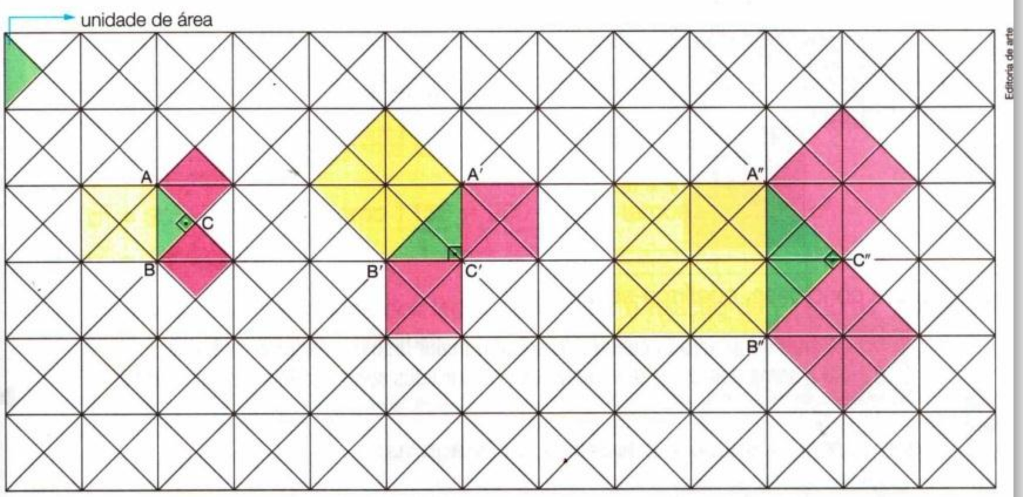
Fonte - (NOVO OLHAR MATEMÁTICA - 2º ano, 2010, p. 202)

No exemplo (figura 40), deseja-se determinar a fórmula para cálculo da área do círculo. Por meio de um caso específico, um círculo dividido em 20 partes iguais, e da reorganização de cada parte dessas em uma figura que se aproxima a um paralelogramo calcula-se a área dessa figura. Com isso, de maneira aproximada, temos que a altura do paralelogramo será aproximadamente o raio do círculo (r) e a medida da base dessa figura será a metade da medida do comprimento da circunferência (πr). Teremos, portanto, que a fórmula para cálculo da área do círculo é: $A = base \cdot altura = \pi r \cdot r = \pi r^2$. Esse resultado foi obtido, realizando ações sob um objeto específico; estendendo-o, por fim, a todos os casos não verificados.

No exemplo abaixo, se deseja obter, por meio da observação de padrões, o Teorema de Pitágoras. Isso pode ser feito de diferentes formas, mas o que nos interessa nesta categoria é aquela feita mediante experimentos e casos particulares. Neste exemplo, há um mosaico com vários triângulos retângulos coloridos de verde, quadrados amarelos construídos sobre a hipotenusa desses triângulos e quadrados rosa construídos sobre os catetos. A partir da observação de regularidades da comparação da área de cada quadrado (amarelo e rosa), é possível concluir que a relação do Teorema de Pitágoras é válida para esses triângulos verdes. O Teorema de Pitágoras é então enunciado após esse procedimento.

Figura 40 - Verificação do Teorema de Pitágoras

A figura abaixo reproduz um mosaico com vários triângulos retângulos coloridos de verde, quadrados amarelos construídos sobre a hipotenusa desses triângulos e quadrados rosa construídos sobre os catetos.



Considerando a unidade de área dada na ilustração, podemos estabelecer a seguinte tabela:

	Triângulo ABC	Triângulo A′B′C′	Triângulo A″B″C″
Área do quadrado construído sobre a hipotenusa	4	8	16
Área do quadrado construído sobre um cateto	2	4	8
Área do quadrado construído sobre o outro cateto	2	4	8

Observando que **4 = 2 + 2**; **8 = 4 + 4** e **16 = 8 + 8**, Pitágoras e os pitagóricos puderam estabelecer uma relação, válida para esses triângulos:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Fonte: (A conquista da matemática – 9º ano, 2009, p. 247).

O uso deste tipo de demonstração escolar leva a compreender que, se a relação funciona neste caso, funcionará sempre em outros. Esta demonstração (figura 41) se diferencia ligeiramente das anteriores porque, enquanto naquelas as evidências estavam concentradas em um caso específico, agora a busca está na generalização de algo que ainda pouco se conhece, por meio de um número maior de testes, o que geraria mais convicção quanto à validade da relação.

Este tipo de demonstração escolar é visto nas pesquisas mencionadas na revisão da bibliografia como o primeiro nível de validação e como uma forma de contribuir para a compreensão da matemática. Este procedimento informal faz uso de aspectos do pensamento dedutivo e de relações de propriedades visualizadas.

Conforme vimos pelas palavras de Moreira (2004), geralmente os resultados matemáticos não são postos a dúvida pelos estudantes, pois eles adentram a escola já tendo garantida sua validade pela matemática acadêmica. Ao se questionar essa validade dos resultados matemáticos, a convicção, por parte dos estudantes da educação básica, pode depender muitas vezes da intuição ou da verificação empírica - validação de uma proposição a partir da verificação de alguns casos -, que são os procedimentos listados nessa categoria e que ao nosso ver são procedimentos ricos e que contribuem para o desenvolvimento da prática da argumentação.

As verificações empíricas dessa forma podem convencer os estudantes, mas é a explicação que a acompanha e a interpretação da situação que contribuem para o desenvolvimento do conhecimento. Para nós, a função de explicação que acompanha estes procedimentos, é muitas vezes mais importante, em se tratando de educação básica, do que propriamente a verificação da propriedade.

A demonstração escolar nesta categoria subverte alguns símbolos que comumente estão atrelados à demonstração. Agora, ela assume outros símbolos como de explicação plausível, de argumentação, convencimento e principalmente de ação, que são características contrárias as já citadas ao longo da pesquisa, como por exemplo, símbolo do necessário, daquilo que não pode ser de outra forma.

3.2.2. Demonstração escolar lógico-dedutiva com caráter de exploração

Organizamos nessa categoria as demonstrações que ocorrem explicitamente via dedução e que são desenvolvidas pelo autor em forma de diálogo com o estudante. Este diálogo é marcado por uma metodologia exploratória das propriedades de uma figura em particular. Chamamos de metodologia exploratória ao fato de que o desenvolvimento de uma demonstração se dá mediante a investigação de uma figura representativa da propriedade a ser demonstrada. Os argumentos que compõe as deduções são criados pela observação de relações nesta figura.

Concentram-se nesta categoria os procedimentos dedutivos que raras vezes são denominados como demonstração pelos autores dos livros didáticos, ou seja, omite-se este termo. Ao introduzir e concluir este procedimento, os autores dos livros didáticos utilizam diferentes expressões como *"Observe que (...) concluímos que", "Vamos deduzir", "Vamos mostrar que (...) concluímos que", "Observe (...) então podemos garantir", "Veja a decomposição feita", "Justificativa", "Vamos comprovar esse teorema", "Veja o porquê",* dentre muitos outros que podem ser lidos no início desta seção.

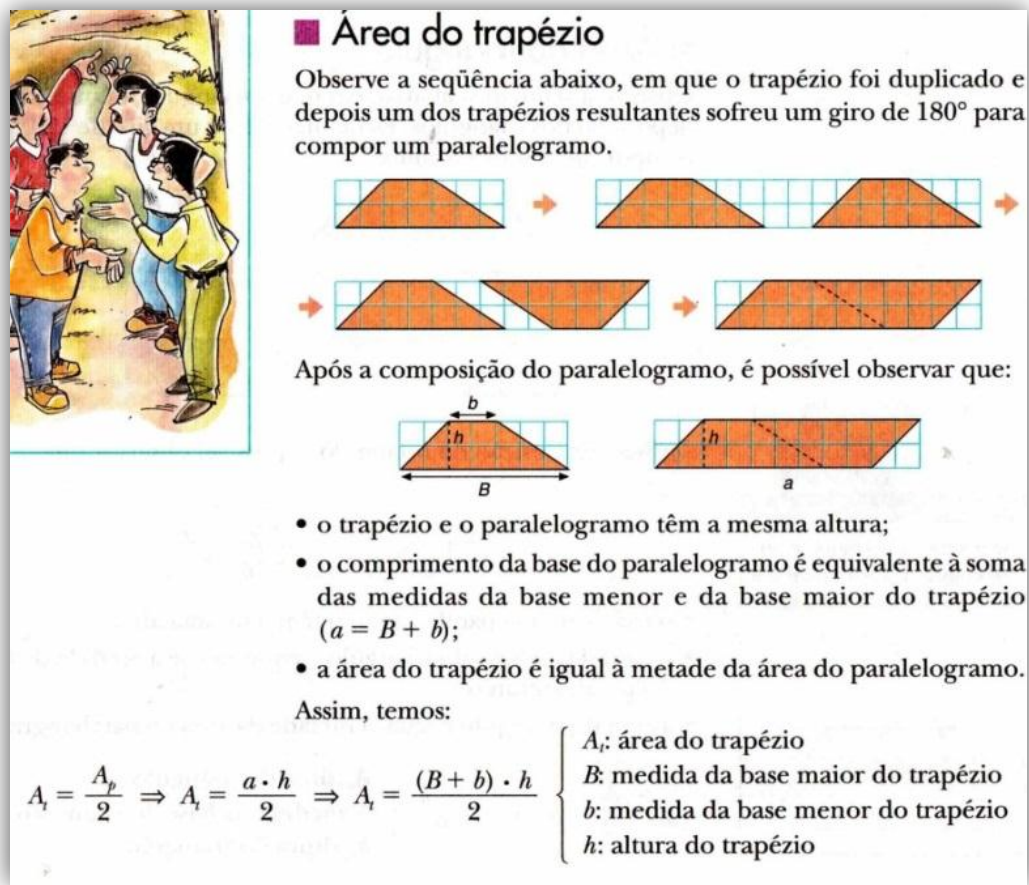
As expressões são geralmente marcadas por um convite ao aluno pelos autores, por exemplo: *"Vamos deduzir"*. Esse convite tem por objetivo fazer com que o estudante acompanhe as justificativas dos passos desenvolvidos nas deduções e, juntamente com os autores, explorem as figuras que acompanham o procedimento.

Um padrão observado por nós é que estas demonstrações quase nunca são iniciadas enunciando o que se deseja comprovar, o que se tem como dado e o que se procura; todavia, a partir de um desenho, observam-se e se extraem propriedades que contribuirão para posteriormente proceder com a dedução, isto é, há uma ênfase exploratória. Os passos da demonstração são justificados, retomando conceitos e resultados já conhecidos. Por fim, o resultado é enunciado de forma geral. Nesse sentido, esse tipo de demonstração escolar retoma valores advindos da prática científica, que é o poder de generalização, de irrefutabilidade e de imutabilidade de resultados matemáticos demonstrados devidamente.

Observamos dentro dessa categoria algumas variações quanto à estrutura da demonstração, como decomposição e/ou composição de figuras acompanhadas de deduções, deduções a partir de uma figura e indução finita. Vejamos abaixo alguns exemplos.

Na figura 42, há a dedução da fórmula para cálculo da área do trapézio. Observe que, após a duplicação da figura, elas são utilizadas para compor um paralelogramo – figura já estudada. A partir daí o autor compartilha conclusões, como o fato de o trapézio e o paralelogramo possuírem a mesma altura; o valor da medida da base do paralelogramo e o fato de a área do trapézio ser a metade da do paralelogramo. Todas essas informações, obtidas por meio da construção da situação compõem os argumentos que permitem concluir a fórmula para cálculo da área de um trapézio.

Figura 41- Fórmula para cálculo da área do trapézio



Área do trapézio

Observe a seqüência abaixo, em que o trapézio foi duplicado e depois um dos trapézios resultantes sofreu um giro de 180° para compor um paralelogramo.

Após a composição do paralelogramo, é possível observar que:

- **o trapézio e o paralelogramo têm a mesma altura;**
- **o comprimento da base do paralelogramo é equivalente à soma das medidas da base menor e da base maior do trapézio ($a = B + b$);**
- **a área do trapézio é igual à metade da área do paralelogramo.**

Assim, temos:

$$A_t = \frac{A_p}{2} \Rightarrow A_t = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow A_t = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \quad \begin{cases} A_t\text{: área do trapézio} \\ B\text{: medida da base maior do trapézio} \\ b\text{: medida da base menor do trapézio} \\ h\text{: altura do trapézio} \end{cases}$$

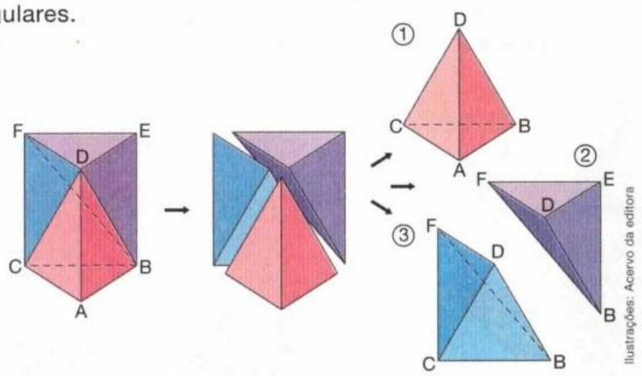
Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 6ª série, 2006, p. 271)

Temos outro exemplo por meio da figura 43. Neste caso, a partir de um experimento e da decomposição dos sólidos em outros, extraem-se os argumentos que darão base à dedução, qual seja, de que as pirâmides têm bases congruentes, a mesma altura e, portanto, que as três pirâmides tem o mesmo volume. Estes argumentos não foram demonstrados e não são postulados ou axiomas, são argumentos visuais e indutivos. Sua conclusão é enunciada de forma universal.

Figura 42 - Dedução da fórmula para cálculo do volume de uma pirâmide qualquer

Volume de uma pirâmide qualquer

Obtemos o volume de uma pirâmide relacionando prismas e pirâmides. Para isso, consideramos um prisma de base triangular e o decompomos em três pirâmides triangulares.



Podemos notar que as pirâmides **1** e **2** possuem bases congruentes ($\Delta ABC \equiv \Delta DEF$) e a mesma altura, correspondente à altura do prisma. Assim, as pirâmides **1** e **2** possuem o mesmo volume.

Note também que as bases das pirâmides **2** e **3** também são congruentes ($\Delta BEF \equiv \Delta BFC$) e têm a mesma altura, correspondente à distância do ponto *D* ao paralelogramo BEFC. Assim, as pirâmides **2** e **3** possuem o mesmo volume.

Portanto, as pirâmides **1**, **2** e **3** possuem o mesmo volume, isto é: $V_1 = V_2 = V_3$.

Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$ e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Estudamos anteriormente que o volume do prisma é dado por $V_{prisma} = A_b \cdot h$. Assim:

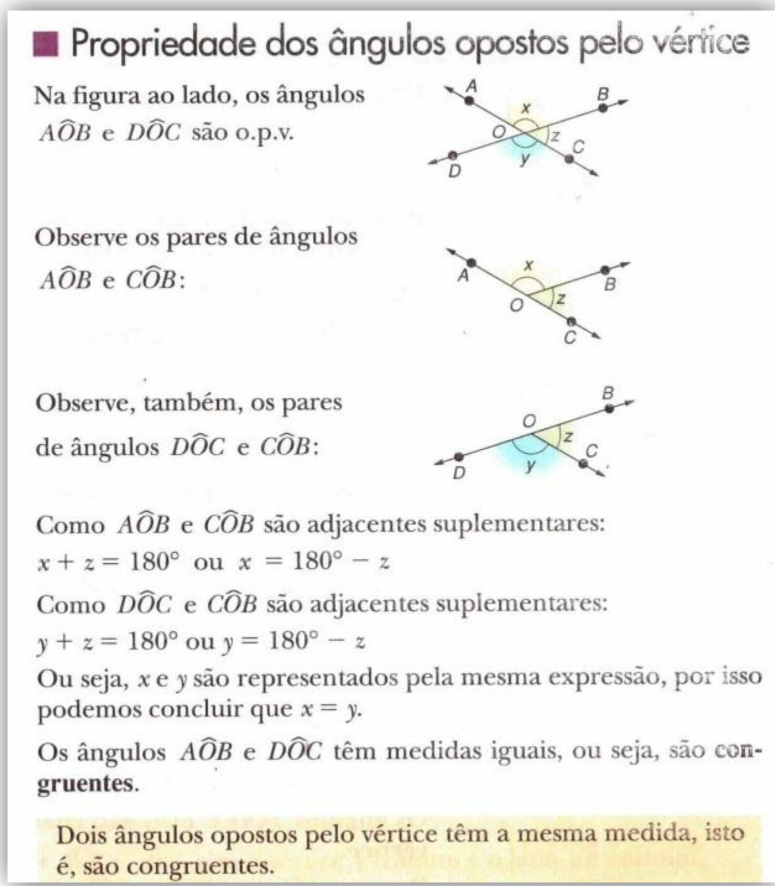
$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Com essa fórmula, é possível calcular o volume de uma pirâmide qualquer, e não somente de pirâmides triangulares. Isso pode ser garantido pelo Princípio de Cavalieri, visto que pirâmides com áreas das bases iguais e de mesma altura possuem volumes iguais.

Fonte - (NOVO OLHAR MATEMÁTICA – 3º ano, 2010, p. 96).

Com a figura 44, temos o exemplo de uma demonstração escolar na qual não se trabalha com decomposição ou composição de figuras. Esse é o tipo de procedimento mais frequente em todas as coleções, em que a dedução ocorre em meio a uma conversa entre autor e aluno, como por exemplo: *"Na figura ao lado, os ângulos* $\boldsymbol{A\hat{O}B}$ *e* $\boldsymbol{D\hat{O}C}$ *são o.p.v (opostos pelo vértice). Observe os pares de ângulos* $\boldsymbol{A\hat{O}B}$ *e* $\boldsymbol{C\hat{O}B}$*. Observe também (...)"*. Há o uso de desenhos para auxiliar no desenvolvimento das deduções e na percepção de propriedades relativas aos ângulos opostos pelo vértice. A conclusão do procedimento é exibida enunciando a propriedade "Dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida, isto é, são congruentes", que dá uma ideia de generalidade desse resultado.

Figura 43 - Ângulos opostos pelo vértice



Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice

Na figura ao lado, os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são o.p.v.

Observe os pares de ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$:

Observe, também, os pares de ângulos $D\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$:

Como $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$ são adjacentes suplementares:
$x + z = 180°$ ou $x = 180° - z$

Como $D\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são adjacentes suplementares:
$y + z = 180°$ ou $y = 180° - z$

Ou seja, x e y são representados pela mesma expressão, por isso podemos concluir que $x = y$.

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ têm medidas iguais, ou seja, são **congruentes**.

Dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida, isto é, são congruentes.

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 6ª série, 2006, p. 271)

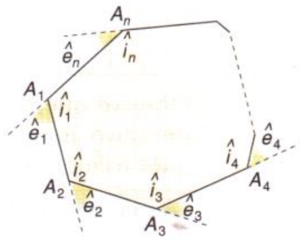
Na figura 45, há outro exemplo de procedimentos que compõem esta categoria. O procedimento é iniciado com as perguntas: *"O que acontece quando somamos as medidas dos ângulos externos de um polígono? Será que depende também do número de lados desse polígono?"*, convidando o estudante a se envolver no desenvolvimento da demonstração. Assumindo o caso de um polígono convexo de n lados, é utilizada a definição de ângulos suplementares para justificar que a soma do ângulo externo com um interno adjacente a ele é 180º. A cada par de ângulos internos e externos adjacentes temos um ângulo raso. Procede-se em seguida com o cálculo algébrico de todos os ângulos externos e internos do polígono, obtendo-se como soma $S_e + S_i = n \cdot 180°$. A partir desse momento utiliza-se um resultado já verificado: a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer é 180°. Por meio de manipulações algébricas, conclui-se que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°. Assim, é por meio da figura que se retiram argumentos para se deduzir a propriedade dos polígonos convexos, não enunciando anteriormente qual propriedade se deseja demonstrar.

Figura 44 – Dedução da propriedade da soma dos ângulos externos de um polígono

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

O que acontece quando somamos as medidas dos ângulos externos de um polígono? Será que depende também do número de lados desse polígono? Veja:

Vamos tomar um polígono convexo com n lados:



Da observação do polígono representado acima, temos:

$e_1 + i_1 = 180°$
$e_2 + i_2 = 180°$
$e_3 + i_3 = 180°$
$\vdots \qquad \vdots$
$e_n + i_n = 180°$

$S_e + S_i = n \cdot 180°$ —— Soma-se membro a membro as igualdades.

Porém, sabemos que $S_i = (n - 2) \cdot 180°$. Assim:

$S_e + S_i = n \cdot 180°$
$S_e + (n - 2) \cdot 180° = n \cdot 180°$
$S_e + n \cdot 180° - 360° = n \cdot 180°$
$S_e - 360° = 0$, ou seja:

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Logo, para qualquer polígono, a soma das medidas dos ângulos externos é sempre igual a 360°.

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p. 94)

Por meio da análise, ilustradas com os exemplos, apresentamos a estrutura, os pressupostos, as etapas e os procedimentos lógicos envolvidos e percebemos que, dentro de uma mesma categoria, as formas de demonstrar e suas estruturas se modificam. Entretanto, identificamos como objetivo deste procedimento uma abordagem mais didática das demonstrações nos livros didáticos, em que o foco é a apreensão dos modos do raciocínio dedutivo.

Outro fato identificado são os símbolos da demonstração, que mesmo implícitos, dão a ideia de generalidade, irrefutabilidade, verdade e imutabilidade dos resultados demonstrados de maneira lógico-dedutiva. Com isso, podemos dizer que, mesmo os autores omitindo em grande parte das vezes as palavras demonstração e abordando de maneira mais didática esse procedimento, eles acabam alimentando uma determinada cultura matemática, que é a da academia.

3.2.3. Demonstração escolar formal com elementos da lógica

Organizamos na presente categoria as demonstrações escolares formais, que são aquelas que decorrem necessariamente por axiomas, postulados e proposições verificadas a priori. As demonstrações desta categoria se diferenciam da anterior, na forma como se compõem os argumentos e no que se refere a sua forma de desenvolvimento.

Para essas demonstrações, observamos o uso de expressões marcadas por palavras do tipo “para qualquer”, “todo”, “demonstração”, “demonstração lógica”, “prova” e “justificativa”. Com isso, vemos que o procedimento visa indicar que a propriedade matemática, ao ser demonstrada da forma como foi feita, o resultado matemático é válido para qualquer caso possível, é verdadeiro, irrefutável e imutável.

Esse tipo de procedimento pode ser encontrado nos livros didáticos de 8º e 9º anos do ensino fundamental e 1º, 2º e 3º anos do ensino médio. A forma de apresentação desta demonstração escolar é a segunda mais utilizada nos livros didáticos, sendo a primeira a descrita na 2ª categoria. Nesta 3ª categoria, concentram-se os procedimentos que são denominados explicitamente por demonstração ou demonstração lógica.

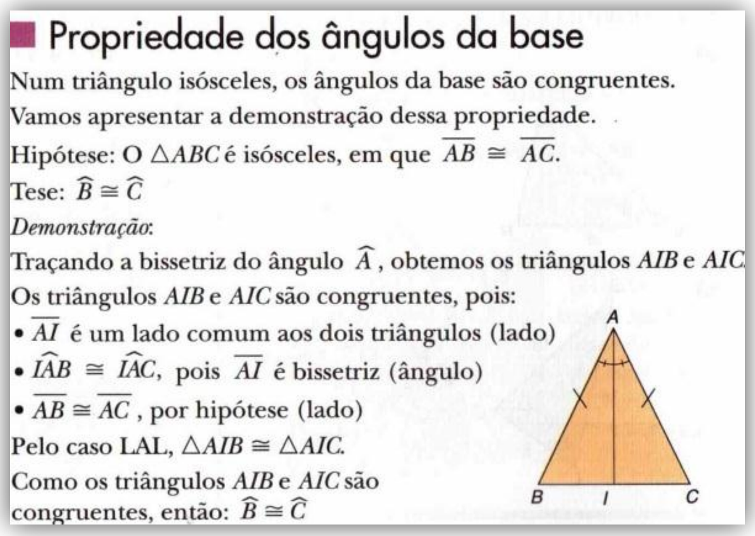
A seguir, apresentamos exemplos que compõem esta categoria.

Pelas figuras 46 e 47, podemos observar diferenças quanto ao procedimento caracterizado anteriormente. Vemos pelo desenvolvimento da demonstração que inicialmente se enuncia de forma universal a propriedade que se deseja demonstrar e, em seguida, explicita-se a hipótese, traduzindo o enunciado em uma figura. São utilizados resultados anteriormente enunciados e verificados para se encaminhar à dedução; a conclusão retoma e confirma a tese enunciada.

Podemos dizer que esses dois exemplos, apesar de possuírem as caraterísticas descritas acima, diferenciam-se quanto à estrutura.

No primeiro exemplo (figura 46), os autores colocam o texto em formato de hipótese, tese e demonstração. Primeiramente é enunciada a propriedade que se deseja demonstrar: "*Num triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes*". Em seguida, é explicitada a hipótese de que no triângulo ABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são iguais e a tese, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ possuem a mesma medida. Para prosseguir e concluir a demonstração, é utilizada o conceito de semelhança de triângulos.

Figura 45 - Propriedade dos ângulos da base



Propriedade dos ângulos da base

Num triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Vamos apresentar a demonstração dessa propriedade.

Hipótese: O $\triangle ABC$ é isósceles, em que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Tese: $\widehat{B} \cong \widehat{C}$

Demonstração:

Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, obtemos os triângulos AIB e AIC.

Os triângulos AIB e AIC são congruentes, pois:

- $\overline{AI}$ é um lado comum aos dois triângulos (lado)
- $I\widehat{A}B \cong I\widehat{A}C$, pois $\overline{AI}$ é bissetriz (ângulo)
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, por hipótese (lado)

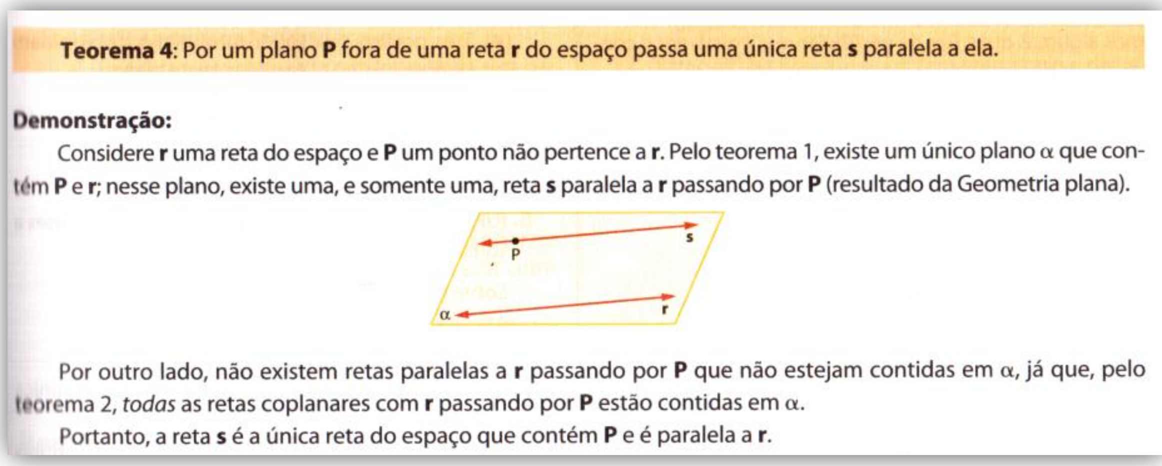
Pelo caso LAL, $\triangle AIB \cong \triangle AIC$.

Como os triângulos AIB e AIC são congruentes, então: $\widehat{B} \cong \widehat{C}$

Fonte - (PROJETO ARARIBÁ – 7ª série, 2006, p. 132).

No segundo exemplo (figura 47), por sua vez, o autor faz uso de termos como postulado e teorema no decorrer da demonstração, não explicitando hipóteses nem teses. Primeiramente se enuncia a proposição a ser demonstrada; em seguida, é construída uma figura representativa dessa proposição considerando resultados já demonstrados (teorema 1). A partir dessa construção, a demonstração segue recorrendo a teoremas e fazendo uso de deduções, que levam a conclusão.

Figura 46 – Teorema 4



Teorema 4: Por um plano **P** fora de uma reta **r** do espaço passa uma única reta **s** paralela a ela.

Demonstração:

Considere **r** uma reta do espaço e **P** um ponto não pertence a **r**. Pelo teorema 1, existe um único plano α que contém **P** e **r**; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta **s** paralela a **r** passando por **P** (resultado da Geometria plana).

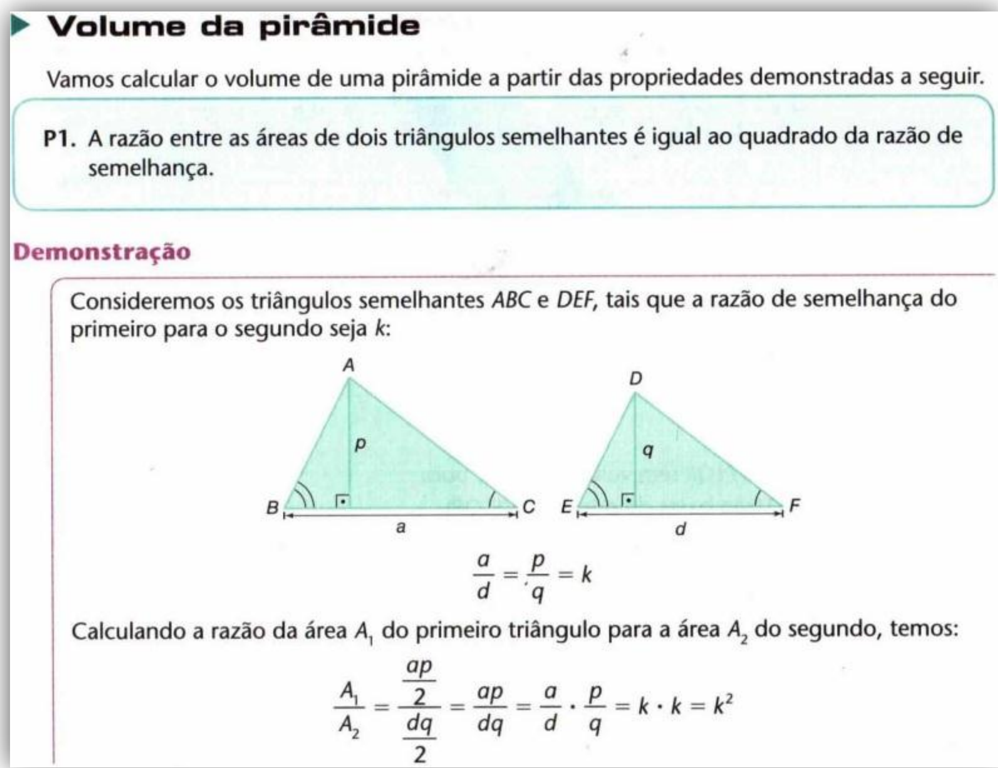
Por outro lado, não existem retas paralelas a **r** passando por **P** que não estejam contidas em α, já que, pelo teorema 2, *todas* as retas coplanares com **r** passando por **P** estão contidas em α.

Portanto, a reta **s** é a única reta do espaço que contém **P** e é paralela a **r**.

Fonte - (MATEMÁTICA CONTEXTOS E APLICAÇÕES – 2º ano, 2011, p. 201)

Na figura 48, também há um exemplo de demonstração formal, que não menciona os termos observados nas figuras 44 e 45.

Figura 47 - Volume da pirâmide



Volume da pirâmide

Vamos calcular o volume de uma pirâmide a partir das propriedades demonstradas a seguir.

P1. A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração

Consideremos os triângulos semelhantes *ABC* e *DEF*, tais que a razão de semelhança do primeiro para o segundo seja *k*:

$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área A_1 do primeiro triângulo para a área A_2 do segundo, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d} \cdot \frac{p}{q} = k \cdot k = k^2$$

Fonte – (MATEMÁTICA – 2º ano, 2009, p. 229)

Primeiramente, assim como nos demais exemplos dados nessa categoria, enuncia-se a proposição a ser demonstrada: *"A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança".* Dois triângulos semelhantes cuja razão de semelhança é a constante k são apresentados. Também se verifica a representação algébrica da razão de semelhança. Em seguida, calcula-se a razão de semelhança entre as áreas dos triângulos resultando em k^2. A partir desse resultado demonstrado o autor irá, posteriormente, determinar o cálculo do volume de uma pirâmide.

Com essas demonstrações, vemos uma inversão do desenvolvimento da demonstração escolar se compararmos ao que foi exposto nas demais categorias, isto é, a demonstração inicia com a síntese de um processo quer seja o enunciado da propriedade. Esse aspecto sintético está presente na matemática desde a publicação da obra *Os Elementos*. Como é bem dito por Pais (2010), a formalização do discurso do matemático é precedido por experiências, testes de casos particulares, ensaios, etc., - as abordagens intuitivas fazem parte do processo de demonstrar. Entretanto, esse tipo de validação esconde esse processo, apresentando como produto final um texto que se pretende "sem interferências humanas", exibindo-nos uma matemática que se pretende pura, neutra, objetiva, absoluta e irrefutável. Com isso, a demonstração se mostra como símbolo de autoridade, verdade, de segurança e certeza, etc.

3.2.4. Demonstração escolar via casos particulares, generalização e explicação

Observamos nesta categoria que as demonstrações estabelecem uma relação entre conhecimentos indutivos e dedutivos. É uma forma diferenciada porque foge a regra da maneira tradicional de apresentar a demonstração de um conhecimento matemático, apresentados nas categorias 2 e 3, pois a dedução, neste caso, é complementada por meio da valorização das estratégias indutivas.

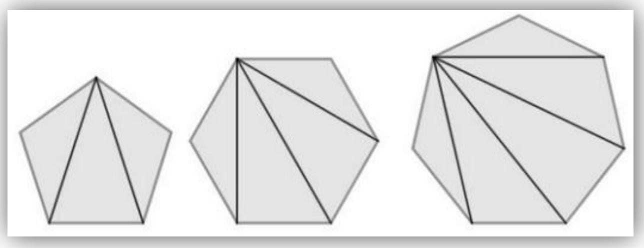
Neste caso, a demonstração escolar é utilizada com vistas a explicar determinada propriedade porque surge da observação de casos particulares e da generalização do que se observa. Vemos que o foco está mais direcionado à generalização e à explicação do que na validação, em que a explicação vem para validar a propriedade observada, podendo ser realizada de diferentes formas. No geral, vemos que a explicação surge como deduções em linguagem corrente, poupando-se o uso de simbolismos.

As expressões utilizadas na apresentação da demonstração são "*vejamos como relacionar", "sabe por que isso acontece?", "vamos deduzir", "observe a tabela a seguir (...) qual é a soma?"* e *"inicialmente, dividimos (...)"*. Dessa forma, podemos dizer que a maior parte das expressões já sinaliza que haverá uma dedução acompanhada de explicação dos seus passos.

Este procedimento é o menos recorrente considerando todas das coleções analisadas. Além disso, não há frequência de seu uso com relação aos diferentes conteúdos da geometria. Veja a seguir alguns exemplos[42]:

Deseja-se mostrar que a fórmula para cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é dada por $S = (n - 2) \cdot 180°$. Procede-se da seguinte forma: sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° (resultado já demostrado) e que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos. Vejamos exemplos:

Figura 48 – Pentágono, hexágono e heptágono



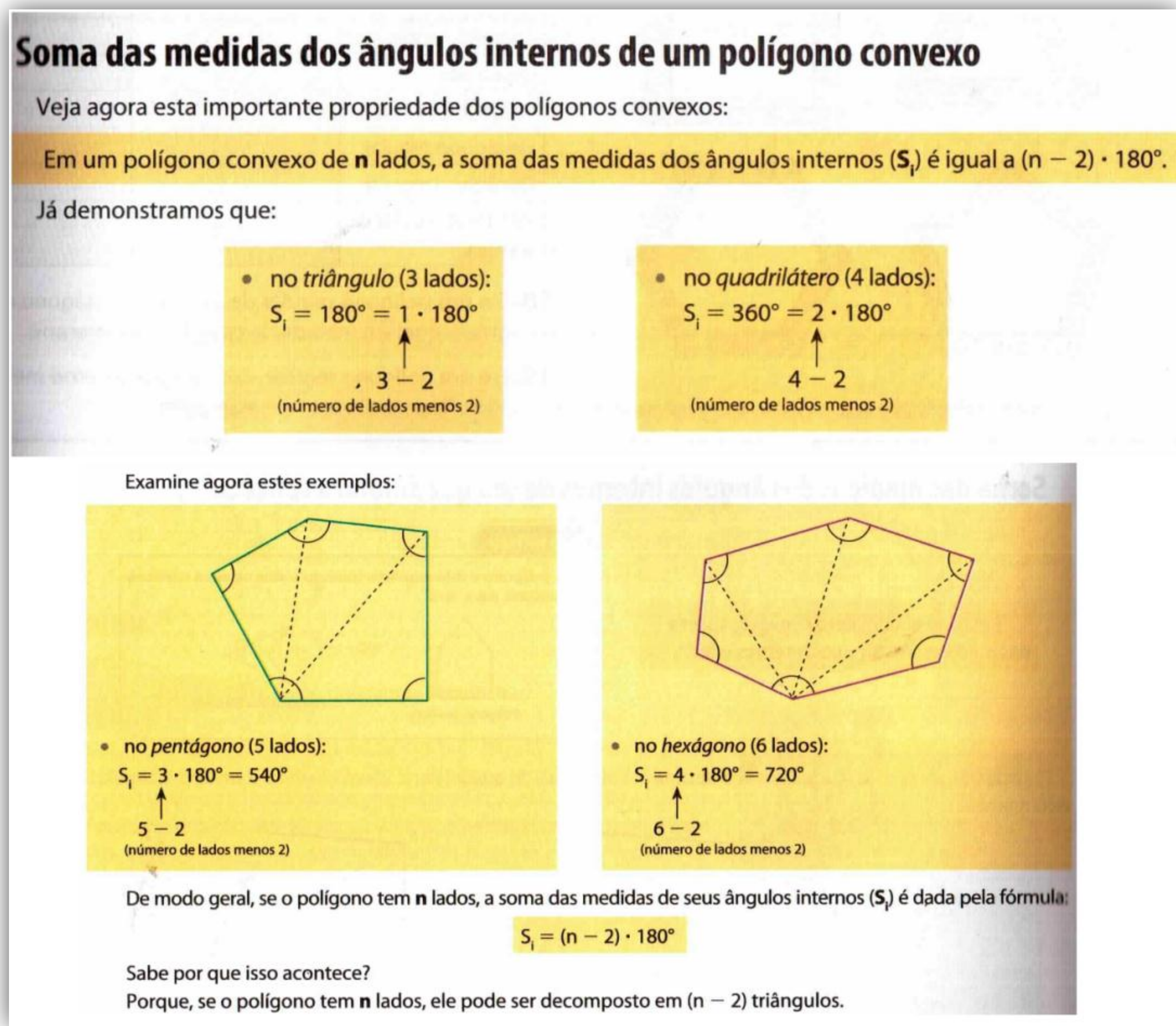
Fonte: Dante (2011)

Para o pentágono tem-se a soma dos ângulos internos igual a $(3 \cdot 180°)$, para o hexágono $(4 \cdot 180°)$ e para o heptágono $(5 \cdot 180°)$. Dessa forma, observa-se que o número que multiplica 180° corresponde ao número de lados do polígono menos dois $(n - 2)$, que é o número de triângulos decompostos do polígono. Assim, conclui-se que soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é dada por $S = (n - 2) \cdot 180°$.

Na figura 50, apresentamos a imagem que representa este procedimento de validação:

[42] Este primeiro exemplo pode ser obtido no livro didático do 1º Ano (DANTE, 2011).

Figura 49 - Propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo



Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo

Veja agora esta importante propriedade dos polígonos convexos:

Em um polígono convexo de **n** lados, a soma das medidas dos ângulos internos (**S_i**) é igual a (n − 2) · 180°.

Já demonstramos que:

- no *triângulo* (3 lados):
  $S_i = 180° = 1 \cdot 180°$
  3 − 2
  (número de lados menos 2)

- no *quadrilátero* (4 lados):
  $S_i = 360° = 2 \cdot 180°$
  4 − 2
  (número de lados menos 2)

Examine agora estes exemplos:

- no *pentágono* (5 lados):
  $S_i = 3 \cdot 180° = 540°$
  5 − 2
  (número de lados menos 2)

- no *hexágono* (6 lados):
  $S_i = 4 \cdot 180° = 720°$
  6 − 2
  (número de lados menos 2)

De modo geral, se o polígono tem **n** lados, a soma das medidas de seus ângulos internos (**S_i**) é dada pela fórmula:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

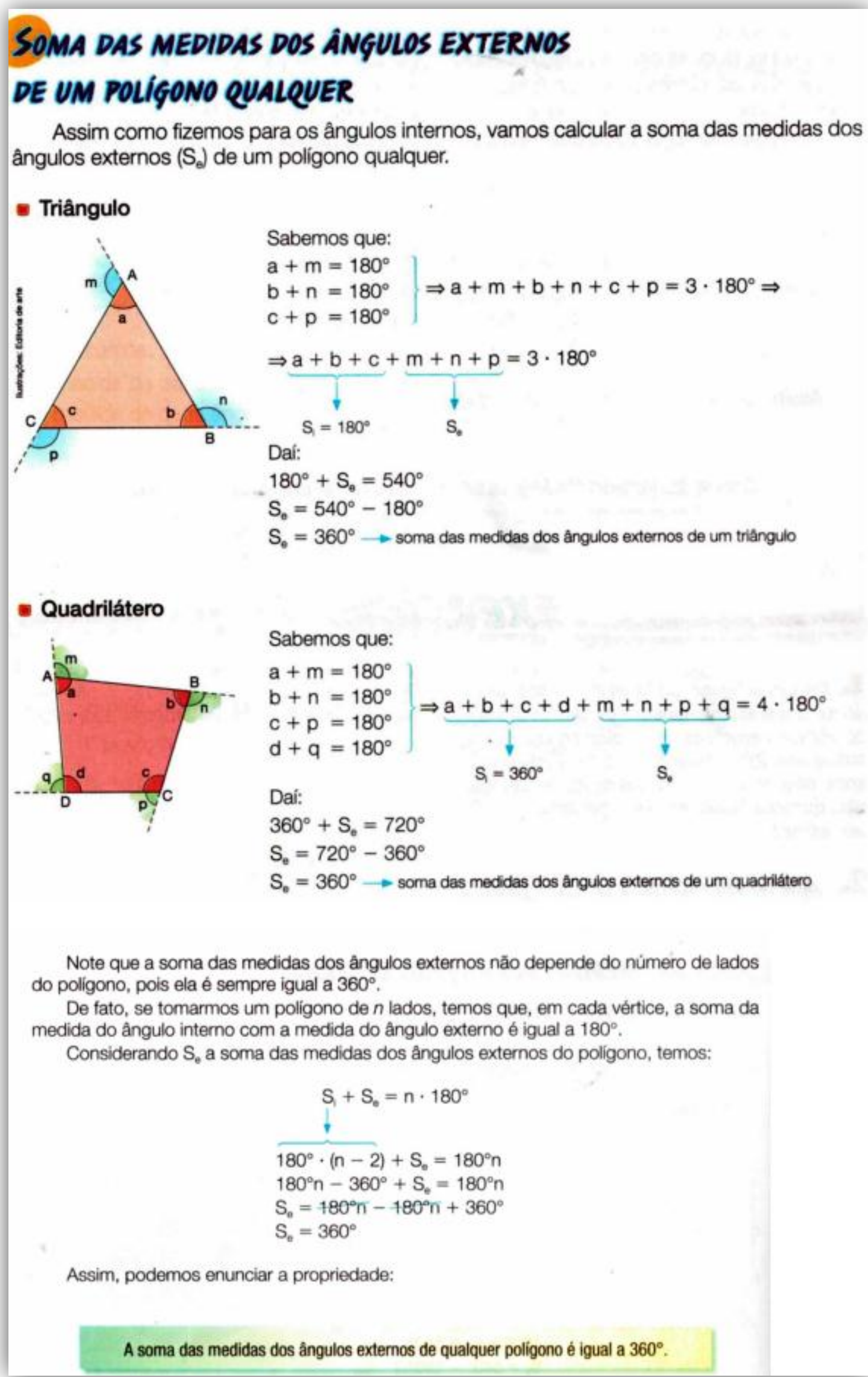
Sabe por que isso acontece?
Porque, se o polígono tem **n** lados, ele pode ser decomposto em (n − 2) triângulos.

Fonte – (MATEMÁTICA CONTEXTOS E APLICAÇÃO – 1º ano, 2011, p. 397 e 398)

Outro exemplo quanto ao procedimento de validação dessa categoria está ilustrado na figura 51. Nesse caso, deseja-se determinar uma fórmula para o cálculo da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer. Para isso, o autor mobiliza três exemplos: um triângulo, um quadrilátero e um pentágono (extraímos da figura abaixo o pentágono). Para cada figura, é calculado o valor da soma, obtendo sempre 360° como resposta. A partir dessa constatação, o autor por meio de um procedimento dedutivo procura mostrar o porquê desse valor, considerando que um polígono tenha n lados e que a soma dos ângulos internos e externos em cada vértice valham 180º. Dessa forma, considerando a soma de todos os n ângulos internos e externos teríamos que somar n vezes 180° ($180° \cdot n$).

Abaixo constam as manipulações algébricas que possibilitaram concluir que a soma dos ângulos externos é 360°.

Figura 50- Propriedade da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer



SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO QUALQUER

Assim como fizemos para os ângulos internos, vamos calcular a soma das medidas dos ângulos externos (S_e) de um polígono qualquer.

Triângulo

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a + m = 180° \\ b + n = 180° \\ c + p = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow a + m + b + n + c + p = 3 \cdot 180° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{a + b + c}_{S_i = 180°} + \underbrace{m + n + p}_{S_e} = 3 \cdot 180°$$

Daí:

$180° + S_e = 540°$

$S_e = 540° - 180°$

$S_e = 360°$ → soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo

Quadrilátero

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a + m = 180° \\ b + n = 180° \\ c + p = 180° \\ d + q = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{a + b + c + d}_{S_i = 360°} + \underbrace{m + n + p + q}_{S_e} = 4 \cdot 180°$$

Daí:

$360° + S_e = 720°$

$S_e = 720° - 360°$

$S_e = 360°$ → soma das medidas dos ângulos externos de um quadrilátero

Note que a soma das medidas dos ângulos externos não depende do número de lados do polígono, pois ela é sempre igual a 360°.

De fato, se tomarmos um polígono de *n* lados, temos que, em cada vértice, a soma da medida do ângulo interno com a medida do ângulo externo é igual a 180°.

Considerando S_e a soma das medidas dos ângulos externos do polígono, temos:

$$S_i + S_e = n \cdot 180°$$

$$\underbrace{180° \cdot (n - 2)}_{S_i} + S_e = 180°n$$

$$180°n - 360° + S_e = 180°n$$

$$S_e = \cancel{180°n} - \cancel{180°n} + 360°$$

$$S_e = 360°$$

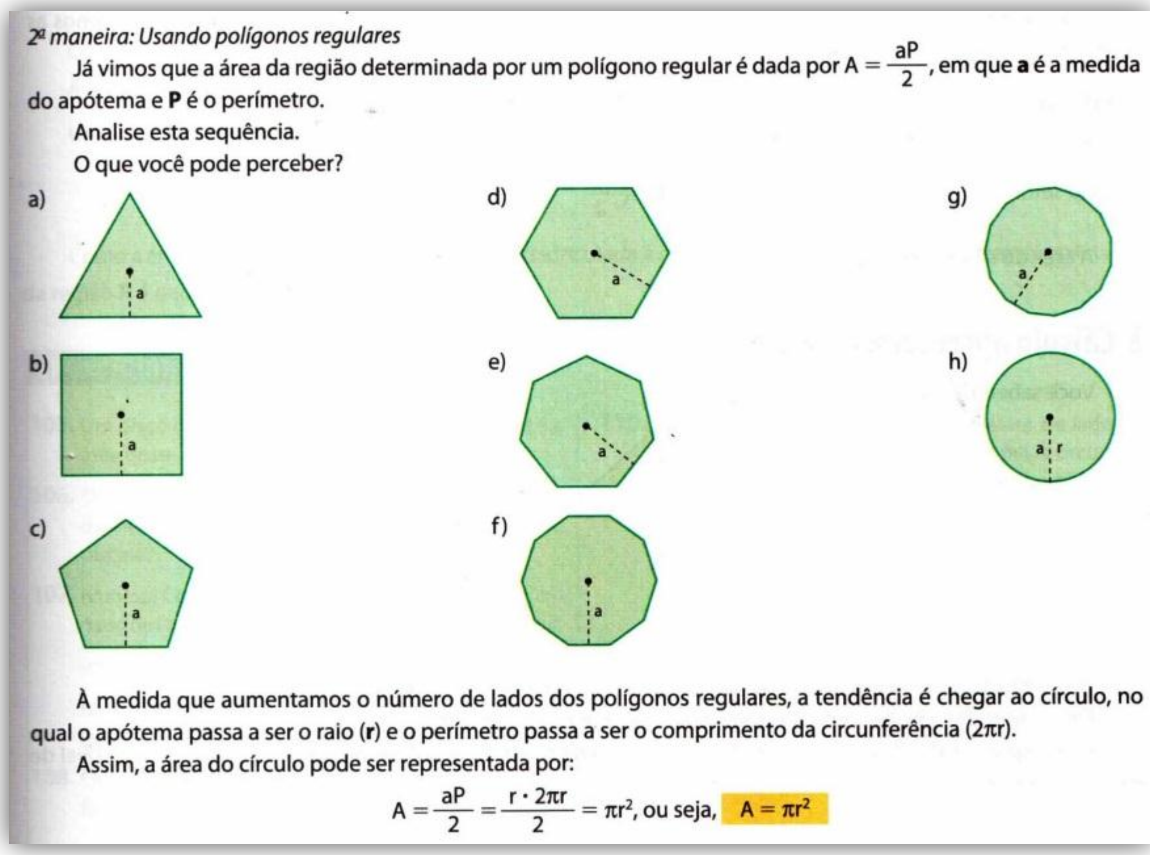
Assim, podemos enunciar a propriedade:

A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é igual a 360°.

Fonte – (A CONQUISTA DA MATEMÁTICA – 8º ano, 2009, p. 255)

Na figura 52, temos ainda uma situação em que o autor trabalha com polígonos regulares, cujos lados aumentam a partir da figura do triângulo. O autor solicita que os estudantes analisem a sequência de figuras para deduzir a fórmula para cálculo da área de um círculo. Uma explicação acompanha a dedução da fórmula.

Figura 51 - Fórmula para cálculo da área do círculo



2ª maneira: Usando polígonos regulares

Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que **a** é a medida do apótema e **P** é o perímetro.

Analise esta sequência.

O que você pode perceber?

a) b) c) d) e) f) g) h)

À medida que aumentamos o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio (**r**) e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência ($2\pi r$).

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2, \text{ ou seja, } \boxed{A = \pi r^2}$$

Fonte - (MATEMÁTICA CONTEXTOS E APLICAÇÃO – 1º ano, 2011, p. 428)

Este é um tipo de procedimento de validação interessante porque busca articular a observação de padrões, os procedimentos intuitivos, empíricos, dedutivos e as explicações, além de possuir um forte apelo ao aspecto visual. A maneira de desenvolvimento da demonstração indica uma possível interação aluno-autor, em que o segundo busca encaminhar o estudante a perceber e estabelecer relações e assim iniciar um processo de compreensão da tarefa de argumentar e demonstrar.

Com essa categoria, a demonstração nos aparece com outros símbolos além dos de absoluta e irrefutável, pois, ainda nas conclusões dos procedimentos, se enunciam as propriedades de forma universal, usando palavras como “para toda” e “qualquer”. Vemos aqui, a demonstração como símbolo de argumentação e de explicação.

Com as categorias, destacamos variações nas formas de desenvolver e utilizar as demonstrações nos livros didáticos. Nossa análise não buscou determinar quais os tipos de demonstração são válidos ou não; quisemos, no entanto, compreender quais as formas de demonstrar mobilizadas pelos diferentes autores, entender como elas são utilizadas nos livros didáticos e quais delas são priorizadas, mais valorizadas e os símbolos por trás delas. Através das análises das diferentes coleções de livros didáticos, podemos dizer que há mudanças de uma categoria para a outra em relação a: (1) metodologia para o desenvolvimento de uma demonstração, em que se considera a necessidade de compreensão dos estudantes, pois, muitas vezes são detalhados os passos e pressupostos; (2) a linguagem de apresentação dos conceitos, recorrendo mais à linguagem corrente do que a simbólica, por exemplo; (3) a forma de se introduzir e concluir um procedimento; (4) a maneira de uso das figuras, em que em um momento ela é a base para se extrair argumentos e em outros é a tradução da proposição a ser demonstrada; (5) maior uso de aspectos indutivos, intuitivos e visuais.

Além disso, cada tipo de demonstração escolar trás consigo símbolos que nos dizem sobre ela e sobre os resultados que dela decorrem. Observamos que, quanto menos informal e intuitiva for o procedimento realizado, mais recorrente é a retomada de valores advindos da prática científica, sendo que os citamos no decorrer da análise.

Mesmo utilizando as categorias para "classificar" alguns tipos de demonstração que obtivemos, não pretendemos de forma alguma apresentar conclusões definitivas. Até mesmo porque, as nossas análises consistem em nossas interpretações, e após a conclusão da pesquisa, outras interpretações sobre o objeto de pesquisa podem surgir pelos olhares de diferentes pesquisadores.

3.2.5. Os documentos oficiais e os livros didáticos: considerações quanto às demonstrações escolares

Assumimos em nossa pesquisa as demonstrações como formas simbólicas-construções carregadas de intenções que participam de contextos sócio-históricos, dentro dos quais e por meio dos quais elas são mobilizadas. Entendemos ainda os livros didáticos, os PCN e os guias do PNLD como maneiras de manifestação de nossa forma simbólica, em que cada um deles podem nos dar indícios de símbolos que permeiam a demonstração.

Na seção anterior a esta, apresentamos a análise formal das demonstrações nos livros didáticos, que foram eleitos como material empírico da pesquisa. Para nós é também importante entendermos as considerações quanto às demonstrações na matemática escolar pelos PCN e guias do PNLD, pois, são estes documentos que normatizam o que deve ou não estar nos livros didáticos. Os PCN do ensino fundamental e ensino médio juntamente aos guias do PNLD são documentos importantes para embasar nossa interpretação quanto ao que caracteriza e qual o papel cumprem as demonstrações nos livros voltados para o ensino, além de nos ajudar a compreender até que ponto estas demonstrações escolares estão sendo legitimadas pelos livros didáticos e documentos oficiais. Por esse motivo, colocamos como um dos objetivos específicos desta pesquisa identificar as considerações dos PCN e guias do PNLD quanto à demonstração, não para avaliá-los mas para observar os símbolos que nossa forma simbólica produz nesses documentos. Nesta seção, apresentaremos considerações quanto a isso.

Para compreender a presença da demonstração nos diferentes níveis, consideraremos as seguintes orientações curriculares (BRASIL, 1998; 1999; 2002; 2006), bem como os seguintes editais e guias do PNLD (BRASIL, 2007, 2010, 2011).

Em 2013, o Ministério da Educação definiu as “Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica”: um único documento que traçou orientações curriculares para diferentes níveis e contextos escolares. Este documento estabelece a base nacional comum, que orienta a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação de propostas para as salas de aula brasileiras. No entanto, este documento ainda não trata de aspectos específicos das disciplinas escolares como, em nosso caso, a demonstração, sendo que as expectativas quanto à aprendizagem serão formuladas futuramente. Em um trecho (BRASIL, 2013, p. 104) extraído das diretrizes, podemos ler esta explicação em relação ao ensino fundamental.

Utilizaremos os PCN dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio para compreendermos o que é dito quanto ao procedimento da demonstração por dois motivos: por ainda não dispormos destas novas diretrizes e pelos livros didáticos utilizados em nossa pesquisa muitas vezes se apoiarem nas orientações dos PCN; isto consta na lista de referências bibliográficas das coleções.

As orientações curriculares abordam a ideia de demonstração na matemática escolar e de aspectos que contribuem para o desenvolvimento da prática demonstrativa, como a argumentação. Diante disso, os livros didáticos avaliados pelo programa instituído pelo governo para este fim fazem uso no decorrer dos conteúdos e propõem atividades que visam contemplar essa orientação.

Analisando a lista de objetivos para os anos finais do ensino fundamental para a disciplina matemática, observamos que os PCN já sinalizam possíveis abordagens das demonstrações na escola:

> As finalidades[43] do ensino de Matemática visando à construção da cidadania indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a:
> • identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e *perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática*[44], como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> • (...) resolver situações-problema, *sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos,* bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> • comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e *apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas*, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (BRASIL, 1998, p. 47).

As orientações quanto às demonstrações são diferentes para as duas primeiras e últimas séries do ensino fundamental. Para os anos finais do ensino fundamental, os PCN orientam o trabalho com a demonstração em longo prazo, trabalhando com ideias e conceitos que permitem futuramente a elaboração de demonstrações típicas da matemática acadêmica. A ênfase, no que se refere ao 3º ciclo, é no trabalho com as argumentações, as justificativas e as experimentações; logo, não se orienta o uso de demonstrações formais para este ciclo.

Essa diferença quanto às orientações se justifica pelos objetivos prescritos para cada ciclo. O foco no 3º ciclo está na definição de conceitos, resolução de situações problemas, classificação de figuras, dentre outros; para o 4º ciclo, já se tem como objetivos verificar algumas propriedades geométricas. Assim, podemos dizer que no 3º ciclo a geometria é abordada com uma ênfase mais intuitiva e experimental, e no 4º ciclo, abordam-se noções mais abstratas e formais.

A argumentação, para os PCN, está vinculada à justificativa de uma afirmativa e à fundamentação de conclusões e não se constitui, para o documento, em uma demonstração, pois a argumentação não é regida pelas leis da lógica. Dessa forma, a argumentação é vista como um caminho que conduz à demonstração:

> Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem frequentemente os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações (BRASIL, 1998, p. 86).

---

[43] Listamos somente alguns dos objetivos. Os demais podem ser lidos no PCN de matemática para os 3º e 4º ciclos.
[44] Itálico nosso.

Uma discussão das diferentes visões sobre a relação argumentação e demonstração foi apresentada na seção de revisão bibliográfica, em que mostramos que há quem considere a argumentação como um obstáculo à aprendizagem da demonstração e outros que veem a demonstração como um caso particular de argumentação. A ideia explicitada pelos PCN, a nosso ver, possui algumas intersecções com estas duas vertentes, pois assumem que a prática de argumentação contribui para as demonstrações, mas não indicam explicitamente que a demonstração pode ser vista como uma forma de argumentação.

Assim, para o 3º ciclo, os PCN sugerem trabalhos que desenvolvam a argumentação, de modo que os estudantes desenvolvam a atitude de sempre justificar, não se satisfazendo somente com a produção de respostas.

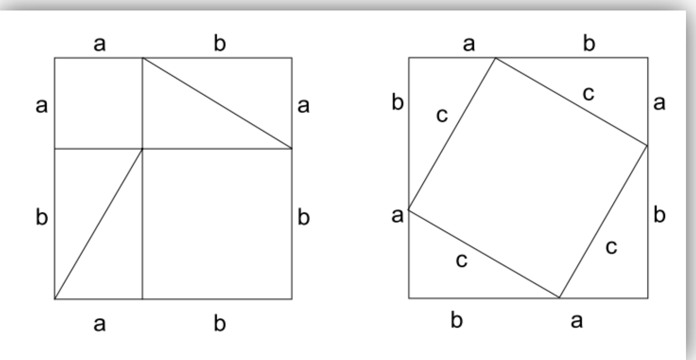
No 4º ciclo, ou seja, nos 8º e 9º anos, um dos focos é que o estudante "reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas" (BRASIL, 1998, p. 71). A ideia é que, em ciclos anteriores, se trabalhe com a construção de argumentos plausíveis pelos estudantes, em todos os conteúdos, para que no 4º ciclo se dê continuidade a esta prática, uma vez que ela é vista como fundamental para a compreensão futura de demonstrações formais.

Mesmo comentado em outros tópicos, sem aprofundamento, a recomendação para o trabalho com as demonstrações ocorre no tópico "Espaço e forma", em que se concentram as questões da geometria. Segundo os PCN, a geometria constitui-se como "um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações" (BRASIL, 1998, p. 122). Ao tecer as orientações didáticas para o bloco "Espaço e forma", os PCN trazem exemplos de como proceder quanto à validação de resultados no 3º e 4º ciclos. Segundo o documento,

> as atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas (BRASIL, 1998, p. 126).

No entanto, segundo os PCN, há problemas quando há a tentativa de articular esses domínios: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. O exemplo citado no documento se refere ao Teorema de Pitágoras, que, por meio de quebra-cabeças compostos por figuras planas, compõe a mesma figura geométrica – no caso, um quadrado – de duas maneiras diferentes. Através do conceito de área e igualdade entre as duas figuras é possível determinar a seguinte relação: "$a^2 + b^2 = c^2$", e deste resultado afirma-se que o teorema foi provado.

Figura 52 - Ilustração de uma "prova" do Teorema de Pitágoras



Fonte - Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)

Para os PCN, os experimentos com materiais concretos ou com medição de desenhos, não se constituem provas matemáticas para o 4º ciclo, apesar do convencimento que os estudantes possam ter; no entanto, eles podem ser entendidos por prova no 3º ciclo. No 4º ciclo, essas experiências devem ser o ponto de partida, ou seja, o elemento desencadeador "de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais" (BRASIL, 1998, p. 127), o que não significa que deve ser feito um estudo extremamente formal e axiomático da geometria. Quanto ao 4º ciclo, o documento ressalta que,

> embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (BRASIL, 1998, p. 87).

Os PCN enfatizam, portanto a potencialidade dos procedimentos intuitivos e empíricos para o trabalho com as demonstrações no 4º ciclo, viabilizando a compreensão e o levantamento de conjecturas. Entretanto, o documento observa que há momentos em que trabalhar com elementos concretos podem afastar a ideia de demonstração. E sendo assim, nesses casos, os exemplos ou o uso de materiais concretos devem desempenhar o papel de fonte de conjecturas a serem provadas de maneira formal. Um exemplo citado pelos PCN é a comprovação de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, feita por meio da decomposição e composição triângulos de papel:

> A demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, acessível a um aluno do quarto ciclo, recorre a axiomas e teoremas envolvendo um par conveniente de retas paralelas que, no entanto, não tem correspondente na concretização acima mencionada. Mesmo assim, nesse caso, a concretização é bastante útil para levantar conjecturas sobre esse resultado (BRASIL, 1998, p. 127).

A partir das considerações presentes nos PCN do 3º e 4º ciclos, observamos a possibilidade de se trabalhar com o procedimento de validação de diferentes formas nos diferentes níveis de ensino de matemática, uma vez que a orientação gira em torno de desenvolver características que levem às justificativas mais formais. Apesar dessa "abertura", vemos que os PCN não concebem a demonstração na matemática escolar como algo não formal e orienta diferentes abordagens para o desenvolvimento de prática de argumentação e justificação mas com o objetivo de desenvolver futuramente as demonstrações formais, ou seja, o método lógico-dedutivo.

Podemos então conjecturar que um dos objetivos finais é o desenvolvimento da argumentação e do método dedutivo. E diferentes modos de fazer essa aproximação são aspectos a serem desenvolvidos com os estudantes, tais como: criatividade, intuição, raciocínio lógico, postura argumentativa, justificações, explicações, representações geométricas, dentre outros. Os procedimentos de validação apresentados na seção anterior ilustram bem esses modos de se desenvolver a prática de argumentação e demonstração.

As demonstrações se fazem presentes nos livros didáticos, por ser também exigência do PNLD. Pelos critérios de avaliação das obras didáticas pelo PNLD listados na seção de análise sócio-histórica, vemos que a demonstração matemática, bem como os elementos que constituem o método lógico-dedutivo, se faz presente como critério de exclusão ou não da coleção didática do programa.

Os guias do PNLD de 2008 e 2011 compartilham dos objetivos propostos para os anos finais do ensino fundamental. Além disso, deixam claro que a abordagem de conceitos e procedimentos na escola deve ocorrer em um longo período, de estágios mais intuitivos aos mais sistematizados:

> Dessa maneira, não se deveria esperar que a aprendizagem dos conceitos e procedimentos se realizasse de forma completa e num período curto de tempo. Por isso, ela é mais efetiva quando os conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada, durante todo o percurso escolar. É preciso, então, que esses vários momentos sejam bem articulados, em especial, evitando-se a fragmentação ou as retomadas repetitivas (BRASIL, 2008, p, 17).

A geometria, precisa portanto partir de uma abordagem intuitiva até atingir o nível de abordagem dedutiva.

Com referência aos guias dos anos de 2008 e 2011 para escolha dos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental, nota-se que um dos critérios de análise é a existência ou não de aspectos que possibilitem o desenvolvimento de competências como "(...) argumentar, tomar decisões e criticar; visualizar; utilizar a imaginação e a criatividade; conjecturar e provar; e expressar e registrar ideias e procedimentos” (BRASIL, 2010, p.28). Além disso, o livro didático deve, dentre vários outros itens, apresentar situações que envolvam verificação de procedimentos e resultados pelo aluno.

Ainda quanto aos critérios eliminatórios da coleção de livros didáticos, são feitas exigências quanto à opção metodológica a ser assumida pelo autor. Nesse sentido, a opção metodológica deve contribuir para

> o desenvolvimento de capacidades básicas do pensamento autônomo e crítico (como a compreensão, a memorização, a análise, a síntese, a formulação de hipóteses, o planejamento, a argumentação), adequadas ao aprendizado de diferentes objetos de conhecimento e a seu uso social (BRASIL, 2011, p. 20).

O guia não trata como necessária e indispensável a formalidade da demonstração para os níveis de ensino mais elementares. Pelo contrário, enfatiza que os livros didáticos devem permitir e estimular o desenvolvimento da capacidade de argumentação e de verificação de soluções pelos estudantes deixando claro que não se deve superestimar que o aluno já possua o raciocínio lógico-dedutivo completamente desenvolvido, apresentando uma Matemática meramente formal e sistematizada (BRASIL, 2011).

Entretanto, vemos no edital do PNLD (2008) recomendações do que não deve estar no livro didático:

> A conjectura apoiada na observação de exemplos é válida para o ensino da matemática, porém não deve ser confundida com a obtenção de uma conclusão matemática. Desta forma, não se deve dizer que de exemplos se pode concluir a validade geral de uma afirmação. Uma outra ordem de falhas conceituais vem do fato de que as verificações empíricas, por mais que sejam importantes para a construção do conhecimento do aluno, não devem ser confundidas com demonstrações matematicamente válidas (BRASIL, 2008, p.60).

A recomendação vem para assegurar que não haja equívocos ao se trabalhar com argumentos empíricos. Compreendemos que é uma forma de garantir que, no uso, as demonstrações estejam de acordo com a sua definição dada principalmente pela matemática acadêmica.

Em nossas análises, constatamos ao mapear e caracterizar as demonstrações escolares, no que se refere aos exercícios propostos, que há atividades que exigem experimentação, justificativas, observação de padrões e argumentações. Nos livros didáticos dos 6º e 7º anos, que correspondem ao 3º ciclo mencionado pelos PCN, vimos que o uso de diferentes formas de se validar, incluindo a demonstração formal, estavam presentes, mesmo que seu uso não fosse muito significativo. A demonstração escolar predominante nestes níveis é a verificação da validade mediante experimentos e casos particulares, o que vai ao encontro do propósito dos PCN para o 3º ciclo.

Além disso, em consonância com as orientações curriculares, os livros didáticos analisados realmente não fazem um estudo axiomático e formal da geometria. As expressões *axiomas* e *teoremas*, por exemplo, surgem como curiosidades para que os estudantes pesquisem seus significados. Entretanto, como exceção, a coleção "Projeto Araribá", a partir do livro didático da 7ª série (8º ano), apresenta as demonstrações em termos de hipótese, tese e conclusão e explica que em uma demonstração, partimos da hipótese e chegamos à tese. Esta forma de estruturação e apresentação da demonstração é recorrente nos livros didáticos das 7ª e 8ª séries desta coleção. As demais coleções não apresentam as demonstrações utilizando estes termos.

Nos livros didáticos analisados para os 8º e 9º anos, observamos um aumento significativo no uso de demonstrações escolares. São utilizados os diferentes tipos de validação indicados em nossas categorias, mas principalmente os procedimentos lógico-dedutivos. Acreditamos que o uso de diferentes formas de validar está relacionado ao objetivo de que os estudantes futuramente elaborem demonstrações formais. Assim, vemos estes usos como uma ponte, em que os procedimentos informais serão utilizados para se chegar ao outro extremo às demonstrações formais. Vemos isso como uma forma de valorização da demonstração formal em detrimentos de outras formas de validação que coexistem nas salas de aula de matemática e que foram por nós identificados anteriormente.

No que se refere ao ensino médio, a partir das considerações dos PCNEM, tem-se que ele é apresentado como uma oportunidade de aprofundar e complementar o aprendizado que fora iniciado no ensino fundamental, o que está em conformidade com a LDB/96. Entretanto, as finalidades do ensino médio não se reduzem ao que mencionamos, pois também têm o intuito de "garantir a continuidade de estudos, (...) a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos" (BRASIL, 2006, p. 69).

Os PCNEM em meio as considerações quanto a organização do ensino médio tece alguns comentários quanto as demonstrações.

A matemática do Ensino Médio, segundo os PCNEM, apresenta dois papéis, sendo eles, formativo e instrumental. Em seu papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de atitudes e hábitos, como os de investigação e de resolução de problemas, além da criatividade e confiança. No que diz respeito ao papel instrumental, "ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional" (BRASIL, 1999, p. 40). Entretanto, além do caráter formativo e instrumental da matemática, ela também deve ser vista como ciência com características próprias. Assim, para os PCNEM, é importante que as definições, demonstrações e encadeamentos lógicos e conceituais façam parte da matemática do Ensino Médio, de forma a possibilitar que os estudantes percebam que elas têm a "função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas" (BRASIL, 1999, p. 40).

Nesse sentido, um dos objetivos do ensino de Matemática no nível médio se torna "expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática" (BRASIL, 1999, p. 42).

> A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade (BRASIL, 1999, p.41).

O documento indica a necessidade de que, dentre outros aspectos, os estudantes formulem hipóteses e prevejam resultados, interpretem e critiquem resultados por meio de experimentos e demonstrações, diferenciem e utilizem raciocínios dedutivos e indutivos, elaborem conjecturas e as validem, "experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" e discutam e produzam argumentos convincentes (BRASIL, 1999, p. 46).

Apesar dessas informações, para compreender melhor as considerações quanto às demonstrações no ensino médio, recorremos aos PCN+, que é um documento que foi lançado no ano de 2002 para complementar as orientações dos PCNEM.

Os PCN+ organizaram um conjunto de temas em três eixos ou temas estruturadores a serem desenvolvidos em todo Ensino Médio, sendo eles: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas e; Análise de dados. Obtemos orientações quanto à demonstração somente no segundo eixo.

Segundo o documento, o ensino fundamental está estruturado de forma a possibilitar que os estudantes tenham contato e reflitam sobre alguns conteúdos da geometria plana por meio de experimentações e deduções informais. O Ensino Médio é visto com a possibilidade de maior desenvolvimento do raciocínio lógico. Dessa forma, é orientado pelo PCN+ que os estudantes devam ser apresentados a "um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares” (BRASIL, 2002, p. 124).

As orientações prosseguem em vista de esclarecimentos. Apresentar o sistema dedutivo e perceber o significado de postulados e teoremas, não implica, segundo os PCN+, em memorizá-los, mas possibilitar que os estudantes percebam a forma como a Matemática valida seus resultados, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e o conhecimento de aspectos intrínsecos à linguagem matemática. Assim, o documento se preocupa em “definir” o que é uma prova matemática, bem como trazer uma ideia intuitiva do que se quer dizer por axioma:

> afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente. O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica (BRASIL, 2002, p. 124).

Ainda visando complementar as informações curriculares para o ensino médio, dispomos das “Orientações Curriculares para o Ensino Médio” – OCEM/06 publicado em 2006.

Este documento visa contribuir para discussões curriculares, tratando de três aspectos: a escolha dos conteúdos, a forma de trabalhar com eles e a organização curricular.

Para a escolha dos conteúdos o OCEM/06, indica a necessidade de se considerar os propósitos da formação matemática para o nível:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Então o ensino de matemática deve contemplar questões práticas e teóricas, valorizando inclusive as demonstrações matemáticas. Para o ensino médio se orienta, assim como nos dois documentos citados anteriormente, o trabalho com a demonstração que resultem em fórmulas, por exemplo.

Além disso, segundo as OCEM/06, a explicitação da estruturação lógica da matemática é enfatizada pelo documento e é tido como necessária aos alunos do ensino médio. Quanto a isso deve-se "valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática" (BRASIL, 2006, p. 92).

Quanto ao guia do PNLD para o ensino médio, este considera indispensável permitir que o aluno compreenda a "distinção entre uma prova lógico-dedutiva e uma verificação empírica, seja esta baseada na visualização de desenhos, na construção de modelos materiais ou na medição de grandezas" (BRASIL, 2011, p. 25). Além disso, em alguns trechos do guia observamos a preocupação deste em colocar em evidência o método dedutivo e conceitos que compõem a matemática acadêmica (ou científica):

> O método dedutivo, especialmente a partir da civilização grega, predomina na Matemática e assume a primazia de ser o único método aceito, na comunidade científica, para comprovação de um fato matemático. Os conceitos de axioma, definição, teorema, demonstração são o cerne desse método e, por extensão, passaram a ser, para muitos, a face mais visível da Matemática (BRASIL, 2011, p. 15).

No entanto, as instruções do guia são para que se dose o emprego do método dedutivo em sala de aula do ensino médio, de forma que haja progressão criteriosa (BRASIL, 2011). Isto reforça nossa hipótese de que as demonstrações nos diferentes níveis estão relacionados a um desenvolvimento futuro das demonstrações formais. Assim, a progressão criteriosa está relacionada ao nível de escolaridade para a qual a demonstração será utilizada.

Nos livros didáticos para o ensino médio, a demonstração assume característica mais formal e ligada à prática científica, se compararmos com as orientações para os anos finais para o ensino fundamental. Isto faz sentido por ser o ensino médio apresentado como uma oportunidade de aprofundar e complementar o aprendizado que fora iniciado no ensino fundamental.

Apesar de termos visto em alguns momentos nos três documentos oficiais (PCN/99, PCN+ e OCEM/06) uma tentativa de se valorizar os aspectos intuitivos e empíricos da matemática, estes acabaram suprimidos pela repetitiva lembrança do que é uma demonstração formal, do valor de uma demonstração, do que é afirmar a verdade em matemática e qual é a face da matemática que se organiza via teoremas e demonstrações.

Esse valor dado às demonstrações formais e lógico-dedutivas corresponderia às análises nos livros didáticos que realizamos, em que exemplificamos por meio de tabela (tabela 20) e gráfico (figura 34) a diminuição de abordagens intuitivas e experimentais na seção de geometria plana e espacial no decorrer dos diferentes níveis de ensino de matemática.

Diante das ideias apresentadas quanto às orientações dos documentos oficiais sobre demonstração na matemática escolar e das análises realizadas dos livros didáticos, podemos elencar e resumir resultados da análise formal:

- Há a associação do desenvolvimento do raciocínio lógico com as demonstrações, o que faz com este procedimento seja visto como inerente à disciplina matemática;
- Para os PCN dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, é necessário mostrar o valor de uma demonstração formal e diferenciá-las de procedimentos informais. Com isso, passa-se a considerar, principalmente em níveis mais elevados de ensino, as demonstrações informais como insuficientes e ilegítimas;
- O sentido dado pelos documentos oficiais quanto às diferentes formas de validação na matemática escolar indicam que elas devem cumprir o papel de preparação para a compreensão e desenvolvimento de uma demonstração formal. Além disso, apesar de obtermos diferentes formas de se demonstrar nos livros didáticos para os diferentes níveis de ensino, observamos que continua-se a privilegiar um modo lógico-dedutivo de pensar;
- Conforme se aumenta o nível de escolaridade, as demonstrações escolares se tornam mais formais e atreladas a símbolos valorativos advindos da prática científica;
- As análises dos livros didáticos indicaram quanto ao desenvolvimento de uma demonstração: mudanças metodológicas; a recorrência a linguagem corrente; diferentes modos de se utilizar figuras em uma demonstração; maior uso de aspectos indutivos, intuitivos e visuais;
- Apesar de os livros didáticos contribuírem para que seja repensada a demonstração na matemática escolar, propondo outros tipos de argumentos para convencer os estudantes a respeito dos resultados da matemática, observamos ao analisar a presença das demonstrações escolares nos diferentes níveis, que as suas abordagens acabam girando em torno do paradigma da demonstração, reafirmando-a com a norma de referência do conhecimento matemático. “Considerar diferentes formas de argumentação aparenta ser

diferente, no entanto, pode acabar por sustentar não só a demonstração como também a hierarquia entre os procedimentos de validação assim como sustentar o ideal de apreensão da verdade, mantendo a modulação epistemológica" (VILELA; DEUS, 2015, p. 67).

- Quanto aos desdobramentos da valorização das demonstrações nos PCN e guias do PNLD, podemos afirmar que o modo como lidam e orientam o uso das demonstrações nos diferentes níveis do ensino de matemática constrói não só a ideia de demonstração, mas também o modo de como lidar com ela, permitindo ainda a elaboração de ideias do que é ou não válido dentro da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa permitiu observarmos o que caracteriza e quais funções cumprem as demonstrações escolares em livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática.

Observamos no decorrer da pesquisa que a forma de elaborar a problemática de investigação se mostrou comprometida com concepções prévias do objeto a ser pesquisado. Em nosso caso, o fato de já termos realizado no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática uma pesquisa sobre a temática demonstração influenciou inicialmente o pensar sobre nossa dissertação. Naquele momento, estudamos as demonstrações como metodologia de ensino de conteúdos algébricos, o que de certa forma contribuía para valorizarmos o ensino de demonstrações da matemática acadêmica dentro da escola e a forma de pensar que este procedimento conduz. No entanto, o presente trabalho teve potencial importância para ampliar nosso olhar para este procedimento, além de fazer-nos questionar sobre sua presença na matemática escolar e olhar para os aspectos valorativos e simbólicos que o permeia.

As diversas leituras em diferentes campos como Educação Matemática e Sociologia da Ciência contribuíram também para a ampliação na forma de olhar para as demonstrações na matemática escolar. Possibilitaram desnaturalizar e estranhar a forma única e reinante de se conceber as demonstrações, que é a da matemática acadêmica, inclusive no que se refere à matemática escolar.

Dessa forma, consideramos termos dado um passo importante à ampliação do significado do papel da demonstração, ao assumirmos, com base em Moreira (2004) e Vilela e Meneghetti (2011), que a matemática escolar e a acadêmica são práticas distintas. Nesse sentido, passamos a olhar para o papel que a demonstração desempenha na matemática escolar, assumindo as demonstrações na educação básica de forma ampla, que não se restringe às formais. Isso nos permitiu dar um primeiro passo rumo à desnaturalização da ideia de demonstração como algo único, transcendente e que conduz à verdade.

A fim de compreendermos com mais profundidade as demonstrações, algumas necessidades surgiram. Podemos então sintetizá-las com a seguinte questão: Como as mudanças ocorridas no ensino de matemática em diferentes épocas influenciaram em alterações na forma de se utilizar as demonstrações nos livros didáticos dos diferentes níveis do ensino de matemática? Esse estudo nos mostrou que poucas mudanças ocorreram e indicou o valor simbólico e cultural que as demonstrações têm dentro do ensino de matemática, pois elas se fazem presente atualmente nos livros didáticos. Esse valor é grande a ponto de não se vislumbrar possibilidades de estudos da disciplina matemática sem a mobilização de demonstrações para legitimar os resultados. Além disso, olhar para os livros didáticos em diferentes épocas nos mostrou a potencialidade desses materiais em indicar características do ensino dessa disciplina.

Outra necessidade que surgiu no decorrer da pesquisa foi de compreender melhor alguns aspectos históricos das demonstrações. Precisávamos compreender as demonstrações formais, as ideias e valores por trás dela, por ela ser referência de demonstração. Temos consciência de que a demonstração formal foi caracterizada de maneira lacunar, sendo necessários maiores esclarecimentos e aprofundamentos principalmente quanto à lógica clássica, entretanto, consideramos que o que fora realizado foi suficiente para as necessidades da presente pesquisa.

Ao mapear e caracterizar as demonstrações escolares nos diferentes níveis do ensino de matemática, vimos a presença de diferentes formas de validação, que não se restringem à demonstração formal. Entretanto, observamos que essas diferentes formas vêm a cumprir o papel de conduzir de forma gradativa os estudantes a produzir e compreender demonstrações formais, típicas da matemática acadêmica.

Podemos, quanto a isso, retomar Vilela e Andrade (2013) que dizem que ao valorizar a crença em uma lógica formal, a escola acaba por controlar comportamentos com uma finalidade determinada, não permitindo assim que o aluno proceda de outro modo. Quanto a isso, ações estratégicas surgem visando habilidades específicas que se apoiam em determinadas crenças. No caso da presente pesquisa, interpretamos que as diferentes formas de demonstrar podem ser entendidas como "ações estratégicas", que buscam de forma "didática" e com o argumento de respeitar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, incutir neles ideias e modos de fazer da lógica formal. Essas "ações estratégicas" visam, além de desenvolver as habilidades de demonstrar formalmente após um determinado processo, manter o valor simbólico das demonstrações na escola.

Além disso, apesar de vermos episódios na história em que se denuncia não ser possível atingir a certeza absoluta, em que se refuta a possibilidade de se atingir a verdade, observamos que esta busca, em menor ênfase, ainda está presente nos livros didáticos em que os procedimentos intuitivos e experimentais acabam sendo vistos como incapazes de atingir essa "verdade", mas bons procedimentos para se trabalhar com a prática de argumentação necessária ao desenvolvimento futuro da demonstração formal.

Com isso, podemos dizer que, apesar de os autores de livros didáticos mobilizarem diferentes formas de validação, estas continuam a cumprir um objetivo prescrito pelas orientações curriculares de valorização das demonstrações formais. A nosso ver, esse fato indica que os autores de livros didáticos estão girando em torno do paradigma da demonstração, e acabam mantendo a hierarquia entre os diferentes tipos de demonstração escolar, bem como sustenta o ideal de apreensão da verdade. A demonstração formal continua, portanto, valorizada na escola, sendo indicada e garantida pelos documentos oficiais.

Quanto a essa manutenção das demonstrações formais na escola, podemos mencionar o artigo que Sérgio Lorenzato publicou no ano de 2012, intitulado "Desafios do contemporâneo que não é novo". O autor lista inúmeras mudanças e fatos ocorridos nos últimos 20 anos, sendo eles:

> aconteceram vários cursos de formação continuada para professores, olimpíadas, congressos nacionais e internacionais sobre Educação Matemática, e também foram implantadas avaliações do rendimento escolar em âmbito nacional; surgiram publicações direcionadas a professores, propostas curriculares para a Educação Básica, livros didáticos, promoção continuada, reserva de vagas, ensino a distância, computador, lousa digital, videoconferência; o perfil dos alunos modificou-se; a profissão magistério e o salário do professor foram desvalorizados; a produção de pesquisas e a implantação de cursos de pós-graduação em Educação Matemática aumentaram fortemente; a duração do Ensino Fundamental passou de oito para nove anos; os cursos de Licenciatura em Matemática multiplicaram-se (LORENZATO, 2012, p. 10).

Apesar de todas essas mudanças, Lorenzato (2012) afirma que a matemática continua carregada de crendices. E, em nosso caso, vemos que a manutenção da demonstração na escola corrobora a afirmação de ser a matemática um campo tradicional, apesar das novas metodologias, e um dos componentes mais conservadores do sistema de ensino (D'AMBROSIO, 2002).

Segundo Bicudo e Garnica (2002), a prática científica da matemática é tendencialmente conservadora. Esta prática possui certos valores e procedimentos que se mostram convenientes aos objetos de criação matemática, e "estabelecem-se como hegemônicos e deslizam ideologicamente para a prática pedagógica" (p. 60). Os autores destacam algumas manifestações desse conservadorismo, dentre elas, a forma de argumentação sobre o conteúdo matemático. "Esse estilo matemático impõe-se seguindo os parâmetros rígidos de uma lógica formal que dita as formas pelas quais toda e qualquer argumentação acerca do conteúdo matemático deve ocorrer" (p. 61).

É interessante observar como o ato de pesquisar, de se engajar em um momento de reflexão, permite que a pesquisa extrapole áreas, o que a torna mais rica e profunda. Em nosso caso, a nossa forma simbólica é um procedimento que vem sendo discutido em diferentes áreas como a História da Educação Matemática, a Filosofia da Matemática, a Educação Matemática, a Sociologia da Ciência e a Matemática. Pudemos observar que a Educação Matemática vem dialogando com estas áreas do conhecimento, enriquecendo e ampliando as possibilidades de discussão de objetos presentes no ensino de matemática.

Nesse trabalho, portanto, ao nos inspirarmos na HP para os caminhos metodológicos e tomarmos as demonstrações como formas simbólicas, atribuímos um significado para as demonstrações presentes nos diferentes níveis do ensino de matemática. Significados construídos decorrentes das escolhas que fizemos, dos recortes para a análise sócio-histórica que realizamos, da maneira de realizar a análise formal e de reinterpretar nossa questão de pesquisa.

Sendo assim, muito longe de uma conclusão, podemos afirmar que os resultados dessa pesquisa refletem a nossa interpretação possibilitada pelo contato com os livros didáticos considerados e das situações por nós obtidas e construídas para fundamentar nossas conclusões. Entretanto, outras leituras e interpretações poderão ser realizadas, podendo vir para complementar, questionar ou até mesmo reafirmar o que colocamos aqui. Isso demonstra a impossibilidade de conclusões definitivas, da “apreensão de uma verdade”, mas sinaliza a possibilidade de diferentes interpretações do mundo em que fazemos parte.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Trad. coord. rev. Alfredo Bosi e Maurice Cunioet al. 2ª. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

AGUILAR JR. C. A. A; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. **Vidya**, v. 32, n. 2, p.133-147, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012.

ALMEIDA, R. de C. M. de. **Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX. 2008. 273 f.** Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ALMOULOUD, S. A; SILVA, M. J. F da. **Provar e demonstrar:** um espinho nos processos de Ensino e aprendizagem da matemática. RPEM, Campo Mourão, v.1, n.1, jul-dez. 2012.

ALVAREZ, T. G. **A matemática na reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar.** 2004. 155f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

ANDRADE, J. A. A. O **ensino de geometria:** uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos anais dos ENEM'S. 2004. 104 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2004.

ANDRADE, E. C. de. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração**. 2011. 150p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ANDRADE, M. M. **Ensaios sobre o ensino em geral e o de matemática em particular, de Lacroix:** análise de uma forma simbólica à luz do referencial metodológico da Hermenêutica de Profundidade. 2012. 281f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

ANDRADE, M. M.; OLIVEIRA, F. D. de. Referencial metodológico da hermenêutica de profundidade na educação matemática: reflexões teóricas. In: GARNICA, A. V. M; SALANDIM, M. E. M. **Livros, Leis, Leitura e Leitores:** exercícios de interpretação para a História da Educação Matemática. Curitiba: Appris, 2014, p. 17-42.

ARISTÓTELES. **Órganon:** IV Analíticos Posteriores. Pinharada Gomes (Trad.). 1 ed. Lisboa: Guimarães Editores, 1987. 174 p. (Colecção Filosofia e Ensaios).

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. **RPM**, n. 45, p. 1-9, 2001

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics.**1988. Disponível em: http://edumat.uab.cat/Diseo/Balacheff.pdf. Acesso em: 10/07/2013.

BALACHEFF, N. The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), **Mathematical knowledge:** Its growth through teaching. Dordrecht: KluwerAcademicPublishers, p. 175-192, 1991.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba em losalumnos de matemáticas.** Pedro Gómez (Trad.). Bogotá: Interlínea editores LTDA, 2000. 200p.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar editores, 1969. 141p. (Curso Moderno de Filosofia).

BAUCHSPIES, W. K.; RESTIVO, S. O Arbítrio da Matemática: Mentes, Moral e Número. **Bolema**. Ano 14, n.16, p. 102 – 124, 2001.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p.79-90. Rio Claro: UNESP, 2002.

BITTENCOURT, J. Sentidos da integração curricular e o ensino de matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais. **Zetetiké**, Campinas, FE/Unicamp, v.12, n.22, jul/dez, 2004, pp. 71-88.

BLOOR, D. **Conhecimento e imaginário social.** Marcelo do Amaral Penna-Forte (Trad.). 2 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009, 287p.

BOAVIDA, A. M. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. **Educação e Matemática**. n. 63, 2001.

BOAVIDA, A.M. **A argumentação em Matemática:** Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração (Dissertação de doutoramento). Lisboa: APM, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo/SP: Edgard BlücherLtda, 1999. 496p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN+). Disponível em:http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 05 fev. 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 04 fev. 2014

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB).**Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Matemática. Brasília, 2007 a. 152 p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB).**Guia de livros didáticos PNLD 2011**: Matemática. Brasília, 2010 a. 96 p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (SEB).**Guia de livros didáticos PNLD 2012**: Matemática. Brasília, 2011. 104 p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**.http://www.seduc.ro.gov.br/portal/legislacao/RESCNE007_2010.pdf. Acesso em: 04 fev. 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&id=12992. Acesso em: 04 fev. 2014

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, 2013. 542p.

BRASIL, Ministério da Educação. **Edital de convocação para inscrição no processo de avaliação e seleção de obras didáticas para o programa nacional do livro didático PNLD 2012 – Ensino Médio.** Disponível em: file:///C:/Users/User/Downloads/edital_pnld_2012_ensino_medio_retificado.pdf, Acesso em: 07mar. 2014.

BROWN, J. R. Proofs and Pictures. **The British Journal for the Philosophy of Science**, 48, p. 161-180, 1997.

CARDOSO, V. C. **A cigarra e a formiga:** uma reflexão sobre educação matemática brasileira na primeira década do século XXI. 2009. 212p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CARLOVICH, M. **A Geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. 2005. 140 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2005.

CARVALHO, J. B. P. de; WERNECK, A. P. L; ENNE, D. S.; COSTA, M. B. da C.; CRUZ, P. R. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. **Revista brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, set./dez. 2000.

CASSELMAN, B. Pictures and Proofs. **Notices of the AMS**, v. 47, n. 10, pp. 1257 – 1266, 2000.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria &Educação.** Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa** — FEUSP, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

DASSIE, B. A. **Euclides roxo e a constituição da Educação Matemática no Brasil. 2008.** 273p. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC–Rio), Rio de Janeiro, 2008.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. Demonstrações. In: ___________. **A experiência matemática**. Tradução de João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985, p. 178-182.

DE VILLIERS, M. D.. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. Educação e Matemática, n. 63, p. 31-36, jun. 2001. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofc.pdf>. Acesso em: 15 set. 2006.

DEMONSTRAÇÃO. In: DICIONÁRIO Michaelis. Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=demonstra%E7%E3o. Acesso em: 22 de mar. 2014.

DEMONSTRAÇÃO. In: DICIONÁRIO Aurélio. Disponível em: http://www.dicionariodoaurelio.com/Demonstracao.html. Acesso em: 22 de mar. 2014.

DOMINGUES, H. H. **A demonstração ao longo dos séculos.** BOLEMA, Rio Claro: Unesp, ano 15, n. 18, p. 46- 55, 2002.

D'OTTAVIANO, Ítala Maria L.; FEITOSA, Hércules de Araújo. **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não clássicas.** Disponível em: <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2014.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Irineu Bicudo (Trad.). 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2004.

FARIA, M. C. B. **Aristóteles:** a plenitude como horizonte do ser. São Paulo: Moderna, 1994.

FERREIRA, R. C. **Orientações curriculares para o ensino de geometria: do período da Matemática Moderna ao momento atual**. 2008. 316p. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FETISSOV. A. I. **A demonstração em geometria**. 1. ed. São Paulo: Atual Editora, 1994. 74 p. (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké.** Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, p. 1-36, 1995.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de conteúdo**. 3. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2008. 80 p. (Série Pesquisa, 6).

FREITAG, B.; MOTTA, V. R.; COSTA, W. F. **O livro didático em questão**. 1 ed. São Paulo: Cortez, 1989.

FOLINA, J. Pictures, Proofs, and ‘Mathematical Practice’: Reply to James Robert Brown. **The British Journal for the Philosophy of Science**, v.50, p. 425-429, 1999.

FOSSA, J. **Introdução as técnicas de demonstração na matemática.** 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 150p. .

GARBI, G. G. **C. Q. D.**: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. 258 p. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Teóricos-Filosóficos) - Instituto de Geociências e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. Zetetiké, v.4, n.5, p. 7-28, 1996.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: Um ensaio. **BOLEMA**, n. 18, p. 91-122, 2002.

GARNICA, A. V. M., OLIVEIRA, F. D. Manuais didáticos com forma simbólica: questões iniciais para uma análise hermenêutica. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 26, n.1, p. 31-43, jan./jun. 2008.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. Meaning of proofs in mathematics education. **Lahti**, Finland, p. 1-7, 1997.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de doutorado, Programa de Pós-graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, 2001.

GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito:** o lado humano das matemáticas, 1ed. Gradiva, 1987.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**, 21, (1), p. 6-13, 1990.

KLISINSKA, A. **The Fundamental Theorem of Calculus: a case study into the didactic transposition of proof .** Tese (Doutorado), Luleå University of Technology, 2009.

LIARD, L. **Lógica**. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1971, 211p.

LORENZATO, S.; VILA, M. do C. Século XXI: qual Matemática é recomendável? **Zetetiké** Campinas/SP, v. 1, n.1, p. 41-49, 1993.

LORENZATO, S. Desafios do contemporâneo que não é novo. **Educação Matemática em Foco,** Campina Grande: EDUEPB, v. 1, p. 9-32, 2012.

LOUREIRO; BASTOS, **Demonstração – uma questão polêmica**, 2002.

MACHADO, N. J; CUNHA, M. O. da. **Lógica e linguagem cotidiana** – Verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2.ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008, 128p. (Coleção Tendências em educação matemática).

MACHADO, N. J. Sobre livros didáticos – quatro pontos. **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996 p. 30-38.

MANTOVANI, K, P. **O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD:** impactos na qualidade do ensino público. 2009. 126p. Dissertação (Mestrado em Geografia Humana), Departamento de Geografia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

MARIOTTI, M.A., BALACHEFF, N., Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. **ZDM Mathematics Education**. v.40, n.3, p. 341-344. 2008.

MARQUES, A. S. **Tempos pré-modernos:** a matemática escolar do anos 1950. 2005. 161p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MARTINS, R. B. **Argumentação, prova e demonstração em geometria**: análise de Coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. 2012. 109 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

MATOS, J. M; SILVA, M. C. L. da. O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal**. BOLEMA**, Rio Claro, v. 24, nº 38, p. 171-196, 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-posições**, Campinas, v.3, nº1(7), p. 39-54, 1992.

MIORIM, M. A. **O ensino de matemática:** evolução e modernização. Tese (Doutorado em Educação, Área de Concentração: Metodologia de Ensino) - Faculdade de Educação. UNICAMP, 1995.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A. (Org.); **VILELA, D.** (Org.). **História, filosofia e educação matemática**. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010. 298p.

MLODINOW, L. O manifesto de Euclides. In: **_______**. **A janela de Euclides**. Geração editorial, 2004. p. 39-47.)

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do Professor:** formação na Licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. 195p. Tese (Doutorado em Conhecimento e Inclusão Social) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetike**, v.11, n.19, pp. 57-80, 2003.

MOREIRA, P.; CURY, H.; VIANNA, C. Por que análise real na licenciatura? **Zetetiké**, v. 13, n. 23, jan.-jul. 2005.

MOTTA, C. D. V. B. **Concepções de Demonstrações em Livros Didáticos de Matemática das Séries Finais do Ensino Fundamental à partir do Movimento da Matemática Moderna**. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicação_Científica/Trabalhos?CC03198655846aT.doc. Acesso em: 20 jun. 2014.

MOURA, M. O de. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D; CARVALHO, A. M. P de (org.) **Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média**. 1. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. Cap. 8, p. 143-162.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, SBEM São Paulo, v. 9, n.9 e 10, p. 1-6, 2005.

NAGAFUCHI, T. **Um estudo historio-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática**. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

OLIVEIRA, F. D. **Análise de textos didáticos:** três estudos. 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em Geometria:** uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional e Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2010.

PAIS, L. C. **Ensinar e Aprender matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 152p.

PAIS, L. C. Argumentação no estudo da geometria nos anos finais do ensino fundamental: livros didáticos e formação de professores. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, nº 10, 2010, Salvador, **Anais X ENEM**. Salvador: SBEM, 2010, p. 1-19.

PARDIM, Carlos Souza. **Orientações Pedagógicas nas Escolas Normais de Campo Grande:** um olhar sobre o manual Metodologia do Ensino Primário, de Theobaldo Miranda Santos. 2013. 124f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra (CCET), Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria:** uma visão histórica. 1989, 196 p. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PIETROPAOLO, R.C. **(Re)significar a demonstração nos currículo da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PIMENTEL, G. H. **A história da geometria nos livros didáticos e perspectivas do PNLD**. 2014. 139p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

PINHEIRO, N. V. L. ; VALENTE, W. R. . Romper com a tradição e instalar o ensino intuitivo de matemática: os documentos dos arquivos da pioneira Escola Americana. In: **VII Congresso Brasileiro de História da Educação**, 2013, Cuiabá. Circuitos e Fronteiras da História da Educação no Brasil. São Paulo: Sociedade Brasileira de história da Educação, 2013. v. 01.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA),** Rio Claro, v. 21, nº 29, p. 13 - 42, 2008.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M; ABRANTES, P. A natureza da matemática In: __________. **Didática da Matemática**. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento do ensino secundário, 1997. 134p

POPKEWITZ, T. S. História do Currículo, Regulação Social e Poder. In: SILVA, T. T. da. **O sujeito da Educação**. 8. ed. Petrópolis: Vozes. 2008, p. 173 - 210.

PROVA. In: DICIONÁRIO Aurélio. 2004, Disponível em: http://www.dicionariodoaurelio.com/Demonstracao.html. Acesso em: 22 de mar. 2014.

PROVA. In: DICIONÁRIO Michaelis. 2004, Disponível em: http://www.dicionariodoaurelio.com/Prova.html. Acesso em: 22 de mar. 2014.

RAMA, A. J. **Números inteiros no ensino fundamental e médio**. 2005. 196p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

REALE, G. A fundação da lógica. In: _____. **Aristóteles**. 1. ed. Edições Loyola, 2007. p. 141 – 162.

RODRIGUES, M. **A demonstração na prática social da aula de matemática.** 2008. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

RODRIGUES, M. O papel das funções da demonstração no desenvolvimento dos esquemas demonstrativos dos alunos. **Investigação em Educação Matemática**, 2013, p. 438-456.

RODRIGUES, M. O papel da particularização no processo de demonstrar. In: H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (Orgs.), **Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2010, p. 330-340.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512p.

SANTOS FILHOS, J. C; GAMBOA, S. S**. Pesquisa educacional:** quantidade-qualidade. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2002. 112p.

SERRALHEIRO, T. D. **Formação de professores:** conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, J. R. S; ALMEIDA, C. D; GUINDANI, J. F. **Pesquisa documental:** pistas teóricas e metodológicas. Revista Brasileira de História e Ciências Sociais. Ano I número I. Julho de 2009 – ISSN: 2175 – 3423. Disponível em: <www.**rbhcs**.com>. Acesso em 04/05/2013.

SILVA, T. T. P. da. Matrizes e suas cercanias: um estudo histórico a partir de livros didáticos de matemática. In: **X Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2010, Salvador. Anais do VIII ENEM. Salvador: Editora da SBEM-Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. v. 1. p. 1-6.

SOUSA, M. C. **A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da delegacia de ensino de ITU, do movimento matemática moderna e de sua influência no currículo atual.** 1999. 184p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1999.

TEIXEIRA, B. B. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Plano Nacional de Educação e a Autonomia da Escola**. In: 23ª Reunião Anual da ANPED, 2000, Caxambu - MG. Anais da 23ª Reunião Anual da ANPED. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2000. v. 1. p. 198-199.

THOMPSON, J. B. **Ideologia e cultura moderna:** teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. 6. ed. Petrópolis: Editora vozes, 1999, 427p.

VALENTE, W. R. Livros didáticos de Matemática e as Reformas Campos e Capanema. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: Editora da SBEM-Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. v. 1. p. 1-15.

VALENTE, W. R. A matemática na escola: perspectivas históricas. In: **III Congresso Brasileiro de História da Educação**, 2004, Curitiba, PR. A Educação Escolar em perspectiva histórica. São Paulo: Editora da SBHE, 2004. v. 1. p. 1-1.

VALENTE, W. R. **A matemática do ginásio: livros didáticos e as reformas Campos e Capanema**. São Paulo: GHEMAT - FAPESP, 2005 (Texto em CD-ROM)

VALENTE, W. R. De Lysimaco da Costa a Euclides Roxo: a construção de um ideário para organizar os ensinos de matemática numa única disciplina escolar. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, p. 75-86, 2008.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional (PUCPR)**, v. 8, p. 583-613, 2008.

VALENTE, W. R. A Matemática do ensino secundário: duas disciplinas escolares?. **Revista Diálogo Educacional (PUCPR. Impresso)**, v. 11, p. 645-662, 2011.

VIANNA, C. C. de S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da Matemática**.1988. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

VILELA, D. S. **Conteúdo e Método de Os Elementos**. (prelo)

VILELA, D. S. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem:** ampliando concepções na Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Campinas – UNICAMP, Campinas, 2007.

VILELA, D. S. Conceitos da Filosofia de Wittgenstein e o programa etnomatemático. **Quadrante**, Lisboa, v. XVII, p. 3-22, 2008.

VILELA, D. A Sociologia da Ciência e a Educação Matemática: considerações preliminares. In: **IX Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste**, 2009, São Carlos. Pesquisa em educação no Brasil: balanço do século XX e desafios para o século XXI. São Carlos: UFSCar, 2009. v. 1.

VILELA, D; DORTA, D. A. O que é "desenvolver o raciocínio lógico"? Considerações pedagógicas a partir do livro Alice no país das maravilhas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 91, p. 634-651, 2010.

VILELA, D. S. A terapia filosófica de Wittgenstein e a Educação Matemática. E**ducação e Filosofia Uberlândia**, Uberlândia, v. 24, n. 48, p. 435-456, 2010.

VILELA, D. S.; MENEGHETTI, R. C. G. Transposição didática ou práticas matemáticas específicas? O caso do número ordinal e cardinal. **Educação Matemática Pesquisa (Online)**, v. 13, p. 179-196, 2011.

VILELA, D. **Usos e Jogos de Linguagem na Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013, 349p.

VILELA, D. S.; ANDRADE, A. H. N de. Um diálogo entre a sociologia da ciência e a educação matemática: a simetria e questão dos significados na matemática escolar. In: SILVA, C. C; PRESTES, M. E. B. **Aprendendo ciência e sobre sua natureza:** abordagens históricas e filosóficas. 1. ed. São Carlos: Tipographia, 2013.

VILELA, D. S; DEUS, K. A. Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. **Revista Horizontes**, v. 32, n. 2, p. 63-76, jul./dez.2014.

WOLFF, F. **Ciência aristotélica e matemática euclidiana**. In: Analytica, Revista de Filosofia, 2004, v.8, n.1, p. 43 – 88.

1. Livros didáticos analisados

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**. 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade**. 6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PROJETO ARARIBÁ. **Matemática**. 5ª à 8ª série do Ensino Fundamental. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2006.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática**. 1º ao 3º ano do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.