

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE

FÁBIO CÁCERES

O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA: POSSÍVEIS
CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA

SOROCABA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE

FÁBIO CÁCERES

O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA: POSSÍVEIS
CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA

Fábio Cáceres

ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
EXATAS - PPGECE

FÁBIO CÁCERES

O ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA: POSSÍVEIS
CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

C118eg

Cáceres, Fábio.

O ensino de geometria euclidiana : possíveis contribuições da história da matemática e da resolução de problemas de George Polya / Fábio Cáceres. -- São Carlos : UFSCar, 2015.

137 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Geometria euclidiana. 2. Resolução de problemas. 3. Matemática - história. 4. Geometria plana. 5. Pólya, George, 1887-1985. I. Título.

CDD: 516.2 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fábio Caceres, realizada em 08/05/2015:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
UNISO

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu pai, Florival Cáceres, *in memoriam*, a minha mãe Roseli, a minha companheira Ana Paula e aos meus filhos Caio e Mariana.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar o meu sincero agradecimento a todos aqueles que permitiram a realização deste trabalho, dentre os quais não poderia deixar de destacar os meus orientadores.

Ao Prof. Dr. Pedro Malagutti, que acreditou em mim no momento da entrevista, concedendo-me a oportunidade de ingressar neste programa de Mestrado e dando-me todo apoio necessário ao longo deste conturbado trajeto.

Ao Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr., agradeço pela colaboração na definição do tema desta dissertação e pela leitura criteriosa da primeira versão da mesma.

Ao Prof. Dr. Paulo César Oliveira, que assumiu a orientação deste trabalho, sob sua pena e risco, e devolveu a esperança a este professor de Matemática, tão estressado com o ensino e aprendizagem desta disciplina. Agradeço o seu incentivo e profissionalismo, dando-me oportunidade de concretizar essa etapa de minha formação profissional.

Aos companheiros de trabalho do Colégio Bandeirantes, Mário Abondatti, Manoel Rodrigues, Carlos Oliveira e Rosana Alves, que me ajudaram de alguma forma na concepção e elaboração desta dissertação.

A minha família, esposa e filhos, pelo carinho e apoio constantes na minha vida pessoal, acadêmica e profissional, o que me permitiu galgar esse patamar de conhecimento.

Aos meus amigos e colegas de turma da UFSCar, Jonas, Jair, Juliana, Natália, Kátia, Sara, Marcos, Donizetti, Miguel, Tiago, Valéria em especial ao Michel, que de alguma forma contribuíram para que eu tivesse êxito nesta empreitada, o meu muito obrigado.

Um agradecimento especial a minha mãe, que revisou e fez observações importantes no meu texto, sempre disposta a colaborar. E sempre quando pensei em desistir diante das adversidades, me incentivou a terminá-lo.

RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é avaliar as possíveis contribuições que a História da Matemática e a Teoria de Resolução de Problemas de George Polya, aliadas, podem oferecer ao processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos da Geometria euclidiana plana visando, principalmente, a despertar o raciocínio lógico, a percepção visual e o pensamento geométrico do aluno concluinte do ensino fundamental. A pesquisa foi motivada pela necessidade de uma abordagem mais prática e realista dos conceitos geométricos. De acordo com este propósito, foi construída uma sequência didática e aplicado um questionário a sujeitos previamente selecionados, envolvendo um problema histórico não rotineiro, desafiador, de modo a levar os alunos à solução histórica ou a outra(s), com a ajuda do professor e da heurística de Polya. Buscamos responder à questão: que saberes são produzidos por alunos envolvidos em tarefas matemáticas inseridas no contexto histórico? Por meio dos registros escritos dos alunos, constatamos a aquisição de saberes de natureza geométrica como visualização, representação e ampliação do vocabulário matemático quanto ao uso de termos geométricos adequados.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino Fundamental, Geometria Euclidiana plana, História da Matemática, Resolução de Problemas, Aqueduto de Eupalinos.

ABSTRACT

The primary goal of this dissertation was to evaluate possible contributions that History of Mathematics and Theory of Problem Solving, by George Polya, allied, can offer to the teaching and learning process of some concepts of plane Euclidean geometry, primarily aiming at awakening logical reasoning, visual perception, and geometric thinking of students completing Primary Education. The research was motivated by the need for a more practical, realistic approach of geometry concepts. According to such purpose, a didactic sequence was built and a questionnaire was completed by subjects previously selected, involving a historical, non-routine, challenging problem, in order to lead the students to the historical solution or to other one(s), with the help from the teacher and Polya's heuristics. We sought to answer the following question: what knowledge is produced by students involved in mathematical tasks inserted in the historical context? In the written records of students we found knowledge of geometric nature, such as visualization, representation, and broadening of mathematical vocabulary regarding use adequate geometric terms.

KEYWORDS: Primary Education, Plane Euclidian Geometry, History of Mathematics, Problem Solving, Aqueduct of Eupalinos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Aqueduto no interior do Monte Castro, Ilha de Samos	51
Figura 2: Localização geográfica da Ilha de Samos	52
Figura 3: Triângulos retângulos semelhantes (caso LAL)	52
Figura 4: Triângulos retângulos semelhantes com as hipotenusas colineares	53
Figura 5: Túnel de Eupalinos na ilha de Samos	54
Figura 6: Contorno do Monte Castro e linha poligonal BCDEFGHA	55
Figura 7: Determinando a direção de escavação	56
Figura 8: Diferença de nível (d)	57
Figura 9: Controle da inclinação da escavação	57
Figura 10: Esquematizando o problema	62
Figura 11: Problema correlato: Como calcular a distância entre os pontos A e B?	63
Figura 12: Apresentando técnica usada por topógrafos	63
Figura 13: Determinando a distância entre os pontos A e B	64
Figura 14: Linha poligonal AEDCB	65
Figura 15: Determinando o triângulo retângulo AFB	65
Figura 16: Determinando a direção do túnel	66
Figura 17: Outra possível solução para o problema proposto	67
Figura 18: Determinando a direção da escavação	70
Figura 19: O grupo 1 simula a montanha	81
Figura 20: O grupo 2 simula a montanha	81
Figura 21: O grupo 3 simula a montanha	81
Figura 22: Contorno da montanha (a)	84
Figura 23: Contorno da montanha (b)	85
Figura 24: Contorno da montanha (c)	85
Figura 25: Averiguando a hipótese do aluno	89
Figura 26: Transportando ângulos	89
Figura 27: Paralelogramo de Bi (a)	90
Figura 28: Paralelogramo de Bi (b)	91

Figura 29: Paralelogramo de Bi (c).....	91
Figura 30: Revisitando um problema de Desenho Geométrico.....	92
Figura 31: Obtendo o triângulo retângulo	93
Figura 32: Resolução apresentada pelo aluno do Ensino Médio	94
Figura 33: Esquemmatizando a resolução o aluno do Ensino Médio	95
Figura 34: Resultado final do grupo 1	97
Figura 35: Resultado final do grupo 3 – as escavações não se encontram	98
Figura 36: Discutindo as causas do desvio	98
Figura 37: Resultado final do grupo 2	99

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1. A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA	18
1.1. Objetivo da pesquisa	18
1.2. A construção do problema de pesquisa	21
1.3. O tratamento escolar da Geometria	25
2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	30
2.1. George Polya e suas contribuições pedagógicas	30
2.2. A resolução de problemas nos documentos curriculares	39
2.3. Potencialidades da História da Matemática na aprendizagem	43
2.4. A História da Matemática nos documentos curriculares	48
3. A CONSTRUÇÃO DO AQUEDUTO DA ILHA DE SAMOS POR EUPALINOS	51
3.1. O túnel de Samos	51
3.2. Perspectiva utilitarista da Matemática	58
3.3. O problema da construção do aqueduto	60
4. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA	71
4.1. O contexto escolar da pesquisa	74
4.2. A formulação do problema do aqueduto no contexto escolar	77
4.3. A resolução do problema do aqueduto na perspectiva de George Polya..	78
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	110
7. ANEXOS	112

EPÍGRAFE

“(...) melhor do que o estudo do espaço, a Geometria é a investigação do “espaço intelectual” já que embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido”. (WHEELER, 1981, p.352)

“Do mesmo modo que a presença de ferramentas não faz do homem um artesão, a acumulação de conhecimentos não faz um matemático. Muito mais importante é saber utilizá-los. É precisamente por isso que é tão importante resolver problemas”.

Alberto Pedro Calderón (1920-1998)

INTRODUÇÃO

“O conhecimento tornou-se, hoje mais do que no passado, um dos principais fatores de superação das desigualdades, de agregação de valor, de criação de emprego qualificado e de propagação do bem-estar” (Takahashi, 2000, Apresentação, p. V). Com estas palavras, Takahashi (2000) inicia a apresentação de seu livro *A Sociedade da informação no Brasil*. Atualmente ele é professor da Universidade de Brasília (UnB) e coordenador do Núcleo de Estudos do Futuro (n-FUTUROS), do Ministério da Ciência e Tecnologia, que tem o objetivo de reunir e desenvolver ações em inovação que integrem o conhecimento acadêmico à sociedade, além de antever e planejar cenários, de acordo com o *site* da Universidade de Brasília. Cenários futuros que envolvem tecnologia, educação e sociedade.

Valente (1999) parte de observações das mudanças nos processos produtivos, notadamente do modelo fordista para um modelo de produção de uma sociedade que ele qualifica de “enxuta”, aborda a quebra de paradigma da educação em nossos dias. Falando do novo profissional resultante dessa mudança de paradigma, alerta para a necessidade de novas habilidades. Segundo ele:

O profissional da sociedade “enxuta” deverá ser um indivíduo crítico, criativo, com capacidade para pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo, de utilizar os meios automáticos de produção e disseminação da informação e de conhecer seu potencial cognitivo, afetivo e social. (VALENTE, 1999, p.30)

Partindo do pressuposto de que com esse novo paradigma e com os avanços tecnológicos da atual sociedade a escola necessita se adequar, capacitando seus estudantes para esse novo mundo que os espera, Abbondati (2012) cita Pereira (2011, p.13):

Formar cidadãos preparados para o mundo contemporâneo é um grande desafio para quem dimensiona e promove a educação. Em plena Era do Conhecimento, na qual inclusão digital e Sociedade da Informação são termos cada vez mais frequentes, o ensino não poderia se esquivar dos avanços tecnológicos que se impõem ao nosso cotidiano. (apud ABBONDATI, 2012, p.33)

Na realidade, à medida que o cidadão se apropria cada vez mais de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, percebemos o real papel *do*

ensino de Matemática como componente importante na construção da cidadania. A esse respeito, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – PCN (Brasil, 1998) destaca-se que a Matemática como prática escolar pode contribuir para que toda criança e jovem brasileiro tenha acesso ao conhecimento matemático que viabilize de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc. (BRASIL, 1998, p.27)

Nos PCN destaca-se a importância do aluno valorizar a Matemática como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destaca-se a importância do aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções.

O significado da atividade Matemática para o aluno, futuro cidadão, será tanto mais significativa quanto mais conexões o aluno estabelecer entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano. E das conexões que ele perceber entre os diferentes temas matemáticos. O resultado será o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade argumentativa, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

O aluno, ao relacionar ideias Matemáticas entre si, pode chegar a identificar princípios, padrões gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão, e perceber que o processo de estabelecimento de analogias, indução e dedução estão sempre presentes em nosso raciocínio. (BRASIL, 1998, p.37)

Concordamos com Polya (1978, p.29) que “a analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como o modo de expressão artística, e as mais elevadas conclusões científicas”. A analogia faz parte do processo de descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhuma delas.

Mas como chegar a esses resultados? Essa inquietação é de um professor que há vários anos leciona Geometria e enfrenta dificuldades para motivar e levar seus alunos a gostar de Matemática e a “aprender a aprender”, e que busca selecionar métodos adequados de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Para responder esta pergunta, nos propusemos a fazer esta pesquisa que, de um lado, destaca a necessidade pedagógica da História da Matemática como fator de contextualização dos conteúdos e, de outro, coloca a resolução de problemas como suporte didático eficiente para a aprendizagem da Matemática.

Passamos agora a descrever como este trabalho está estruturado.

Na *Introdução*, destacamos a necessidade de o ensino de Matemática se adequar à demanda de uma sociedade cada vez mais complexa.

No capítulo I, *A formulação do problema de pesquisa*, discorremos sobre aspectos do processo ensino-aprendizagem de Matemática, em especial o de Geometria, que nos instigaram a estudar a atual problemática de pesquisa que concilia a História da Matemática com a perspectiva de resolução de problemas proposta por George Polya.

No capítulo 2, *Resolução de problemas e História da Matemática*, vamos explicar a forma de resolver problemas proposta por George Polya, usando, como exemplo, a construção do aqueduto da ilha de Samos. Neste capítulo, apesar de alguns documentos curriculares como os PCN citarem a concepção da resolução de problemas, na verdade não são apontados os procedimentos de sua metodologia. Ainda neste capítulo, abordamos o uso da História da Matemática como procedimento metodológico no processo ensino-aprendizagem.

No capítulo 3, *A construção do aqueduto da ilha de Samos por Eupalinos*, abordamos um problema histórico que ocorreu há mais de 2500 anos, na ilha grega de Samos, quando a Geometria plana euclidiana foi usada para resolver um problema prático da comunidade: levar água através de um

aqueduto para o outro lado da ilha, atravessando uma montanha. Falaremos deste e de outros casos em que a Matemática foi usada numa perspectiva utilitarista e apresentaremos a solução do problema da construção do aqueduto dada por Eupalinos.

No capítulo 4, *Percurso metodológico da pesquisa*, aplicamos a metodologia qualitativo-interpretativa, com os alunos, na reprodução do problema de Eupalinos, para consubstanciar nossa crença de que as metodologias que analisamos, associadas a uma nova postura do professor e do aluno, levarão ao sucesso da empreitada. Justificamos a escolha da escola e da turma de alunos, bem como detalhamos a estrutura escolar. Descrevemos o passo a passo da aplicação da sequência didática e, por fim, o que se esperava dos alunos e o que eles efetivamente apresentaram.

Por último, temos as *Considerações finais* deste relatório de pesquisa. Trata-se de um momento de resgate das intenções deste processo de investigação que culminou em resultados para a busca de resposta à questão de investigação. Não menos importante, dedicamo-nos, também, a apresentar possibilidades para futuras pesquisas e contribuições desta dissertação de Mestrado para o autor desta obra.

Reservamos neste processo de redação a apresentação das *referências bibliográficas* que subsidiaram esta pesquisa, assim como *anexos* que julgamos pertinentes ao nosso trabalho.

1. A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

Neste capítulo apresentamos ao leitor aspectos relevantes do processo ensino-aprendizagem da Matemática, a partir da perspectiva deste professor que, ao longo do seu processo de docência, foi se constituindo também pesquisador. Tais aspectos culminaram na apresentação dos objetivos, justificativa e formulação da questão de investigação desta pesquisa.

1.1 Objetivo da pesquisa

A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Depois do fracasso da Matemática Moderna¹, na década de 70, apareceram várias correntes educacionais como o Programa Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a História da Matemática e a Resolução de Problemas, que tinham um componente comum: a forte reação contra a existência de um currículo comum e a maneira imposta de apresentar a Matemática sob um único ponto de vista, como um conhecimento universal e caracterizado por divulgar verdades absolutas.

Além de perceberem que não havia espaço na Matemática Moderna para a valorização do saber que o aluno traz para a sala de aula, proveniente do seu cotidiano; educadores matemáticos, como Ubiratan D'Ambrósio e Antônio Miguel, voltaram seus olhares para outros saberes, como aqueles provenientes da atividade exercida pelo vendedor de rua, pedreiros, entre outros. Nessa linha, temos de falar do Programa Etnomatemática, com suas propostas para a ação pedagógica. Segundo esse programa, a Matemática não é uma ciência neutra, posiciona-se contra as orientações que a afastam dos aspectos socioculturais e políticos, o que a deixa atrelada apenas a sua própria dinâmica interna. Por outro lado, procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro

¹ A ideia central da Matemática Moderna é adaptar o ensino às novas concepções surgidas com a evolução desse ramo do conhecimento, o que significa trabalhar a Matemática do ponto de vista das estruturas.

do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática “procura entender a realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural”. (BRASIL, 1998, p.33)

Ubiratan D’Ambrosio utilizou em 1985, o termo Etnomatemática, no seu livro “Etnomathematics and its Place in the History of Mathematics”; cujo contexto é a História da Matemática. Este autor citou que em 1978 utilizou este termo numa conferência que pronunciou na Reunião Anual da Associação Americana para o Progresso da Ciência, que infelizmente não foi publicada. Em 1986, foi criado o Grupo Internacional de Estudo em Etnomatemática (IGSEm), congregando pesquisadores educacionais de todo o mundo que estavam, de alguma maneira, pensando nesta área do conhecimento e, principalmente, em como utilizá-la em sala de aula.

Já no primeiro Newsletter do IGSEm (Grupo Internacional de Estudo em Etnomatemática) de 1986, temos uma definição aproximada da Etnomatemática como a zona de confluência entre a Matemática e a antropologia cultural, mas ainda persistem as metáforas como Matemática-no-Contexto-Cultural ou Matemática-na-Sociedade.

Uma segunda maneira de ver a Etnomatemática é “como uma pesquisa em História da Matemática. Esta concepção tem seu lugar resguardado pela comunidade científica e há vários pesquisadores que estudam a Etnomatemática sob este ponto de vista”. (Ferreira, 2003, p.7) Também Brolezzi (1991) e Mendes (2001) assim o fazem.

A investigação histórica é tratada por Mendes (2001, p. 20) como sendo “[...] uma alternativa metodológica para que o ensino de Matemática comece a despertar o interesse dos educadores matemáticos preocupados com o processo de construção do conhecimento a partir da utilização da história como recurso para tal”. Nessa perspectiva, a História da Matemática pode servir para o professor abordar o ensino da Matemática de forma diferenciada, tornando sua aula atrativa e instigando o interesse dos estudantes em relação a esta disciplina.

A etimologia da palavra, segundo D'Ambrósio (2002), é a seguinte: **etno** é hoje aceito como algo muito amplo, referente cultural, e, portanto inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; **matema** é uma raiz grega de difícil interpretação, mas que aponta na direção de explicar, de conhecer, de entender; e **tica** vem sem dúvida de *techne* que é a mesma raiz grega de arte ou técnica.

Para D'Ambrosio (2002), a Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender os diversos contextos culturais. Assim, concebemos que tanto a História da Matemática quanto os estudos da Etnomatemática são importantes para explicar a dinâmica da produção desse conhecimento, numa perspectiva histórica-social.

A Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender os diversos contextos culturais. (D'Ambrosio, 2002) Como orientação educacional o autor expôs:

Ao se estudar a Matemática a partir de uma visão étnica, o professor deve observar e considerar o contexto social no qual o aluno está inserido, podendo assim estabelecer, a partir da realidade do aluno, os objetivos a serem alcançados com o ensino de determinados conceitos, a fim de que o aluno, ao finalizar seu processo educacional, esteja apto para atuar de forma significativa dentro da sua cultura. (D'AMBROSIO, 2002, p.17)

Um currículo matemático baseado na Etnomatemática busca levar esta disciplina ao alcance do aluno, ou seja, dentro da sua realidade, levando-o a uma aprendizagem significativa.

Resolução de problemas é um caminho para o ensino de Matemática que vem sendo discutido ao longo dos últimos anos.

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade Matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

Diante desses argumentos, o objetivo central desta pesquisa é analisar, discutir e avaliar as possíveis contribuições que a História da Matemática e a Resolução de Problemas podem oferecer ao processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos da Geometria euclidiana plana, visando, principalmente, à formação do raciocínio lógico, dedutível e geométrico do aluno concluinte do Ensino Fundamental, como veremos no capítulo 3.

Para que esse objetivo central possa ser alcançado, dois objetivos específicos foram fixados:

- Planejar uma sequência de atividades didáticas, baseada no episódio da construção do aqueduto da ilha de Samos por Eupalinos (530 a. C.), trabalhando com os conceitos geométricos envolvidos no processo;
- Avaliar qualitativamente o desempenho dos alunos que trabalharam os conceitos geométricos por meio da aplicação das tarefas, observação e descrição do comportamento dos sujeitos participantes.

O que se espera é que os alunos compreendam o problema e que, de posse dos dados e dos condicionantes, determinem a incógnita. É importante que eles desenhem a figura e adotem uma notação adequada. Em seguida, é necessário que consigam ter ideias e estabeleçam um plano. O passo seguinte é a execução do plano, a verificação se ele é exequível. Por último, deve-se examinar a solução obtida.

1.2 A construção do problema de pesquisa

Para cumprir todos os objetivos formulados para esta pesquisa, os alunos desenvolverão competências relacionadas com os conceitos de proporcionalidade geométrica e semelhança de figuras planas. Exercitarão aspectos reflexivos e operatórios próprios da Geometria euclidiana que promovem o exercício do raciocínio geométrico. Descontextualizarão o problema de Eupalinos para contextualizá-lo no ambiente escolar. Usarão a linguagem Matemática para configurar e montar o problema. Trabalhando em equipe, terão que se expressar e ouvir o outro, selecionar ideias, ativar e relacionar conhecimentos.

Mas, para que possamos avançar em termos do aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, temos que rever certas práticas:

Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. (BRASIL, 1998, p.37)

Por processo de ensino e aprendizagem tradicional de Matemática entendemos a prática em que o professor apresenta os conceitos aos alunos a partir de definições, exemplos e demonstração de propriedades, enquanto deles é simplesmente esperada a resolução de exercícios rotineiros de aprendizagem, de fixação e de aplicação imediata de fórmula, algoritmo ou propriedade apresentada.

Além disso, se na resolução das questões da "prova" os alunos reproduzirem de forma correta o que supostamente foi ensinado, então a aprendizagem ocorreu. Em outras palavras,

a concepção de ensino e aprendizagem subjacente é a de que o aluno aprende por reprodução/imitação. (...) o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. (BRASIL, 1998, p.32)

Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, eles enfatizam que o ensino de Matemática dará importante contribuição à formação da cidadania na medida em que a metodologia de trabalho utilizada em sala de aula pelo professor priorize

a criação de estratégias de resolução de problemas, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e propiciem a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p.27).

Por outro lado, a Matemática é avaliada pelos alunos como uma área de conhecimento importante, mas, paradoxalmente, frustra a nossa expectativa, como professores que somos dessa disciplina, diante dos resultados quase sempre negativos obtidos pelos mesmos alunos em relação à sua aprendizagem. Essa frustração mostra que há problemas crônicos a serem

resolvidos, a começar pela necessidade de mudarmos a forma de ensino centrada em procedimentos mecânicos e sem significado para o aluno.

É visível que a maioria dos estudantes comporta-se de maneira passiva. Esperam que o professor passe o conhecimento, resolva os problemas sem grandes questionamentos e, nas aulas de exercícios, repetem os mesmos procedimentos apresentados pelo professor. Essas e outras constatações levaram a reflexões que culminaram com as reformas educacionais brasileiras. As propostas curriculares elaboradas no período de 1980 a 1995 apontam a “importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento”. (BRASIL, 1998, p. 20)

A Matemática é sentida por esses alunos como uma ciência estática, porque ensinada de uma forma tradicional, sem a história que a contextualiza, sem o conhecimento da dinâmica da evolução do pensamento matemático. Acreditam que só pessoas extremamente inteligentes podem aprender Matemática; a forma como a Geometria é trabalhada, por exemplo, por meio de fórmulas e cálculos, não faz sentido para esses alunos.

Neste caso em particular, começamos a lecionar em cursos preparatórios para vestibular, cuja prática, como se sabe, é a mais tradicional possível, com o professor à frente da sala, explicando oralmente para alunos que ouvem passivamente. Ao passar a lecionar nos ensinos fundamental e médio em escola da rede privada, tivemos que nos adaptar e reconhecer que, agora, nosso papel como professor de Matemática era outro: deveríamos ser o mediador da aprendizagem dos alunos, deixar que eles assumissem o lugar de protagonistas do seu aprendizado, organizar a aprendizagem de modo que eles fossem agentes da construção do seu próprio conhecimento.

A partir da opção de enriquecer as aulas com uma visão histórica da Matemática, pudemos reconhecer que obstáculos vividos por matemáticos do passado podem revelar algumas dificuldades que os alunos têm para resolver problemas semelhantes.

Com a finalidade de aprimorar a prática pedagógica, recorreremos à História da Matemática com o propósito de abandonar a prática dita tradicional,

centrada no professor e no livro didático, e buscamos uma aprendizagem significativa, em que os conhecimentos que o aluno traz são valorizados e ele é o personagem principal na construção de novos conhecimentos.

Numa perspectiva de trabalho em que se considere a criança como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher o(s) problema(s) que possibilita(m) a construção de conceitos/procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 1998, p.38)

Não foi fácil fazer essa transição, mas com algumas leituras, muitas reuniões pedagógicas e, principalmente, com a prática dos professores mais experientes, com os quais trocamos ideias e experiências na sala dos professores, podemos, hoje, auxiliar nossos alunos a conquistar autonomia intelectual. Com o aporte da História da Matemática, trabalhamos com exemplos clássicos de resolução de problemas, selecionados de modo a motivar os alunos, e possibilitar a construção de conceitos e procedimentos, pois o método da heurística de Polya desenvolve seu raciocínio lógico. De acordo com nossos objetivos, facilitamos a aprendizagem dos alunos, obtendo mais participação de todos, criatividade e autoconfiança.

Na maioria das vezes, o ensino da Matemática é descontextualizado. Ensina-se a “Matemática pela Matemática”, e se insiste, sem sucesso, na reprodução de procedimentos e na acumulação de informações. No entanto, sabe-se que as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência prática, que os ajudam a reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, além de contribuir na tomada de decisões.

Não se deve abandonar, entretanto, a contextualização interna da própria Matemática, articulando os conceitos nas várias áreas da disciplina.

Com esta pesquisa objetivamos, em última análise, explorar meios que favoreçam a participação do aluno como sujeito na construção de seu conhecimento matemático, especificamente quanto à Geometria plana euclidiana, aproximando-a da realidade do aluno por meio da resolução de

problemas históricos, a fim de que o aluno perceba a Matemática como parte de sua vida.

O planejamento de tarefas envolvendo o contexto histórico buscou responder a seguinte questão de investigação: **que saberes são produzidos por alunos envolvidos em tarefas Matemáticas inseridas no contexto histórico?**

O conteúdo das tarefas teve o propósito de contemplar:

- A ampliação do conceito de semelhança de triângulos;
- O estabelecimento da relação entre o triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras;
- O estabelecimento da relação entre a História da Matemática e a resolução de problemas;
- O aprimoramento do raciocínio visual;
- O desenvolvimento e aplicação da linguagem Matemática;

1.3 O tratamento escolar da Geometria

Antes de discorrermos sobre a importância do ensino de Geometria, vejamos os objetivos dessa disciplina no Ensino Fundamental. No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a

- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
- estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução (BRASIL, 1998, p.64).

E no quarto ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais (BRASIL, 1998, p.81).

O conhecimento da Geometria desenvolve o pensamento geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, dificilmente as pessoas conseguirão enfrentar situações de ordem prática que forem geometrizadas; também não compreenderão e resolverão questões de outras áreas do conhecimento humano sem ela. Sem saber Geometria, a leitura do mundo torna-se de difícil interpretação, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática, distorcida, conforme explica Lorenzato (1995).

A Geometria está presente na vida das pessoas, no seu dia a dia. Seja nas embalagens dos produtos, na arquitetura das casas e edifícios, na planta dos terrenos, nas coreografias das danças, entre muitas outras coisas, e até mesmo no desenho das letras.

Mesmo sem perceber, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral. Estamos irremediavelmente envolvidos com e pela Geometria.

Percebe-se, desse modo, a importância de trabalhar esse tema no Ensino Fundamental, e compartilhar essa visão de Geometria com os alunos.

Na pesquisa empreendida por Pavanelo (1989), a autora salientou que há necessidade de cultivar e desenvolver o pensamento visual, dominante na Geometria, assim como o sequencial, preponderante na Álgebra, pois ambos são essenciais à educação Matemática. A prioridade dada ainda recentemente à Álgebra, tanto na pesquisa como no ensino da Matemática, acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento.

Segundo Pavanello (1989, p.182):

Mas a contribuição que o ensino de Geometria pode dar à formação do aluno não se restringe apenas ao desenvolvimento da percepção espacial. A Geometria apresenta-se como um terreno fértil para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível, que é um dos objetivos do ensino da Matemática, oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados.

É necessário restabelecer esse equilíbrio, retomando-se o ensino da Geometria, no que concordamos totalmente com a pesquisadora citada. É por compartilhar esse pensamento com Pavanello (1989), que investimos na construção e no desenvolvimento do raciocínio visual, propondo para os alunos a elaboração de um projeto em que eles possam planejar, construir e avaliar a viabilidade do mesmo, fundamentados em conceitos básicos da Geometria elementar (euclidiana), vislumbrando a noção de semelhança de triângulos.

Ao final da tarefa, resolvido o problema, os alunos devem fazer um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até ele. Dessa maneira, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. E, ao final, devem adquirir muita experiência pelo trabalho independente, enquanto que a participação do professor deve ser natural, deve se pautar por intervenções na hora certa, colocando-se no lugar do aluno e percebendo seu ponto de vista.

Por fim, os alunos podem trocar suas experiências e auditar as soluções encontradas pelos outros grupos. Segundo Polya (1978, p.10), “um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer”.

Escolhemos trabalhar com o problema do aqueduto de Eupalinos, por se tratar de um problema histórico e clássico de Geometria plana euclidiana para abordar a semelhança de triângulos e trabalhar a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades, bem como a aplicação do teorema de Pitágoras.

O conceito de semelhança é valorizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tanto na perspectiva de aplicabilidade quanto no processo ensino-aprendizagem, pois o mesmo

está presente no estudo de escalas, plantas, mapas, ampliações de fotos e fotocópias.

Esse conceito poderá ser desenvolvido e/ou aprofundado também pela análise de alguns problemas históricos, como os procedimentos utilizados pelos antigos egípcios para determinar a altura das pirâmides. Outras fontes interessantes de problemas são as que envolvem a noção de semelhança de triângulos e as medidas de distâncias inacessíveis. (BRASIL, 1998, p.125)

No entanto, esta abordagem experimental da Geometria não é primordial na prática docente. No caso deste professor-pesquisador, muitas vezes propomos a resolução de exercícios rotineiros com os alunos com base na apresentação dos temas geométricos a partir da axiomática euclidiana, sem criar um espaço de exploração dos conceitos e definições envolvidos.

De modo geral, um problema será considerado rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pela reprodução, passo a passo, de algum exemplo repetidas vezes.

Segundo Polya (1978, p.124):

Ao apresentar um problema, o professor põe à frente do aluno uma resposta imediata e decisiva à indagação: *Conhece um problema correlato?* Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas.

Também é certo que na escola tradicional temos abandonado o uso de diversos materiais concretos, como figuras em papel, material manipulável, o pantógrafo entre outros, nas aulas de Geometria, o que nos tem levado ao ponto de recomendar o uso de ferramentas tão simples como a régua e o compasso.

Não só é pertinente voltar a utilizar estes recursos, como também devemos estar preparados para adotar as novas tecnologias, como os

programas de Geometria dinâmica que podem abrir um novo espaço de exploração tanto para docentes como para estudantes.

Uma das possibilidades é o uso do *software* GeoGebra, que possibilita a criação de atividades que estimulam o aluno a explorar conceitos e propriedades, por meio da manipulação de objetos. Dessa forma, permite que ocorra a aprendizagem, possibilitando a exploração da Matemática pelo aluno, que deixa de ser passivo, e passa a explorar, investigar e conjecturar.

Em resumo, acreditamos que os conceitos geométricos são conteúdos importantes no Currículo do Ensino Fundamental, com vistas a desenvolver o raciocínio matemático abstrato e porque, por meio deles, os alunos desenvolvem um tipo especial de pensamento que lhes permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vivem.

Escolhemos para esta pesquisa de Mestrado Profissional trabalhar o conceito geométrico da semelhança de triângulos pela aplicabilidade na engenharia, na arquitetura e em outras atividades e por ser um tema sempre atual. O que nos motivou sobremaneira foi conhecer problemas históricos de ordem prática que desafiaram o conhecimento do homem em determinados períodos sócio-históricos e que foram resolvidos sem recursos tecnológicos; pelo menos não com os que temos agora, mas com muita criatividade, utilizando o conceito de semelhança.

Ficamos instigados a experimentar junto com nossos alunos o método da resolução de problemas concebido por George Polya, de modo a promover a autonomia dos alunos e dinamizar a aula. Reforçamos esta motivação aliada à aplicação de um conceito geométrico no contexto de um problema histórico.

2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A metodologia de resolução de problemas adotada nesta pesquisa tem como fundamentação teórica as ideias de Polya (1978). Este autor ressaltou que procedimentos mecânicos e rotineiros de se conduzir a aula de Matemática podem diminuir o interesse dos alunos e dessa forma dificultar um desenvolvimento intelectual mais amplo.

As pesquisas mostram que muitos investigadores em Educação Matemática escrevem sobre Resolução de Problemas. Entendemos que o objetivo maior na resolução de problemas é aprender a aprender, portanto, dentre tantos autores, citaremos as ideias de Polya (1978) dada a relevância, reflexões e significados do presente tema no ensino da Matemática.

Do mesmo modo, o recurso à História da Matemática possibilita ao professor uma alternativa à prática de um ensino centrado em procedimentos mecânicos e sem significado para o aluno. Por meio da História da Matemática, os alunos conhecem as soluções que deram os antigos para seus problemas de ordem prática, importando o processo, ou seja, a sequência lógica que levou à solução daquele problema. Deste modo, explicita-se a conexão da Matemática com a realidade e evidencia-se a evolução do próprio pensamento matemático.

2.1 George Polya e suas contribuições pedagógicas

O trabalho de George Polya (1978) retoma a ideia da heurística, a arte da descoberta. Em seu livro *A arte de resolver problemas* (1978), Polya dedica o terceiro e mais longo capítulo a um Pequeno Dicionário de Heurística, e no verbete **Heurística**, lemos: “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção” (POLYA, 1978, p.86). Afirma ainda que seu livro é uma tentativa de reviver este estudo de forma moderna e modesta; e remete à **Heurística moderna**.

A Heurística moderna “procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que

tenham utilidade”, diz Polya (1978, p. 87). “A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística”, continua. E no mesmo parágrafo: “O estudo da Heurística tem objetivos ‘práticos’; melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas, pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática”.

Polya (1978) destacou que todos os tipos de problemas, especialmente **problemas práticos** e, até mesmo enigmas, situam-se no campo da Heurística. A Heurística tratou do comportamento humano em face de problemas. “É de presumir que isto venha ocorrendo desde os primórdios da sociedade humana e a quintessência de antigas observações a respeito parece ter sido preservada na sabedoria dos provérbios”. Por exemplo: “É mais seguro ancorar com dois ferros”, a respeito da verificação do resultado, enfatizando que é melhor dar duas demonstrações do que uma só. (POLYA, 1978, p.88)

Problemas práticos são diferentes, segundo Polya (1978), dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmos em ambos os casos. Os problemas práticos da Engenharia geralmente envolvem problemas matemáticos.

George Polya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a Matemática. Por isso, ele é considerado uma referência no assunto, uma vez que suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então.

Antigos matemáticos como Euclides e Pappus e mais recentes como Descartes, Leibnitz e Bolzano, discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em Matemática, mas suas ideias nunca tiveram grande eco nos currículos escolares. Ficou para Polya a tarefa de reformular, continuar e ilustrar várias ideias acerca da descoberta Matemática de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar (Stanic & Kilpatrick, 1990).

Para Polya (1978, p.3),

a resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Um problema deve desafiar a curiosidade e pôr em jogo as ações cognitivas dos estudantes. O professor de Matemática que trabalha com resolução de problemas tem, com esse tipo de atividade, uma grande oportunidade de cativar seus alunos. Se o professor perde tempo exercitando a turma em operações rotineiras, aniquila o interesse dos alunos e não favorece o seu desenvolvimento intelectual.

Segundo Polya (1978), um dos mais importantes deveres do professor é auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

O aluno deve adquirir toda experiência possível pelo trabalho independente. O professor deve ajudar o aluno com naturalidade, não ajudando demais nem de menos. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista dele, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.

Em inúmeros problemas, ensina Polya (1978), temos de indagar: Qual é a incógnita? Variando a pergunta: Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? A atenção do aluno deve estar voltada para a incógnita. Ou sugestão: Considere a incógnita!

Perguntas como: Quais são os dados? Qual é a condicionante? São de aplicação geral, podem ser feitas com sucesso ao tratarmos de problemas de qualquer tipo. São indagações e sugestões naturais, simples, óbvias e se originam do bom senso comum.

Ao dirigir a seus alunos uma indagação ou sugestão da lista de Polya (1978), o professor pode ter em vista dois objetivos: 1) auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; 2) desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

No livro *A arte de resolver problemas*, Polya (1978) definiu as estratégias, os padrões e analogias e indicou que há quatro etapas fundamentais e necessárias para a resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve despertar neles algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.

Antes de conhecermos o passo a passo da heurística de Polya, vamos entender o que ele considera um problema, e os tipos de problema que considera.

Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. De acordo com Polya (1978, p.139), “a não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema”.

Resolver um problema de qualquer tipo é contornar um obstáculo. Basicamente, Polya (1978) tratou de dois tipos de problemas: os de demonstração e os de determinação. Os problemas de determinação são mais importantes na Matemática elementar; os problemas de demonstração são na Matemática superior. Vamos nos ater ao primeiro tipo, com o qual trabalharemos na nossa sequência didática.

Para resolver um problema de determinação é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante.

O objetivo de um problema de determinação é encontrar um certo objeto, a incógnita do problema. Os problemas de determinação podem ser

teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura.

Polya (1978, p.126) deu um exemplo de problema prático muito semelhante ao da construção do aqueduto de Samos, que vamos reproduzir em sala de aula com nossos alunos:

Em tempos quase pré-históricos, muito antes desta moderna era de teorias científicas, os homens construíram barragens no vale do Nilo e em outras partes do mundo, onde as lavouras dependiam de irrigação. Procuremos visualizar o problema da construção de uma grande barragem moderna. “Qual é a incógnita?” Muitas são as incógnitas de um problema dessa natureza: a localização exata da barragem, suas dimensões e forma geométrica, os materiais a utilizar na construção e assim por diante.

Qual é a condicionante? Muitas, respondeu Polya (1978), como fornecer energia elétrica e água para irrigação e abastecimento de certas localidades, além de controlar inundações. Por outro lado, ela deverá causar o mínimo de prejuízos à navegação, à pesca e ao meio ambiente. Além do que, é claro, ela deverá custar o mínimo possível e ser construída no prazo mais curto.

Quais são os dados? São muitos os dados necessários: dados topográficos, dados geológicos, dados climatológicos e hidrológicos, dados econômicos relativos ao valor das terras que serão inundadas, dos custos do material e da mão-de-obra e muito mais.

Este exemplo revela que, num problema prático, as incógnitas, os dados e as condicionantes são mais complexas e, menos definidas do que num problema matemático.

Para resolver um problema, continua Polya (1978, p.127), “é necessário um certo conjunto de conhecimentos previamente adquiridos”. O engenheiro moderno tem a seu dispor um acervo de conhecimentos altamente especializados, uma teoria científica da resistência dos materiais, a sua própria experiência e a grande massa de experiência profissional acumulada na literatura técnica especializada. Agora, o construtor de barragens no Egito antigo, o que tinha, o que pensava?

Responde Polya (1978, p.127), continuando sua argumentação:

Ele havia visto, certamente, diversas outras barragens, maciços de terra ou de alvenaria a reter as águas. Ele havia observado a cheia, carregada de detritos, a fazer pressão contra a margem. Ele poderia ter auxiliado a reparar as fendas e a erosão deixadas pela inundação. Ele poderia ter visto uma barragem ruir, desmoronando sob o impacto da enchente. Ou seja, ele acumulou observações e experiências.

Há uma impressão de que problemas práticos exigem maior experiência do que os problemas matemáticos. É possível, mas é muito provável que a diferença esteja na natureza do conhecimento necessário e não na nossa atitude para com o problema, considerou Polya (1978). Ao resolver um problema de uma ou de outra espécie, temos de depender de nossa experiência com problemas semelhantes e muitas vezes nos perguntamos: Já viu o mesmo problema sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato?

Os projetistas das barragens do Egito antigo tinham de confiar no bom senso para interpretar sua experiência, pois nada mais tinham em que se basear. O engenheiro não pode contar apenas com o bom senso, “(...)”; tem de calcular a resistência da barragem projetada (...). Para isso ele tem de utilizar a teoria (...). Na aplicação da sua teoria, ele necessita de uma boa dose de Matemática; o problema prático de engenharia conduz a um problema matemático”. (Polya, 1978, p.129)

Passemos às quatro etapas para se chegar à resolução de um problema, de acordo com os ensinamentos de Polya (1978) no livro *A arte de resolver problemas*.

1ª etapa: Compreensão do problema

O aluno precisa compreender o problema e querer resolvê-lo. O problema deve ser bem escolhido para despertar o interesse do aluno.

O primeiro passo é entender o problema.

É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condicionantes? É possível satisfazer as condicionantes? Elas

são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condicionantes redundantes ou contraditórias?

Se for necessário designar esses elementos, o aluno deverá adotar uma notação adequada. Outra indagação neste estágio preparatório: É possível satisfazer a condicionante?

Construir figuras para esquematizar a situação proposta no exercício pode ser muito útil, sobretudo introduzindo-se notação adequada.

Sempre que possível, procurar separar as condicionantes em partes.

2ª etapa: Estabelecimento de um plano

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Encontrar conexões entre os dados e a incógnita.

Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada em tempo razoável.

É importante fazer perguntas. Você já encontrou este problema ou um parecido? Você conhece um problema semelhante? Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar? Olhe para a incógnita e tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita.

Caso você encontre um problema relacionado ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo. Você pode usar seu resultado ou método? É necessário introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos?

Certos itens relevantes do conhecimento matemático adquiridos anteriormente são materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático, como, por exemplo, problemas já resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Cabe aqui a indagação: Conhece um problema correlato? Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizá-lo?

Muitas vezes essas indagações contribuem para dar partida à correta sequência de ideias. Se não funcionarem, precisaremos procurar algum outro ponto de contato, outro ponto de vista. Teremos de variar, de transformar, de modificar o problema. É possível reformular o problema? Se não conseguir resolver o problema, devemos procurar antes resolver um problema correlato. Sem, no entanto, nos afastarmos demasiado do problema original. Outra indagação pode nos trazer de volta a ele: Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira?

Caso você não consiga resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? E um caso mais geral e/ou mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condicionantes do problema e observe o que ocorre com a incógnita: como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa com esses dados? Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?

Não se esqueça de levar em conta todos os dados e todas as condições.

3ª etapa: Execução do plano

Frequentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acaba se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia).

O plano é um roteiro geral. Os detalhes devem inserir-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro, evitando o erro. Se o aluno tiver realmente concebido um plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não

perderá facilmente essa ideia. O professor deve acompanhar e insistir para que o aluno verifique cada passo.

Podemos nos convencer intuitiva ou formalmente da correção de um passo do nosso raciocínio.

Ao executar a estratégia, verifique cada passo. Você consegue mostrar que cada um deles está correto?

4ª etapa: Retrospecto

Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer.

Você deve examinar a solução obtida, verificando os resultados e os argumentos utilizados. Você pode obter a solução de algum outro modo?

Qual a essência do problema e do método de resolução aplicado? Em particular, você consegue usar o resultado – ou o método – em algum outro problema? Qual a utilidade deste resultado?

A revisão da solução é a etapa mais importante, segundo Polya (1978), pois esta etapa propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema.

A resolução de problemas é um método capaz de desenvolver o raciocínio e motivar os alunos para o estudo da Matemática. Entretanto, em nossos livros didáticos e em nossas salas de aula, o que encontramos são infindáveis listas de “problemas”, quase sempre similares e que podem ser resolvidos por meio de procedimentos rotineiros.

Todas as etapas apresentadas têm a sua importância. Pular qualquer uma delas ou não dar-lhes a devida atenção resultará na não compreensão do

problema. Cada passo deve ser bem planejado, caso contrário podem acontecer falhas na execução do plano, comprometendo os resultados obtidos.

2.2 A resolução de problemas nos documentos curriculares

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN observamos que, a exemplo do que nos ensina Polya (1978), “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado” (Brasil, 1998, p.41). Resolver um problema pressupõe que o aluno elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos.

A resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos PCN, pode ser resumida nos seguintes princípios:

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade Matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes Matemáticas. (BRASIL, 1998, p. 40)

A resolução de problemas constitui-se numa orientação para a aprendizagem, num caminho para a construção de conceitos, procedimentos e atitudes, num contexto em que o aluno constrói o seu próprio saber-fazer matemático.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (Brasil, 1998) tem sido indicada a metodologia da resolução de problemas como um recurso didático capaz de promover o estudante a protagonista de seu aprendizado. Percebe-se que, de acordo com essa orientação, o aluno ganha destaque, a intenção é que ele construa seu conhecimento matemático, adquira autonomia para resolver esse e outros problemas. No entanto, falta explicar como esse aluno conseguirá independência de raciocínio, o protagonismo tão almejado, sem a ajuda de um professor consciente e preparado, que deve ter o conhecimento e o domínio da metodologia e saiba fazer as perguntas necessárias, no momento certo, para encaminhar o estudante para a solução do problema, ou redirecioná-lo se ele se desviar de seu objetivo.

Há que se levar em conta que a orientação para que se adote a resolução de problemas em Matemática, sugerida nos PCN, requer muito preparo do professor, experiência e conhecimento, além de muita psicologia para que o professor se coloque no lugar do aluno e acompanhe seu raciocínio, ajudando-o sem, no entanto, tolher seu prazer da descoberta.

Trabalhar com resolução de problemas requer também muito planejamento e nenhuma preocupação em seguir um currículo sequencialmente organizado, uma vez que problemas correlatos, já estudados ou que ainda serão trabalhados, podem ser abordados para se chegar à solução do problema em questão. Nos PCN não estão previstos esses problemas de ordem operacional, ainda que nitidamente o conceito de problema esteja baseado na heurística da resolução de problemas de Polya (1978).

No nosso caso, temos feito experiências pontuais de inserção de problemas não rotineiros nas aulas, notadamente quando já encerramos o conteúdo do bimestre e, pelo motivo já citado, essas aulas não comprometerão o cronograma do curso.

Quanto à metodologia da resolução de problemas que embasa o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (São Paulo, 2010), apenas pudemos perceber que o tema é tratado superficialmente, e de modo abstrato.

Aconselha-se a exploração de centros de interesse dos alunos e a estratégia da problematização, da formulação e do equacionamento de problemas, da tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas. Colocado assim, parece bem simples, mas é também muito vago, como colocar em prática?

A metodologia da resolução de problemas de Polya (1978) é tratada com superficialidade nesse documento curricular, numa visão simplista da heurística, a arte da descoberta. Até o conceito de contextualização soa impreciso:

Procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados. (SÃO PAULO, 2010, p.47)

O Currículo do nosso Estado (SÃO PAULO, 2010) propôs abordar separadamente a História da Matemática e um problema é selecionado para, mediante a sua resolução, dele se depreender conceitos matemáticos, o que no nosso entender não traz grandes benefícios ao processo de ensino e aprendizagem de temas matemáticos.

Nesse documento os conteúdos disciplinares de Matemática foram organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações.

O bloco Geometria trata da percepção das formas e relações entre elementos e propriedades das figuras planas e espaciais, além da construção e representação de formas geométricas já existentes ou imaginadas e da percepção do espaço como suporte ao mundo físico em que se vive.

No documento citado, no bloco Geometria para o Ensino Fundamental, há a preocupação inicial com o reconhecimento, a representação e a classificação das figuras geométricas. Para isto, sugere-se trabalhar contextos concretos com os alunos do 6º e 7º anos. No último ciclo do Ensino Fundamental, destaca-se a construção de raciocínios lógicos e deduções simples, conforme a distribuição de conteúdos na grade curricular.

A sugestão é que se trabalhe mais intensamente com a Geometria no 4º bimestre do 8º ano (7ª série) do Ensino Fundamental, quando se pressupõe que os alunos já terão desenvolvido habilidades que envolvem estimativas e cálculos algébricos. São abordados o cálculo de área de figuras planas, os teoremas de Tales e Pitágoras e os prismas. No terceiro bimestre, o conceito de plano cartesiano é trabalhado em uma situação de aprendizagem com figuras geométricas e suas coordenadas. Nessa situação são ampliados os conceitos de simetria e homotetia por meio das transformações das figuras no plano.

Para o trabalho com áreas utiliza-se o conceito de equivalência de figuras planas e áreas de retângulos, pois se estima que os alunos já saibam realizar esse tipo de cálculo.

Quanto à caracterização do espaço, o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) apresentou quatro faces interligadas: a percepção, a concepção, a construção e a representação. De acordo com este documento, o conhecimento geométrico acontece por meio da percepção das formas geométricas, seus elementos e propriedades. Porém, essa percepção se relaciona desde o início com a construção, a representação e a concepção de objetos existentes ou imaginados.

Para construir ou representar, primeiramente concebemos o objeto observado ou imaginado por meio de representações. Além disso, mesmo “as concepções mais inovadoras têm como referência percepções ou construções já realizadas, renovando seus pressupostos ou transcendendo seus limites”. (SÃO PAULO, 2010, p. 42).

Nunca é demais lembrar que é por meio das ideias fundamentais presentes em tais conteúdos – equivalência, ordem, proporcionalidade, medida, aproximação, problematização, otimização, entre outras – que se busca construir uma ponte que conduza dos conteúdos às competências pessoais (SÃO PAULO, 2010): capacidade de expressão, compreensão, argumentação, propositivação, contextualização e abstração.

Tanto nos PCN quanto no Currículo do Estado de São Paulo há orientações para o professor adotar a metodologia da resolução de problemas sem, contudo, engessar o currículo, cabendo ao professor, se tem interesse em despertar o interesse de seus alunos para os conteúdos que vão aprender, e se quer motivá-los, aprofundar-se no tema.

2.3 Potencialidades da História da Matemática na aprendizagem

Conhecemos a História da Matemática quando cursamos a disciplina na graduação de Física na USP, quando então compramos o livro *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, indicado pelo Prof. Dr. Antônio Carlos Brolezzi. Incluída no currículo como eletiva, a disciplina tinha um certo prestígio e resolvemos cursá-la por já estarmos trabalhando com Matemática e Física, em cursinhos preparatórios para vestibular. Mas foi o livro de Howard Eves que despertou a nossa curiosidade e o gosto pela leitura.

Lemos inicialmente os assuntos que mais nos interessavam, sentindo o prazer de preencher lacunas do nosso conhecimento matemático e, ao mesmo tempo, por perceber a evolução desse mesmo pensamento. Só mais tarde, quando passamos a lecionar Desenho Geométrico para o ensino fundamental em escola da rede privada, recorremos à História da Matemática como recurso didático, para complementar as explicações e tornar mais interessantes as aulas. Atualmente, lecionamos Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental nessa mesma escola e a História da Matemática tem sido auxiliar importante no que se refere à motivação dos alunos, para aguçar sua curiosidade em saber como os matemáticos do passado ou mesmo pessoas comuns resolveram seus problemas práticos, sem os recursos atuais.

A História da Matemática é apresentada nos PCN (Brasil, 1998) como um recurso didático eficaz no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. De acordo com este documento, quando o aluno entende que a Matemática é criação humana, que responde às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes épocas; quando tem a oportunidade de conhecer os diferentes conceitos e processos matemáticos do passado e do

presente, o aluno desenvolve atitudes e valores mais positivos em relação a essa área do conhecimento.

Por meio da História da Matemática, o aluno poderá ter acesso a fatos que revelam “o alto nível de abstração Matemática de algumas culturas antigas”, e daí chegará à conclusão de que “o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas”. (BRASIL, 1998, p.42)

A utilização da História da Matemática na sala de aula não se limita somente a uma abordagem meramente narrativa, descritiva ou biográfica, mas de ação pedagógica problematizadora, servindo-se em especial da interação, do diálogo.

O recurso à História da Matemática como instrumento de ensino deve ser dosado de acordo com o conteúdo que está sendo trabalhado. Assim fazendo, o professor pode trabalhar o objeto matemático escolhido e observar as diversas produções de significado e conhecimentos que o constituíram historicamente.

Pode-se, também, reproduzir na sala de aula passos análogos aos da sequência criadora ou da aplicação do conhecimento que se quer transmitir. Não há necessidade, nesse tipo de aplicação, de contar a história propriamente dita de um assunto. O que importa é o processo, ou seja, a sequência lógica que levou à construção daquele conhecimento ou à solução daquele problema por nossos antepassados.

Mas, como ressaltou Baroni e Nobre (1999, p. 132), a História da Matemática vai além da pura motivação. Esses autores afirmam que:

Ao desenvolvermos estudos relativos às contribuições da História da Matemática para a Educação Matemática, percebemos que é necessária muita cautela, pois se pode incorrer no erro de simplesmente assumir a História da Matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional.

O conhecimento da história dos conceitos matemáticos é importante para que nós, professores, tenhamos fundamento para mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades inquestionáveis, prontas e absolutas, mas como ciência que se constrói e incorpora dia a dia novos conhecimentos. Por isso, o conhecimento histórico requerido por parte do professor deve ser muito mais profundo. Não basta saber alguns dados biográficos do matemático que possam ilustrar as aulas, nem saber localizar no tempo e no espaço o assunto em questão.

A História da Matemática traz para os alunos as soluções que deram os antigos para seus problemas de ordem prática, mostra a conexão da Matemática com a realidade e a evolução do próprio pensamento matemático. A utilização do recurso à História da Matemática possibilita ao professor uma alternativa à prática de um ensino centrado em procedimentos mecânicos e sem significado para o aluno. A respeito disso, os PCN ressaltam que:

O estudo de temas geométricos possibilita ainda a exploração de interessantes aspectos históricos. Como sabemos, a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas. As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas em que a simetria era uma das características predominantes. (BRASIL, 1998, p.127)

Ao abordar conceitos matemáticos em conexão com sua história, a História da Matemática passa a ser veículo de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. Nesse sentido, ela constitui um instrumento de resgate da própria identidade cultural desse povo.

Desse modo, é possível visualizar melhor a dimensão da História da Matemática no currículo da escola fundamental como um campo de problemas para construção e evolução dos conceitos e como um elemento de integração da Matemática com o tema Pluralidade Cultural.

No entanto, o professor não deve usar este recurso para situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas

aulas trechos da História da Matemática. Deve, sim, explorar suas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados.

A construção do aqueduto de Eupalinos é um problema clássico de Geometria plana. A solução desse problema faz parte da História da Matemática, aponta para a utilização da Matemática como recurso para solucionar problemas que o homem encontrou no seu dia a dia. O método da resolução de problemas, analítico por excelência, por meio de questionamentos e de levantamentos de hipóteses, auxilia o aluno a construir o seu próprio raciocínio e a desenvolver seu pensamento matemático. De tal modo que, encaminhando corretamente as questões/sugestões, o professor pode ajudar seu aluno a resolver o problema, chegando à mesma solução que encontrou Eupalinos, por exemplo.

Resolver um problema clássico, ou seja, um problema que faz parte da História da Matemática pela relevância e originalidade da sua solução, configura-se num desafio para qualquer aluno de Matemática. É importante trazeremos problemas para demonstrar/aplicar as ideias de Polya e para percebermos o quanto esse método pode nos ajudar a melhorar o nível de resolução de problemas junto aos alunos.

O apoio da História da Matemática, junto a outros recursos didáticos e metodológicos, como neste caso a resolução de problemas, é muito útil e pode dar, assim, valiosa contribuição para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Pode-se, também, como já foi dito, reproduzir na sala de aula passos análogos aos da sequência criadora ou da aplicação do conhecimento que se quer transmitir. É o que propomos na sequência didática.

Após tomar conhecimento da metodologia da resolução de problemas proposta por George Polya, percebemos que esse método para resolver problemas não rotineiros era o ideal para aplicar a um problema clássico como o do aqueduto de Eupalinos.

A construção do aqueduto foi um problema real enfrentado na Antiguidade, mas mesmo nos dias de hoje problema semelhante ocorreu com

um túnel perfurado na montanha, na construção da Linha 4 do metrô, em São Paulo. Ou seja, apesar de ser um problema histórico, ainda hoje é possível ocorrer e sua solução segue o mesmo raciocínio geométrico desenvolvido no passado, guardadas, é lógico, as devidas proporções.

É um problema desafiador, antigo e atual, tanto mais que pode ser resolvido apenas com régua e compasso. Em suma, a relação da História da Matemática com a metodologia da resolução de problemas, no nosso entender, resume-se ao binômio exemplo/prática. Aprende-se pelo exemplo, pela imitação, com a prática.

Da leitura do artigo *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*, de Antonio Miguel (1997, p.81), que reputamos como dos mais lúcidos sobre o assunto, destacamos o 4º argumento, que trata justamente da seleção de problemas históricos em que a “motivação aparece vinculada e produzida no ato cognitivo da solução de um problema”.

Meserve, professor da Universidade de Vermont, considera que

A associação das duas tendências em Educação Matemática, a que valoriza o apoio pedagógico da História da Matemática e aquela que vê na resolução de problemas a perspectiva didaticamente eficiente para a aprendizagem da Matemática, revela um caráter pedagogicamente pertinente. (apud MIGUEL, 1997, p.81)

A partir daí, disseminou-se a ideia de que a Matemática pode ser trabalhada por meio da resolução de problemas históricos, cuja apreciação e análise das soluções apresentadas seria uma atividade altamente motivadora.

Para Swetz (apud MIGUEL, 1997, p.81), por exemplo, os problemas históricos motivam porque:

- Possibilitam o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados;
- Constituem-se em veículos de informação cultural e sociológica; refletem as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos;
- Constituem-se em meio de aferimento da habilidade Matemática de nossos antepassados;
- Permitem mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Concordamos com as colocações acima, por isso apostamos na associação dessas duas tendências em Educação Matemática sem, contudo, discordar de Miguel (1997, p.82) quando concluiu que, não pelo fato do problema ser histórico ou simplesmente ser ‘problema’, e sim por considerar o grau de desafio que um problema oferece, o modo como esse desafio é percebido pelo aluno, assim como “as relações que se estabelecem entre esse desafio e os valores, interesses e aptidões socialmente construídos por ele”, o fator positivo de seu uso.

2.4 A História da Matemática nos documentos curriculares

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) vemos que o recurso à História da Matemática aliada à metodologia da resolução de problemas é uma tentativa de conjugar a dimensão conceitual da aprendizagem disciplinar com a dimensão formativa e cultural, ou seja, além de abordar conteúdos matemáticos, o objetivo é desenvolver procedimentos e atitudes e fomentar a cultura.

Além de desenvolver o pensamento matemático e o raciocínio lógico-dedutivo, a História da Matemática conjugada com a resolução de problemas propicia o desenvolvimento de procedimentos como a análise, o senso crítico, a organização e expressão de ideias, a verificação dos resultados. Atitudes como cooperação, trabalho em equipe e autoestima. A interdisciplinaridade inerente à História da Matemática contribui com aspectos sócio-histórico-culturais do povo estudado, além de aspectos geográficos do lugar.

Já de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades da Matemática servir às outras áreas, “na grande tarefa de transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação”. (SÃO PAULO, 2011, p.28)

Cada assunto pode ser explorado numa perspectiva histórica, embebido de uma cultura Matemática que é fundamental para um bom desempenho do professor, mas deve trazer elementos que possibilitem uma abertura para o novo, que viabilizem uma ultrapassagem de situações já existentes quando isso se torna necessário. A Matemática, sua história e sua cultura são um exemplo candente de equilíbrio entre a conservação e a transformação, no que tange aos objetos do conhecimento. (SÃO PAULO, 2011, p. 33)

A História da Matemática tem papel bastante importante no Currículo do Estado de São Paulo. Partindo do pressuposto de que conhecer é conhecer o significado, isso em qualquer disciplina, indica-se a apresentação de conteúdos significativos para os alunos. O que eles esperam quando perguntam para que serve o que queremos que eles aprendam, é que apresentemos um significado para aquele conteúdo. E, na construção dos significados, um fator importante são as narrativas, componentes decisivos na arquitetura de cada aula. E a História em sentido estrito é a fonte primária para alimentar as histórias a serem contadas.

Na verdade não parece concebível ensinar qualquer disciplina sem despertar o interesse em sua história – e na História em sentido pleno. Ainda que possamos tentar ensinar os conceitos que nos interessam, tais como eles nos são apresentados atualmente, os significados são vivos, eles se transformam, eles têm uma história. (SÃO PAULO, 2011, p. 45)

E é na história que se busca uma compreensão mais nítida dos significados dos conceitos fundamentais, e principalmente o significado das mudanças conceituais, ou seja, o significado das mudanças de significado. Para isso, o professor precisa ser um bom contador de histórias, saber preparar uma aula arquitetando uma narrativa, tendo em vista a construção do significado das noções apresentadas.

Mas, para contar uma boa história é necessário ganhar a atenção dos alunos, é preciso criar centros de interesse. E essa é uma das habilidades de que necessita um professor na sala de aula: despertar o interesse dos alunos.

Assim sendo, ao buscar centros de interesse, o professor de Matemática, naturalmente, vai encontrar o caminho da resolução de problemas como estratégia para a formulação, equacionamento, problematização e solução de problemas. Problemas que vão muito além dos problemas rotineiros

que demandam apenas a repetição de procedimentos para usar os dados e com eles chegar à solução.

3. A CONSTRUÇÃO DO AQUEDUTO DA ILHA DE SAMOS POR EUPALINOS

A história da humanidade está repleta de uma série de problemas que requerem soluções. Hoje dispomos das mais variadas tecnologias, as quais não existiam há milhares de anos. Como, então, sem o conhecimento acumulado nesse período, várias civilizações tiveram a capacidade de realizar grandes feitos com ferramentas rudimentares para os dias de hoje?

Neste capítulo, apresentaremos a solução dada por Eupalinos a um problema importante que afligia os moradores da ilha de Samos: obter água potável que havia do outro lado da ilha, fazendo-a passar através de um monte.

Apesar de usar conceitos simples de Geometria, a solução dada por nosso primeiro engenheiro exigiu criatividade e habilidade. Além disso, requereu planejamento, execução e avaliação.

3.1 O túnel de Samos

O texto a seguir foi extraído do artigo de Euclides Rosa “*Como abrir um túnel se você sabe Geometria*” (Revista do Professor de Matemática nº5) e adaptado.

Figura 1: Aqueduto no interior do Monte Castro, Ilha de Samos.



Fonte: <http://eands.caltech.edu/articles/LXVII1/samos.html>

Há 2500 anos, na ilha de Samos, conhecida por ser a terra natal de Pitágoras, e que ainda pertence à Grécia, um homem chamado Eupalinos, que nem era matemático, virou herói. Seu feito foi ter sabido usar, com bastante

sucesso, um conceito básico de Geometria Plana para resolver um problema de engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

Figura 2: Localização geográfica da Ilha de Samos

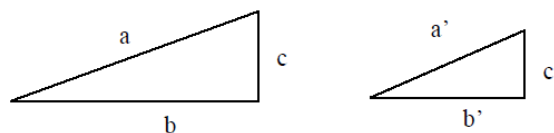


Fonte: <http://portugues.vacationstogo.com/cruiseport/SamosGreece.cfm>

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido porque é um tópico interessante para ilustrar a aula e mostrar como o conhecimento matemático, mesmo de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico de uma época.

Começamos a apresentação da contribuição de Eupalinos destacando um teorema de Geometria fundamental para os propósitos deste geômetra: *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*

Figura 3: Triângulos retângulos semelhantes (caso LAL)



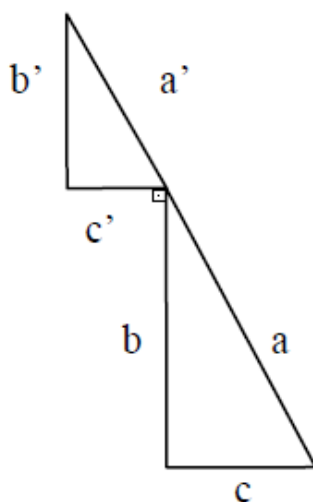
Fonte: acervo do pesquisador

Na figura anterior, se: $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ então, $\angle ab = \angle a'b'$ e $\angle ac = \angle a'c'$

Como se sabe, este é um caso particular de semelhança de triângulos. [Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais.]

Na verdade, Eupalinos não usou exatamente o teorema acima e, sim, uma consequência imediata desse enunciado: *sejam abc e $a'b'c'$ triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se: $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.*

Figura 4: Triângulos retângulos semelhantes com as hipotenusas colineares



Fonte: acervo do pesquisador

Esta afirmação decorre imediatamente da anterior, pois a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Voltemos à história de Eupalinos, em Samos, ano 530 a.C. O abastecimento de água da cidade preocupava o poderoso tirano Polícrates. Havia muitas fontes na ilha, mas o acesso a elas era muito difícil para os moradores da cidade, pois ficavam do outro lado do Monte Castro. Decidiram, então, abrir um túnel. A melhor entrada e a mais conveniente saída foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que

chamaremos de A e B , respectivamente. Cavar a montanha não seria tão trabalhoso, pois a rocha era calcárea e havia muitos operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto A e, cavando, chegar ao ponto B sem se perder no caminho.

Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática. Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade, propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos A e B , encontrando-se as duas turmas no meio do túnel.

O túnel, construído há 25 séculos, é mencionado pelo historiador grego Heródoto. Em 1882, arqueólogos alemães, escavando na ilha de Samos, o encontraram. O túnel tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

Figura 5: Túnel de Eupalinos, na ilha de Samos.

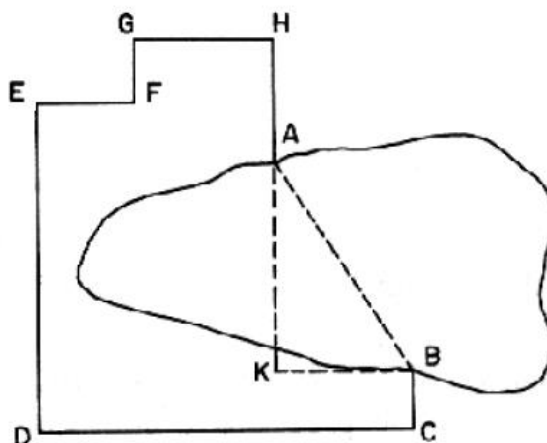


Fonte: <http://adailengenharia.com.br/v1/projetos/historia-hidraulica>

Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de A e B , traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha.

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, A é o ponto de entrada e B é a saída do túnel.

Figura 6: Contorno do Monte Castro e linha poligonal BCDEFGHA

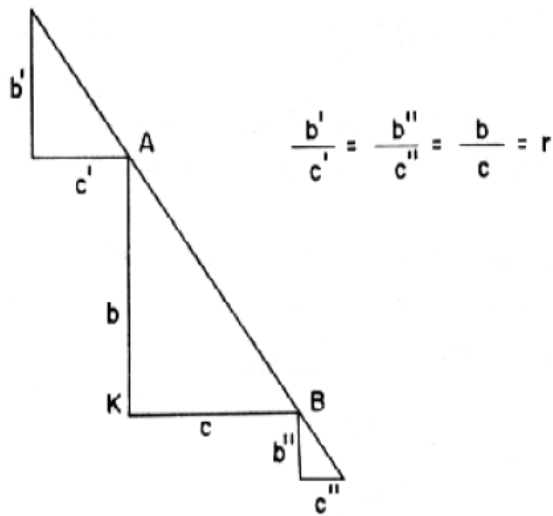


Fonte: acervo do pesquisador

A partir do ponto B fixa-se uma direção arbitrária BC e, caminhando ao longo de uma poligonal $BCDEFGHA$, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto A , tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha.

Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos AK e KB do triângulo retângulo AKB no qual AB é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada. Calcula-se, então, a razão $r = \frac{AK}{KB}$. A partir dos pontos A e B , constroem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão r entre os catetos do triângulo AKB .

Figura 7: Determinando a direção de escavação

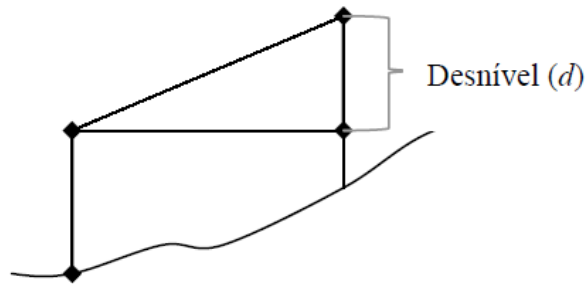


Fonte: acervo do pesquisador

Agora era só cavar a montanha a partir dos pontos *A* e *B*, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos. Isto resolve o problema se os pontos *A* e *B* estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal, e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral, *A* e *B* não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que *B* seja mais baixo, e, sem dúvida, levou-se isso em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular a diferença de nível *d* entre *A* e *B*. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal *BCDEFGHA*, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.

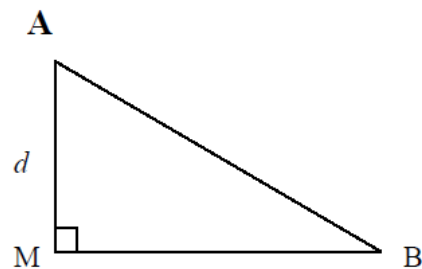
Figura 8: Diferença de nível (d)



Fonte: acervo do pesquisador

Tendo d , consideramos o triângulo retângulo AMB , no qual o cateto AM é vertical e tem comprimento d . O comprimento da hipotenusa AB se determina pelo teorema de Pitágoras (a partir dos catetos do triângulo AKB figura 7, da página anterior).

Figura 9: Controle da inclinação da escavação



Fonte: acervo do pesquisador

A razão $s = \frac{AM}{AB}$ diz como se deve controlar a inclinação da escavação:

cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo do túnel, o nível deve baixar s unidades.

O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o Monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

É importante ressaltarmos que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Seria esperar demais dos instrumentos existentes naquela época. Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvios insignificantes, convenhamos. Mas que serviram para provar que o túnel foi cavado, de fato, em duas frentes. E quase que a certeza de que o desencontro na vertical, que permitiu formar uma pequena cachoeira, foi proposital, de modo a não deixar as duas pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que traria grave problema.

Mas como esses fatos chegaram até nós? Foi Heron de Alexandria que, em um dos muitos livros que publicou, escreve sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra, e descreve o processo que acabamos de narrar. No total, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, em que sintetiza o conhecimento da época. Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados anteriormente com propósitos semelhantes, e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas.

Aqui encerramos a adaptação do texto “Como abrir um túnel se você sabe geometria”, publicado na Revista do Professor de Matemática pelo Professor Euclides Rosa.

3.2 Perspectiva utilitarista da Matemática

Desde os primórdios, a Matemática tem sido usada pelo homem para resolver seus problemas práticos, do dia-a-dia.

A Matemática é uma ciência viva não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par do seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância. (BRASIL, 1998, p.24)

A Matemática primitiva se desenvolveu com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que, após a drenagem de pântanos, com o controle de inundações e da irrigação que foi possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas.

Em suma, o período de 3000 a 525 a. C. testemunhou o nascimento de uma nova civilização humana cuja centelha foi uma revolução agrícola. Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram das névoas da Idade da Pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a Matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas. (EVES, 2004, p. 56)

Assim, pode-se dizer que a Matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma atividade prática para atender às demandas da agricultura e da engenharia. Essas demandas envolviam o cálculo “de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis”. (EVES, 2004, p.57)

Nas orientações didáticas para o Ensino Fundamental II, no bloco Espaço e Forma, dos PCN, há relatos históricos de temas geométricos e exemplos da utilização da Matemática a serviço do homem. Segundo elas, a origem essencialmente prática da Geometria egípcia mostra-se nitidamente pela maneira com que os escribas do médio império propunham e resolviam os problemas.

O estudo de alguns dos problemas resolvidos pelos egípcios poderá mostrar a importância da generalização das relações espaciais e suas representações para resolver situações mais diversificadas e complexas.

Como exemplo, pode-se analisar como eles prescreviam o cálculo da área de um campo triangular e de uma região circular:

1. “Se te dizem para calculares a superfície de um triângulo de 10 varas de altura e 4 varas de base, qual a sua superfície? Calcularás assim: tomarás a metade de 4, ou seja, 2, para fazer teu retângulo. Multiplicarás 10 por 2. É a sua superfície”.

2. “Se te dizem para calculares a área de uma porção de terra circular, cujo diâmetro é de 9 varas, como farás para calcular sua superfície? Calcularás assim: deves subtrair 1 do diâmetro, que é a nona parte dela. Restam 8 varas; deves, então, multiplicar 8 vezes 8, o que resulta 64. Vês que a superfície é de 6 kha (60) e 4 setat”.

Como se pode observar nessa segunda situação, o processo utilizado consiste em subtrair $1/9$ do diâmetro e em elevar o resultado ao quadrado. Tal cálculo dá para π um valor de 3,1605.

Supõe-se que os egípcios chegaram aos resultados desses problemas por procedimentos gráficos: no primeiro caso, transformando o triângulo em um retângulo equivalente e, no caso do círculo, inscrevendo-o em um quadrado. Nesse caso, parece que o cálculo era feito por aproximações com a ajuda dos 4 triângulos determinados pela inscrição.” (BRASIL, 1998, p.128)

No entanto, como alerta o texto do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010, p.33), “em nome de um utilitarismo imediatista, o ensino de Matemática não pode privar os alunos do contato com temas epistemológica e culturalmente relevantes”.

O problema histórico do aqueduto de Eupalinos contribui para mostrar que a Matemática tem papel relevante no mundo, na sua prática filosófica, científica e social.

A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 2000, p.40)

3.3 O problema da construção do aqueduto

Tomamos conhecimento do problema da construção do aqueduto de Eupalinos no livro didático *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas* (Rezende; Queiroz, 2008) que foi sugerido pelo professor Roberto

Paterlini, durante as aulas da disciplina de Geometria-teoria e experimentação deste programa de Mestrado Profissional.

Achamos muito interessante e engenhosa a solução do problema proposta por Eupalinos, ainda que a princípio não tenha conseguido entendê-la em toda sua complexidade. Voltamos ao problema várias vezes e cada vez que retomava os dados, verificava as variáveis, sentíamos desafiados a resolvê-lo. Será que os alunos conseguiriam resolvê-lo?

Depois de conhecer a heurística de Polya, nas aulas do professor Geraldo Pompeu Júnior, na disciplina *O ensino de ciências e Matemática através da Resolução de Problemas*, do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar-Sorocaba, estava disposto a aplicar as ideias de Polya em algum momento, e achamos que o problema da construção do aqueduto tinha todos os ingredientes necessários de um problema desafiador. Seria um grande desafio tanto para os alunos quanto para este professor-pesquisador.

Começamos, nós mesmos, por resolver o problema do aqueduto, aplicando a metodologia da resolução de problemas de Polya, para sentir como nossos alunos reagiriam. Ou como este professor reagiria diante das perguntas feitas por eles, ou ainda que indagações ou sugestões poderia eu fazer/dar para orientar meus alunos rumo à solução do problema. Vamos ao planejamento das etapas, de acordo com a heurística de Polya (1978).

1ª Etapa – Compreensão do problema

Para compreendermos um problema de determinação, como é o nosso caso, devemos estar em condições de identificar as partes do mesmo, ou seja, a incógnita, os dados, a(s) condicionante(s). Caso haja uma figura relacionada ao problema é importante desenhá-la e também adotar uma notação adequada.

Compreendendo o problema

1) O problema pede que se determine a direção em que se deve escavar a montanha, partindo simultaneamente dos pontos A e B , fixados no entorno

da mesma, de modo que as duas frentes de trabalho se encontrem no interior do túnel. A direção é definida pela reta que une os pontos A e B , de maneira que o caminho de escavação seja o mais reto possível, já que o segmento de reta é a menor distância entre dois pontos. Em termos matemáticos, precisaremos de um segmento de reta entre esses dois pontos.

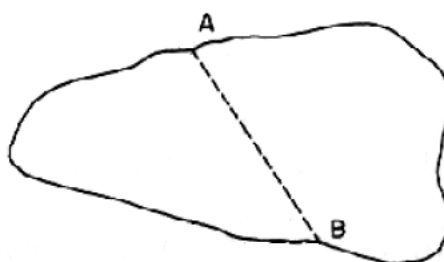
2) São dados dois pontos fixos A e B , no entorno da montanha, que representam a entrada e a saída do aqueduto, que levará água de uma fonte ou nascente, através de um túnel, ao outro lado da ilha de Samos, sob o monte Castro, para abastecer a comunidade.

3) O segmento de reta AB encontra-se em um plano definido previamente, ou seja, é bidimensional. Os pontos A e B devem pertencer à mesma curva de nível.

4) Os túneis, perfurados simultaneamente a partir de A e B , devem encontrar-se no interior da montanha, de maneira que o caminho de escavação seja o mais reto possível;

Desenhando a figura do monte atravessado pelo túnel

Figura 10: Esquemmatizando o problema



Fonte: Acervo do pesquisador

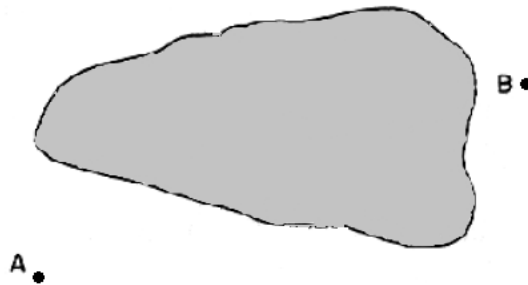
2ª Etapa – Estabelecimento de um plano

Consideramos que temos um plano, ao menos em linhas gerais, quando sabemos quais são os cálculos, construções que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado, segundo Polya (1978).

Conhecemos um problema semelhante? Para resolver este problema, recorremos a problemas que já conhecemos, em que se pede para determinar a medida do segmento AB .

É o caso, por exemplo, do cálculo de uma distância inacessível. Como podemos determinar a distância entre os pontos A e B , invisíveis um para o outro, devido à existência de densa mata entre eles? Como procedem os topógrafos?

Figura 11: Problema correlato: Como calcular a distância entre os pontos A e B ?

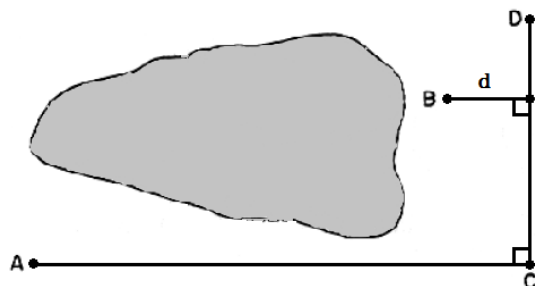


Fonte: acervo do pesquisador

Resolução:

Nos pontos A e B são cravadas duas estacas. Corre-se um fio de linha AC que passa mais próximo possível de B . A estaca C é fincada de modo que a perpendicular a AC , por C , passe o mais próximo possível de B .

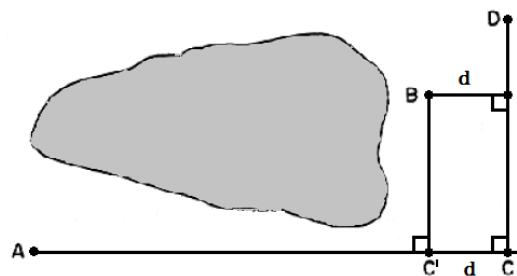
Figura 12: Apresentando técnica usada por topógrafos.



Fonte: acervo do pesquisador

A perpendicular CD é materializada por um fio de linha e pode-se obter a mesma usando atualmente um teodolito ou um triângulo de lados 3 m, 4 m e 5 m, técnica já conhecida e utilizada pelos povos antigos para determinar o ângulo reto. Só casualmente CD passará por B e isto, sem dúvida, seria desejável. Se CD não passa por B , mede-se a distância d do ponto B à reta CD . A seguir recua-se o ponto C para C' de modo que $CC' = d$. Ligando as estacas C' e B por um fio de linhas, obtemos a perpendicular a AC , que passa por B .

Figura 13: Determinando a distância entre os pontos A e B



Fonte: acervo do pesquisador

Medem-se as distâncias AC' e BC' . A distância entre os pontos A e B é obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras:

Assim:

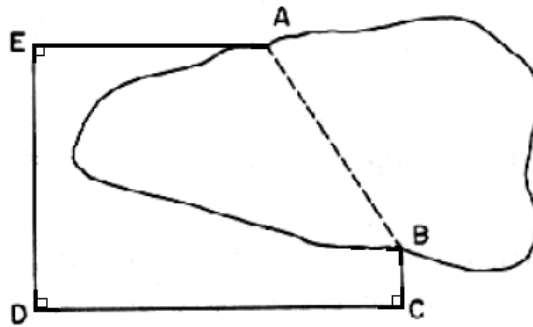
$$(AB)^2 = (AC')^2 + (BC')^2$$

Então, temos:

$$AB = \sqrt{(AC')^2 + (BC')^2}$$

Aproveitando os conhecimentos de problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, podemos unir os pontos A e B com uma linha poligonal ($AEDCB$) exterior à montanha, traçada de modo que os ângulos em C , D , e E sejam retos. Como na figura abaixo.

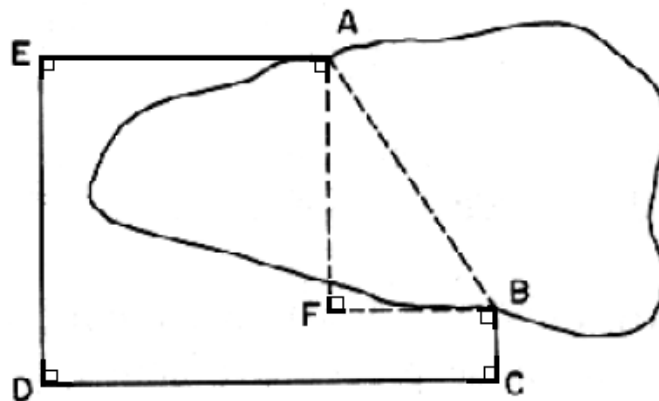
Figura 14: Linha poligonal AEDCB.



Fonte: acervo do pesquisador

Continuando nosso raciocínio, traçamos as retas paralelas às retas suportes dos segmentos DE e CD , passando pelos pontos A e B , respectivamente, ficando assim determinados os catetos AF e BF do triângulo retângulo ABF . (ver figura)

Figura 15: Determinando o triângulo retângulo AFB



Fonte: acervo do pesquisador

De posse das medidas dos catetos do triângulo ABF , podemos construir nos pontos A e B dois triângulos semelhantes ao triângulo ABF , determinando, assim, a direção da escavação em cada extremidade do túnel.

3ª Etapa – Execução do Plano

Agora temos um plano e sabemos os cálculos que devemos fazer para chegar à solução do problema. Na execução do plano calcularemos as medidas dos catetos AF e BF , do triângulo retângulo ABF .

Note que:

$$AF = DE - BC$$

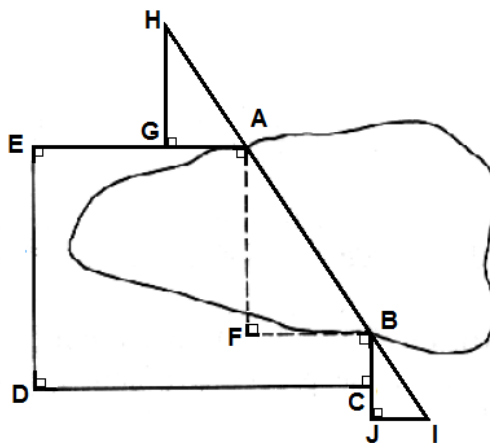
$$BF = CD - AE$$

Assim, podemos calcular a razão k , tal que:

$$k = \frac{AF}{BF}$$

Utilizando o caso de semelhança entre triângulos (LAL), construiremos nos pontos A e B dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos continuem paralelos aos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos a razão entre os catetos seja igual à razão k entre os catetos do triângulo AFB .

Figura 16: Determinando a direção do túnel



Fonte: acervo do pesquisador

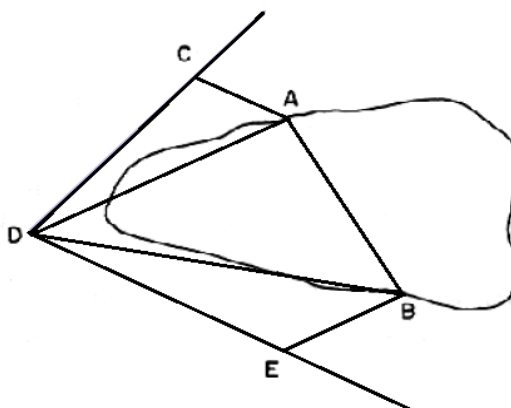
4ª Etapa – Retrospecto ou verificação do realizado

Considerando os detalhes da resolução, podemos perceber que o traçado da linha poligonal $AEDCB$ com ângulos retos nos vértices E , D e C , e a translação dos segmentos DE e CD , respectivamente, até os pontos A e B , nos garantem que o triângulo ABF obtido seja retângulo. De maneira indireta, conseguimos determinar as medidas dos catetos do triângulo ABF e a semelhança de triângulos, mais especificamente caso LAL, nos asseguram que triângulos retângulos com lados proporcionais possuem um par de ângulos congruentes entre si.

O método utilizado primeiramente para obtermos o triângulo retângulo é conhecido como triangulação, e pode ser transferido para solucionar problemas semelhantes para obter medidas inacessíveis, como o caso que citamos de dois pontos encobertos por uma mata. Na sequência, recorreremos à semelhança de triângulos, conceito que tem inúmeras aplicações na Matemática.

Uma outra possível solução, um tanto mais sofisticada para o problema do túnel de Samos porque requer o conhecimento de tabelas trigonométricas, é considerar três pontos C , D e E exteriores à montanha e não colineares, de modo que o perímetro da montanha esteja contido no interior do ângulo $C\hat{D}E$. (ver figura)

Figura 17: Outra possível solução para o problema proposto



Fonte: acervo do pesquisador

Estando no exterior da montanha, podemos realizar diretamente, com instrumentos adequados, as medidas dos segmentos AC , CD , BE e DE e dos ângulos $\hat{A}CD$, $\hat{B}ED$ e $\hat{C}DE$. Utilizando-se da Lei dos cossenos, podemos determinar a medida do segmento AD .

Assim:

$$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (CD) \cdot \cos(\hat{A}CD)$$

Então, temos:

$$AD = \sqrt{(AC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (CD) \cdot \cos(\hat{A}CD)}$$

De maneira análoga, podemos determinar a medida do segmento BD .

Assim:

$$(BD)^2 = (BE)^2 + (DE)^2 - 2 \cdot (BE) \cdot (DE) \cdot \cos(\hat{B}ED)$$

Então, temos:

$$BD = \sqrt{(BE)^2 + (DE)^2 - 2 \cdot (BE) \cdot (DE) \cdot \cos(\hat{B}ED)}$$

Utilizando-se da Lei dos senos, podemos determinar a medida do ângulo $\hat{A}DC$.

Assim:

$$\frac{AC}{\text{sen}(\hat{A}DC)} = \frac{AD}{\text{sen}(\hat{A}CD)}$$

Então, temos:

$$\hat{A}DC = \arcsen\left(\frac{AC \cdot \text{sen}(\hat{A}CD)}{AD}\right)$$

De maneira análoga, podemos determinar a medida do ângulo $B\hat{D}E$.

Assim:

$$\frac{BE}{\text{sen}(B\hat{D}E)} = \frac{BD}{\text{sen}(B\hat{E}D)}$$

Então, temos:

$$B\hat{D}E = \text{arcsen}\left(\frac{BE \cdot \text{sen}(B\hat{E}D)}{BD}\right)$$

De posse das medidas dos ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{D}E$, conseguimos determinar a medida do ângulo $A\hat{D}B$.

Assim:

$$A\hat{D}B = C\hat{D}E - (A\hat{D}C + B\hat{D}E)$$

Logo:

$$A\hat{D}B = C\hat{D}E - A\hat{D}C - B\hat{D}E$$

Novamente utilizando-se da Lei dos cossenos, podemos calcular a extensão do túnel, representado pelo segmento AB .

Assim:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (BD) \cdot \cos(A\hat{D}B)$$

Então, temos:

$$AB = \sqrt{(AD)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (BD) \cdot \cos(A\hat{D}B)}$$

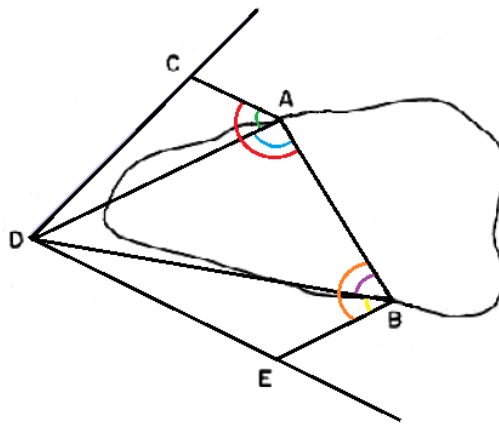
De posse da medida do segmento AB , podemos determinar as medidas dos ângulos $A\hat{B}D$ e $B\hat{A}D$.

$$\frac{AB}{\text{sen}(\hat{A}DB)} = \frac{AD}{\text{sen}(\hat{A}BD)} \Leftrightarrow \hat{A}BD = \arcsen\left(\frac{AD \cdot \text{sen}(\hat{A}DB)}{AB}\right)$$

$$\frac{AB}{\text{sen}(\hat{A}DB)} = \frac{BD}{\text{sen}(\hat{B}AD)} \Leftrightarrow \hat{B}AD = \arcsen\left(\frac{BD \cdot \text{sen}(\hat{A}DB)}{AB}\right)$$

Tornando assim possível determinar a direção e sentido para escavar o túnel em relação a AC e BE .

Figura 18: Determinando a direção da escavação



Fonte: acervo do pesquisador

Para encontrarmos a direção que devemos conduzir a escavação em relação ao segmento AC , necessitamos determinar a medida do ângulo destacado em vermelho na figura acima, para isso basta adicionarmos as medidas dos ângulos $\hat{C}AD$ (verde) e $\hat{B}AD$ (azul). De maneira análoga, encontramos a direção da escavação em relação ao segmento BE .

4. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a metodologia proposta de associação entre duas tendências: de um lado, a que valoriza o apoio pedagógico da História da Matemática e, de outro, a que vê na resolução de problemas a perspectiva didaticamente eficiente para a aprendizagem da Matemática, ambas pedagogicamente pertinentes.

Nossa pesquisa é qualitativa, ou seja, objetiva a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo, a saber, os benefícios da heurística da resolução de problemas de George Polya e da História da Matemática, por meio do resgate de problemas clássicos não rotineiros, ao processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, visando uma melhor *performance* dos alunos nas aulas de Matemática. Como se vê, tem caráter didático-pedagógico.

Depois de analisar as várias tendências em educação Matemática, concluímos que, apesar de todas elas, de algum modo, terem pontos vulneráveis, como aponta Miguel (1997), essa metodologia a nosso ver é adequada; então saímos a campo para aplicá-la numa turma de alunos, experimentalmente, para avaliar seus resultados.

O problema do “aqueduto de Eupalinos” foi escolhido por ser desafiador, motivador.

Vale lembrar que problema semelhante ocorreu recentemente na cidade de São Paulo, na construção da Linha 4 do metrô, fato noticiado pela imprensa local e que se encontra no Anexo II desta dissertação, quando os engenheiros tiveram que perfurar uma montanha, trabalhando em duas frentes que se encontraram no meio da mesma, seguindo o mesmo raciocínio que Eupalinos fez há mais de 2500 anos, mas com uma margem de erro mais aceitável, para os padrões da época, do que a dos engenheiros atuais.

A proposta foi reproduzir em sala de aula o problema do “túnel de Samos” ou do “aqueduto de Eupalinos”.

Os sujeitos participantes da pesquisa eram alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas paulistanas e da periferia e que, em horário alternado, cursavam o preparatório para concorrer a uma vaga em um colégio particular parceiro do ISMART.

O ISMART (Instituto Social Para Motivar, Apoiar e Reconhecer Talentos) é uma instituição sem fins lucrativos que concede bolsas de estudos a alunos estudiosos provenientes de escolas públicas e cujas famílias, de baixa renda, valorizam a educação. Para a seleção desses alunos, os muitos candidatos (há uma elevada relação candidatos por vagas) submetem-se a uma prova classificatória, com conteúdo referente ao ano. O colégio recebe cartas de recomendações de professores das escolas de origem e faz entrevistas com os pais. A bolsa inclui isenção da mensalidade no colégio, todo material utilizado, almoço e auxílio transporte. É necessário apoio da família, devido às reuniões periódicas com os alunos e o monitoramento dos resultados obtidos pelos mesmos.

Desde a sua fundação em 1999, o ISMART vem escrevendo uma história de sucesso, tendo beneficiado mais de 1000 jovens, com o apoio e o investimento de inúmeros parceiros.

Para ter direito à bolsa, o candidato deve estar cursando o 7º ano do Ensino Fundamental, preencher alguns requisitos e participar de um exame de seleção que envolve testes de Português, Matemática e raciocínio lógico, além de entrevista individual, visita domiciliar e dinâmica de grupo.

Os alunos selecionados participam de um curso preparatório de dois anos, em uma das escolas particulares parceiras, no contra turno da escola de origem (ele continua cursando o Ensino Fundamental nessa escola). Esse curso tem a finalidade de preparar os alunos para o ingresso no Ensino Médio na escola particular, com bolsa de estudo integral, incluindo mensalidade, material escolar, alimentação e transporte.

Ao final do 9º ano, esses alunos selecionados, que participam do curso preparatório de dois anos, fazem o Vestibulinho em uma das escolas da rede particular, parceiras do ISMART. Caso sejam aprovados e tenham

responsabilidade com a rotina de estudos e atividades, recebem a bolsa de estudos integral para cursar o Ensino Médio nessa escola.

O Colégio Bandeirantes de São Paulo é, desde 2007, uma das escolas parceiras do ISMART, e oferece os dois anos de curso preparatório (CP) para os alunos desse Instituto. Esses alunos, quando aprovados no Vestibulinho do colégio, passam a cursar o Ensino Médio no próprio Colégio Bandeirantes, ganhando bolsa integral e outros auxílios.

O primeiro ano do curso preparatório, denominado CP1, é equivalente ao 8º ano do Ensino Fundamental; os alunos têm semanalmente duas aulas de Álgebra e duas aulas de Geometria. A maioria dos alunos é apresentada à Geometria nesse momento. Os alunos oriundos de escolas públicas tiveram pouco ou nenhum contato com a Geometria. Como citou Pavanello (1989), os professores deixam para ensiná-la por último, no fim do ano, ou não ensinam, por não gostarem do tema ou não saberem, pois têm lacunas de formação.

O *corpus* de nossa pesquisa constituiu-se das anotações do processo de resolução de um problema em sala de aula, feitas pelos sujeitos participantes, durante três horas/aula. A partir das indagações e respostas de alunos e professor, mediante um questionário sugerido por Polya e adaptado às circunstâncias da aula, constou dos procedimentos, figuras, questionamentos, conjecturas, cálculos, realizados pelos sujeitos envolvidos durante o processo de compreensão até a resolução do problema. O questionário encontra-se no Anexo III desta dissertação e contém na íntegra as questões sugeridas por Polya. Desse modo, os resultados registrados em cartolinas, papel sulfite ou milimetrado, serviram de base para o pesquisador entender como se constroem ou mobilizam os conhecimentos matemáticos dos sujeitos participantes. Também, e mais importante, a interação aluno-aluno e professor-aluno foi observada na pesquisa de campo pelo professor-pesquisador, que revelou a eficácia do método indutivo da heurística de Polya, além do fator altamente motivador de se ter tomado um problema clássico da História da Matemática para resolução.

Como já dissemos, nossa pesquisa é de cunho qualitativo-descritivo; dadas as perguntas/respostas dos sujeitos participantes, analisamos o quão pertinentes elas foram e a potencialidade de essa metodologia, a heurística de Polya associada a um contexto histórico, mobilizar conhecimentos anteriormente adquiridos, assim como a capacidade de organizá-los, com vistas a atingir o objetivo da tarefa. Outro aspecto que foi avaliado, e de suma importância, foi a capacidade de verbalização dos sujeitos, as colocações de suas conjecturas e a capacidade de argumentação quando confrontados os resultados obtidos com outro grupo. Ou seja, o desempenho do grupo dependeu de sua capacidade de compreender o problema, planejar e executar uma solução e avaliar o resultado.

Resumindo, a análise levará em conta a participação dos alunos, a interação com o professor, o interesse demonstrado pelos alunos. Lembrando que o que está sendo analisado é o processo, o método empregado, não importando se os grupos chegaram, ou não, à solução do problema.

4.1 O contexto escolar da pesquisa.

Começamos a fazer o estágio de Matemática no Colégio Bandeirantes no ano de 2005, acompanhando os professores de Matemática em suas aulas, auxiliando na correção das provas, tirando dúvidas dos alunos nos plantões de dúvidas, elaborando e revisando questões para avaliações.

Após três anos de estágio em que aprendemos muito e vivenciamos o dia-a-dia da sala de aula e da relação professor-aluno, na sua maioria de alunos adolescentes, assumimos atribuições de aula neste colégio, começando por lecionar Desenho Geométrico nos 9º anos do Ensino Fundamental.

Como já explicamos na Introdução deste capítulo, o Colégio Bandeirantes é um dos colégios parceiros do ISMART, que tem fins sociais e prospectivos, qual seja, garimpar talentos e financiar o estudo de alunos de baixa renda, que se destacam em suas escolas, na sua maioria, públicas, pelo esforço e dedicação aos estudos.

Conhecemos a proposta do ISMART, acreditamos na sua validade, mas não lecionamos para suas turmas. Porém, lecionamos a disciplina Geometria

para algumas turmas dos oitavos anos, que é a mesma lecionada na turma CP1 do ISMART. Sendo assim, também participamos da seleção dos conteúdos e da bibliografia.

Consideramos a possibilidade de aplicar a heurística de Polya com uma turma de alunos do ISMART por serem turmas com um número reduzido de alunos, e por acreditar que o retorno seria mais visível e imediato. Também tivemos o apoio da professora Rosana Alves, com a qual dividimos várias outras turmas e que conhece nosso trabalho há anos. Ela gostou do nosso projeto de pesquisa e se prontificou a ceder as aulas necessárias para implantá-lo, acreditando que esses alunos se motivariam mais com o desafio de solucionar um problema ao mesmo tempo antigo e atual de engenharia.

Como o currículo do ISMART é mais flexível, comportando palestras, oficinas e atividades culturais variadas, pensamos que seria mais conveniente inserir três horas/aula, ou mais, se necessário, para trabalhar com a resolução de um problema histórico com os alunos. E outro dado importante: os alunos do CP1 ainda não estão pressionados com o exame de admissão para o Ensino Médio, que só ocorrerá ao final do segundo ano de curso.

Conversamos com a Coordenação do colégio, explicamos nosso objetivo e obtivemos autorização para usar apenas três horas/aula para desenvolver a sequência didática programada para o nível de uma turma de 8º ano.

As aulas foram marcadas para o final do 4º bimestre da CP1, correspondente ao 8º ano do Ensino Fundamental. De acordo com os PCN, neste período escolar as noções de direção e sentido, ângulos, perpendicularismo, paralelismo, Teorema de Pitágoras e o cálculo de áreas das principais figuras planas já foram trabalhados.

Temos de mencionar, ainda, que do currículo do CP1 consta a disciplina Desenho Geométrico, em um nível bem avançado e de alto grau de exigência, a qual já não é comum nos projetos políticos pedagógicos de outras escolas, mas que auxilia muito o desenvolvimento da percepção e do raciocínio visual e da aquisição de habilidades manuais.

Ao final do curso de Desenho Geométrico, os alunos já adquiriram muita habilidade em problemas de construções geométricas e sabem que devem fazer o esboço da figura antes de construí-la.

Além disso, no ciclo anterior os alunos devem ter estudado as formas geométricas, suas características como planicidade, bidimensionalidade e tridimensionalidade, seus elementos, propriedades e algumas de suas relações.

Nessa fase escolar, os alunos já aprenderam nas aulas de Geometria os procedimentos de observação, representação e construção de figuras geométricas, bem como a formulação de conjecturas acerca das propriedades e relações observadas. Também devem ter adquirido destreza no manuseio de materiais como régua, compasso, esquadros e transferidor na realização de atividades e na resolução de problemas.

Como já citamos anteriormente, no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), a recomendação é de que no 8º ano se trabalhe a Geometria mais intensamente no 4º bimestre, quando se pressupõe que os alunos já terão desenvolvido habilidades que envolvem estimativas e cálculos algébricos. Nesse bimestre são abordados o cálculo de área de figuras planas, os teoremas de Tales e Pitágoras e os prismas. No terceiro bimestre, o conceito de plano cartesiano é trabalhado em uma situação de aprendizagem com figuras geométricas e suas coordenadas. Nessa situação são ampliados os conceitos de simetria e homotetia por meio das transformações das figuras no plano. Para o trabalho com áreas, utiliza-se o conceito de equivalência de figuras planas e áreas de retângulos, pois se espera que os alunos já saibam realizar esse tipo de cálculo.

As aulas que programamos foram inseridas no contexto escolar como oficinas, em que se exige do aluno um conhecimento diferente, mais prático. Assim como as questões do ENEM, que são formuladas de modo que os alunos tenham que mobilizar conhecimentos de várias disciplinas e transferir para situações-problema, cuja solução requer estabelecer conexões e passar da teoria à prática.

Os catorze alunos da turma CP1, meninos e meninas com doze anos de idade, eram extremamente receptivos. Esforçados, eles já vieram das aulas da manhã na escola pública em que estão matriculados e deslocaram-se de seu bairro na periferia, pegando ônibus e metrô, até o centro de São Paulo, para assistir às aulas do período da tarde no Colégio Bandeirantes. Mas nem por isso eles se mostravam desinteressados. Pelo contrário, davam muito valor aos estudos e agarravam com unhas e dentes a oportunidade de “vencer na vida”. As experiências que eles e seus pais viveram, e que só eles sabem quanto foram marcantes, eram motivadoras o bastante para ajudá-los a enfrentar os problemas práticos, inclusive os escolares.

A aula para essa turma do ISMART tinha que ser diferente das demais turmas do Colégio Bandeirantes: passamos à preparação da mesma. Primeiramente relemos a história da construção do aqueduto por Eupalinos; depois resolvemos o problema metodicamente, traçando as figuras, procurando problemas correlatos e outras soluções possíveis. Preparamos a tarefa minuciosamente, seguindo etapa por etapa da metodologia da resolução de problemas de George Polya. Faltava apenas aplicar a tarefa, anotar as observações e decidir como avaliar os resultados obtidos.

4.2 A formulação do problema do aqueduto no contexto escolar

A tarefa que nos propusemos trabalhar com a turma CP1 teve a seguinte formulação: Projetar a construção de um aqueduto que, passando pelo interior de uma montanha, seja escavado em duas frentes distintas de trabalho, ao mesmo tempo, as quais devem encontrar-se no interior da montanha, de maneira que o caminho de escavação seja o mais reto possível. São dados dois pontos no perímetro da montanha, correspondentes à entrada e à saída do túnel.

Em termos matemáticos, eles precisariam determinar um segmento de reta entre dois pontos no plano.

Não foi a única vez que essa técnica de perfurar um túnel através de uma montanha foi utilizada, explicamos aos alunos. Há poucos anos, na execução da obra da linha 4-amarela (Luz-Vila Sônia) do Metrô de São Paulo,

túneis foram escavados a partir de duas frentes de trabalho, e projetados para se encontrarem no meio do caminho, mas ocorreu um erro que provocou um desencontro em um ponto que deveria ser a conexão dos túneis Caxingui/Três Poderes, na zona oeste de São Paulo.

A falha obrigou as empreiteiras a fazer correções no projeto e acarretou um custo extra e uma demora maior no cronograma previsto da obra. O encontro das duas frentes de túneis não foi possível por conta de um desalinhamento lateral de 80 cm entre elas. Especialistas afirmaram que parâmetros aceitáveis seriam, no máximo, de 10 cm; para alguns, ainda menos. (Anexo II – Notícia de jornal)

4.3 A resolução do problema do aqueduto na perspectiva de George Polya

Baseando-se em suas pesquisas sobre a descoberta Matemática, Hadamard (apud Miranda, 2014, p.50) diz que “entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de Geometria ou Álgebra e uma obra de invenção, pode-se dizer que existe apenas uma diferença de grau, de nível, pois ambas as obras são de natureza similar”.

Depois da exposição do problema à turma, apresentamos a dinâmica da atividade.

A turma foi dividida em três pequenos grupos, dois de cinco alunos e um de quatro alunos, para que todos pudessem participar das discussões, conjecturar, elaborar e validar um plano de ação para resolver o problema.

Sequência didática: primeira aula

Após a organização da classe e dos grupos, fizemos a apresentação de *slides*, usando a projeção de imagens do túnel de Eupalinos como meio de motivação para o início da atividade, o que não levou mais que dez minutos.

Foi feita uma leitura silenciosa da história do Aqueduto, seguida de explicação da tarefa para a turma, uma vez que a leitura e interpretação textual pode ser uma barreira para a compreensão do problema. Muitas vezes, por causa da deficiência na leitura, os alunos sabem realizar os cálculos, compreendem relações Matemáticas, mas não conseguem resolver problemas matemáticos.

A explicação detalhada da tarefa tinha por objetivo que eles se familiarizassem com o problema; ela foi necessária principalmente para explicitar as regras para a resolução do problema. Os alunos, a princípio, pareciam não compreender as condições para a construção do aqueduto.

Sabemos que a fase de introdução de uma tarefa é um momento muito importante neste tipo de aula, pois é quando boas questões que mobilizam os alunos para a busca de soluções devem ser bem esclarecidas e ter explicitados seus objetivos, sendo assim valorizadas. Além disso, um enunciado claro pode auxiliar no processo de realização da tarefa, principalmente porque o aluno pode retornar a ele sempre que tiver dúvidas. Por esse motivo, procuramos elaborar o enunciado da tarefa com cuidado, fazendo, posteriormente, uma leitura e interpretação oral com os alunos.

Antes de iniciar a tarefa conversamos com os alunos sobre seu objetivo, ou seja, buscar estratégias para resolver o problema da construção do aqueduto, trabalhando em equipes, levantando hipóteses, argumentando e defendendo suas ideias. Além disso, foi necessário orientar os alunos sobre como trabalhar em grupo, estabelecendo um relator para anotar as ideias, já que esses alunos do ISMART não costumavam trabalhar em grupo nas aulas de Matemática, pelo menos nas aulas do curso preparatório.

Logicamente, para que fosse possível e satisfatória essa convivência na sala de aula, foi necessária uma negociação entre as partes envolvidas e o estabelecimento de um conjunto de normas de relacionamento, que demarcaram, claramente, o espaço de cada um, e o que é lícito e o que não é lícito fazer, como acessar a *internet*, por exemplo.

Procuramos seguir à risca as etapas da sequência de Polya e lemos o enunciado do problema com os alunos, impresso numa folha de papel sulfite que cada um recebeu. É importante que eles se familiarizem com o problema para poder compreendê-lo.

Problema: “Projetar a construção de um aqueduto que, passando pelo interior de uma montanha, seja escavado em duas frentes distintas de trabalho, ao mesmo tempo, as quais devem encontrar-se no interior da montanha, de maneira que o caminho de escavação seja o mais reto possível. São dados dois pontos no perímetro da montanha, correspondentes à entrada e à saída do túnel”.

Em seguida, retomamos a explicação da proposta para os alunos, falamos da importância do projeto, levar água de um lado a outro da montanha, utilizando o caminho mais curto. Aliás, o tema escolhido parece muito apropriado para o momento que a cidade de São Paulo está vivendo. Esclarecemos sua escolha pelo fato de ser um problema histórico prático, não rotineiro, enfrentado na Antiguidade e, também, atual.

Em ambos os casos, e quanto à construção de túneis, de modo geral, obras de engenharia ficaram famosas, muito embora tenham incorrido em pequenos erros de cálculo. Outra obra magistral da engenharia moderna também se utilizou da mesma técnica e do mesmo raciocínio geométrico de Eupalinos para construir, sob o Canal da Mancha, o Eurotúnel. Aconselhamos aos alunos que quiserem saber mais sobre o assunto para pesquisarem.

Após apresentar-lhes a proposta, simulamos a montanha com uma mochila sobre uma cartolina, em cima da carteira. Assim que os alunos fazem o contorno da “montanha”, retira-se a mochila e, a partir daí, eles farão suas medições e anotações. Passamos as regras do projeto para os grupos: os únicos materiais permitidos e distribuídos a eles são compasso, régua, cartolinas e canetinhas. Outra orientação dada é que não pode ser efetuada nenhuma medida que avance o perímetro da montanha ou que seja feita dentro da área ocupada pela montanha/mochila.

Figura 19: O grupo 1 simula a montanha



Fonte: acervo do pesquisador

Figura 20: O grupo 2 simula a montanha



Fonte: acervo do pesquisador

Figura 21: O grupo 3 simula a montanha



Fonte: acervo do pesquisador

Depois que organizamos as condições para a resolução do problema, vamos compreender o problema juntos, professor e alunos. Para identificar os interlocutores-alunos, usaremos apenas as iniciais do nome de cada um.

Prof. Fábio: *Compreenderam o problema? Conseguem visualizar a situação? Percebem o objetivo da questão?*

Ma: *Por que simplesmente não contornar a montanha para levar água potável para o outro lado da ilha?*

Prof. Fábio: *Isso esbarra em uma das condicionantes. A obra encareceria muito se assim se procedesse, além do que levaria muito mais tempo para que os moradores tivessem acesso a água potável. Construir o aqueduto ao menor custo e tempo possíveis.*

Ro: *Naquela época não havia o “tatuzão” que foi utilizado no metrô em São Paulo. Não ia demorar mais cavar um túnel através da rocha?*

Prof. Fábio: *Não, não havia, mas eles tinham muitos operários e a rocha do monte Castro era calcárea, fácil de escavar, mas mesmo assim foram necessários 15 anos para o término desse túnel.*

Prof. Fábio: *Vocês conhecem todos os dados? Quais são os dados?*

Br: *A figura de uma montanha e dois pontos no perímetro dela.*

Lu: *O contorno de uma montanha.*

Bi: *A entrada e a saída do túnel.*

Prof. Fábio: *O que pede o problema? Qual o “x” da questão? Qual é a incógnita?*

Todos os alunos: *Cavar o túnel.*

Prof. Fábio: *Simples assim?*

Ro: *É, saindo do ponto A e chegando em B.*

Prof. Fábio: *Mas existem algumas condições. Qual é a condicionante?*

Ro: *O que é uma condicionante?*

Prof. Fábio: *São as condições que devem ser respeitadas necessariamente, que delimitam a solução do problema. Veja esse exemplo: dadas as medidas dos catetos de um triângulo, determine a medida da hipotenusa, ou seja, a incógnita, como já vimos.*

Ro: *Esse é fácil! É só aplicar o teorema de Pitágoras!*

Prof. Fábio: *Mas para qualquer problema que envolva triângulos eu posso utilizar o teorema de Pitágoras?*

Todos os alunos, em coro: *Não.*

Vi: *Só quando é um triângulo retângulo.*

Prof. Fábio: *Isso mesmo, o fato de o triângulo ser retângulo é a condicionante para a aplicação do teorema de Pitágoras.*

Prof. Fábio: *Ficou mais claro para vocês o que é uma condicionante? Então, voltemos ao problema do túnel, nesse caso qual é ou quais são as condicionantes?*

Do: *Que as escavações se encontrem no meio da montanha.*

Pe: *Que as duas equipes se encontrem no meio do túnel.*

Bi: *Tempo! Tempo é uma condição. Eles precisavam fazer o túnel o mais rápido possível. Por isso resolveram usar duas equipes, uma em cada lado.*

Prof. Fábio: *Isso! Mas, ainda falta algo. Pensem na ideia da Bi; se existem duas equipes trabalhando, uma em cada extremidade do túnel, é porque há uma preocupação com a duração da execução da obra. O que poderia ser incorporado ao projeto para satisfazer essa condicionante e contribuir para reduzir a duração da obra?*

Ar: *Seguir em linha reta?*

Prof. Fábio: *Por quê? Por que isso reduziria o tempo da obra?*

Ar: *Porque a reta é a menor distância entre dois pontos. E aí ia demorar menos tempo pra fazer o túnel.*

Prof. Fábio: *Ótima colocação Ar, porém o termo matemático correto, seria o segmento de reta é a menor distância entre dois pontos.*

Ar: *Ah, é verdade, porque a reta é infinita e o segmento tem começo e fim.*

Prof. Fábio: *Isso mesmo! Porém, em termos financeiros, o que conseguiríamos planejando um túnel mais curto?*

Na, Je, Ma: *Economia!*

Je: *Teria menos montanha para cavar, a obra seria mais rápida. Meu pai fala que quanto mais atrasa um serviço, menos dinheiro sobra para os trabalhadores.*

Prof. Fábio: Muito bem, já temos algumas condicionantes: seguir em linha reta e fazer as equipes se encontrarem no meio da montanha; outra condicionante é a de que a execução do projeto se dê num plano definido. Lembrem-se de que, em nossa proposta, estamos simulando uma versão simplificada do problema original, que envolve a noção de tridimensionalidade.

Prof. Fábio: Agora, o que é necessário para conseguir que uma frente de trabalho encontre a outra frente no meio da montanha? Do que é que se precisa? O que é que se quer, na verdade? Qual é a incógnita de fato?

Alunos:????????????????

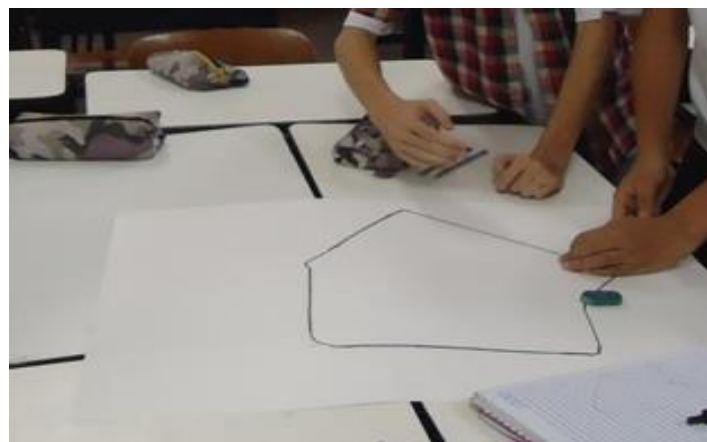
Prof. Fábio: Olhem para o fim! Não esqueçam a sua meta! Pensem naquilo que desejam obter!

Alunos:????????????????

Prof. Fábio: Bom, nesse momento vocês já conseguem imaginar como seria o traçado do aqueduto visto de cima? Discutam em grupo como poderia ser essa figura! Tracem uma figura que represente a montanha e os pontos de entrada e saída do túnel. Usem uma notação adequada.

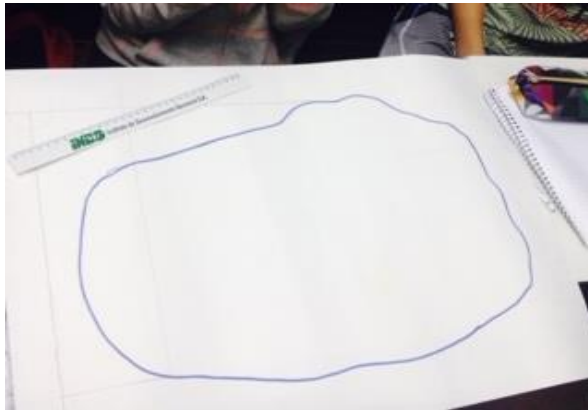
Após alguns minutos de discussão, os grupos apresentam seus esboços.

Figura 22: Contorno da montanha (a)



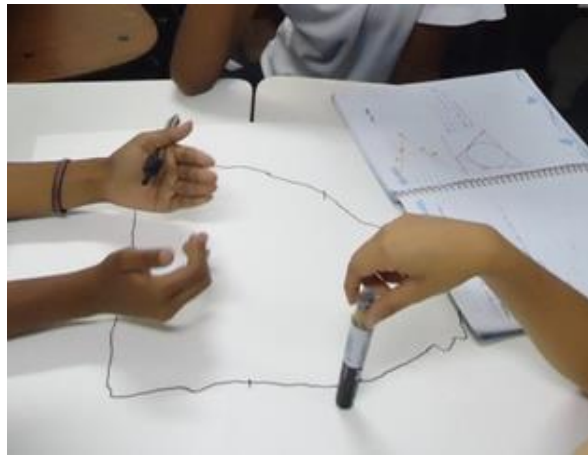
Fonte: acervo do pesquisador

Figura 23: Contorno da montanha (b)



Fonte: acervo do pesquisador

Figura 24: Contorno da montanha (c)



Fonte: acervo do pesquisador

Prof. Fábio: *Muito bom!!! Excelentes figuras, os pontos A e B denotam a entrada e a saída do túnel. Agora, com o auxílio dessa figura que os três grupos conseguiram fazer, vamos avaliar as informações que já discutimos e tentar decifrar qual seria a nossa incógnita.*

Ro: *Mas, professor, a nossa incógnita não é construir o túnel?*

Prof. Fábio: *Sim, mas o que buscamos na elaboração do projeto, que satisfaça todas as condicionantes que anotamos na lousa. Olhem, mais uma vez: tempo, seguir em linha reta e as duas frentes dos operários se encontrando no interior da montanha.*

Prof. Fábio: Se não conseguimos satisfazer todas as condicionantes ao mesmo tempo, vejamos se é possível satisfazer parte delas.

Je: Mas está muito difícil!

Prof. Fábio: Bom, sabemos que as escavações, partindo de cada extremidade, devem seguir em linha reta. Tentem fazer algumas simulações.

Ma: Professor! Professor! É o ângulo! É o ângulo!

Prof. Fábio: Ma, explica a sua teoria para nós?

Ma: Eu fiz assim, coloquei uma régua em cada ponto, como se fossem os caminhos a serem seguidos pelos escavadores, fiquei girando as régua e percebi que só se encontrariam em linha reta se tivessem o mesmo ângulo no começo do túnel.

Prof. Fábio: Hum! Ma, eu notei que você e Bi estavam folheando a apostila de Geometria.

Ma: Ah, professor, me desculpe, não sabia que não podia usar a apostila.

Prof. Fábio: Não é isso. Só queria saber se essa teoria, você já tinha visto em outra ocasião? Se já havia resolvido algum problema semelhante?

Ma: Foi isso mesmo! No começo do ano estudamos com a Professora Rosana paralelismo. Quando girei as régua, lembrei da imagem de duas retas paralelas cortadas por outra reta. Por isso, peguei a apostila para rever essa lição. Então percebi que os ângulos devem ter a mesma medida. E também lembrei que essa outra reta é chamada de transversal e esses ângulos são chamados alternos internos.

Prof. Fábio: Estou surpreso. Todos entenderam a explicação da Ma?

Alunos: Sim!!!

Prof. Fábio: Só para ficar claro, a incógnita do nosso problema é a direção da reta que contém o túnel, a mesma está diretamente relacionada com um ângulo. Todos compreendem o conceito de direção?

Ro: Quando saímos pelo portão da escola todos pegamos a rua em direção ao metrô.

Prof. Fábio: Olha, Ro, esse é um equívoco muito comum entre as pessoas. Há diferença entre os conceitos de direção e sentido.

Explico rapidamente. Podemos dizer que toda reta tem uma direção e dois sentidos. Vou usar o seu exemplo: quando saímos do colégio encontramos a rua Estela, ela tem uma única direção dada por um ângulo, e dois sentidos, como você havia dito - sentido ao metrô ou sentido à Avenida 23 de Maio. Somente retas paralelas possuem a mesma direção. Ficou mais claro?

Ro: *Vou perguntar essa para o meu pai, aposto que ele vai se enganar.*

Prof. Fábio: *Ótimo, pessoal. Agora que conhecemos a incógnita, as condicionantes e ainda conseguimos traçar uma figura para nos auxiliar, encerramos a primeira etapa do projeto, a compreensão do problema. Na próxima aula, ainda hoje após o intervalo, daremos início à segunda etapa do projeto, onde pensaremos num plano para conseguirmos determinar a direção para a qual devemos conduzir as escavações em cada extremidade do túnel.*

Ma: *Agora que a gente ia resolver o problema, termina a nossa aula...*

Sequência didática: segunda aula

Na aula seguinte, ao voltar do intervalo, um aluno egresso do CP e que hoje é meu aluno no Ensino Médio, nos procurou e pediu para assistir à aula. Ele e outros alunos que já passaram pelo CP continuam a dar assistência aos novatos, principalmente nas disciplinas em que eles têm mais dificuldade, Matemática e Inglês. Aceitamos a ajuda e pedimos que ele, além disso, tirasse fotos das etapas de resolução.

De volta à sala de aula, encontramos diversos alunos debruçados sobre a figura que representava a montanha, discutindo sobre como resolver o problema. O problema do aqueduto os desafiara.

Prof. Fábio: *Pessoal, nesta aula vamos estabelecer um plano para logo em seguida encaminharmos a solução do problema.*

Ro: *O que seria esse plano?*

Prof. Fábio: *Quando queremos resolver um problema a etapa mais difícil é a concepção da ideia de um plano. Podemos dizer que temos um plano, quando conhecemos em linhas gerais quais os teoremas, os cálculos ou desenhos que precisamos para obter a incógnita. Voltemos ao exemplo da outra aula, quando tínhamos as medidas*

dos catetos do triângulo e queríamos determinar a medida da sua hipotenusa. Nesse caso, como havíamos discutido, o plano seria utilizar o Teorema de Pitágoras para encaminhar a resolução do mesmo. Vocês já fazem nas aulas do professor Ismael, quando traçam o esboço de um problema de desenho geométrico, antes da construção com régua e compasso do mesmo.

Prof. Fábio: *Agora, nas suas equipes, reflitam e discutam sobre qual a melhor estratégia, e se ela é viável para o encaminhamento da resolução. Vou circular entre os grupos, caso queiram perguntar algo.*

Depois de deixar os alunos trabalharem por alguns minutos, abordamos o grupo 1, formado por Ro, Do, Pe e Ar.

Prof. Fábio: *E então, chegaram a alguma ideia? Já têm um plano?*

Pe: *Sim. Se construíssemos um ângulo em um dos pontos e transportássemos para o outro ponto, assim teríamos ângulos iguais, do modo como a Ma pensou.*

Prof. Fábio: *Mas qual seria a medida desse ângulo? Esse ângulo teria uma medida qualquer? Pensem um pouco mais a respeito ...*

Sentimos que era o momento de uma intervenção de nossa parte, pois o raciocínio dos sujeitos participantes não progredia. A dúvida era geral nesse e nos outros grupos. Eles sabiam que os ângulos deveriam ser iguais, mas a medida ...

Vamos à lousa, solicitamos a atenção dos demais alunos e apresentamos um desenho em que, traçando um ângulo de medida qualquer em um dos pontos, transportamo-lo para o outro ponto, onde obtemos duas semirretas que se interceptam, porém elas não possuem a mesma direção.

Figura 25: Averiguando a hipótese do aluno

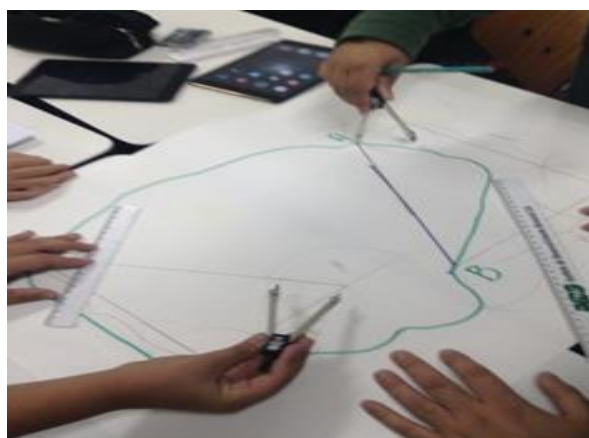


Fonte: acervo do pesquisador

Ro: *E se primeiro traçássemos duas retas paralelas pelos pontos A e B, para depois construirmos um ângulo em um dos pontos e transportá-lo para o outro ponto?*

Vamos à lousa mais uma vez para esboçar a situação sugerida pelo aluno.

Figura 26: Transportando ângulos



Fonte: acervo do pesquisador

Bi: *Professor, fiz algumas simulações com régua e percebi que na maioria dos casos as retas não se encontram, ou seja, ficam paralelas. Só em um caso elas são coincidentes.*

Prof. Fábio: *Você usou transferidor? Porque aí a brincadeira perde a graça.*

Bi: *Não, mas eu não saberia determinar sua medida de outra maneira.*

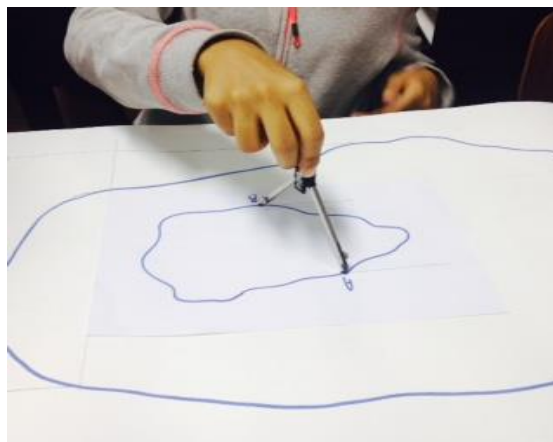
Prof. Fábio: *Em casos como este, o melhor a fazer é ir por partes. Vamos separar o problema maior em dois menores: primeiro vamos buscar uma estratégia para obter as retas paralelas, sabendo que se trata do entorno de uma montanha; depois, vamos determinar a medida do ângulo necessário para que as semirretas sejam coincidentes.*

Prof. Fábio: *Vocês conhecem um problema parecido? Já resolveram um problema desse tipo?*

Bi: *Em Desenho Geométrico já resolvemos vários problemas que envolvem retas paralelas, e o método que usamos foi o de traçar um paralelogramo como esse.*

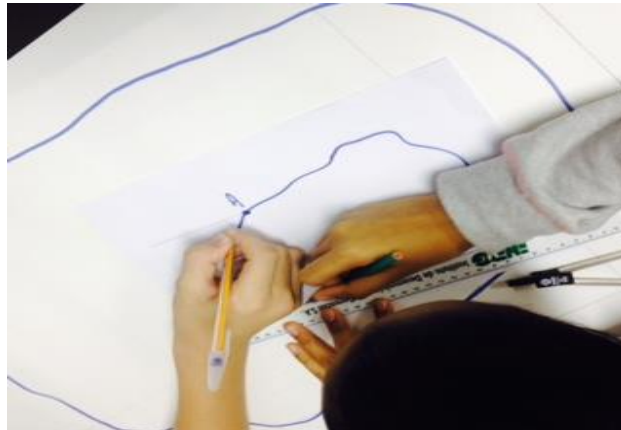
A aluna Bi traça um paralelogramo da seguinte maneira: com a régua traça um segmento a partir do ponto A, com o compasso mede o tamanho desse segmento e traça um arco de circunferência com raio igual a essa medida e centro em B. Depois, com o compasso mede a distância entre os pontos A e B, e traça um arco de circunferência com raio de mesma medida e centro na outra extremidade do segmento conduzido por B. Porém, ela desrespeita uma das regras iniciais, quando executa uma medida no interior do perímetro da montanha, a distância entre os pontos A e B.

Figura 27: Paralelogramo de Bi (a)



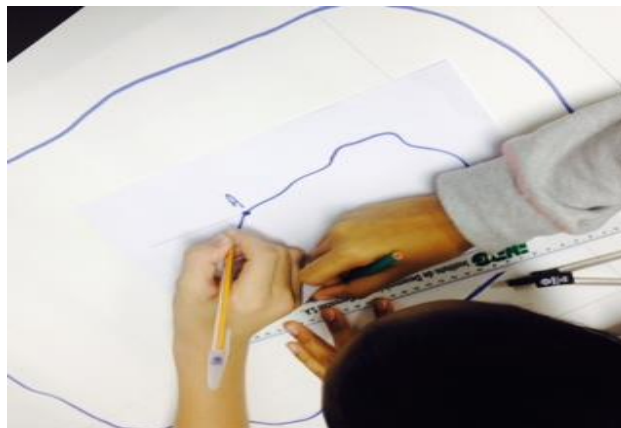
Fonte: acervo do pesquisador

Figura 28: Paralelogramo de Bi (b)



Fonte: acervo do pesquisador

Figura 29: Paralelogramo de Bi (c)



Fonte: acervo do pesquisador

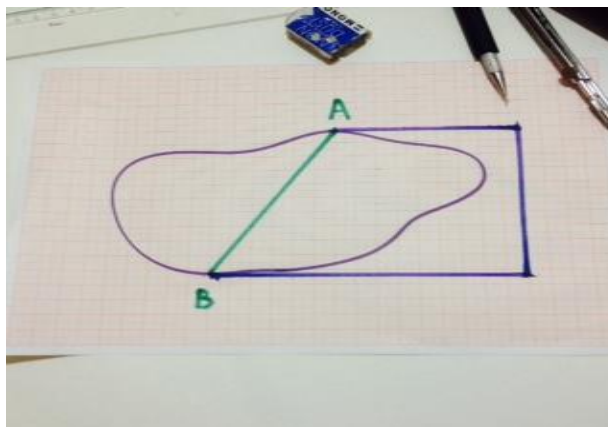
Prof. Fábio: *O seu raciocínio está correto, B_i , mas esbarra em uma das regras inicialmente estabelecidas. Você não poderia ter usado a medida do segmento AB , pois esta é uma medida inacessível, ela é interior à montanha.*

Prof. Fábio: *Pessoal, busquem outras alternativas, sem infringir as condições impostas.*

Percebemos, então, que os alunos do grupo 2 faziam suas tentativas sobre uma folha de papel milimetrado. Ficamos observando e procuramos não intervir, até que o relator do grupo solicitou a nossa ajuda.

Vi: Professor, nós partimos da ideia de um problema semelhante que estudamos recentemente, que pedia para construirmos com régua e compasso um trapézio retângulo; eram dadas as bases, maior e menor, e a altura. E aí a Lu desenhou no papel milimetrado a figura da montanha de modo que o trapézio se encaixava nela, conforme esse desenho.

Figura 30: Revisitando um problema de Desenho Geométrico



Fonte: acervo do pesquisador

Prof. Fábio: Muito bem, agora que vocês já chegaram a uma ideia para obter as retas paralelas, pensem em como achar a direção, ou o ângulo da escavação.

A estratégia adotada pelo grupo 2 logo foi compartilhada entre os demais grupos. Nesse momento, eles praticamente abandonaram o planejamento e passaram à execução do plano, o que foi um erro.

Prof. Fábio: Pessoal, pelo que observei todos construíram um trapézio retângulo no entorno da montanha. Então, conseguimos resolver a primeira das duas partes em que o problema foi desmembrado. Vamos nos ater à segunda parte, que é determinar a direção da escavação.

Faltando poucos minutos para o término da aula, os integrantes do grupo 3 nos chamam. Querem mostrar como eles acreditam que poderia ser resolvido o problema.

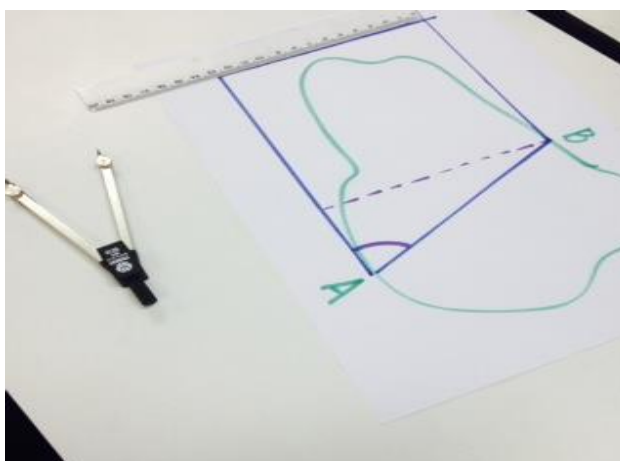
Je: Pegamos o ângulo da base maior, não o ângulo reto, e o transportamos para a base menor, supondo uma reta que ligasse os pontos A e B.

Prof. Fábio: Je, vocês supõem trabalhar com uma reta que ainda não determinamos. Esse ângulo que vocês transportaram não é conhecido.

Ma: Professor Fábio, na aula sobre o teorema de Pitágoras, a professora Rosana repete sempre que uma técnica pra resolver problemas sobre trapézios retângulos é deslocar a altura paralelamente, como se as bases fossem trilhos, até decompor esse trapézio em um retângulo e um triângulo retângulo.

Prof. Fábio: Legal! Todos lembraram disso? Então tentem explorar essa possibilidade.

Figura 31: Obtendo o triângulo retângulo



Fonte: acervo do pesquisador

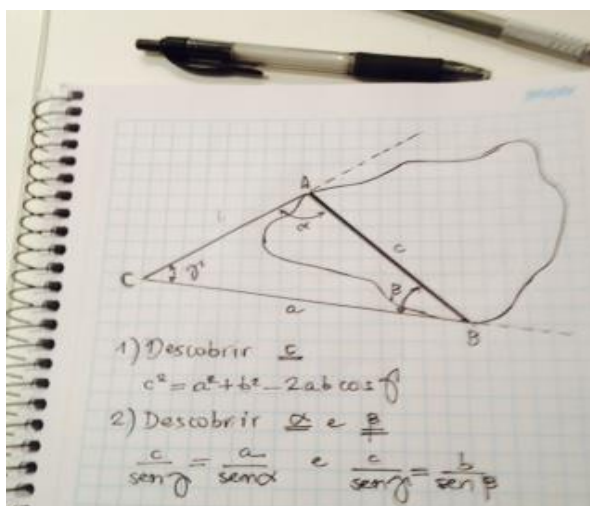
Fim da segunda aula. Recolhemos todo o material elaborado pelos grupos e avisamos que teremos mais uma aula, no dia seguinte, para fechar o problema.

Sequência didática: terceira aula

No dia do último encontro com a turma do CP1, no intervalo do período matutino, fomos procurados pelo aluno do Ensino Médio que nos ajudou, fotografando a atividade. Ele havia esboçado uma solução bem diferente da

utilizada por Eupalinos, a qual norteava a minha pesquisa. Era uma solução que utilizava como recurso conceitos que acabara de conhecer, como a lei dos senos e a lei dos cossenos. Notamos que essa solução evidenciava uma particularidade do problema que desencadeava uma solução mais simples, acredito eu, mas menos engenhosa que a de Eupalinos.

Figura 32: Resolução apresentada pelo aluno do Ensino Médio



Fonte: acervo do pesquisador

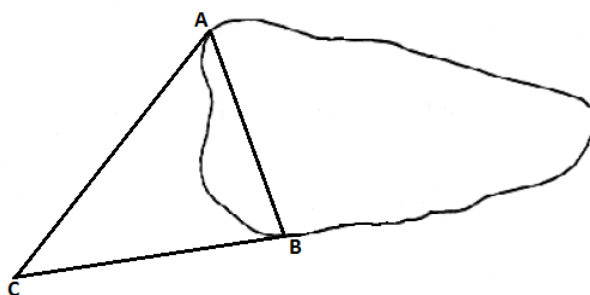
Isso nos fez refletir sobre o porquê dessa solução não ser mencionada em nenhuma fonte bibliográfica que pesquisamos durante o período desta pesquisa. Concluimos que a solução encontrada por Eupalinos era mais abrangente, pois resolvia o problema mesmo que os pontos A e B estivessem em qualquer posição no entorno da montanha, sendo que a do aluno do Ensino Médio e os da turma CP1 previam que os pontos estivessem em concordância com os recortes do perímetro da montanha.

Esse fato nos inspirou a escrever uma outra solução para o problema da ilha de Samos, que apresentei no capítulo 3.3, mostrando que “problema algum fica completamente esgotado. (...) é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução”, segundo nos ensina Polya (1978, p.10). A solução que deu o aluno do EM, descrevemos a seguir.

Ele considerou um ponto C externo ao perímetro da montanha, de modo que este ponto e os pontos A e B, que representam as extremidades do túnel,

sejam vértices de um triângulo. Como na figura abaixo. Explicou que sendo os segmentos AC e BC e o ângulo ACB externos ao contorno montanha seria possível obtermos, diretamente, essas medidas dos mesmos. E que fazendo uso da lei dos cossenos, seria possível calcularmos a extensão do túnel, representada na figura pelo segmento AB. De posse dessas medidas e utilizando-se da lei dos senos, esse aluno determinou as direções em que a montanha deveria ser escavada em ambas as frentes de trabalho.

Figura 33: Esquematisando a resolução do aluno do Ensino Médio



Fonte: acervo do pesquisador

No último encontro com a turma CP1, retomamos as considerações da última aula, elencamos os progressos da turma e devolvemos as cartolinas e as folhas avulsas usadas como rascunho, que havíamos recolhido na aula anterior.

Assim que os alunos pediram a palavra, ficou evidente que o problema do aqueduto havia deixado inquietações, e geraram reflexão no intervalo do segundo para o terceiro encontro. Tenho que gerenciar a ansiedade dos alunos e organizar a intervenção de cada um. Convidamos um dos alunos do grupo 1 para falar, o Je, que nos pareceu ao longo da atividade ter mais dificuldade:

Je: Professor, lembra o que eu disse da última vez? Então, pensamos no que você falou e discutimos no grupo a ideia da Ma sobre transportar a altura nos trapézios e corrigimos o que estava errado. Agora acho que acertamos, todos do grupo aceitaram a nova hipótese.

Prof. Fábio: *Se todos concordam com esse plano, passem à próxima etapa, que é a execução do plano. Façam uma descrição do processo.*

Depois passamos a percorrer os grupos, iniciando pelo grupo 2.

Prof. Fábio: *Fale você, Na, o que estão fazendo. O que descobriram.*

Na: *Estamos com dificuldade para achar uma ideia boa, o Br e o Vi só brincam, não conseguem se concentrar nem deixam a gente raciocinar direito sobre o problema. Precisamos de um pouco mais de tempo.*

Prof. Fábio: *Ok. Pelo menos tentem se organizar e usem os próximos minutos para pensar num plano para resolver o problema.*

Por último, abordando o grupo 3, do qual faz parte a Ma, pedimos que relatem o que fizeram até então. É ela a relatora do grupo:

Ma: *Olha, professor, a ideia do grupo do Je, na verdade ele copiou da gente. Mas fizemos algumas mudanças no final.*

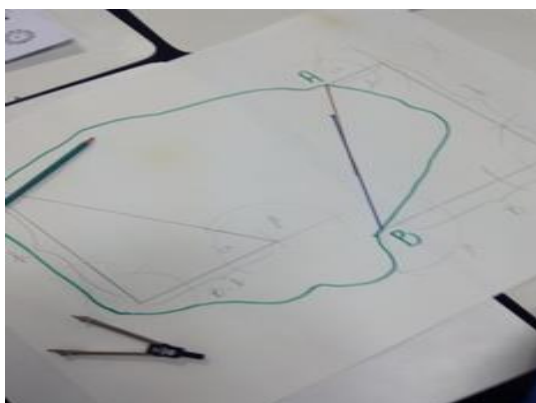
Prof. Fábio: *Legal, passem para a execução do plano. Logo abriremos a discussão para toda a turma.*

Retornamos ao grupo 1 e observamos que eles já finalizaram a execução do plano e atingiram a meta que era traçar as semirretas partindo de cada extremidade do túnel. Como era esperado, elas não ficaram totalmente coincidentes, o que gerou dúvidas no grupo se haviam cometido algum erro de planejamento.

A imperfeição do traçado despertou neles a necessidade de rever o plano. Logo após essa medida, percebi que eles refizeram o traçado e pouco melhor foi o resultado. A estratégia utilizada pelo grupo foi a seguinte: depois de obterem as retas paralelas, com a construção do trapézio retângulo descrito anteriormente, construíram uma figura auxiliar: um triângulo retângulo onde um dos catetos é a altura do trapézio retângulo e o outro a diferença entre as bases.

Essa ideia foi concebida pelos alunos quando relataram conhecer um problema correlato, onde transportavam a altura do trapézio retângulo destacando no mesmo um retângulo e um triângulo retângulo. Assim, determinaram os ângulos agudos deste triângulo retângulo, e em seguida transportaram um desses ângulos para os pontos A e B, determinando a direção de escavação em cada extremidade.

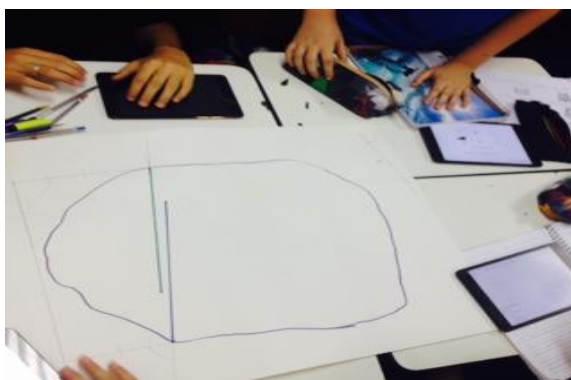
Figura 34: Resultado final do grupo 1



Fonte: acervo do pesquisador

A estratégia utilizada pelo grupo 3 foi praticamente igual. Porém, eles observaram que a figura auxiliar construída pelo grupo 1 não era viável em termos práticos, pois a hipotenusa da mesma era a extensão do túnel. Naturalmente perceberam o conceito de semelhança de triângulos, quando incorporaram no seu projeto o uso de uma figura menor: um triângulo retângulo com catetos proporcionais ao do triângulo utilizado pelo grupo 1 (esse triângulo, que foi utilizado para a determinação da direção, acha-se no canto superior direito da foto abaixo). O traçado do túnel ficou mais caprichado, porém diferentemente do grupo 1, as semirretas não se interceptaram no interior da montanha, ficando praticamente paralelas, como também era previsível. O grupo foi mais além, realizando o cálculo da extensão do túnel por eles projetado.

Figura 35: Resultado do grupo 3 - as escavações não se encontram



Fonte: acervo do pesquisador

Comentamos com os integrantes desse grupo que, com este dado novo, e a distância entre as semirretas, seria possível estimar o erro percentual cometido, e perguntamos quais as possíveis causas para o ocorrido. Um deles considerou a qualidade do compasso utilizado, enquanto outros não souberam explicar.

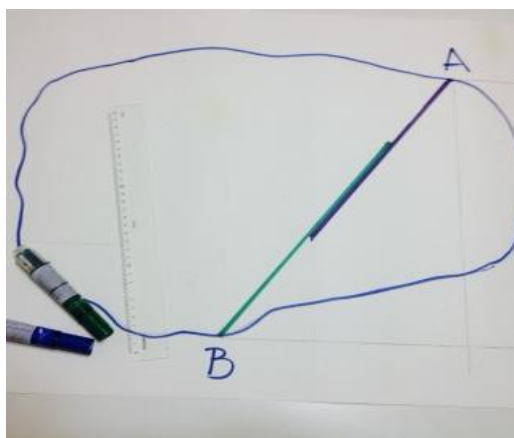
Figura 36: discutindo as causas do desvio



Fonte: acervo do pesquisador

O grupo 2 fez algumas anotações, chegou ao traçado ideal do túnel, coincidindo as duas semirretas perfeitamente, mas percebia-se nitidamente que faltou critério na sua construção, pois não utilizaram construções auxiliares e pensavam já ter encerrado a atividade, sem achar necessidade de fazer o retrospecto.

Figura 37: resultado final do grupo 2



Fotos: acervo do pesquisador

Prof. Fábio: *Infelizmente não temos mais tempo, então vou deixar com vocês a resolução creditada a Eupalinos. Observem que há um pequeno erro de cerca de 1%, insignificante para a época, se levarmos em conta os recursos que tinham, mas que comprovou que a escavação foi feita em duas frentes. O fato de vocês não conseguirem obter o resultado exato, dada a margem de erro verificada, foi mais importante do que qualquer coisa, pois possibilitou o crescimento de vários outros quesitos, como o senso crítico, o raciocínio lógico-matemático, o trabalho coletivo, a confiança na sua capacidade de resolver problemas, etc. Vocês foram ótimos sujeitos de minha pesquisa de mestrado, que previa aplicar a metodologia da resolução de problemas aliada à História da Matemática. Vocês gostaram do problema da construção do aqueduto da ilha de Samos? Gostaram da solução dada por Eupalinos para esse problema? Muito bem, a atividade previa quatro etapas, de acordo com seu idealizador, George Polya: 1. a compreensão do problema, 2. o estabelecimento de um plano, 3. a execução do plano e 4. o retrospecto. Somente esta última etapa não foi possível desenvolver a contento, apesar de que alguns alunos fizeram o retrospecto intuitivamente, sem orientação do professor. Nosso ajudante, o ex-aluno de CP e atual do EM, também deu sua contribuição trazendo outra solução para o problema. Quem tiver interesse, pode procurá-lo. Alguém quer falar alguma coisa, quer dar um depoimento?*

Ma: *Eu achei muito interessante esse tipo de aula, professor. Pena que não é sempre assim ... A gente aprende muito mais.*

Je: Ô professor, pega mais aulas de outra matéria, as próximas de Inglês, por exemplo, pra continuar a explicação.

Digo que não é possível, agradeço de novo a atenção da turma e saio satisfeito, certo de que ambos, professor e alunos, vão levar a lição da heurística de Polya para resolver seus problemas cotidianos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esta pesquisa buscamos soluções para nossas inquietações sobre questões relativas ao ensino de Matemática, principalmente quanto ao ensino e aprendizagem da Geometria, que nós aprendemos a apreciar e que tem sido, ao longo dos anos, tão menosprezada nos cursos de formação de professores e, conseqüentemente, “atropelada” nos currículos da Educação Básica. Várias situações vão se configurando na sala de aula e exigindo respostas, uma reflexão mais profunda e uma busca por alternativas pedagógicas que possam auxiliar nas dificuldades e limitações que se impõem.

A prática em sala de aula depende tanto do aluno quanto do professor. Hoje em dia os alunos convivem com muita tecnologia e informação, e aulas do tipo rotineiras não respondem às suas necessidades, não são interativas e não desafiam, de modo geral, sua curiosidade. Baseados nestas constatações, procuramos alternativas metodológicas e encontramos na resolução de problemas inseridos em contexto histórico o que procurávamos, ou seja, fundamentamos nossa pesquisa na heurística da resolução de problemas de George Polya e a aliamos à História da Matemática.

Por outro lado, aulas não rotineiras dão muito mais trabalho para o professor do que aulas expositivas e rotineiras, em todas as suas etapas, desde seu planejamento até sua execução. O professor precisa estar atento a tudo o que ocorre nas interações entre os alunos para intervir no momento certo, deve gerenciar várias situações diferentes, ter flexibilidade, e de certa forma, controlar a própria ansiedade em dar respostas prontas aos alunos.

Não é fácil ser esse professor nos dias de hoje. O professor tem que estar preparado e ser capaz de apreender intuitivamente as situações, agir rapidamente e gerenciar as intervenções; tem que ter autoconfiança e capacidade de improvisação diante de situações novas. E deve ter o bom senso de dosar as aulas não rotineiras com aulas rotineiras, sempre que necessário. Essa habilidade se conquista com tempo e experiência, além de uma formação profissional sólida.

Mesmo diante de todas essas e outras limitações, acreditamos que optar por aulas não rotineiras, como estratégia de ensino, pode ser uma poderosa ferramenta para o professor que se preocupa em desenvolver em seus alunos o pensamento lógico-matemático, a compreensão e a argumentação.

A experiência vivenciada como professor-pesquisador e compartilhada com os alunos da turma CP1 do ISMART foi relevante e provocou reflexão para futuros ajustes de nossa prática em sala de aula. O trabalho com resolução de problemas nos abriu um universo diferente: junto aos alunos passamos a ser também questionadores, partilhando da experiência de fazer a Matemática por meio de descobertas. Os alunos discutiam, indagavam, descobriam e aprendiam. Enquanto isso, como professor-pesquisador, fazíamos as nossas descobertas, apreendíamos o processo de aprendizagem dos alunos, envolvidos nas atividades. E descobríamos relações Matemáticas ligadas aos conteúdos nas quais nunca havíamos pensado.

Para responder a nosso questionamento quanto aos saberes produzidos por alunos envolvidos em tarefas Matemáticas inseridas no contexto histórico, percebemos que eles aprenderam a valorizar as conquistas dos antigos, os quais souberam usar a Matemática com finalidade utilitarista, aplicando o conhecimento teórico que tinham para resolver seus problemas cotidianos. Os saberes produzidos pelos alunos resultaram de muita observação, mobilização de conhecimentos, planejamento e autoconfiança, assim como os produzidos pelos antigos. Essa pesquisa almejou ainda, perceber a evolução dos alunos participantes em sua forma de raciocinar, argumentar e justificar as conjecturas elaboradas durante as várias etapas de desenvolvimento da atividade.

Planejamos a sequência didática envolvendo noções e conceitos geométricos pertinentes ao conteúdo curricular proposto para o 8º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, nos baseamos principalmente na heurística da resolução de problemas de Polya e buscamos um problema na História da Matemática, que deu suporte para contextualizar o problema e motivar os alunos.

O primeiro aspecto a ser considerado é que as aulas de resolução de problemas histórico-práticos podem ser grandes aliadas no ensino de conceitos geométricos, visto que a Geometria oferece muitas possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio indutivo do aluno. Por meio de explorações e investigações geométricas, os alunos formulam conjecturas baseados, muitas vezes, em suas observações e percepções sensoriais.

Motivados, os alunos se envolveram satisfatoriamente na atividade, formulando hipóteses, compartilhando conjecturas com os colegas de grupo, questionando e elaborando estratégias para a resolução dos problemas, esboçando figuras para auxiliar na compreensão dos mesmos.

Um dos momentos mais marcantes na segunda etapa da atividade, em que deveríamos estabelecer um plano, foi a discussão em grupos. Algumas vezes, ao enunciar seus pensamentos, eles mesmos percebiam seus enganos e modificavam suas falas. Outras vezes, colegas de outro grupo pediam para ajudar ou mostrar como estavam pensando. Nesses momentos de discussão, foi possível perceber alguns conhecimentos matemáticos que os alunos mobilizavam enquanto argumentavam oralmente, como aplicação do teorema de Pitágoras, paralelismo, conhecimentos de Desenho Geométrico, de modo geral. Para a maioria dos alunos, foi uma aula extremamente estimulante e desafiadora, uma vez que dividiram com o professor a responsabilidade de fazer Matemática, o que para eles foi algo totalmente novo.

A atividade aplicada apresentou vários pontos para uma reflexão mais crítica e profunda sobre a própria prática do professor-investigador, tanto quanto à aplicação da sequência didática, que poderá ser melhorada, quanto à sua intervenção no processo de construção de conhecimentos matemáticos dos alunos, tendo sido bastante importante. Os alunos produziram bastante e mobilizaram importantes conceitos geométricos, enquanto conjecturavam e faziam suas descobertas, superando as expectativas do pesquisador. Eles puderam aplicar vários conceitos matemáticos anteriormente adquiridos para resolver um problema prático; perceberam que um problema está inserido num campo de problemas e que, para resolvê-lo, muitas vezes, devemos desmembrá-lo em um ou mais problemas menores. Puderam aprender que, se

não for possível satisfazer todas as condicionantes de um problema, podem satisfazê-las parcialmente e seguir uma sequência lógica de raciocínio, que os levará naturalmente à solução.

É interessante perceber que mesmo quando algumas coisas não saem como planejamos ou imaginamos, numa aula assim, há sempre a possibilidade de se aprender alguma coisa. Mas para isso o professor deve estar atento e saber como contornar algumas situações. Neste caso, recolher o material elaborado pelos alunos foi extremamente importante. De outra forma, não teríamos como tirar conclusões a respeito de suas descobertas e impressões.

A primeira etapa, a compreensão do problema, demandou mais tempo, pois ao invés dos problemas de determinação, que já trazem no enunciado informações do tipo “determine x ”, “encontre x ” ou apenas “resolva”, que os alunos estão acostumados a resolver em suas aulas de Matemática, a incógnita não estava explícita, tanto que a maioria dos alunos respondeu que a mesma era cavar o túnel, e não qual a direção em que deveríamos escavar a montanha em cada extremidade para realização da obra. Diferentemente de um problema rotineiro em que eles teriam que calcular a incógnita, eles tiveram que pensar...

Outra dificuldade foi a interpretação do que é uma condicionante e quais eram as condicionantes nesse problema; ao contrário do termo *incógnita*, que fazia parte do vocabulário ativo dos alunos. Para que eles se familiarizassem com a nomenclatura utilizada na pesquisa, o professor-investigador recorreu a um problema simples e em que se percebiam nitidamente suas partes: os dados, a incógnita e as condicionantes. Quando o professor sugeriu que os alunos traçassem uma figura, eles conceberam o esboço da montanha com os pontos dados A e B em seu entorno e então perceberam que faltava a incógnita do problema. Ainda teriam de conversar muito, para melhor compreendê-lo.

A princípio, os alunos se mostraram tímidos, apesar de a classe ser pequena e eles se conhecerem bem, não expressavam suas ideias abertamente e só conversavam entre si. Depois de alguns se arriscarem a

defender suas conjecturas e apresentar seus argumentos, os demais se desinibiram e passaram a falar todos ao mesmo tempo, fazendo com que o professor tivesse que intervir para conter a ansiedade deles e garantir que cada um falasse por vez. Finalmente, após pequeno debate, chegaram à incógnita: determinar o ângulo da escavação.

A segunda etapa da atividade foi a mais importante, a elaboração de um plano, a que requereu maior participação dos alunos e cumplicidade dos grupos. Notei que os alunos passaram da compreensão à elaboração do plano, quase que imediatamente, pois como adolescentes acostumados a *games* de todos os tipos, conseguem rapidamente traçar estratégias para solucionar seus problemas. Nesta fase os alunos deveriam observar como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para que eles tivessem ideias para estabelecerem um plano de como resolver o problema. Assim puderam perceber, também, a dinâmica do método científico, seus acertos e erros, avanços e recuos. E entender a Matemática como ciência viva.

Na terceira etapa, a atividade fluiu mais naturalmente. Neste ponto, o conhecimento anteriormente adquirido nas aulas de Geometria e Desenho Geométrico foi de grande utilidade para eles na hora da execução do plano e fundamental para o desenrolar da atividade, pois o problema fora escolhido propositalmente para ativar esses conceitos. Os alunos desempenharam a contento esta etapa e pude observar quão importante foram as disciplinas citadas para eles, a despeito de estarem relegadas a segundo plano no currículo.

A última etapa da atividade, o retrospecto, foi prejudicada pela falta de tempo hábil para sua realização. Mesmo assim, na hora em que verificaram que o traçado das semirretas não coincidiu, dois dos três grupos imediatamente iniciaram um processo de reavaliação, procurando corrigir o eventual erro, fazendo o retrospecto e verificando cada passo das etapas anteriores. O aluno do Ensino Médio que participou da aula, que auxilia essa turma em algumas disciplinas, inclusive Matemática, apresentou uma outra solução para o problema do aqueduto, despertando em alguns alunos a

curiosidade em conhecer conceitos ainda nem estudados por eles e mostrando que sempre podemos aperfeiçoar a nossa compreensão do problema.

De um modo geral, as atividades envolveram algumas características particulares e compreenderam as seguintes fases: compreensão do problema, com uma explicação mais ou menos detalhada por parte do professor-pesquisador; a formulação de outras questões e estabelecimento de um plano; execução do plano; realização de testes e validação da solução.

Algumas vezes, foi necessário adiantar uma discussão com toda a turma para que se pudesse avançar no raciocínio, na elaboração de testes e formulação de conjecturas pelos alunos. Na maior parte das vezes, já formulavam uma conjectura imediatamente após observação rápida, para então começar a testá-la. Em outros momentos usavam sua intuição, o que é bastante interessante, para só depois pensar racionalmente sobre o que estavam fazendo, percebendo enganos ou compreendendo que precisavam verificar a veracidade ou falsidade de suas hipóteses.

A maior parte dos alunos tendeu a considerar um ou dois testes suficientes para justificar uma conjectura, e logo a classificavam como “conclusão”. No início da atividade, mesmo os alunos mais aplicados consideravam as justificativas de suas conjecturas como algo desnecessário e complicado.

Outro ponto que destacamos é que a maioria dos alunos continuou a utilizar o modo afirmativo na elaboração de suas conjecturas, e não o modo interrogativo, como fez por várias vezes este professor-pesquisador, tentando proceder como sugere Polya para aulas desta natureza.

Observamos também que a discussão coletiva dos resultados obtidos, confrontados aos de outros grupos, levou a um raciocínio mais crítico e reflexivo sobre o conhecimento matemático em jogo. Quanto a isso, consolidamos nosso pensamento de que o aluno aprende realmente enquanto pensa criticamente sobre o que faz, observa e transforma. É a reflexão sobre o que ele está realizando, o processo, que promove a aprendizagem e não sua simples realização.

Nesta pesquisa, alguns alunos se envolveram com determinação, procurando observar, perceber e relacionar as propriedades e informações que visualizavam, levantando questões durante as discussões em grupo ou com toda a turma. O modo como questionavam, conjecturavam e argumentavam com espontaneidade, determinou o sucesso da atividade para toda a turma neste projeto. Esses e outros alunos, líderes por natureza, impulsionaram os demais colegas com suas falas, ações e participação ativa.

Concluimos ainda que, embora a atividade tenha sido mais exploratória do que investigativa, toda a dinâmica utilizada proporcionou um ambiente rico para a geração e mobilização de saberes pelos alunos. Eles retomaram procedimentos e conceitos que já possuíam, reviram alguns destes conceitos, ampliando e ou aprofundando conhecimentos matemáticos por meio do raciocínio indutivo e da comunicação.

Concluimos, também, que a metodologia da resolução de problemas inseridos em um contexto histórico pode contribuir para a motivação dos alunos, favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem dinâmico e mais aberto, onde o aluno é o protagonista e pode determinar o ritmo de sua aprendizagem. Esse tipo de aula é importante para que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência viva e atual.

Respondendo a questão central que norteou toda nossa pesquisa, *“Que saberes são produzidos por alunos envolvidos em tarefas Matemáticas inseridas no contexto histórico?”*, pudemos conferir que além dos relatados anteriormente, a análise dos casos individuais nos revelou uma efetiva mobilização de conceitos geométricos que eles utilizarão na sua realidade, e a aquisição dos saberes: saber-fazer, saber-ser, saber-aprender, saber-viver, em suma; tendo resposta para seus problemas e para as diversas indagações que, de modo geral, os alunos fazem, tais como: Para que serve aprender isso? Por que tenho que aprender isso?

Os resultados mostraram que os alunos desenvolveram também aspectos relacionados à visualização e representação, principalmente quando esboçaram a figura da montanha e outras, raciocinando, conjecturando e

registrando suas ideias. Utilizaram termos geométricos adequados em suas anotações, ampliando o vocabulário que já possuíam.

Constatamos que houve uma apropriação real dos conceitos geométricos envolvidos, e que a metodologia aplicada mobilizou os conhecimentos, favorecendo a aprendizagem de tais conceitos, a inventividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

Consideramos produtiva essa nossa primeira aplicação da metodologia da resolução de problemas de Polya, aliada à História da Matemática, com o propósito de encontrar alternativas para o ensino de Geometria. Mas há muito ainda a se pesquisar sobre o assunto, especialmente sobre as potencialidades deste tipo de aula não rotineira e sua conseqüente inclusão na formação dos futuros professores, no longo prazo. Então essa metodologia poderá render bons frutos, quando então professores e alunos, imbuídos desse espírito de mútua cooperação, ocupando uma nova postura de interação, estarão preparados para compreender o alcance e benefícios desse tipo de atividade no ensino e aprendizagem da Matemática.

É importante que outros trabalhos deem seqüência à pesquisa em Educação Matemática, disseminando as ideias de Polya cada vez mais, no sentido de dar aos alunos a oportunidade e o prazer da descoberta em Matemática. Quanto a este aspecto, creio que demos nossa contribuição, não apenas no que se refere a esta dissertação, mas também quanto ao fato de termos orientado a aluna Mariana Correia na elaboração de seu trabalho de conclusão do ensino médio (TCC), em uma escola bilíngue de São Paulo, abordando a mesma temática, o que só veio a enriquecer a formação profissional deste professor-pesquisador. O trabalho da aluna encontra-se no Anexo IV desta dissertação para consulta.

Finalmente, não se trata aqui de menosprezar os problemas rotineiros. No ensino de Matemática, problemas rotineiros e não rotineiros são igualmente necessários, mas deixar que o ensino se reduza ao desempenho mecânico de

operações Matemáticas rotineiras, muitas vezes impostas pelos exames oficiais ou vestibulares, privando os alunos dos benefícios da metodologia da resolução de problemas, neste caso, da heurística da resolução de problemas de Polya contextualizado pela História, para uma melhor *performance* em Matemática, fica bem abaixo do nível do livro de receitas culinárias. E isso é imperdoável.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBONDATI, Mario. **Um ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de tópicos de Matemática do ensino fundamental**. 176p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, São Carlos, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000. 109 p.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 1991.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ESTADÃO **Erro em túnel da linha 4 é inadmissível, diz Metrô**. <http://sao-paulo.estadao.com.br/noticias/geral,erro-em-tunel-da-linha-4-e-inadmissivel-diz-metro,54621>. Acesso em 12/02/2013.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. **O que é Etnomatemática**. Texto digital. 2003. Disponível em: < <http://www.ufrj.br/leprans/arquivos/etno.pdf>>. Acesso em: 02 dez. 2014.

LORENZATO, Sérgio. Por que não Ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, Ano III, n. 4, 1º semestre, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **O uso da História no ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém: EDUEPA, 2001.

MIGUEL, Antonio. **As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores**. Zetetiké, Campinas, v.5, n.8, p.90-105, 1997.

MIRANDA, Sílvia Andrea Alexandre. **Construção de Mosaicos: uma análise por meio de tarefas exploratório-investigativas no 7º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos, Campus Sorocaba, São Paulo, 2014.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, 1989.

PEREIRA, J. T. Educação e sociedade da informação. In: COSCARELLI, Carla; RIBEIRO, Ana Elisa (Orgs.). **Letramento Digital: aspectos sociais e possibilidades pedagógicas**. 3ª edição. Belo Horizonte: Ceale; Autêntica, 2011, p.13-24.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

ROSA, Euclides. **Como abrir um túnel se você sabe Geometria**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática. Revista do Professor de Matemática nº 5

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lucia Bontorim. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio**. Coordenação de Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2010. 72p.

STANIC, George Milan Alexander; KILPATRICK, Jeremy. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: Charles, R. I.; Silver, E. A. (Eds.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990, p. 1-22.

TAKAHASHI, Tadao. **Sociedade da Informação no Brasil**: livro verde. Brasília: Ministério da Ciência e Tecnologia, 2000, 195 p.

VALENTE, José Armando (org). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/NIED, 1999, 156p.

7. ANEXOS

ANEXO I – BIOGRAFIA DE POLYA

George Polya nasceu a 13 de dezembro de 1887, em Budapeste, de família judaica de origem polaca.

Foi um ótimo estudante no ensino secundário apesar da escola que frequentava valorizar muito a aprendizagem com base na memória, prática que Polya considerava monótona e sem utilidade.

Licenciou-se em 1905, tendo sido considerado como um dos quatro melhores alunos do seu ano o que lhe permitiu ganhar uma bolsa de estudo na Universidade de Budapeste. Aí começou por estudar Direito, tal como seu pai. No entanto, achou o curso aborrecido e passou para o curso de línguas e literaturas. Interessou-se depois por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo, em 1912, concluído o seu doutoramento.

Em 1913, publicou um dos seus maiores resultados, a solução do problema do passeio aleatório. Nesse mesmo ano foi para Paris trabalhar no seu pós-doutoramento.

Em 1914 assumiu um cargo na Universidade de Zurique e, ainda, foi chamado pelo seu país para a guerra, mas recusou-se a prestar serviço militar. O medo de ser preso por não ter respondido à chamada fez com que apenas regressasse à Hungria depois de ter terminado a Segunda Guerra Mundial. Em Zurique conheceu a sua futura esposa, Stella Weber. Casaram em 1918 permanecendo juntos até à morte de Polya.

Em 1940, com receio de uma possível invasão alemã da Suíça, decidiu ir para os Estados Unidos tendo aceite, em 1942, um cargo de professor na Universidade de Stanford, onde permaneceu até à sua retirada do ensino, em 1953.

Em 1945 publicou um dos seus livros mais famosos: *How to Solve it*. Seguiram-se "Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics" (1951); "Mathematics and Plausible Reasoning" (1954) e "Mathematical Discovery" (1962-64).

Polya faleceu a 7 de setembro de 1985.

ANEXO II – NOTÍCIA DE JORNAL

A sequência didática deste trabalho constou de uma atividade. Esta notícia de jornal, veiculada há poucos anos pela grande imprensa, trata de problema semelhante:

São Paulo, quarta-feira, 19 de setembro de 2007 **FOLHA DE S.PAULO** **cotidiano**

Erro no metrô causa desencontro de túneis

Desalinhamento, de 80 cm, é considerado incomum por técnicos; Consórcio Via Amarela diz que problema não é grave

Metrô afirma que não haverá consequência em termos de prazo, segurança ou custos para a população e para a companhia

**ALENCAR IZIDORO
KLEBER TOMAZ**

**CAIO GUATELLI
REPÓRTER-FOTOGRAFICO
DA REPORTAGEM LOCAL**

Um erro na execução da obra da linha 4-amarela (Luz-Vila Sônia) do Metrô de São Paulo provocou um desencontro de túneis que são escavados a partir de duas frentes de trabalho. A falha obrigará as empreiteiras a fazer correções que podem se estender por um mês. O problema ocorreu no último dia 10, em um ponto que deveria ser a conexão dos túneis Caxingui/Três Poderes, na zona oeste de São Paulo. O encontro das duas frentes de túneis não foi possível por conta de um desalinhamento lateral de 80 cm entre elas. Especialistas afirmam que parâmetros aceitáveis seriam, no máximo, de 10 cm - para alguns, ainda menos. O erro foi alvo de preocupação dos trabalhadores (que falavam em um desvio de 1,5 m) e, segundo a **Folha** apurou, de ao menos parte dos técnicos do Metrô. O Consórcio Via Amarela (Odebrecht, OAS, Queiroz Galvão, Camargo Corrêa e Andrade Gutierrez) diz não haver gravidade no erro e que "a correção geométrica ocorrerá na seqüência dos trabalhos".

.....

ANEXO III - QUESTIONÁRIO

1. Qual é a incógnita?
2. Quais são os dados?
3. Quais são as condicionantes?
4. É possível satisfazer as condicionantes? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita?
5. É possível satisfazer a condicionante?
6. Você já encontrou este problema ou um parecido?
7. Você conhece um problema semelhante?
8. Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?
9. Você pode usar o resultado ou método de algum problema relacionado ao seu e que você sabe resolver?
10. Conhece um problema correlato?
11. Utilizou todos os dados?
12. Utilizou toda a condicionante?
13. Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira?
14. Tente resolver um problema parecido. Você consegue imaginar um caso particular mais acessível?
15. Você consegue resolver alguma parte do problema?
16. Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os dados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?
17. Você consegue mostrar que cada passo de seu raciocínio está correto?
18. Você pode obter a solução do problema de algum outro modo?
19. Qual a essência do problema e do método de resolução aplicado? Consegue usar esse método em algum outro problema?
20. Qual a utilidade deste resultado?

ANEXO IV – TCC ORIENTADO PELO PESQUISADOR



Question: **Does the method that Eupalinos used in the island of Samos can still be used nowadays?**

Math Exploration

Mathematic Standard level

Escola Suíço Brasileira de São Paulo

Supervisor: Viviane Alves, Ellen Pandolf and Heitor França

São Paulo, November 2014



Table of Contents

Introduction.....	3
The tunnel of Samos	4
The base of my project.....	6
Final Project.....	9
Calculation.....	12
Conclusion.....	19

Introduction

For my math exploration I chose to do a project of a tunnel, with the aim to see if the method that Eupalinos used in a tunnel in island of Samos can still be used nowadays. This happened in the 16th century B.C. and the method was unveiled for the Hero of Alexandria. I chose this theme because my father always brought me to see the construction of tunnels and I am very interested about this subject. Here I will explain how this method works and the whole process of my tunnel. This project was made in a mountain region of Brazil, using a level curve map. This method was created in a survive situation in which they needed to pass the water from one side to the other; because of math this community could receive the water. It is very important to mention that this method could prevent an error of mismatch. In my case my tunnel was made for the traffic of people and cars, where they will be able to transport from one side to the other.

To do this work I first researched the whole history about the tunnel of Eupalinos. I studied the history of the island and the process of the tunnel building. After I understood the math method, I did a simple example to illustrate this method and use it as a base. Afterward I looked for the level curve map, which would be good and adequate to build the tunnel using this method. Then I did all my math calculation and made my conclusion.

This situation that happened in the island of Samos include the importance of the water, time optimization, the care about the mismatch, no use of any digital technology, like we have nowadays and the challenge of finding two angles for a better efficiency.

The math evolved in this project was: Pythagoras theorem, scale relationship, similarity of triangles, trigonometric in the right triangle, vectors sum and finding angle through the use of vectors.

The tunnel of Samos

According to Tom M. Apostol (2004, page 31) the water tunnel was one of the biggest engineering projects, with 1,036 meters (4,000 feet) caved through a mountain on the Greek island of Samos. This happened in the 16th century B.C. They did it just using picks, hammers, and chisels. The direction of tunneling was incredible, but with the resources available, how did they do it?

Hero of Alexandria unveiled the method five centuries after the tunnel was build. The first thing to do, it is trace series of right angles around the mountain, beginning at the entrance till the other side, with a constant elevation, which is the same line in the level curve map. APOSTOL (2004, page 32) “By measuring the net distance traveled in each of two perpendicular directions, the lengths of two legs of a right triangle are determined, and the hypotenuse of the triangle is the proposed line of the tunnel. By laying out smaller similar right triangles at each entrance, markers can be used by each crew to determine the direction for tunneling”.

This image of the tunnel can illustrate for us how the method could be applied. The line of the tunnel is the hypotenuse of the right triangle.

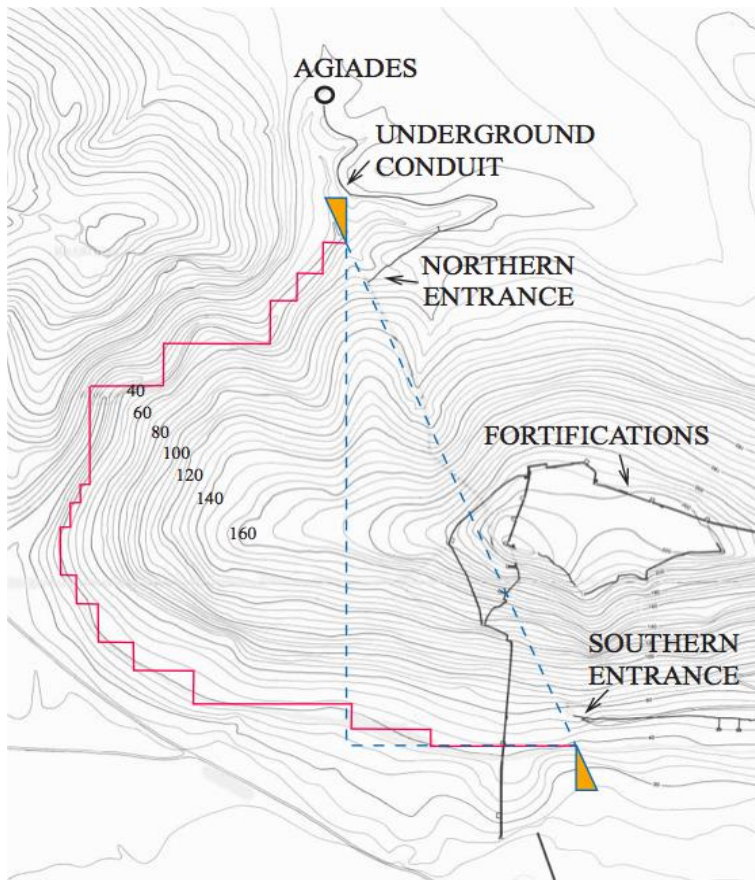


Figure 1

Source: APOSTOL, T. M. **The tunnel of Samos**. 2004. Engineering and Science.

These two small yellow triangles were built considering the distance travelled around the mountain. They are similar to each other and to the blue triangle. To find these two triangles we need to outline the constant elevation line in 2 directions, which in the map are the red lines.

The base of my project (Example)

Here I will describe an example on how to use this technic. To have a better accuracy in my calculations, I will use vectors to calculate the length of the triangle B (the central triangle). To exemplify how this method works, I drew the top of a mountain and applied the method on it to use as a base to my original project. The degree of precision will be 1 square. It was only able to build the triangles A and C from the triangle number B, as they are similar.

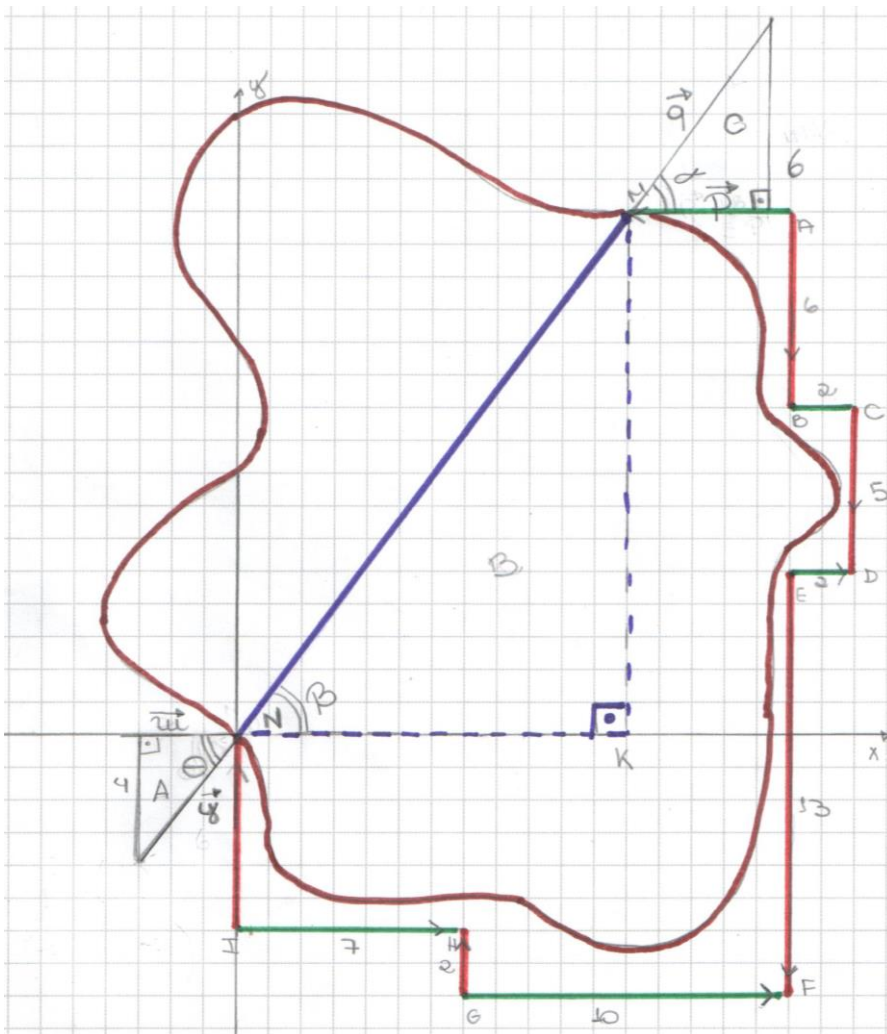


Figure 2

Calculation of the line NK:

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{NK}| = \sqrt{12^2 + 0^2} = \sqrt{144 + 0} = 12$$

Calculation of MK:

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{IN}$$

$$\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{MK}| = \sqrt{0^2 + (-16)^2} = \sqrt{256 + 0} = 16$$

Calculation of \overrightarrow{MN}

Trough Pythagoras theory

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = |\overrightarrow{NK}|^2 + |\overrightarrow{MK}|^2$$

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = 144 + 256 = 400$$

$$|\overrightarrow{MN}| = 20 \text{ units}$$

To calculation of the angle:

$$\text{Tan } \beta = \frac{\textit{opposite leg}}{\textit{adjacent leg}}$$

$$\tan \beta = \frac{16}{12}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}$$

Using the calculator: $\arctan(\beta) = \frac{4}{3}$

$$\beta = 53.1^\circ$$

As I am using vectors, I will make sure of the angle using another calculation. Knowing that the cosine of the angle between 2 vectors depends on the scalar products of those vectors divided by the product of their lengths.

In the triangle A we have vector \vec{w} and the vector \vec{y} . These two vectors make the angle θ .

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{y}}{|\vec{w}| \times |\vec{y}|}$$

$$\cos \theta = \frac{3 \times 3 + 0 \times 4}{\sqrt{3^2 + 0^2} \times \sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{9}{\sqrt{9} \times \sqrt{25}}$$

$$\cos \theta = \frac{9}{15}$$

Using the calculator: $\arccos(\theta) = \frac{9}{15}$

$$\theta = 53.1^\circ$$

Triangle C

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \times |\vec{q}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{(-4.5) \times (-4.5) + 0 \times (-6)}{\sqrt{(-4.5)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-6)^2 + (-4.5)^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{20.25}{\sqrt{20.25} \times \sqrt{36 + 20.25}}$$

$$\cos \alpha = \frac{20.25}{\sqrt{1139.0625}}$$

$$\cos \alpha = \frac{20.25}{33.75}$$

$$\cos \alpha = 0.6$$

Using the calculator: $\arccos(\alpha) = 0.6$

$$\alpha = 53.1^\circ$$

Final Project

To do my own tunnel using this method, I decided to use a level curve map. The region used was in the city Itupeva – SP, Brazil. This map was also used for a project of mining engineering.

Figure 3 is the map and Figure 4 shows the main information. The scale of the map (figure 3) is 1: 4000. So each 1 cm is equivalent to 40 meter.

For the measure be able to do with the equipment's available, I had put this map in a square paper, which I could use unites to calculate. For this to happen I used a square paper.

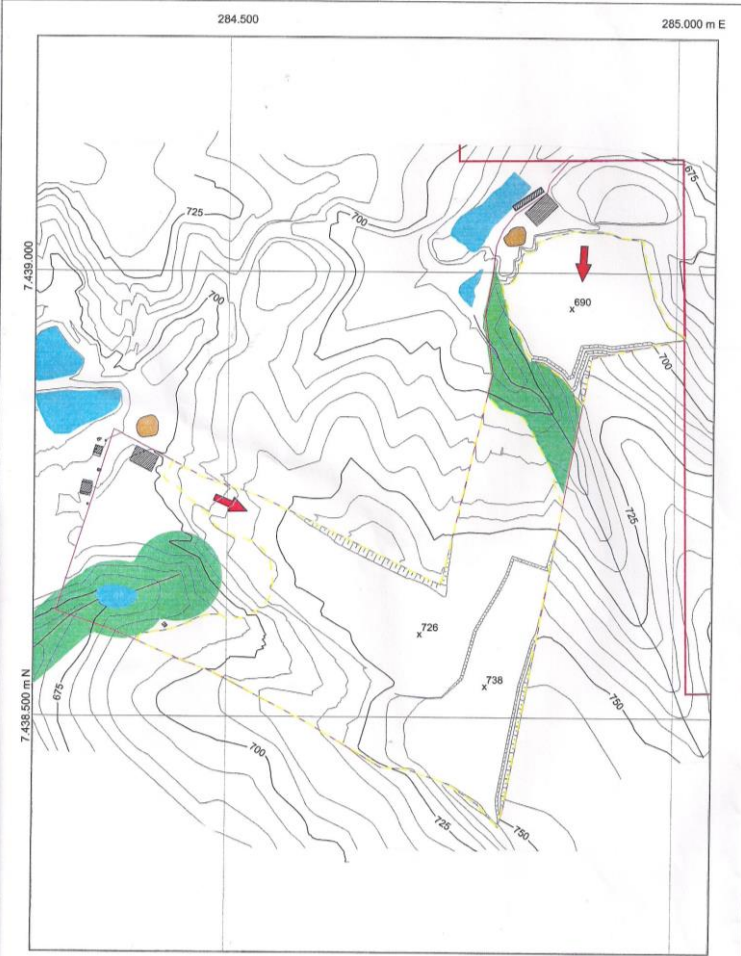


Figure 3

Figure 3 is the curve map in the city Itupeva – SP, Brazil.

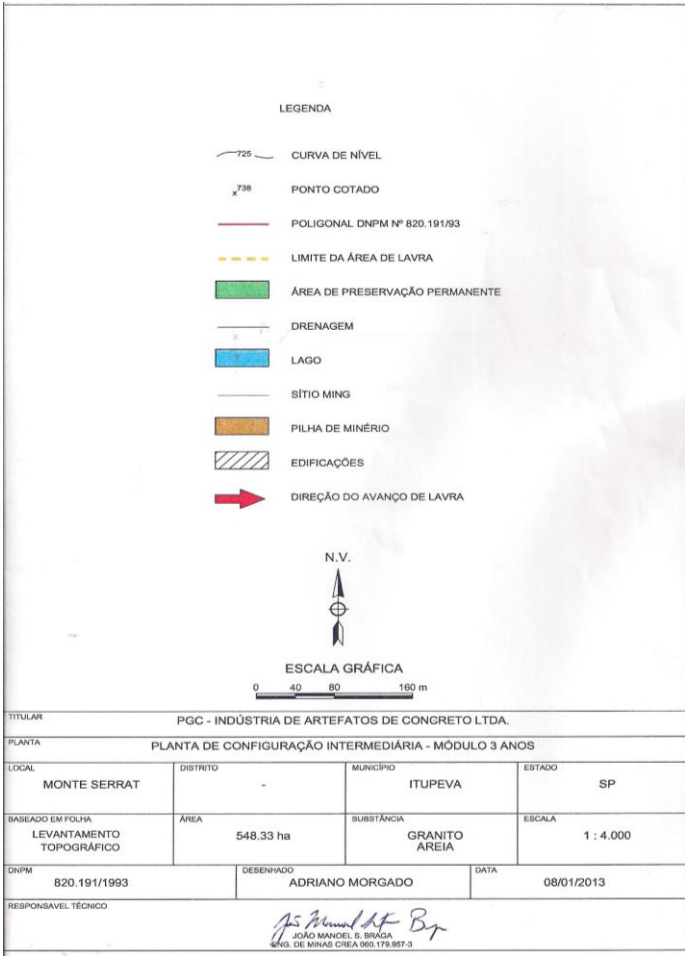


Figure 4

Figure 4 shows the main information about the curve map.

In this project it will only be needed the level curve.

Here is the result:

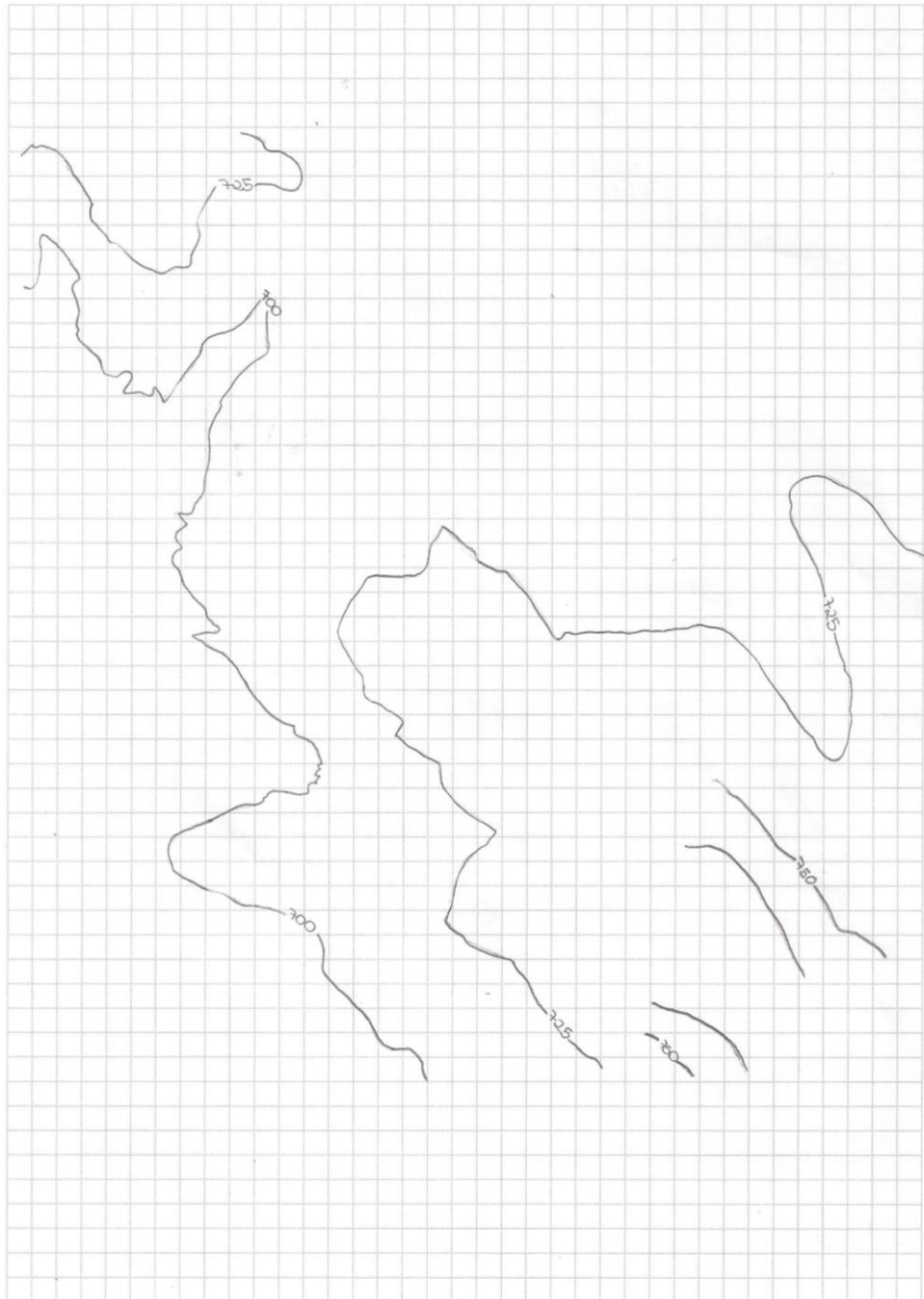


Figure 5

My tunnel will pass trough the line 725 feet. This form was still not very good for me to calculate, so I widened it. Resulting in:

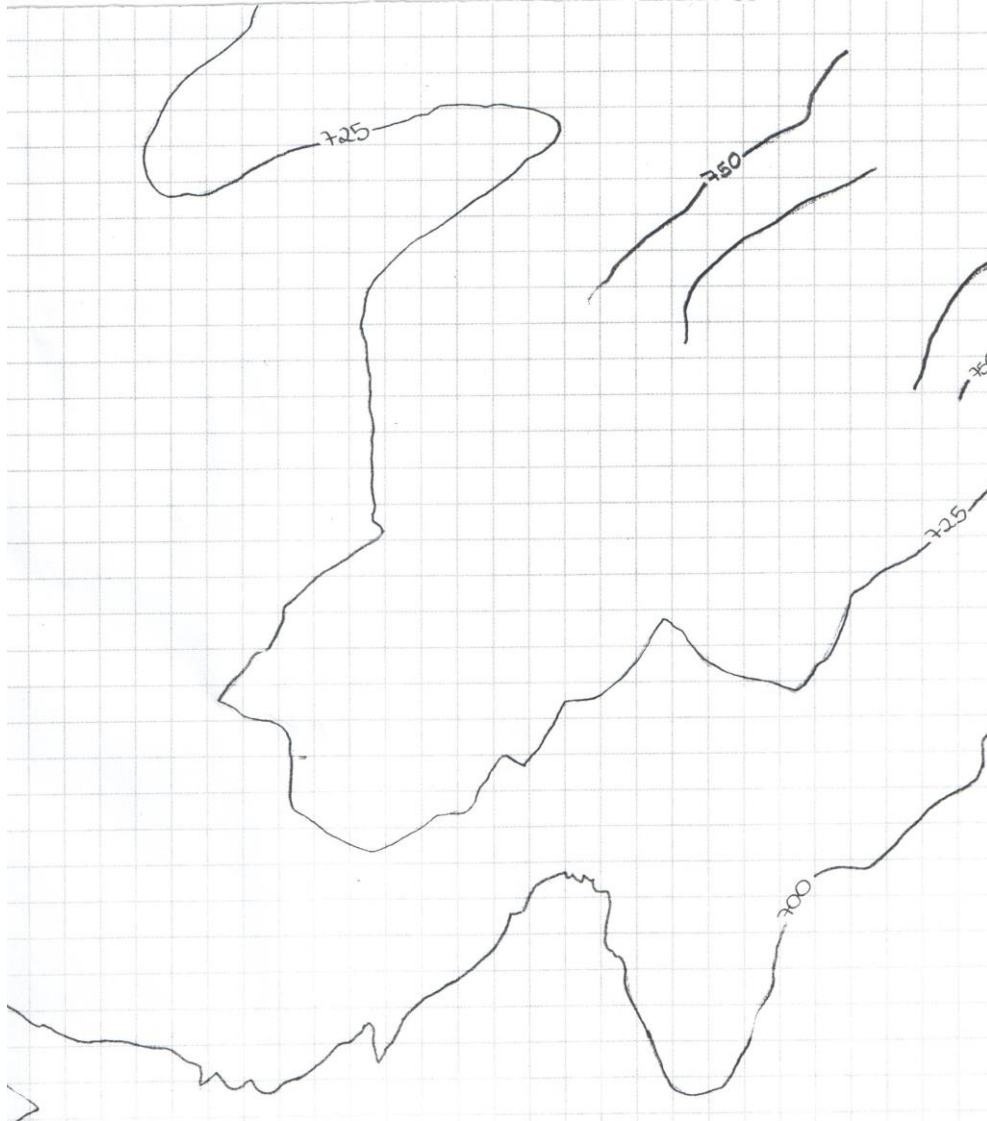


Figure 6

The magnitude will be also included in the calculations

Calculation:

Line of the tunnel and the process of the area calculation:

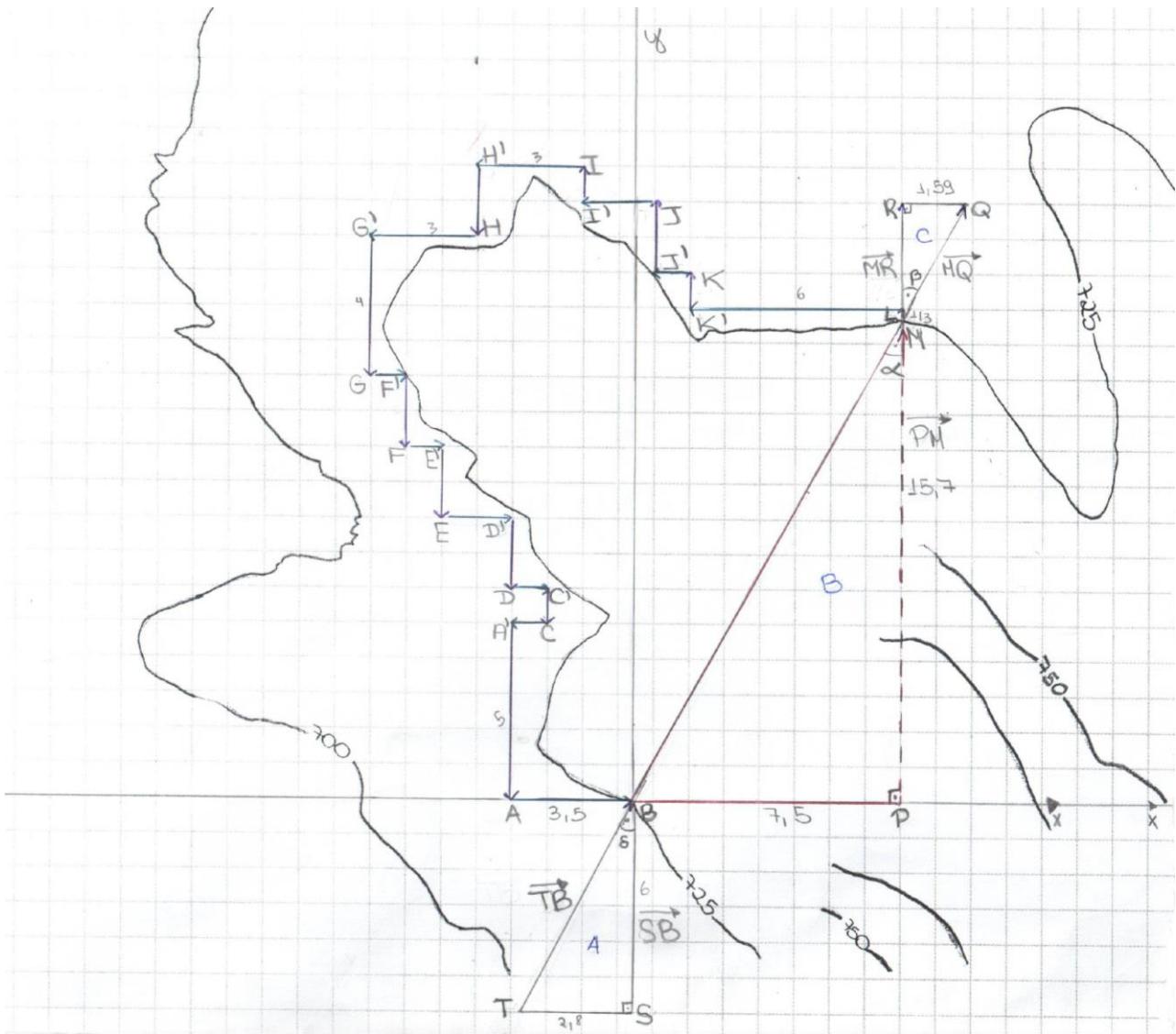


Figure 7

I tried to make the vectors nearest the curve line as possible and I attempted to only have integers numbers so I could ensure the accuracy, but as you can see we have one 3.5 and one 7.5, but I do not think that these two measurements will influence my result.

Calculation of the area:

Calculation of BP

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{LK'} + \overrightarrow{KJ'} + \overrightarrow{JI'} + \overrightarrow{IH'} + \overrightarrow{HG'} + \overrightarrow{GF'} + \overrightarrow{FE'} + \overrightarrow{ED'} + \overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BP} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BP} &= \begin{pmatrix} -7.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{BP}| &= \sqrt{7.5^2 + 0^2} = \sqrt{56.25} = 7.5\end{aligned}$$

Calculation of MP

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Yr} &= \overrightarrow{ML} - \overrightarrow{K'K} - \overrightarrow{J'J} - \overrightarrow{I'I} + \overrightarrow{H'H} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{F'F} + \overrightarrow{E'E} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{A'A} \\ \overrightarrow{Yr} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{Yr} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -15.7 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{Yr}| &= \sqrt{-15.7^2 + 0^2} = \sqrt{246.49} = 15.7\end{aligned}$$

Calculation of MB trough Pythagoras

$$MB^2 = BP^2 + MP^2$$

$$MB^2 = 7.5^2 + 15.7^2$$

$$MB = \sqrt{301.9}$$

$$MB \cong 17.4 \text{ unites of distance}$$

Scale

The original scale was

1: 4000

Which means that each centimeter of the figure 3 was equivalent of 40 meters.

The original map drew in the square paper was:

2 unite of square per each 1 cm.

The larger map was:

1.5 unites per each 1 cm.

So if my tunnel was with 17.4 unites, I had to multiply 17.4 unites per 1 and divide it the result per 1.5.

$$\frac{17.4 \times 1}{1.5} = 11.6 \text{ cm}$$

Now to know the real length we have to use the original scale

$$\frac{11.6 \times 40}{1} = 464 \text{ meters}$$

My tunnel will have 464 meters of length.

Using the vector nomenclature:

$$|\overline{MB}| = 464 \text{ m}$$

To build the two similar triangles of BMP, I had to find the tangent of the angle M that I will call it: α

$$\tan \alpha = \frac{\text{opposite leg}}{\text{adjacent leg}}$$

$$\tan \alpha = \frac{7.5}{15.7}$$

$$\alpha = 25^{\circ}30'$$

I will start with the triangle C:

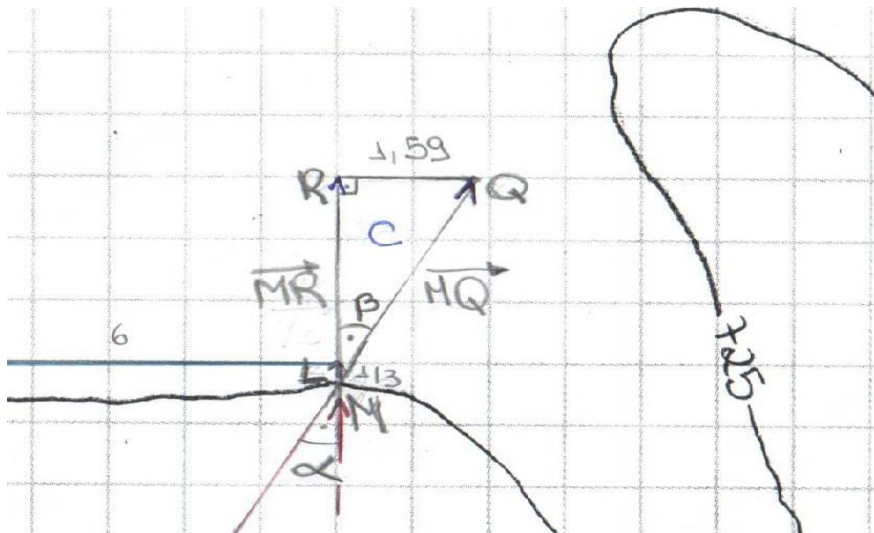


Figure 8

If we continue the line M, we will be building the new triangle; the vector \overrightarrow{MR} has component of $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$, this component is proportion to the vector \overrightarrow{PM} , which has component of $\begin{pmatrix} 0 \\ 15.7 \end{pmatrix}$.

The calculation to find the other vector that will compose the right angle will be \overrightarrow{RQ} . To find this vector component I will do the following account:

$$\frac{\overrightarrow{RQ}}{\frac{10}{3}} = \frac{7.5}{15.7} = 1.59$$

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 1.59 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To show that with this length of the line I will have to same angle, I will do it:

$$\tan \beta = \frac{1.59}{\frac{10}{3}}$$

$$\beta = 25^{\circ}30'$$

Now I will do the calculation for the triangle A:

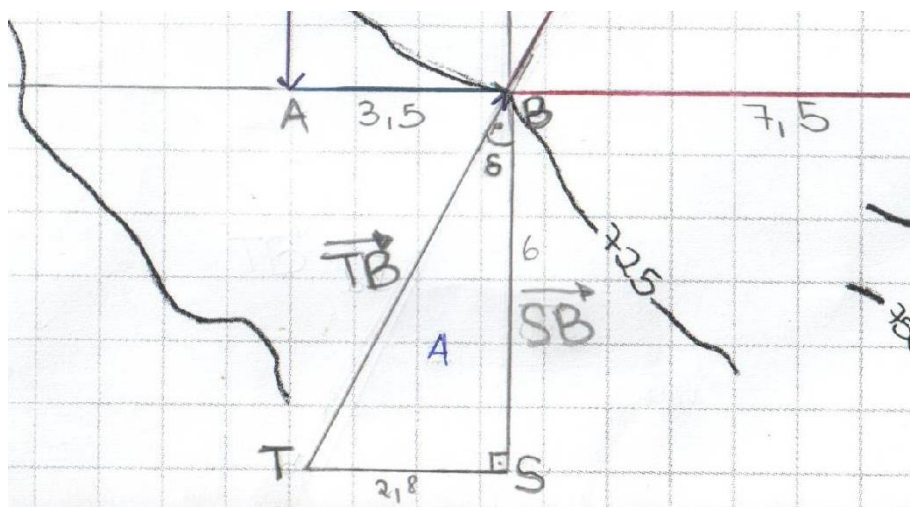


Figure 5

The vector \overrightarrow{SB} has component of $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, so to find the other vector component that together they will compose the right angle, I will do the same method as I did with the triangle number C.

$$\frac{\overrightarrow{TS}}{6} = \frac{7.5}{15.7} = 2.89$$

$$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 2.89 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To show that the triangle A and C has the same angle I will do the same method:

$$\text{Tan } \delta = \frac{2.89}{6}$$

$$\text{Using the calculator: } \arctan(\delta) = \frac{2.89}{6}$$

$$\delta = 25.6^\circ$$

It was not 25.5° because of the imprecise measure, but it was very close to the real number.

$$\text{If we analyse that a leg of 6 means: } \frac{6}{1.5} \times 40 \text{ m} = 160 \text{ m.}$$

160 m is still too big to help to build the tunnel, so if they are going to use this work some day they would have to build a smaller similar triangle.

Now I will do the same as I did in my example.

Triangle A:

$$\cos \delta = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{TB}}{(|\overrightarrow{SB}| \times |\overrightarrow{TB}|)}$$

$$\cos \delta = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.8 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 6^2} \times \sqrt{2.8^2 + 6^2}}$$

$$\cos \delta = \frac{0 \times 2.8 + 6 \times 6}{\sqrt{36} \times \sqrt{43.84}}$$

$$\cos \delta = \frac{36}{\sqrt{1578.2}}$$

$$\cos \delta = 0.90618 \dots$$

$$\delta = 25^\circ$$

Triangle C:

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MR}| \times |\overrightarrow{MQ}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} 1.59 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{1.59^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \times \sqrt{0^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{0 \times 1.59 + \frac{10}{3} \times \frac{10}{3}}{\sqrt{1.59^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \times \sqrt{0^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{11.\bar{1}}{\sqrt{2.5281 + \frac{100}{9}}}$$

$$\cos \beta = 0.902576 \dots$$

$$\beta = 25.5^\circ$$

Both had the same angle, as calculated through the tangent.

Conclusion:

The case that I took was in a region of SP, Brazil. With the method that Eupalinos used in the tunnel of Samis, he could dig it on the two sides, optimizing a lot of time. There is a case in the city of São Paulo, Brazil in which they were digging a subway and because of human error (wrong calculation), it brought a financial loss for the government, if they had used this method this huge problem would not have happened. Here is the link of the news: <http://sao-paulo.estadao.com.br/noticias/geral,erro-em-tunel-da-linha-4-e-inadmissivel-diz-metro,54621>.

Even this being an old method, that it might not be used nowadays, it is still a good way to confirm one construction. It can avoid a huge problem. It is a possible math and it does not need electronic technology or much money to do it. This method can be used nowadays and also should be used.

In my exploration I decided to use vectors. Eupalinos only used the calculation of tangent to find the angles. I tried to improve his method using that the cosine of the angle between two factors depends on the scalar products of those vectors divided by the product of their lengths. Then with this math I could confirm the angles. The angles using tangent were around 25° , just the decimal changed a little, which is good, as I did not have any electronic device beside my calculator. And the angle results using vectors were also around 25° . In this exploration I only used a calculator and a ruler. But if one day the government decide to build a tunnel in that area, they can use my project and use all their technology to have even more accurate data. I also have to mention that to calculate the area I tried to make the vectors nearest to the curve map as possible, but I wanted only integers numbers (even though I have one 3,5 and one 7,5), so this is something to consider, before using my project for anything in the future.

This project is also very important in the social aspect, because we are building something that will give in the future many benefits, the transportation is something very important and it can facilitate the life of many people. And an error can give a huge delay and many economic injuries. So this method can be used nowadays and I still think that it should be, even because of social aspects and mainly for the economics one.

Bibliography

APOSTOL, T. M. **The tunnel of Samos**. 2004. Engineering and Science.

MIRANDA, G. **Erro em túnel da linha 4 é inadmissível, diz Metrô**. Estadão.

Available in: <http://sao-paulo.estadao.com.br/noticias/geral,erro-em-tunel-da-linha-4-e-inadmissivel-diz-metro,54621> . Acess: 20 sep. 2014)