UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARCOS ALVES DE BRITO

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Sorocaba
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

MARCOS ALVES DE BRITO
Prof. Orientador: Dr. Wladimir Seixas

Sorocaba
2015

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação do Professor Doutor Wladimir Seixas.

Sorocaba

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

B862us

Brito, Marcos Alves de.
A utilização do software GeoGebra no ensino da geometria analítica / Marcos Alves de Brito. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
173 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Geometria analítica. 2. GeoGebra (Software de computador). 3. Cônicas. I. Título.

CDD: 516.3 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcos Alves de Brito, realizada em 19/12/2014:

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Unesp

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Uns confiam em carros outros em cavalos, mas nós faremos menção do nome do Senhor nosso Deus.

Salmos 20 versículo 7

Dedico este trabalho há minha esposa Katia e meus filhos Bianca, Bruno e Thalita. Aos meus pais Martins e Vilma, e meus irmãos que tenho um profundo afeto e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço.

Ao bondoso e grandioso Deus criador, que entreguei minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Wladimir Seixas, que apesar de tantos compromissos me orientou na realização deste trabalho.

A minha esposa Katia que sempre me apoiou na realização deste trabalho.

Aos meus filhos, Bianca, Bruno e Thalita que por vários momentos se privaram da minha companhia enquanto desenvolvia esse trabalho.

A meus queridos pais, Martins e Vilma, que me sempre se esforçaram em me ensinar o caminho em que devo prosseguir.

Aos meus colegas do mestrado (Donizete, Miguel, Dimitre, Arquiteclino, Felipe, Fabio, Kátia, Leila, Juliana, Thaísa)

Aos responsáveis pelo programa Bolsa Mestrado oferecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação temos como objetivo, a partir do uso de uma ferramenta tecnológica, o computador, mostrar a possibilidade de ensinar Matemática fazendo com que o estudante construa seu conhecimento a partir de conceitos apresentados com auxílio de softwares que possibilitem visualizar as atividades desenvolvidas. Neste sentido, utilizamos o software GeoGebra, que se trata de um software de Geometria dinâmica de domínio público e sua aplicação aos conteúdos de Geometria Analítica é de fácil aprendizado para o usuário. Desta forma, apresentamos uma sequência didática utilizando o Software GeoGebra no ensino de Geometria Analítica, seguindo os conteúdos da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Em cada uma das atividades propostas desenvolvemos o conteúdo teórico com exercícios seguido da atividade no GeoGebra. Ao final de cada atividade apresentamos alguns dos comentários feitos pelos estudantes.

Palavras-chaves: Ensino de Geometria Analítica. Geogebra. Cônicas.

ABSTRACT

In this thesis we aim, through the use of a technological tool, the computer, show the possibility of teaching Mathematics causing the student to build their knowledge from concepts presented with the help of software that allow viewing the activities developed. In this sense, we use the GeoGebra software, it is a dynamic geometry software in the public domain and its application to analytic geometry content is easy to learn for the user. Thus, we present a teaching sequence using GeoGebra software in teaching Analytic Geometry, following the contents of the Curriculum Proposal of the State of São Paulo. In each of the proposed activities develop the theoretical content with exercises followed by activity in GeoGebra. At the end of each activity are some of the comments made by students.

Key-words: Teaching Analytical Geometry. Geogebra. Conical.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ambiente do usuário no GeoGebra..45
Figura 2: Equipamento de informática disponibilizado aos estudantes – Classmate 51
Figura 3: Exposição pelo professor utilizando a lousa digital....................................51
Figura 4: Sistema cartesiano...54
Figura 5: Localização de pontos no sistema cartesiano..55
Figura 6: Pontos distintos no plano cartesiano..55
Figura 7: Janela inicial do GeoGebra..56
Figura 8: Distância entre dois pontos no GeoGebra..57
Figura 9: Equação da reta no GeoGebra..57
Figura 10: Retas paralelas no GeoGebra...58
Figura 11: Retas perpendiculares no GeoGebra...59
Figura 12: Distância entre dois pontos no plano...60
Figura 13: Resolução no GeoGebra do Exercício 1 - Atividade 1.............................61
Figura 14: Resolução no GeoGebra do Exercício 2 - Atividade 1.............................62
Figura 15: Resolução no GeoGebra do Exercício 3 - Atividade 1.............................62
Figura 16: Resolução no GeoGebra do Exercício 4 - Atividade 1.............................63
Figura 17: Resolução do exercício 1 - Atividade 1 na janela CAS............................64
Figura 18: Ponto médio entre dois pontos...65
Figura 19: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 2..............................67
Figura 20: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 2..............................68
Figura 21: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 2..............................69
Figura 22: Resolução do exercício 1 - Atividade 3 na janela CAS............................70
Figura 23: Pontos A, B e C alinhados..71
Figura 24: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 4..............................72
Figura 25: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 4..............................73
Figura 26: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 4..............................74
Figura 27: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 4..............................74
Figura 28: Reta passando pelos ponto A, B e P...75
Figura 29: Baricentro do triângulo ponto G..76
Figura 30: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 5..............................78
Figura 31: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 5..............................79

Figura 32: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 5..............................80
Figura 33: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 6..............................82
Figura 34: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 6..............................83
Figura 35: Resolução do exercício 1 da Atividade Complementar 1 no GeoGebra pelo estudante 19..85
Figura 36: Resolução do exercício 2 da Atividade Complementar 1 no GeoGebra pelo estudante 19..86
Figura 37: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 7..............................89
Figura 38: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 7..............................90
Figura 39: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 7..............................91
Figura 40: Condição de paralelismo entre duas retas..92
Figura 41: Condição para o perpendicularismo entre duas retas dadas....................92
Figura 42: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 8..............................94
Figura 43: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 8..............................95
Figura 44: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade 8.............................96
Figura 45: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 8..............................96
Figura 46: Resolução no GeoGebra do exercício 5 - Atividade 8..............................97
Figura 47: Resolução no GeoGebra do exercício 6 - Atividade 8..............................98
Figura 48: Ângulos formados por retas concorrentes..99
Figura 49: Ângulos formados pelas retas concorrentes e o eixo das abscissas........99
Figura 50: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 9............................101
Figura 51: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 9............................102
Figura 52: Distância entre ponto e reta..103
Figura 53: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 10..........................105
Figura 54: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 10..........................106
Figura 55: Resolução no GeoGebra do exercício 3- Atividade 10...........................107
Figura 56: Área do triângulo..108
Figura 57: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 11..........................111
Figura 58: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 11..........................112
Figura 59: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 11..........................113
Figura 60: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade Complementar.......114
Figura 61: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade Complementar.......115
Figura 62: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade Complementar.......115

Figura 63: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade Complementar.......116
Figura 64: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 12...........................118
Figura 65: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 12...........................119
Figura 66: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 12...........................120
Figura 67: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 12...........................121
Figura 68: Ponto exterior a uma circunferência..122
Figura 69: Ponto sobre a circunferência...123
Figura 70: Ponto interior a uma circunferência...123
Figura 71: Reta exterior a circunferência..124
Figura 72: Reta tangente à circunferência..124
Figura 73: Reta secante à circunferência...125
Figura 74: Circunferências externas...125
Figura 75: Circunferências internas..126
Figura 76: Circunferências tangentes internamente...126
Figura 77: Circunferências tangentes externamente...126
Figura 78: Circunferências se interceptando em dois pontos..................................127
Figura 79: Circunferências concêntricas...127
Figura 80: Resolução no GeoGebra do exercício 1.a. - Atividade 13.......................129
Figura 81: Resolução no GeoGebra do exercício 1.b. - Atividade 13.......................129
Figura 82: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 13...........................130
Figura 83: Resolução no GeoGebra do exercício 3.a. e 3.b. - Atividade 13............131
Figura 84: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 13...........................132
Figura 85: Resolução no GeoGebra do exercício 5 - Atividade 13...........................132
Figura 86: Resolução no GeoGebra do exercício 6 - Atividade 13...........................133
Figura 87: Exemplo de uma peça para usinagem...134
Figura 88: Resolução no GeoGebra da Atividade Complementar 3.........................136
Figura 89: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (a) - Atividade 14.....................140
Figura 90: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (b) - Atividade 14.....................140
Figura 91: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (c) - Atividade 14.....................141
Figura 92: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (d) - Atividade 14.....................141
Figura 93: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 14...........................142
Figura 94: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade 14..........................142
Figura 95: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 14...........................143

Figura 96: Figura 96: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (a) - Atividade 15....147
Figura 97: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (b) - Atividade 15.....................148
Figura 98: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (c) - Atividade 15.....................148
Figura 99: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 15...........................149
Figura 100: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 15.........................149
Figura 101: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 15.........................150
Figura 102: Parábola...151
Figura 103: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 16.........................155
Figura 104: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 16.........................155
Figura 105: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 16.........................156
Figura 106: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (a) - Atividade 16...................156
Figura 107: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (b) - Atividade 16...................157
Figura 108: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (c) - Atividade 16...................157
Figura 109: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (d) - Atividade 16...................158
Figura 110: Resolução no GeoGebra do exercício 1 – Atividade Complementar 4. 159
Figura 111: Resolução no GeoGebra do exercício 2 – Atividade Complementar 4. 160
Figura 112: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade Complementar 4. 160
Figura 113: Resolução no GeoGebra do exercício 4 – Atividade Complementar 4. 161

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Definição de círculo segundo Euclides e Descartes..................................22
Tabela 2: Comparação entre a contribuições de Descartes e Fermat para a Geometria Analítica...23
Tabela 3: Distribuição dos conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo...40
Tabela 4: Distribuição dos conteúdos de Geometria no Ensino Médio segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo...41
Tabela 5: Principais comandos do GeoGebra...46
Tabela 6: Operações Matemáticas no GeoGebra...49
Tabela 7: Possíveis dificuldades na aplicação das atividades e suas respectivas soluções..172

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO...18
2. HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA..20
2.1. René Descartes..20
2.2. Contribuição de Descartes para a Geometria – O plano cartesiano...............22
2.3. Pierre de Fermat e sua contribuição para a Geometria Analítica....................23
3. MATEMÁTICA E A INFORMÁTICA NO ENSINO..26
3.1. A Importância da Matemática...26
3.2. A história da informática na Educação no Brasil...28
3.3. Um novo ambiente na sala de aula...31
3.4. A capacitação de professores...34
3.6. A utilização de computadores na Educação...36
3.7. A importância do acesso à tecnologia no ensino da Geometria......................39
3.8. A escolha do software...42
4. O SOFTWARE GEOGEBRA..45
5. ATIVIDADES DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO GEOGEBRA.............................51
5.1. A escola e turma...52
5.2. Desenvolvimento das atividades...52
5.3. Atividade 1: Coordenadas cartesianas no plano...53
5.3.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 1...53
5.3.2. Desenvolvimento da Atividade 1...56
5.4. Atividade 2: Distância entre dois pontos...59
5.4.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 2...59
5.4.2. Desenvolvimento da Atividade 2...60
5.4.3. Avaliação da Atividade 2...63
5.5. Atividade 3: Ponto médio entre dois pontos..64

5.5.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 3...65

5.5.2. Desenvolvimento da Atividade 3...66

5.5.3. Avaliação da Atividade 3...69

5.6. Atividade 4: Condição de alinhamento de três pontos.....................................70

5.6.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 4 (fórmula para condição de alinhamento entre três pontos)...70

5.6.2. Desenvolvimento da Atividade 4...72

5.6.3. Avaliação da Atividade 4...74

5.7. Atividade 5: Equação geral da reta..75

5.7.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 5...75

5.7.2. Desenvolvimento da Atividade 5...77

5.7.3. Avaliação da Atividade 5...80

5.8. Atividade 6: Interseção de duas retas..80

5.8.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 6...81

5.8.2. Desenvolvimento da Atividade 6...82

5.8.3. Avaliação da Atividade 6...84

5.9. Atividade complementar 1 (Atividade 1-6)...84

5.10. Atividade 7: Equação geral e reduzida da reta. Coeficiente angular.............86

5.10.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 7...86

5.10.2. Desenvolvimento da Atividade 7...88

5.10.3. Avaliação da Atividade 7...91

5.11. Atividade 8: Condições de paralelismo e perpendicularismo.........................91

5.11.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 8...91

5.11.2. Desenvolvimento da Atividade 8...93

5.11.3. Avaliação da Atividade 8...98

5.12. Atividade 9: Ângulo entre retas..98

5.12.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 9...99

5.12.2. Desenvolvimento da Atividade 9..100
5.12.3. Avaliação da Atividade 9..102
5.13. Atividade 10: Distância entre ponto e reta...103
5.13.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 10.......................................103
5.13.2. Desenvolvimento da Atividade 10..105
5.13.3. Avaliação da Atividade 10..107
5.14. Atividade 11: Área de um triângulo..107
5.14.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 11.......................................108
5.14.2. Desenvolvimento da Atividade 11..110
5.14.3. Avaliação da Atividade 11..113
5.15. Atividade complementar 2 (Atividade 7-11)...113
5.15.1. Avaliação da Atividade Complementar..116
5.16. Atividade 12: Circunferência...116
5.16.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 12.......................................117
5.16.2. Desenvolvimento da Atividade 12..118
5.16.3. Avaliação da Atividade 12..121
5.17. Atividade 13: Posições relativas da circunferência......................................122
5.17.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 13.......................................122
5.17.1.1. Posições relativas entre ponto e circunferência.............................122
5.17.1.2. Posições relativas entre reta e circunferência................................123
5.17.1.3. Posições relativas entre duas circunferências................................125
5.17.2. Desenvolvimento da Atividade 13..128
5.17.3. Avaliação da Atividade 13..133
5.18. Atividade complementar 3 (Atividade 12-13)...134
5.18.1. Avaliação da Atividade Complementar 4...136
5.19. Atividade 14: Elipse..136

5.19.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 14....................................137
5.20.2. Desenvolvimento da Atividade 14...139
5.19.3. Avaliação da Atividade 14...143
5.20. Atividade 15: Hipérbole..143
5.20.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 15....................................143
5.20.2. Desenvolvimento da Atividade 15...146
5.20.3. Avaliação da Atividade 15...150
5.21. Atividade 16: Parábola...150
5.21.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 16....................................150
5.21.2. Desenvolvimento da Atividade 16...154
5.21.3. Avaliação da Atividade 16...158
5.22. Atividade complementar 4 (Atividade 14-16)...158
5.22.1. Avaliação da Atividade Complementar 4...161
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS...162
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...164
APÊNDICE A – GABARITO DAS ATIVIDADES..167
APÊNDICE B – POSSÍVEIS DIFICULDADES NA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES172

1. INTRODUÇÃO

Não podemos negar que as tecnologias estão presentes em nosso quotidiano. Em qualquer área do conhecimento de nossas vidas as transformações feitas através das tecnologias são de grande importância para o homem. Não imaginamos nossas vidas hoje sem televisão, rádio, telefone celular e internet. Os jovens iriam se recusar a ficar sem estas tecnologias que já fazem parte de suas vidas. Além disso, o mundo em que vivemos, as informações são distribuídas rapidamente através destas tecnologias, muitas delas utilizando as redes sociais.

Essa evolução tecnológica vem a cada ano crescendo no ensino com a utilização das chamadas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Os benefícios da informação em tempo real dentro de uma sala de aula são muitos, enriquecendo-a ao longo do desenvolvimento de um certo conteúdo. Os benefícios na utilização de um software específico na aplicação de um conteúdo também são muitos sendo o principal deles, o despertar no estudante o interesse pelo conteúdo estudado.

O método tradicional utilizado por muitos anos nas escolas vem sofrendo muitas mudanças a partir do uso dessas tecnologias na sala de aula. O acesso aos computadores desenvolveu também o surgimento de muitos softwares educativos.

Vemos nestas tecnologias uma metodologia para fazer parte do processo de ensino e aprendizagem, facilitando a compreensão de conteúdos. No estudo de Matemática estas tecnologias podem ser de grande ajuda através da resolução de exercícios e na visualização dos exercícios. Em particular, observamos que há uma grande dificuldade por parte dos estudantes na visualização das figuras geométricas e de suas propriedades Matemáticas.

Nesta dissertação temos como objetivo, a partir do uso de uma ferramenta tecnológica, o computador, mostrar a possibilidade de ensinar Matemática, interagindo os conteúdos matemáticos e software GeoGebra, fazendo com que o estudante construa seu conhecimento a partir de conceitos apresentados com auxílio de softwares que possibilitem visualizar as atividades desenvolvidas.

Iniciamos com uma breve história da Geometria Analítica destacando fatos da vida de René Descartes e de Pierre de Fermat, os precursores da Geometria Analítica, além de fazer uma comparação entre a contribuição de cada um deles. Citamos também outros matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

Em seguida discutimos um pouco da história da informática na educação no

Brasil, mostrando a importância de trazer essa metodologia para a sala de aula, em particular para as aulas de Matemática. Apresentamos também um retrospecto sobre a implantação da utilização de tecnologias nas escolas e as iniciativas do Ministério da Educação para esse fim, mostrando os benefícios no processo de ensino-aprendizagem que esse novo ambiente traz para o ensino.

Destacamos que, com esse novo ambiente tecnológico nas escolas, há a necessidade da capacitação dos professores para sua utilização, articulando a prática e a teoria de forma dinâmica.

Neste trabalho, abordamos os conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental e Médio segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

A escolha do software levou em consideração a ligação direta do conteúdo a ser abordado. Neste sentido, utilizamos o software GeoGebra, que se trata de um software de Geometria dinâmica de domínio público e sua aplicação aos conteúdos de Geometria Analítica é de fácil aprendizado para o usuário. Na parte final desta dissertação, apresentamos uma sequência didática utilizando o Software GeoGebra no ensino de Geometria Analítica. Em cada uma das atividades propostas desenvolvemos o conteúdo teórico com exercícios seguido da atividade no GeoGebra do conteúdo. Ao final de cada atividade apresentamos alguns dos comentários feitos pelos estudantes. Apresentamos também uma tabela com as possíveis dificuldades e as soluções que o professor pode ter ao desenvolver as atividades.

Buscou-se assim desenvolver uma sequência didática a qual professor possa aplicar junto aos seus estudantes no ensino de Geometria Analítica do Ensino Médio.

2. HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Com base na obra de Mlodinow (2004).

Imagine se a Geometria Euclidiana e a Álgebra nunca tivessem se fundido através da Geometria Analítica.

Graças a esta junção, Issac Newton(1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) puderam criar o Cálculo e a Mecânica. Se Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630) tivessem conhecido a Geometria Analítica, seus estudos e teorias, poderiam ser diferentes do que conhecemos hoje.

Muitos navios se perderam nos mares por não saberem como se orientar. Foi por estes e outros motivos que os gregos chegaram ao primeiro mapa mundi. Desenhado por Anaximandro, estudante de Tales, por volta de 550 a.C., o primeiro mapa mundi dividia o mundo em duas partes: Europa e Ásia. Os gregos chegaram a estampar o mapa mundi em suas moedas, no ano de 300 a.C. e apesar de inventarem os mapas, não conseguiram aprofundar-se neste assunto.

A primeira ideia para se localizar, no globo terrestre, veio por um meteorologista chamado Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.). Ele propôs a divisão do globo terrestre em cinco zonas climáticas, delineadas por uma localização Norte e Sul. Estas linhas acabaram sendo inseridas nos mapas separadas por linhas de latitude. Os primeiros mapas podem ter surgido em aproximadamente 2300 a.C., feitos em argila, motivados para a cobrança de impostos sobre propriedades.

Porque associar a cartografia (estudo dos mapas) com a Geometria Analítica? Qualquer mapa é um tipo de gráfico. Os gregos já trabalhavam com gráficos e nem se deram conta. Apenas no século XIV, o francês Nicole Oresme (1323-1382) inventou a Geometria coordenada, encontrando a equivalência lógica em tabular valores dispostos em gráficos. Segundo Mlodinow (2004, p.83),

> Oresme também aplicou seu raciocínio gráfico para uma lei que tem sido atribuída a Galileu: que a distância, percorrida por um objeto, sob aceleração uniforme, aumenta com o quadrado do tempo.

2.1. René Descartes

René Descartes nasceu em La Hayre em 31 de Março de 1596. Foi considerado um dos maiores filósofos da humanidade. A frase *“Cogito, ergo sum”* - “Penso, logo existo”, é atribuída a esse célebre filósofo, fundador da filosofia moderna e pai da Matemática moderna. Estudou desde os 8 anos no colégio dos jesuítas, o Cólege Royal de La Fléche, considerado um dos melhores na época. Seu pai, Joachim Descartes, advogado e juiz, além de vários bens e o título de escudeiro, era conselheiro no parlamento de Rennes, na Bretanha. Aos 18 anos, saiu do colégio para fazer o curso de Direito, em Poitieres, concluindo em 1616. Mesmo contrariando seu pai, não exerceu advocacia, faleceu em 11 de fevereiro de 1650 na cidade de Estocolmo na Suécia.

Após sair da universidade, alistou-se no exército de Maurício de Nassau. Esteve por um tempo na Dinamarca e depois foi para a Alemanha onde se alistou nas tropas católicas do Duque Maximiliano da Raviera. Autodidata, utilizando os manuais didáticos do monge Clavius (criador do calendário gregoriano), estudou Matemática. A profunda meditação o leva a ter três sonhos memoráveis. Segundo vários autores, em 10 de novembro de 1619, após um sonho, ele foi capaz de estabelecer a aplicação da álgebra no estudo da Geometria criando assim a Geometria Analítica. Neste momento ele abandonou a carreira militar. Nessa época fez algumas viagens para Holanda e Alemanha, voltando para França em 1622. Conheceu vários cientistas como: Claude Mydorge (1585-1647) e Pierre de Bérulle (1575-1629). Este último era um homem influente que o convidara para fazer a defesa da religião sob a ótica da metafísica. Descartes também troca experiências com o padre Mersenne(1588-1648).

Em 1628, escreveu sua primeira obra *“Regulae ad Directionem Ingin”*, em latim, que traduzido é “Regras para a direção do Espírito”. Este livro foi publicado apenas em 1701, cinquenta anos após sua morte. Nele, Descartes expõe a ordem e a razão do método científico, em contrapartida ao método da física escolástica.

As principais obras de Descartes foram:

- 1637- *Discours de la méthode* (Discurso do método) onde critica o método da escolástica e faz uma nova proposta para a filosofia. Neste trabalho ele impõe sua característica principal, a de tentar simplificar a ciência e as equações complicadas com uma metodologia simples e eficaz.
- 1641- Meditationes de prima pilosophia;
- 1644- Principia pilophia.
- Após sua morte em 11 de fevereiro de 1650:
- 1650- Musicae comprendium;
- 1656- Lettre apologétique;
- 1662- De homine;

- 1664- Le monde ou traite de la lumiere;
- 1664- Traite de la formation du fontes;
- 1664- Traite dde la mecanique;
- 1701- Regulae ad directionem Ingenni.

2.2. Contribuição de Descartes para a Geometria – O plano cartesiano

O nome Descartes, em latim *“Cartesius”,* foi o nome que derivou “cartesianos” em sua homenagem.

Descartes conseguiu associar a Álgebra com a Geometria Euclidiana, desenvolvendo um sistema de coordenadas composto por duas retas perpendiculares, os chamados eixos x (abscissas) e y (ordenadas).

Bandeira (2014) relata que Descartes:

> … viveu uma noite extraordinária no final de 1619. Nessa época, ele ficava sozinho em um cômodo aquecido, onde podia se entregar a atividade intelectual.
>
> Uma visão intelectual, um insight, numa noite iluminada, teve uma revelação de uma ciência admirável, de dimensão universal. Descartes, resolvera viajar para procurar a verdade no grande livro do mundo, em 1619, sai da Holanda e viaja pela Europa, estava finalizando o seu tratado, sobre o mundo e sobre o homem, quando lhe veio a notícia da cooperação de Galileu, por suas teorias científicas.
>
> Descartes, tinha um projeto filosófico. Cada vez mais, ligado na Matemática, queria associar as leis numéricas com as leis do mundo, resgatando a antiga doutrina pitagórica. Sua principal teoria, firmava-se na eficácia da razão, a qual refletia sobre a questão da autonomia da ciência e da objetividade da razão frente ao Deus todo poderoso. As novas teorias científicas contrariavam as sagradas escrituras.

Um outro exemplo da importância da obra de Descartes na Geometria é a comparação da definição de círculo dada por Euclides, descrita na parte I dos Elementos, com a definição de Descartes. Ver tabela 1.

Tabela 1: Definição de círculo segundo Euclides e Descartes.

Euclides	**Descartes**
Um círculo é uma figura plana, contida por uma linha [isto é, uma figura], tal que todas as linhas retas que vão até ela de um certo ponto de dentro do círculo- chamado de centro- são iguais entre si.	Um círculo, é todo x e y, que satisfaça a equação $x^2+y^2=r^2$. Para algum número constante r.

Fonte: MLODINOW, 2004, p. 97

2.3. Pierre de Fermat e sua contribuição para a Geometria Analítica

Pierre de Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601 em Beaumont de Lomagne na França. Seu pai era comerciante de couro e segundo cônsul de sua cidade natal. Fermat provavelmente estudou no monastério franciscano local e foi para a universidade de Toulouse e depois para Bordeaux no segundo semestre do ano de 1620. Ingressou no serviço público em 1631. Em 1652 foi promovido a juiz supremo na corte criminal soberana do parlamento de Toulouse.

Aos 30 anos de idade já era conselheiro do parlamento de Toulouse. Advogado discreto e humilde em suas horas vagas dedicava-se à Matemática. Não publicou muito, mas sua influência foi fundamental para alguns ramos da Matemática. O mais importante talvez seja a fundação da Moderna Teoria dos Números. É considerado o maior matemático francês do século XVII.

Em relação a Geometria Analítica escreveu uma carta a Roberval (1602-1675) em setembro de 1636, onde afirma que suas ideias já tinham sete anos. Esta carta é detalhada no artigo *"isogoge ad locus planos et sólidos"* publicada posteriormente onde vemos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas. Fermat morreu em Castres na França, no ano de 1665.

A tabela 2 faz uma breve comparação das contribuições, para a Geometria Analítica, dada por Descartes e Fermat.

Tabela 2: Comparação entre a contribuições de Descartes e Fermat para a Geometria Analítica.

Descartes	Fermat
Constrói a sua Geometria em torno do difícil problema de Papus. Começou com o lugar das três e quatro retas, usando uma das retas como eixo das abscissas. Dá mais ênfase à construção de soluções algébricas.	Limita a sua Geometria aos lugares mais simples. Começou com a equação linear e escolhe um sistema de coordenadas arbitrário sobre o qual a esboçou. Dá mais ênfase ao esboço de soluções indeterminadas.

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Um outro contemporâneo de Fermat é Gilles Personne que nasceu em Roberval, perto de Beauvais, em 1602 e faleceu em Paris em 1675. Mesmo sem ter direito adotou o título de senhoril de Roberval. Ficou conhecido por seu método de traçar tangentes e por suas descobertas no campo das curvas planas superiores. Roberval ficou

40 anos ocupando uma cadeira no Colégio Real. Esta cadeira se tornava vaga a cada três anos e o sucessor deveria responder questões Matemáticas elaboradas pelo atual dono da cadeira, Roberval deixava suas descobertas para esses momentos dificultando assim a entrada de um matemático em seu lugar. Por esse motivo, seus trabalhos não eram divulgados. Tentou reivindicar algumas descobertas mas por guardar suas descobertas, para um momento específico acabava ficando para traz. Seu foco principal era a Física

Um concorrente direto de Roberval pelas descobertas realizadas era Evangelista Torricelli. Nascido perto de Faenza, Itália em 1608 morreu em Florença em 1647 com apenas 39 anos.

Torricelli tinha um foco para a Física, mas teve algumas publicações para o crescimento da Geometria. Em sua obra de 1644, *"Opera Geométrica"*, Torricelli publica o primeiro trabalho sobre a cicloide, apresentando sua quadratura, a tangente pela interpretação mecânica, o centro de gravidade e volume do sólido de revolução. A publicação, enfureceu Roberval que levantou uma acusação de plágio contra o italiano, iniciando uma disputa que só terminaria com a morte de Torricelli em 1647, provavelmente de tifo. Sua morte o impediu de publicar sua correspondência com Marin Mersenne (1588-1648) como prova de que chegara independentemente aos seus resultados.

Os desenvolvimentos subsequentes dos estudos matemáticos sobre a cicloide se devem principalmente aos trabalhos de Blaise Pascal (1623-1662). Em certo momento da sua vida, dedicada exclusivamente à Teologia, Pascal teve uma dor de dente e uma visão da cicloide, acreditando que o estudo da cicloide resolveria seu problema dentário. Pascal retorna aos estudos de Geometria e descobre várias propriedades da cicloide que são então colocadas como problemas abertos à comunidade científica. Essa série de problemas, enunciados conjuntamente com Roberval, mobilizou vários matemáticos da época, como Christopher Wren (1632-1723), Christiaan Huygens (1629-1695), John Wallis (1616-1703) e Fermat. Como resultado temos a publicação em 1658 da retificação da curva por Christopher Wren. Ocorre também o aprofundamento do conceito de indivisível e os primeiros ensaios para o conceito de integral.

Fermat propõe um problema para Torricelli que é o de determinar um ponto no plano de um triângulo de modo que a soma de suas distâncias aos três vértices seja mínima. Em 1659 seu discípulo Viviani (1622-1703), publica a solução feita por Torricelli. Este ponto foi chamado do centro isogônico do triângulo.

Christiaan Huygens teve também uma participação importante na estruturação da Geometria Analítica com apenas 22 anos publicou vários artigos, entre eles um que tratava sobre as quadraturas do círculo e das cônicas.

Podemos citar também outros matemáticos, não tão conhecidos, que com sua capacidade e métodos precários conseguiram desenvolver vários trabalhos dentro da Geometria Analítica. São eles:

- Claude Mydorge (1585-1647), nascido em Paris, era amigo de Descartes. Foi geômetra e físico. Publicou alguns trabalhos destacando-se um tratamento sintético das secções cônicas em que simplificava muitas demonstrações prolixas de Apolônio, além de deixar mais de mil enunciados e soluções de problemas de Geometria. Editou *Récréations Mathématiques de leurechon*.
- Philipe de la Hire (1640-1718), francês que fez alguns trabalhos com secções cônicas, métodos gráficos, curvas de ordem superior e quadrados mágicos. Além de construiu mapas da Terra.
- Vicenzo Viviani (1622-1703), discípulo de Galileu, era italiano e se dedicou a física e a Geometria. Na Geometria determinou a tangente à cicloide, entre outros. Resolveu o problema da trisseção usando uma hipérbole equilátera.

Neste capítulo procuramos abordar a história da Geometria Analítica com o objetivo de conhecimento, podemos pedir aos estudantes uma pesquisa sobre estes autores aqui citados e fazer uma atividade com comentários sobre a influência destes com a Geometria fazendo uma relação com a Geometria Analítica.

3. MATEMÁTICA E A INFORMÁTICA NO ENSINO

3.1. A Importância da Matemática

D' Ambrosio (1993), em uma formulação mais incisiva, enfatiza que a Matemática é parte de nossas estruturas tecnológicas, militares, econômicas e políticas, e como tal é um recurso tanto para maravilhas como para horrores.

> Por meio de modelos matemáticos, também nos tornamos capazes de "projetar" uma parte do que se torna realidade. Tomamos decisões baseados em modelos matemáticos e, dessa forma, a Matemática molda a realidade (BORBA; SKOVSMOSE, 2001, p.135).

A Matemática pode ser ensinada antes que a criança entre na escola, começando em um processo decorativo de contagem de um a dez. Em seguida, em um processo quantitativo, muitas crianças já chegam na pré escola com a ideia de contagem, e ao passar as fases da pré escola, Ensino Fundamental e Ensino Médio é construído um "conhecimento matemático". Durante este processo o professor busca pela atenção e concentração dos estudantes que a cada novo conteúdo questionam o professor com perguntas do tipo: "Para que vou usar isso em minha vida?", "Por que preciso aprender esse conteúdo?". Fica claro que perguntas como estas mostram que os estudantes não tem a percepção da importância da construção do "conhecimento matemático". Quando indagados com perguntas deste tipo procuramos sempre enfatizar ao estudante sobre a importância do desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico a partir dos conteúdos que estão sendo abordados.

"Só se aprende Matemática fazendo exercícios", esta é uma frase para os matemáticos e simpatizantes da arte de desenvolver exercícios de raciocínio lógico fundamentados na Matemática, observando a quantidade de exercícios propostos aos estudantes para fixar certos conteúdos. Skovsmose (2007) estima que do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, os estudantes são expostos a aproximadamente 10.000 exercícios, na sua maioria, baseados em procedimentos. Bennemann e Allevato (2013) destacam que obviamente há resultados no ensino baseado nesses procedimentos, visto que os grandes vestibulares apresentam questões tradicionais. Estudantes com objetivo de aprovação nos vestibulares demostram mais interesse para a resolução de exercícios, sendo mais participativos nas aulas. De outro lado, temos os estudantes que não se interessam pelos exames vestibulares, ou simplesmente possuem matefobia ou descalculia. Neste caso, estes estudantes não demonstram interesse em aprender

Matemática mesmo sendo óbvia a importância da Matemática no seu cotidiano.

Kline[1] apud Valente (2014) reforça a importância da Matemática em nossas vidas da seguinte maneira:

- **Transmissão do conhecimento matemático**. Os conceitos matemáticos têm sido acumulados desde o ano 3.000 a.C. Um indivíduo que se diz "escolarizado" necessariamente deve conhecer alguns desses fatos.
- **Pré-requisito para o sucesso**. Normalmente as profissões de maior destaque na nossa sociedade requerem o conhecimento matemático. Se o estudante deseja o status social que essas profissões propiciam, então é necessário "ser bom em Matemática".
- **Beleza intrínseca à estrutura Matemática**. Os matemáticos se encantam com a estrutura Matemática. O fato de um número mínimo de axiomas dar origem a um tipo de Geometria ou da teoria dos números é impressionante como estrutura lógica. Essa beleza e o poder mental que a construção dessa estrutura exige deveria ser transmitida aos estudantes. A mesma satisfação que o matemático encontra em raciocinar e organizar o seu pensamento, segundo essas estruturas Matemáticas, o estudante deveria encontrar ao resolver um determinado problema.
- **Valores práticos**. A Matemática auxilia o homem a entender e dominar o mundo físico e, até certo ponto, o mundo econômico e social. A descrição precisa do que acontece ao nosso redor é feita em termos da Matemática ou de um sistema simbólico que tem características Matemáticas.
- **Treino da mente**. Mais uma vez, a razão nobre e irrefutável ou seja, propiciar o desenvolvimento disciplinado do raciocínio lógico-dedutivo. A própria origem da palavra *Matemática* significa a técnica (*tica*) de entender ou compreender (*matema*).

Portanto, fazer Matemática exige, necessariamente, o desenvolvimento de habilidades ou técnicas de pensamento ou raciocínio.

É difícil para o professor de Matemática disputar o interesse do estudante por sua disciplina, sendo que as outras mostram seus conteúdos em uma aplicação diária, conseguindo fazer com que o estudante tenha um maior interesse por elas. Cabe ao professor de Matemática despertar no estudante o desejo de aprender mesmo que os

[1] KLINE, M. **Why Johnny Can't Add: the failure of the new math.** New York: Vintage Books, 1973.

conteúdos não sejam utilizados diretamente no seu cotidiano. Neste sentido, precisamos rever os métodos utilizados para o ensino da Matemática. Surgem diversas barreiras, por parte dos professores, que deverão sair de uma condição de conforto para uma condição de risco. Os professores devem abandonar o método que lhes foi ensinado e que utilizam a muitos anos. Um ambiente diferente para as aulas de Matemática é um bom começo para quebrar o paradigma do “giz, lousa e saliva”. Skowsmose afirma que “a solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente”.

Esse novo ambiente pode despertar o interesse do estudante em aprender Matemática. Outras disciplinas possuem maior facilidade em utilizar diferentes ambientes para ensinar seus conteúdos. Já a Matemática fica presa a sala de aula. Além disso, o ensino da Matemática apresenta dificuldades em explorar as aplicações e o seu uso no dia a dia.

Os Parâmetros Curriculares Nacional (PCN) (BRASIL, 1997, p. 19) afirma que “a atividade Matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo estudante, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.”

3.2. A história da informática na Educação no Brasil

No Brasil, como em outros países, o uso do computador na educação teve início com algumas experiências em universidades no princípio da década de 1970. Em 1971, foi realizado na Universidade Federal de São Carlos um seminário sobre o uso de computadores no ensino de Física, ministrado por E. Huggins, especialista da Universidade de Dartmouth, E.U.A. (SOUZA[2] apud VALENTE, 1999). Nesse mesmo ano, o Conselho de Reitores das Universidades Brasileiras promoveu, no Rio de Janeiro, a Primeira Conferência Nacional de Tecnologia em Educação Aplicada ao Ensino Superior (I CONTECE). Durante esse encontro, um grupo de pesquisadores da Universidade de São Paulo (USP), acoplou, via modem, um terminal no Rio de Janeiro a um computador localizado no campus da USP em São Paulo.

Em 1973, na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), o Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde e o Centro Latino-Americano de Tecnologia Educacional (NUTES/CLATES) utilizou um software de simulação no ensino de Química.

2 SOUZA, H.G. **Informática na educação e ensino de informática: algumas questões**. Em Aberto, ano II, n° 17, jun. p.1-8, 1983.

Nesse mesmo ano, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) realizaram-se algumas experiências usando simulação de fenômenos de Física com estudantes de graduação. O Centro de Processamento de Dados da UFRGS desenvolveu o software SISCAI para avaliação de estudantes de pós-graduação em Educação. Em 1982, o SISCAI foi traduzido para os microcomputadores de 8 bits como CAIMI (CAI para Micro computadores) e foi utilizado no ensino Médio pelo grupo de pesquisa da Faculdade de Educação (FACED), liderado pela Profa. Lucila Santarosa.

Em 1975 aconteceu a primeira visita de Seymour Papert e Marvin Minsky ao Brasil que lançaram as primeiras sementes das ideias do Logo. Em 1976, um grupo de professores do Departamento de Ciência de Computação da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) produziu o documento "Introdução a Computadores", financiado pelo Programa de Expansão e Melhoria do Ensino (PREMEN/MEC). Nesse mesmo ano, foram iniciados os primeiros trabalhos com o uso de Logo com crianças. Papert e Minsky retornam ao Brasil para ministrar seminários e participar das atividades do grupo de pesquisa sobre o uso de Logo em educação que tinha se estabelecido. Essas experiências e estudos deram origem à dissertação de mestrado de Maria Cecília Calani (1981) e, posteriormente, o grupo de pesquisa foi consolidado com a criação do Núcleo de Informática Aplicada à Educação (NIED), em maio de 1983.

Em 1981, o Logo foi intensamente utilizado por um grupo de pesquisadores liderados pela Profa. Léa da Cruz Fagundes do Laboratório de Estudos Cognitivos (LEC) da UFRGS. O LEC foi criado em 1973 por pesquisadores preocupados com as dificuldades da aprendizagem de Matemática apresentadas por crianças e adolescentes da escola pública. Os estudos realizados tinham uma forte base piagetiana e eram coordenados pelo Dr. António Battro, discípulo de Piaget. O Logo, também desenvolvido com bases piagetianas, passou a ser uma importante ferramenta de investigação de processos mentais de crianças de 7 a 15 anos que faziam parte dos estudos do LEC.

Assim, existiam no início dos anos 1980 diversas iniciativas sobre o uso da informática na educação no Brasil. Esses esforços, aliados ao que se realizava em outros países e ao interesse do Ministério de Ciência e Tecnologia (MCT) na disseminação da informática na sociedade, despertaram o interesse do governo e de pesquisadores das universidades na implantação de programas educacionais baseados no uso da informática. Essa implantação teve início com o primeiro e o segundo Seminário Nacional de Informática em Educação, realizados respectivamente na Universidade de Brasília em 1981 e na Universidade Federal da Bahia em 1982.

Algumas das iniciativas do Ministério da Educação para a implantação da utilização de tecnologias nas escolas nos últimos anos foram:

- 1981. I Seminário Nacional de Informática na Educação promovido pelo MEC/SEI/CNPq, em Brasília – DF;
- 1982. Criação do Centro de Informática – CENIFOR / Funtevê (Portaria nº 09,18/02/92). Ao Cenifor competia, entre outras atribuições, assegurar a pesquisa, o desenvolvimento, a aplicação e a generalização do uso da informática no processo de ensino-aprendizagem em todos os níveis e modalidades;
- II Seminário Nacional de Informática na Educação, promovido pelo MEC/SEI/CNPq, em Salvador - BA, com o tema "O impacto do Computador na Escola: subsídios para uma experiência piloto do uso do computador no processo educacional brasileiro";
- 1983. Criação da Comissão Especial nº 11/83 - Informática na Educação (Portaria SEI/CSN/PR nº 001, de 12/01/83);
- Reestruturação do Cenifor (Resolução do Conselho Diretor da Funtevê nº 16/83, de 20/10/83), para que assumisse os papéis de órgão indutor, mediador e produtor de tecnologia educacional de informática, coordenando o processo de informatização da educação.
- 1984. Assinatura, em 03/07/84, do Protocolo de Intenções entre MEC – SEI – CNPq – FINEP – FUNTEVÊ, para dar sustentação financeira à operacionalização do Projeto Educom nas universidades;
- 1985. Divulgação em junho, pelo MEC, do I Plano Setorial - Educação e Informática, prevendo ações nos segmentos de ensino e pesquisa relacionadas ao uso e aplicação da informática na educação;
- 1986. Aprovação do Programa de Ação Imediata em Informática na Educação para 1987;
- 1987. Aprovação do Regimento Interno do Comitê Assessor de Informática e Educação - CAIE/MEC (Portaria MEC/SG nº 165, de 13/08/87);
- Início da implantação dos CIED - Centros de Informática na Educação de Primeiro e Segundo Graus e Educação Especial, junto aos sistemas estaduais públicos de ensino.
- 1988. A Organização dos Estados Americanos (OEA) convida o MEC-Brasil

para avaliar o programa de Informática Aplicada à Educação Básica, do México, e o resultado foi um projeto multinacional de cooperação técnica e financeira integrado por oito países americanos que vigorou até 1995.

- 1989. Realização da Jornada de Trabalho Latino-Americano de Informática na Educação e Reunião Técnica de Coordenação de Projetos em Informática na Educação;
- O Conselho Nacional de Informática e Automação (CONIN) altera a redação do II Plano Nacional de Informática e Automação (II PLANIN), introduzindo ações de informática na Educação:"....implantar núcleos de informática em educação junto às Universidades, Secretarias de Educação e Escolas Técnicas, no sentido de criar ambientes informatizados para atendimento à clientela de primeiro, segundo e terceiro graus, educação especial e ensino técnico, objetivando o desenvolvimento de pesquisa e formação de recursos humanos";
- 1990. Aprovação do Regimento Interno do PRONINFE (Portaria MEC/SG nº 27, de 07/03/90) e integração do PRONINFE na Secretaria Nacional de Educação Tecnológica-SENETE/MEC, (Portaria MEC/Secretário Executivo nº 58, 06/06/90).
- 1992. Criação de rubrica específica no orçamento da União para ações de Informática na Educação, (PT nº 088043019911082.001 – Informática na Educação).
- 1995. O PRONINFE foi vinculado, informalmente, à Secretaria de Desenvolvimento, Inovação e Avaliação Educacional – SEDIAE.
- 1996. Criação da Secretaria de Educação a Distância – SEED, (Decreto nº 1.917, 27/05/96);
- 1997. Criação do Programa Nacional de Informática na Educação – ProInfo, (Portaria MEC nº 522, 09/04/97).

3.3. Um novo ambiente na sala de aula

Segundo Chaves (2004),

> … o computador em situação de ensino-aprendizagem contribui positivamente para o aceleramento de seu [no caso, o estudante] desenvolvimento cognitivo e intelectual, em especial no que esse desenvolvimento diz respeito ao raciocínio lógico e formal, à capacidade de pensar com rigor e sistematicamente, à habilidade de inventar ou encontrar soluções para problemas.

Desde 1980, o Governo Federal tem procurado prover o uso das

Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no âmbito educacional. Nesse sentido, estruturou um Programa Nacional de Informática e Educação (PROINFO), que é responsável em promover a formação de professores, além de fornecer equipamentos às escolas. A tecnologia tem influenciado nossas vidas em todas as áreas, por isso os PCN (BRASIL, 1998) destacam as inúmeras transformações que o uso da tecnologia trouxe nas últimas décadas. É esperado que os profissionais atuais que tenham iniciativa, atitude crítica, competência técnica, flexibilidade, e principalmente ter facilidade para lidar com o “novo”, sabendo dar soluções para os problemas, assim como, estar preparado para lidar com as novas tecnologias.

Para os PCN a utilização das tecnologias em sala de aula precisa priorizar a qualidade do ensino, pois apenas o fato do uso de um instrumento tecnológico em sala de aula, não significa a melhora no ensino. A forma correta de utilização desse instrumento pode valorizar e enriquecer a aula, influenciando diretamente no processo ensino-aprendizado. Esse instrumento tecnológico é apenas uma ferramenta de mediação e deve ser utilizado para enriquecer a atividade. O professor necessita ter total domínio da atividade a ser desenvolvida para levar o estudante a um raciocínio lógico e com a atividade, atingir o seu objetivo final. Carmo (2014) ressalta que “o computador mais que simplesmente criar aulas com efeitos especiais, ele vai permitir criar ambientes de aprendizagem que fazem surgir novas formas de pensar e aprender”.

A Revista Nova Escola (2009) em edição especial “Computador na Educação: modo de usar”, pesquisando 400 escolas de 13 capitais nos mostra que 98% dos entrevistados afirmam ter computadores funcionando nas escolas, 18% admitem que o laboratório de informática nunca é utilizado. A revista também destaca que para a utilização das TIC chegar em todas as salas de aula do Brasil

> ... é necessário investir em planejamento, em todos os níveis:
>
> As redes, além de garantir a infraestrutura necessária, têm de incluir as chamadas tecnologias da informação e comunicação (TICs) nas matrizes curriculares.
>
> As escolas precisam incorporá-las a seus projetos pedagógicos.
>
> Os cursos de capacitação em serviço devem ser revistos e passar a oferecer atividades ligadas diretamente aos conteúdos aliadas às ferramentas informáticas.
>
> E cabe aos professores aplicar tudo isso em cada uma das disciplinas.
>
> (NOVA ESCOLA, 2009)

Nesse sentido, os recursos materiais para uso da tecnologia já estão disponíveis ao menos nas escolas públicas das grandes capitais. Segundo a pesquisa da revista Nova Escola, 98% têm computador, impressora, TV e DVD. Projetor ou data show estão presentes em 85% dos casos, assim como máquina fotográfica digital (79%) e filmadora (50%). O acesso à internet via banda larga está em 83% das escolas, mas o desafio é colocar tudo a serviço da aprendizagem. Afinal, 73% têm laboratório de informática, mas quase um quinto deles não usa o espaço para atividades com os estudantes. Ainda 62% dos entrevistados acreditam que faltam computadores para uso dos professores.

Obviamente que o planejamento da utilização de tecnologias em sala de aula é de extrema importância. Segundo a pesquisa, a maioria das escolas já incluem as TIC em seu Projeto Político Pedagógico. Durante o ano letivo se faz necessário avaliações do processo e o seu replanejamento objetivando alcançar as metas inicialmente estipuladas criando assim um cronograma de atividades e avaliações durante o período. A Revista Nova Escola relata também uma experiência sobre a utilização de computadores na cidade de São Bernardo do Campo que, em 2002, iniciou a implantação dos laboratórios de informática nas 68 escolas de Ensino Fundamental do Município, com projetos para atingir as 76 unidades da educação infantil. “A incorporação das tecnologias ao projeto pedagógico foi um processo que demorou a ser compreendido”, afirma Kátia Duarte Cruz Rocha, chefe de seção de Laboratório e Educação Tecnológica daquele município. A implantação do programa foi gradativa onde inicialmente os professores elaboravam planos de trabalhos para ser acrescentado no planejamento escolar. Em 2007, após várias reflexões, foi publicada a Proposta Curricular de Tecnologia da Informação. “Desde então, a orientação da rede vai, no sentido de integrar os computadores às necessidades de ensino e aprendizagem de cada escola e cada professor”, diz Kátia. A revista cita a E.M.E.B. Otílio de Oliveira que, possuindo 18 computadores e acesso à internet, realiza uma reunião especifica para o planejamento da utilização desses recursos tecnológicos sempre visando os conteúdos previstos.

Há uma necessidade de capacitação do professor para a utilização do computador em sala de aula. Os professores provavelmente já possuem noções básicas no uso do computador. Apesar de serem ferramentas importantes, os editores de texto e as planilhas de cálculo, não são softwares educacionais. Existem softwares específicos para as diversas disciplinas ou área de conhecimento a serem utilizados demandando a capacitação do professor.

Segundo a pesquisa da Revista Nova Escola, 72% dos entrevistados acham que o curso de graduação os preparou pouco ou nada para o uso das TIC. Além disso, apenas 15% afirmaram ter recebido formação para o uso de tecnologias aplicadas à Educação. Observamos que o uso de tecnologia em sala de aula depende de um projeto social por parte das secretarias de educação dos estados e dos municípios.

3.4. A capacitação de professores

Vilela (2007) ressalta que:

> No fundo, persiste ainda um problema da própria pedagogia tradicional que não transita pelas teorias pós-modernas da aprendizagem, muitas vezes não incluindo-se na formação do educador, a questão da aprendizagem tecnológica, fazendo com que este profissional permaneça, à margem da história contemporânea, ou seja contemplado por limitados treinamentos.

Com um novo ambiente nas escolas há uma necessidade de capacitação do professor, pois como já mencionado anteriormente algumas universidades não capacitam os professores para a utilização de computadores no processo ensino aprendizado. Com esse intuito, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP) procurou capacitar os professores da rede pública com diversos programas, entre eles o Programa de Educação Continuada (PEC), com diretrizes gerais e operacionalização realizada por meio de parcerias com instituições de capacitação.

Segundo a proposta da SEE-SP,

> A capacitação deveria fundamentar-se na realização de atividades que propiciassem a articulação teoria-prática criando uma dinâmica descritiva pelo ciclo ação-reflexão-ação de modo a garantir a extensão do processo de formação para o local de atuação dos professores e, sobretudo, a concomitante transformação do cotidiano escolar. (SÃO PAULO, 1997, p. 9-10)

Destacamos o trabalho realizado pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP nessa parceria, atuando na 4ª Diretoria de Ensino da Capital, 1ª e 2ª Diretoria de Ensino de Guarulhos e na Diretoria de Ensino de Caieiras no ano de 1997. A partir de diretrizes proposta pela SEE-SP e atividades elaboradas com participação de supervisores de ensino, diretores de escola e expectativas do professor para com o projeto, a PUC/SP elaborou um plano de trabalho para diversas áreas dividindo-o em subprojetos por disciplina (Matemática, Português, História e Geografia) destinado a professores do Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano. Para os coordenadores pedagógicos também era oferecido o subprojeto de Informática na Educação. Por fim, o subprojeto de Liderança destinado a Dirigentes de Ensino, Supervisores de Ensino, Assistente técnico pedagógico, Diretor e Vice-diretor de escola.

Todo o material desenvolvido foi chamado de Caderno de Orientações e foi distribuído para os professores no primeiro dia de cada modulo e desenvolvido durante o curso. Ao final do curso 68% dos professores capacitados indicaram que o Projeto PEC/PUC contribuiu para o surgimento de ideias na sua prática pedagógica, com utilização de novas tecnologias, em especial o computador. Além da implantação do Núcleo de Tecnologia em 1998.

Apresentamos a seguir um projeto do governo do Estado de São Paulo, o Acessa São Paulo, que tem como principal finalidade fazer a inclusão virtual dos estudantes da rede pública de ensino, além de proporcionar cursos e capacitações sobre o acesso e utilização da internet.

O Acessa São Paulo é o programa de inclusão digital do Governo do Estado de São Paulo, coordenado pela Secretaria de Gestão Pública, com gestão da Companhia de Processamento de Dados do Estado de São Paulo (Prodesp), por meio da Diretoria de Serviços ao Cidadão. Criado em julho de 2000, o Programa Acessa São Paulo oferece para a população do Estado o acesso às novas tecnologias da informação e comunicação, em especial à internet, contribuindo para o desenvolvimento social, cultural, intelectual e econômico dos cidadãos paulistas. Para atingir seus objetivos, o Programa Acessa São Paulo abre e mantém espaços públicos com computadores para acesso gratuito e livre à internet com o objetivo de promover o conhecimento, educação e desenvolvimento econômico, social e ambiental.

Além da abertura e manutenção dos espaços públicos de acesso à internet, o Acessa São Paulo também desenvolve atividades importantes para a inclusão digital como:

- Projetos comunitários com uso de tecnologia da informação.
- Produção de conteúdo digital e não-digital para a capacitação e informação da população atendida.
- Divulgação e facilitação do uso de serviços de governo eletrônico.
- Promoção de ações presenciais e virtuais que possam contribuir para o uso do cidadão da internet e das novas tecnologias.
- Produção de pesquisas e informações sobre inclusão digital.

O Acessa São Paulo conta com a parceria e o expertise do Laboratório de Inclusão Digital e Educação Comunitária (LIDEC) da Escola do Futuro da Universidade de São Paulo, corresponsável por diversas das atividades desenvolvidas pelo programa.

Para ter uma dimensão do Programa Acessa São Paulo podemos destacar algumas importantes conquistas:

- 13 anos de existência.
- Cerca de 73 milhões de atendimentos gratuitos.
- Cerca de 2,8 milhões de usuários cadastrados.
- 744 Postos em funcionamento.
- 176 Postos em implantação.
- 623 municípios atendidos.
- Mais de 1.100 monitores ativos.

Este programa da SEE/SP é realizado dentro das escolas públicas. As escolas são equipadas com laboratórios de informática com acesso à internet e um monitor devidamente capacitado pelo programa, auxiliando professores e estudantes. Esses monitores se revezam uma vez que as salas ficam à disposição dos estudantes tanto no horário de aula (com a presença do professor) como em horário em que não acontecem as aulas. Todo acesso é monitorado pelo programa e conta com apoio técnico dentro da Diretoria de Ensino de cada região. Este programa é referência em inclusão digital.

3.6. A utilização de computadores na Educação

Há varias discussões sobre o uso de computadores na educação. Valente (1999) afirma que alguns professores chegam a questionar sobre “a desumanização que essa máquina pode proporcionar na educação”. Por outro lado,

> Trata-se de um ensino voltado para a compreensão, no qual o professor atua como desafiador, mediador, consultor, facilitador, promotor da aprendizagem que se desenvolve na interação do estudante com o conhecimento em construção com o contexto e com os recursos disponíveis. (ALMEIDA, 2006, p. 56)

Vivenciar o novo é o grande desafio para o professor, pois ensinar de uma forma que não aprendeu constitui o seu dilema. “Giz, saliva e lousa” foi a maneira utilizada pela educação por vários séculos. Para utilizar a tecnologia no ensino dos mesmos conteúdos o professor enfrenta muitas dificuldades. Primeiro o professor não participa da construção do projeto, uma vez que muitos deles são cópias de ideias aplicadas em outros estados e cidades. Segundo, enfrenta dificuldades como: a utilização de computadores na própria escola; a capacitação de para a utilização de computadores; a escolha do software a ser utilizado e por fim, as questões burocráticas que inclui horário para capacitação e salário.

Estudos vêm demonstrando que há uma grande aceitação por parte de estudantes e professores, em utilizar o computador como meio didático, da mesma forma como o DVD, o Datashow e a calculadora.

O computador, juntamente com os softwares educacionais, surgiu para que possamos "informatizar os métodos de ensino tradicionais" (VALENTE, 1999). Papert[3] (1986) apud Valente (1999) denominou de construcionista a abordagem pela qual o aprendiz constrói, através do computador, o seu próprio conhecimento.

Nesse ambiente o estudante precisa aprender a pensar, ter autonomia em tomar decisões, trabalhar em grupo quando solicitado, não ficar dependendo inteiramente do professor que aqui possui um papel de mediador. O objetivo desse ambiente tecnológico é o de construir e descobrir o conhecimento.

O computador é um instrumento para auxiliar na educação. O estudante deve aprender conteúdo de uma forma pedagógica utilizando-o como um instrumento de aprendizagem, não havendo necessidade de se aprender sobre seu funcionamento e suas finalidades.

Não podemos supor que a ideia da utilização de tecnologia em sala de aula seja a solução para os problemas de aprendizado. A uso da tecnologia deve auxiliar no processo de ensino-aprendizado, pois além de tirar a escola do método tradicional, procura envolver o estudante com métodos de aprendizado que convive diariamente. Esses métodos o estudante já desenvolve sozinho, jogando videogame, acessando a internet, utilizando seu tablet ou seu celular. O professor tem o papel de mediador, facilitando o conhecimento. Não há uma receita mágica que leve o estudante ao conhecimento e sim métodos que proporcionam uma maneira de como chegar ao conhecimento. Observamos que a utilização das tecnologias, quando bem empregadas, podem levar o estudante a descobrir os encantos do saber.

Valente (1999, p.97) se refere aos estudantes e a utilização do computador para realizar atividades destacando que, se queremos mudar a educação para um ambiente onde utilizaremos mais recursos tecnológicos, é preciso levar o estudante ao *empowerment* - a sensação de que os estudantes são capazes de produzir algo considerado impossível. Nesse sentido, se faz necessário um ambiente desafiador e estimulador levando o indivíduo a ser capaz de aprender sobre praticamente qualquer

---

[3] PAPERT, S. **Constructionism: A New Opportunity for Elementary Science Education. A proposal to the National Science Foundation**, Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group, 1986.

coisa. O papel do uso da tecnologia em sala de aula deve levar o estudante a querer aprender, não apenas utilizar comandos com roteiros prontos e previamente definidos. O estudante deve ser estimulado e apoiado a realizar o novo em um ambiente propício.

A importância da utilização das TIC no processo de ensino aprendizado levou o governo a instalação de computadores nas escolas, a compra de softwares e a capacitação dos professores. Por intermédio do Núcleo tecnológico que tinha como finalidade capacitar os professores, com o interesse de participar das capacitações. No entanto, o despreparo de alguns profissionais dificultaram, e continuam dificultando, a utilização dessas tecnologias. Ainda hoje, é comum muitos professores alegarem que, por estarem se aposentando, não devem se envolver, deixando para os mais novos a incumbência de aprenderem o uso dessas novas tecnologias. Além disso, muitos alegam que a utilização dessas tecnologias atrasa o desenvolvimento do conteúdo programático.

Acreditamos que o computador é uma ferramenta que facilita o processo ensino-aprendizado, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico. A utilização de um software de maneira correta possibilita que os conteúdos possam se tornar mais compreensivos e o estudante possa interagir em um novo ambiente.

Valente (1999, p. 43-44) enfatiza o importante papel do professor nesse processo.

> Caberá ao professor saber desempenhar um papel desafiador, mantendo vivo o interesse do estudante, e incentivando relações sociais, de modo que os estudantes possam aprender uns com os outros e saber como trabalhar em grupo. Além disso, o professor deverá servir como modelo de aprendiz e ter um profundo conhecimento dos pressupostos teóricos que embasam os processos de construção de conhecimento e das tecnologias que podem facilitar esses processos.

O professor é um mediador de suma importância uma vez tem um grande domínio sobre o conteúdo. Obviamente muitos estudantes, por terem acesso a tantas tecnologias, possuem uma grande facilidade em questionar o novo nesse ambiente. O professor bem preparado irá explorar esses questionamentos, contribuindo para o aprendizado. Grégoire e outros[4] (1996, p. 1) apud Valente (1999) ressaltam que:

- Esses recursos estimulam os estudantes a desenvolverem habilidades intelectuais;
- Muitos estudantes mostram mais interesse em aprender e se concentram mais;
- As tecnologias estimulam a busca de mais informação sobre um assunto e de um maior número de relações entre as informações;

---

[4] GRÉGOIRE, R.; BRACEWELL, R.; LAFERRIÈRE, T. **The contribution of new technologies to learning and teaching in elementary and secondary schools: Documentary Review**. Laval University and McGill University, 1996.

- O uso das tecnologias promove cooperação entre estudantes;
- Por meio das tecnologias, os professores obtêm rapidamente informação sobre recursos instrucionais;
- Se o potencial das tecnologias estiver sendo explorado, o professor interage com os estudantes mais do que nas aulas tradicionais;
- Professores começam a ver o conhecimento cada vez mais como um processo contínuo de pesquisa;
- Por possibilitar rever os caminhos de aprendizagem percorridos pelo estudante, as tecnologias facilitam a detecção pelos professores dos pontos fortes, assim como das dificuldades específicas de aprendizagem que o estudante demonstrou.

Por fim, Valente (1999, p. 3) ressalta que “é o professor que controla o ensino e transmite a informação ao estudante”.

3.7. A importância do acesso à tecnologia no ensino da Geometria

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo distribui o Conteúdo de Geometria segundo as tabelas 3 e 4:

Tabela 3: Distribuição dos conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Ano/Bimestre	5º série (6ª ano)	6º série (7ª ano)	7º série (8ª ano)	8º série (9ª ano)
1º bimestre				
2º bimestre	**Sistemas de medida** Medidas de comprimento, massa e capacidade. Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade.	**Geometria** Ângulos. Polígonos. Circunferência. Simetrias. Construções geométricas. Poliedros.		
3º bimestre	**Formas geométricas** Formas planas. Formas espaciais. Perímetro e área Unidades de medida. Perímetro de uma figura plana. Cálculo de área por composição e decomposição. Problemas Envolvendo área e perímetro de figuras planas			**Proporcionalidade na Geometria** O conceito de semelhança. Semelhança de triângulos. Razões trigonométricas.
4º bimestre			**Geometria** Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras. Área de polígonos. Volume do prisma	Corpos redondos O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. Volume e área do cilindro.

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

Tabela 4: Distribuição dos conteúdos de Geometria no Ensino Médio segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

	1º ano Ensino Médio	2º ano Ensino Médio	3º ano Ensino Médio
1º bimestre		**Trigonometria** Fenômenos periódicos. Funções trigonométricas. Equações e inequações. Adição de arcos.	**Geometria Analítica** Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. Ponto e reta: distância. Circunferência: equação. Reta e circunferência: posições relativas. Cônicas: noções e aplicações.
2º bimestre			
3º bimestre			
4º bimestre		Geometria métrica espacial Elementos de Geometria de posição. Poliedros, prismas e pirâmides. Cilindros, cones e esferas	

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

Observando a distribuição acima verificamos que os conteúdos de Geometria, em grande parte, estão concentrados nos últimos bimestres. Isso leva muitos professores da rede pública a não trabalharem esses conteúdos com os estudantes. Essa ausência dos conteúdos geométricos em alguns bimestres faz com que os estudantes fiquem privados em desenvolver uma visão métrica e espacial aplicada ao seu cotidiano. Além disso, alguns estudantes, que por ventura possuam uma boa visão espacial, acabam não aprimorando seus conhecimentos, desestimulando o aprendizado de Geometria. Pavanello (1993) destaca:

> A maioria dos estudantes do 1º grau deixa de aprender Geometria, pois os professores das séries iniciais limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo de Geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau, com o agravante de que os estudantes apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído,

> nos dois graus do ensino, pela Educação Artística.”

Ressaltamos que as questões pontuadas acima, apesar de terem sidos feitas a 21 anos atrás, ainda são vigentes no processo de ensino e aprendizagem nos dias atuais.

Segundo Ávila (1997) “em seus aspectos mais criativos, a Matemática está ligada muito mais a intuição e a imaginação do que ao raciocínio lógico-dedutivo”. Acreditamos que a intuição e a imaginação devem ser despertadas por intermédio da Geometria, pois esta é mais utilizada no cotidiano e deve ser explorada. Ávila (1997) acredita ainda “... que quase todo professor de Matemática já teve a experiência de ser questionado por seus estudantes sobre a importância da Matemática e sua utilidade”. Com a Geometria estes questionamentos são melhores explorados.

Os PCN destacam:

> Sem uma integração entre concreto e abstrato, figuras e teoria a compreensão da Geometria torna-se muito complexa, dificultando o aprendizado assim utilizando software podemos despertar tanto no professor como nos estudantes o desejo de ensinar e aprender Geometria. (BRASIL, 1998, p. 43)

Mas como buscar o interesse dos estudantes pelo aprendizado de Geometria? Para Vygotsky (1984, p.72), “o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero”. Tornar a aula mais atrativa é um ponto importante para levar o estudante a querer aprender. Podemos dar esse passo com a utilização de tecnologias no ensino de Geometria, pois com a tecnologia conseguimos acessar assuntos que despertam mais a atenção do estudante. O papel do professor é o de fazer a ligação entre conteúdo e tecnologia.

No caso do Ensino de Geometria, a visualização é um dos grandes problemas enfrentados pelos estudantes. Neste sentido, o uso da tecnologia para o desenvolvimento da habilidade visual pode ser utilizado, permitindo demonstrar muitas propriedades geométricas como também despertar o interesse pela Matemática. Allevato (2005, p. 81) diz que:

> a imagem é um recurso fundamental das tecnologias à disposição da Matemática ou de qualquer outra área do conhecimento, considerando-a como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento.

3.8. A escolha do software

Segundo Valente (1999) “o uso da informática em educação não significa a soma de informática e educação, mas a integração dessas duas áreas”. A utilização de computadores em sala de aula provocou um crescimento no mercado de criação de software. Segundo Valente (1999, p.3), de acordo com estudos feitos por The Educational Products Information Exchange (EPIE), uma organização do Teachers College da Universidade de Columbia, foram identificados em 1983, mais de 7.000 pacotes de softwares educacionais e, em média, 125 novos softwares apareciam a cada mês. O professor deve saber escolher, dentre tantos softwares qual irá atender suas necessidades levando em conta o conteúdo a ser desenvolvido. O software deve despertar no estudante o desejo de desenvolver as atividades propostas pelo professor. Além disso, o professor precisa ter pleno domínio sobre o software e estar preparado para enfrentar limitações e dificuldades durante a aula. Alguns estudantes possuem maior acesso ao computador do que outros. Os estudantes irão concluir a atividade em diferentes momentos. O papel do professor é de mediador e deve ser cuidadosa na elaboração da atividade para não deixar estudantes ociosos durante a aula. Um estudante ocioso irá dispersar o interesse pela aula comprometendo a atividade.

Nesse sentido, os PCN afirmam que:

> Quanto aos softwares educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o estudante a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o estudante a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as. (BRASIL, 1998, p.35).

A importância da utilização de software adequados aos conteúdos a serem desenvolvidos faz com que os estudantes interajam com o software buscando aprender, desenvolvendo suas habilidades e trocando suas experiências. Com a mediação direta do professor, no papel de facilitador, este auxiliará o estudante na realização da atividade. As atividades podem ser desenvolvidas em grupo que, quando bem elaboradas, podem facilitar e auxiliar os pontos com maiores dificuldades entre estudantes. O ambiente tecnológico irá promover as relações professor-estudante e estudante-estudante.

Este recurso tecnológico leva o estudante à aprender com seus erros na realização da atividade. A maioria dos softwares possibilita ao estudante ao errar, executar a atividade novamente.

Entre os softwares desenvolvidos para o ensino de Matemática, Zullato (2002, p. 20) afirma que eles “são frequentemente utilizados no ensino de Geometria e permitem trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria Não-Euclidiana e

Geometria Analítica". Zulatto (2002, p. 93) também afirma que "os softwares são utilizados com a intenção de mostrar as propriedades que estão sendo estudadas. Na verdade, o que acontece é o que se costuma chamar de realizar a verificação e visualização de propriedades".

A utilização do software deve levar os estudantes a terem uma melhor compreensão do conteúdo que esta sendo estudado despertando o interesse do estudante. Por isso, devemos ser cuidadosos na escolha do software a ser utilizado. Neste sentido, Santos (2014, p.9) acredita que:

> … um ambiente composto por computador e software dinâmico seja capaz de motivar o estudante a desenvolver suas potencialidades quanto à argumentação, compreensão, comunicação, elaboração de críticas ou propostas e, acima de tudo, ao desenvolvimento de uma atitude de permanente aprendizado.

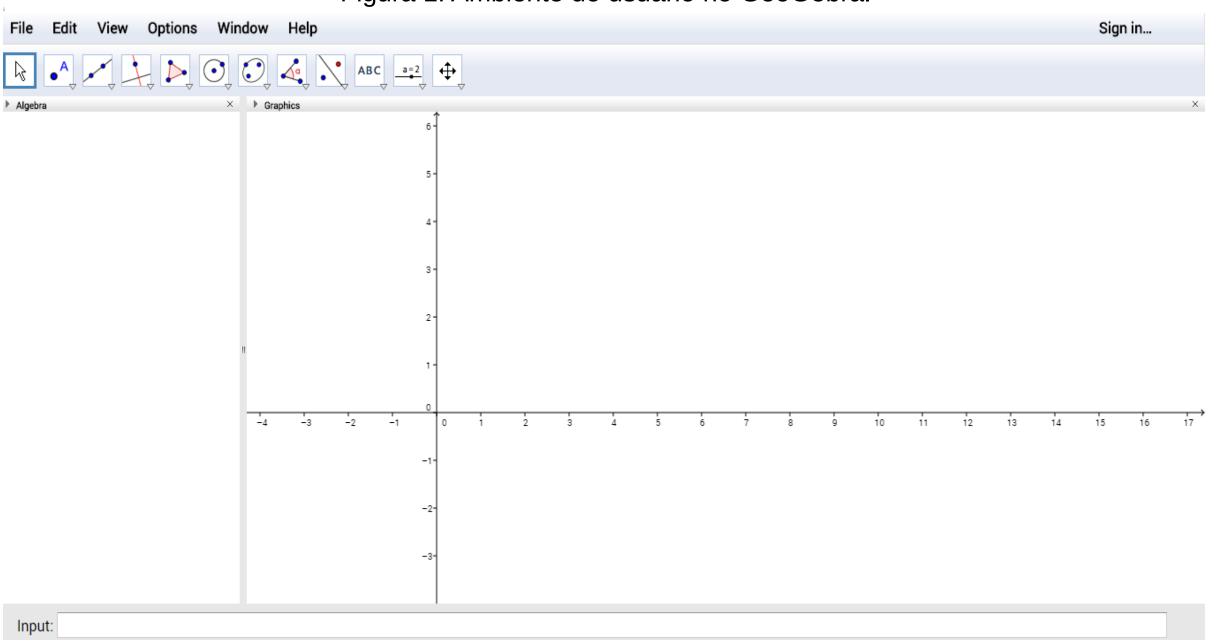
Neste trabalho destacamos o GeoGebra[5], software de Geometria dinâmica de domínio público e aplicação direta na Geometria Analítica.

5 http://www.geogebra.org

4. O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra desenvolvido por Markus Horhenwarter da Universidade de Salzburg. É um software que permite construir pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas entre outros recursos. Na sua última versão (4.4) traz recursos tanto de Geometria, como planilha de cálculo, álgebra e computação simbólica. Sua interface de usuário é de rápido e fácil aprendizado para o usuário. Gráficos, álgebra e tabelas compartilham o mesmo ambiente o que o torna dinâmico. Existem recursos que permitem criar materiais de aprendizagem interativos como páginas da *web*. O software está disponível em vários idiomas.

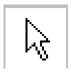
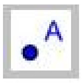
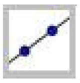
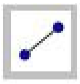
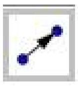
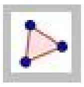
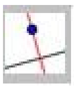
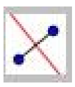
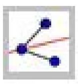
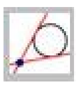
Figura 1: Ambiente do usuário no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

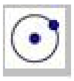
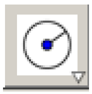
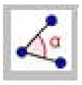
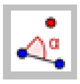
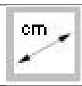
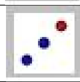
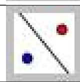
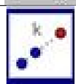
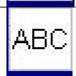
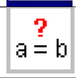
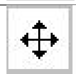
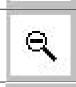
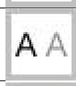
A tabela 5 resume os principais comandos do GeoGebra.

Tabela 5: Principais comandos do GeoGebra.

COMANDOS	**ÍCONES**	**PROCEDIMENTOS**
Mover		Clique sobre o objeto construído e o movimente na área de trabalho
Novo Ponto		Clique na área de trabalho e o ponto fica determinado
Ponto médio ou centro		Clique sobre dois pontos e o ponto médio fica determinado
Reta definida por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e a reta é traçada
Segmento definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o segmento é traçado
Segmento com comprimento conhecido		Clique em um ponto da área de trabalho e dê a medida do segmento
Vetor definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o vetor fica determinado
Vetor a partir de um ponto		Selecione primeiro o ponto de origem, e depois, o vetor.
Polígono		Clique em três ou mais pontos fazendo do primeiro também o último ponto. Fica determinado o polígono
Retas perpendiculares		Selecione uma reta e um ponto e a reta perpendicular fica determinada
Retas paralelas		Selecione uma reta e um ponto e a reta paralela fica determinada
Mediatriz		Selecione um segmento ou dois pontos e a mediatriz fica determinada
Bissetriz		Clique em três pontos, o segundo ponto determina a bissetriz
Tangentes		Selecione ou construa uma cônica e um ponto, as tangentes ficam determinadas
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos		Clique em um ponto e arraste para determinar o raio e o círculo

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Continuação da Tabela 5.

COMANDOS	ÍCONES	PROCEDIMENTOS
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos		Clique em um ponto e arraste para determinar o raio e o círculo
Círculo dados centro e raio		Clique em um ponto e informe a medida do raio, o círculo fica determinado
Círculo definido por três pontos		Clique em três pontos, o círculo fica determinado
Ângulo		Clique em três pontos e o ângulo fica determinado
Ângulo com amplitude fixa		Clique em dois pontos e informe a abertura do ângulo
Distância		Clique em cada objeto que se queira determinar a distância
Reflexão com relação a um ponto		Clique no ponto a ser refletido e no outro que servirá de base para reflexão
Reflexão com relação a uma reta		Clique no ponto a ser refletido e na reta que servirá de base para reflexão
Homotetia de um ponto por um fator		Selecione o objeto, marque o ponto central da homotetia e informe o fator
Inserir texto		Clique na área de trabalho e insira o texto
Relação entre dois objetos		Clique em dois objetos e verifique a igualdade, ou não, desses objetos
Deslocar eixos		Arraste a área de trabalho com o mouse
Ampliar		Clique sobre o objeto que se deseja ampliar
Reduzir		Clique sobre o objeto que se deseja reduzir
Exibir/esconder objeto		Clique sobre o objeto que se deseja esconder/exibir
Exibir/esconder rótulo		Clique no rótulo do objeto para exibi-lo ou escondê-lo
Apagar objetos		Clique sobre o objeto que se deseja apagar

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na parte inferior do ambiente de trabalho do GeoGebra encontramos a entrada algébrica que possibilita a inserção de comandos via teclado.

Observação: Isto pode também ser feito na janela de álgebra, escolhendo <Redefinir> no

<Menu de Contexto> ou fazendo um duplo clique sobre o objeto com o modo <mover>.

O GeoGebra pode lidar com números, ângulos, pontos, vetores, segmentos, retas, cônicas, funções e curvas paramétricas. Vamos entender como é que tais objetos podem ser introduzidos através de coordenadas ou de equações no campo de entrada.

As constantes Matemáticas, π e o número de Neper “e” são variáveis reservadas e em expressões ou em cálculos podem ser selecionadas no menu situado logo à direita do campo de entrada. Os ângulos são inseridos em graus (°) ou em radianos (rad). O GeoGebra realiza todos os cálculos internos em radianos.

Pontos e vetores podem ser expressos em coordenadas cartesianas ou polares.

Exemplo: Para inserir um ponto P ou um vetor v em coordenadas cartesianas escrevemos P = (1, 0) ou v = (0, 5).

Uma reta é inserida como equação linear em x e y ou na forma paramétrica. Tanto num caso como no outro podem ser usadas variáveis pré-definidas (números, pontos, vetores, etc.). Podemos inserir o nome de uma reta no início da entrada, seguido por “ : ” (dois pontos).

Exemplos:

1. Escrevemos g : 3x + 4y = 2 para inserir a reta g como equação linear.
2. Definimos o parâmetro t (t = 3) antes de inserir g na forma paramétrica e escrevemos g: X = (-5, 5) + t (4, -3).
3. Definimos os parâmetros m = 2 e b = -1 e a seguir inserimos equação g: y = m x + b para obter g na forma reduzida.

Os dois eixos coordenados podem ser usados através dos comandos Eixo X e Eixo Y.

Exemplo: O comando Perpendicular[A, Eixo X] constrói a reta perpendicular ao eixo OX passando pelo ponto A.

Uma seção cônica é inserida como equação quadrática em x e y. As variáveis pré-definidas (números, pontos, vetores, etc.) podem ser usadas. O nome da cônica é inserido no início da entrada, seguido por “ : ” (dois pontos).

Exemplos:

1. Elipse → 9 x^2 + 16 y^2 = 144
2. Hipérbole → 9 x^2 – 16 y^2 = 144
3. Parábola → y^2 = 4 x
4. Circunferência → x^2 + y^2 = 25
5. Circunferência → (x–5)^2 + (y+2)^2 = 25

Para inserir uma função podemos utilizar variáveis pré-definidas (números, pontos, vetores, etc.) e funções internas.

Exemplos:

1. Função f → f(x) = 3 x^3 – x^2
2. Função g → g(x) = tan(f(x))
3. Função interna → h(x) = sin(3 x) + tan(x)

A tabela 6 apresenta as operações Matemáticas e seus respectivos comandos no ambiente do GeoGebra.

Tabela 6: Operações Matemáticas no GeoGebra.

Operação	Comandos
Adição	+
Subtração	-
Multiplicação	* ou espaço
Divisão	/
Potenciação	^ ou 2
Fatorial	!
Função Gamma	gamma( )
Parênteses	( )
Abcissa	x( )
Ordenada	y( )
Valor Absoluto	abs( )
Raiz Quadrada	sqrt( )
Raiz Cúbica	cbrt( )
Número aleatório entre 0 e 1	random( )
Função exponencial	exp( ) ou *e*x
Logaritmo natural (base e)	ln( ) ou log( )
Logaritmo (base 2)	ld( )

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Continuação da Tabela 6.

Operação	Comandos
Logaritmo (base 10)	lg( )
Cosseno	cos( )
Seno	sin( )
Tangente	tan( )
Arco cosseno	acos( )
Arco seno	asin( )
Arco tangente	atan( )
Cosseno hiperbólico	cosh( )
Seno hiperbólico	sinh( )
Tangente hiperbólica	tanh( )
Arco cosseno hiperbólico	acosh( )
Arco seno hiperbólico	asinh( )
Arco tangente hiperbólica	atanh( )
Maior inteiro menor ou igual	floor( )
Menor inteiro maior ou igual	ceil( )
Arredondamento	round( )

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

O GeoGebra pode ser utilizado para qualquer propósito e pode ser distribuído livremente de acordo com a GNU *License* (*General Públic License*). O programa pode ser instalado a partir da Internet (www.geogebra.org) de forma a obter as versões mais recentes. Qualquer usuário pode fazer a instalação individual do programa.

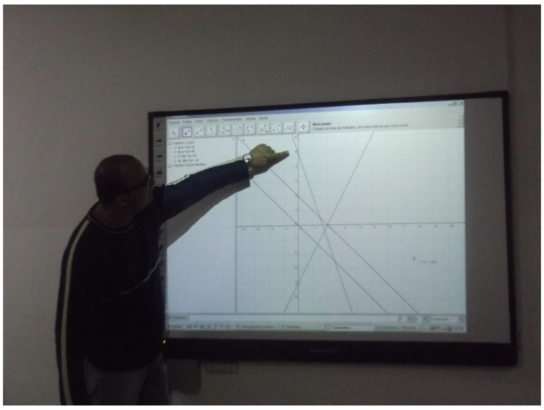
5. ATIVIDADES DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO GEOGEBRA

As atividades aqui descritas foram desenvolvidas com o conteúdo teórico em sala de aula com alguns exercícios . Os estudantes desenvolveram a mesma lista de exercícios no GeoGebra na lousa digital com auxílio do professor e utilizando o *Classmate* resolveram cada exercício comparando as respostas com os resultados obtidos anteriormente. Todas as atividades no GeoGebra foram executadas individualmente, com o intuito do estudante desenvolver uma visão do que está calculando. No decorrer das atividades os estudantes executaram algumas atividades complementares utilizando os conceitos até aquele momento estudados.

Figura 2: Equipamento de informática disponibilizado aos estudantes – Classmate

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 3: Exposição pelo professor utilizando a lousa digital.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.1. A escola e turma

As atividades foram desenvolvidas no Colégio Véritas, situado à R. Dr. Luiz Mendes de Almeida, 848, Jd. São Paulo- Sorocaba, SP, no ano de 2013, em duas turmas do 2º ano de Ensino Médio, contendo 26 estudantes em cada turma, com duas aulas semanais.

O material da instituição de ensino é apostilado e segue sistema “Vésper” de ensino. A realização das atividades propostas em sala de aula é dificultado por haver um cronograma pré-definido imposto pela instituição.

Assim, durante o período da tarde, foram ministradas aulas, chamadas “Plantão de Dúvidas”, onde algumas atividades computacionais foram desenvolvidas com o objetivo de suprir algumas dificuldades apresentadas em sala de aula, além de se propor atividades complementares.

A Unidade Escolar possui laboratório com lousa digital, onde grande parte das atividades foram desenvolvidas. Uma outra parte das atividades foram desenvolvidas em sala de aula. Este laboratório possui ainda pequenos computadores conhecidos por *Classmate*. Nos *Classmate* foram instalados, pelo professor responsável pelo laboratório de informática da unidade escolar, o software GeoGebra para a realização das atividades.

5.2. Desenvolvimento das atividades

Os temas abordados de Geometria Analítica foram:

1. Plano cartesiano; ponto médio; distância entre dois pontos; colinearidade de pontos, Equação da reta.
2. Posições relativas entre retas.
3. Circunferência.
4. Cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

Os conteúdos de cada tópico foram desenvolvidos segundo o procedimento didático:

1. Aulas expositivas sobre o conteúdo;
2. Resolução e entrega de exercícios;
3. Aulas expositivas com o software GeoGebra;
4. Resolução de exercícios com o software GeoGebra;
5. Avaliação.

As atividades no laboratório de informática foram realizadas individualmente pelos estudantes, salvo em alguns momentos, quando compartilhavam e discutiam as soluções dos exercícios propostos.

As aulas que foram realizadas no laboratório de informática com a utilização da lousa digital, teve como objetivo principal, apresentar os muitos recursos do software aos estudantes.

No início de cada atividade de laboratório, os estudantes receberam orientações do professor com o auxílio da lousa digital (que também possui o software GeoGebra instalado). Os estudantes puderam assim sanar dúvidas para a execução das atividades.

Com o objetivo de avaliar os estudantes e verificar o aprendizado, as avaliações no uso do GeoGebra foram realizadas em casa, com a possibilidade de se tirar dúvidas no "plantão". As avaliações foram enviadas para o professor via e-mail. Apresentaremos também alguns comentários feitos pelos estudantes sobre as atividades realizadas.

5.3. Atividade 1: Coordenadas cartesianas no plano

O objetivo desta atividade foi apresentar uma introdução ao software GeoGebra onde o professor fez uso da lousa digital, expondo aos estudantes as atividades que serão desenvolvidas, além de uma prévia de algumas atividades. Esta atividade não teve o intuito de avaliar e sim de trazer o aluno para um primeiro contato com o software GeoGebra.

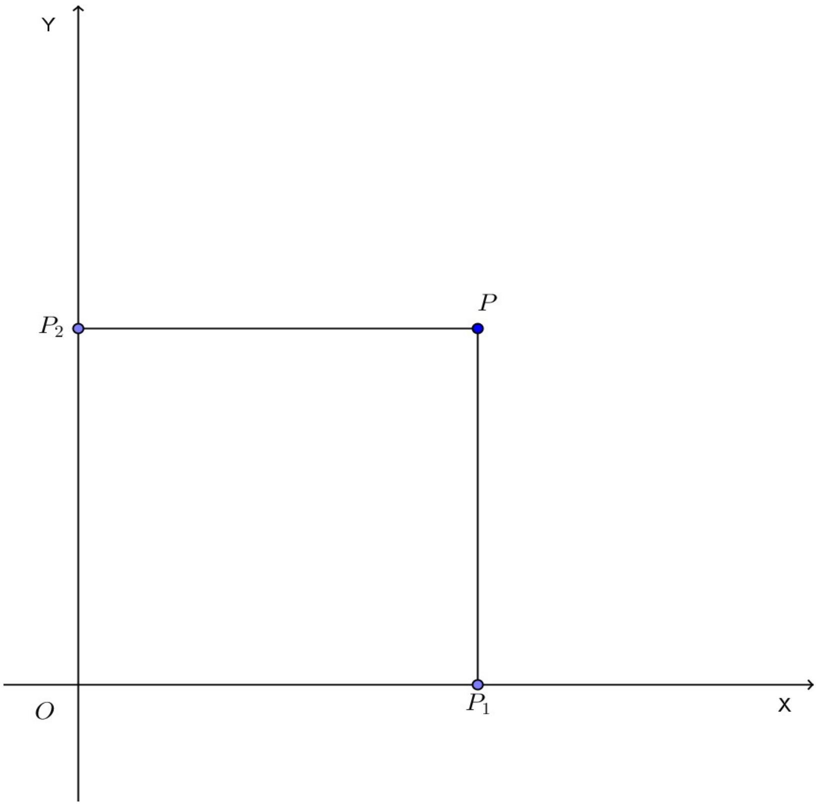
5.3.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 1

Em um primeiro momento os estudantes fizeram uma pequena pesquisa sobre a utilização de coordenadas marítimas onde é aplicado as localizações de latitude e longitude. Após uma breve explanação do professor iniciou-se a introdução sobre coordenadas cartesianas.

Consideremos duas retas perpendiculares entre si. Seja O o ponto de interseção das retas. Sobre cada uma das retas adotamos um mesmo sistema de coordenadas de valores reais, ou seja, definimos uma bijeção entre o conjunto dos números reais e os pontos da reta. As retas assim dispostas serão denominadas eixos cartesianos, Ox e Oy, os quais determinam o plano euclidiano α. Seja um ponto P qualquer. Traçamos pelo ponto P duas retas, x' e y', paralelas aos eixos cartesianos Ox e

Oy respectivamente. Denominamos P_1 a interseção de Ox com y' e P_2 a interseção de Oy com x'. Ver figura 4.

Figura 4: Sistema cartesiano.



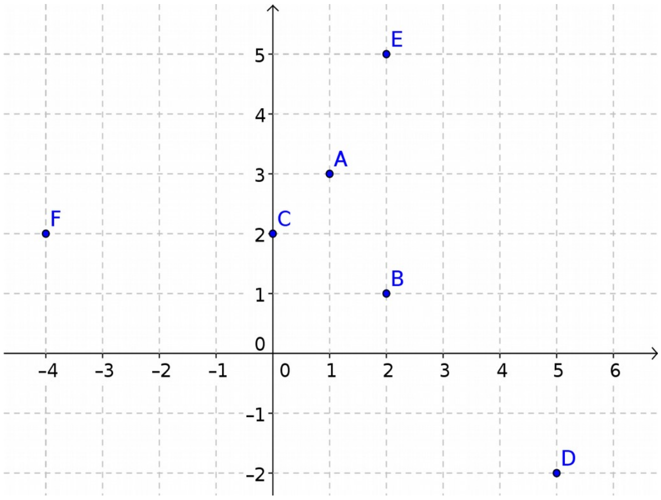
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Podemos fazer algumas definições:

1. O plano cartesiano é o plano α.
2. O eixo x (ou Ox) é denominado eixo das abscissas.
3. O eixo y (ou Oy) é denominado eixo das ordenadas.
4. O sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou retangular) é o sistema xOy.
5. A origem do sistema é o ponto O.
6. Por dois pontos passa-se uma única reta.
7. Um par ordenado é do tipo (x,y). Notemos que (a,b) = (c,d) se e somente se, a=c e b=d.
8. A abscissa de P é o número real X_P (coordenada real do ponto P_1).
9. A ordenada de P é o número real Y_P (coordenada real do ponto P_2).
10. As coordenadas do ponto P no plano α são dadas pelo par ordenado (X_P , Y_P).

Exemplo: Localizando os pontos A(1,3), B(-2,1), C(0,2), D(5,-2), E(2,5), F(-4,2) no plano cartesiano, observamos que o primeiro número representa a abscissa e o segundo a ordenada do ponto. Ver figura 5.

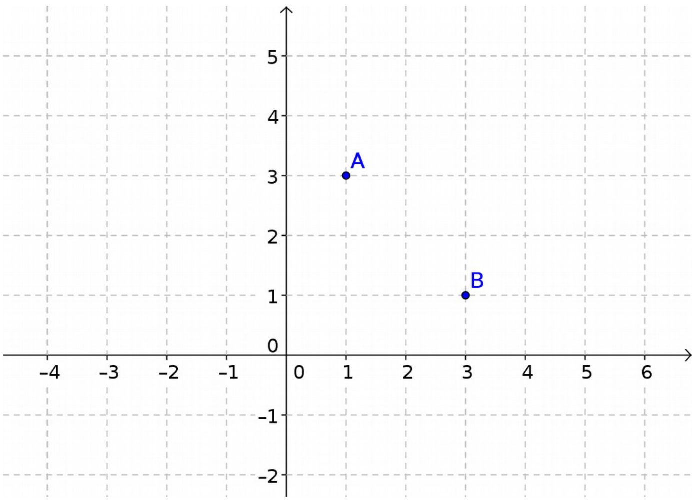
Figura 5: Localização de pontos no sistema cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Observação: Como observamos acima, os pares (1,3) e (3,1) não são iguais. Eles se diferem pela ordem de seus termos. Portanto, não representam o mesmo ponto do plano cartesiano. De fato, ver figura 6.

Figura 6: Pontos distintos no plano cartesiano.



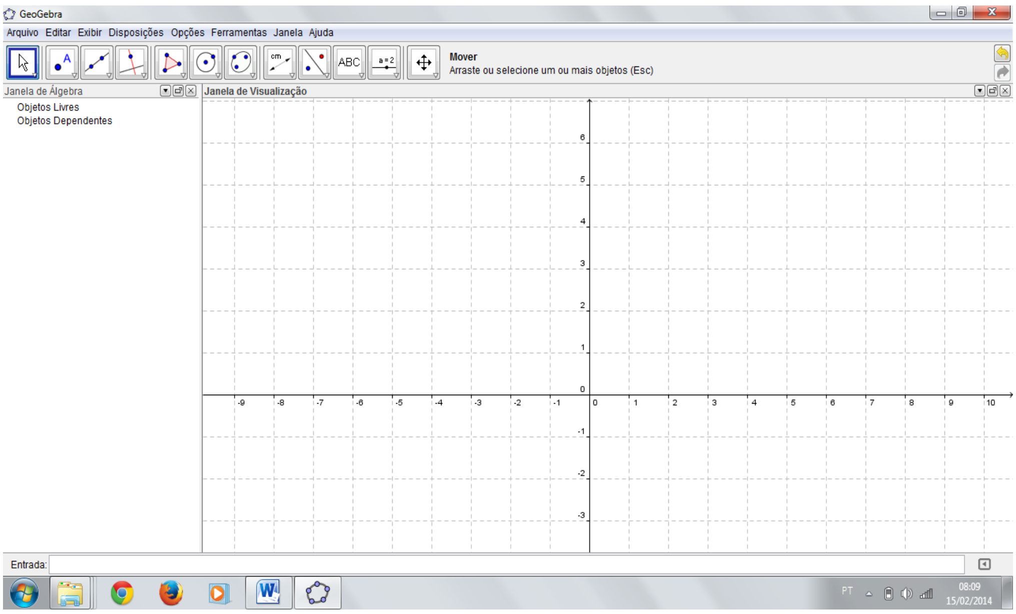
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.3.2. Desenvolvimento da Atividade 1

Tema	Introdução ao GeoGebra
Objetivo Principal	Tornar as aulas de Geometria mais atrativas buscando despertar nos estudantes o interesse pela Geometria
Objetivo Secundário	Levar o estudante a ter um primeiro contato com o software GeoGebra
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos)
Material	Software GeoGebra, Datashow, Lousa digital

Tela inicial: Ao abrir o GeoGebra, se os eixos e a malha não aparecerem, basta clicar em <exibir> e selecionar a opção <eixos>. Em seguida clicar em <exibir> e selecionar a opção <malha>. Seguindo o mesmo procedimento abrimos a janela de álgebra, como mostra a figura 7.

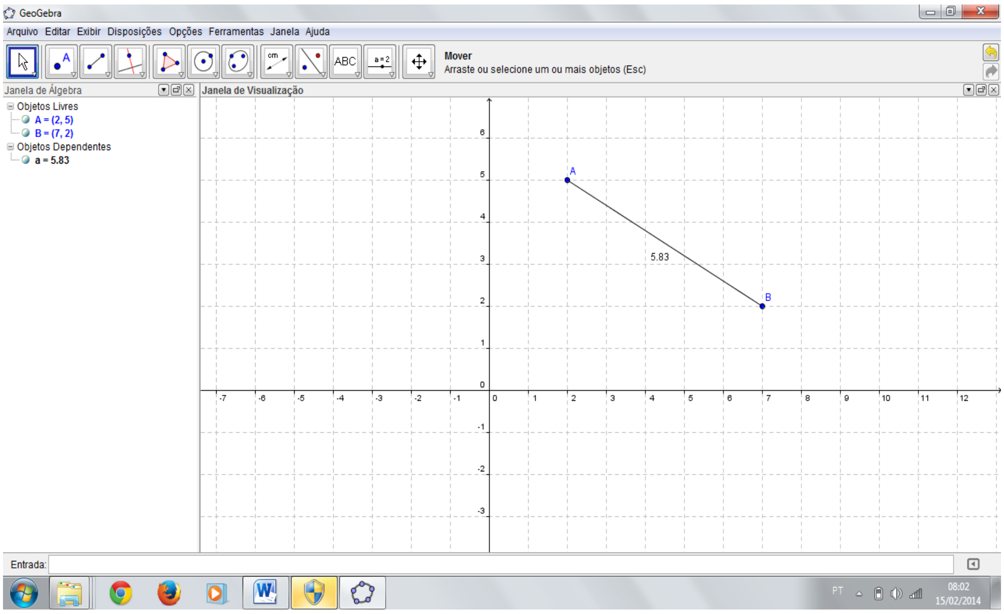
Figura 7: Janela inicial do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Distância entre dois pontos: Com o plano cartesiano e a malha habilitados, localizamos um ponto A e um ponto B em qualquer posição. Na janela de álgebra, após dois cliques sobre a coordenadas do ponto, mudamos para A=(2 , 5) e B=(7 , 2). Alternativamente podemos utilizar a janela de entrada para introduzir o ponto. Para isso, basta digitarmos o ponto na janela de entrada, ou seja, A=(2,5). No ícone <segmento definido por dois pontos> traçamos o segmento entre os pontos A e B. No ícone <distância, comprimento ou perímetro> determinamos o comprimento do segmento AB. Ver figura 8.

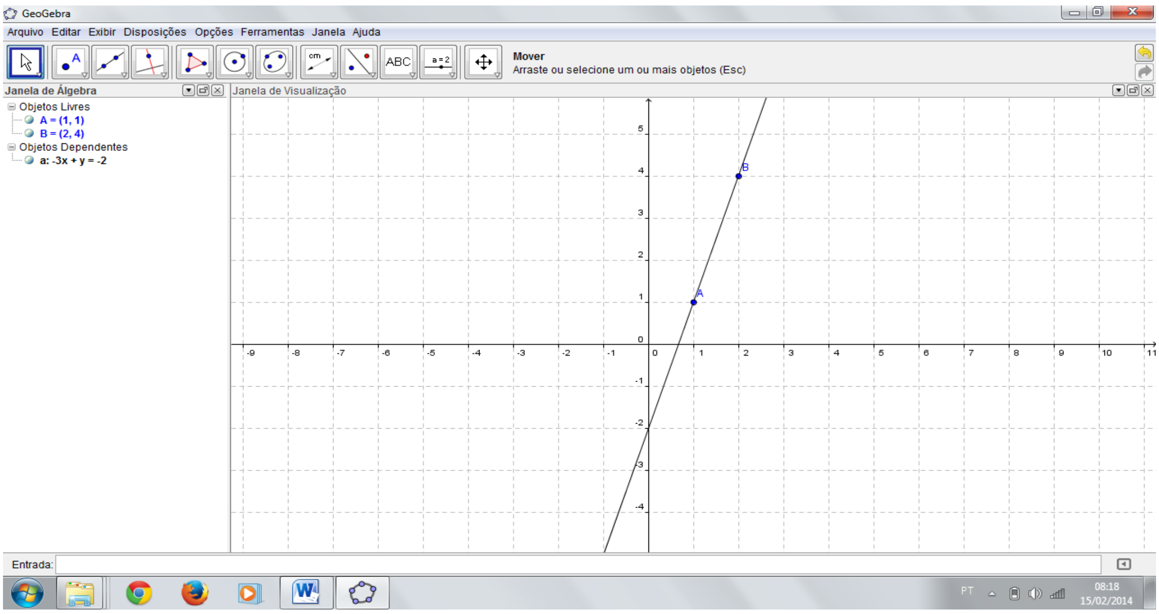
Figura 8: Distância entre dois pontos no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Equação da reta: Dispomos os pontos A=(1,1) e B=(2,4). No ícone <reta definida por dois pontos>, traçamos a reta. Observamos a expressão da equação da reta na janela de álgebra. Ver figura 9.

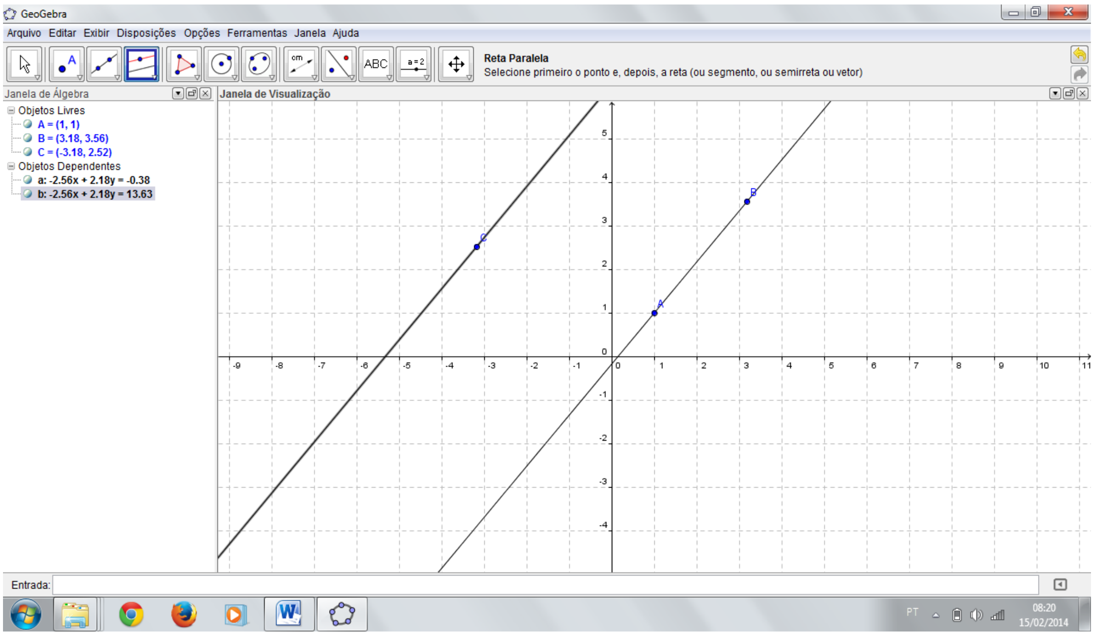
Figura 9: Equação da reta no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Retas paralelas: Dispomos uma reta qualquer e um ponto em qualquer lugar do plano que não seja sobre a reta já definida. Utilizamos o ícone <reta paralela> para traçarmos a reta paralela à reta dada pelo ponto dado. Observamos as expressões das equações das retas na janela de álgebra. Ver figura 10.

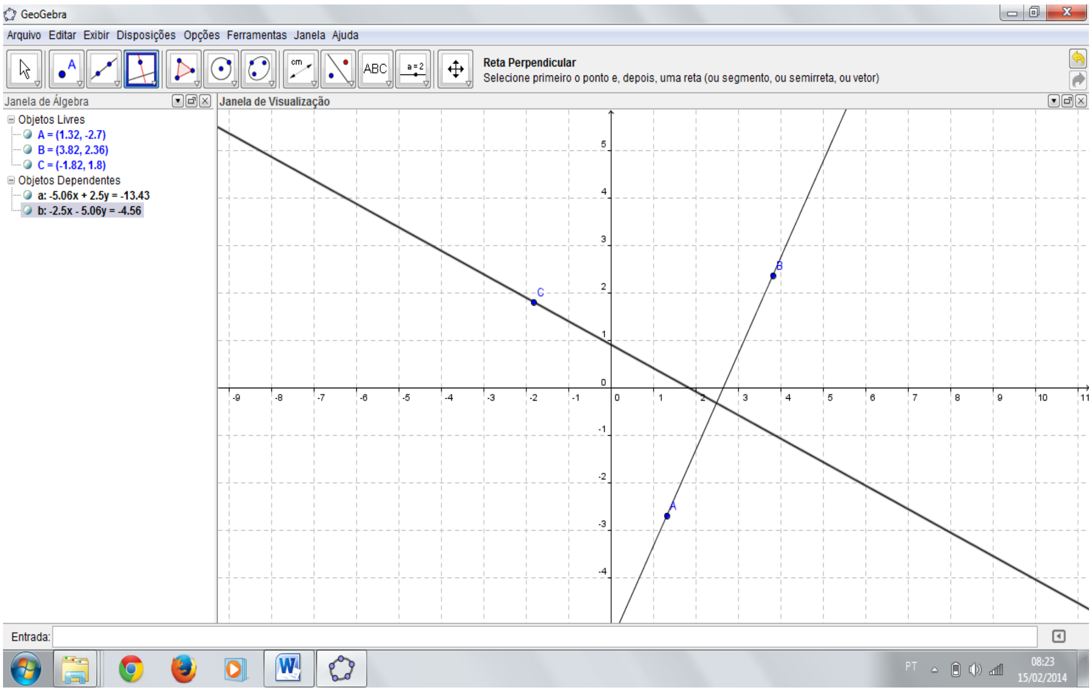
Figura 10: Retas paralelas no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Retas perpendiculares: Dispomos uma reta qualquer e um ponto em qualquer lugar do plano desde que não seja sobre a reta já definida. Utilizamos o ícone <reta perpendicular> para construirmos a reta perpendicular à reta dada pelo ponto dado. Observamos as expressões das equações das retas na janela de álgebra. Ver figura 11.

Figura 11: Retas perpendiculares no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Comentários sobre a realização da atividade de introdução às coordenadas cartesianas e GeoGebra: Ocorreram várias dúvidas sobre a utilização do software por parte de alguns estudantes. É claro que os estudantes que possuíam um acesso maior no uso das tecnologias realizaram as atividades sem muitas dificuldades, inclusive auxiliando outros estudantes na sua execução.

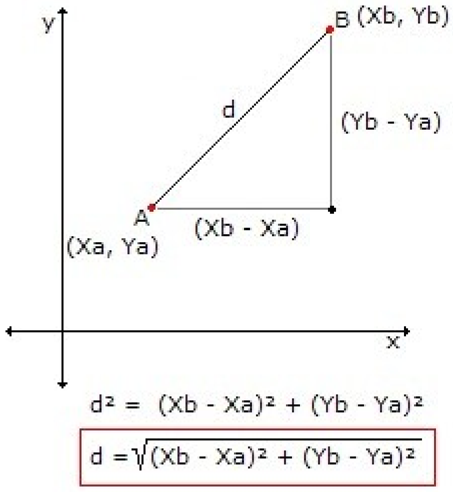
5.4. Atividade 2: Distância entre dois pontos

A menor distância entre dois pontos é comprimento do segmento de reta que os une. Esta atividade tem por objetivo determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

5.4.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 2

Se soubermos as coordenadas de dois pontos A = (Xa,Ya) e B = (Xb,Yb) no plano cartesiano é possível determinar a distância entre eles utilizando o teorema de Pitágoras. Ver figura 12.

Figura 12: Distância entre dois pontos no plano.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ **Nº** ______ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Calcule a distância entre os pontos A=(1,3), B=(-2,1).
2. Sendo A=(3,1), B=(4,-4) e C=(-2,2) vértices de um triângulo, classifique-o quanto aos seus lados.
3. Calcule a distância do ponto P=(3,-4) à origem do plano cartesiano.
4. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo dados os seus vértices A=(3,1), B=(-1,1) e C=(-1,4).

5.4.2. Desenvolvimento da Atividade 2

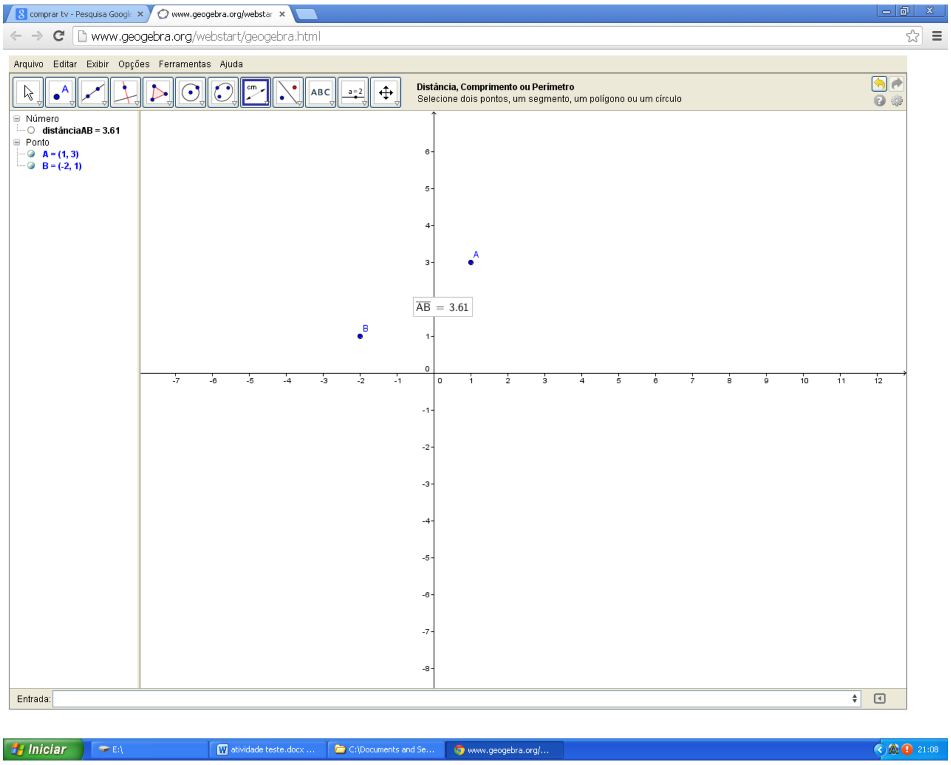
Tema	Distância entre dois pontos
Objetivo Principal	Determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano
Objetivo Secundário	Visualizar, interpretar e calcular distâncias entre pontos
Tempo Previsto	3 aulas (2 horas e 30 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Datashow, Classmate*, Lousa digital

Observação: Para verificarmos as respostas dos exercícios propostos, utilizamos a Janela de Álgebra para definirmos os pontos conforme solicitado pelo exercício.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(1,3), B=(-2,1).
2. No ícone <distância entre dois pontos> calculamos o valor e conferimos o resultado anteriormente encontrado. Ver figura 13.

Figura 13: Resolução no GeoGebra do Exercício 1 - Atividade 1.

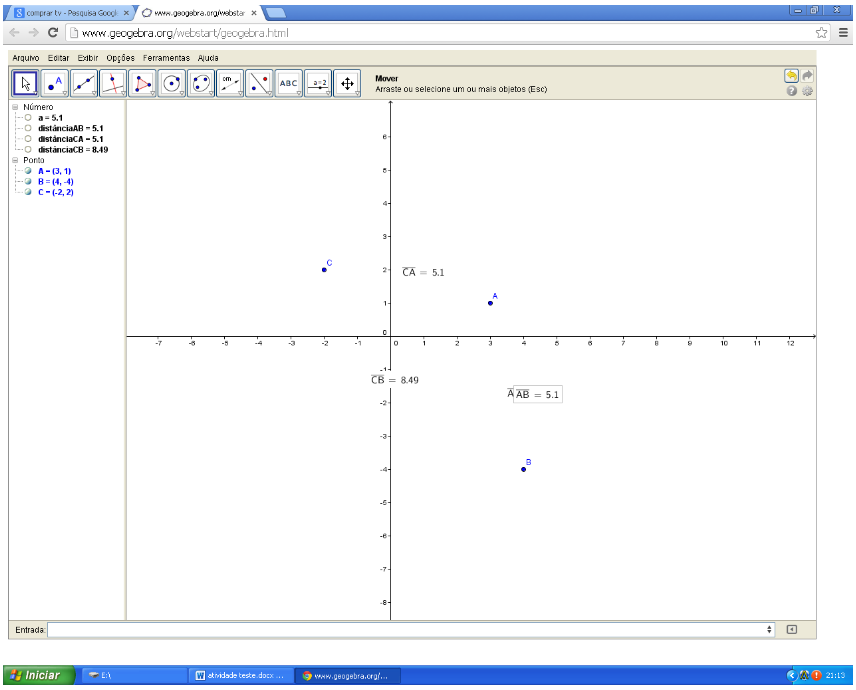


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(3,1), B=(4,-4) e C=(-2,2).
2. No ícone <distância entre dois pontos> calculamos as distâncias entre os pontos A e B; B e C; A e C. A partir dos valores encontrados, classificamos o triângulo. Ver figura 14.

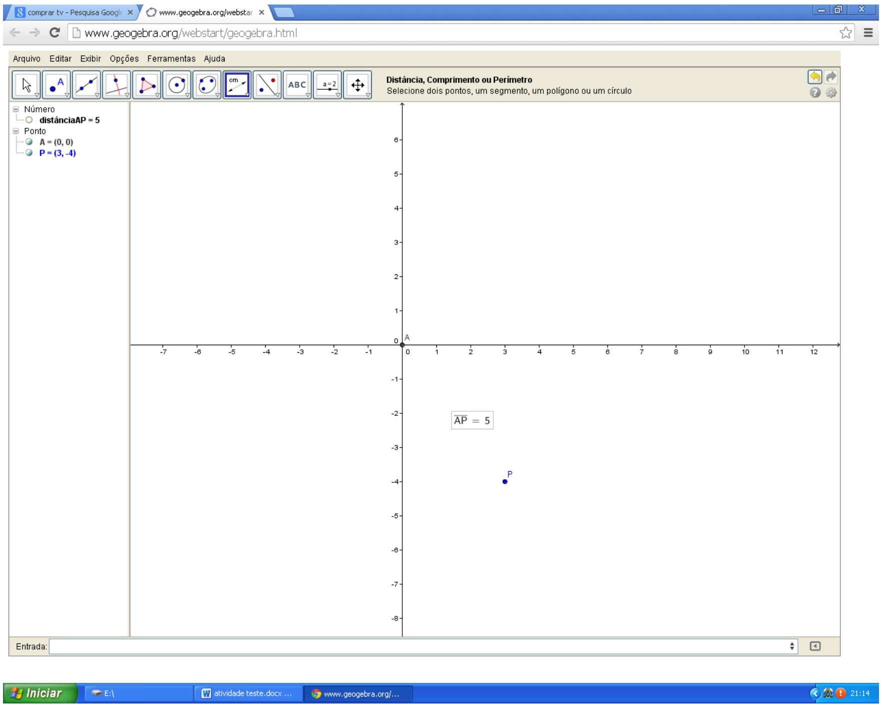
Figura 14: Resolução no GeoGebra do Exercício 2 - Atividade 1.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3: análogo à resolução do exercício 1 considerando os pontos O=(0,0) e P=(3, -4). Ver figura 15.

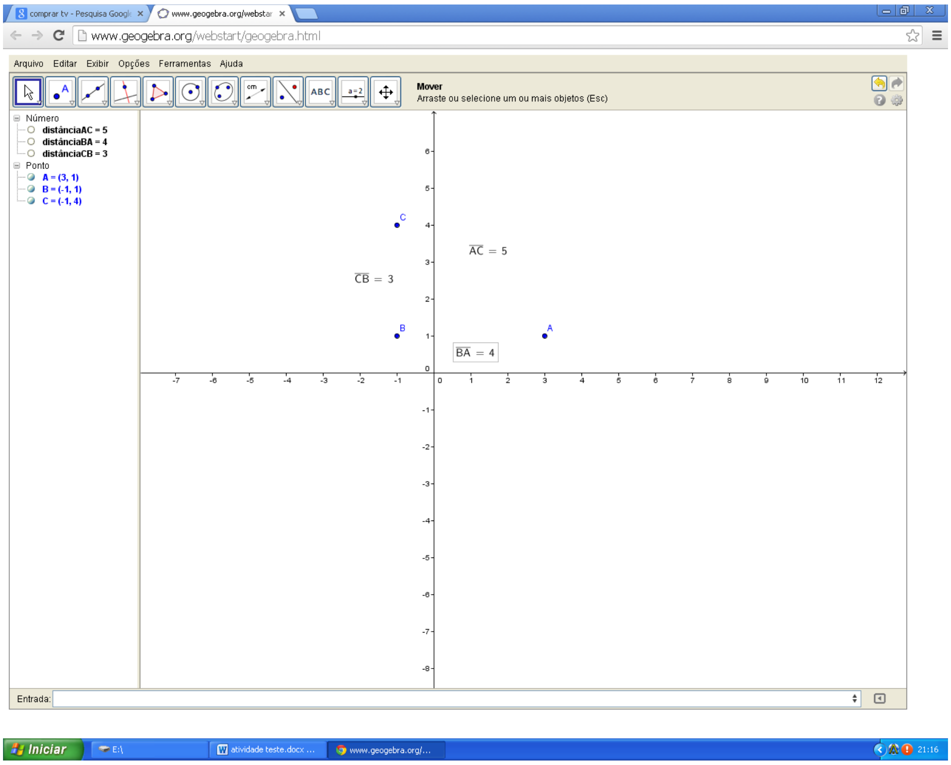
Figura 15: Resolução no GeoGebra do Exercício 3 - Atividade 1.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>: análogo à resolução do exercício 2 considerando os pontos A=(3,1), B=(-1,1) e C=(-1,4) e em seguida utilizamos a fórmula do perímetro de um triângulo. Ver figura 16.

Figura 16: Resolução no GeoGebra do Exercício 4 - Atividade 1.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.4.3. Avaliação da Atividade 2

Os estudantes se mostraram com muito interesse para a realização da atividade. Apesar das dificuldades encontradas por alguns no que diz respeito à adaptação na utilização do software, o aproveitamento foi satisfatório. Observamos também que os estudantes, ao resolverem os exercícios, tiveram suas maiores dificuldades quanto à interpretação do enunciado.

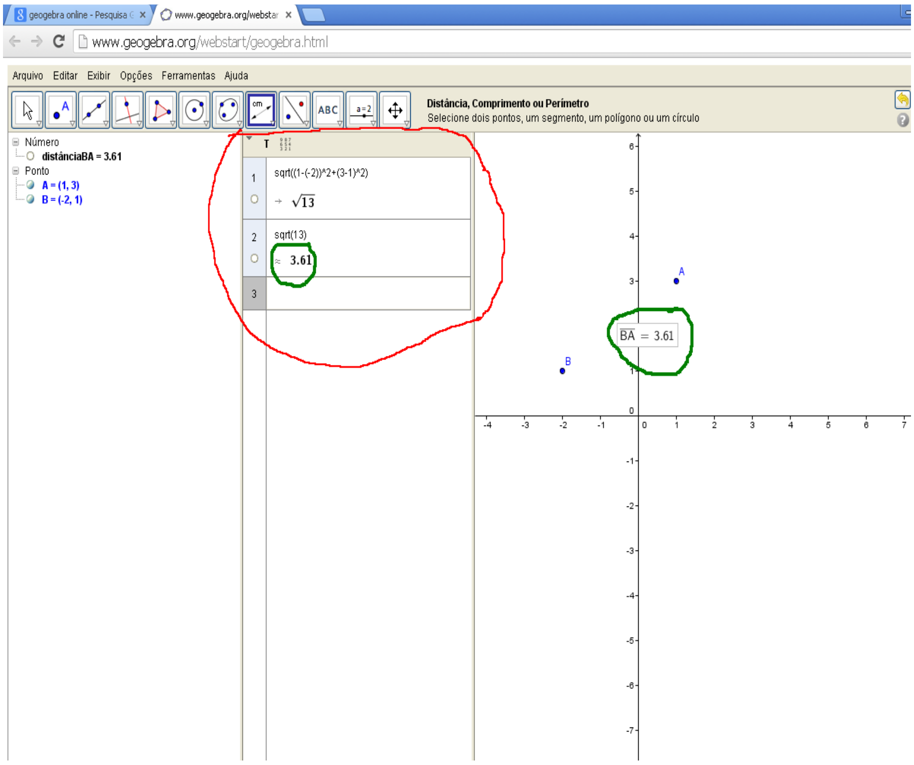
No exercício 3, ao se pedir a distância entre o ponto P e a origem, a grande indagação foi “onde é a origem?”. Rapidamente respondida por um dos estudantes. Após esse comentário, a atividade transcorreu normalmente. O professor orientou os estudantes a fazerem também um desenho para que tivessem uma visão própria do exercício.

Destacamos o seguinte comentário de um dos estudantes:

> Tive complicações nos primeiros exercícios, mas depois peguei o jeito e foi fácil resolver os outros apesar de ter tido certas dificuldades para resolver o exercício 2. O programa é muito prático, gostei bastante. Fonte: Arquivo do pesquisador.

Podemos também utilizar a janela CAS (*Computer Álgebra System*). Realizamos todos os cálculos efetuados pelos estudantes por essa janela. Além de não utilizar o papel para calcular as distâncias, esse ambiente nos permite encontrar, por intermédio de fórmulas, a distância entre os pontos, a raiz quadrada de um número sem o uso do ponto flutuante (avaliação numérica). A figura 17 mostra a resolução do exercício 1 utilizando a janela CAS.

Figura 17: Resolução do exercício 1 - Atividade 1 na janela CAS.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

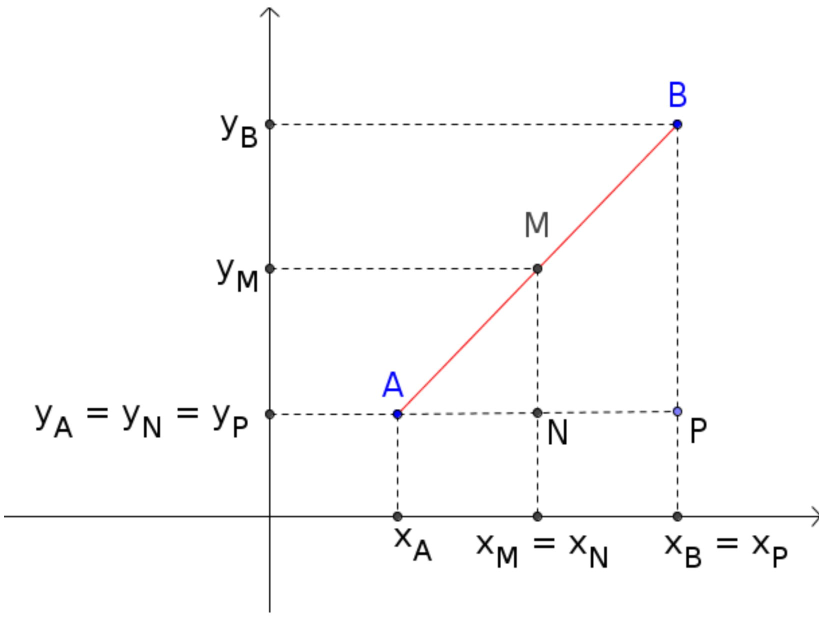
5.5. Atividade 3: Ponto médio entre dois pontos

Observando um segmento de reta determinado por dois pontos, existe apenas um ponto que divide esse segmento em duas partes iguais. Esse ponto é denominado ponto médio. Como iremos ver, como o próprio nome revela, a obtenção das coordenadas deste ponto se dá através do cálculo da média aritmética das coordenadas dos pontos extremos do segmento dado.

5.5.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 3

O segmento de reta possui infinitos pontos, mas somente um irá dividir o segmento em duas partes iguais de mesmo comprimento. Para a determinação e a identificação do ponto médio de um segmento de reta iremos utilizar a ilustração dada na figura 18.

Figura 18: Ponto médio entre dois pontos.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

O segmento de reta AB terá um ponto médio (M) com as seguintes coordenadas (X_M, Y_M). Observamos que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, possuindo os três ângulos correspondentes iguais. Dessa forma, podemos aplicar a seguinte relação entre os segmentos que formam os triângulos. Ou seja,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP} .$$

Consideramos M o ponto médio do segmento AB. Podemos concluir que AB = 2.(AM). Logo, $\frac{AM}{2.AM} = \frac{AN}{AP}$. Assim, $AP = 2.AN$.

Em termos das coordenadas dos pontos A, B e M temos as seguintes relações:

$$X_P - X_A = 2*(X_M - X_A)$$

$$X_B - X_A = 2*(X_M - X_A)$$

$$X_B - X_A = 2X_M - 2X_A$$

$$2X_M = X_B - X_A + 2X_A$$

$$2X_M = X_B + X_A \cdot$$

Portanto,

$$X_M = \frac{(X_A + X_B)}{2} \cdot$$

Analogamente conseguimos demonstrar que $Y_M = \frac{(Y_A + Y_B)}{2}$.

Desta maneira, ponto médio M do segmento AB é determinado, em termos das coordenadas dos pontos A e B pela expressão:

$$P_M = \left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2} \right).$$

Observamos que as coordenadas da abscissa X_M e da ordenada Y_M são dadas pela média aritmética das abscissas e das ordenadas dos pontos A e B, respectivamente.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ **Nº** ____ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Obter o ponto médio do segmento AB quando A=(7,-1) e B=(-3,11).
2. Determine os pontos que dividem AB em quatro partes iguais quando A=(3,-2) e B=(15,10).
3. Dados os vértices P=(1,1), Q=(3,-4) e R=(-5,2) de um triângulo, calcule o comprimento da mediana que tem extremidade no vértice Q.

5.5.2. Desenvolvimento da Atividade 3

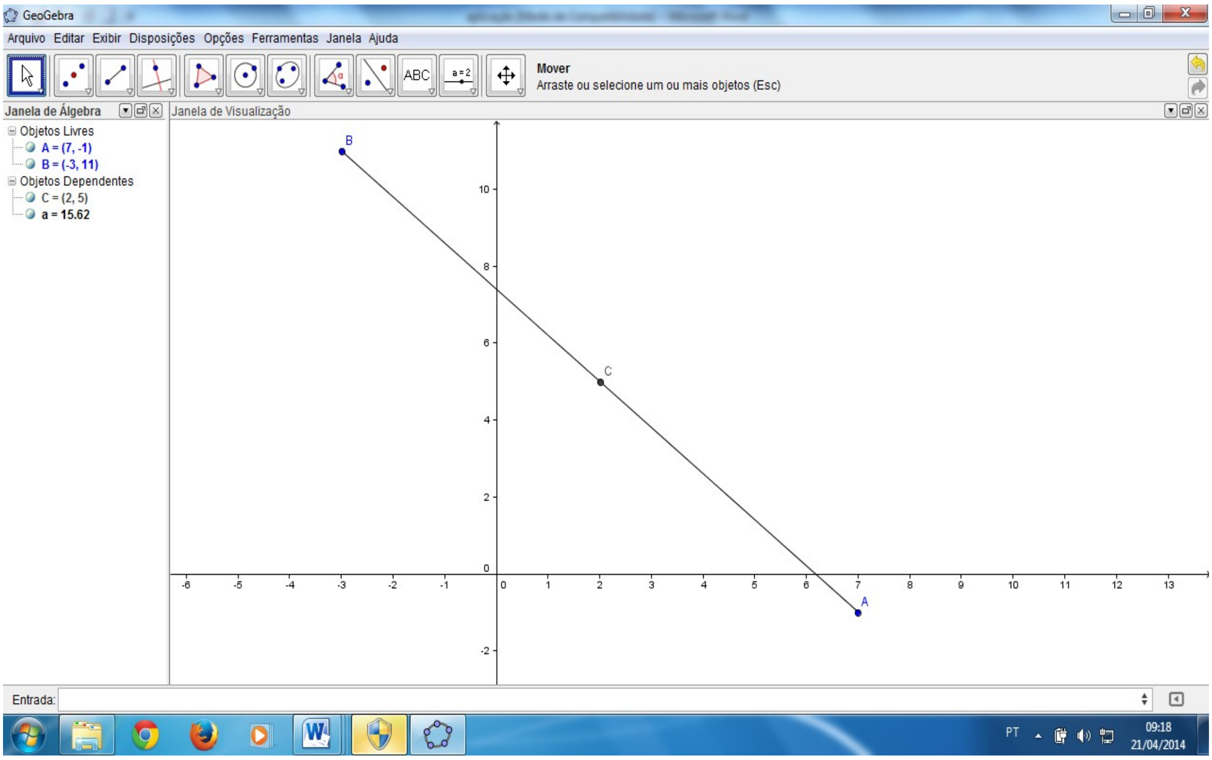
Tema	Ponto médio entre dois pontos
Objetivo Principal	Identificar e calcular o ponto médio entre dois pontos em um plano cartesiano
Objetivo Secundário	Visualizar e calcular o ponto médio entre pontos
Tempo Previsto	3 aulas (2 horas e 30 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Datashow, Classmate*, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(7,-1) e B=(-3,11).
2. Selecionamos o ícone <segmento definido por dois pontos>.
3. Determinamos o ponto médio do segmento utilizando o ícone <ponto médio ou centro>.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Ver figura 19.

Figura 19: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 2.



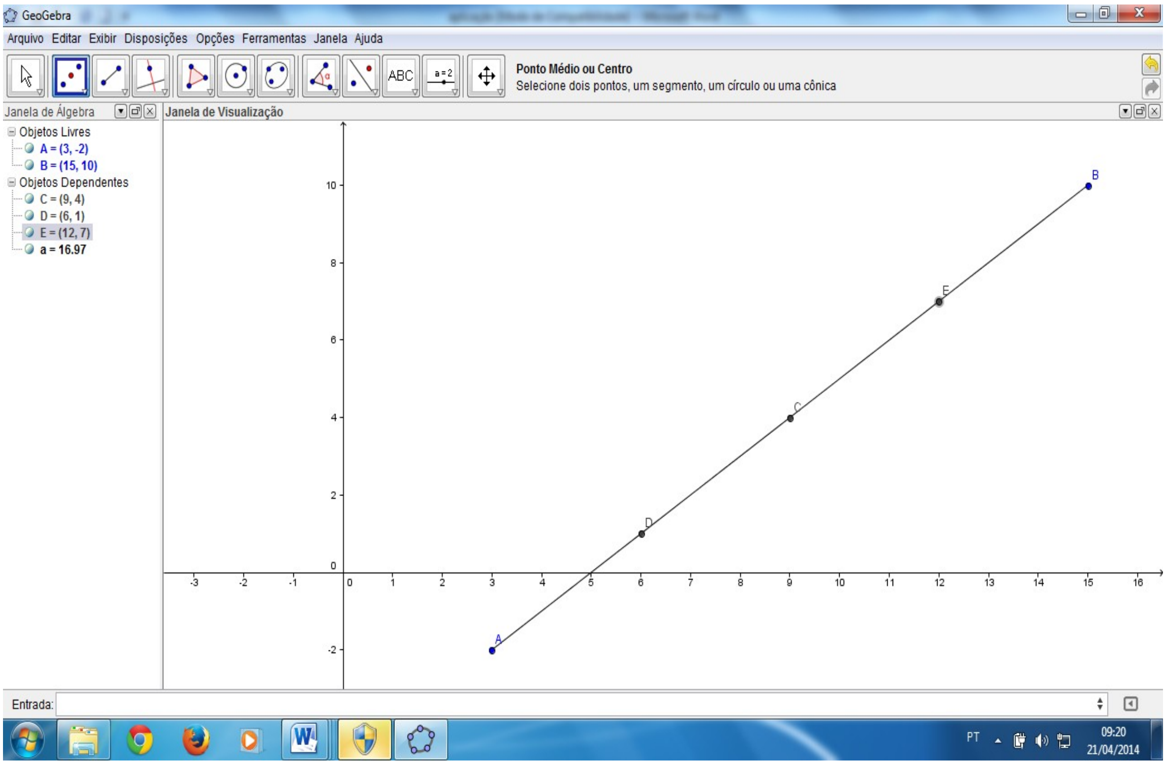
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(3,-2) e B=(15,10).
2. Selecionamos o ícone <segmento definido por dois pontos>.
3. Determinamos o ponto médio C do segmento utilizando o ícone <ponto médio ou centro>.
4. Repetimos o item 3 para o segmento AC e CB, determinando os pontos D e E.
5. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Ver figura 20.

Figura 20: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 2.



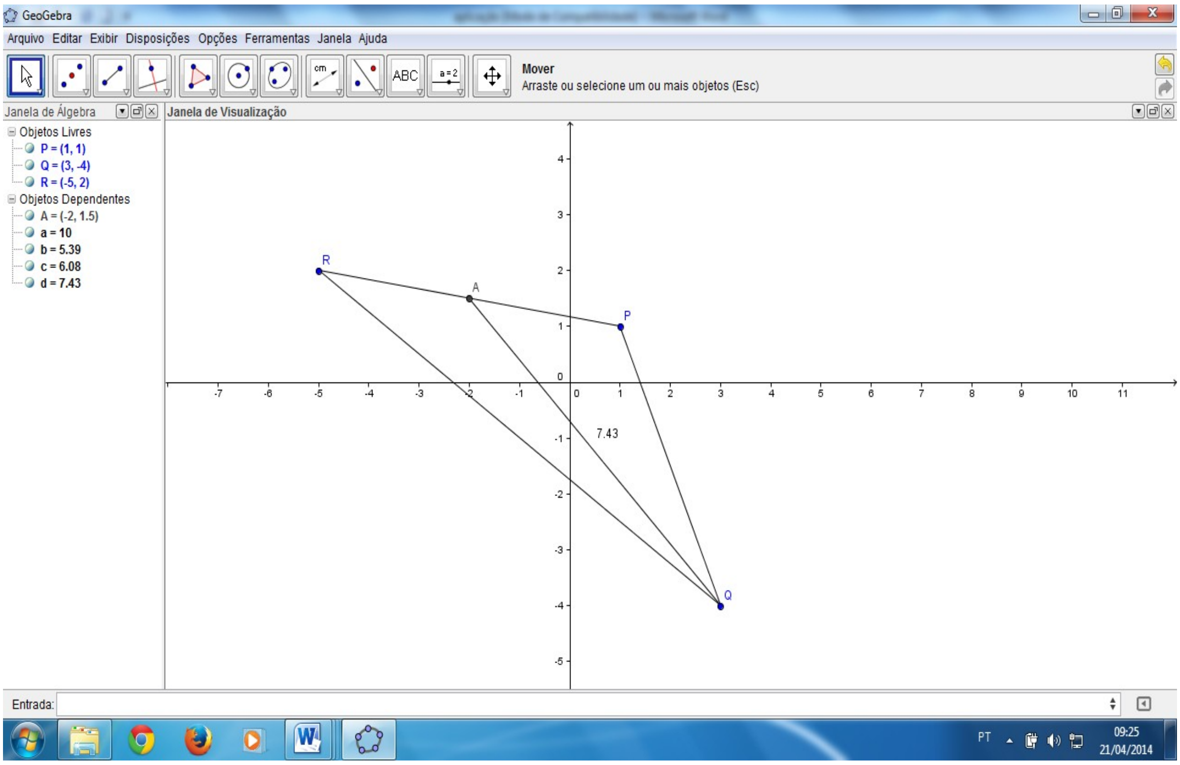
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos P=(1,1), Q=(3,-4) e R=(-5,2).
2. Selecionamos o ícone <segmento definido por dois pontos> para os pontos P e R
3. Determinamos o ponto médio A do segmento PQ utilizando o ícone <ponto médio ou centro>.
4. Calculamos a distância entre os pontos A e Q utilizando o ícone <distância, comprimento ou perímetro>.
5. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Ver figura 21.

Figura 21: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 2.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.5.3. Avaliação da Atividade 3

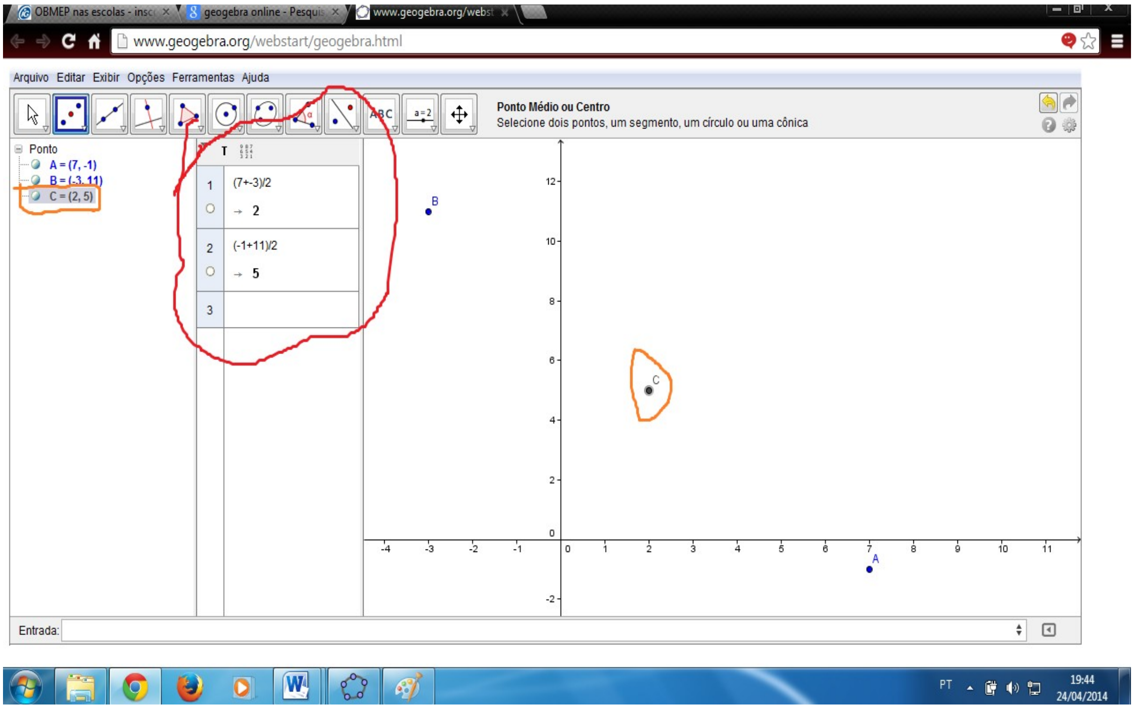
Os estudantes encontraram dificuldades na resolução do exercício 3 no que se refere à mediana. Após uma breve explanação pelo professor, os estudantes conseguiram desenvolver a atividade com êxito. Na utilização do software GeoGebra diversas dúvidas da teoria puderam ser esclarecidas.

Destacamos o seguinte comentário de um estudante

> Achei o GeoGebra uma ferramenta facilitadora para a matéria que estamos aprendendo, nos ajuda no entendimento do que é cada coisa é um bom recurso didático. Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na janela CAS podemos desenvolver os cálculos algébricos envolvidos. A figura 22 mostra a resolução do exercício 1 da Atividade 3.

Figura 22: Resolução do exercício 1 - Atividade 3 na janela CAS.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.6. Atividade 4: Condição de alinhamento de três pontos

Pontos colineares são pontos que estão sobre uma mesma reta. Na reta existem infinitos pontos colineares. Veremos as condições para o alinhamento de três pontos.

5.6.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 4 (fórmula para condição de alinhamento entre três pontos)

Sejam A=(X_A, Y_A), B=(X_B, Y_B) e C=(X_C, Y_C) três pontos distintos pertencentes a uma mesma reta r.

Os triângulos ABD e BCE são semelhantes logo:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Então: b.c = a.d. Assim: b.c – a.d = 0. Considerando

a = $Y_C - Y_B$; b = $X_C - X_B$; c = $Y_B - Y_A$; d = $X_B - X_A$

Substituindo temos que:

$$(X_C - X_B) \cdot (Y_B - Y_A) - (Y_C - Y_B) \cdot (X_B - X_A) = 0$$

$$X_C . Y_B - X_C . Y_A - X_B \cdot Y_B + X_B . Y_A - Y_C \cdot X_B + Y_C . X_A + Y_B \cdot X_B - Y_B . X_A = 0$$

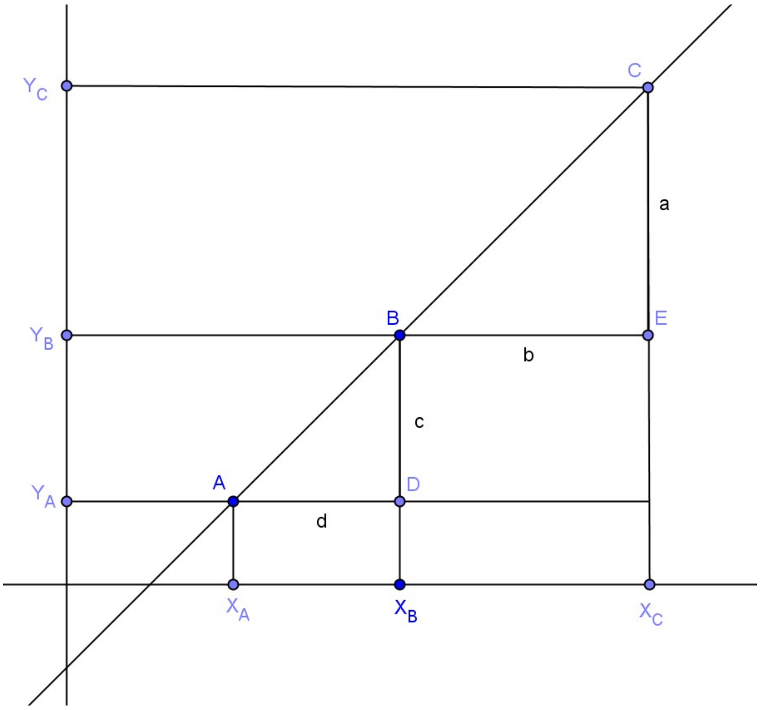
$$-Y_B.X_A - X_C\ .Y_A\ -\ Y_C\cdot\ X_B + \ X_C\ .\ Y_B + Y_C\ .X_A + X_B\ .\ Y_A = 0$$

Que é o determinante de uma matriz. Concluímos então que os pontos A=(X_A, Y_A), B=(X_B, Y_B) e C=(X_C, Y_C) estão alinhados se e somente se:

$$D = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Neste caso, diremos que os pontos são colineares.

Figura 23: Pontos A, B e C alinhados.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR — Colégio Veritas

Nome: ________________________ **Nº**_____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Os pontos A=(2,7), B=(-3,0) e C=(16,5) são colineares?
2. Determine Y para que os pontos A=(3,5), B=(-3,8) e C=(4,Y) sejam colineares.
3. Se o ponto (q,-4) pertence à reta que passa pelos pontos (0,6) e (6,0), determine q.

4. Dados os pontos A=(10,9) e B=(2,3), obtenha o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das ordenadas.

5.6.2. Desenvolvimento da Atividade 4

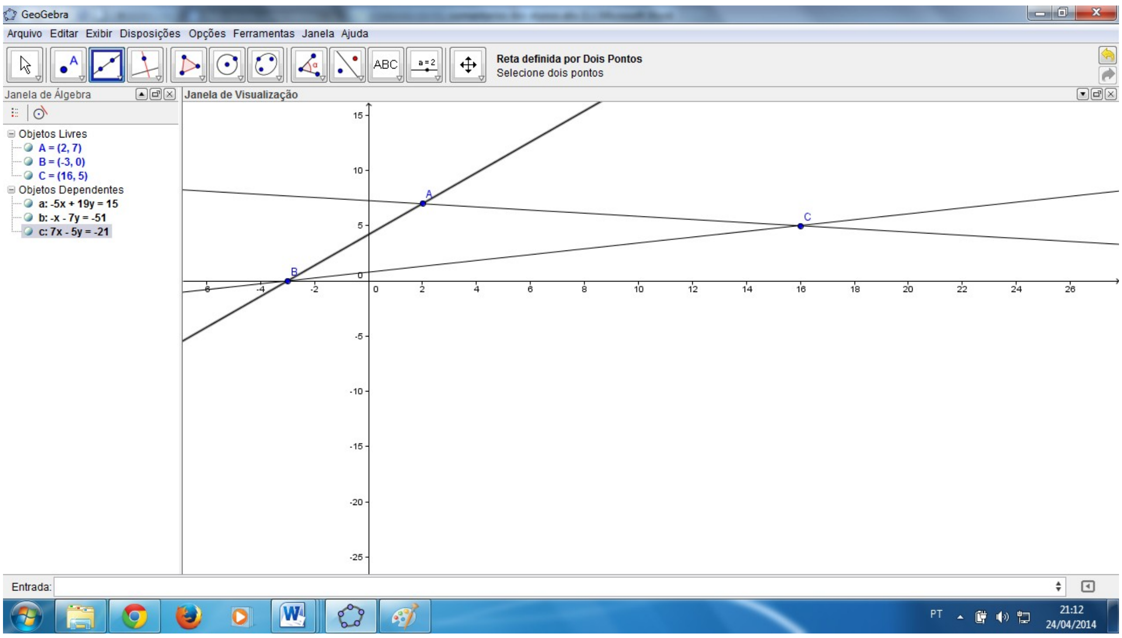
Tema	Pontos Colineares
Objetivo Principal	Identificar três pontos colineares (pontos que estão sobre a mesma reta)
Objetivo Secundário	Visualizar o alinhamento de três pontos
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Datashow, Clasmate*, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1.Definimos no campo de entrada os pontos A=(2,7), B=(-3,0) e C=(16,5).

2.Selecionamos o ícone <reta definida por dois pontos> para os ponto A e B. Visualmente verificamos que os três pontos não são colineares. Ver figura 24.

Figura 24: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

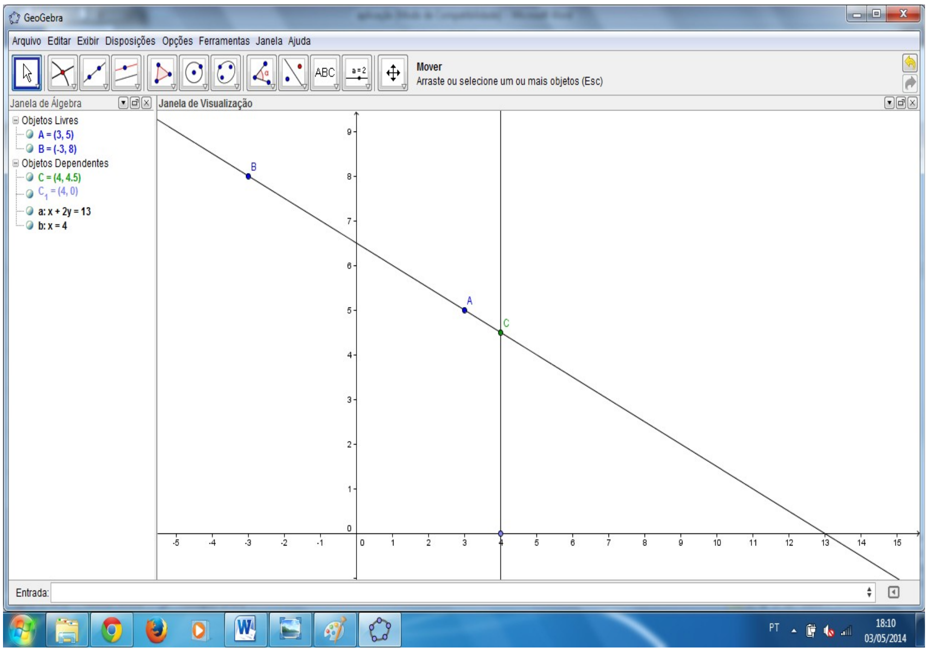
É importante explorarmos nesta atividade as diferenças entre visualização e demonstração Matemática pois, o que é visualmente aceito pode não ser matematicamente comprovado. Voltaremos a essa discussão quando da resolução do exercício 2 a seguir.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(3,5), B=(-3,8).
2. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e B.
3. Clicamos no ícone <reta perpendicular>, selecionando o eixo Ox e o ponto (4,0).
4. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas retas obtidas nos itens 2 e 3. Este ponto é o solicitado pelo exercício.
5. As coordenadas do ponto desejado irá aparecer na janela de álgebra. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Ver figura 25.

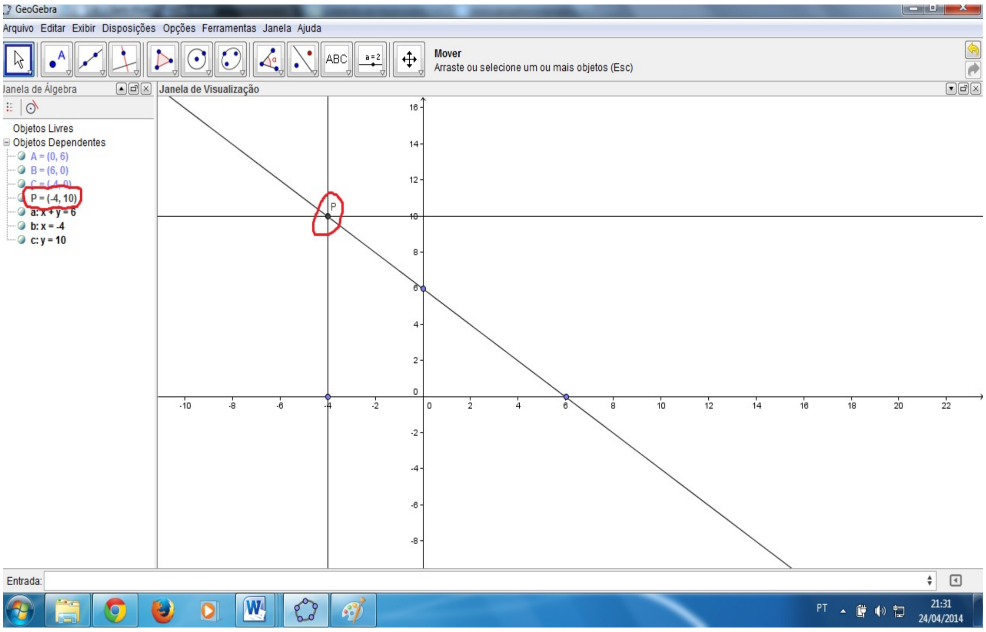
Figura 25: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>: análogo à resolução do exercício 2 considerando os pontos A=(0,6) e B=(6,0). Ver figura 26.

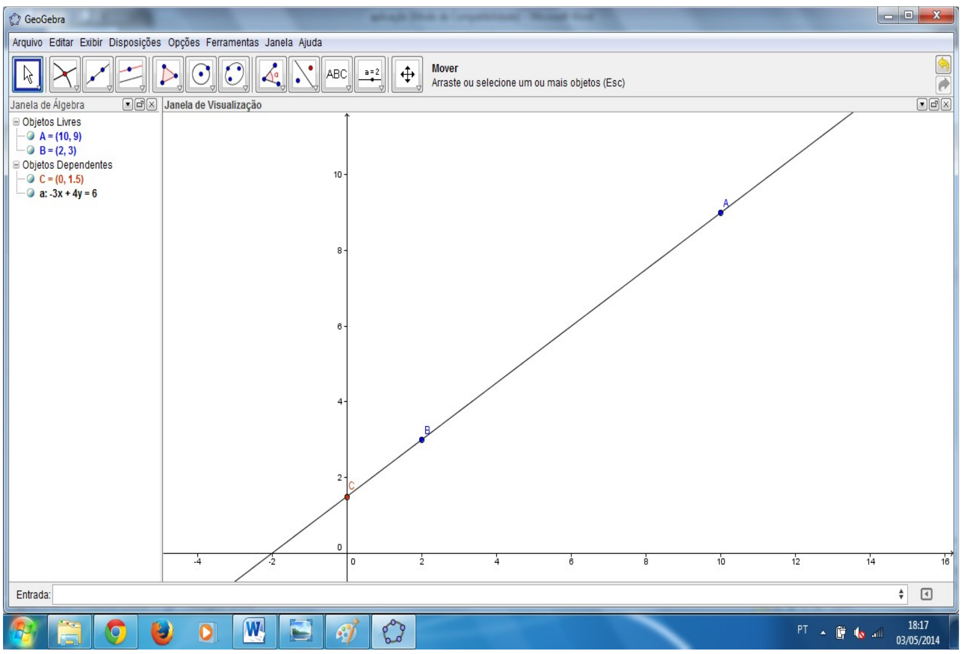
Figura 26: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>: análogo à resolução do exercício 2 considerando os pontos A=(10,9) e B=(2,3). Ver figura 27.

Figura 27: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.6.3. Avaliação da Atividade 4

Os estudantes não encontraram muitas dificuldades em desenvolver esta atividade. Destacamos os seguintes comentários de dois estudantes.

> Tive um pouco de dificuldade pra mexer no programa em si, mas, dei uma pesquisada e rapidamente aprendi... Já havia entendido a matéria, então, não tive muitas dificuldades para realizá-la. Fonte: Arquivo do pesquisador.

> Os exercícios que você fez no plantão, me ajudaram muito … estava fácil e consegui resolver de primeira. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.7. Atividade 5: Equação geral da reta

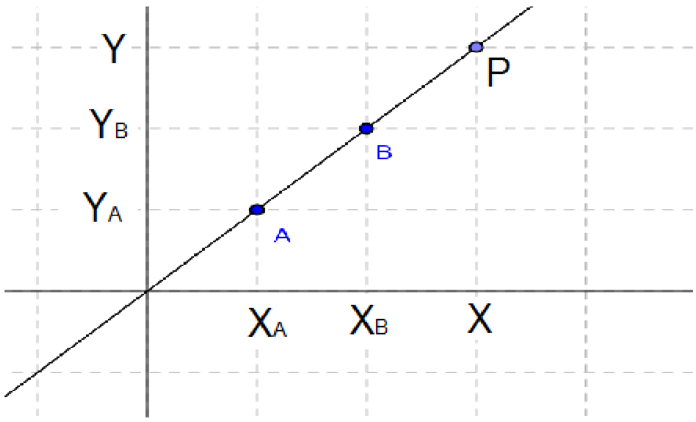
Partindo do princípio de condição de alinhamento entre três pontos, dados dois pontos quaisquer sobre uma reta dada, desejamos determinar as condições para que um ponto qualquer de coordenadas (X,Y) venha a pertencer a reta dada.

5.7.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 5

A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma ax + by + c = 0 em que a, b, c são números reais, a ≠ 0 ou b ≠ 0 e (x,y) representa um ponto genérico de r.

Consideremos dois pontos distintos A=(X_A,Y_A) e B=(X_B,Y_B), de coordenadas conhecidas e um ponto genérico P=(X,Y). Ver figura 28.

Figura 28: Reta passando pelos ponto A, B e P.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Utilizando a condição de alinhamento de três pontos, temos

$$\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X & Y & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos a equação da reta, ou seja,

$$X_A.Y_B + Y_A.X + X_B Y - Y_B.X - X_A.Y - X_B.Y_A = 0$$

Agrupando os termos em X e Y obtemos:

$$X\,.(Y_A - Y_B) + Y.(X_B - X_A) + (X_A Y_B - X_B Y_A) = 0$$

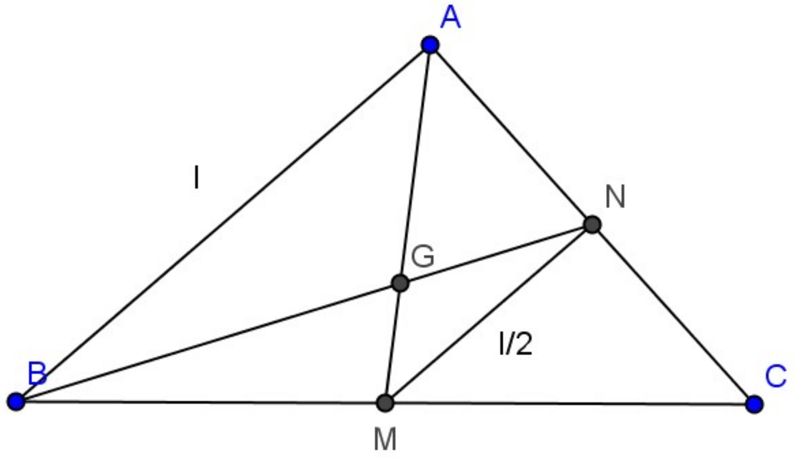
A equação: aX + bY + c = 0 é denominada equação geral da reta r.

A toda equação da forma ax + by + c = 0, com a,b,c números reais, a ≠ 0 ou b ≠ 0, está associada uma única reta do plano cartesiano cujos pontos P(x,y) são soluções da equação dada.

De fato, o conjunto dos pares (x,y) que satisfazem a equação da forma ax + by + c = 0, como vimos anteriormente, é uma reta.

Observação: O baricentro de um triângulo é a interseção de suas medianas (G). Tomando um triângulo ABC e construindo as medianas AM e BN, obtemos os triângulos, ABG e MNG que são semelhantes. Ver figura 29.

Figura 29: Baricentro do triângulo ponto G.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Ou seja, G divide a mediana AM na razão 2. Então:

$$X_G = \frac{X_A + 2X_M}{1+2} = \frac{X_1 + 2\,\frac{X_2 + X_3}{2}}{3} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

e

$$Y_G = \frac{Y_A + 2Y_M}{1+2} = \frac{Y_1 + 2\,\frac{Y_2 + Y_3}{2}}{3} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ Nº ______ Ano: 2° EM Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria Professor (a): Marcos

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;

2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

EXERCÍCIOS

1. Determine as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são A=(0,0), B=(1,3) e C=(4,0).

2. Dados os pontos A=(1,2), B=(2,-2) e C=(4,3), obtenha a equação da reta que passa por A e pelo ponto médio do segmento BC.

3. Dados A=(-5,-5), B=(1,5), C=(19,0) e a reta 5X – 3Y = 0, verifique se a reta passa pelo baricentro do triângulo ABC.

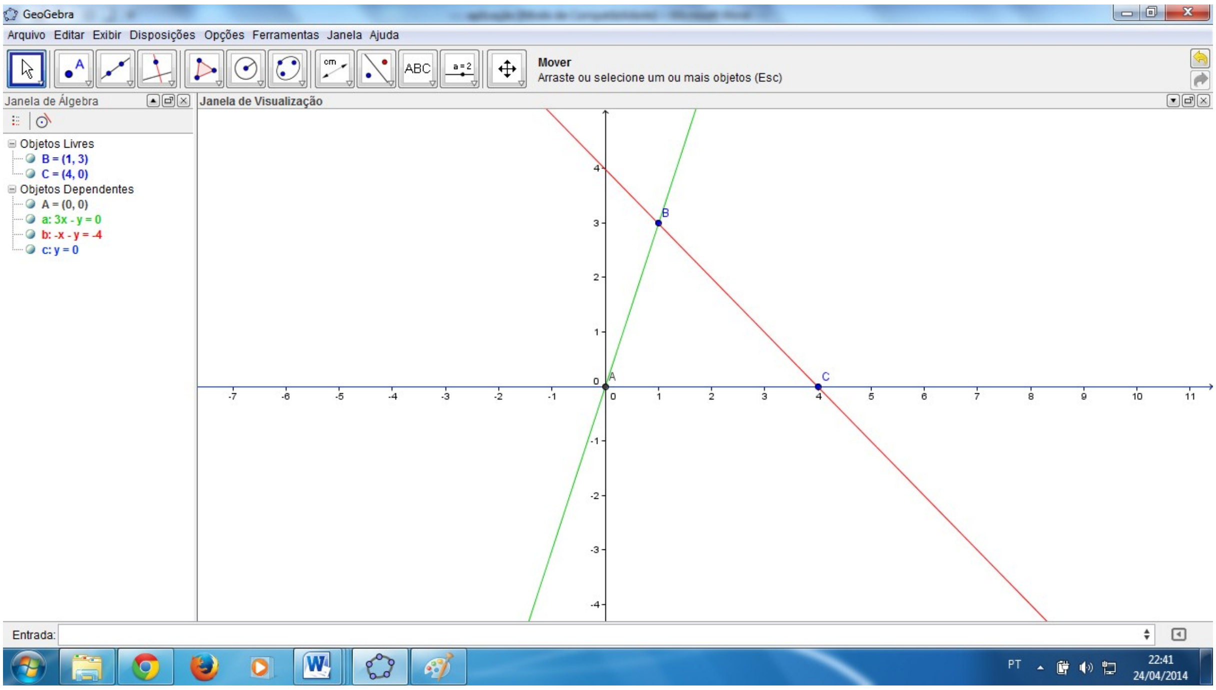
5.7.2. Desenvolvimento da Atividade 5

Tema	Equação da Reta
Objetivo Principal	Identificar e definir a equação de uma reta á partir de dois pontos.
Objetivo Secundário	Visualizar os pontos sobre uma reta
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos)
Material	Software GeoGebra, Datashow, Classmate, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(0,0), B=(1,3) e C=(4,0).
2. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e B.
3. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e C.
4. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e C.
5. Comparamos os resultados obtidos com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 30.

Figura 30: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 5.

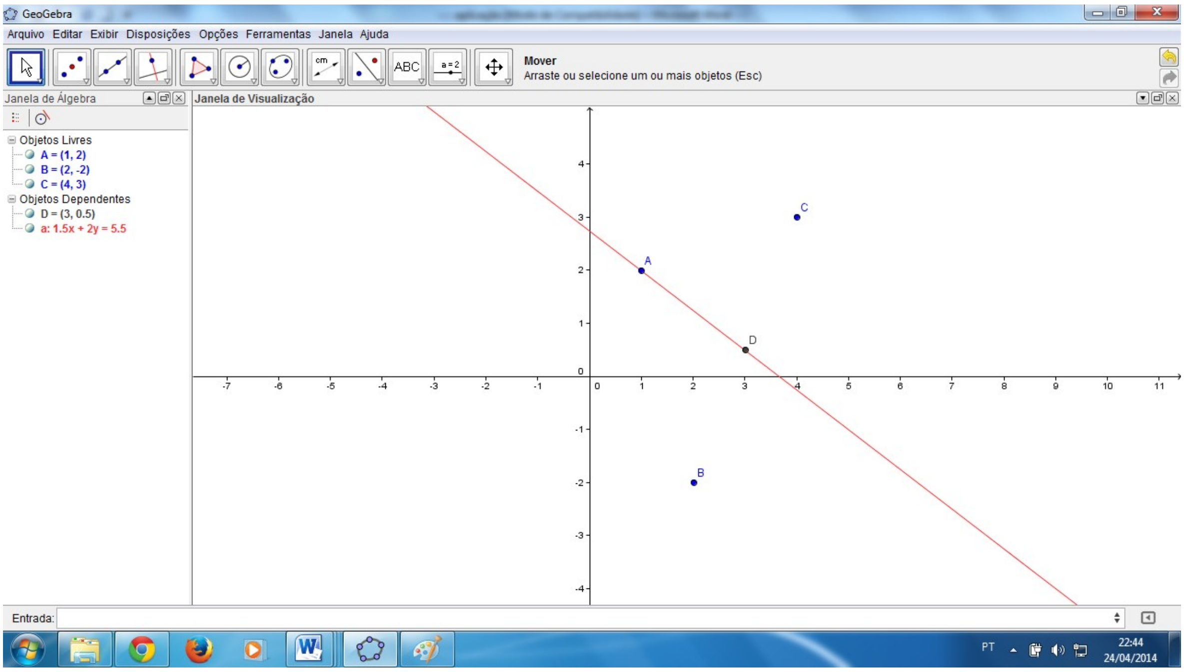


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2:</u>

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(1,2), B=(2,-2) e C=(4,3).
2. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os pontos B e C.
3. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e D obtido no item 2.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 31.

Figura 31: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 5.

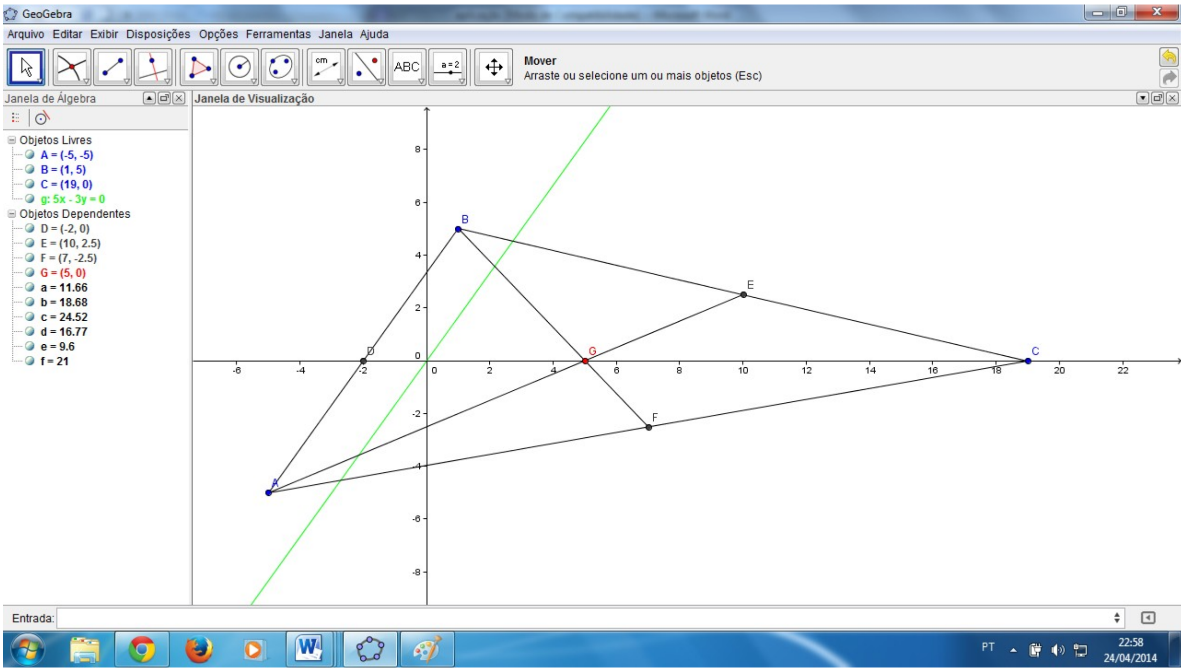


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3:</u>

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(-5,-5), B=(1,5), C=(19,0).
2. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os pontos A e B, obtemos o ponto D.
3. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os pontos B e C, obtemos o ponto E.
4. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os pontos A e C, obtemos o ponto F.
5. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e E.
6. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos B e F.
7. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos C e D.
8. Definimos no campo de entrada a reta 5X – 3Y = 0.
9. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 32.

Figura 32: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 5.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.7.3. Avaliação da Atividade 5

A única dificuldade encontrada nessa atividade foi a resolução do exercício 3, pois a questão do baricentro de um triângulo, apesar de ser um conteúdo do ensino fundamental, muitos estudantes não lembravam do que se tratava. Após a explanação do professor e a demonstração da fórmula (teórica), para o cálculo do baricentro do triângulo, a atividade se desenvolveu sem maiores problemas. Destacamos o seguinte comentário de um estudante:

> O programa é bem prático e rápido, para quem não gosta de contas, realmente vale a pena. Além, de aprender, você consegue se divertir criando desenhos com retas e usando a Geometria. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.8. Atividade 6: Interseção de duas retas

Duas retas quaisquer no plano, estas podem não ter interseção (retas paralelas), ter um ponto em comum (retas concorrentes) ou ter mais de um ponto em comum (neste caso, coincidentes). Nesta seção trataremos da interseção de duas retas em um ponto em comum.

5.8.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 6

Para que um ponto P=(X_0, Y_0) do plano cartesiano seja a interseção de duas retas, ele deve satisfazer as equações de ambas as retas. Desta maneira, o ponto P=(X_0, Y_0) será comum às duas retas concorrentes se e somente se, o sistema linear formado pelas equações das retas tiver uma única solução (X_0, Y_0).

Exemplo: Obter a interseção das retas: x – 5y = 14 e 3x + 2y = -9. Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{matrix} x-5y=14.(-3) \\ 3x+2y=-9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3x+15y=-42 \\ 3x+2y=-9 \end{matrix}$$

Somando as linhas temos: 0x + 17y = -51. Logo, y = -3. Substituindo em uma das equações temos x = -1. Portanto, o ponto de interseção entre as retas é o par (-1,-3).

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ **Nº** ____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

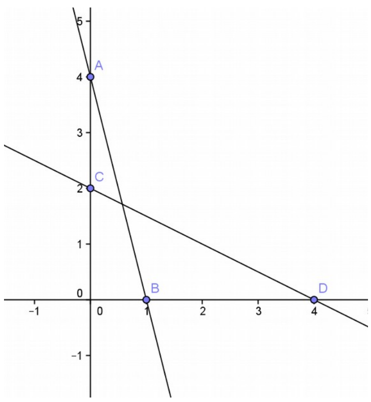
Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Determine a interseção das retas x – 5y = 14 e 3x + 2y = -9.

2.Determine a interseção das retas indicadas no gráfico abaixo.



3. Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são as interseções das retas x+y=6, x = 1 e y = 1

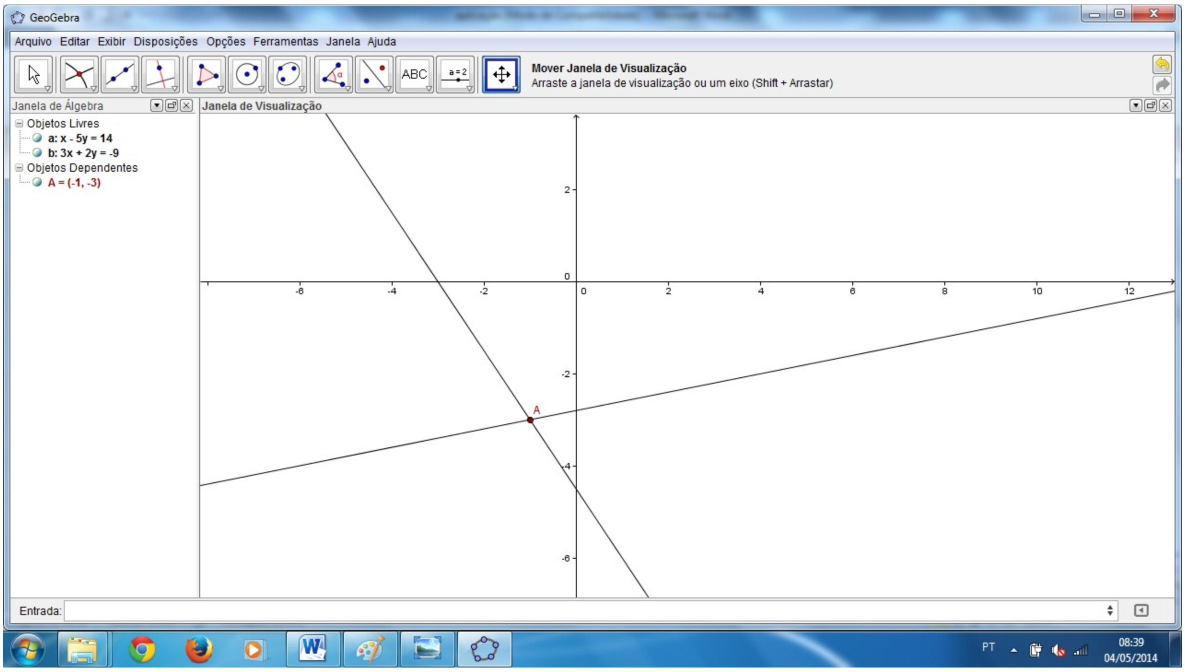
5.8.2. Desenvolvimento da Atividade 6

Tema	Interseção entre retas
Objetivo Principal	Determinar o ponto de interseção entre duas retas dadas
Objetivo Secundário	Visualizar os pontos de interseção entre retas
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Data show, Clasmate,* Lousa digital

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u> :

1. Definimos no campo de entrada a reta x – 5y = 14.
2. Definimos no campo de entrada a reta 3x + 2y = -9.
3. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas retas, obtendo o ponto A.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 33.

Figura 33: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 6.



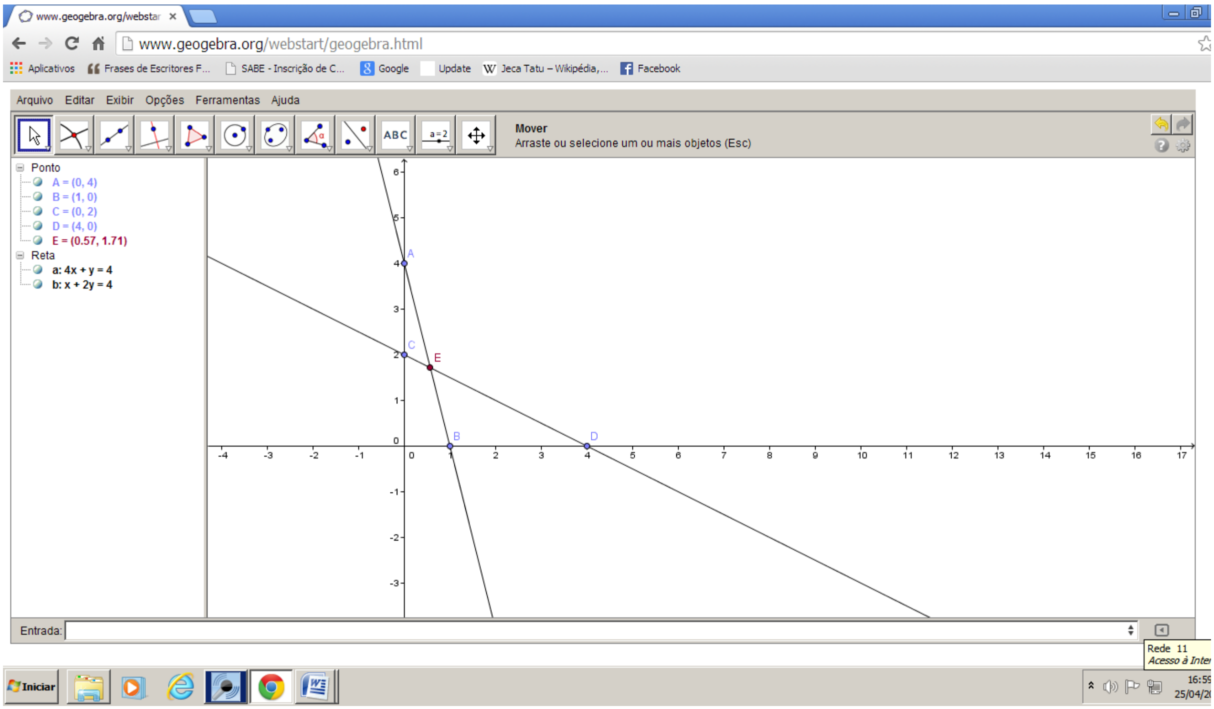
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u> :

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(0,4), B=(1,0), C=(0,2), D=(4,0).
2. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e B.
3. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos C e D.

4. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas retas obtendo o ponto E.
5. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 34.

Figura 34: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 6.

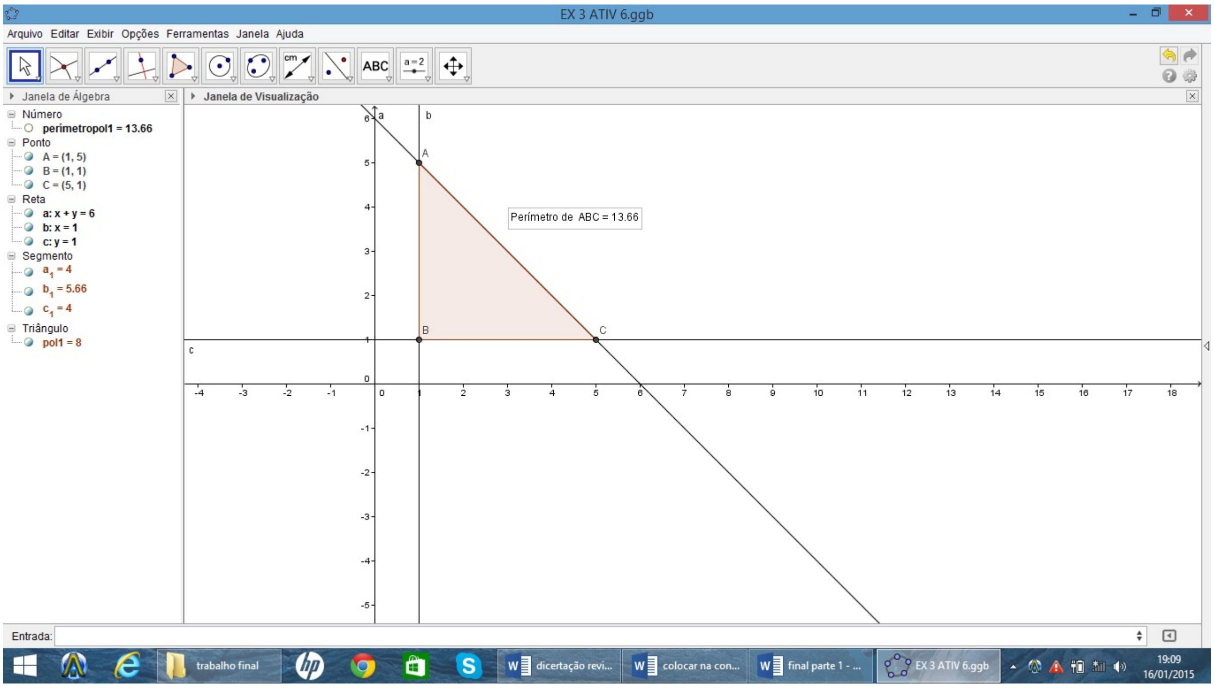


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u> :

1. Definimos no campo de entrada a retas x + y = 6.
2. Definimos no campo de entrada a retas, x = 1 .
3. Definimos no campo de entrada a retas y = 1.
4. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as retas duas a duas, obtendo os pontos A,B e C.
5. Clicamos no ícone <área>, selecionando os pontos A,B,C.
6. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 33.

Figura 33: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 6.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.8.3. Avaliação da Atividade 6

Os estudantes não encontraram dificuldades na resolução dos exercícios. No exercício 3, muitos dos estudantes resolveram inicialmente no GeoGebra para, em seguida, fazer a resolução algébrica solicitada pelo exercício. Ressaltamos o seguinte comentário de um estudante:

> Achei que com os exercícios [no GeoGebra] a matéria ficou mais clara e nos ajudou muito. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.9. Atividade complementar 1 (Atividade 1-6)

Para finalizar essa sequência de atividades, os estudantes resolveram dois exercícios como tarefa de casa e enviaram para o professor via e-mail. Segue a atividade do estudante número 19 acompanhada por seus comentários.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ Nº ______ Ano: 2° EM Data: __/__/2013

Disciplina: Geometria Professor (a): Marcos

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;
2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

Atividade Complementar 1: (Distância entre dois pontos, Ponto médio entre dois pontos, Equação da reta, Interseção entre retas)

1. Dados os pontos A(1,0), B(3,-7), C(-2,-2), vértice de um triângulo, determine:

   a- A equação da reta que passa pelos pontos A e B.

   b- A equação da reta que passa pelo ponto C e o ponto médio do segmento AB.

   c- A distância do ponto B ao ponto médio do segmento AC.

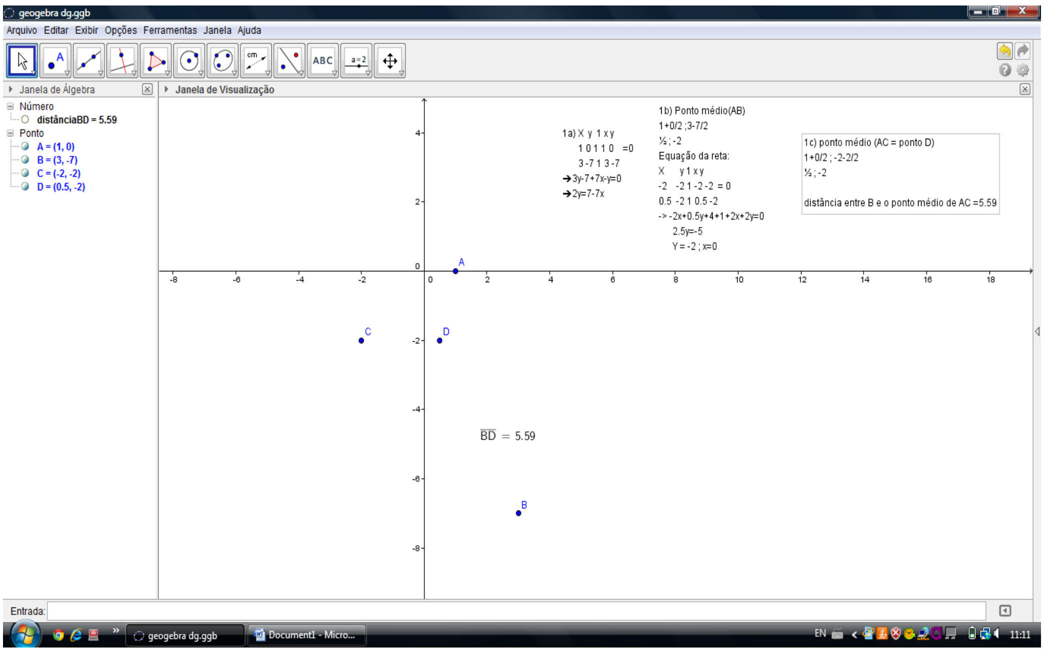
2. As retas suportes dos lados do triângulo ABC são: (AB) 3X – 4Y = 0, (BC) X + Y – 7 = 0, (CA) 4X – 3Y =0. Mostre que o triângulo ABC é isósceles.

Procedimento: resolver os exercícios no GeoGebra, conforme orientação do professor. Encaminhar para o e-mail do professor.

Comentário de um estudante:

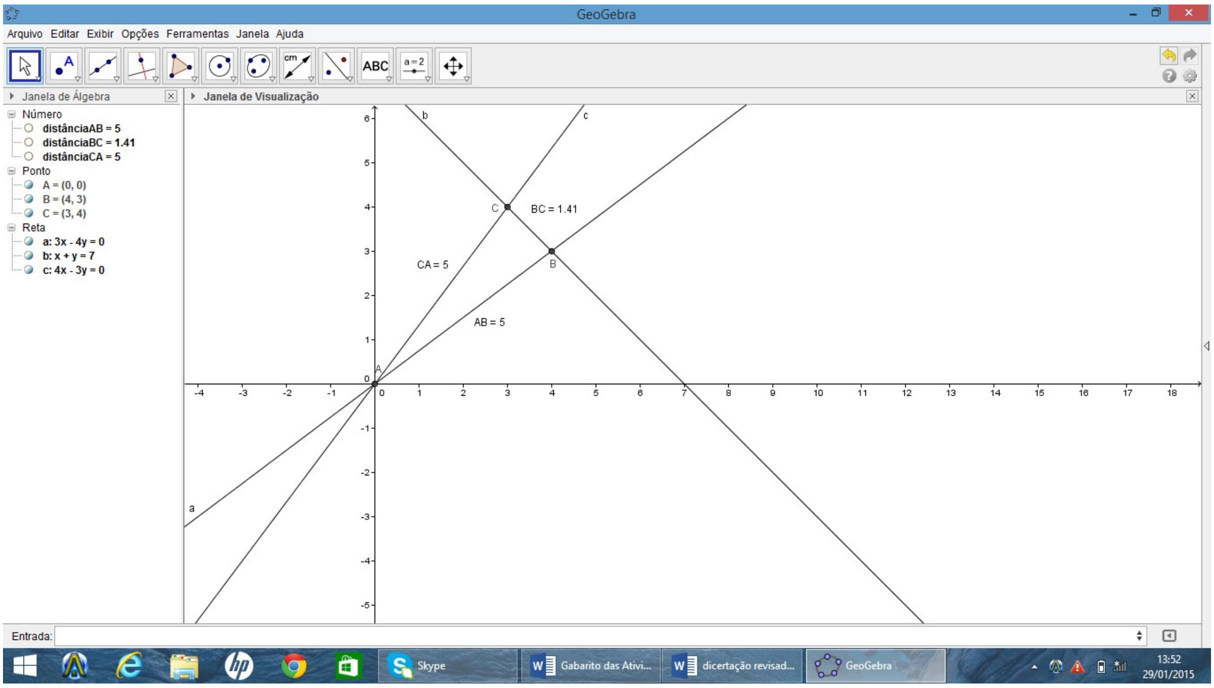
> Oi professor, já fiz o seu trabalho no GeoGebra, calculei tudo que foi pedido. Não consegui finalizar a parte de mostrar que o triângulo é isósceles, não achei nada disso no programa e as contas que eu estava fazendo também não deram certo, por isso nem coloquei essas contas aqui! Obrigada pela atenção e um ótimo final de semana. Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 35: Resolução do exercício 1 da Atividade Complementar 1 no GeoGebra pelo estudante 19



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 36: Resolução do exercício 2 da Atividade Complementar 1 no GeoGebra pelo estudante 19.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Comentário de outro estudante sobre a mesma atividade:

> A atividade foi interessante para aprendermos, sobre Geometria e aprofundar meus conhecimentos, foi relativamente fácil. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.10. Atividade 7: Equação geral e reduzida da reta. Coeficiente angular

O objetivo desta atividade será de explorar as diferentes formas (equações) que uma reta pode ser descrita no sistema cartesiano.

5.10.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 7

Como vimos anteriormente, dada uma reta r, podemos determinar pelo menos uma equação algébrica que descreve todos os pontos P=(x, y) sobre a reta. A equação será do tipo

$$ax + by + c = 0$$

denominada **equação geral da reta**.

Podemos também reescrever a equação geral da reta r, ax + by + c = 0, se b

≠0, na forma:

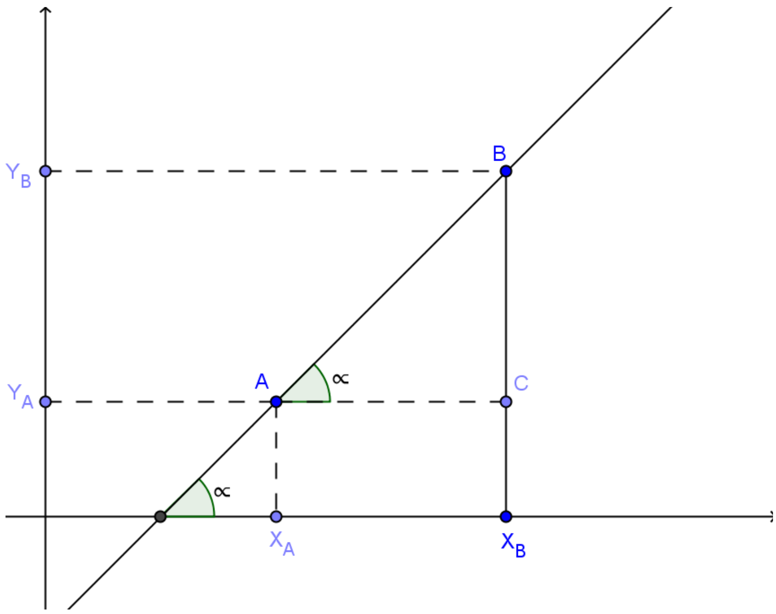
by = - ax – c → y = (- $\frac{a}{b}$)x + (- $\frac{c}{b}$) → y = mx + q.

Esta última equação, que expressa y em função de x, é denominada **equação reduzida da reta** r, sendo:

m =- $\frac{a}{b}$ o coeficiente angular e

q =- $\frac{c}{b}$ o coeficiente linear.

Verificamos que o valor da tangente do ângulo formado pela reta r com o eixo das abscissas é dado pelo coeficiente angular (m) da reta r.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Como podemos verificar na figura 36, aplicando a relação trigonométrica no triângulo retângulo ABC, temos:

$$tg\alpha = \frac{cat oposto}{cat adjacente} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} (X_B \neq X_A)$$

Para associar com $aX + bY + c = 0$ é só observar que $aX_A + bY_A + c = 0$ e $aX_B + bY_B + c = 0$. Então:

$$tg\ \alpha = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\frac{-a}{b}X_B - C - \left(\frac{-a}{b}X_A - C\right)}{X_B - X_A} = \frac{\frac{-a}{b}X_B + \frac{a}{b}X_A}{X_B - X_A} = -\frac{a}{b} = m$$

Considerando um ponto arbitrário P=(X,Y) pertencente à reta, pelo fato de m ser constante tem-se:

$$m = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}$$

Portanto, a equação da reta é dada por:

$$Y - Y_0 = m(X - X_0)$$

É importante observar aqui que basta conhecermos 1 ponto da reta e seu coeficiente angular para determinarmos sua equação.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Determine a equação reduzida da reta AB quando A=(2,7) e B=(-1,5).
2. Qual é o coeficiente angular da reta 5x + 3y + 13 = 0.
3. Considere os pontos A=(-5,-3), B=(-2,12) e C=(4,6) vértices do triângulo ABC. Determine o coeficiente angular da reta que contém a mediana obtida a partir do vértice A.

5.10.2. Desenvolvimento da Atividade 7

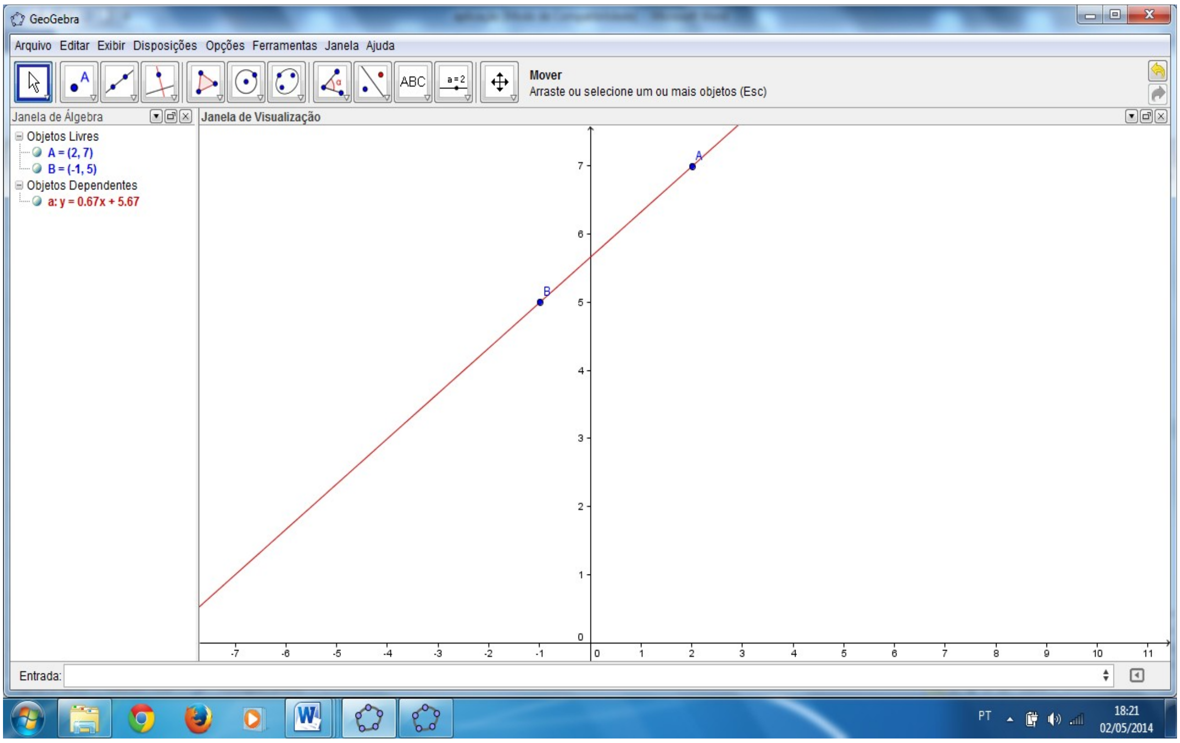
Tema	Equação reduzida e coeficiente angular de uma reta
Objetivo Principal	Identificar e determinar a equação reduzida e o coeficiente angular de uma reta
Objetivo Secundário	Interpretar a equação de uma reta
Tempo Previsto	4 aulas (3horas e 20 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Data show, Classmate*, Lousa digital

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(2,7) e B=(-1,5).
2. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e B.
3. Comparamos o resultado que aparece na janela de álgebra com os cálculos

algébricos anteriormente feitos. Ver figura 37.

Figura 37: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 7.

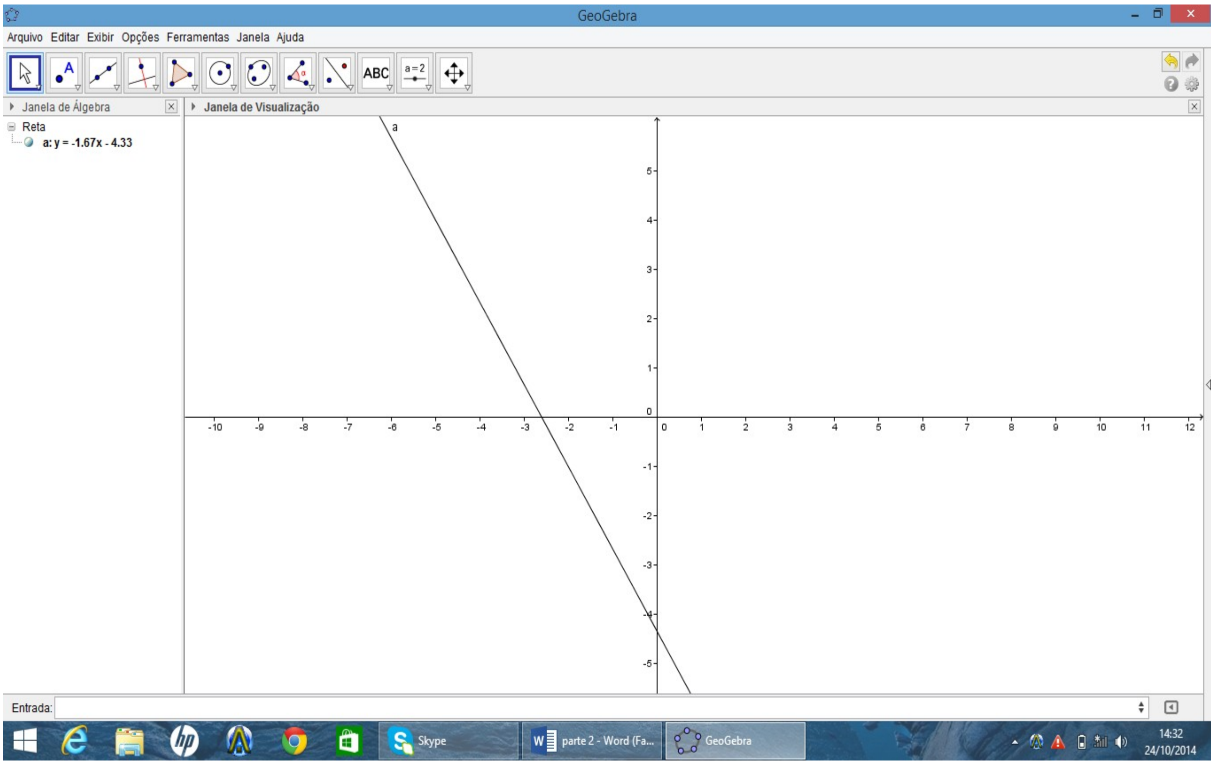


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2:

1. Definimos no campo de entrada a reta 5x + 3y + 13 = 0.
2. Clicamos sobre a reta com o botão da direita do mouse. Sobre o menu que aparece, clicamos em <Equação y=ax+b>.
3. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 38.

Figura 38: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 7.

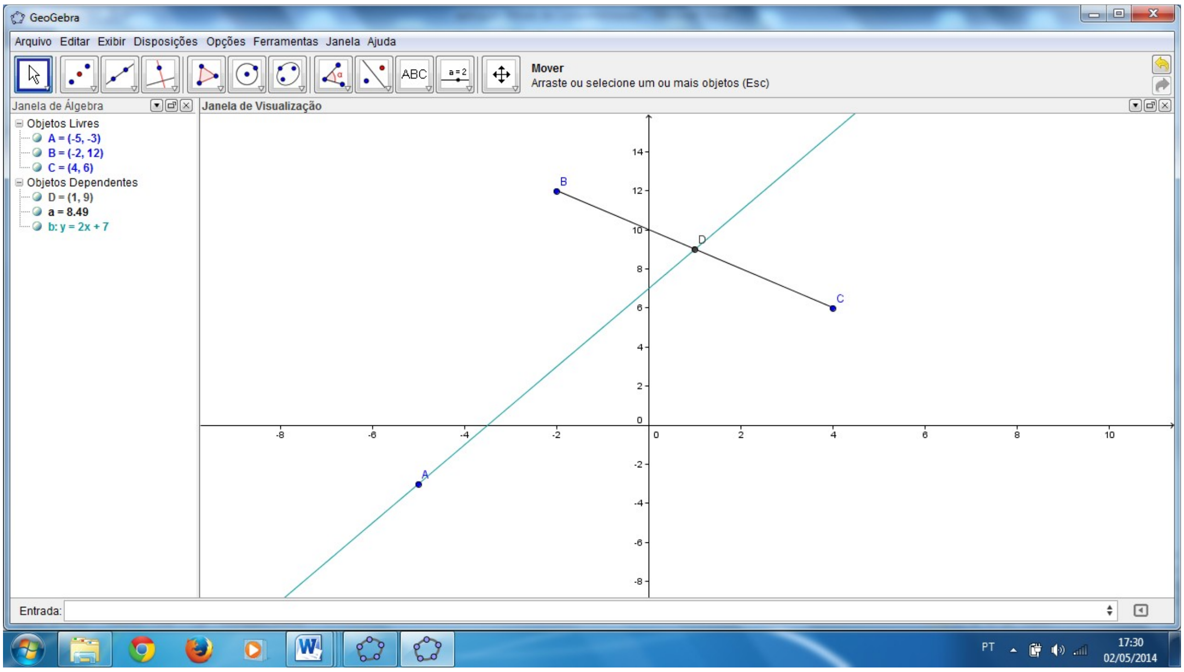


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3:</u>

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(-5,-3), B=(-2,12) e C=(4,6).
2. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os pontos B e C, determinando o ponto D.
3. Clicamos no ícone <reta definida por dois pontos>, selecionando os pontos A e D.
4. Comparamos o resultado que aparece na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 39.

Figura 39: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 7.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.10.3. Avaliação da Atividade 7

A maior dificuldade encontrada pelos estudantes foi de observar as diferentes formas algébricas da equação da reta. A medida que as dúvidas surgiam eram esclarecidas pelo professor. A atividade transcorreu com sucesso. Destacamos o seguinte comentário de um estudante:

> Ao término desse trabalho, consegui compreender melhor tanto a matéria estudada, e como, funciona o programa GeoGebra. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.11. Atividade 8: Condições de paralelismo e perpendicularismo

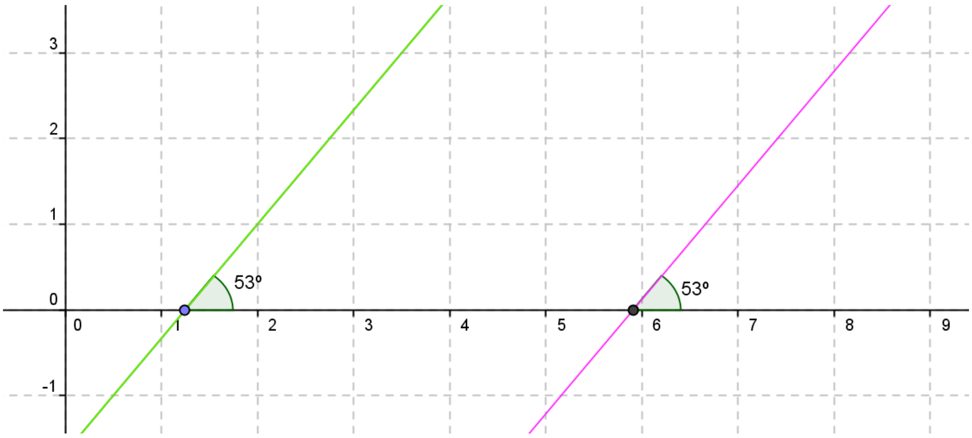
O objetivo desta atividade é discutir as condições para que duas retas sejam paralelas ou perpendiculares.

5.11.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 8

<u>Teorema:</u> Duas retas r e s, não verticais, são paralelas entre si se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

É fácil entendermos esse teorema se observamos a figura 40:

Figura 40: Condição de paralelismo entre duas retas.



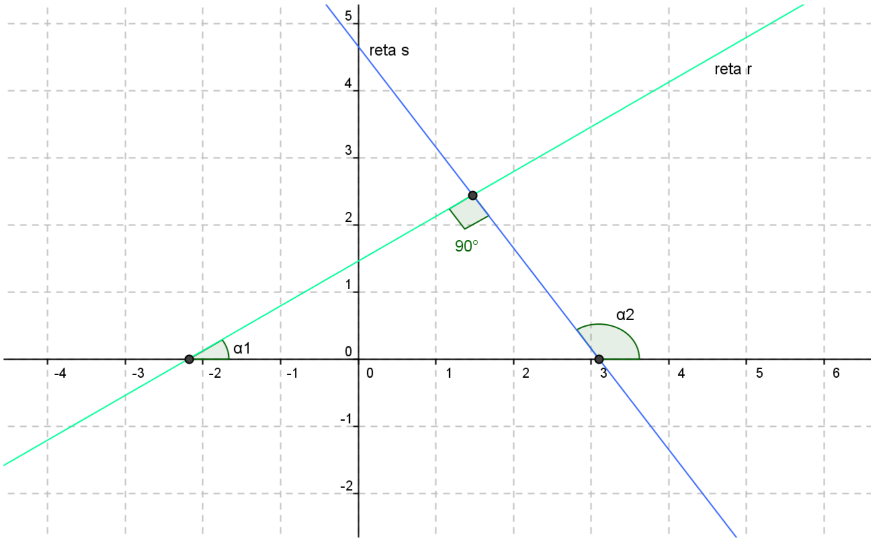
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Verificamos que as retas dadas são paralelas e que fazem o mesmo ângulo em relação ao eixo das abcissas e não possuem nenhum ponto em comum. Ou seja, dada duas retas s e r, estas são paralelas quando seus coeficientes angulares forem iguais. Isso ocorre porque seus respectivos ângulos com o eixo das abcissas são iguais, se não forem iguais é impossível que sejam paralelas.

Teorema: Duas retas r e s, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1.

De fato, consideremos a figura 41.

Figura 41: Condição para o perpendicularismo entre duas retas dadas.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Observando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° segue que:

$180° - \alpha_2 + 90º + \alpha_1 = 180°$, logo: $\alpha_2 = 90º + \alpha_1$. Assim, $tg\ \alpha_2 = tg\ (90º + \alpha_1)$. Aplicando a relação trigonométrica, tg α_2 = cotg (- α_1). temos,

$$tg\alpha_2 = \frac{-1}{tg\alpha_1}$$

Portanto, $m_r . m_s = -1$.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ Nº _____ Ano: 2º EM Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria Professor (a): Marcos

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;
2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

EXERCÍCIOS

1. A reta y = mx- 5 é paralela à reta 2y = -3x + 1. Determine m.
2. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto A=(1,1) e é paralela à reta y = -2x + 1?
3. Os pontos M, N, P e Q são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Sendo M=(3,5), N=(1,2) e P=(5,1), determine o vértice Q
4. Demonstre que (r) $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$ e (s) $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}$ são retas perpendiculares
5. Determine a equação de reta s, que contém P=(2,1), e é perpendicular a reta (r) 2x – y + 2 = 0.
6. Determine as equações das alturas do triângulo ABC. Dados A=(0,-3), B=(-4,0) e C=(2,1).

5.11.2. Desenvolvimento da Atividade 8

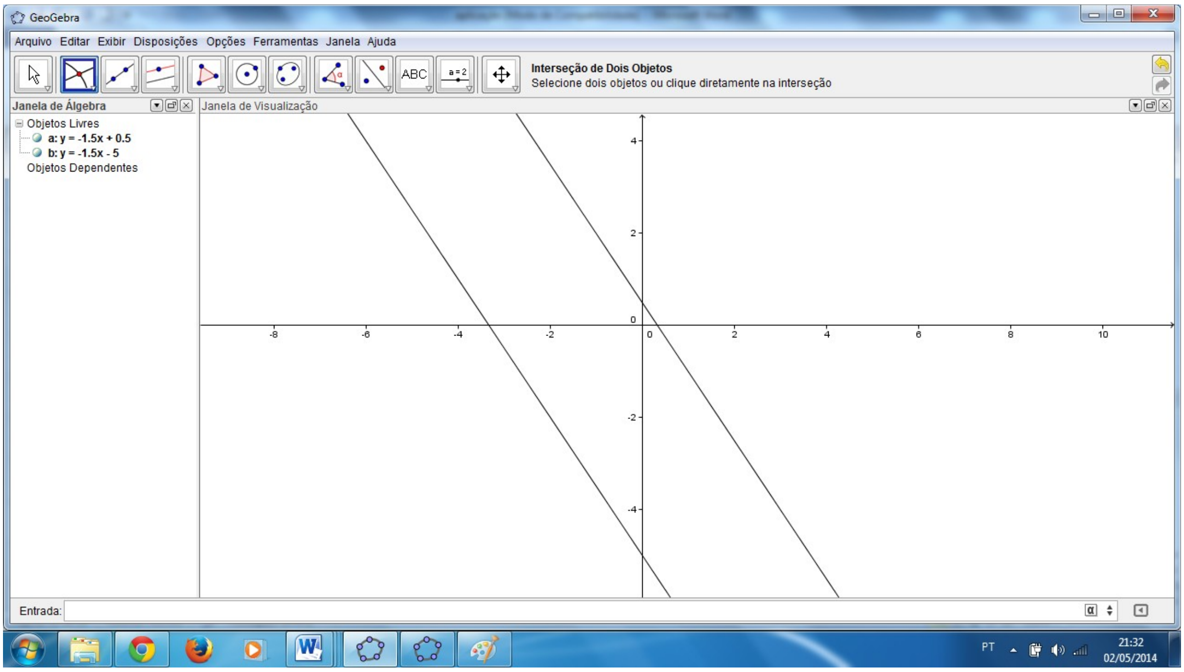
Tema	Retas paralelas e perpendiculares
Objetivo Principal	Determinar a equação de retas perpendiculares e paralela,
Objetivo Secundário	Identificar, a partir das equações de duas retas, se estas são paralelas ou perpendiculares
Tempo Previsto	4 aulas (3 horas e 20 minutos)
Material	Software GeoGebra, *Data show, Classmate*, Lousa digital

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada a reta 2y = -3x + 1.

2. Clicamos sobre a reta com o botão da direita do mouse. Sobre o menu que aparece, clicamos em <Equação y=ax+b> (forma reduzida da reta) e anotamos o coeficiente angular da reta.
3. Substituindo m na expressão y = mx- 5 pelo coeficiente angular obtido no item 2 obtemos a reta solicitada.
4. Comparamos o resultado obtido no ambiente gráfico com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 42.

Figura 42: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 8.

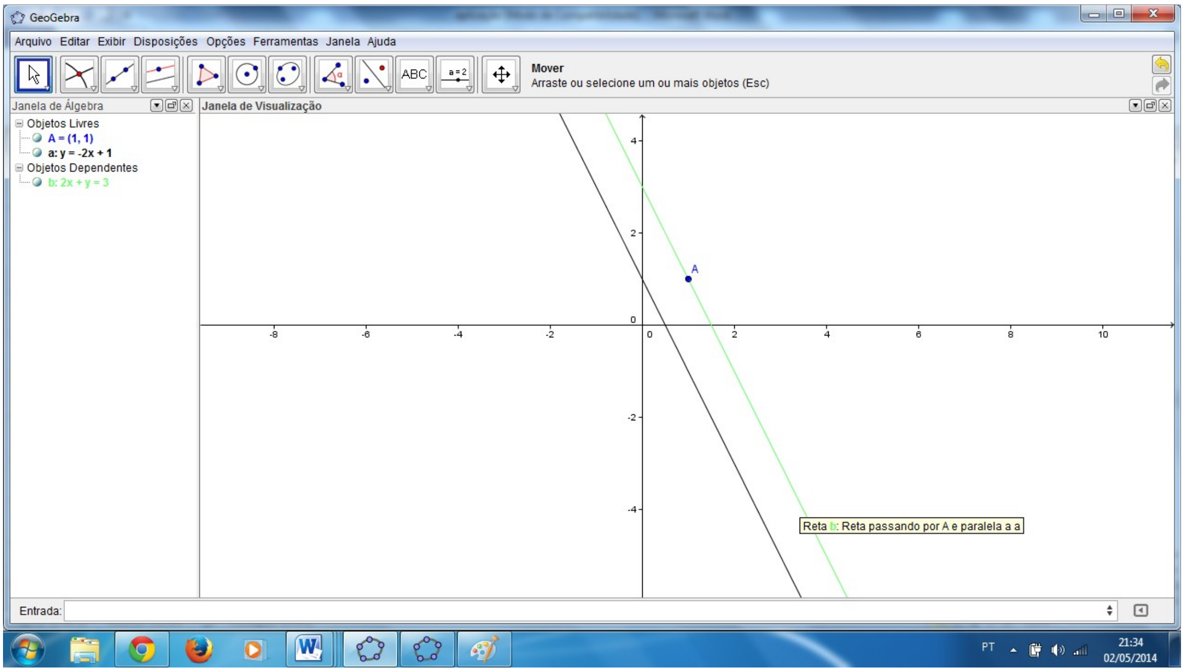


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2:</u>

1. Definimos no campo de entrada a reta y = -2x + 1.
2. Definimos no campo de entrada o ponto A=(1,1).
3. Clicamos no ícone <reta paralela>, selecionando o ponto A e a reta.
4. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 43.

Figura 43: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 8.

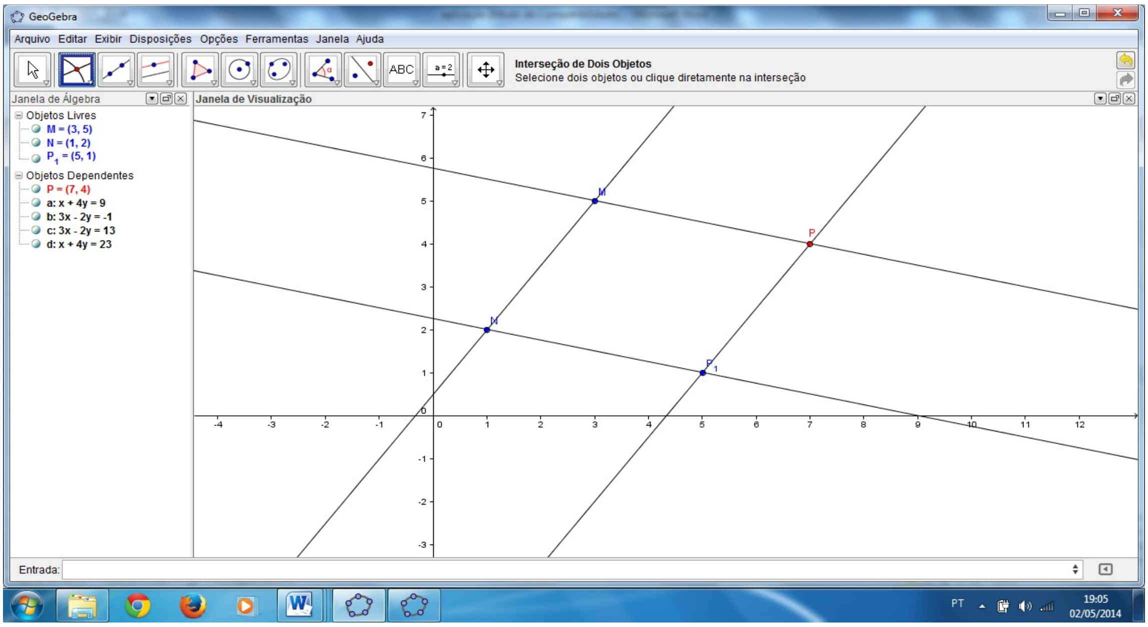


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3:</u>

1. Definimos no campo de entrada os pontos M=(3,5), N=(1,2) e P=(5,1).
2. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto M e N.
3. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto N e P.
4. Clicamos no ícone <reta paralela>, selecionando o ponto M e a reta que passa pelos pontos N e P.
5. Clicamos no ícone <reta paralela>, selecionando o ponto P e a reta que passa pelos pontos M e N
6. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas retas determinando assim o ponto Q
7. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 44.

Figura 44: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade 8.

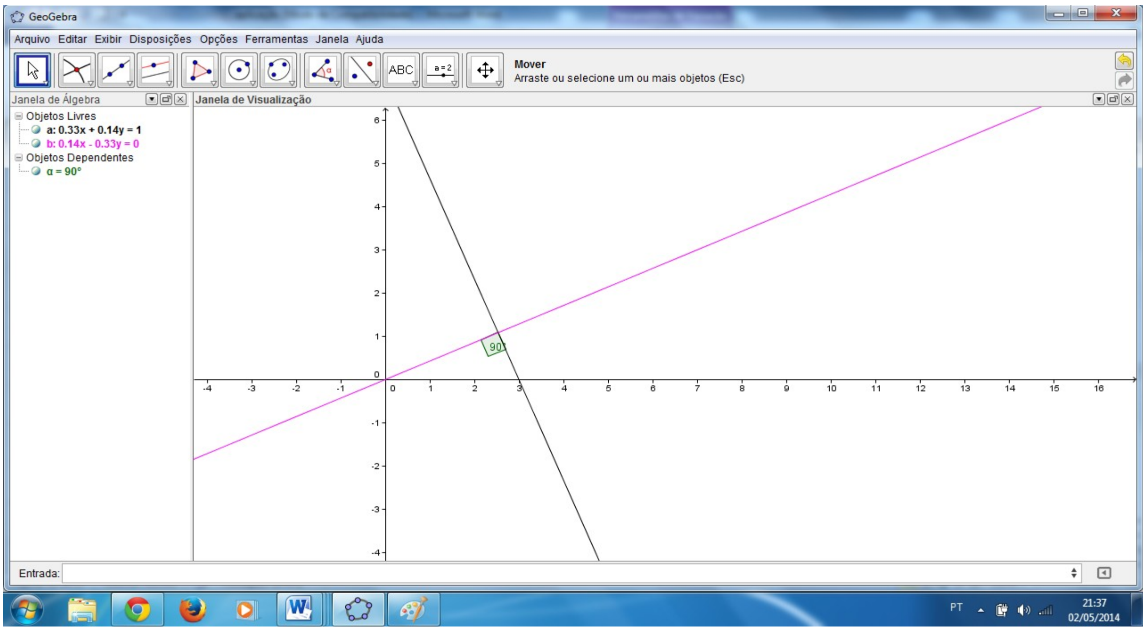


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>:

1. Definimos no campo de entrada a reta r= $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$.
2. Definimos no campo de entrada a reta s= $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}$.
3. Clicamos no ícone < ângulo>, selecionamos as retas r e s.
4. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 45.

Figura 45: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 8.

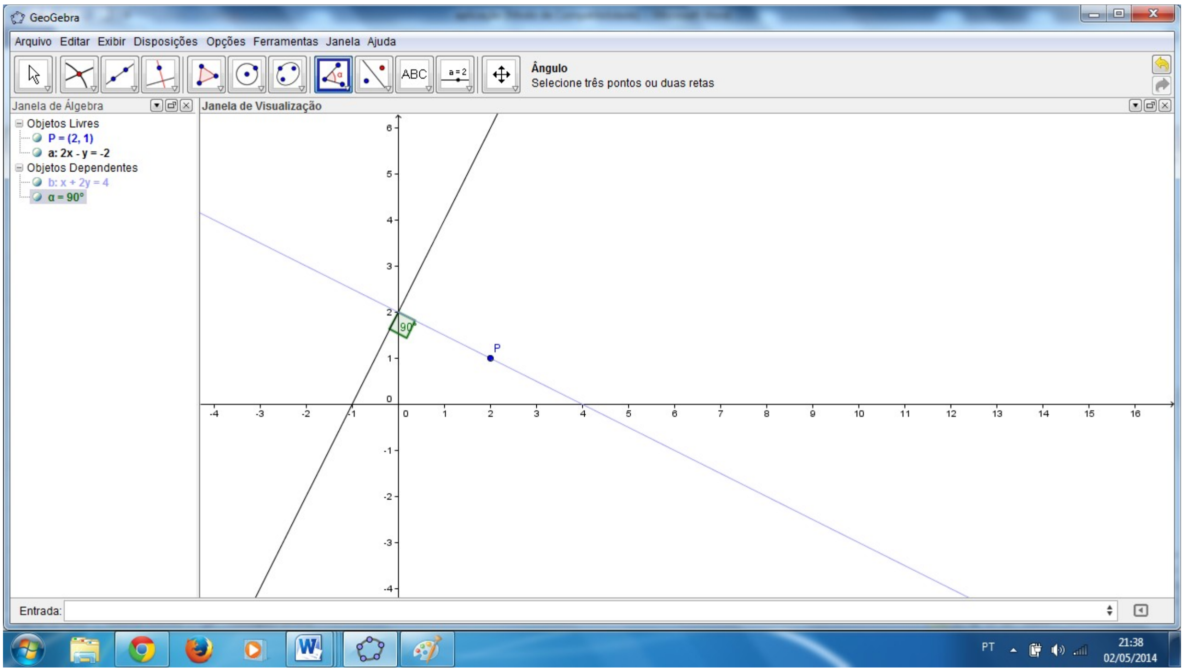


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 5:

1. Definimos no campo de entrada a reta r= 2x – y + 2 = 0.
2. Definimos no campo de entrada o ponto P=(2,1).
3. Clicamos no ícone < reta perpendicular>, selecionando a reta r e o ponto P.
4. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 46.

Figura 46: Resolução no GeoGebra do exercício 5 - Atividade 8.

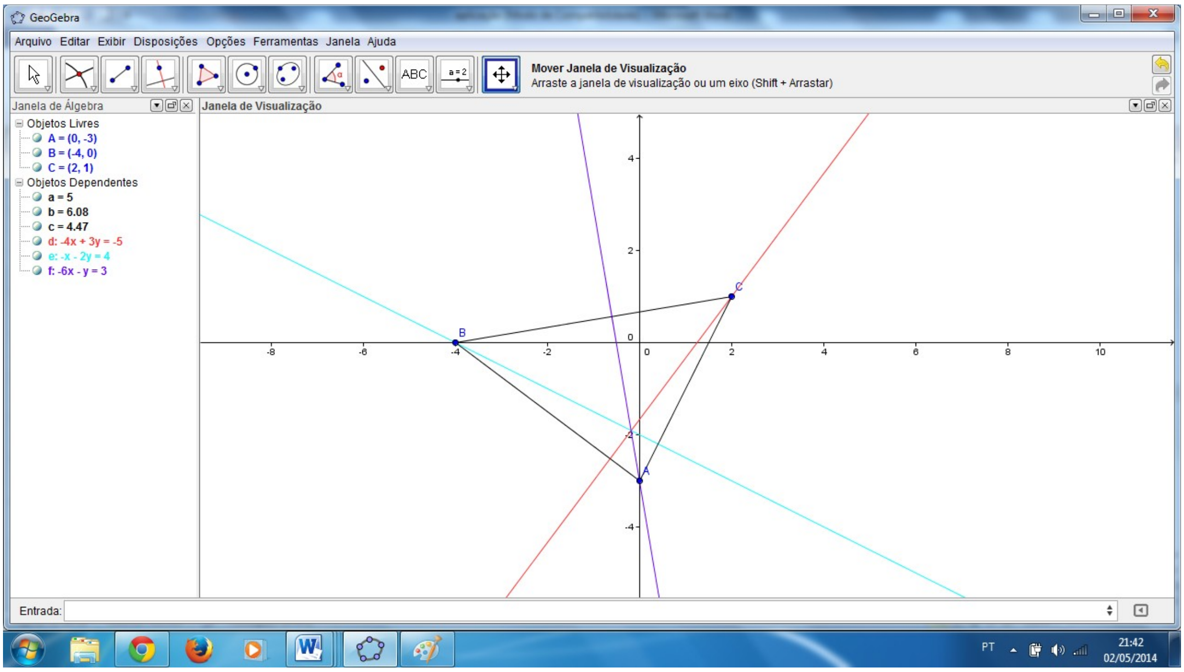


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 6:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(0,-3), B=(-4,0) e C=(2,1).
2. Clicamos no ícone < segmento>, selecionando os pontos A e B.
3. Clicamos no ícone < segmento>, selecionando os pontos A e C.
4. Clicamos no ícone < segmento>, selecionando os pontos B e C.
5. Clicamos no ícone <reta perpendicular>, selecionando o ponto A e o segmento BC
6. Clicamos no ícone <reta perpendicular>, selecionando o ponto B e o segmento AC
7. Clicamos no ícone <reta perpendicular>, selecionando o ponto C e o segmento AB
8. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 47.

Figura 47: Resolução no GeoGebra do exercício 6 - Atividade 8.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.11.3. Avaliação da Atividade 8

A atividade foi realizada com sucesso, sem maiores problemas por parte dos estudantes. Destacamos o seguinte comentário de um estudante.

> Gostei dos exercícios, o programa é muito bom e útil. Tem tudo que você precisa e mostra simplificadamente todas as respostas que você procura. Obrigada professor, espero que esteja tudo certo! Bom trabalho corrigindo. Fonte: Arquivo do pesquisador.

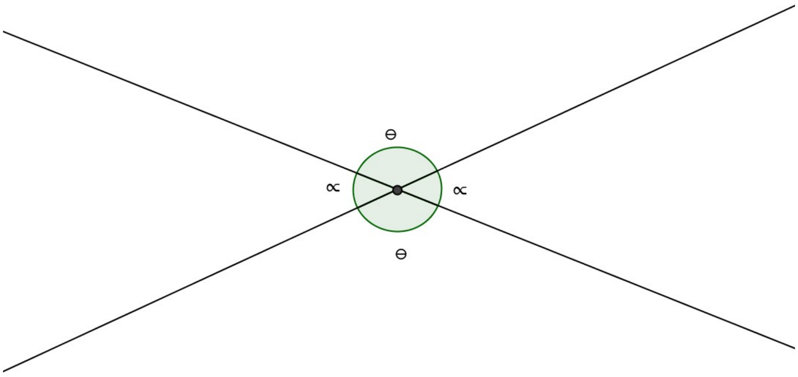
5.12. Atividade 9: Ângulo entre retas

Os ângulos formados entre duas retas são dois a dois congruentes pois são opostos pelo vértice. O GeoGebra facilmente calcula o ângulo entre duas retas. No entanto, para determinarmos o ângulo entre duas retas a partir dos seus respectivos coeficientes angulares, teremos que fazer uso da calculadora científica pois será necessário o cálculo do arco tangente. Isso será melhor compreendido quando do desenvolvimento da atividade.

5.12.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 9

Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois congruentes opostos pelo vértice.

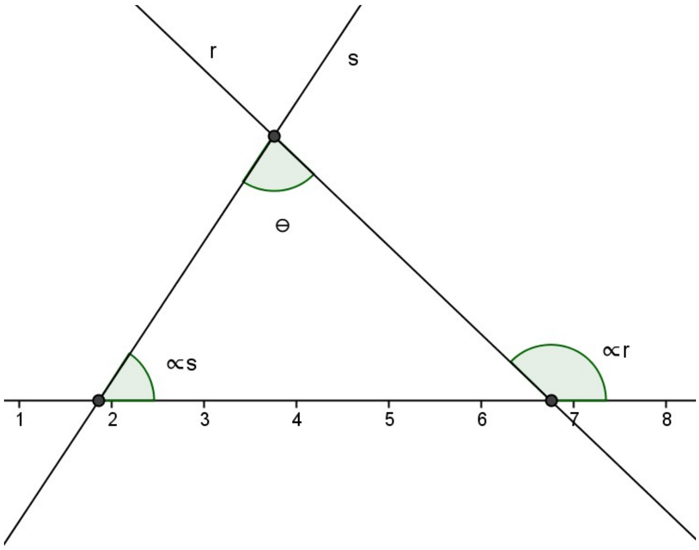
Figura 48: Ângulos formados por retas concorrentes.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Consideremos duas retas concorrentes r e s que fazem entre si um ângulo θ. Sejam α_r e α_s os ângulos formados entre as retas r e s, respectivamente, com o eixo das abscissas. Ver figura 49.

Figura 49: Ângulos formados pelas retas concorrentes e o eixo das abscissas.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Observando o triângulo formado pelas retas r e s e o eixo das abscissas temos que:

$$\theta+\alpha_r+180°-\alpha_s=180°$$ ou seja, $$\theta=\alpha_r-\alpha_s \cdot$$

Assim, $tg\theta=tg(\alpha_r-\alpha_s)$. Aplicando a relação trigonométrica da tangente da diferença entre arcos segue que:

$$tg\theta=\frac{tg\alpha_r-tg\alpha_s}{1+tg\alpha_r \ . \ tg\alpha_s} \cdot$$

Substituindo as tangentes dos ângulos α_r e α_s pelos respectivos coeficientes angulares obtemos:

$$tg\theta=\frac{m_r-m_s}{1+m_r.m_s} \cdot$$

Portanto, o ângulo θ formado entre as retas r e s é determinado a partir da equação:

$$\theta=arctg\frac{m_r-m_s}{1+m_r.m_s} \cdot$$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ Nº ____ Ano: 2° EM Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria Professor (a): Marcos

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;
2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

EXERCÍCIOS

1. Qual é o valor da tangente do ângulo formado pelas retas 3x + 2y + 2 = 0 e –x + 2y + 5 = 0.

2. Dados os pontos A=(4,-1), B=(2,-1) e C=($5+\sqrt{3},\sqrt{3}$), calcule os ângulos internos do triângulo ABC.

5.12.2. Desenvolvimento da Atividade 9

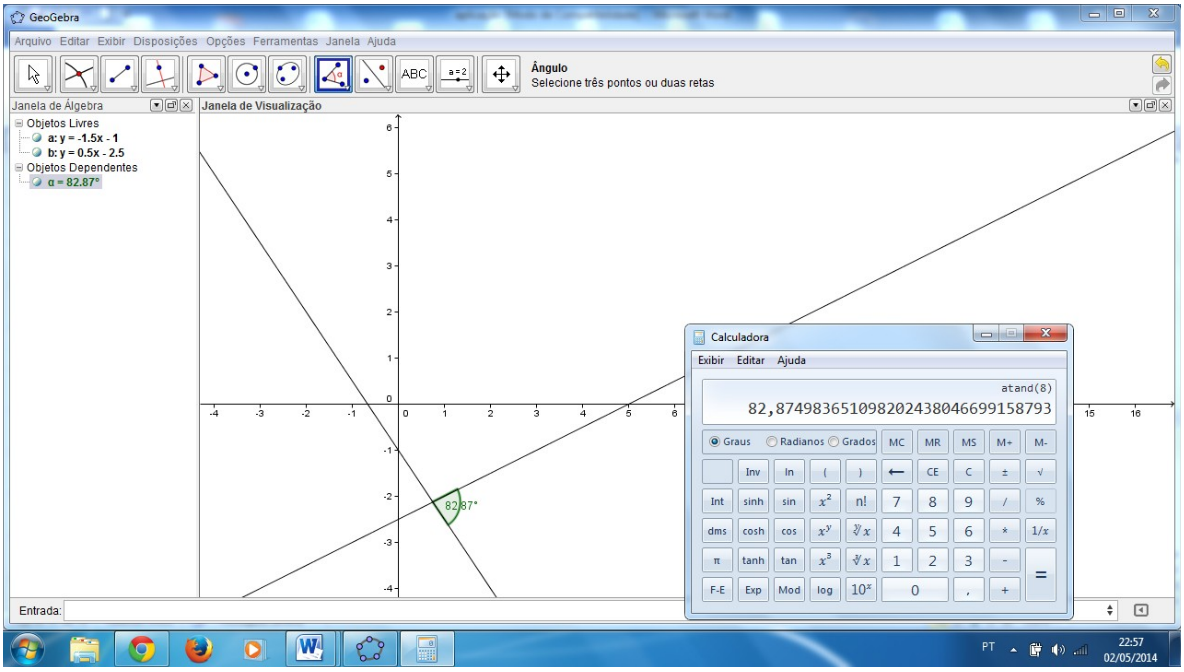
Tema	Ângulos entre retas
Objetivo Principal	Determinar a tangente do ângulo entre duas retas
Objetivo Secundário	Verificar os casos de retas concorrentes
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos)
Material	Software GeoGebra, Data show, Classmate, Lousa digital

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1:

1. Definimos no campo de entrada a reta –x + 2y + 5 = 0.

2. Definimos no campo de entrada a reta 3x + 2y + 2 = 0.
3. Clicamos no ícone < ângulo>, selecionamos as retas.
4. Clicamos sobre uma das retas com o botão da direita do mouse. Sobre o menu que aparece, clicamos em <Equação y=ax+b> (forma reduzida da reta) e anotamos o coeficiente angular desta reta. Repetimos o procedimento para outra reta.
5. Utilizando uma calculadora determinamos o valor do arco da tangente do ângulo dado pela expressão $\theta = arctg\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}$.
6. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 50.

Figura 50: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 9.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

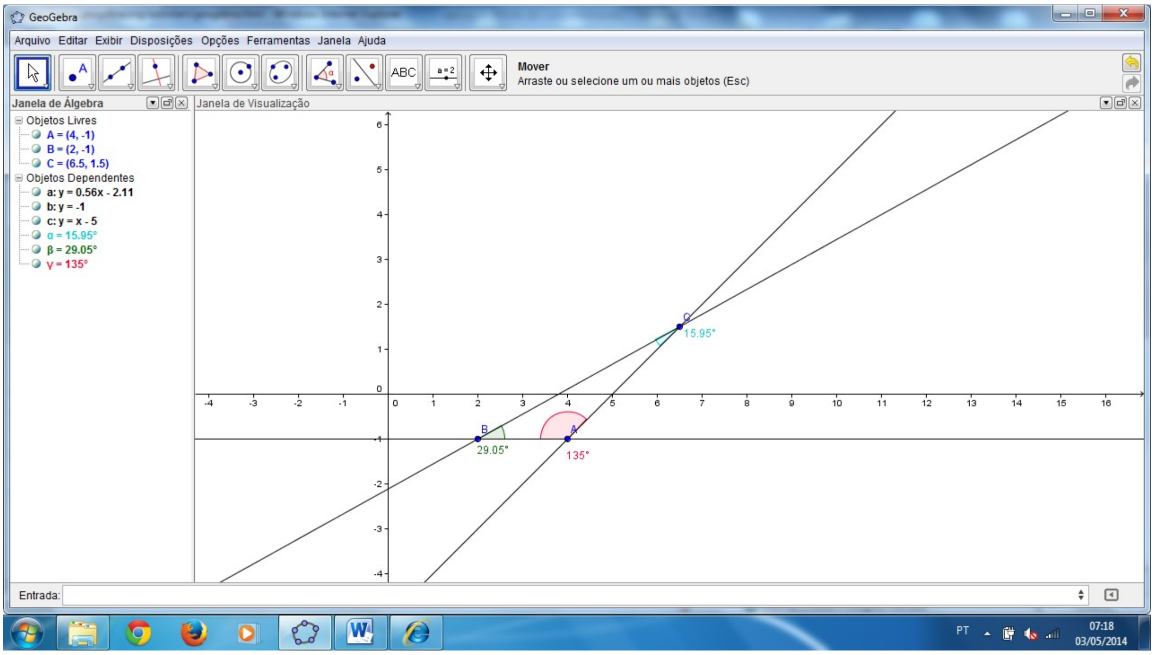
<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A= (4,-1), B= (2,-1) e C= ($5+\sqrt{3}, \sqrt{3}$).
2. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto A e B.
3. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto A e C.
4. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto B e C.
5. Clicamos no ícone < ângulo>, determinando os ângulos de cada vértice do triângulo.
6. Clicamos sobre uma das retas com o botão da direita do mouse. Sobre o menu que

aparece, clicamos em <Equação y=ax+b> (forma reduzida da reta) e anotamos o coeficiente angular desta reta. Repetimos o procedimento para as demais retas.

7. Utilizando uma calculadora determinamos o valor do arco da tangente do ângulo formado por cada par de retas, dado pela expressão $\theta = arctg \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}$. Obtemos assim, cada um dos ângulos internos do triângulo.
8. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 51.

Figura 51: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 9.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.12.3. Avaliação da Atividade 9

Nesta atividade a maior dificuldade entre os estudantes foi no momento de verificar as respostas no exercício 1. Para fazer a verificação do valor do ângulo foi necessário utilizar uma calculadora para aplicar a operação arco tangente de um ângulo pois determinou-se algebricamente o valor da tangente do ângulo. No GeoGebra determinamos o ângulo procurado de maneira imediata. Observamos no comentário do estudante abaixo que, por não ter encontrado uma resposta idêntica ele acreditou ter errado o exercício.

> Com o GeoGebra, o estudo fica bem mais fácil e dinâmico, é um ótimo meio até para tirar dúvidas e para correção. A única coisa que me interferiu de resolver os exercícios por inteiro, foi a falta de domínio sobre o programa, infelizmente não

aprendi a mexer no mesmo por inteiro. De qualquer jeito, foi uma ótima experiência! Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.13. Atividade 10: Distância entre ponto e reta

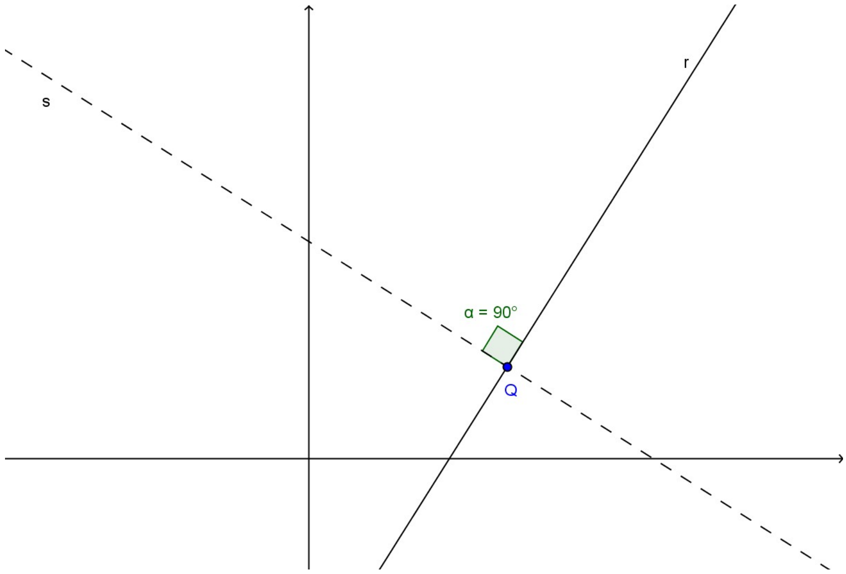
A menor distância entre dois pontos é o comprimento do segmento de reta que os liga. A distância entre um dado ponto e uma reta dada pode ser definida como o mínimo entre as distâncias do ponto dado a um ponto qualquer da reta. Verificamos que este mínimo é atingido quando o segmento de reta que liga o ponto a um ponto da reta forma um ângulo reto com a reta dada.

5.13.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 10

A distância entre um ponto dado e uma reta é calculada medindo o comprimento do segmento de reta que liga o ponto a um determinado ponto da reta. Este segmento deverá formar com a reta dada um ângulo reto (90º). Para estabelecer a fórmula que fornece a distância entre o ponto e a reta necessitamos da equação geral da reta e da coordenada do ponto.

Seja P um ponto não pertencente a reta r. Seja s a reta perpendicular a reta r passando pelo ponto P. A reta s intercepta a reta r no ponto Q. A distância do ponto P a reta r é dada pelo comprimento do segmento PQ. Ver figura 52.

Figura 52: Distância entre ponto e reta.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Seja a reta r de equação $ax+by+c=0$ com coeficiente angular $\frac{-a}{b}$. A reta s, perpendicular a r passando pelo ponto $P=(x_0, y_0)$, tem equação dada por $bx-ay+(ay_0-bx_0)=0$. O ponto de interseção entre as duas retas, r e s, será a solução do sistema linear:

$$\begin{matrix} ax+by=-c \\ bx-ay=bx_0-ay_0 \end{matrix}.$$

Resolvendo o sistema acima pelo Método de Cramer temos que as coordenadas do ponto de interseção Q serão dadas por:

$$Q=\left(\frac{ac-b(bx_0-ay_0)}{-(a^2+b^2)}, \frac{bc+a(bx_0-ay_0)}{-(a^2+b^2)}\right).$$

A distância entre os pontos P e Q será dada por

$$d_{P,r}=\sqrt{\frac{(ac-b(bx_0-ay_0)+x_0(a^2+b^2))^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{(bc+a(bx_0-ay_0)+y_0(a^2+b^2))^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Portanto, $d_{P,r}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR — Colégio Veritas

Nome: ______________________ **Nº** ____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Calcule a distância do ponto P=(2,0) à reta r:2x + 3y – 5 = 0.
2. Calcular o comprimento AD, do triângulo de vértices A=(-3,0), B=(0,0) e C=(6,8) sendo D o pé da altura do vértice A.
3. Calcule a distância entre as retas paralelas r: 3x+ 4y- 13 = 0 e s: 3x + 4y + 7 = 0.

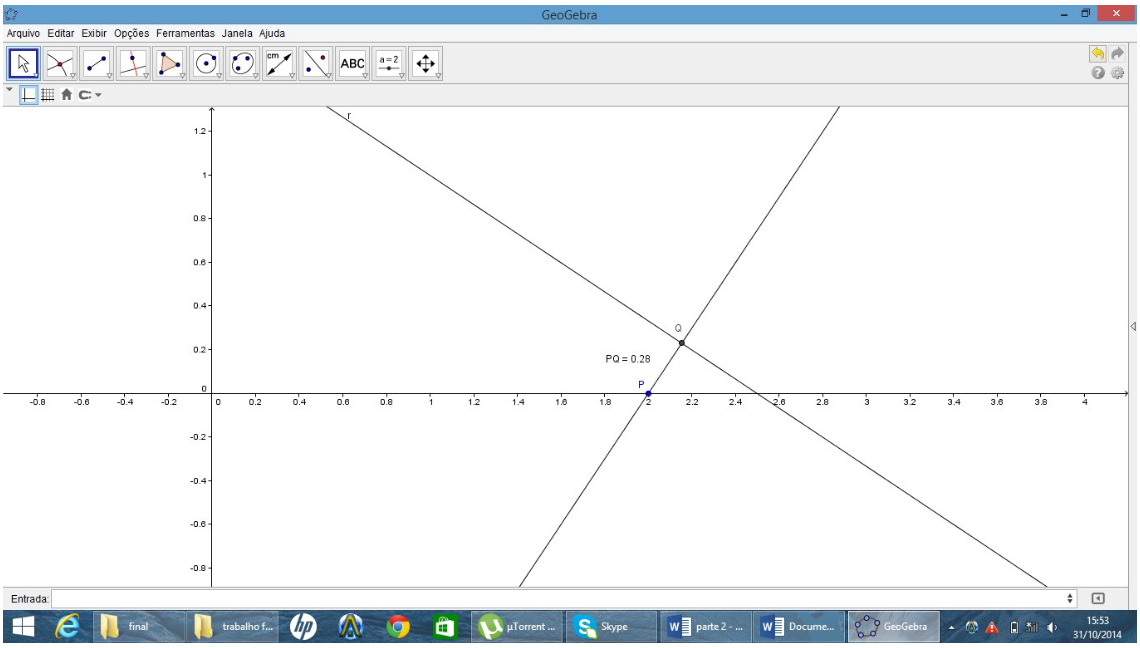
5.13.2. Desenvolvimento da Atividade 10

Tema	Distância de ponto a reta.
Objetivo Principal	Determinar a distância entre ponto e reta.
Objetivo Secundário	Visualizar que a distância entre ponto e reta é sempre um segmento perpendicular a reta.
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, *Datashow, Classmate*, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1:</u>

1. Definimos no campo de entrada o ponto P=(2,0).
2. Definimos no campo de entrada a reta r: 2x + 3y – 5 = 0.
3. Clicamos no ícone <reta perpendicular> e selecionamos o ponto P e a reta r, obtendo a reta s.
4. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos> e selecionamos as retas r e s, obtendo o ponto Q.
5. Clicamos no ícone <distância, comprimento ou perímetro> e selecionamos os pontos P e Q.
6. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 53.

Figura 53: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 10.

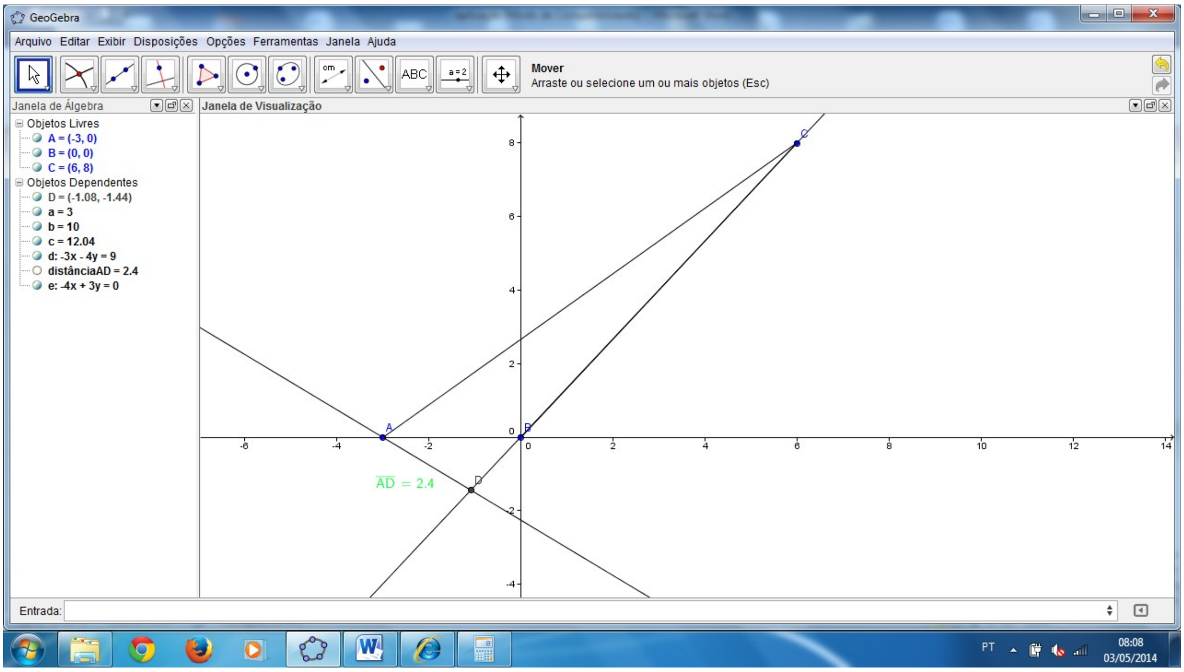


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(-3,0), B=(0,0) e C=(6,8).
2. Clicamos no ícone < reta definida por dois pontos>, selecionando o ponto B e C.
3. Clicamos no ícone < reta perpendicular>, selecionando o ponto A e a reta que passa por BC.
4. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas retas determinando o ponto D.
5. Clicamos no ícone <distância, comprimento, perímetro >, selecionando os pontos A e D.
6. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 54.

Figura 54: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 10.



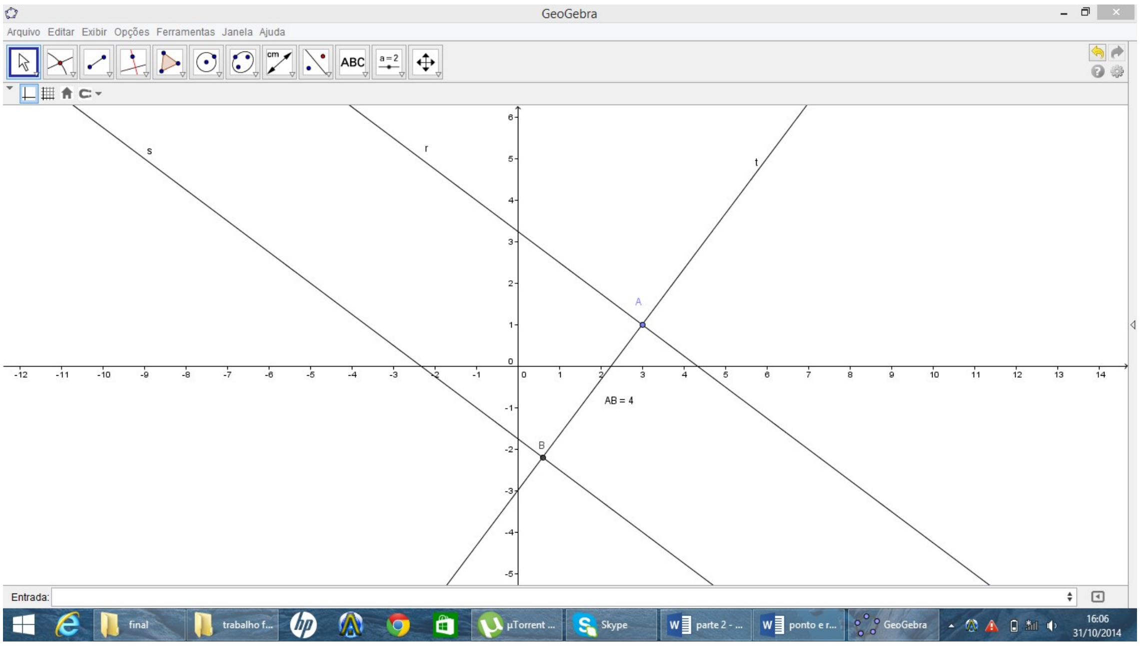
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>:

1. Definimos no campo de entrada a reta r: 3x+ 4y- 13 = 0.
2. Definimos no campo de entrada a reta s: 3x + 4y + 7 = 0.
3. Clicamos em <ponto> e selecionamos um ponto qualquer na reta r, obtendo o ponto A.
4. Clicamos no ícone < reta perpendicular>, selecionando o ponto A e a reta s, determinando a reta t.

5. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as retas s e t, determinando o ponto B.
6. Clicamos no ícone <distância, comprimento, perímetro >, selecionando os pontos A e B.
7. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 55.

Figura 55: Resolução no GeoGebra do exercício 3- Atividade 10.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.13.3. Avaliação da Atividade 10

Os estudantes não enfrentaram dificuldades em realizar esta atividade. As dúvidas que surgiram vieram quando da resolução algébrica dos exercícios.

Destacamos o seguinte comentário de um estudante:

> É mais difícil fazer os exercícios algebricamente do que utilizando o GeoGebra. Fonte: Arquivo do pesquisador.

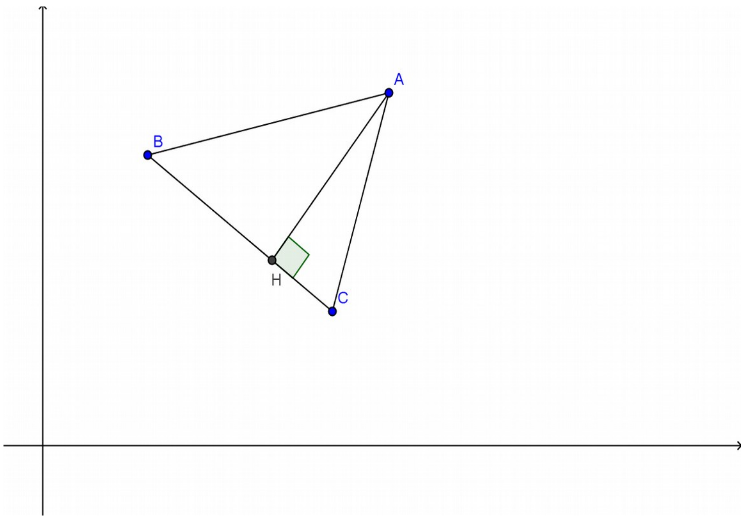
5.14. Atividade 11: Área de um triângulo

Dados três pontos distintos não colineares. Considerando os segmentos que unem cada par de pontos iremos determinar uma figura plana denominada triângulo. Os três pontos serão chamados de vértices do triângulo. A região delimitada pela figura define o que chamamos de área do triângulo. Para calcular a área desse triângulo de maneira simples e rápida faremos uso do conceito de determinante de uma matriz 3x3 formada pelas coordenadas dos vértices do triângulo mais uma coluna sendo todos os elementos unitários (igual a 1).

5.14.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 11

Considere três pontos distintos não colineares, $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ e $C=(x_3, y_3)$ conforme a figura 56.

Figura 56: Área do triângulo.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Sabemos que a área do triângulo é dada por

$$A=\frac{b.h}{2} ,$$

ou seja,

$$A=\frac{BC.AH}{2} . \qquad (1)$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos temos que:

$$BC=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} .$$

Por outro lado, a equação geral da reta que contém BC é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \underbrace{|y_2 - y_3|}_{a} x + \underbrace{|x_3 - x_2|}_{b} y + \underbrace{|x_2 y_3 - x_3 y_2|}_{c} = 0 \quad .$$

A distância do ponto A à reta

$$\left.\begin{matrix} A = (x_1, y_1) \\ ax + by + c = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow d = \left| \frac{a x_1 + b y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Então:

$$AH = d = \left| \frac{(y_2 - y_3) x_1 + (x_3 - x_2) y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \right|$$

Substituindo em (1) temos:

$$A = \frac{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \cdot \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2} \quad .$$

Logo:

$$A = \frac{1}{2} . |D| ,$$

sendo

$$|D| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad .$$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ______ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Determine a área do triângulo ABC, onde A, B e C são, respectivamente os pontos médios dos segmentos MN, NP e PM, sendo M=(1,-5), N=(3,3) e

P=(9,-5).

2. Calcule a área do quadrilátero ABCD, dados A=(0,0), B=(4,-2), C=(6,8) e D=(0,4).
3. Determine y de modo que o triângulo de vértices A=(1,4), B=(4,1) e C=(0,y) tenha área 6.

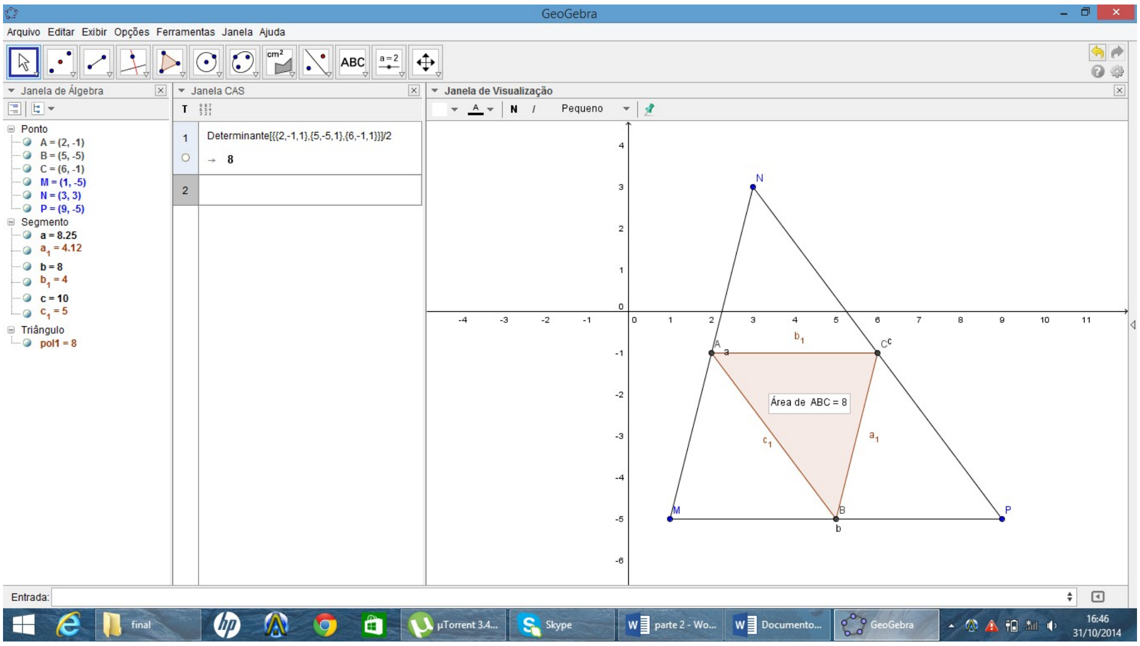
5.14.2. Desenvolvimento da Atividade 11

Tema	Área de um triângulo.
Objetivo Principal	Calcular a área de um triângulo a partir dos vértices das coordenadas do vértice.
Objetivo Secundário	Identificar o processo do cálculo da área de um triângulo dado os vértices.
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, *Datashow, Classmate*, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1:</u>

1. Definimos no campo de entrada os pontos M=(1,-5), N=(3,3) e P=(9,-5).
2. Clicamos no ícone <segmento>, selecionando os pontos M e N obtendo o segmento a.
3. Clicamos no ícone <segmento>, selecionando os pontos M e P obtendo o segmento b.
4. Clicamos no ícone <segmento>, selecionando os pontos P e N obtendo o segmento c.
5. Clicamos no ícone <ponto médio ou centro>, selecionando os segmentos a, b e c determinando os pontos A, B e C respectivamente.
6. Na janela CAS digitamos: Determinante[{{2,-1,1},{5,-5,1},{6,-1,1}}]/2 obtendo o valor da área do triângulo.
7. De maneira alternativa, clicamos no ícone <polígono>, selecionando os pontos A, B e C.
8. Clicamos no ícone <área>, selecionando o polígono ABC.
9. Comparamos os resultados obtidos com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 57.

Figura 57: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 11.

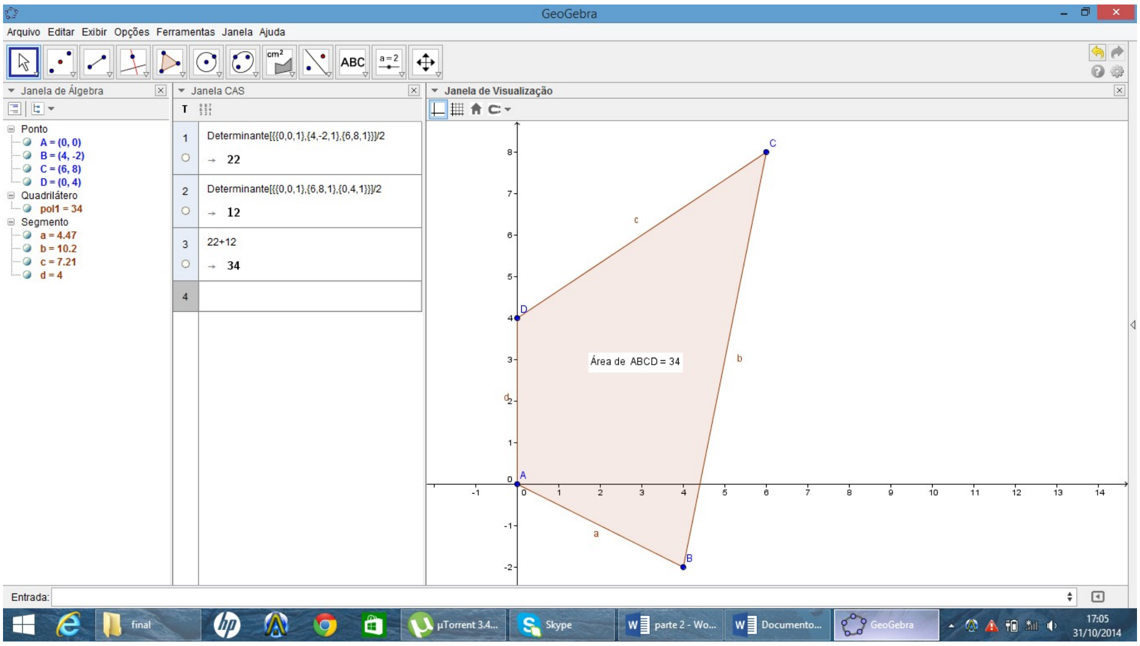


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(0,0), B=(4,-2), C=(6,8) e D=(0,4).
2. Clicamos no ícone <polígono>, selecionando os pontos A, B, C e D.
3. Verificamos que o polígono definido pode ser dividido em dois triângulos. Assim, na janela CAS digitamos: Determinante[{{0,0,1},{4,-2,1},{6,8,1}}]/2 obtendo o valor da área do triângulo ABC.
4. Na janela CAS digitamos: Determinante[{{0,0,1},{6,8,1},{0,4,1}}]/2 obtendo o valor da área do triângulo ACD.
5. De maneira alternativa, clicamos no ícone <Área>, selecionando o polígono ABCD.
6. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 58.

Figura 58: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 11.

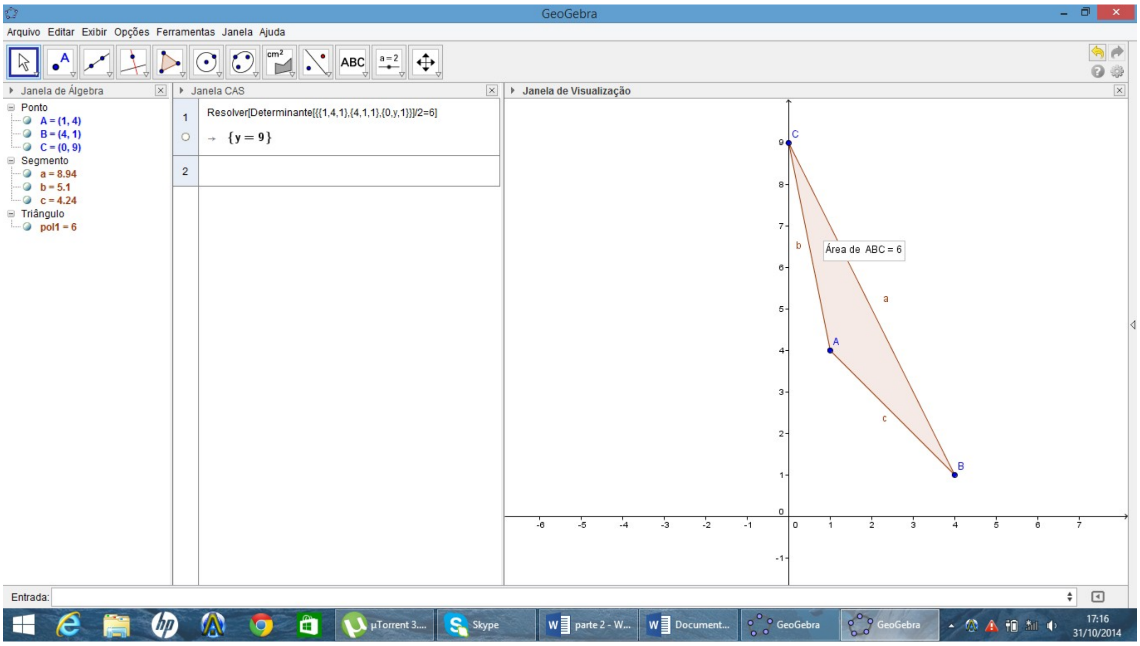


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos A=(1,4), B=(4,1).
2. Na janela CAS digitamos: Resolver[Determinante[{{1,4,1},{4,1,1},{0,y,1}}]/2=6] obtendo o valor y que satisfaz o problema.
3. De maneira alternativa, após calcular algebricamente o valor de C, defina o ponto C na caixa de entrada.
4. Clicamos no ícone <área>, selecionando o polígono ABC.
5. Se o resultado encontrado for igual a 6 os cálculos estão corretos. Ver figura 59.

Figura 59: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 11.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.14.3. Avaliação da Atividade 11

Os estudantes não encontraram grandes dificuldades na realização da atividade. O exercício 3 apresentou-se como o mais difícil pois havia a necessidade de utilizar um valor que fora determinado após os cálculos algébricos. Em geral, os estudantes gostaram da atividade, acharam simples e interessante pois permitiu conferir suas respostas.

5.15. Atividade complementar 2 (Atividade 7-11)

Para finalizar essa sequência de atividades (7 a 11), os estudantes resolveram quatro exercícios como tarefa de casa e enviaram para o professor via e-mail. Segue a atividade realizada por um dos estudantes.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ______ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Dado um ponto P=(3,5) e uma reta r:x + 5y + 3 = 0. Qual a equação reduzida das retas que passam pelo ponto P sendo uma paralela e outra perpendicular a reta r.

2. São dados os pontos A=(3,0), B=(10,1) e M=(6,k). Determine os valores de k, para os quais o ângulo BÂM mede 45º.

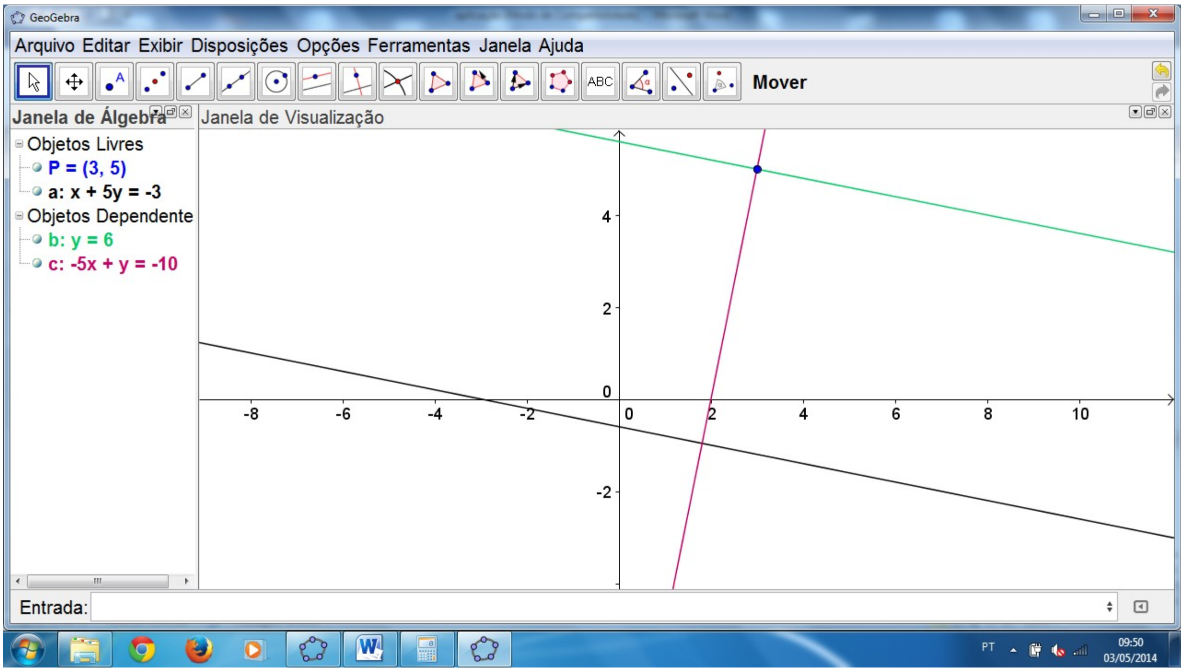
3. Obtenha uma reta paralela a r:x – y + 7 = 0 que dista 3 unidades do ponto C=(2,2).

4. Os vértices de um triângulo são A=(1,0), B=(3,5) e C=(-1,1).

   (a) Obtenha o baricentro do triângulo.

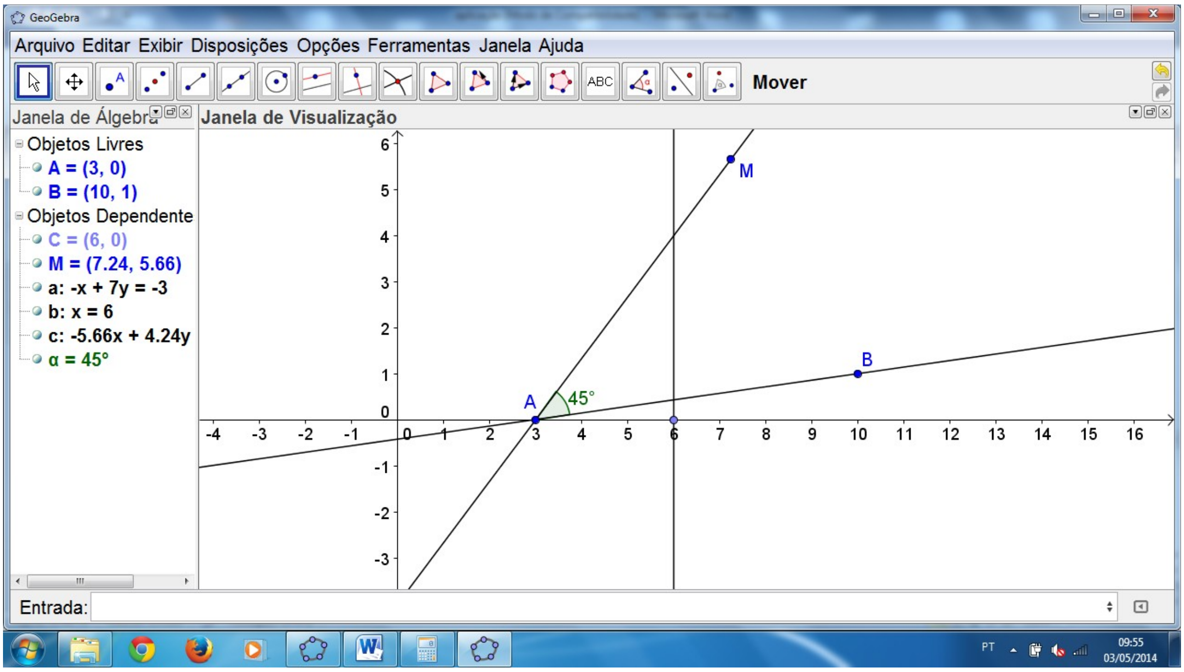
   (b) Mostre que os triângulos ABG, ACG e BCG tem a mesma área.

Figura 60: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade Complementar.



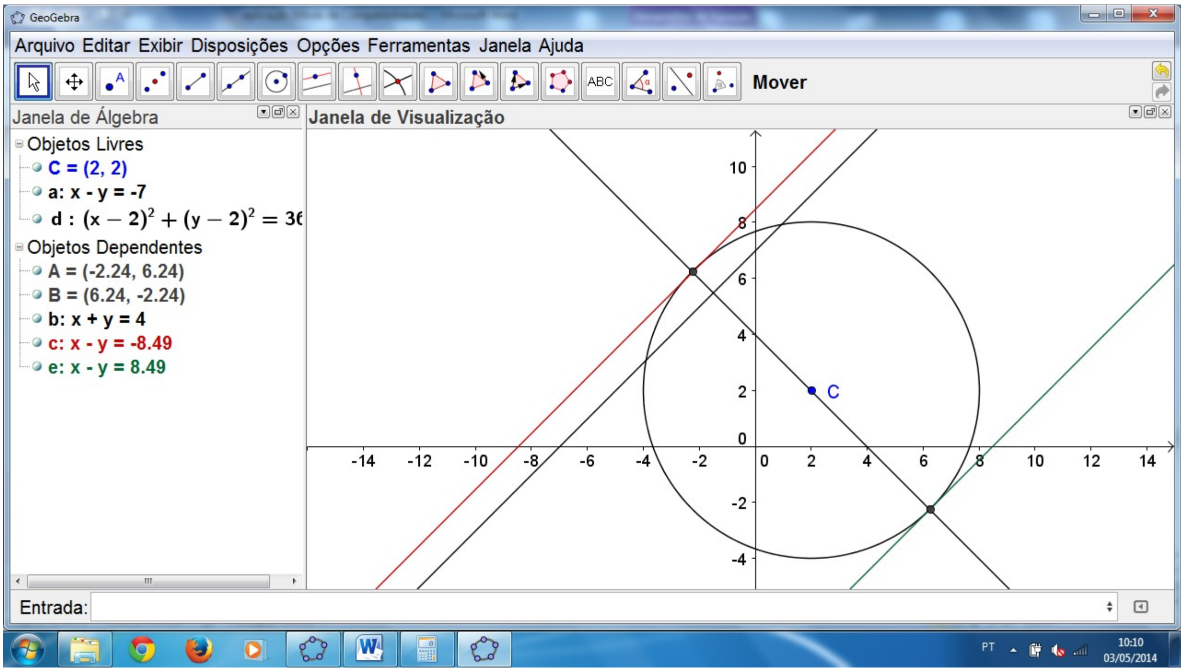
Fonte: Elaborada por um estudante. Arquivo do Pesquisador.

Figura 61: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade Complementar.



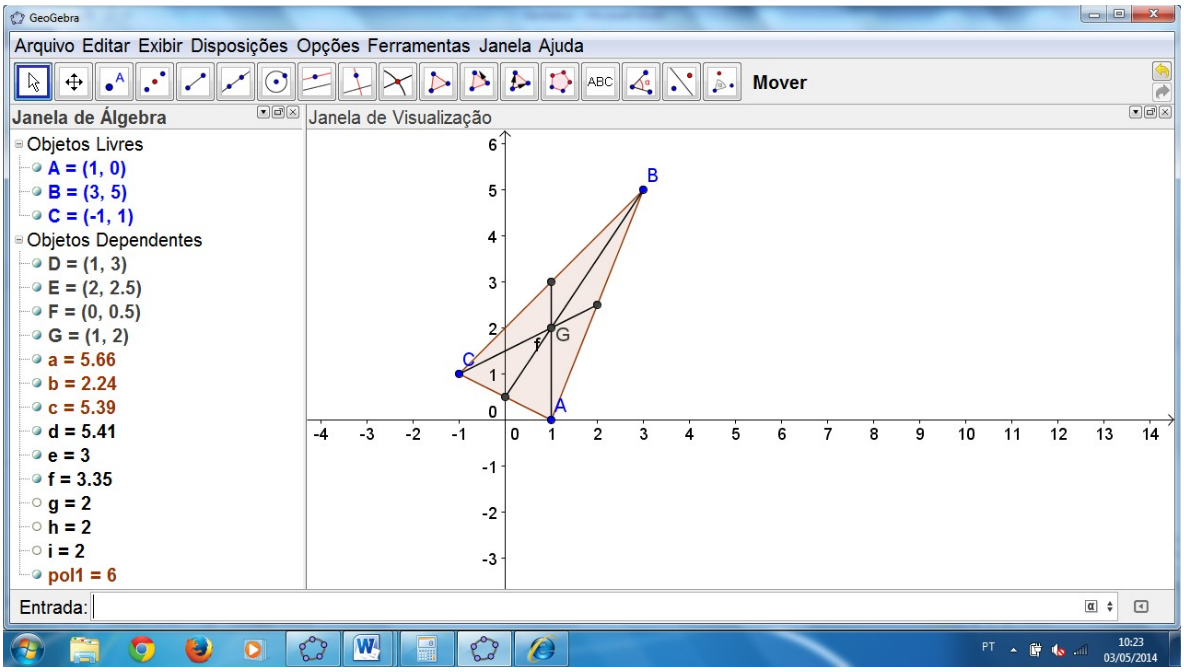
Fonte: Elaborada por um estudante. Arquivo do Pesquisador.

Figura 62: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade Complementar.



Fonte: Elaborada por um estudante. Arquivo do Pesquisador.

Figura 63: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade Complementar.



Fonte: Elaborada por um estudante. Arquivo do Pesquisador.

5.15.1. Avaliação da Atividade Complementar

O exercício 3 desta atividade teve como objetivo uma introdução ao próximo conteúdo que é o estudo da circunferência. Alguns estudantes se manifestaram relatando que a atividade foi simples. Isto se deve principalmente ao fato de que muitos já dominavam o software.

Destacamos os seguintes comentários de dois estudantes:

> Tive dificuldade apenas no exercício 3, mas consegui fazer. Fonte: Arquivo do pesquisador.
>
> Após fazer bastante, atividades no GeoGebra, não tive dificuldades em realizar as tarefas. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.16. Atividade 12: Circunferência

O objetivo desta seção é o estudo da circunferência. Ao final, o estudante deverá compreender a formulação algébrica da equação da circunferência e suas aplicações.

5.16.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 12

Definição: *Dados um ponto C = (a,b) e um número real positivo r. O conjunto de pontos do plano que estão à distância r do ponto C será denominado de circunferência e será indicado por λ. O ponto C será chamado de centro da circunferência e o valor r de raio da circunferência.*

A equação da circunferência λ será aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos P=(x,y) do plano que pertencem à circunferência. É imediato que P=(x,y) $\in$ λ se, e somente se, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$. Assim,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r \quad .$$

A equação acima é denominada equação reduzida da circunferência.

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência, encontramos a equação normal da circunferência:

$$x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-r^2\right)=0$$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Colégio Veritas

Nome: ______________________ Nº ______ Ano: 2° EM Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria Professor (a): Marcos

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;
2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

EXERCÍCIOS

1. Qual é a equação da circunferência de centro C=(2,-1) que passa por P=(3,3)?
2. Qual é a equação da circunferência de centro C=(-2,5) que é tangente ao eixo dos y ?
3. Forneça a equação reduzida da circunferência $x^2 + y^2 – 3x – 5y – 7=0$.
4. Ache a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 1$ e é perpendicular à reta $3x – 2y + 7 =0$.

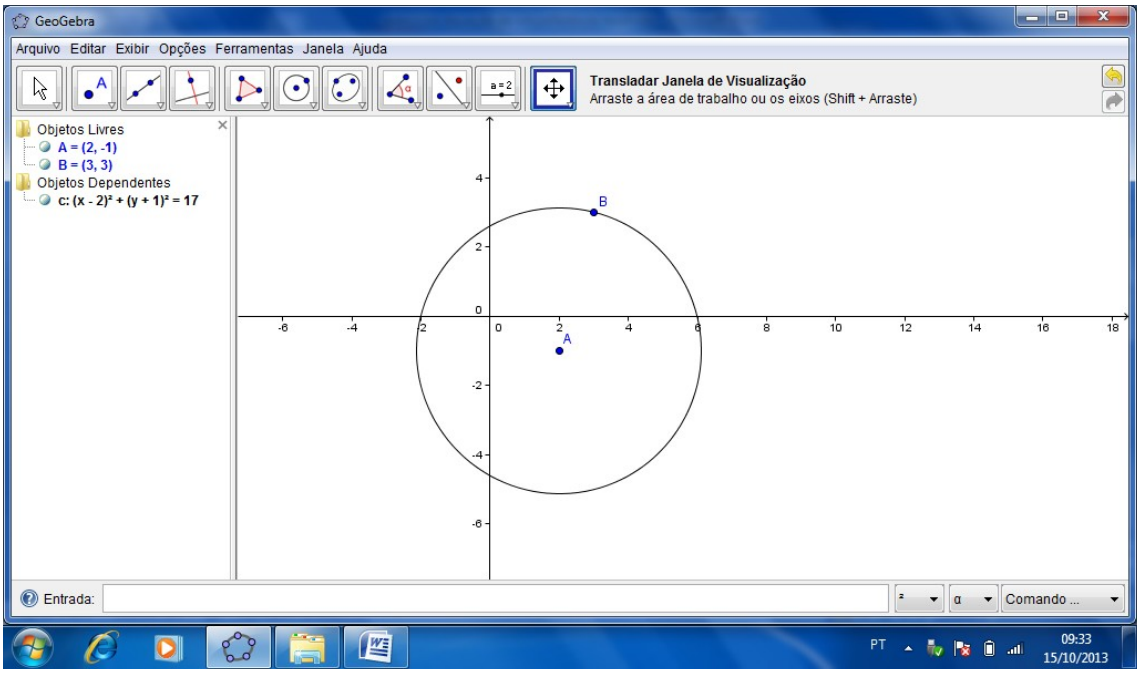
5.16.2. Desenvolvimento da Atividade 12

Tema	Equação da circunferência.
Objetivo Principal	Estudar as equações da circunferência.
Objetivo Secundário	Identificar e desenvolver a equações de uma circunferência (equação normal e geral).
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, *Data show, Classmate*, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

1. Definimos no campo de entrada os pontos C=(2,-1) e P=(3,3).
2. Clicamos no ícone <círculo dados centro e um de seus pontos> e selecionamos os pontos C e P.
3. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 64.

Figura 64: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 12.



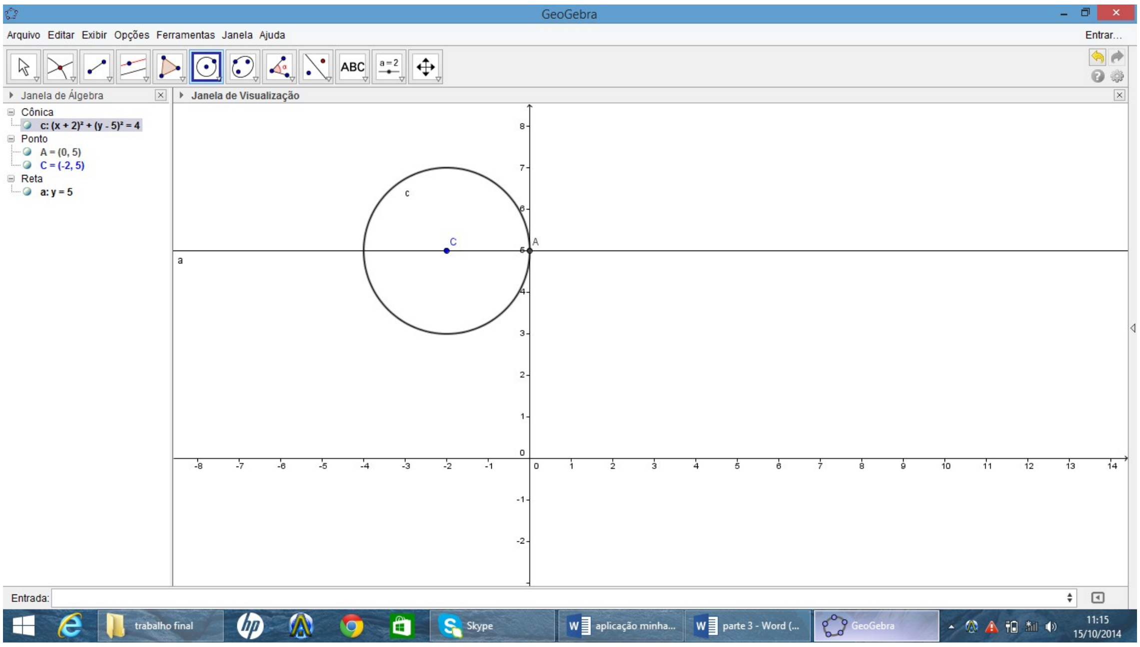
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada o ponto C=(-2,5).
2. Clicamos no ícone <reta paralela> e selecionamos os pontos C e o eixo Ox obtendo a reta *a*.

3. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos> e selecionamos a reta *a* obtida no item anterior e o eixo Oy determinando o ponto A.
4. Clicamos no ícone <círculo dados centro e um de seus pontos>, selecionando os pontos C e A.
5. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 65.

Figura 65: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 12.

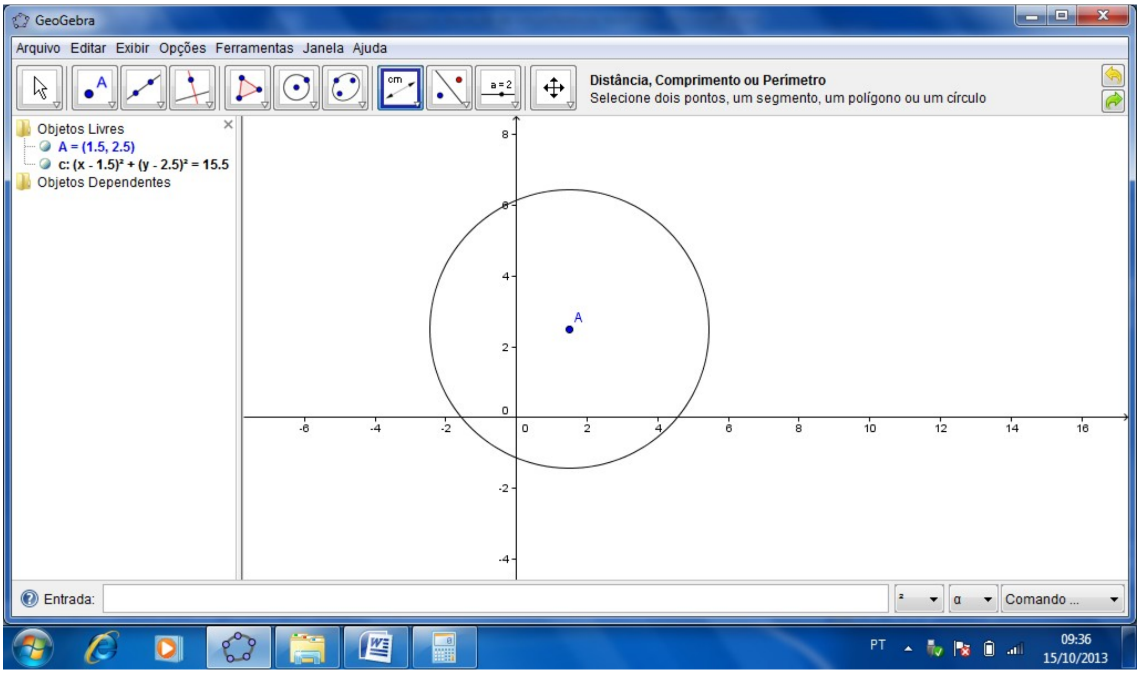


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>:

1. Definimos no campo de entrada a equação da circunferência x^2 + y^2 – 3x – 5y -7=0 obtendo a equação reduzida na janela de álgebra.
2. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 66.

Figura 66: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 12.

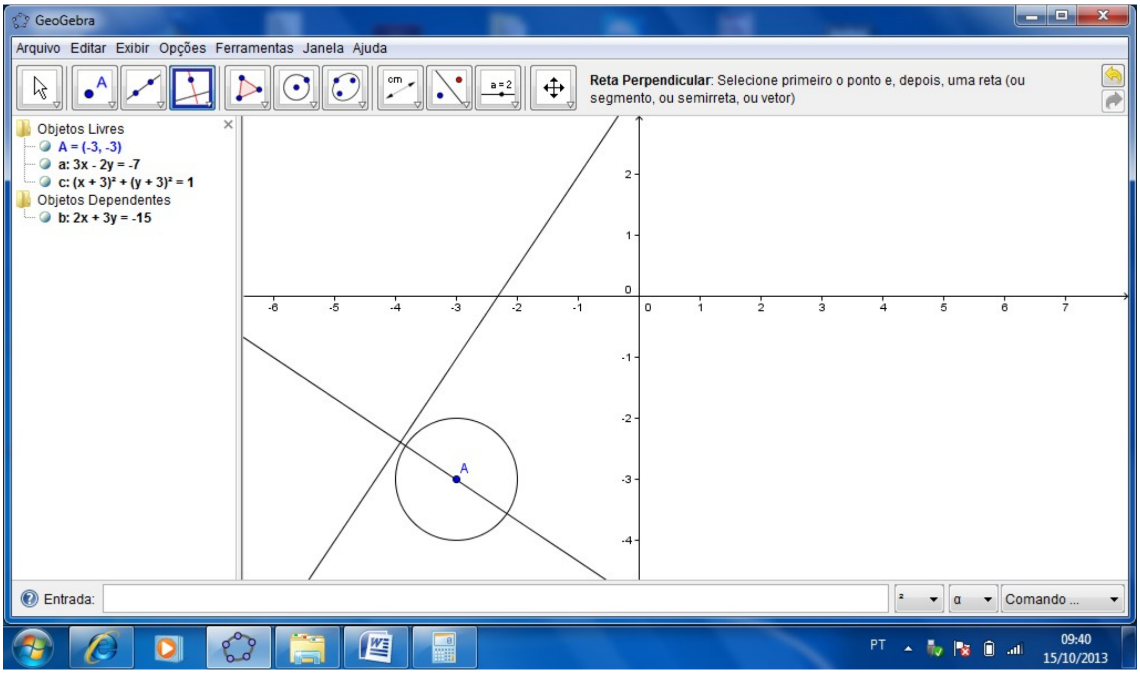


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>:

1. Definimos no campo de entrada a circunferência (x+3)^2 + (y+3)^2 = 1.
2. Definimos no campo de entrada o centro A=(-3,-3).
3. Definimos no campo de entrada a reta 3x – 2y + 7 =0.
4. Clicamos no ícone <reta perpendicular> e selecionamos o ponto A e a reta 3x – 2y + 7 =0.
5. Comparamos o resultado obtido na janela de álgebra com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 67.

Figura 67: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 12.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.16.3. Avaliação da Atividade 12

Enfrentamos algumas dificuldades na resolução de alguns exercícios, mas a maior dificuldade foi a de escrever as equações na caixa de entrada. Por exemplo, a questão de utilizar <^> para indicar a potência foi o que gerou maior dúvidas.

Destacamos os seguintes comentários de dois estudantes

> Oi professor, sinto muito mas não consigo fazer os exercícios pelo GeoGebra, não consigo fazer as partes relacionadas a circunferência! Por exemplo, quando o exercício dá assim: x.x+y.y-3x-5y-7=0... eu não consegui achar como se faz para colocar a equação da circunferência nesse programa ... Eu consegui fazer os dois primeiros e sinceramente não sei se está certo! Consigo fazer os exercícios com lápis e papel... Desculpa! Fonte: Arquivo do pesquisador.

> Os exercícios que você fez no plantão me ajudaram muito, ai eu consegui resolver o 3 que eu estava com dúvida, o resto estava fácil e consegui resolver de primeira. Fonte: Arquivo do pesquisador.

Cabe ressaltar que o primeiro comentário foi de um estudante que não participou dos plantões de dúvidas, enquanto que o segundo foi de um estudante que participou das atividades no período da tarde para sanar suas dúvidas.

5.17. Atividade 13: Posições relativas da circunferência

O objetivo desta seção é o de trabalhar conceitualmente as posições relativas de uma dada circunferência de centro O e raio r com pontos, retas e outras circunferências do plano.

5.17.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 13

5.17.1.1. Posições relativas entre ponto e circunferência

Vamos resolver o seguinte problema: dados um ponto $P=(x_0, y_0)$ e uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, a posição do ponto P é exterior, interior ou pertence a circunferência λ?

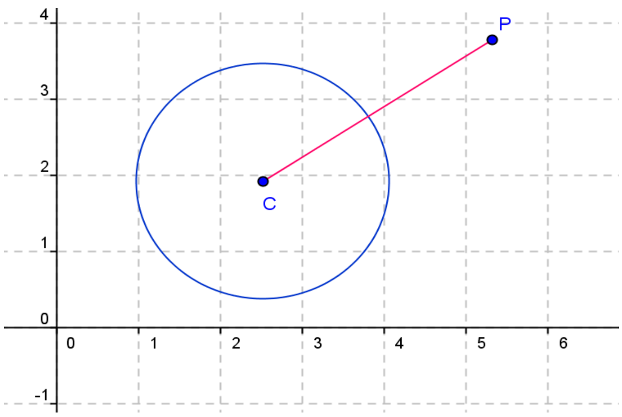
Inicialmente vamos determinar a distância de $P=(x_0, y_0)$ até o centro C=(a,b) da circunferência e em seguida comparamos com o raio r. São possíveis três casos:

<u>1º caso: P é exterior a λ.</u>

Isto ocorre se, e somente se, PC > r. Isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \text{ ou ainda, } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$$

Figura 68: Ponto exterior a uma circunferência.



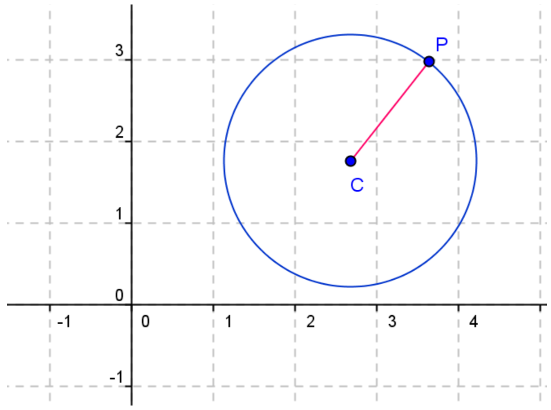
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>2º caso: P pertence a λ.</u>

Isto ocorre se, e somente se, PC = r. Isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \text{ ou ainda, } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$$

Figura 69: Ponto sobre a circunferência.



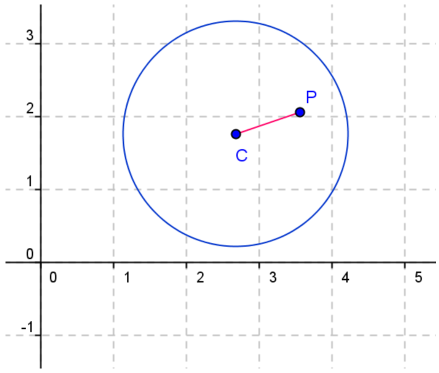
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>3º caso: P é interior a λ</u>.

Isto ocorre se, e somente se, PC < r. Isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \text{ ou ainda, } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$$

Figura 70: Ponto interior a uma circunferência.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

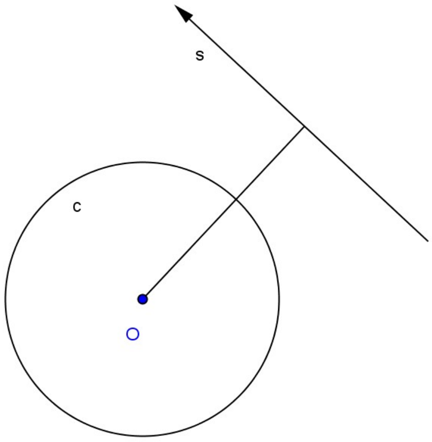
5.17.1.2. Posições relativas entre reta e circunferência

Consideremos agora o seguinte problema: dada uma reta s e uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ queremos determinar os conjuntos de interseção entre a reta e a circunferência λ. São possíveis três casos:

<u>1º caso: s é exterior a λ</u>, isto é, s não intercepta λ.

Este caso pode ser abordado da seguinte maneira: a reta s é externa à circunferência de centro O e raio r, então a distância d(O,s) do centro O da circunferência à reta s é maior que o raio da circunferência, ou seja, d(O,s) >r.

Figura 71: Reta exterior a circunferência.

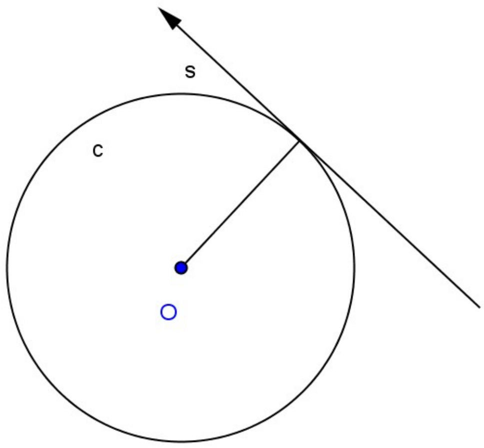


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

2º caso: s é tangente a λ, isto é, s intercepta λ em apenas um único ponto.

A reta s é tangente à circunferência de centro O e raio r, isto é, a reta s possui um único ponto em comum com a circunferência. Então, podemos dizer que a distância entre centro O até a reta s é igual ao raio r, ou seja, d(O,s) = r.

Figura 72: Reta tangente à circunferência.

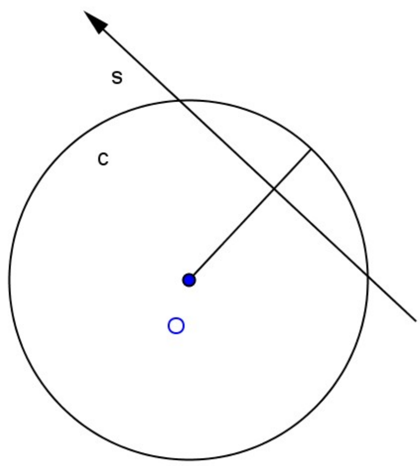


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

3º caso: s é secante à λ, isto é, s intercepta λ em dois pontos.

A reta s é secante à circunferência de raio r e centro O, isto é, a reta intercepta a circunferência em dois pontos. Nesse caso, constatamos que a distância do centro da circunferência à reta s é menor que o raio da circunferência, ou seja, d(O,s) < r.

Figura 73: Reta secante à circunferência.



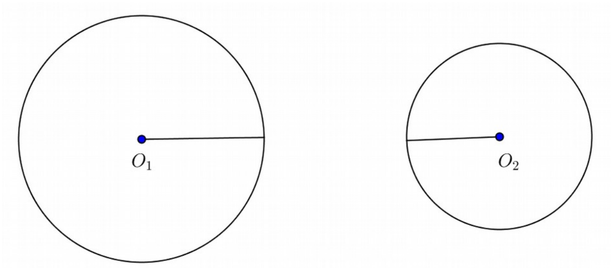
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.17.1.3. Posições relativas entre duas circunferências

Consideremos o seguinte problema: dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de equações $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ e $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ respectivamente, queremos determinar todos os possíveis conjuntos de interseção entre as duas circunferências. São possíveis cinco casos:

1º caso: λ_1 e λ_2 não possuem pontos em comum. Neste caso existem duas possibilidades. A primeira, as circunferências são externas uma à outra, ou seja, a distância entre os centros O_1 e O_2 é maior que a soma dos raios r_1 e r_2, isto é, $d(O_1,O_2) > r_1 + r_2$.

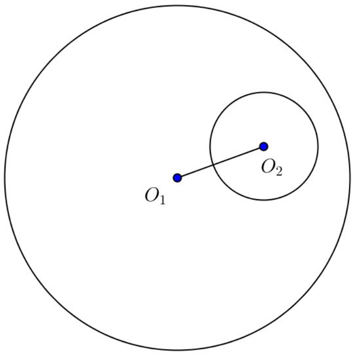
Figura 74: Circunferências externas.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

A segunda possibilidade é quando uma circunferência é interna a outra sem interceptar a primeira. Neste caso, a distância entre os centros O_1 e O_2 é menor que o valor absoluto da diferença dos raios r_1 e r_2, isto é, $d(O_1,O_2) < |r_1 - r_2|$.

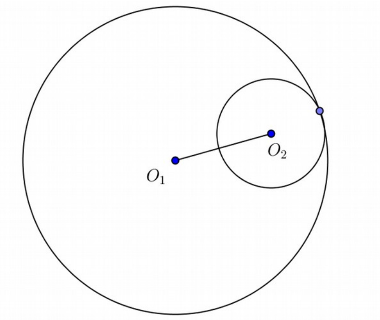
Figura 75: Circunferências internas.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

2º caso: λ_1 e λ_2 possuem apenas um ponto em comum. Neste caso existem duas possibilidades. A primeira, as circunferências são tangentes internamente, ou seja, a distância entre os centros O_1 e O_2 é igual ao valor absoluto da diferença entre os raios r_1 e r_2, isto é, $d(O_1,O_2) = |r_1 - r_2|$.

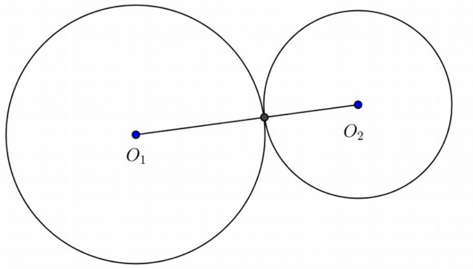
Figura 76: Circunferências tangentes internamente.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

A segunda possibilidade, as circunferências são tangentes externamente, ou seja, a distância entre os centros O_1 e O_2 é igual à soma dos raios r_1 e r_2, isto é, $d(O_1,O_2) = r_1 + r_2$.

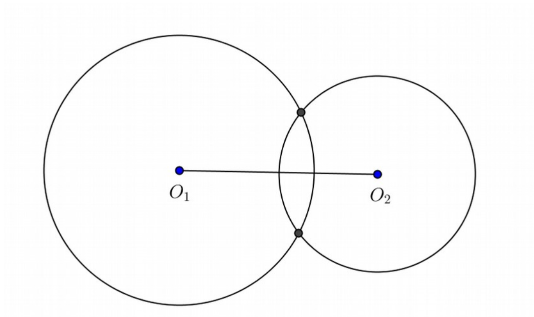
Figura 77: Circunferências tangentes externamente.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>3º caso: λ_1 e λ_2 se interceptam em dois pontos</u>. Neste caso, a distância entre os centros O_1 e O_2 é maior que o valor absoluto da diferença entre os raios r_1 e r_2 e menor que a soma dos raios r_1 e r_2. Assim, $|r_1 - r_2| < d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$.

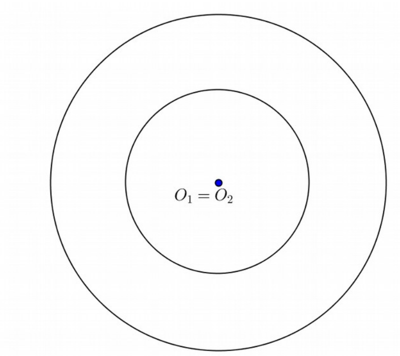
Figura 78: Circunferências se interceptando em dois pontos.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

É importante ressaltar que na análise das posições relativas entre circunferências determinamos condições a partir da distância entre os centros das mesmas. Não podemos esquecer o caso em que as circunferências possuem o mesmo centro, ou seja, as circunferências são concêntricas. Neste caso, a distância entre os centro é zero. É imediato que $d(O_1, O_2) < |r_1 - r_2|$ é satisfeita, implicando no caso das circunferências internas. Quando $r_1 = r_2$, as circunferências são coincidentes.

Figura 79: Circunferências concêntricas.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ **Nº** ______ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Determine a posição de P em relação á circunferência nos seguintes casos:
   (a) P=(-1,-4) e $x^2 + y^2 -6x + 4y + 3 = 0$.
   (b) P=(1,1) e $x^2 + y^2 + 2y - 80 = 0$.
2. Qual é a posição da reta $5x + 12y + 8 = 0$ em relação a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
3. Dadas a reta $3x + y = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$, obtenha:
   (a) A posição relativa da reta e a circunferência.
   (b) A interseção da reta e a circunferência.
4. Determine o comprimento da corda determinada pela reta $x + y – 1 = 0$ sobre a circunferência de centro C=(-2,3) e raio 2.
5. Qual é a posição relativa das circunferências $x^2 + y^2 = 49$ e $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.
6. Obtenha a interseção das circunferências $x^2 + y^2 = 100$ e $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$.

5.17.2. Desenvolvimento da Atividade 13

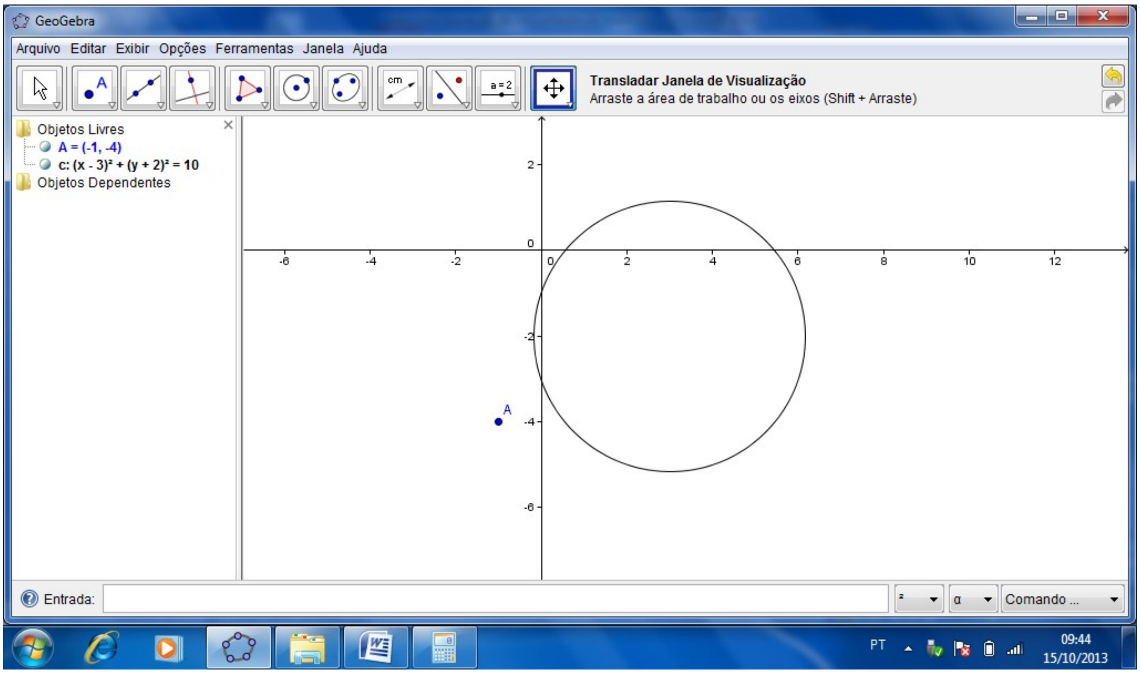
Tema	Posições relativas envolvendo circunferência.
Objetivo Principal	Estudar posições relativas envolvendo uma circunferência.
Objetivo Secundário	Estudar relações entre ponto, reta com circunferência.
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, Data show, Classmate, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1 a</u>:

1. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 -6x + 4y + 3 = 0$.
2. Definimos no campo de entrada o ponto P=(-1,-4).
3. Definimos no campo de entrada o centro da circunferência dada O = (3,-2).
4. No ícone <distância entre dois pontos> calculamos a distância entre os pontos P e O.

5. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 80.

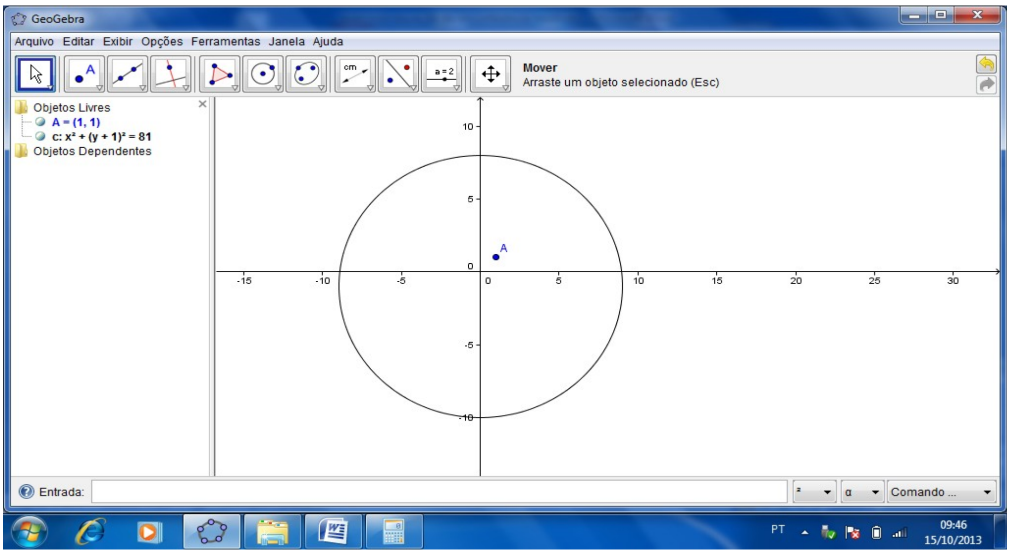
Figura 80: Resolução no GeoGebra do exercício 1.a. - Atividade 13.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1.b</u>: Análogo à resolução do exercício 1.a., considerando agora o ponto P=(1,1) e a equação $x^2 + y^2 + 2y - 80 = 0$. Ver figura 81.

Figura 81: Resolução no GeoGebra do exercício 1.b. - Atividade 13.

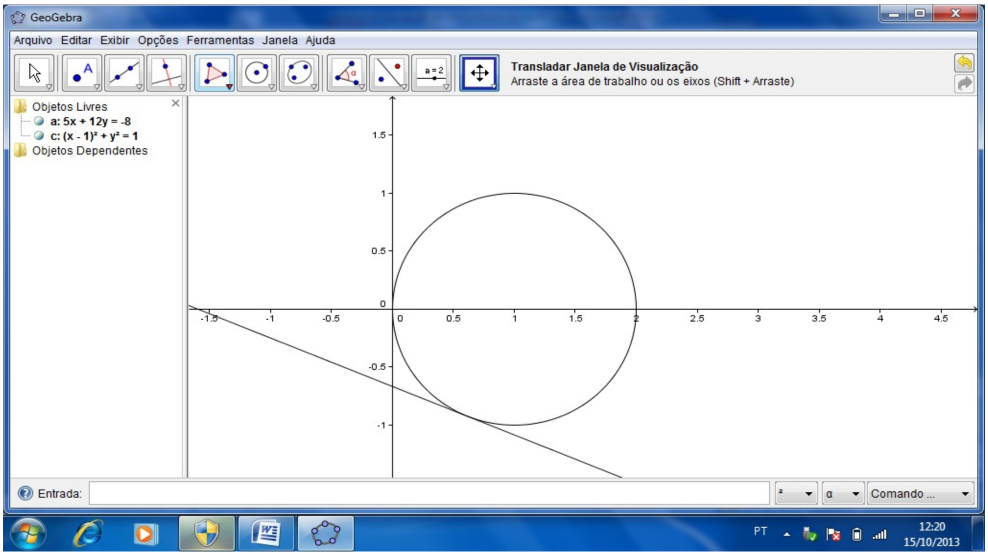


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2:

1. Definimos no campo de entrada a reta $5x + 12y + 8 = 0$.
2. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
3. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 82.

Figura 82: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 13.

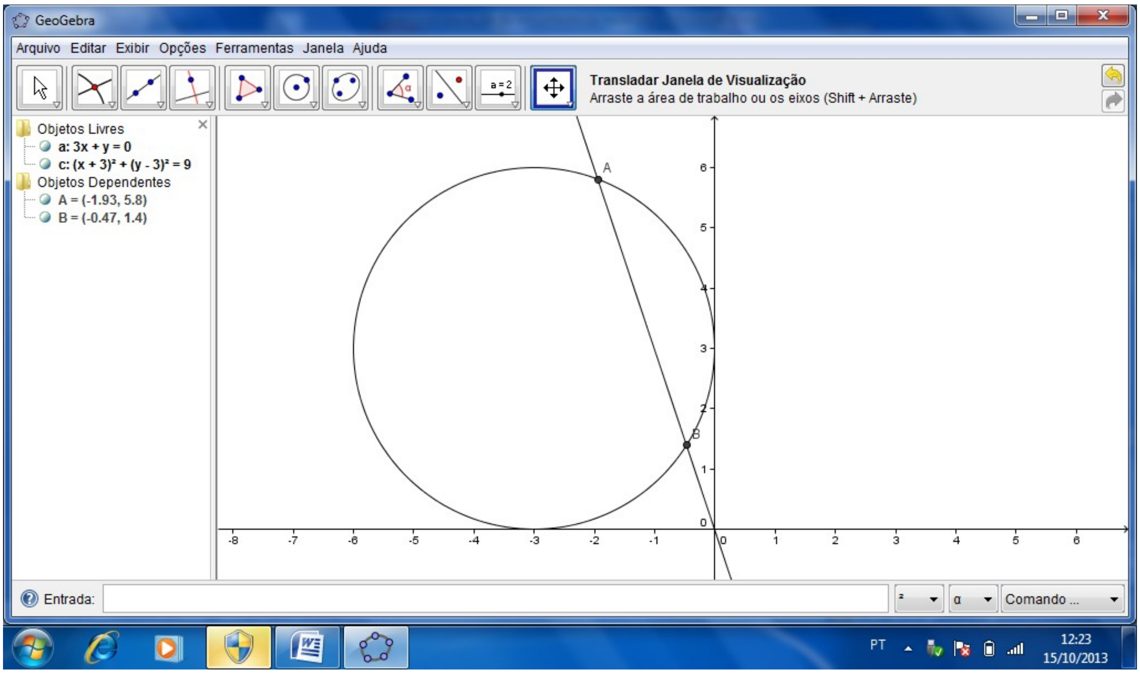


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3.a e 3.b:

1. Definimos no campo de entrada a reta $3x + y = 0$.
2. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$.
3. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando a reta e a circunferência.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 83.

Figura 83: Resolução no GeoGebra do exercício 3.a. e 3.b. - Atividade 13.

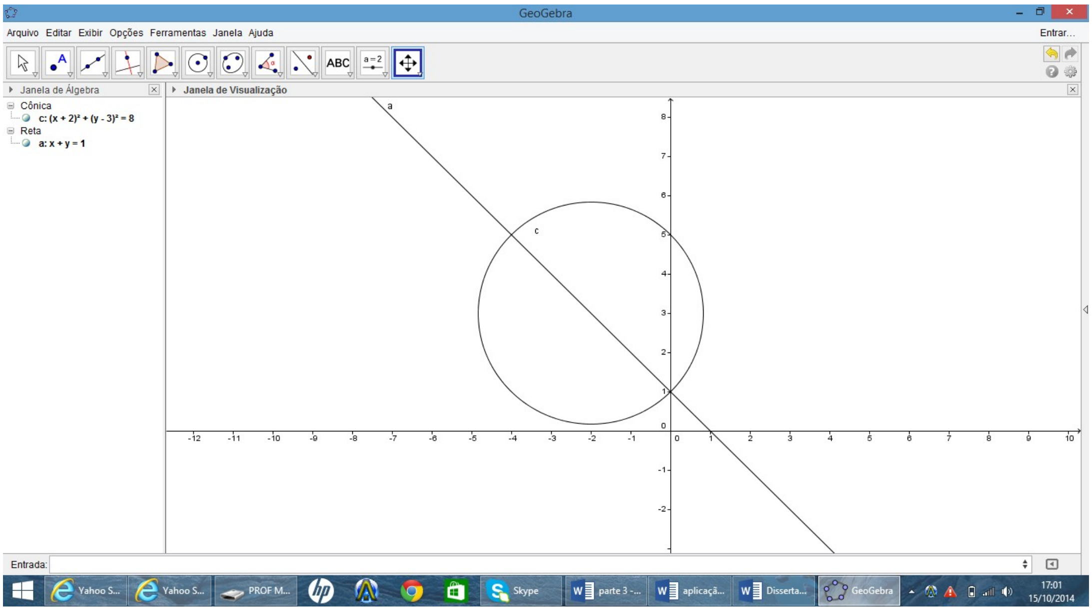


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>:

1. Definimos no campo de entrada a reta x + y – 1 =0.
2. Definimos no campo de entrada a circunferência $(x+2)^2+(y-3)^2 = 4$.
3. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando a reta e a circunferência.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 84.

Figura 84: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 13.

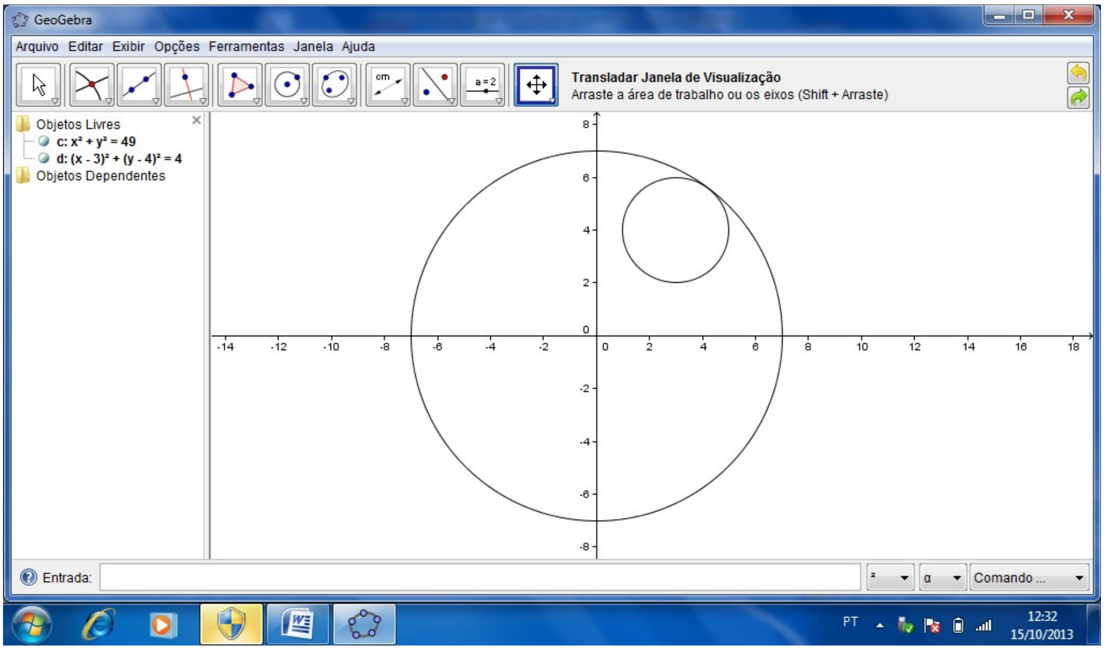


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 5</u>:

1. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 = 49$.
2. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.
3. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 85.

Figura 85: Resolução no GeoGebra do exercício 5 - Atividade 13.

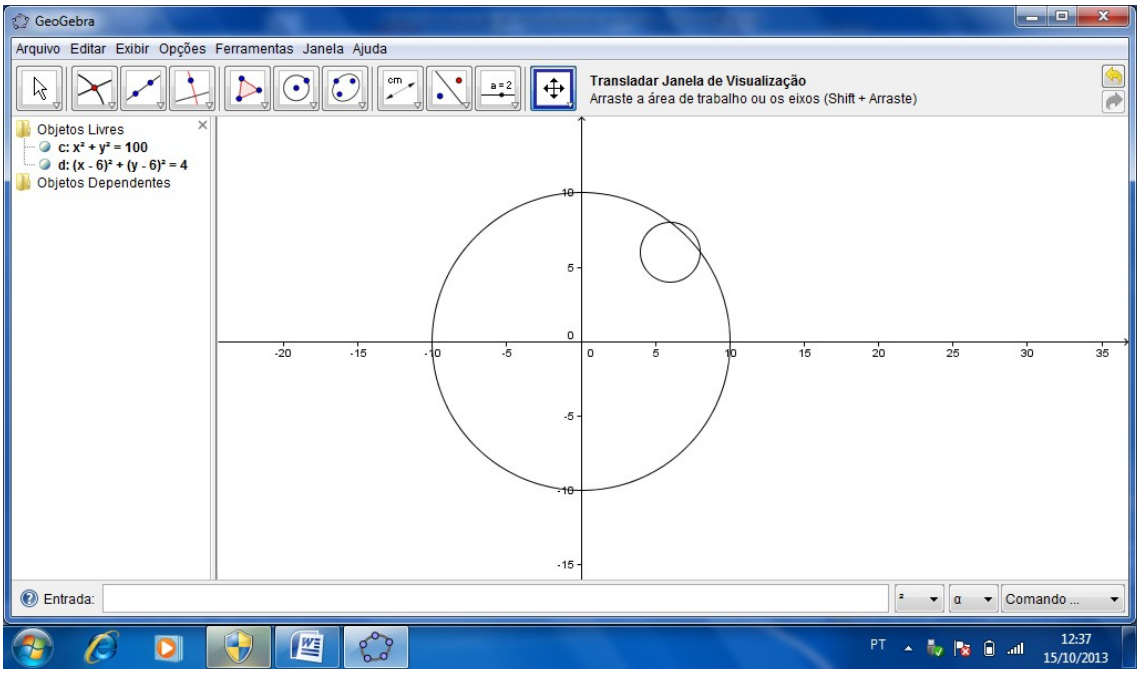


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 6</u>:

1. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 = 100$.
2. Definimos no campo de entrada a circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0$.
3. Clicamos no ícone <interseção de dois objetos>, selecionando as duas circunferências.
4. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 86.

Figura 86: Resolução no GeoGebra do exercício 6 - Atividade 13.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.17.3. Avaliação da Atividade 13

Os estudantes enfrentaram dificuldades em resolver os exercícios algebricamente. O professor teve que interceder com o conteúdo teórico várias vezes para que a atividade fosse desenvolvida e seus objetivos atingidos. As atividades práticas no GeoGebra foram desenvolvidas sem dificuldades.

Destacamos os seguintes comentários de dois estudantes:

> Querendo ou não quando o estudante vai realizar uma atividade que vale nota (mesmo que consiga apenas 3 exercícios) ele busca auxílio de cadernos, apostila, material pra conseguir fazer... Então é um ótimo impulso pro estudo e com certeza nos ajuda. Obrigada!! Fonte: Arquivo do pesquisador.

> Com essa atividade podemos observar claramente como se posiciona as equações da circunferência em seus respectivos pontos. Dificuldade média para

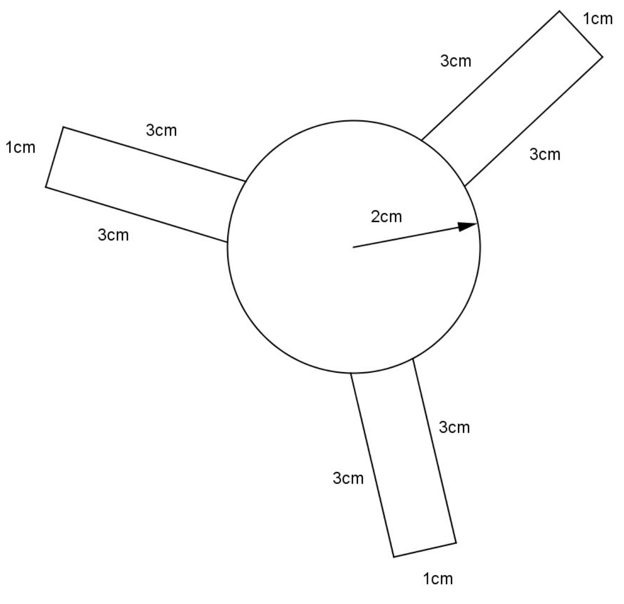
realizar o trabalho. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.18. Atividade complementar 3 (Atividade 12-13)

O objetivo desta atividade é mostrar aos estudantes um exemplo prático na utilização do GeoGebra na construção de uma peça de usinagem. Nesta atividade final os estudantes resolveram um exercício de mesmo nível teórico do exemplo desenvolvido pelo professor.

Problema: Uma metalúrgica comprou um centro de usinagem para a confecção da peça mostrada na figura 87. Os engenheiros da empresa consultaram um matemático para calcular as respectivas equações e pontos para a usinagem da peça. Desprezando a espessura da peça e sabendo que a máquina trabalha com coordenadas analíticas e que o centro de usinagem da peça coincide com (0,0), quais as equações utilizadas pelo matemático para descrever a peça?

Figura 87: Exemplo de uma peça para usinagem.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Resolução:

1. Equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
2. Utilizar o segmento EF (E=(3,26;3,74) F=(1,07;1,69)) sobre a reta de equação -1,37x + 1,46y = 1.

3. Utilizar o segmento GH (G=(3,94;3,02) H=(1,75;0,96)) sobre a reta de equação -1,37x + 1,46y=-1.
4. Utilizar o segmento EG sobre a reta de equação -1,46x – 1,37y = -9,88.
5. Utilizar o segmento JL (J=(-1,71;1,04) L=(-4,58;1,9)) sobre a reta de equação -0,58x - 1,91y =-1.
6. Utilizar o segmento KM (K=(-2;0,08) M=(-4,87;0,95)) sobre a reta de equação -0,58x - 1,91y = 1.
7. Utilizar o segmento LM sobre a reta de equação 1,91x – 0,58y = -9,87.
8. Utilizar o segmento OQ (O=(0,93, -1,77) Q=(1,62; -4,69)) sobre a reta de equação 1,95x + 1,95y = 1,01.
9. Utilizar o segmento PR (P=(-0,05, -2) R=(0,64; -4,92)) sobre a reta de equação 1,95x + 0,46y = -1,01.
10. Utilizar o segmento QR sobre a reta de equação -0,46x + 1,95y = -9,87.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

Uma metalúrgica comprou um centro de usinagem para a confecção da peça da figura abaixo. Desprezando a espessura e sabendo que o centro de usinagem só trabalha com coordenadas analíticas e que o centro da peça coincide com (0,0), calcular as devidas equações e pontos para a confecção da peça.

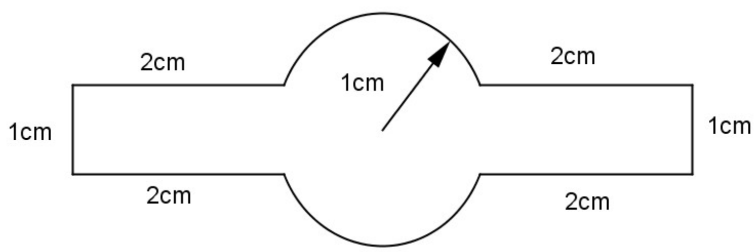
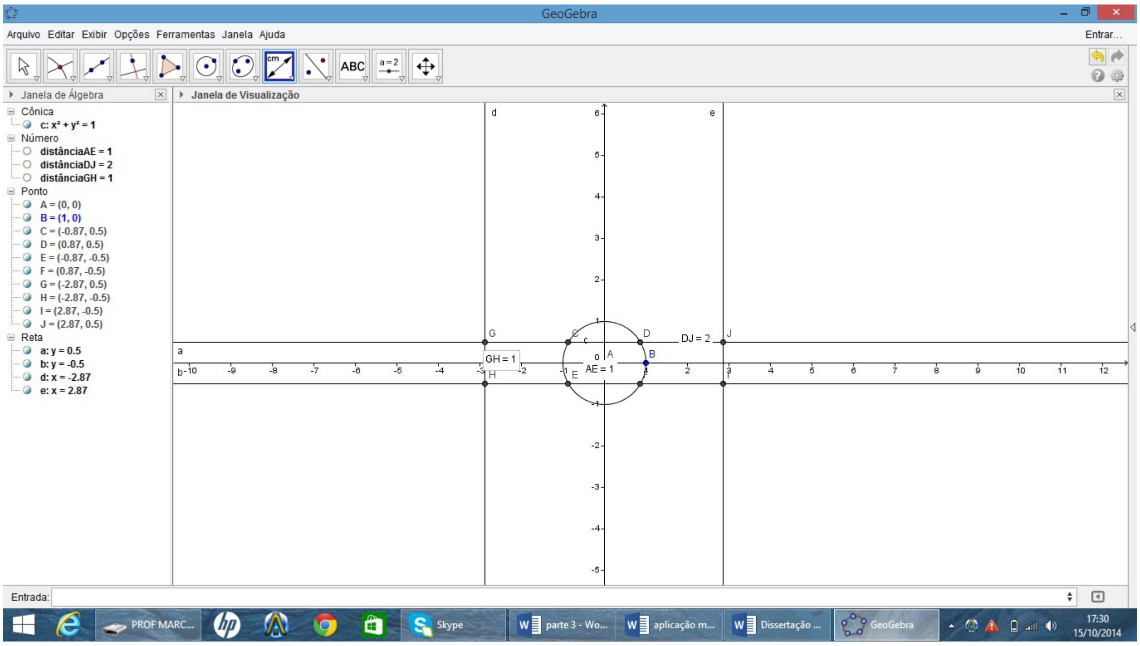


Figura 88: Resolução no GeoGebra da Atividade Complementar 3.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.18.1. Avaliação da Atividade Complementar 4

Os estudantes encontram grande dificuldade para a realização desta atividade. No entanto, foi bem gratificante a forma com que a atividade se desenvolveu atingindo o seu primeiro objetivo de revisar e consolidar os conceitos até aqui estudados. Destacamos o seguinte comentário de um estudante

> Tive dificuldades para realizar a atividade complementar, mesmo assim posso dizer que me ajudou para reconhecimentos de ponto, circunferência e reta em relação a outra circunferência. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.19. Atividade 14: Elipse

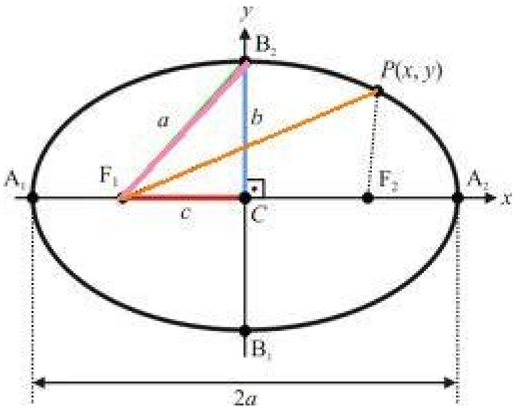
O objetivo desta seção é levar o estudante a compreender o que é uma elipse e suas principais propriedades. Além da elipse, as demais cônicas que iremos estudar surgem da secção transversal de um cone. É imediato que a circunferência também pode ser obtida a partir da secção que é paralela a base do cone. No entanto, as cônicas que iremos estudar são supostas serem secções não paralelas a base.

5.19.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 14

Dados dois pontos quaisquer do plano F_1 e F_2 e seja 2c a distância entre eles. A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias à F_1 e F_2 é a constante 2a (2a > 2c).

Para obtermos a equação reduzida da elipse iremos supor dois casos particulares para as posições dos pontos F_1 e F_2.

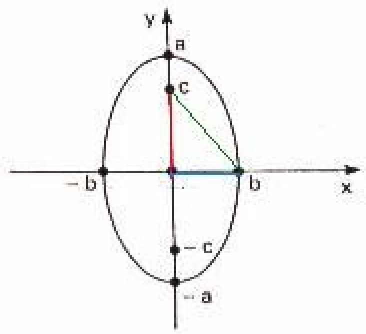
1º caso: F_1 e F_2 sobre o eixo x simétricos em relação ao eixo y.



Nesse caso, os focos têm coordenadas F1=(-c, 0) e F2=(c , 0). Logo, a equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo x será:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

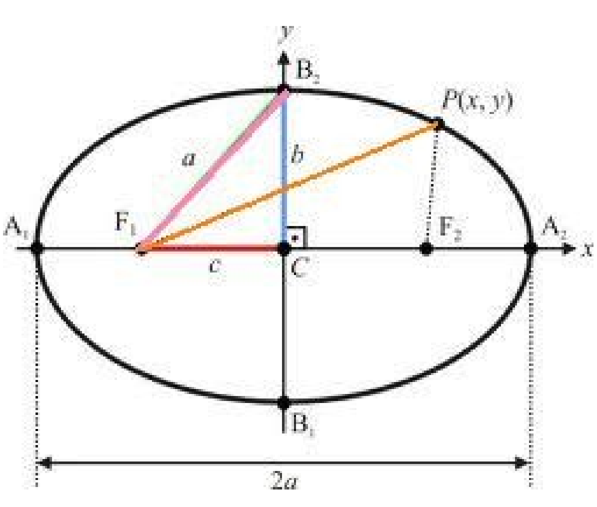
2º Caso: F_1 e F_2 sobre o eixo y simétricos em relação ao eixo x.



Nesse caso, os focos apresentam coordenadas F1=(0,-c) e F2=(0,c). Assim, a equação reduzida da elipse com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo y será:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos da elipse



- F_1 e F_2 → são os focos
- C → Centro da elipse
- A_1A_2 → eixo maior
- B_1B_2 → eixo menor
- 2c → distância focal
- 2a → medida do eixo maior
- 2b → medida do eixo menor
- $\frac{c}{a}$ → excentricidade
- Relação notável → $a^2 = b^2+c^2$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ______ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

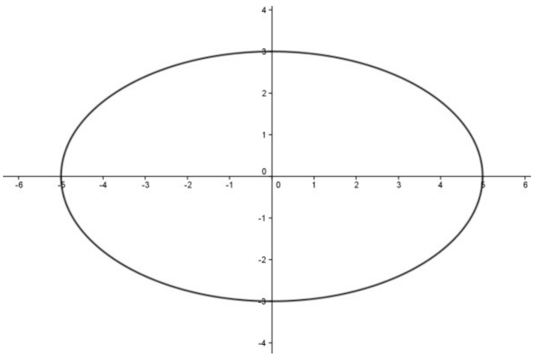
Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

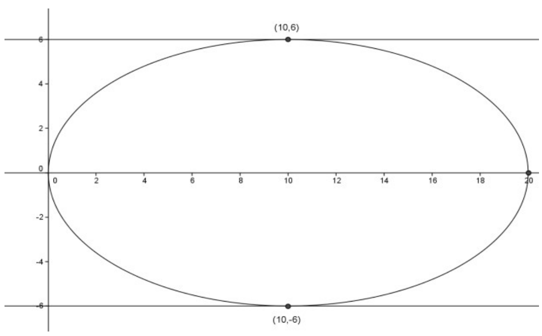
EXERCÍCIOS

1. Determine as equações das elipses seguintes:

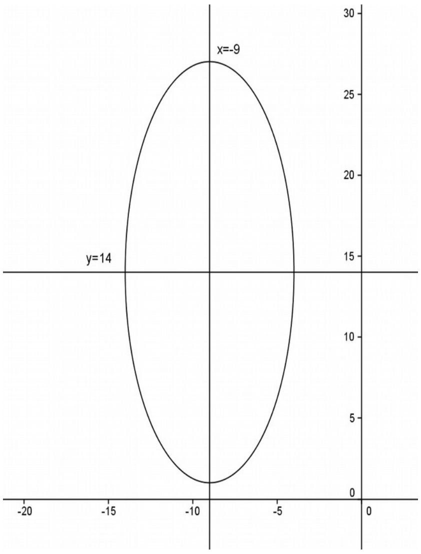
(a)



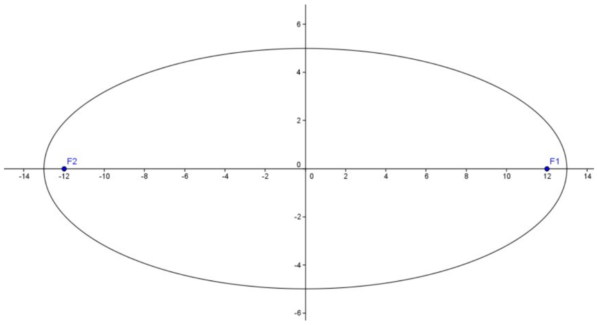
(b)



(c)



(d)



2. Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse $9x^2+25y^2=900$.

3. Ache as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2+25y^2=225$.

4. Determine os focos da cônica de equação $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

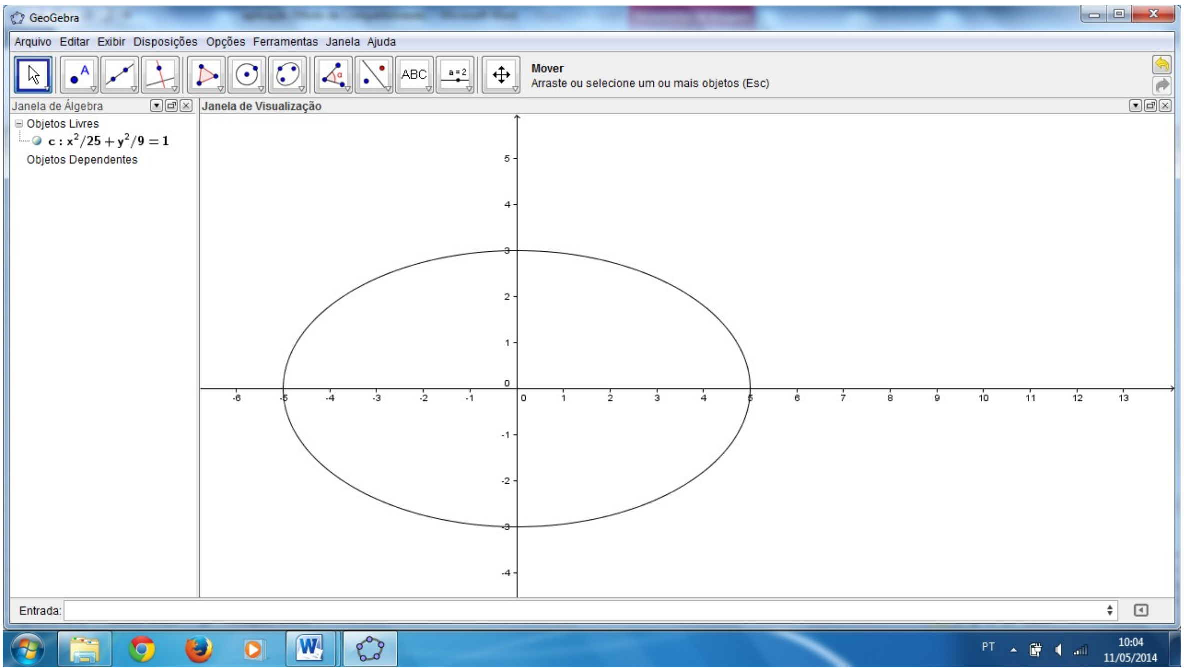
5.20.2. Desenvolvimento da Atividade 14

Tema	Elipse.
Objetivo Principal	Estudar as equações de uma elipse.
Objetivo Secundário	Identificar e visualizar a equação e foco de uma elipse.
Tempo Previsto	2 aulas (1horas e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, Data show, Classmate, Lousa digital.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1:

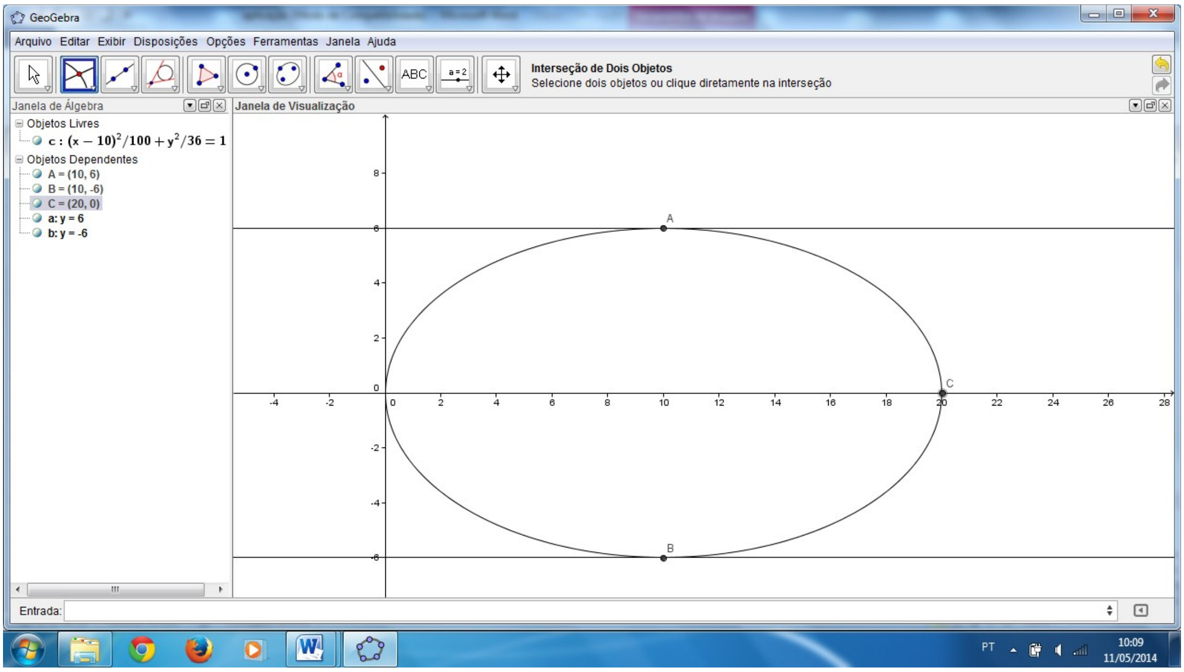
1. Definimos no campo de entrada a equação encontrada algebricamente.
2. Comparamos a elipse encontrada com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Figura 89: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (a) - Atividade 14.



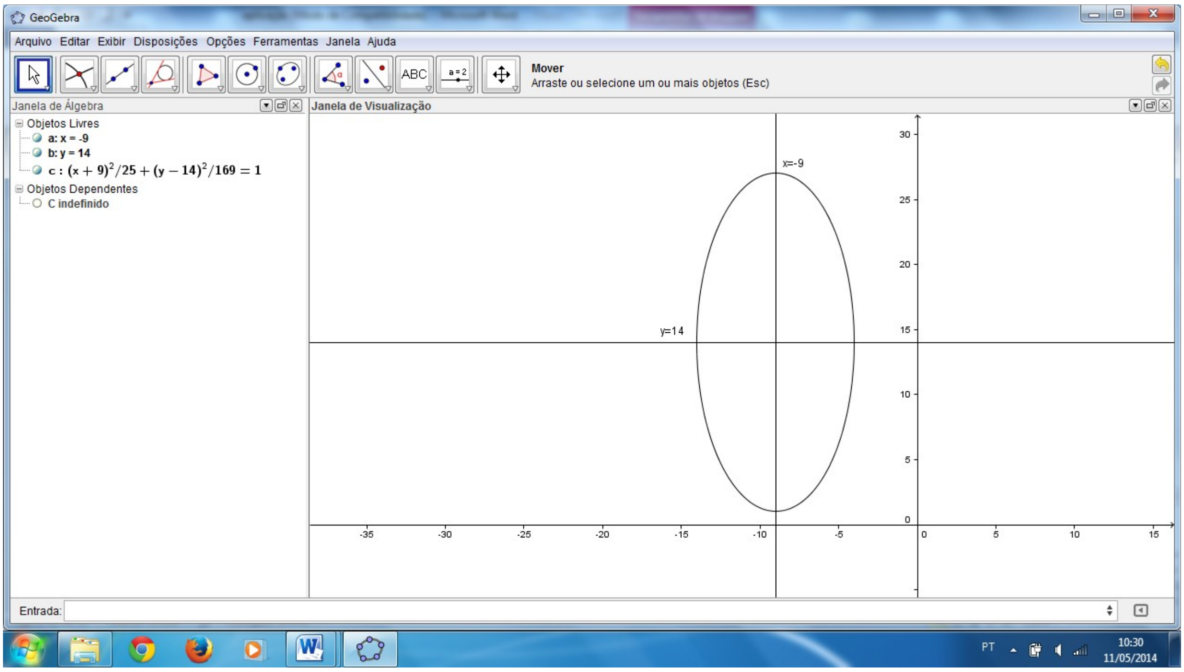
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 90: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (b) - Atividade 14.



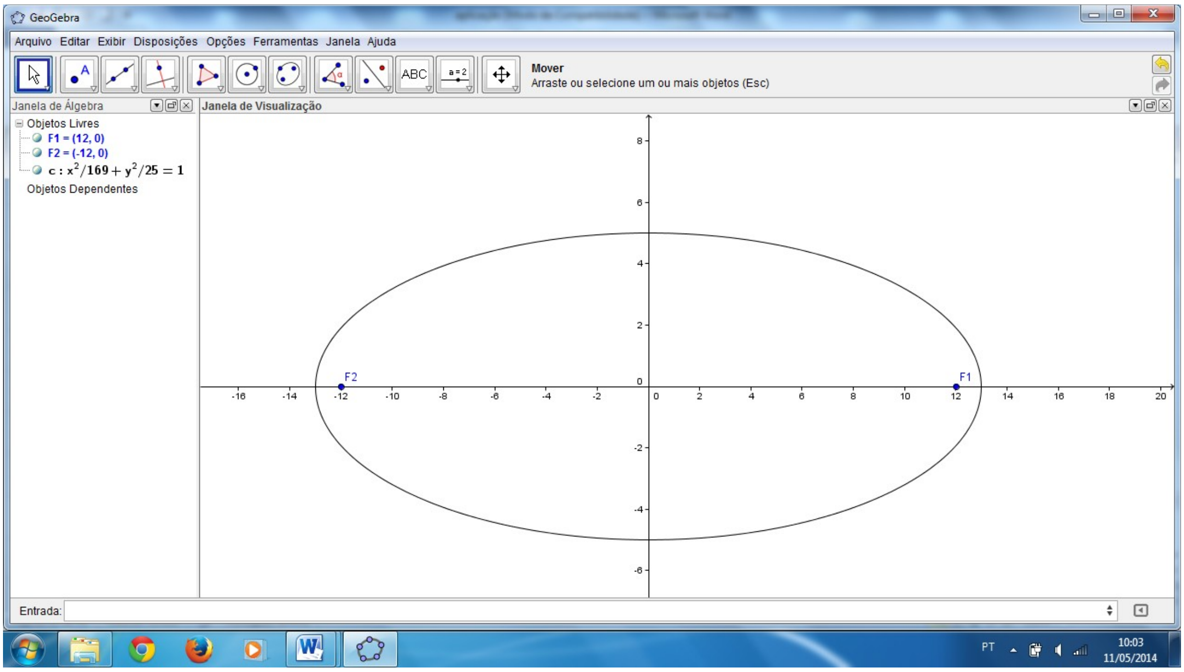
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 91: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (c) - Atividade 14.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 92: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (d) - Atividade 14.

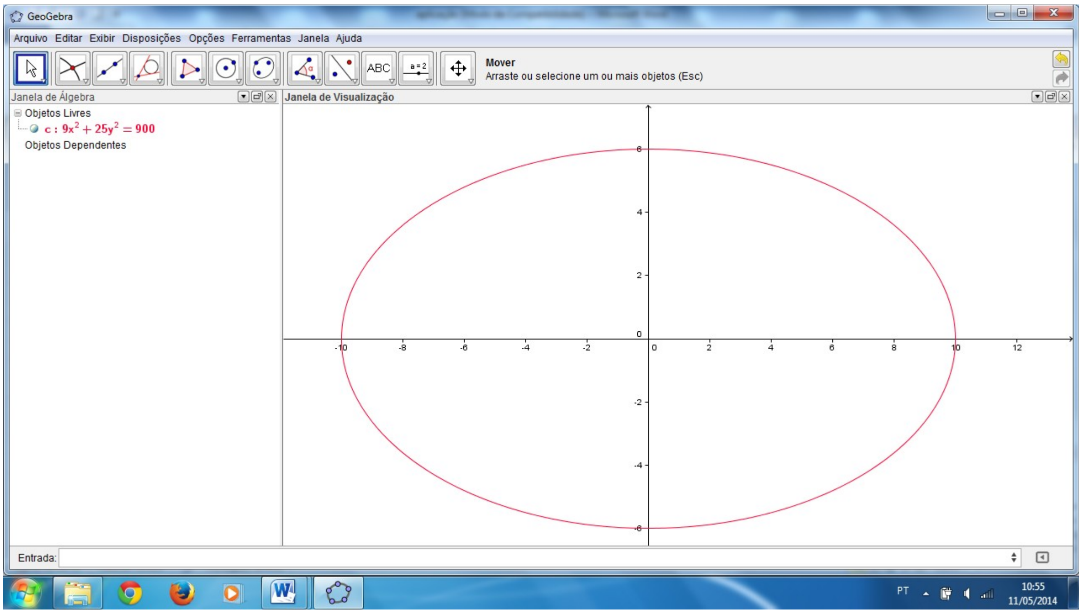


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>:

1. Definimos no campo de entrada a elipse $9x^2+25y^2 = 900$.
2. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

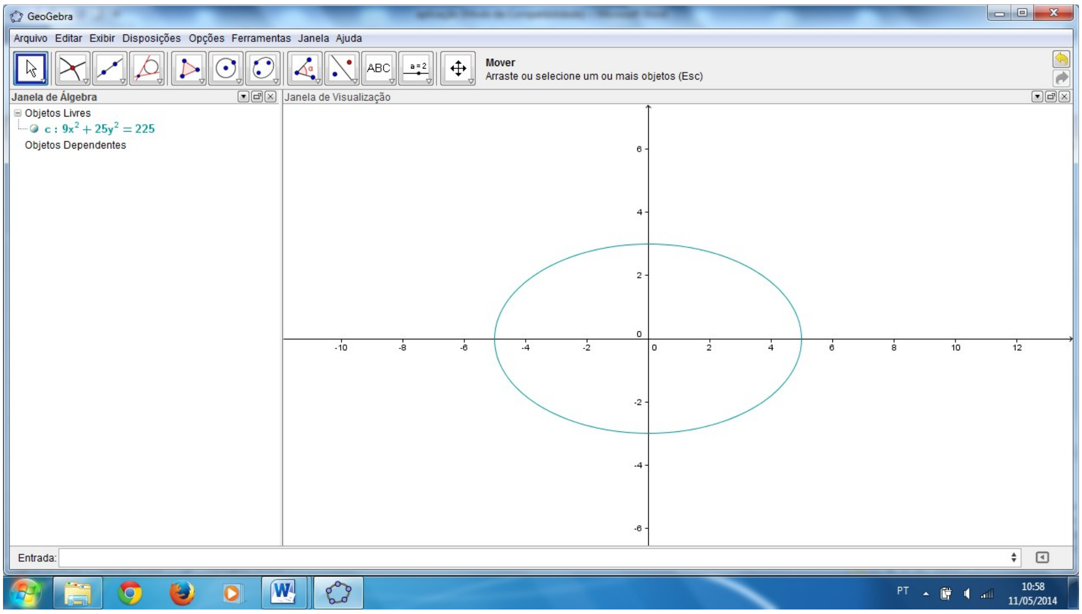
Figura 93: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 14.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3: análogo à resolução do exercício 2 considerando a elipse $9x^2+25y^2 = 225$.

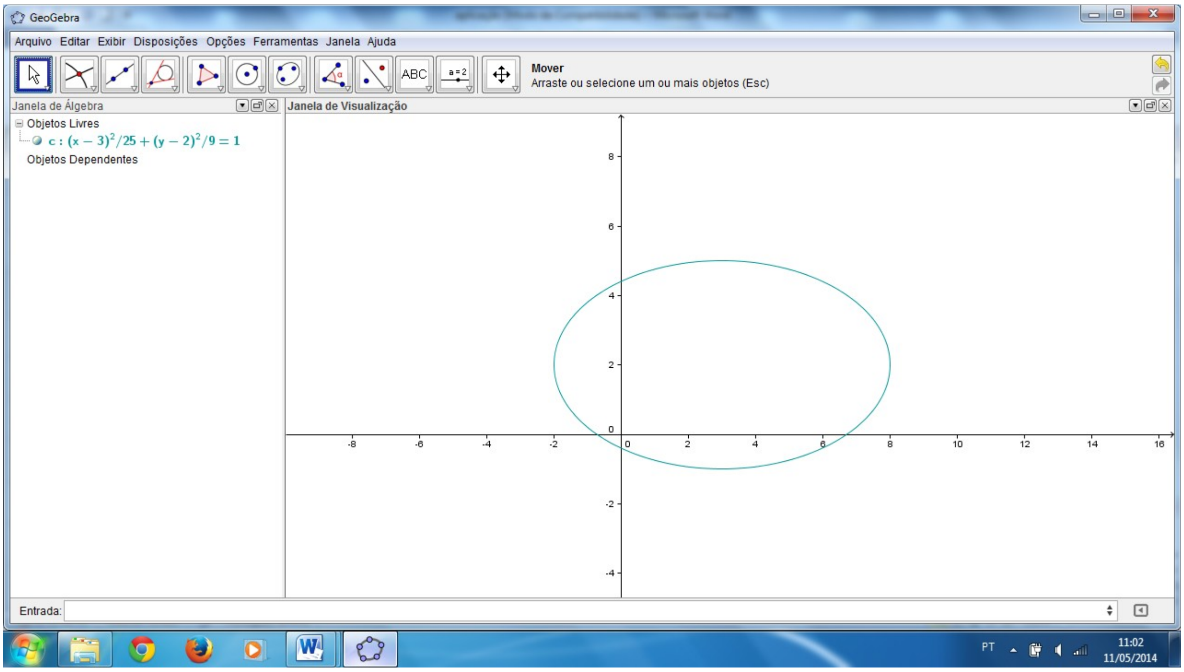
Figura 94: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade 14.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4: análogo à resolução do exercício 2 considerando a elipse $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

Figura 95: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 14.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.19.3. Avaliação da Atividade 14

Os estudantes não enfrentaram dificuldades ao executar a atividade. A resolução dos exercícios no GeoGebra serviu para visualizar o que se havia calculado algebricamente. Destacamos os seguintes comentários de um estudante.

> Quase igual a circunferência, foi mais simples do que eu pensei. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.20. Atividade 15: Hipérbole

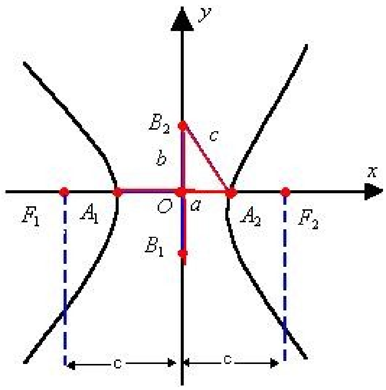
O objetivo desta atividade é o permitir aos estudantes visualizarem a hipérbole além de definir algumas características desta curva, atentando para as diferenças entre a elipse e a hipérbole no que diz respeito aos focos e eixos.

5.20.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 15

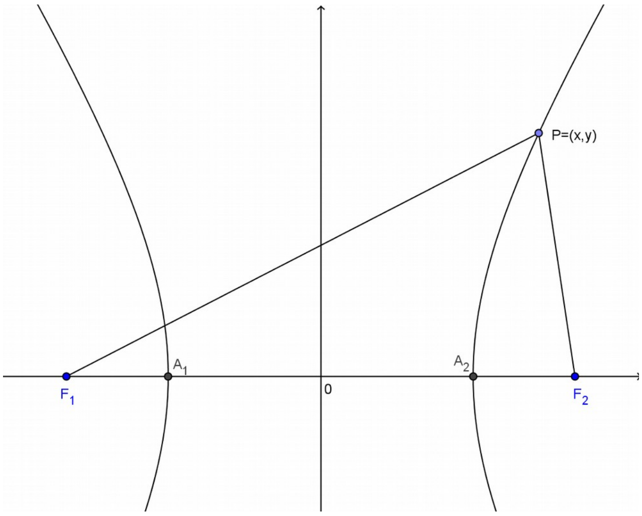
Dados dois pontos quaisquer F_1 e F_2 no plano α e seja 2c a distância entre eles. A hipérbole é o conjunto dos pontos do plano α cujo valor absoluto da diferença entre as distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (0< 2a < 2c).

Para obtermos a equação reduzida da hipérbole iremos supor dois casos particulares para as posições dos pontos F_1 e F_2.

1º caso: F_1 e F_2 sobre o eixo x simétricos em relação ao eixo y.



Nesse caso, os focos têm coordenadas F_1=(-c, 0) e F_2=(c , 0).



Nestas condições, chama-se equação reduzida da hipérbole a equação que P=(x,y), ponto genérico da hipérbole, verifica.

A dedução é imediata: $P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$. Então:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

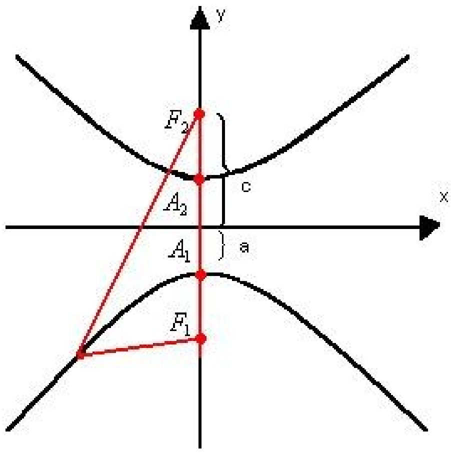
$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)^2$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Logo, a equação reduzida da hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo x será:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

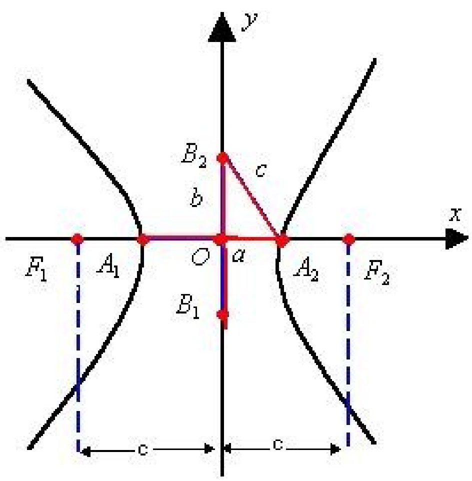
2º Caso: F_1 e F_2 sobre o eixo y simétricos em relação ao eixo x.



Nesse caso, os focos apresentam coordenadas $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$. Analogamente ao primeiro caso, a equação reduzida da hipérbole com centro na origem do sistema cartesiano e com focos sobre o eixo y será:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos da hipérbole



- F_1 e F_2 → são os focos
- O → Centro da hipérbole
- A_1A_2 → eixo real ou transverso
- B_1B_2 → eixo imaginário
- 2c → distância focal
- 2a → medida do eixo real
- 2b → medida do eixo imaginário
- $\frac{c}{a}$ → excentricidade
- Relação notável → $c^2 = b^2+c^2$

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________________ **Nº** ____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

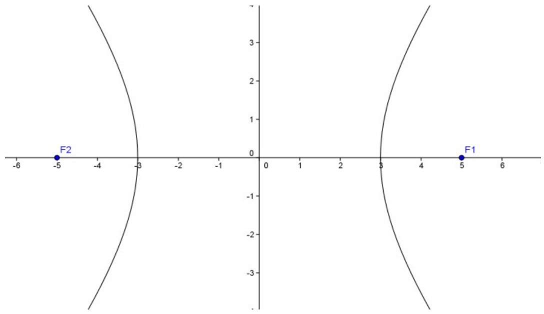
Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

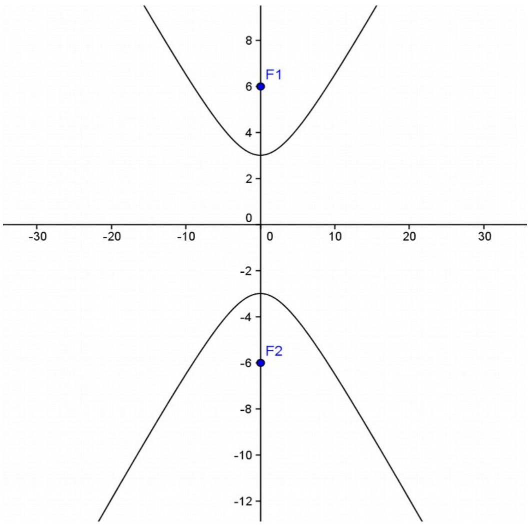
EXERCÍCIOS

1. Determine as equações das hipérboles seguintes:

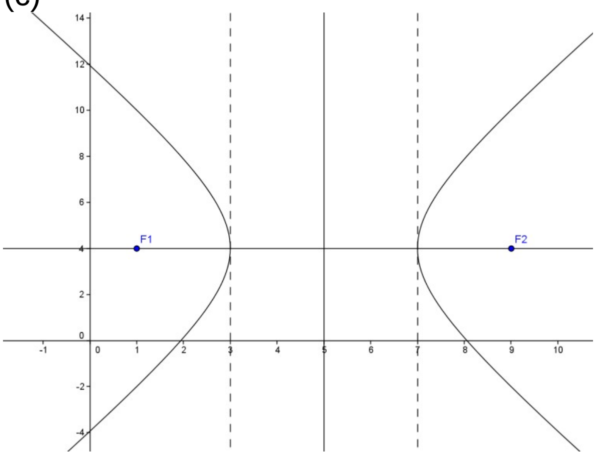
(a)



(b)



(c)



2. Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $144y^2 - 25x^2 = 3600$.

4. Obtenha os focos da cônica cuja equação é $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$.

5.20.2. Desenvolvimento da Atividade 15

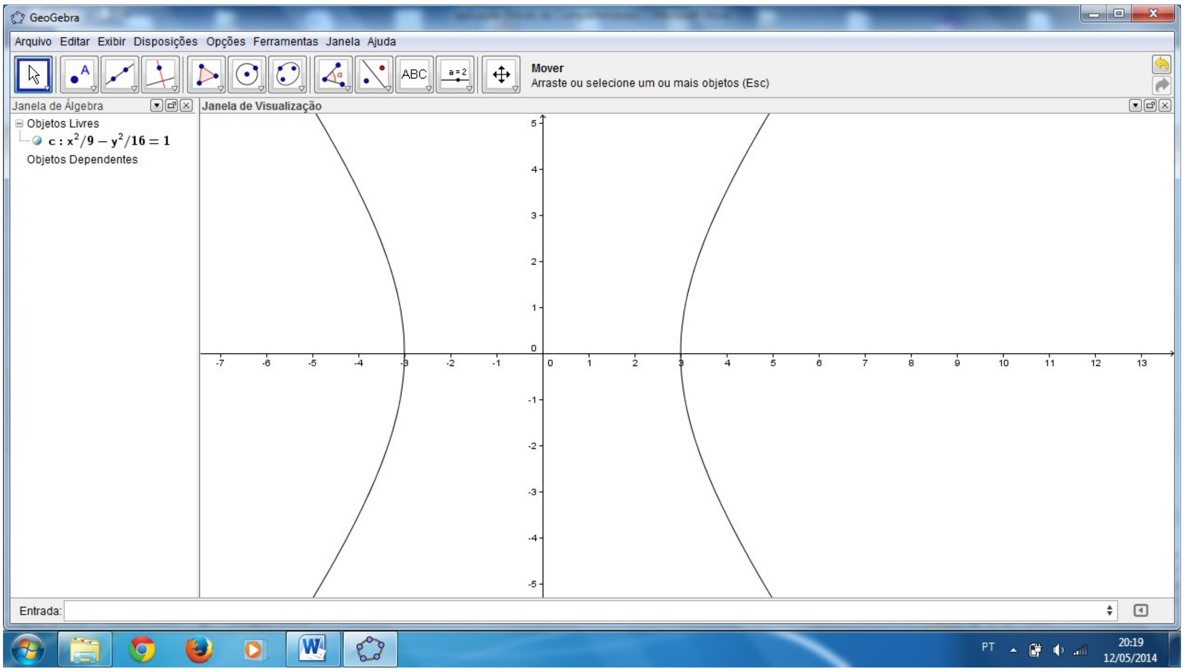
Tema	Hipérbole.
Objetivo Principal	Estudar as equações de uma hipérbole.

Objetivo Secundário	Identificar e visualizar a equação e foco de uma hipérbole.
Tempo Previsto	2 aulas (1 hora e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, Data show, Classmate, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1</u>:

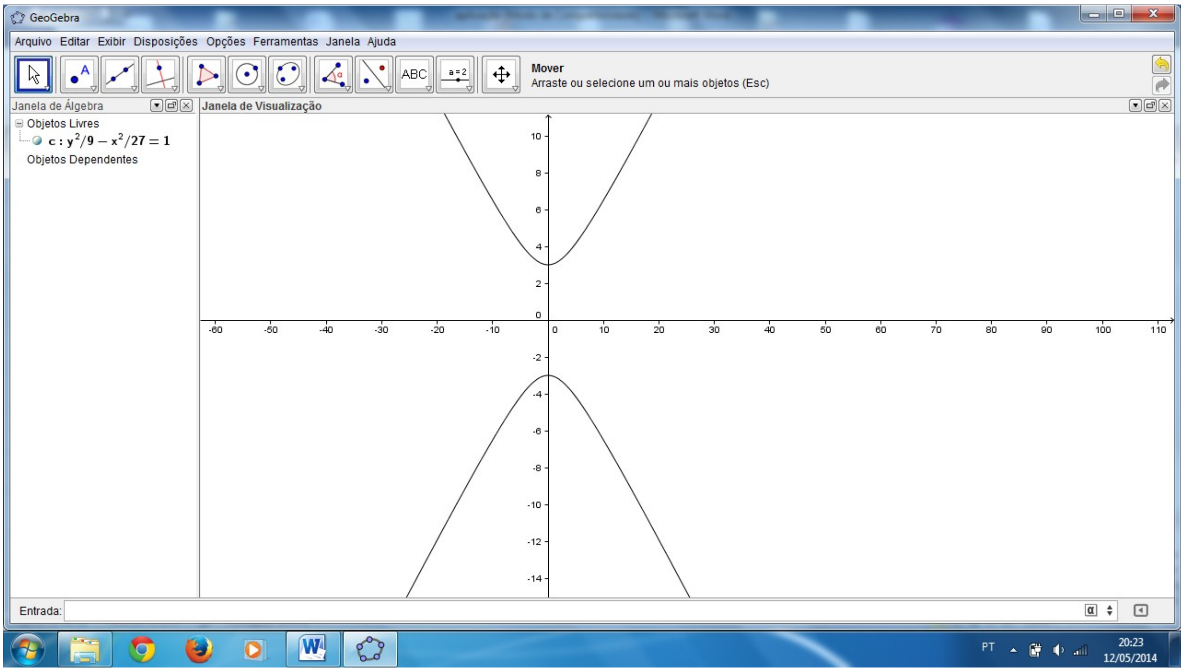
1. Definimos no campo de entrada a equação encontrada algebricamente.
2. Comparamos a hipérbole encontrada com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

Figura 96: Figura 96: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (a) - Atividade 15.



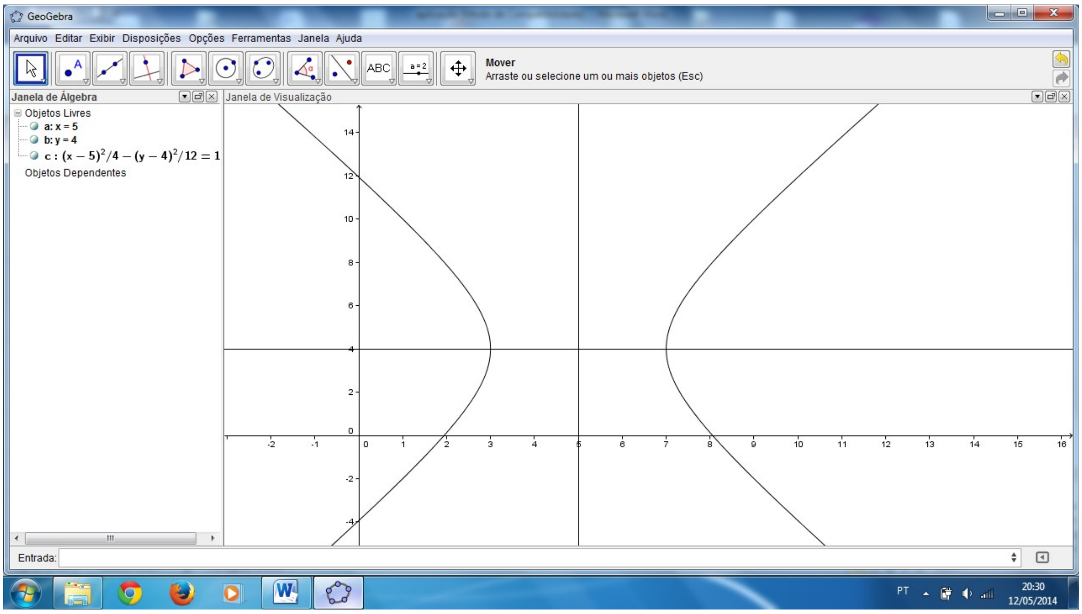
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 97: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (b) - Atividade 15.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 98: Resolução no GeoGebra do exercício 1 (c) - Atividade 15.

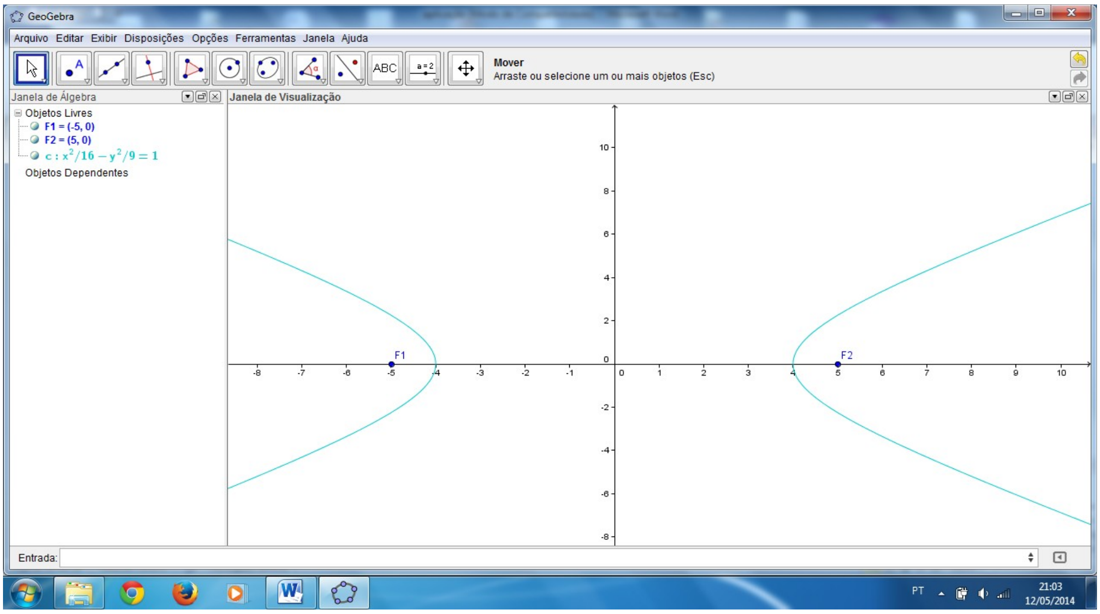


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2:

1. Definimos no campo de entrada a hipérbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
2. Comparamos o resultado com os cálculos algébricos anteriormente feitos.

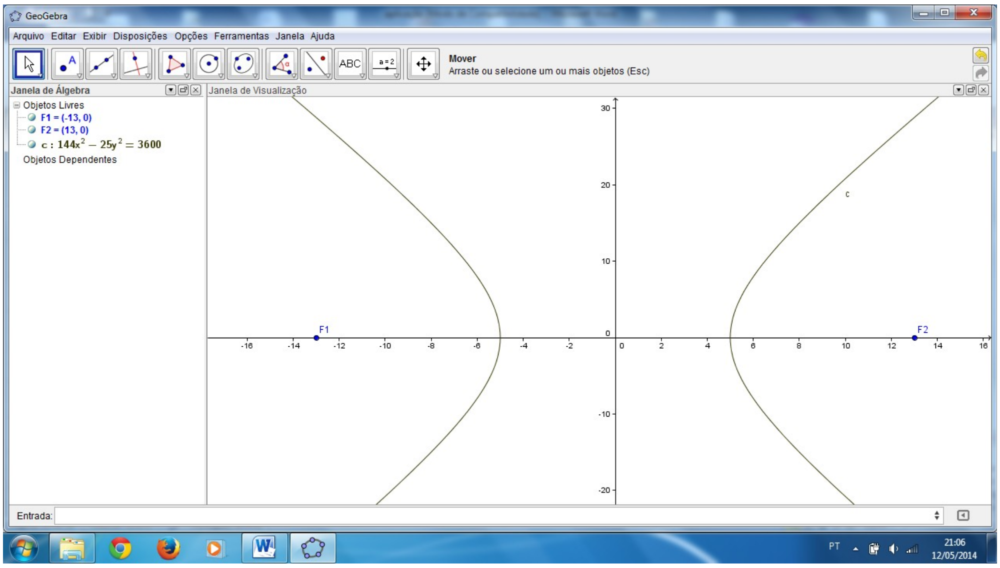
Figura 99: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 15.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>: análogo à resolução do exercício 2 considerando a elipse $144y^2 - 25x^2 = 3600$.

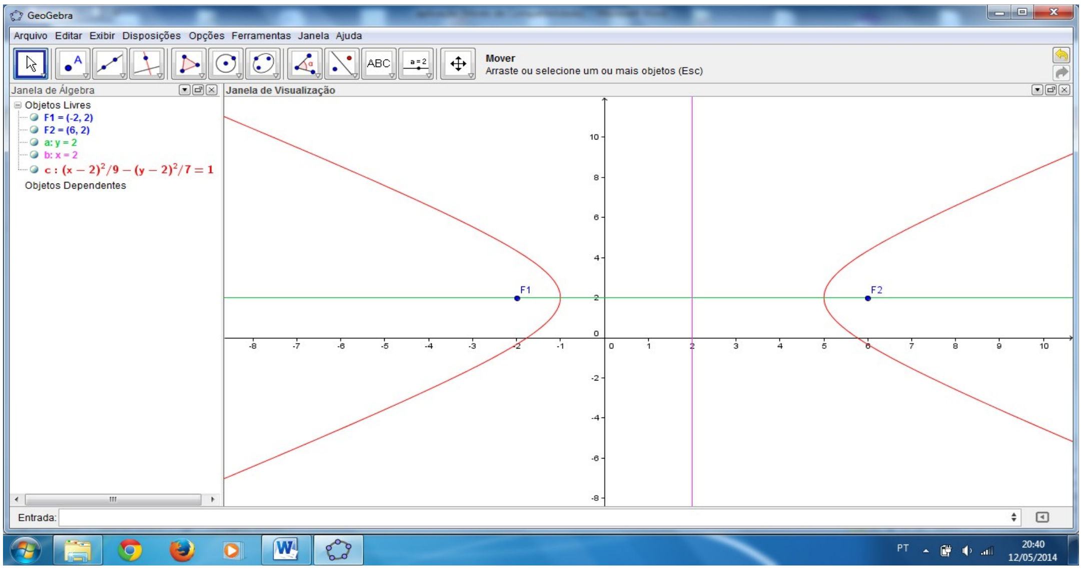
Figura 100: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 15.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>: análogo à resolução do exercício 2 considerando a hipérbole $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{7}=1$.

Figura 101: Resolução no GeoGebra do exercício 4 - Atividade 15.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.20.3. Avaliação da Atividade 15

Foi atingido o objetivo, pois como a atividade 14, os estudantes não encontraram dificuldades em realizá-la, acreditando inclusive ser fácil. Destacamos o seguinte comentário de um estudante.

> Só foi colocar a equação na caixa de entrada e pronto o exercício estava resolvido, muito mais fácil do que fazer usando a formula. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.21. Atividade 16: Parábola

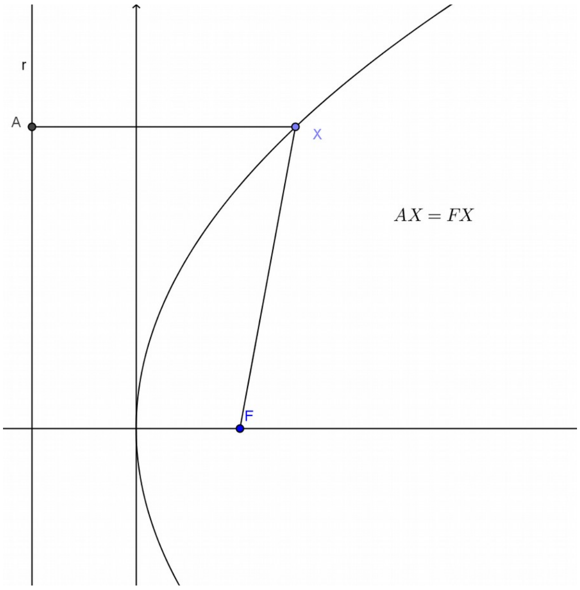
Os estudantes já trazem uma noção do conceito de parábola pois estudaram o assunto no Ensino Fundamental (nono ano). O objetivo desta atividade é de apresentar graficamente e obter a equação de uma parábola.

5.21.1. Desenvolvimento teórico para a Atividade 16

De forma mais detalhada e utilizando conceitos matemáticos em relação aos estudos da Geometria Analítica, podemos definir as condições algébricas que definem uma parábola.

Dados uma reta r e F um ponto que não pertence a r, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e r denomina-se parábola figura 102.

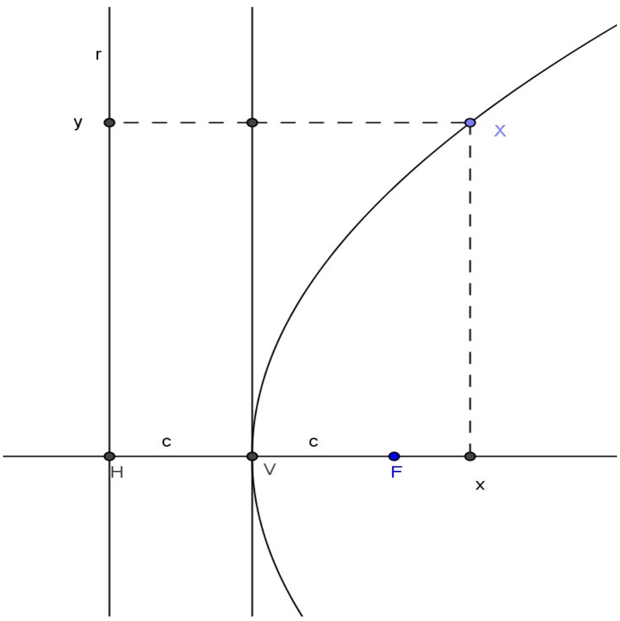
Figura 102: Parábola.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Denominamos os pontos V de vértice da parábola e F, foco da parábola. O valor real c é o coeficiente que indica a distância do foco ao vértice, determinando também a concavidade da parábola. Em particular consideramos as seguintes situações.

1ª situação: $y^2 = 4cx$



Se X=(x,y), então:

$$d(X, r) = |x + c|$$

e

$$d(X, r) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

X está na parábola logo:

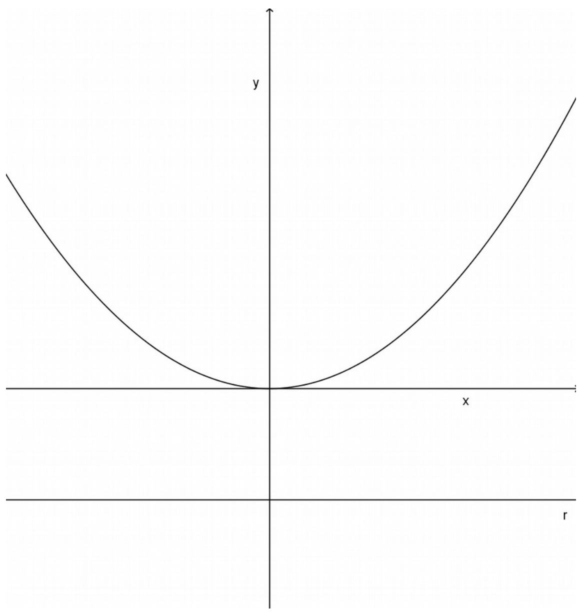
$$|x+c|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2=(x+c)^2+y^2$$

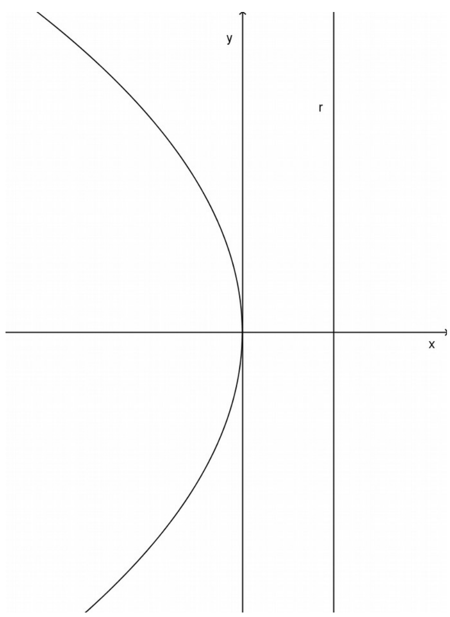
$$x^2+2cx+c^2=x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$y^2=4cx$$

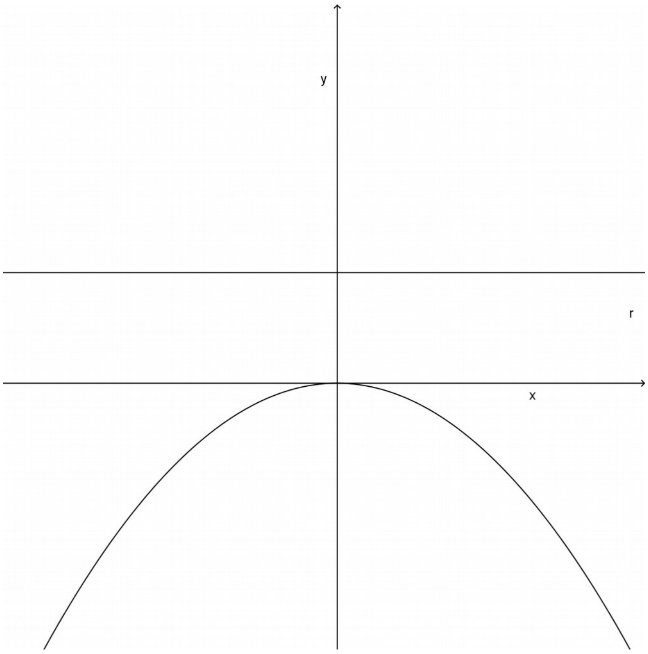
<u>2ª situação</u>: $x^2 = 4cy$



<u>3ª situação</u>: $y^2 = -4cx$



4ª situação: $x^2 = -4cy$



Consideramos em todos os casos apresentados que o vértice da parábola pertence à origem do sistema de coordenadas cartesianas.

VespeR Educação em Sistema

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Colégio Veritas

Nome: ______________________ **Nº** _____ **Ano: 2° EM** Data: __/___/2013

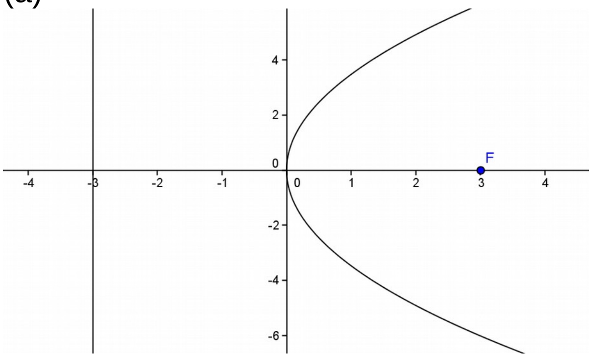
Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;
2- Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados

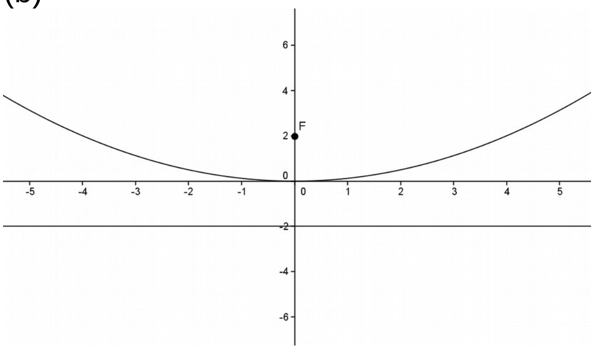
EXERCÍCIOS

1. Ache as coordenadas do foco F e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -16x$.
2. Determine o foco e o vértice da parábola $(y-5)^2 = 12(x-3)$.
3. Ache a equação da diretriz da parábola representada pela equação $y = (x-2)^2$.
4. Determine as equações das seguintes parábolas:

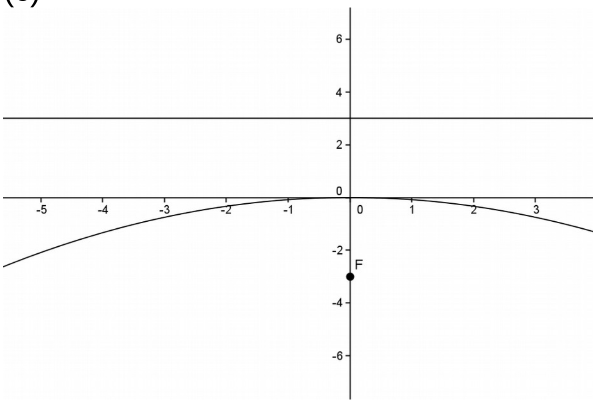
(a)



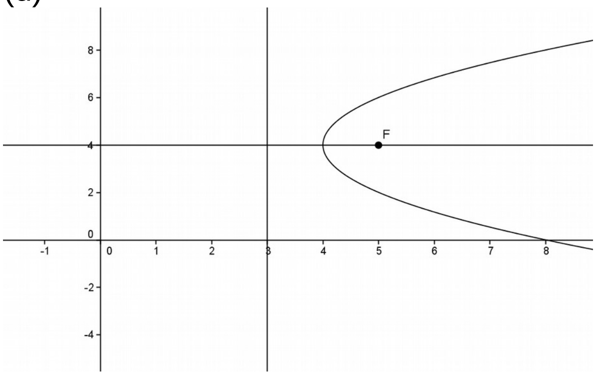
(b)



(c)



(d)



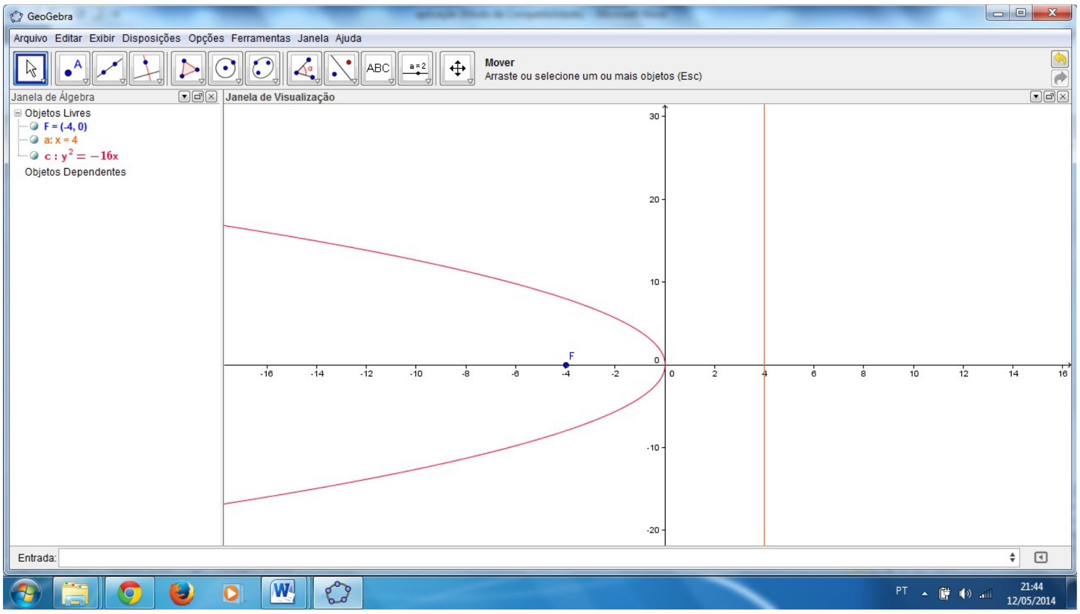
5.21.2. Desenvolvimento da Atividade 16

Tema	Parábola.
Objetivo Principal	Estudar as equações de uma parábola.
Objetivo Secundário	Identificar e visualizar a equação, o vértice e a diretriz de uma parábola.
Tempo Previsto	2 aulas (1horas e 40 minutos).
Material	Software GeoGebra, Data show, Classmate, Lousa digital.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 1 </u>:

1. Definimos no campo de entrada a equação encontrada algebricamente.
2. Comparamos a parábola encontrada com os cálculos algébricos anteriormente feitos. Ver figura 103.

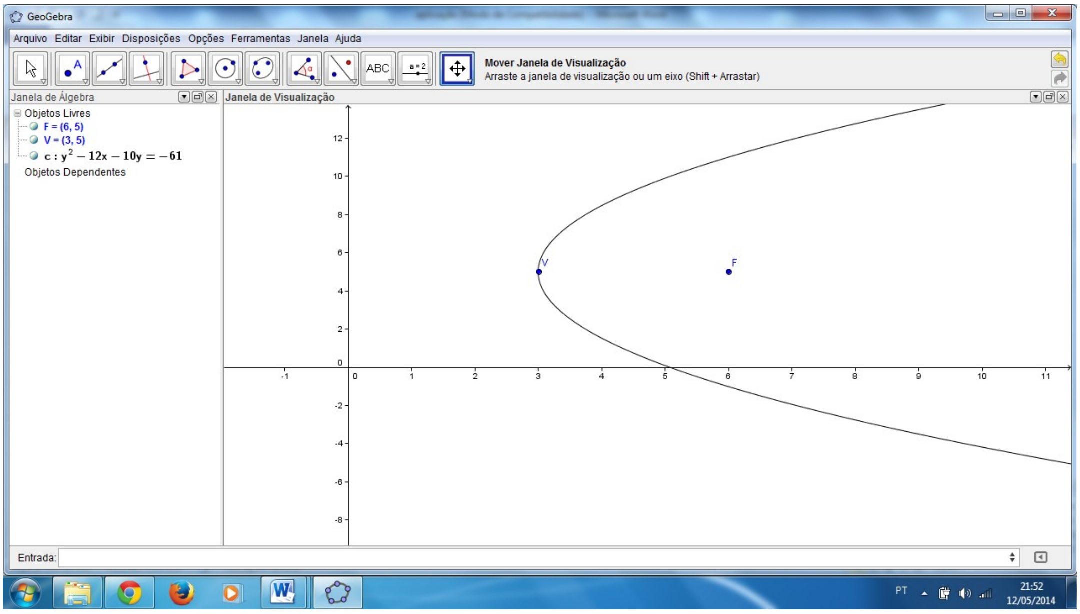
Figura 103: Resolução no GeoGebra do exercício 1 - Atividade 16.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 2</u>: análogo à resolução do exercício 1. Ver figura 104.

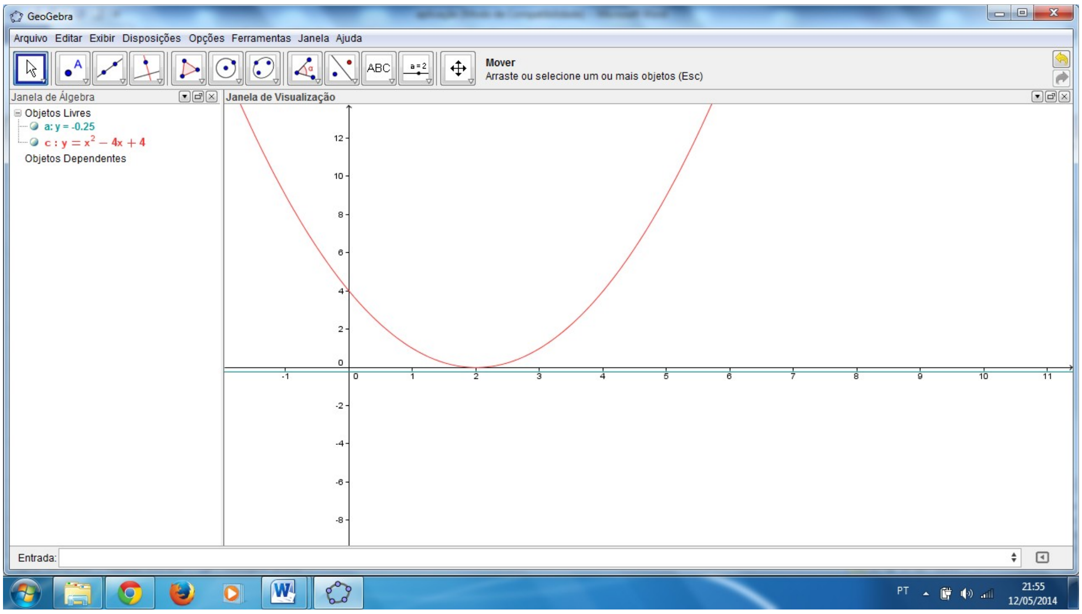
Figura 104: Resolução no GeoGebra do exercício 2 - Atividade 16.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 3</u>: análogo à resolução do exercício 1 . Ver figura 105.

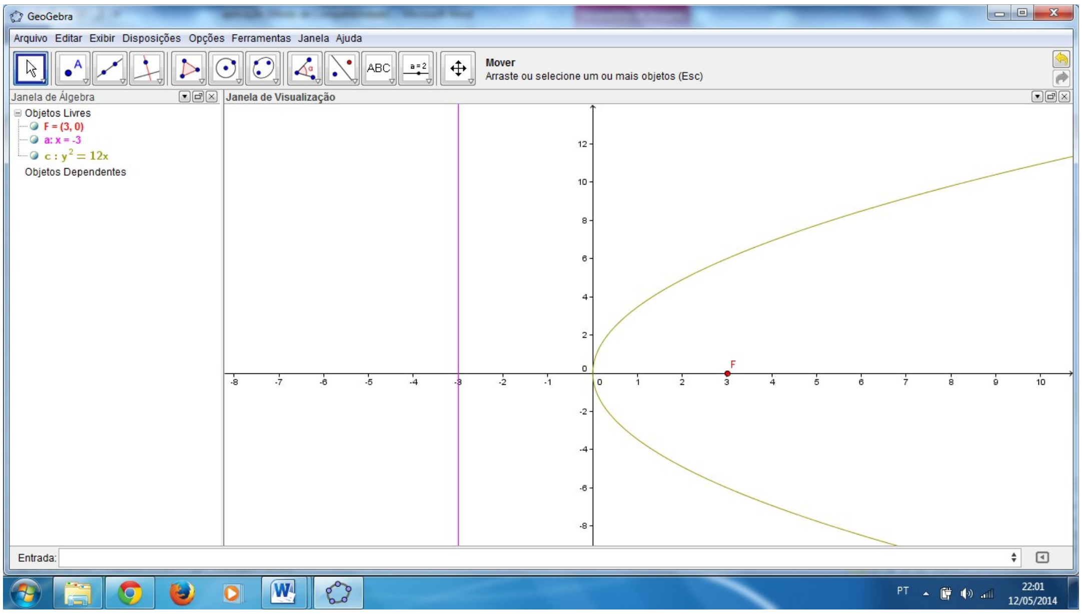
Figura 105: Resolução no GeoGebra do exercício 3 - Atividade 16.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

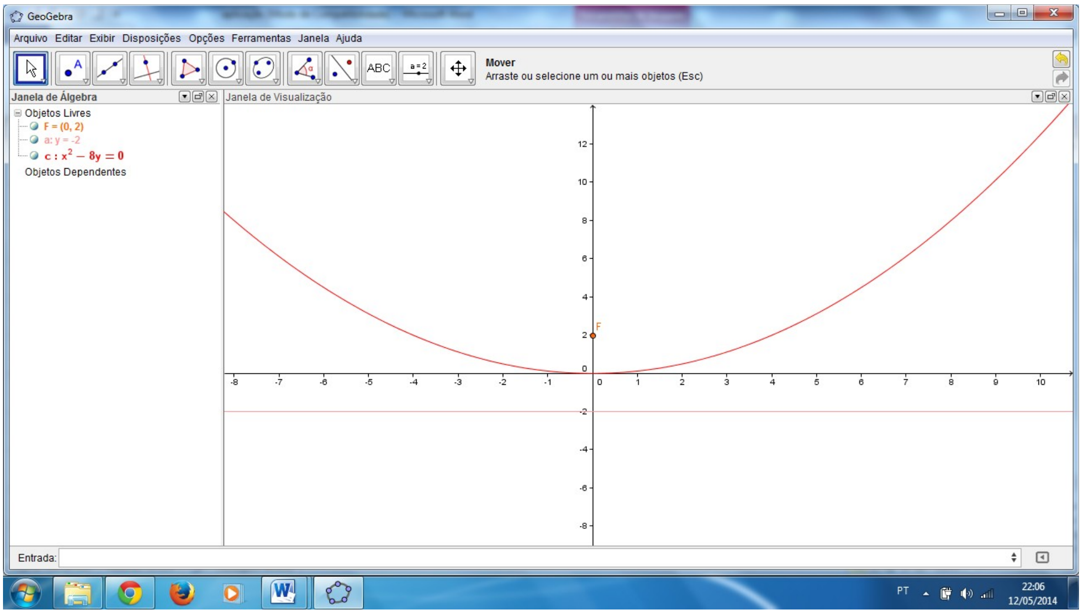
<u>Procedimentos no GeoGebra para a resolução do exercício 4</u>: análogo à resolução do exercício 2. Ver figura 106.

Figura 106: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (a) - Atividade 16.



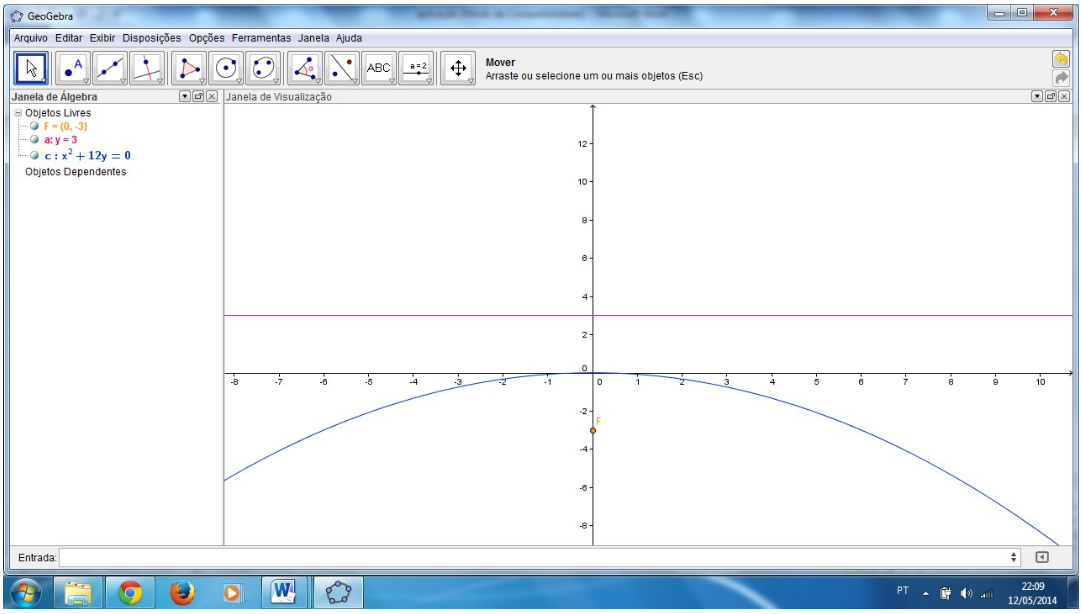
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 107: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (b) - Atividade 16.



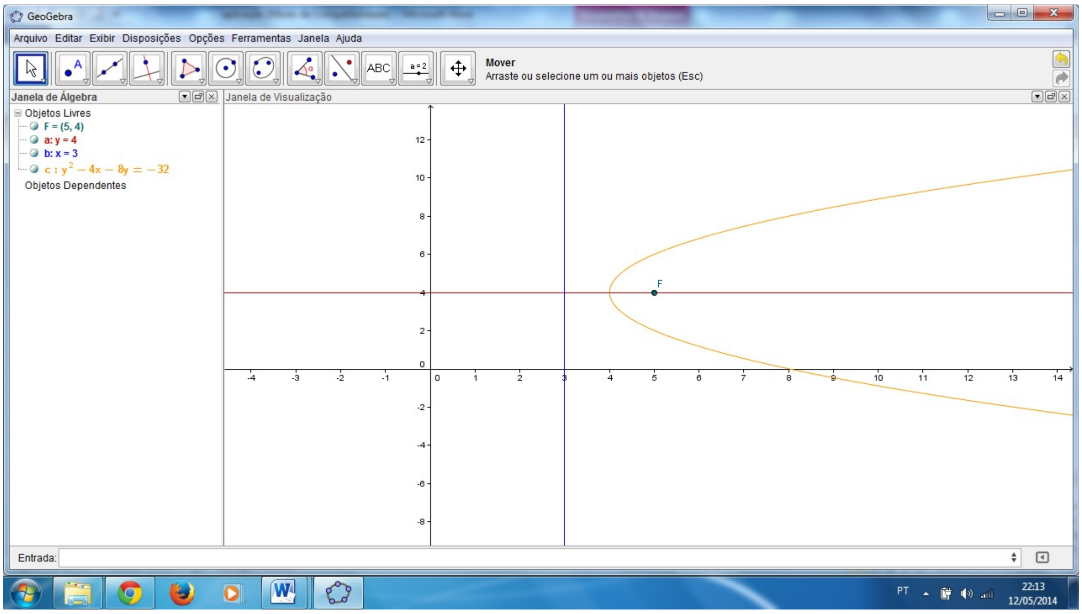
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 108: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (c) - Atividade 16.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 109: Resolução no GeoGebra do exercício 4 (d) - Atividade 16.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.21.3. Avaliação da Atividade 16

Nesta atividade, como nas anteriores que abordaram as cônicas, os estudantes que realizaram as atividades propostas pelo professor, tanto em sala de aula como em casa, não enfrentaram dificuldades para resolver os exercícios analiticamente, como também no GeoGebra. Dentre os estudantes que apresentaram dúvidas e não conseguiram fazer a atividade por inteiro chegou-se a conclusão que, pelo fato de não terem executado as atividades anteriores, não conseguiriam resolver os exercícios, tanto algebricamente quanto no GeoGebra, uma vez que as atividades seguiam uma sequência. Destacamos o seguinte comentário de um estudante.

> Quando resolvi o exercício algebricamente tinha dúvidas sobre a diretriz e o foco, mas quando fiz no GeoGebra, consegui visualizar legal o que eu estava calculando. Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.22. Atividade complementar 4 (Atividade 14-16)

Para finalizar esta sequência de atividades, os estudantes resolveram os exercícios a seguir, como tarefa de casa e enviaram para o professor via e-mail.

Veritas Entidade de Pesquisa e Educação Ressurreição - VespeR

Nome: ______________________ **Nº** ____ **Ano: 2º EM** Data: __/___/2013

Disciplina: Geometria **Professor (a): Marcos**

1- **Resolva os exercícios em folha separada e entregue na próxima aula;**
2- **Após a resolução dos exercícios estaremos resolvendo-os utilizando o software GeoGebra, para conferir os resultados**

EXERCÍCIOS

1. Os pontos A=(10,0) e B=(-5,y) estão sobre uma elipse cujos focos são F_1=(-8,0) e F_2=(8,0). Calcule o perímetro do triângulo BF_1F_2.

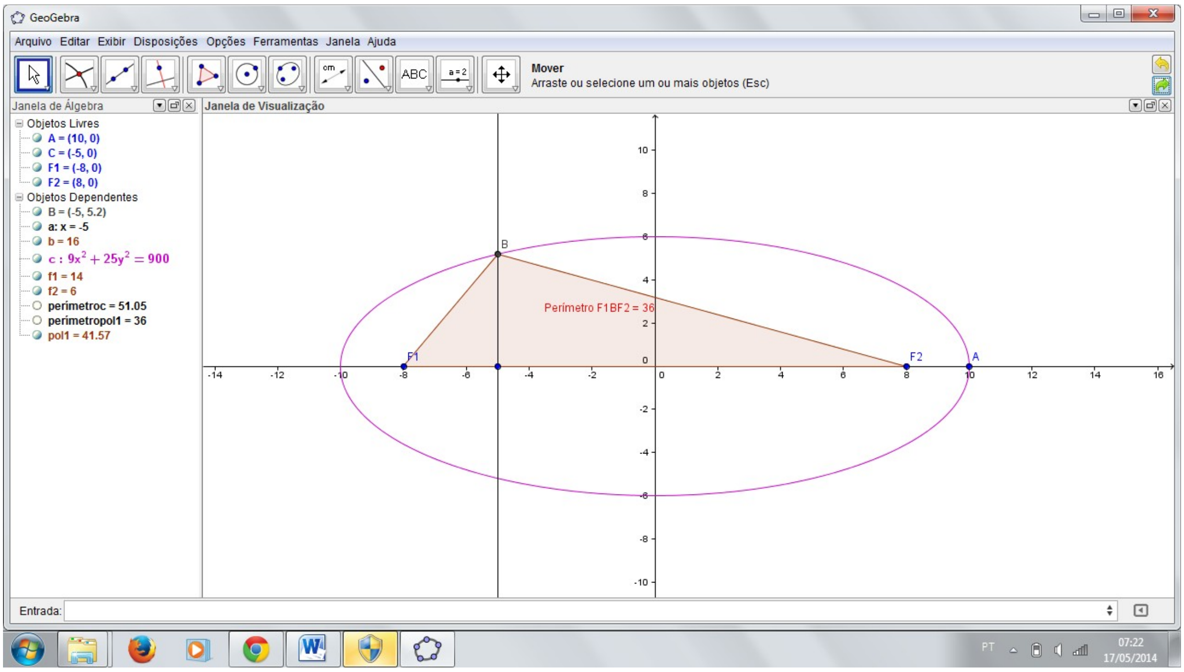
2. Construa os gráficos das cônicas $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$. São coincidentes?

3. Obtenha a equação da parábola, cuja diretriz é (d) x= 0 e cujo o foco é F=(4,1).

4. Dada a parábola de equação $x = y^2 + 10y + 27$, determine as coordenadas do vértice.

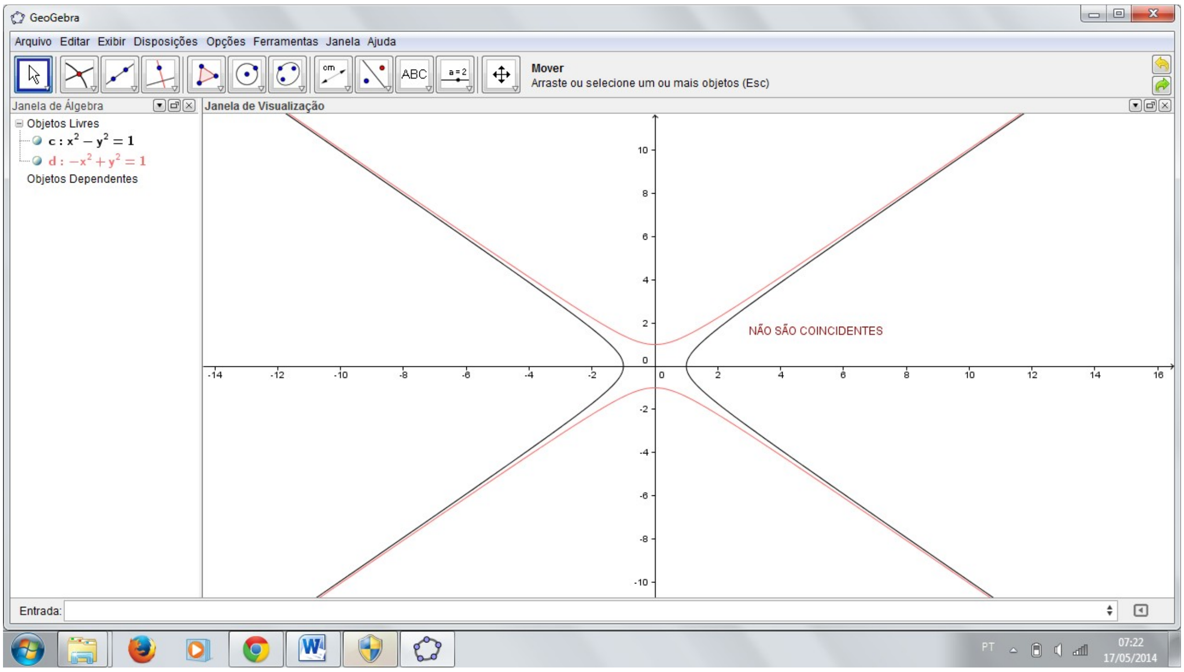
Segue a atividade de um estudante com seu comentário, sobre a atividade.

Figura 110: Resolução no GeoGebra do exercício 1 – Atividade Complementar 4.



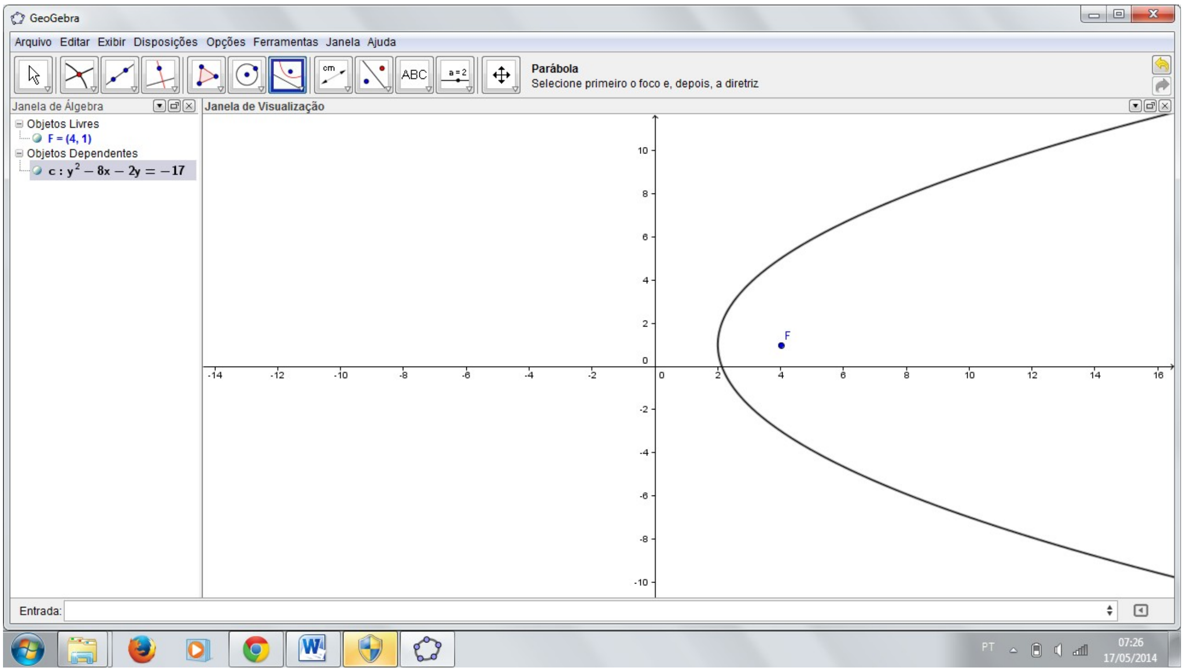
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 111: Resolução no GeoGebra do exercício 2 – Atividade Complementar 4.



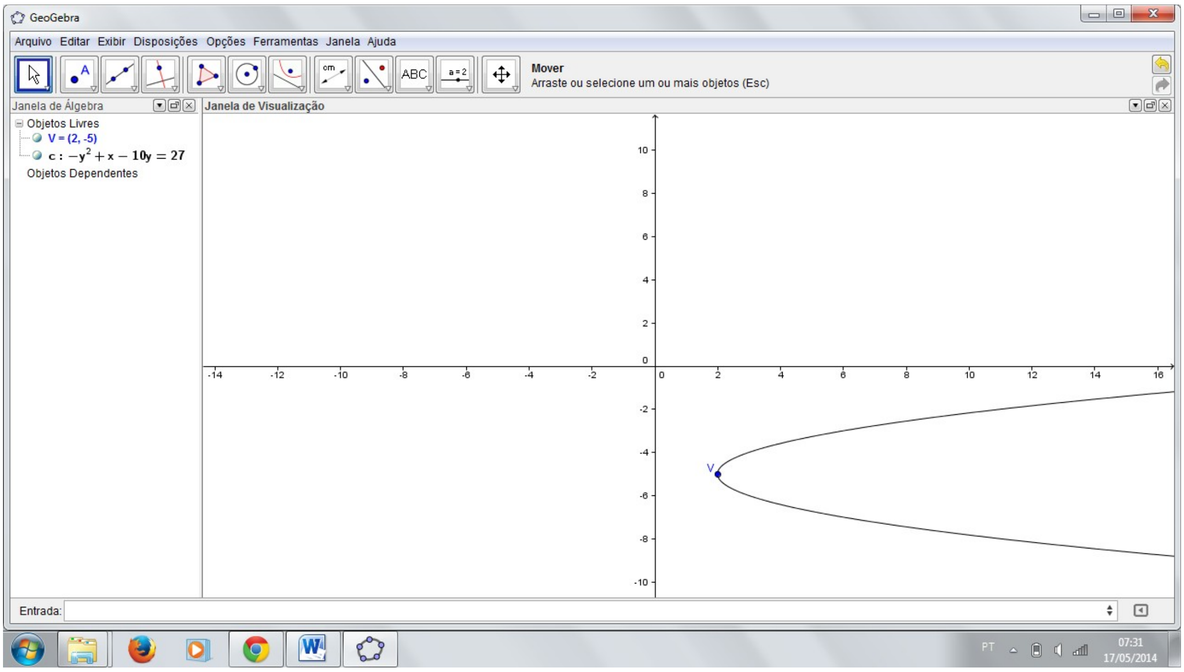
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 112: Resolução no GeoGebra do exercício 3 – Atividade Complementar 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 113: Resolução no GeoGebra do exercício 4 – Atividade Complementar 4.



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5.22.1. Avaliação da Atividade Complementar 4

Destacamos o seguinte comentário de um estudantes.

> Encontrei dificuldades para encontrar o vértice da questão 3 utilizando apenas o GeoGebra, calculei algebricamente depois marquei o vértice, os demais exercícios não tive dificuldades. Fonte: Arquivo do pesquisador.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos neste trabalho o papel das Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação e como essas tecnologias vem sendo utilizadas como ferramentas que auxiliam o processo de ensino e aprendizado. Verificamos também a importância da formação dos professores para a utilização dessas tecnologias e os esforços criados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo para proporcionar uma inclusão digital dentro das escolas. Também destacamos o uso do computador como um recurso de grande ajuda no processo de ensino aprendizagem e a importância do professor no uso de computadores em sala de aula.

O tema desta pesquisa teve como foco a utilização de software na educação. Para isso, desenvolvemos uma sequência didática que tratou da utilização do software GeoGebra no ensino de Geometria Analítica onde desenvolvemos os conceitos de Geometria Analítica por meio da execução de exercícios e posteriormente a utilização do software, despertando nos estudantes o interesse e a curiosidade em aprender o conteúdo.

A escolha da turma para este trabalho se deu pelo conteúdo de Geometria Analítica ser do segundo ano do Ensino Médio. O comprometimento dos estudantes foi muito bom, recebemos vários e-mails com dúvidas sobre a resolução dos exercícios. Após algumas dificuldades iniciais enfrentadas pelos estudantes na resolução dos exercícios no GeoGebra, pois tinham dificuldades em associar os exercícios teóricos com a sua resolução no software, os estudantes puderam desenvolver e concluir as atividades propostas.

Para desenvolver esta proposta de trabalho no Ensino Público, deve seguir o mesmo processo aqui apresentado, fazendo algumas adaptações para alcançar os objetivos. Dentre elas a questão da utilização da sala de informática que deverá ser agendada previamente, solicitar aos alunos que possuem notebook para trazer as aulas. Se for no período da noite muitos alunos trabalham não sendo possível trabalhar em outro horário para plantão de duvidas isso fará com que o tempo aumente.

Esta atividade foi desenvolvida no segundo ano em 2013, no ano seguinte já no terceiro ano os estudantes fazem uma revisão dos conteúdos do primeiro e segundo ano, ao revisar o conteúdo Geometria Analítica os estudantes por conta própria em seus tabletes e celulares baixaram o programa GeoGebra para desenvolver as atividades, fale a pena ressaltar que em relação aos anos anteriores as notas dos alunos foi acima da média.

Destacamos também a diferença entre visualização e demonstração matemática pois, o que é visualmente aceito pode não ser matematicamente comprovado, isso pode ser observado ao comparar as demonstrações como os desenhos no GeoGebra.

Acreditamos que este trabalho possa proporcionar aos professores inspiração para utilizar softwares educacionais em suas aulas, tornando-as mais atrativas e significativas para os estudantes. Destacamos o software GeoGebra como uma ferramenta didática no auxílio e apoio ao professor dentro e fora da sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2005.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcinide. **Inclusão Digital do Professor.** São Paulo: Articulação, 2006.

ÁVILA, Geraldo. **Objetivos do ensino da Matemática.** Revista do Professor de Matemática, n° 27,

BANDEIRA, Vinícius. **Descartes: A metafísica sob o jugo da razão**. Disponível em: <http://www.consciencia.org/descartes-a-metafisica-sob-o-jugo-da-razao>. Acessado em 10 de setembro de 2014.

BENNEMANN, M. ; ALLEVATO, N. S. G. A promoção da educação Matemática crítica por meio do uso das tecnologias de informação e comunicação, **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, vol. 2, n°2, pp. 49-55, 2013.

BORBA, M. C. SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática critica - A questão da democracia.** Campinas: Papirus, 2001, p. 135.

BORBA, M. C. SKOVSMOSE, O. **Educação criticar incerteza, Matemática, responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Fundamental). **Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática**. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Fundamental). **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000.

CALANI, M. C. **Conceitos Geométricos Através da Linguagem Logo**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Departamento de Ciência da Computação, IMECC, Unicamp, Campinas, 1981.

CARMO, Josué G. B. do, **A Implantação da Informática nas escolas segundo os PCN.** Disponível em: <http://www.educacaoliteratura.com/index%2051.htm>. Acesso em: 15 de setembro de 2014.

CHAVES, E. O. C. **Uso de Computadores em escolas, fundamentos e críticas**. Disponível em: <http://www.fe.unb.br/catedraunescoead/areas/menu/publicacoes/monografias-sobre-tics-na-educacao/o-uso-das-tecnologias-na-educacao-computador-e-internet>. Acesso em: 15 de setembro de 2014.

D' AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática uma visão do estado da arte, **Revista da Faculdade de educação**, Campinas: Unicamp, vol. 4, nº1, março 1993.

FRANCHI, R. H. O. L. Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na Informática como possibilidades para a Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides – A história da Geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**. 2ª ed. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

PAVANELLO, R. M. – **O Abandono da Geometria no Brasil: Causas e Consequências**. Revista Zetetike, ano I, São Paulo, 1993.

REVISTA NOVA ESCOLA, Edição especial n° 029. São Paulo: Editora Abril, 2009.

SANTOS, I. N. **Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

SANTOS, I. N. **Atividades exploratórias de Geometria Analítica Plana utilizando o GeoGebra**. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2011/Ivan%20dos%20Santos.pdf>. Acesso em: 10 de outubro de 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação.

SKOVSMOSE, O - **Cenários para investigação.** Disponível em: <ttp://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf>. Acesso em: 01/09/2014

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/Nied, 1999.

VALENTE, José Armando, **Por quê o Computador na Educação.** Disponível em <http://www.nossacasa.net/educ/texto.asp?texto=55>. Acesso em: 09 de setembro de 2014

VILELA, Luciane Ribeiro. A Formação de educadores na era digital, **Educação Temática Digital**. Área temática: Educação, Comunicação & Tecnologia. Vol. 2, n° 8, 2007. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/etd/article/view/1758/1600>. Acesso em: 15 de setembro de 2014.

VYGOSTSK, L. S.. **A formação social da mente**, São Paulo: Martins Fontes, 1984.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam Software de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

APÊNDICE A – GABARITO DAS ATIVIDADES

ATIVIDADE 2

1. $d=\sqrt{13}$.
2. $d_{AB}=\sqrt{26}$, $d_{BC}=\sqrt{72}$, $d_{AC}=\sqrt{26}$

Como a distância entre $d_{AB}=d_{AC}$ o triângulo é isósceles.

3. $d=\sqrt{25}=5$.
4. $d_{AB}=4$, $d_{BC}=3$, $d_{AC}=5$

Assim o perímetro do triângulo ABC é 12.

ATIVIDADE 3

1. $P_M=(2,5)$.
2. O ponto médio entre A e B é $(9,4)$, o ponto médio entre A e $(9,4)$ é (6,1), o ponto médio entre B e $(9,4)$ é (12,7).
3. Os pontos que dividem AB em quatro partes iguais são (6,1) ; (9,4) ; (12,7).
4. O ponto médio entre P e R é (-2 ; 1,5) .
5. A distância entre o ponto médio (-2 ; 1,5) é $\sqrt{55,25}=7,43$
6. O comprimento da mediana com a extremidade no vértice Q é de 7,43.

ATIVIDADE 4

1. Os Pontos A, B e C são colineares.
2. O valor de y para os pontos A, B e C sejam colineares é 4,5.
3. O valor de q é de 10.
4. O ponto que intercepta o eixo das ordenadas é (0 ; 1,5).

ATIVIDADE 5

1. A reta referente ao lado AB é y – 3x = 0.

   A reta referente ao lado AC é y = 0.

   A reta referente ao lado BC é y + x - 4 = 0.
2. O ponto médio entre B e C é (3 ; 0,5).

   A equação da reta procurada é 1,5 x + 2y – 5,5 = 0.
3. O baricentro do triângulo A, B, C é (5,0) ao substituir na reta 5x – 3y = 0, observamos que a reta não passa pelo baricentro do triângulo.

ATIVIDADE 6

1. O ponto interseção é (-1, -3).
2. Tomando os pontos A=(0,4) , B=(1,0) , C=(0,2) , D=(4,0) , as equações das retas são 4x + y – 4 = 0 e x + 2y – 4 = 0, o ponto de interseção entre as retas é (0,6 ; 1,7).
3. Os pontos de interseção entre as retas são (1,5) , (1,1) e (5,1) o perímetro do triângulo formando pela interseção das retas é 13,66.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1

1. (a) 7x + 2y – 7 = 0

(b) O ponto médio entre A e B é (2 ; -3,5) a equação da reta que passa pelo ponto médio e o ponto C é 1,5x + 4y + 11 = 0.

(c) O ponto médio entre A e C é (-0,5 ; -1) a distância entre o ponto médio e o ponto B é $\sqrt{42,25}$.

2. Tomando os pontos de interseção A=(0,0) , B=(4,3) , C=(3,4), a distância entre os pontos 5 , 5 e 1,41, o triângulo é isósceles.

ATIVIDADE 7

1. A equação reduzida da reta é $y=\frac{2}{3}x+\frac{17}{3}$
2. O coeficiente angular da reta é $\frac{-5}{3}$
3. Ponto médio entre B e C é (1,9) a equação reduzida da reta que passa pelo ponto médio e o ponto A é y = 2x + 7, o coeficiente angular da reta é 2

ATIVIDADE 8

1. $m=\frac{-3}{2}$
2. $y=2x-3$
3. $Q=(7,4)$
4. Resposta do aluno
5. x + 2y – 4 = 0
6. A equação h_a tal que h_a é perpendicular à BC, por A é 6x + y + 3 = 0.

   A equação h_b tal que h_b é perpendicular à CA, por B é x + 2y + 4 = 0

A equação h_c tal que h_c é perpendicular à AB, por C é 4x - 3y – 5 = 0

ATIVIDADE 9

1. $tg\theta = \frac{8}{7}$
2. Ângulo A = 135°, Ângulo B = 30° , Ângulo C = 15°

ATIVIDADE 10

1. $d = \frac{1}{\sqrt{13}} = 0{,}28$
2. d = 2,4
3. d = 4

ATIVIDADE 11

1. Área do triângulo é 8
2. Área do quadrilátero é 34
3. O ponto C é (0,9) ou (0,1)

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2

1. Reta paralela y = 5x – 10, reta perpendicular y = 6
2. M = (7,24 ; 5,66)
3. X + y = 4 ou x – y = 8,49
4. a- G = (1,2)

ATIVIDADE 12

1. $(X-2)^2 + (Y+1)^2 = 17$
2. $(X+2)^2 + (Y-5)^2 = 4$
3. $(X-1{,}5)^2 + (Y-2{,}5)^2 = \frac{31}{2}$
4. $2X + 3Y + 15 = 0$

ATIVIDADE 13

1. (a) P é exterior a circunferência.

   (b) P é interno a circunferência.

2. A reta é tangente a circunferência.
3. (a) A circunferência e a reta são tangentes.

   (b) A interseção entre a circunferência e a reta são dois pontos (-2,6) e $\left(\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$.
4. O comprimento da corda é $4\sqrt{2}$.
5. As circunferências são tangentes interiores.
6. Os pontos de interseção são (6,5) e (8,6)

ATIVIDADE 14

1. (a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

   (b) $\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

   (c) $\frac{(y+14)^2}{169}+\frac{(x+9)^2}{25}=1$

   (d) $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{12}=1$
2. Distância focal é 10, excentricidade é 1,25
3. Focos (0,13) e (0,-13)
4. Focos (-5,2) e (11,2)

ATIVIDADE 15

1. (a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

   (b) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$

   (d) $\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{12}=1$
2. Distância focal 10
3. (13,0) e (-13,0)
4. (-2,2) e (6,2)

ATIVIDADE 16

1. Foco (-4,0) , equação da diretriz x = 4
2. Foco (6,5) , vértice (3,5)

3. $y+\frac{1}{4}=0$
4. (a) $y^2=12\,x$
   (b) $x^2=8\,y$
   (c) $x^2=-12\,y$
   (d) $(y-4)^2=-16+4\,x$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR 4

1. 36
2. Não são coincidentes
3. $(y-1)^2=-16+8\,x$
4. (2,-5)

APÊNDICE B – POSSÍVEIS DIFICULDADES NA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Tabela 7: Possíveis dificuldades na aplicação das atividades e suas respectivas soluções.

Atividades	Possíveis dificuldades	Soluções
Atividade 1	Não possuir o domínio básico do computador.	Aula expositiva sobre a utilização do computador, além de comandos do GeoGebra.
Atividade 2	Distância entre o ponto e a origem.	Definir qual a origem do plano cartesiano.
Atividade 3	Mediana de um triângulo.	Definir mediana de um triângulo.
Atividade 4	Pontos colineares.	Apresentar a função retas perpendiculares no GeoGebra.
Atividade 5	Cálculo algébrico do baricentro.	Demonstração do cálculo do baricentro de um triângulo.
Atividade 6	Calculo algébrico do perímetro de um triângulo, tendo três retas.	Desenvolver o exercício no GeoGebra para a visualização do exercício.
Atividade complementar 1	Distância entre objetos (ponto, reta e segmento) no GeoGebra.	Demonstrar como determinar distância entre objetos no GeoGebra.
Atividade 7	Diferentes formas da equação da reta.	Demonstrar quais e como determinar as equações da reta tanto algebricamente e no GeoGebra.
Atividade 8	Definição de retas paralelas e perpendiculares.	Demonstrar algebricamente as condições de paralelismo e perpendicularismo entre duas retas.
Atividade 9	Calcular um ângulo a partir de sua tangente.	Demonstrar utilizando a calculadora do próprio Windows como obter um ângulo possuindo sua tangente.
Atividade 10	Não encontradas.	
Atividade 11	Associar o cálculo algébrico e o GeoGebra.	Demonstrar que possuindo um valor calculado algebricamente podemos inserir no GeoGebra.
Atividade complementar 2	Utilizar uma distância ou um ângulo já determinado no exercício.	Demonstrar os recursos do GeoGebra para distância e ângulo fixo.
Atividade 12	Introduzir o comando (equações) na	Aula expositiva de como introduzir

	caixa de entrada.	equações da circunferência no GeoGebra pela caixa de entrada.
Atividade 13	Calculo algébrico.	Ênfase nos cálculos algébricos sobre posições relativas envolvendo circunferências.
Atividade complementar 3	Interpretação do exercício.	Fazer o exemplo passo a passo junto com os estudantes.
Atividade 14	Introduzir o comando (equações) na caixa de entrada.	Aula expositiva de como introduzir equações da elipse no GeoGebra pela caixa de entrada.
Atividade 15	Não encontradas.	
Atividade 16	Como determinar a diretriz de uma parábola.	Demonstrar algebricamente o cálculo da diretriz de uma parábola.
Atividade complementar 3	Determinar o vértice de uma parábola no GeoGebra, possuindo a equação da parábola.	Calcular algebricamente o vértice da parábola e inserir na caixa de entrada do GeoGebra.