UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO

EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

Roberta Angela da Silva

FOLHAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA: CONCEITO E APLICAÇÕES

São Carlos

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

Roberta Angela da Silva

FOLHAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA: CONCEITO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas à Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, sob orientação do Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini.

São Carlos

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

S586fa

Silva, Roberta Angela da.
Folhas de atividades para o ensino de função afim e quadrática : conceito e aplicações / Roberta Angela da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
164 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Conceitos. 3. Estudantes - atividades. 4. Funções. 5. Autonomia. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Roberta Angela da Silva

Folhas de Atividades para o Ensino de Função Afim e Quadrática: Conceito e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Universidade Federal de São Carlos

São Carlos, ____ de ______________ de 2014.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM/UFSCar - orientador

Sandra M. S. de Godoy

Profa. Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy
ICMC-USP

Grazielle F. Barbosa.

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
DM-UFSCar

Dedicatória

À minha família. À pessoa que mais me fez amar a arte de ensinar Matemática, minha segunda mãe Zélia. Aos meus amigos que definitivamente são os melhores do mundo. Ao meu querido orientador Roberto pela paciência e compreensão em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini por ter me mostrado o rumo a seguir quando eu parecia estar perdida. Obrigada por não ter desistido de mim e ter entendido todos os momentos pelos quais passei.

Aos professores deste Mestrado Profissional, em especial, a Salvador, Malagutti, Paterlini, Ivo e Yuriko, a quem tive o prazer de reencontrar.

Aos meus pais, irmãos e aos colegas de curso que sempre me ajudaram e eram mais um motivo para enfrentar horas de viagem semanal. Obrigada pelos momentos de estudos, companhia nos intervalos e nos infinitos cafés. Agradeço especialmente aos amigos Raphael Sanches, Rafael Mazza, Marcos Vinicius Fernandes e Felipe Regatieri que me ajudaram diretamente em vários momentos. Ao meu amigo do coração João Paulo (JOTA) por ser a pessoa que mais me incentivou a fazer o mestrado.

E agradeço a Deus acima de TUDO.

Resumo

Após observar, estudar e avaliar o desenvolvimento do corpo discente para o qual leciono, meu orientador e eu decidimos que as turmas "escolhidas" para a aplicação do trabalho seriam as que apresentavam maior dificuldade de aprendizagem, no caso, o primeiro ano do Ensino Médio e ocorreria em três cidades: Jaboticabal, Monte Alto e Pontal. O conteúdo matemático escolhido para ser trabalhado surgiu das dificuldades destes estudantes com o tema funções afim e quadrática, bem como da importância destes temas quando aplicados na disciplina de Física, por exemplo. Nas escolas em questão, o conteúdo de função afim e função quadrática é revisto no terceiro ano do Ensino Médio e é notório que a dificuldade persiste. Para tentar facilitar e colaborar com o ensino desse conteúdo, foram confeccionadas quatro Folhas de Atividades para trabalhar a interpretação de texto, o raciocínio e, por consequência, o conhecimento sobre o assunto, de modo que o estudante construísse o conceito de função afim e função quadrática. Foram preparadas atividades de níveis fácil e médio que exigissem uma boa interpretação de texto, que despertassem a curiosidade e proporcionassem, durante a resolução, a interação entre os estudantes, dos quais se esperava: identificar regularidades; converter dados tabulares algébricos em gráficos, desenvolver uma situação problema sem explicação anterior; relacionar situações com o conceito de função afim, usando proporcionalidade; relacionar situações com o conceito de função quadrática; analisar graficamente a função quadrática; usar máximos e mínimos; tratar os problemas no campo numérico e fazer alguns ensaios no campo algébrico; ter entusiasmo no desenvolvimento da atividade; participar na discussão da atividade; procurar desenvolver a situação problema com ligação a diferentes contextos; ter autonomia na resolução dos exercícios; criar estratégias e construir conhecimento, dando estrutura e ordem aos seus pensamentos, chegando a atingir um nível de abstração mais elevado. Tudo foi observado na ação da maioria dos estudantes. Organizaram-se em duplas para a resolução das Folhas de Atividades e debateram as dúvidas durante a resolução. Antes mesmo que comentasse sobre os resultados, em uma próxima aula, eles já comentavam entre si o método que cada um havia utilizado e em qual resultado haviam chegado.

Palavras-chaves: ensino de conceito; folhas de atividades; função afim; taxa de variação; função quadrática; autonomia.

ABSTRACT

After a careful evaluatation of my students, my principal investigator and I decided that students with difficulties in higher learning will be chosen, in this case, the first year of High School students in the three cities Jaboticabal, Monte Alto and Pontal. The math content to be worked upon was chosen from the assessment of difficulty students had learning first and second degree functions, as well as the importance the subject has when applied to other disciplines, such as Physics. To facilitate learning of these subjects, four activity sheets were composed to help improve text comprehension and reasoning, and consequently subject knowledge in such a way that the student builds the foundation concepts as to derive the affine and quadratic functions. Interactive exercises of multiple difficulties were prepared to inspire curiosity between students when solving problems. The exercises were designed to allow the students as much autonomy to finding solutions. The students were expected to develop: regularity identification, table-algebraic-graphic conversions, develop a problem situation without a previous explanation; relationship with the concept of affine function, justifying its proportionality; relationship with the concept of quadratic function; graphic analysis of quadratic functions; maximums and minimums; problems treatments on numeric fields and assay for algebraic fields; enthusiasm developing the activities; participation on activities discussion; the ability developing a problem situation with connection to different contexts; that the student had as much autonomy as possible on exercises solution; that the students build strategies and knowledge, given structure and organization to their thoughts, reaching a higher level of abstraction. Students were organized into pairs and encouraged to discuss while working on the activity sheet and review with each other in other classes the methods employed to solve the problems before the solutions were provided.

Key words: activity sheet; affine function; quadratic function; autonomy; change rate; concept

Índice de Figuras

SUMÁRIO

Introdução

Ainda muito jovem, na época em que estudava no Ensino Médio, aborrecia-me o fato das pessoas, em geral, afirmarem que Matemática era uma disciplina difícil e impossível de ser compreendida. Foi isso que mais me incentivou a tentar tornar o ensino de Matemática mais significativo e com mais raciocínio.

Como leciono em geral para o Ensino Médio, um dos temas mais presentes é o das funções afins e quadráticas. Abordo esses temas no primeiro e no terceiro anos. Acho preocupante a dificuldade de compreensão desse conteúdo, particularmente porque isso ocorre mesmo no terceiro ano, quando o estudante tem mais experiência e está mais amadurecido. No terceiro ano o estudante já viu esse assunto uma vez e já o aplicou em uma situação muito significativa, o estudo da Cinemática na disciplina de Física. Mesmo assim encontra dificuldades, indicando que não fez um aprendizado significativo.

A ideia de aprendizado significativo foi desenvolvida por vários autores, dentre eles David P. Ausubel. Segundo esse autor, o conhecimento de cada indivíduo forma uma estrutura denominada "estrutura cognitivista". Um conceito ou informação nova, para fazer parte dessa estrutura, deve interagir e ancorar-se em conceitos relevantes já existentes nessa estrutura.

Com essa experiência considerei ser importante tratar em minha dissertação de mestrado o seguinte problema didático:

Como abordar os temas função afim e função quadrática no primeiro ano do Ensino Médio de modo a proporcionar um aprendizado significativo e que não se reduza à apresentação de algumas fórmulas e procedimentos."

Com o objetivo de contribuir para a solução deste problema didático, elaboramos "Folhas de Atividades". Para testar esse produto didático, nós o aplicamos em três salas de primeiro ano do Ensino Médio nas cidades de Jaboticabal, Monte Alto e Pontal, todas do interior do Estado de São Paulo.

Foram confeccionadas quatro Folhas de Atividades, sendo duas sobre função afim e duas sobre função quadrática.

Esta dissertação foi dividida em cinco capítulos acompanhando as fases da metodologia da Engenharia Didática. Usamos essa metodologia como uma forma de validação de nossos procedimentos, tendo como meta obter um produto didático que já tivesse passado por um teste de aplicação. Segue uma breve descrição do conteúdo de cada um dos capítulos.

No primeiro capítulo, de acordo com a primeira fase da Engenharia Didática (análises prévias), ressaltamos a importância dos assuntos função afim e função quadrática no Ensino de Matemática, bem como sua aplicação no Ensino de Movimento Uniforme e Uniformemente Variado, em Cinemática (Física). Nesta fase da Engenharia Didática é delimitado o assunto, no caso funções afim e quadrática, para ser possível fundamentar uma proposta de mudança para a melhoria de seu ensino.

No segundo capítulo expomos o problema enfrentado na sala de aula quanto à aprendizagem das funções afim e quadrática e propomos uma estratégia para a resolução do problema enfrentado. No caso, a estratégia é a aplicação de quatro Folhas de Atividades que são descritas nesse capítulo. Estamos na segunda fase: construção e análise *a priori*, na qual se elabora um plano para melhorar o ensino e se descrevem as atividades propostas.

No terceiro capítulo fazemos uma descrição das turmas participantes e de como ocorreu qualitativamente a aplicação das Folhas de Atividades.

No quarto capítulo, expomos e comentamos algumas resoluções de alguns estudantes fazendo uma análise quantitativa. Nesta fase, colocamos em prática o que foi elaborado (Folhas de Atividades, neste caso) e corrigimos o que for necessário.

No quinto capítulo, referente à análise *a posteriori* e validação, fazemos uma análise das Folhas de Atividades, descrevendo as dificuldades dos estudantes e tudo o que foi percebido durante a aplicação e depois dela. As Folhas de Atividades trabalhadas pelos estudantes, bem como todo o material produzido, são analisados para verificarmos se as expectativas foram alcançadas.

No Apêndice A encontram-se as quatro Folhas de Atividades do modo como foram aplicadas. No Apêndice B, o produto final com as correções e no Apêndice C está o produto final com as respostas esperadas propostas por nós.

Desejamos que este trabalho colabore no ensino de função afim e quadrática e que o material criado tenha sido satisfatório de modo a cumprir com a proposta deste Programa de Mestrado. Desejamos também que o produto obtido seja utilizado por outros profissionais da educação e que os auxilie na arte de ensinar.

Particularmente, o trabalho foi de grande proveito para o desenvolvimento profissional da autora, pois tive a oportunidade de produzir o meu próprio material didático de forma que os estudantes pudessem trabalhar com maior autonomia.

Penso também que o trabalho foi de grande proveito para os estudantes. Despertou nos meninos a curiosidade e os fez perder o medo da tão temida Matemática, pelo fato de se tratar de folhas que não fazem uso excessivo de notação algébrica.

Capítulo 1

O ensino de funções

1.1 Introdução

O conceito de função é, indiscutivelmente, de grande importância para a Matemática, bem como a construção e interpretação de suas representações. Particularmente a função afim e a função quadrática são importantes por serem as funções mais simples que descrevem fenômenos das ciências. São modelos matemáticos utilizados para o estudo de relações entre grandezas em diversas áreas do conhecimento. Tais funções propiciam aos estudantes o desenvolvimento da ideia de que é possível compreender, descrever e representar o mundo em que vivem.

Este capítulo tem como objetivo justificar a escolha do tema desta dissertação, ressaltar sua importância, dar a definição e descrever a linguagem formal com a qual é abordado na Matemática. Por fim, no final do capítulo, é feita a análise de alguns livros didáticos e de algumas sugestões de pesquisadores sobre a abordagem do tema em questão.

1.2 Importância das funções para a Matemática

O estudo de funções tem início no último ano do Ensino Fundamental, no nono ano, começando com conjuntos (e operações entre estes), relação entre grandezas e em seguida, é dada uma introdução à função afim e à função quadrática.

No início do primeiro ano do Ensino Médio, novamente os estudantes se deparam com conjuntos, no entanto, o estudo é feito de forma mais minuciosa. Um bimestre todo é gasto para conjuntos, operações entre conjuntos, relação binária, função, domínio, contra-domínio, imagem e classificação de funções. Função afim e quadrática são estudadas no segundo bimestre. No entanto, não há ênfase para o estudo de função afim, principalmente. O material didático utilizado por algumas escolas reserva apenas uma aula de cinquenta minutos para abordagem deste tema. Para a função quadrática são reservadas três aulas de cinquenta minutos cada para abordar conceito, gráficos e mínimos/máximos.

Um bom aprendizado destes dois tipos de função garante um excelente resultado na compreensão de um assunto tão importante como é o de Cinemática, na Física. Cinemática significa estudo matemático do movimento, e este estudo é realizado, em grande parte, através da função afim e da função quadrática para Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado, respectivamente. É extraordinário quando o estudante consegue ver a Matemática aplicada a uma situação, seja na Física ou em um contexto cotidiano. Isto a torna menos abstrata e ressalta sua importância.

Lima (1997), escreve que "...os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo matemático para as operações de contagem e medida; as funções [...], cada uma delas é estudada como modelo matemático adequado para representar uma situação específica.", e completa:

> "Afim de saber qual o tipo que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função".

Os dois tipos de funções elementares tratados nesta dissertação são a afim e a quadrática, muito utilizadas nesta fase do Ensino Básico, pois retratam diversas situações e são de fácil aplicação.

Uma função $f:\Re \to \Re$ chama-se função afim quando existem constantes $a, b \in \Re$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \Re$, segundo Lima (1997).

Observe que são funções afins $f:\Re \to \Re$ a função identidade definida por $f(x) = x$ e as translações definidas por $f(x) = x + b$. São casos particulares de funções afins quando se tem:

- $b = 0$, $f(x) = ax$ chamada função linear;
- $a = 0$, $f(x) = b$ chamada função constante.

É imprescindível, no ensino de função afim, que se explore bastante a taxa de variação, pois esta é a principal propriedade que caracteriza as funções afins.

A taxa de variação de uma função $f:\Re \to \Re$ num intervalo $\lfloor x_{1,} x_2 \rfloor$é definida por

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

No caso da função afim, sua taxa de variação em qualquer intervalo $\lfloor x_{1,} x_2 \rfloor$ é constante, pois

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Observemos que uma função afim também pode ser caracterizada pelo fato de que sua taxa de variação em qualquer intervalo é constante. Para demonstrar esta propriedade, seguiremos em linhas gerais o texto Lima (1997), páginas 95 a 100.

Começamos com o seguinte Teorema, que provém de propriedades importantes do conjunto dos números reais:

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja $\varphi : \Re \to \Re$ uma função estritamente monótona. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in \Re$.

(2) Pondo $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(x) = ax$ para todo $x \in \Re$.

(3) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in \Re$.

Para a demonstração consideramos o caso em que φ é estritamente crescente. O caso em que φ é estritamente decrescente é análogo. Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1). Para mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2), provaremos primeiro que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in Z$, a hipótese (1) acarreta que $\varphi(rx) = r\varphi(x)$, seja qual for $x \in \Re$. Com efeito, tem-se

$$n\varphi(rx) = \varphi(nrx) = \varphi(mx) = m\varphi(x),.$$

logo

$$\varphi(rx) = \frac{m}{n}\varphi(x) = r\varphi(x).$$

Seja $a = \varphi(1)$. Como $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0\varphi(0) = 0$, a monotonicidade de φ nos dá $a = \varphi(1) > \varphi(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r\varphi(1) = ra = ar$ para todo $r \in Q$.

Mostremos agora que se tem $\varphi(x) = ax$ para todo $x \in \Re$. Por absurdo, suponhamos que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $\varphi(x) \neq ax$. Admitamos $\varphi(x) < ax$. (Para o caso $\varphi(x) > ax$, o tratamento seria análogo). Temos

$$\frac{\varphi(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{\varphi(x)}{a} < r < x.$$

Então $\varphi(x) < ar < ax$, ou seja, $\varphi(x) < \varphi(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois φ .é estritamente crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $\varphi(r) < \varphi(x)$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

Para a implicação (2) $\Rightarrow$ (3) temos $\varphi(x) = ax$. Logo

$$\varphi(x + y) = a(x + y) = ax + ay = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in \Re .$$

Logo vale (3).

Para provar a implicação (3) $\Rightarrow$ (1) primeiramente será verificada para $n \in \mathrm{N}$.

Temos $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in \Re$. Assim, para todo $n \in \mathrm{N}$,

$$\varphi(nx) = \varphi(x + x + ... + x) = \varphi(x) + \varphi(x) + ... + \varphi(x) = n\varphi(x)$$

Notemos agora que $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0$

Então

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x),$$

logo $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Daí, se $n \in \mathrm{Z}_-$, temos

$$\varphi(nx) = \varphi(-(-n)x) = -\varphi((-n)x) = -(-n)\varphi(x) = n\varphi(x).$$

Isso termina a demonstração do Teorema.

Este resultado nos permite caracterizar a função afim, usando o resultado abaixo:

Teorema: Seja $f : \Re \to \Re$ uma função estritamente monótona. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

A demonstração deste Teorema, que faremos agora, é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para fixar ideias, suporemos que a função f seja crescente. Vejamos que isso implica que $\varphi : \Re \to \Re$ também é crescente. Seja $h_1 < h_2$. Temos

$$\varphi(h_1) = f(0 + h_1) - f(0) < f(0 + h_2) - f(0) = \varphi(h_2)$$

Portanto φ é crescente. Ainda $\varphi(0) = 0$, já que, para $h = 0$,

$$\varphi(0) = f(x + 0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Notemos agora que, para quaisquer $h, k \in \Re$, temos

$$\varphi(h + k) = f(x + h + k) - f(x) = f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x) = \varphi(h) + \varphi(k)$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \Re$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta

$$f(h) - b = f(0+h) - f(0) = \varphi(h) = ah$$

ou seja, $f(h) = ah + b.$ Trocando h por x, provamos que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \Re$.

O segundo caso de função elementar abordado neste trabalho é a função polinomial de grau dois, também chamada de função quadrática. Segundo Lima (1997), página 114, "uma função $f : \Re \to \Re$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e $c,$ com $a \neq 0,$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \Re$".

Em nossas escolas do Ensino Médio, o ensino da função quadrática se reduz praticamente ao estudo da sua relação com o seu gráfico, e da percepção das suas propriedades através da observação do gráfico. Esse estudo pode ser feito pelo que denominamos "completamento de quadrado". O procedimento usual segue abaixo, conforme se vê em alguns livros didáticos, como em Smole (2003), página 135 e em Lima (1997), página 122.

Para iniciar o completamento do quadrado, fatoramos o coeficiente a, lembrando que $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

Agora fazemos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

do que segue

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Essa é a chamada *forma canônica* da função quadrática.

Uma primeira aplicação é a obtenção de uma fórmula para as raízes da equação $f(x) = 0$. De fato,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Para extrair a raiz quadrada desta expressão, precisamos distinguir o sinal de

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Essa expressão chama-se *discriminante* da função quadrática. Suponhamos primeiro que $\Delta \geq 0$. Podemos extrair a raiz quadrada na expressão acima e obter

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Essa é a fórmula das raízes da função quadrática $f(x)$. Observe que se $\Delta < 0$ então $f(x)$ não se anula e, em particular, seu gráfico não intercepta o eixo das abscissas. Por outro lado, se $\Delta = 0$ a expressão acima fornece uma única raiz, que é $x = -b/2a$.

Outra consequência da *forma canônica* é que ela nos permite perceber que o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação a uma certa reta. De fato, dados $x_1 \neq x_2$, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow a\left[\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x_1+\frac{b}{2a} = -\left(x_2+\frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

o que significa que $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ quando x_1 e x_2 são equidistantes de $-b/2a$. Portanto a reta vertical $x = -b/2a$ é um eixo de simetria do gráfico.

Continuando com o exame da *forma canônica*, percebemos que $f(x)$ atinge um valor mínimo se $a > 0$ e um valor máximo se $a < 0$. Esse menor ou maior valor é atingido quando $(x + b/2a)^2 = 0$, ou $x_v = -b/2a$. Essa é a chamada abscissa do vértice do gráfico. A ordenada correspondente é $y_v = f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Assim (x_v, y_v) é o ponto extremo do gráfico, também denominado vértice.

Ainda da forma canônica vemos que se $a>0$ os valores de $f(x)$ crescem arbitrariamente, e se $a<0$ os valores de $f(x)$ decrescem arbitrariamente. Com essas informações podemos desenhar o gráfico de $f(x)$. A curva desse gráfico é chamada *parábola*. Em seguida seguem alguns gráficos:

$a>0$ e $\Delta<0$

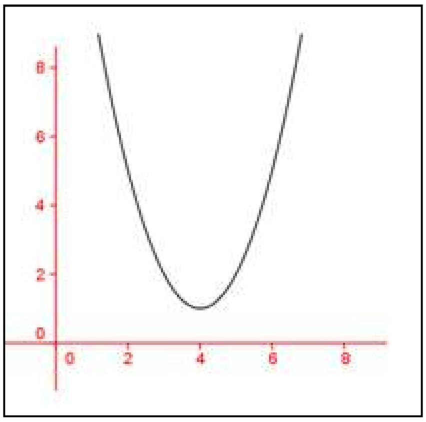


Figura 1 – Exemplo de uma parábola

$a<0$ e $\Delta<0$

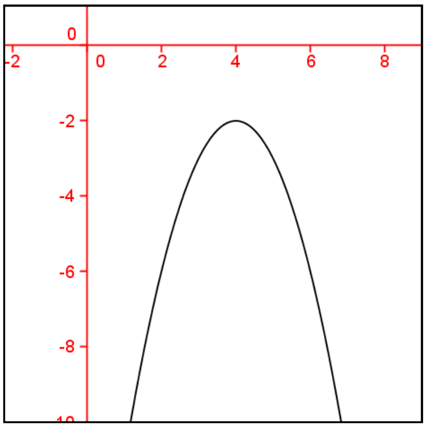


Figura 2 – Exemplo de uma parábola

$a>0$ e $\Delta=0$

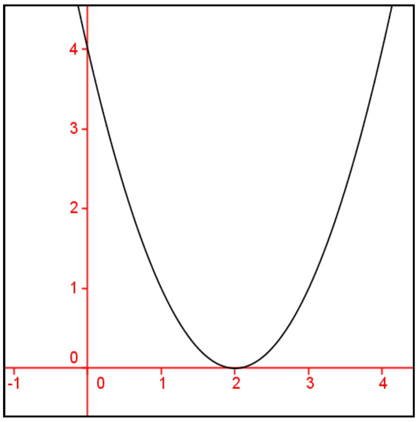


Figura 3 – Exemplo de uma parábola

$a<0$ e $\Delta=0$

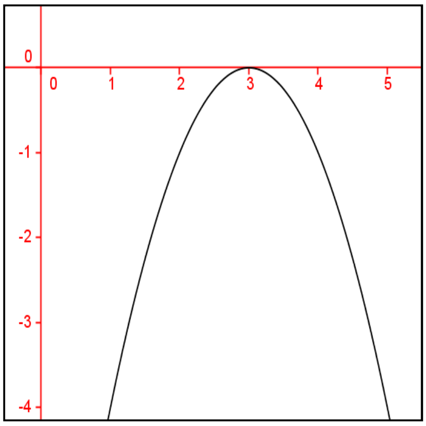


Figura 4 – Exemplo de uma parábola

$a>0$ e $\Delta>0$

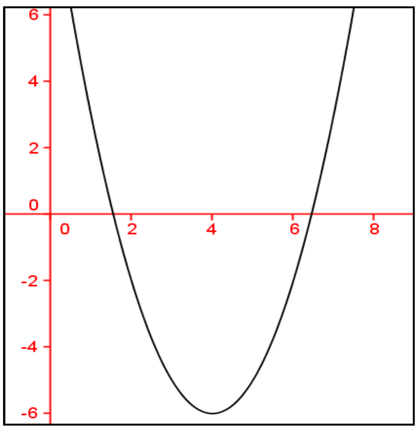


Figura 5 – Exemplo de uma parábola

$a<0$ e $\Delta>0$

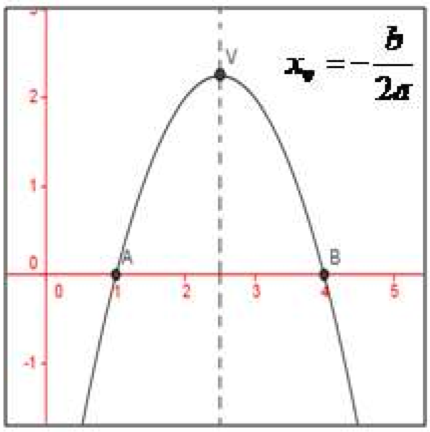


Figura 6 – Exemplo de uma parábola

Na figura 6 da página anterior, vemos as raízes A e B e o eixo de simetria da parábola.

Terminamos observando que os coeficientes a,b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser determinados com o conhecimento de três pontos diferentes do gráfico.

Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) três pontos diferentes do gráfico de $f(x)$. Com isso temos que ter $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_3$. Temos o sistema

$$\begin{cases} ax_1{}^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2{}^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3{}^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

nas incógnitas a,b e c.

Uma forma elementar de resolver esse sistema é subtrair as equações duas a duas e eliminar a incógnita c. Tomando duas dessas equações encontram-se os valores de a e b. Substituindo esses valores em uma das equações originais achamos o valor de c.

Observamos que o sistema acima é conhecido como sistema de Vandermonde, e sabe-se que a solução existe e é única.

As funções quadráticas também são caracterizadas pelo exame de sua taxa de variação. Entretanto, nesse caso, o processo é um pouco mais complicado, pois é necessário calcular a segunda taxa de variação. Esse conceito está apresentado em Lima (1997), páginas 147 a 150. Não vamos escrever aqui os detalhes, pois não inserimos esse conceito em nossas Folhas de Atividades. O motivo por termos abandonado esta ideia é que as folhas ficaram muito longas e não tínhamos muitas aulas à disposição para a aplicação. Um uso para o ensino de Matemática dessa caracterização das funções quadráticas pode ser visto no trabalho de mestrado de Macedo (2010).

1.3 Importância das funções no Ensino Básico

O ensino de funções deve ser desenvolvido, de preferência, dando-se ênfase à ideia de correspondência entre grandezas, dependência entre estas e variáveis para representá-las. Ao aplicar esse conceito em situações contextualizadas, é importante observar regularidades. No caso particular em que função afim esteja envolvida, a taxa de variação fornece uma regularidade importante.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam que o início do ensino de funções seja feito diretamente pela noção de correspondência que descreva situações de dependência entre duas grandezas,

> "...o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizado e em parte deixada de lado. Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas." (PCN, 1997, p.121)

O tema Função aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) com ênfase para seu caráter integrador. Propõe a exploração de suas aplicações na Matemática e em outras disciplinas. Em relação ao ensino de função afirmam que:

> "... cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (PCNEM, 1999, p.44)

Quanto à abordagem de função quadrática, a maior parte dos textos a faz dando ênfase para manipulação algébrica. Um dos objetivos mais comuns é ensinar o estudante a encontrar as raízes da função, caso existam, e determinar o ponto de máximo ou de mínimo. São largamente trabalhados exercícios que envolvam situações de máximo ou mínimo de função quadrática sem a utilização do gráfico.

Além de interessante, é importante a construção do gráfico para se verificar a simetria existente na parábola, que é o gráfico da função quadrática. Esta verificação, por exemplo, é muito significativa em lançamento vertical e balística, assuntos estudados em Física no primeiro e terceiro anos do Ensino Médio, pois fica fácil de se verificar que o tempo de subida é igual ao tempo de descida da partícula ou do projétil.

Em lançamento vertical, por exemplo, a altura $h(t)$ do objeto é dada em função do tempo t de acordo com uma função quadrática: $h(t) = -5t^2 + v_0 t + h_0$, em que v_0 é a velocidade inicial com que o móvel é lançado para cima, h_0 é a altura da qual o móvel é lançado. O gráfico da função que descreve esta situação é uma parábola com concavidade voltada para baixo através da qual verifica-se facilmente que o tempo gasto para que o móvel percorra a distância de h_0 até a altura máxima (vértice da parábola) é o mesmo para que ele volte à posição inicial h_0.

1.4 O ensino de função afim e quadrática segundo alguns livros didáticos

Nesta seção será feita uma breve análise sobre os livros didáticos: “Matemática ciência e aplicações” de Gelson Iezzi e outros, “Matemática para o Ensino Médio” de Chico Nery e Fernando Trotta e “Matemática Ensino Médio” de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

No primeiro livro citado, opta-se por fazer uma introdução contextualizada dos assuntos. Cada capítulo é iniciado com um exemplo de aplicação, levando em conta as propostas dos PCNEM. No caso do capítulo sobre função afim, o exemplo é sobre valor pago pela utilização de um táxi, exemplo clássico que envolve uma taxa fixa e um valor que varia quanto à distância percorrida. Em seguida, é dada a definição formal de função afim com alguns exemplos para identificação dos valores de "a" e "b" em $f(x) = ax + b$.

Segundo Iezzi (2004), “O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.” Não são citados casos particulares sobre função afim, apenas dois exemplos de gráfico são dados, sendo um uma reta crescente e outro, uma decrescente.

Não é citado o termo taxa de variação. Em um dos tópicos, cujo título é “Coeficientes de função afim”, a é denominado coeficiente angular e escreve-se brevemente que está relacionado à inclinação da reta. Isto é retomado mais adiante em um item sobre crescimento e decrescimento, mas a ênfase nesse momento é estudar apenas o sinal de "a" para se verificar a inclinação da reta.

Já no capítulo sobre função quadrática, o início não é diferente: É dado um exemplo para se modelar a função que expressa a área de um campo de futebol e em seguida, é dada a definição formal. Mostra-se a construção de alguns gráficos e, a partir daí, a ênfase volta-se apenas para obtenção das raízes da função quadrática e estudo do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$).

O diferencial desse livro didático é que se reserva um lugar, no fim de cada capítulo, para um pouco de história da Matemática através de alguns artigos do professor Hygino Domingues que relatam fatos que envolveram algumas das mais importantes descobertas matemáticas.

No livro de Chico Nery e Fernando Trotta, função afim e função quadrática são dispostas como itens de um capítulo denominado Funções. A abordagem de cada assunto é totalmente teórica, não são dados exemplos, nem contextualizações. Após a teoria, são fornecidos exercícios resolvidos e, em seguida, exercícios propostos retirados de vestibulares.

O item Funções constante e afim tem início com função constante, fazendo o estudo do sinal de "c"em $f(x)=c$. Em seguida é dada a definição formal de função afim $f(x)=ax+b$ e é feita a análise quanto à inclinação da reta em função do sinal de "a", também denominado, nesse livro, coeficiente angular.

São analisados os casos particulares função linear e função identidade. Em função linear, é feita uma observação sobre "a", descrita como constante real, não nula, dada pela razão entre as ordenadas e abscissas dos pontos pertencentes à reta, com exceção da origem. Esta abordagem é feita para concluir que as grandezas y e x são diretamente proporcionais. Já função identidade é apresentada como caso particular de função linear, em que "$a=1$".

Já o item sobre função quadrática tem início com a definição. O estudo da concavidade da parábola é feito concomitantemente com o eixo de simetria e o vértice da parábola (ponto de máximo ou de mínimo). Dada a fórmula para obtenção da abscissa do vértice utilizando-se o estudo do eixo de simetria, iniciam-se os exercícios resolvidos.

O livro de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz tem início diferente dos outros, abre cada capítulo ressaltando a importância do assunto.

O capítulo sobre função afim retoma um exemplo estudado em um momento anterior, destacando que se tratava de um caso de função do primeiro grau, segundo o livro. Tal exemplo é estudado colocando os dados em uma tabela e no plano cartesiano para analisar seu padrão e poder visualizar a reta formada, além de ser possível escrever a expressão que descreve a situação do exercício. Só depois disso é dada a definição de função afim.

Diferentemente dos demais livros analisados, este faz o estudo da taxa de variação que é imprescindível para identificação da função afim. A teoria é dada de forma bastante clara e detalhada, bem como o estudo dos casos particulares.

Os exercícios resolvidos e propostos envolvem situações cotidianas e de fácil compreensão por parte dos estudantes.

Já o capítulo sobre função quadrática tem início detalhando-se um exemplo sobre lançamento de foguete, no qual já se aproveitou para comentar a existência do eixo de simetria nas parábolas.

A construção do gráfico também foi bem diferente. Foi feito a partir da definição de que a parábola formada é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes a uma reta r e a um ponto F pré-definidos. Muitos exemplos foram detalhados. Todo o conteúdo sobre função quadrática foi descrito cuidadosamente e os exercícios escolhidos foram bastante contextualizados, principalmente à Física.

Como já foi dito no começo deste capítulo, a importância do estudo das funções em questão é inquestionável e é preocupante a dificuldade de compreensão destes conteúdos por parte dos estudantes. Isso ocorre mesmo com os do terceiro ano do Ensino Médio, com mais experiência, indicando que não fizeram um aprendizado significativo. Tal dificuldade está ligada, possivelmente, ao fato de não conseguirem relacionar a teoria com o cotidiano. Por isso vemos ser necessária a iniciativa de elaborar um produto didático com atividades contextualizadas para auxiliar no aprendizado desses temas.

1.5 O ensino de função afim e quadrática segundo outros autores

Para finalizar o primeiro capítulo desta dissertação, foram selecionados alguns trabalhos acadêmicos de outros autores relacionados ao ensino de função afim e quadrática. Serão destacados um trabalho de conclusão de curso, um capítulo de uma dissertação de mestrado e um artigo.

O trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS de Liziane Borges Fortes trata sobre taxa de variação e sua importância no ensino de função afim. A proximidade com o presente trabalho inicia com a turma escolhida para aplicação: primeiro ano do Ensino Médio. A outra compartilha da mesma opinião que a nossa sobre a deficiência no ensino de função afim. Segundo Fortes (2011) "o estudo da função afim era simples. Os alunos eram "informados", sem nenhuma justificativa, de que o gráfico da função afim era uma reta, e de que era representada pela fórmula $f(x) = ax + b$". Foi aplicada uma sequência didática na qual os estudantes deveriam resolver quatro atividades sem a intervenção da docente (com exceção da última atividade); quando lhe questionavam sobre algum exercício, sua estratégia era responder com diversas perguntas com a intenção de que os estudantes debatessem entre si e tirassem suas próprias conclusões. A justificativa maior para a escolha do estudo desse trabalho, ainda que não tratasse também de função quadrática, é a ênfase para a utilização da taxa de variação no ensino de função afim. Fortes (2011) afirma que "foi possível concluir que o estudo do conceito de taxa de variação contribui para a compreensão da função afim como relação entre duas variáveis".

O segundo trabalho analisado refere-se a um capítulo sobre função afim e quadrática de uma dissertação de mestrado de Fábio Garcia Bernardo. A ideia é ensinar o conceito de função afim e quadrática através de experimentos, com a utilização do software Geogebra, por exemplo. Participaram do projeto estudantes do nono ano do Ensino Fundamental.

A diferença com o presente trabalho é a abordagem dinâmica e experimental, com a utilização de aparelhos tecnológicos de baixo custo e modelagem. Em contrapartida, a semelhança vai além do fato de se tratar do ensino de função afim e quadrática, pois é enfatizado, em determinado momento, o cálculo da taxa de variação de uma função linear, chegando a descrevê-la como "característica inerente da função do primeiro grau"; além de fazer associação com Física em todos os exemplos, sendo que o mais semelhante foi o experimento cujo título era: "Movimento uniformemente variado X função quadrática". Bernardo (2013) concluiu que "Nesse trabalho, foi possível perceber que apropriação dos conceitos se deu de forma natural e com questionamentos apropriados em torno dos conteúdos."

O artigo de Elisabete Rambo Braga e Lorí Viali, cujo título é "A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática", tem o intuito de facilitar a conversão entre os registros e suas respectivas funções. A pesquisa foi realizada com estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola de Porto Alegre no laboratório de informática. Segundo Braga et. al. (2011), "as atividades tiveram como objetivo proporcionar situações de aprendizagem que privilegiassem a complementaridade entre os registros algébrico, tabular e gráfico das funções afim e quadrática". Embora seja uma pesquisa voltada para a aprendizagem de função afim e quadrática, a abordagem através da utilização de planilhas é bastante diferente do método utilizado pelo presente trabalho.

Depois de analisar estes trabalhos mencionados e tantos outros, pode-se concluir que independentemente do tipo de método utilizado, sendo eles folhas de atividade ou softwares matemáticos, a dificuldade maior persiste: a identificação da expressão da função afim e quadrática e a ligação entre as situações propostas contextualizadas com a teoria, com o conceito de função afim e quadrática. Para tentar auxiliar na resolução deste problema, as folhas de atividades foram confeccionadas com situações que pudessem explorar o que já era de conhecimento dos estudantes e que fossem de fácil interpretação para ajudar na conversão para a linguagem matemática.

1.6 Conclusão

Esse primeiro capítulo ressalta a importância não apenas teórica de funções, mas também o fato de ser indispensável na modelagem de fenômenos naturais e sociais.

É fundamental que o ensino de funções seja feito através de situações contextualizadas, não se limitando apenas a definições, com muito formalismo. Quanto mais aproximarmos o ensino não apenas de funções, mas da Matemática como um todo, do cotidiano do estudante, mais eficaz e interessante será o ensino. A interdisciplinaridade com a Física, principalmente na área de Cinemática, também é bastante importante.

Uma das grandes preocupações que levou à escolha desse tema para a dissertação foi a persistência da defasagem do ensino de funções até o último ano do Ensino Médio, momento em que se espera que o estudante tenha concretizado o aprendizado de função afim e função quadrática. E para piorar, não se pode contar com a grande maioria dos livros didáticos que são incompletos e com excessos de teoria.

Capítulo 2

Descrição da nossa proposta didática

2.1 Introdução

As quatro fases da metodologia da Engenharia Didática, segundo Artigue (1998), são: análises prévias, construção e análise *a priori*, aplicação de uma sequência didática e análise *a posteriori* e validação. Esse capítulo corresponde à segunda fase da Engenharia Didática, concepção e análise *a priori*.

Será descrita a sequência didática a ser utilizada e desenvolvida em sala de aula, bem como a justificativa para a escolha de tal método. Dessa forma serão apresentadas e descritas as Folhas de Atividades que são o produto didático desse trabalho.

2.2 A escolha do método de intervenção didática

Ao observarmos a metodologia de ensino de funções afim e quadrática presente nas escolas de Ensino Médio, verificamos que a mesma apresenta características do ensino tradicional, o que ocasiona dificuldades na aprendizagem, como interpretação, construção de gráficos e resolução de problemas.

A intenção deste trabalho é que o estudante construa os conceitos de função afim e função quadrática, proporcionando aprendizado significativo que não se limite à utilização de fórmulas.

Uma alternativa para resolver esse problema seria a aplicação de Folhas de Atividades que são folhas que contém textos explicativos e problemas contextualizados ou não.

A intenção de aplicarmos essa sequência didática é intervir o mínimo possível na construção do conhecimento por parte do estudante dando-lhe maior autonomia, além de, dessa forma, ser possível construirmos nosso próprio material didático para colaborar com o ensino de função afim e função quadrática.

Essa autonomia é possível durante a resolução das Folhas de Atividades, pois os estudantes têm a oportunidade de interpretar os problemas e discuti-los em grupo, o que proporciona ao estudante aprender o trabalho colaborativo. Dessa forma, espera-se que o estudante vença a abstração habitual existente nos conteúdos da disciplina de Matemática.

2.3 Descrição das Folhas de Atividades

2.3.1 – Folha de Atividades 1

Antes de descrever a Folha de Atividades 1, observamos que nossa intervenção didática ocorreria no segundo bimestre de aulas. Utilizando o material didático da escola, foi visto no primeiro bimestre noção de conjunto, operação entre conjuntos, o que é função, o que é sistema cartesiano e classificação de funções. O material didático da escola previa que no segundo bimestre seriam dados os conceitos de função afim e quadrática. Escolhemos esse momento para nossa intervenção didática, antecedendo o texto utilizado na escola.

A primeira Folha de Atividades contém nove questões que procuram atingir três objetivos. O primeiro objetivo é o de introduzir o conceito de função através de uma situação contextualizada que relaciona duas grandezas. O exemplo utilizado é o de uma função afim, de modo que o segundo objetivo consiste em observar regularidades daquela situação, para que se observe que são aquelas características da função afim. Para isso utilizamos o cálculo da taxa de variação. O terceiro objetivo foi o de aplicar esse conhecimento a um exemplo da área de Cinemática da Física.

O problema introdutório está apresentado na Figura 7. Vemos uma situação contextualizada em que um pintor passa um orçamento para um serviço de pintura de um muro. O pintor cobra uma taxa fixa de R$25,00 e deu o preço de algumas áreas.

Deseja-se que o estudante termine de preencher a tabela. Na pergunta 1) colocamos mais dois valores que constam na tabela. O primeiro é de 100 m², um valor que excede os da tabela e não segue o padrão dos valores que ali constam. Acrescentamos também o cálculo para 32 m² para ajudar o estudante a responder a próxima pergunta que pede o preço do metro quadrado sem a taxa inicial. Assim o estudante deve verificar que o valor do metro quadrado é de R$2,00, sem ainda ter sido citado o termo taxa de variação.

Conceito de função afim

Juninho ajuda seu pai, João, a fazer algumas contas...

João, querendo pintar o muro de sua casa por ter sido pichado, procurou um pintor para perguntar quanto ele cobraria para fazer o serviço. O preço do serviço executado consiste em uma taxa fixa, que é de R$ 25,00, mais uma quantia que depende da área pintada (metros quadrados – m²). Juninho, querendo ajudar seu pai, organizou o orçamento em uma tabela para calcular o valor da reforma. Veja como ficou!

Ajude Juninho preenchendo as lacunas que estão em branco na tabela ao lado.

Agora responda:

1) Quanto João gastará se for preciso pintar:

   100m²? ________________________

   32m²? ________________________

2) Tirando a taxa inicial, quanto custa o m²? ______________________

ÁREA PINTADA (m²)	Valor a pagar (R$)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	
40	
80	

Figura 7: Problema inicial da Folha de Atividades 1

Antes de passar à outra pergunta revisamos brevemente o significado de função através de uma questão de múltipla escolha bem simples. Fazemos isso com um pequeno texto que traz significados da palavra função de acordo com um dicionário. O estudante deve assinalar a alternativa correta para o significado utilizado na Matemática. A alternativa correta aqui é a d), que deve ser escrita no item 3). Esperamos que nesse momento o estudante relacione a frase “Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal” da alternativa d) com a situação apresentada na primeira atividade. Esperemos que ele entenda que a quantidade principal é metros quadrados e a quantidade que depende desta é o valor a pagar. Confira isso na Figura 8 abaixo.

A tabela de Juninho **associa** a área pintada com o preço a ser pago. São **duas grandezas relacionadas** por uma regra estabelecida pelo pintor. Você se lembra de que chamamos isso de função?

$$\boxed{\text{QUANTIDADE DE m}^2} \xrightarrow{\text{FUNÇÃO}} \boxed{\text{VALOR A PAGAR}}$$

Juninho procurou a palavra **FUNÇÃO** em um dicionário, e viu que ela tem os seguintes significados:

a) Festa; festividade.
b) Trabalho realizado por um determinado órgão dos seres vivos.
c) O que é atribuído a uma pessoa em uma equipe de trabalho.
d) Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal.
e) Dança, fandango.

3) Qual desses itens é o significado usado na Matemática?
Resposta: ______________

Figura 8: Continuação do problema inicial da Folha de Atividades 1

Após o preenchimento da tabela da Figura 7, os estudantes determinariam que um metro quadrado custa R$2,00, então, a partir disto e de mais três exemplos, como se vê na Figura 9, solicita-se no item 4) que se calcule o valor a ser pago por 17 metros quadrados. A intenção aqui é que o raciocínio do estudante se dê da seguinte forma: 2 x 17 + 25 = 59. Pois, desta forma, eles conseguirão escrever algebricamente a função do preço a ser pago P(x) = $2x+25$, em que x é o número de metros quadrados. Essa forma geral é solicitada no item 5).

4) Juninho então resolveu chamar essa função de P (já que se trata do preço a ser pago por seu pai) e notou que:
$P(5) = 35$, $P(10) = 45$, $P(15) = 55$... Sendo assim, responda: $P(17) =$ __________

5) Se a área pintada for x , quanto deverá ser pago?

$$\boxed{P(x) =}$$

Figura 9: Continuação do problema inicial da Folha de Atividades 1

Na Figura 10 está apresentado o item 6) do problema inicial foi colocado um texto para fazer ligação entre o exercício 2 (sobre o significado de função) e a situação problema proposta por esta atividade, além de dar início à segunda etapa dessa Folha de Atividades que visará estudar a taxa de variação da função afim graficamente.

6) Na matemática, dizemos que o valor a ser pago "**depende**" ou é "**função**" da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um gráfico cartesiano.

Figura 10: Item 6) do problema inicial da Folha de Atividades 1

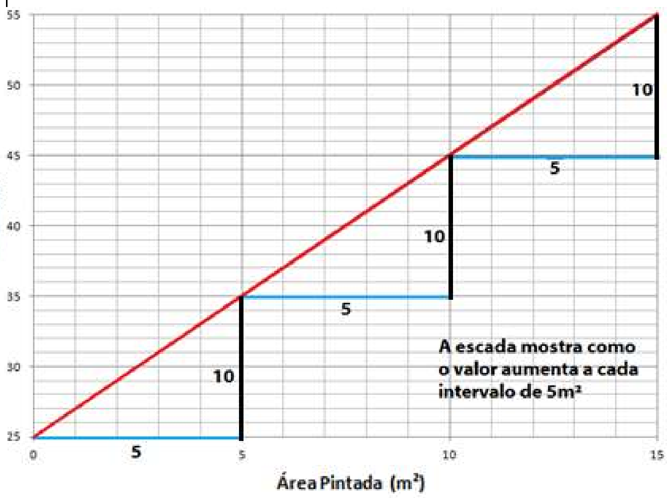
A próxima atividade, apresentada nas Figuras 11 e 12, inicia o segundo objetivo desta aula que é o de obter padrões. Apresentamos dois desenhos com o gráfico da função trabalhada e tabelas para serem preenchidas com a intenção de que seja obtida a taxa de variação sem ainda os estudantes conhecerem este termo. O objetivo é que eles mesmos notem o padrão nas tabelas.

Não foi necessária a utilização da calculadora, uma vez que todos os valores solicitados eram encontrados no gráfico ao lado de cada tabela, com a única exceção do valor a ser pago por vinte e cinco metros quadrados, cálculo fácil de ser efetuado.

O gráfico contido na Figura 11 destaca para cada intervalo de cinco metros quadrados, variação de dez reais no preço a ser pago, com a intenção do estudante relacionar o gráfico com o valor obtido para a variação do valor que é de R$10,00.

Já o gráfico contido na Figura 12 destaca para cada intervalo de um metro quadrado, variação de dois reais no preço a ser pago. Para o preenchimento da tabela da Figura 12 não será necessário cálculo algum, pois todos os valores encontram-se no gráfico situado ao lado da tabela: $P(2) = 29$, $P(3) = 31$, $P(4) = 33$ e $P(5) = 35$. Portanto a variação do valor, neste caso, é de R$2,00.

Na figura abaixo o gráfico é a linha mais grossa em cor vermelha. Estamos interessados em examinar a variação da função em intervalos iguais de m². Ou seja, o quanto varia o preço em **relação** à área pintada. Veja e depois preencha a tabela ao lado:



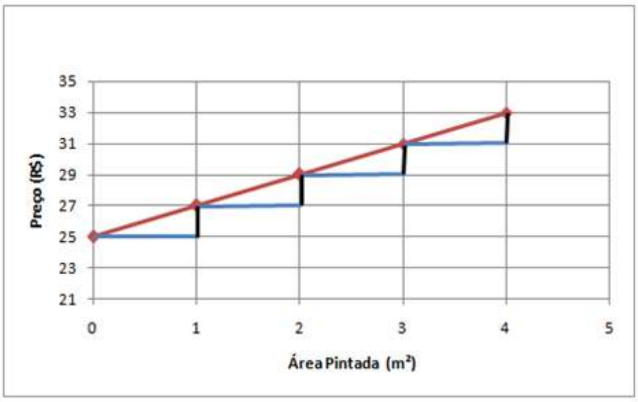
Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 5	$P(5) - P(0) = 35 - 25 = 10$
5 a 10	
10 a 15	
15 a 20	
20 a 25	

O que você notou?

____

Figura 11: Problema da Folha de Atividades 1

Consideremos outro exemplo, sendo agora em intervalos de 1m². Veja o gráfico e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 1	$P(1) - P(0) = 27 - 25 = 2$
1 a 2	
2 a 3	
3 a 4	
4 a 5	

Figura 12: Problema da Folha de Atividades 1

Na Figura 13 é perguntado o que o estudante notou ao preencher as tabelas das Figuras 11 e 12. Espera-se que eles concluam que o quociente entre a variação de R$10,00 para 5 m² é o mesmo que entre a variação de R$2,00 para 1 m² quadrado.

O que você notou? ____

Você conseguiria escrever o que essas tabelas têm em comum?

____

Figura 13: Um questionamento da Folha de Atividades 1

Para finalizar a atividade que tem como propósito o estudo da taxa de variação da função afim, foi citado tal termo e dada sua definição (Conforme Figura 14). Antes da definição, é solicitado o preenchimento de uma tabela com intervalos diferentes para o número de metros quadrados (já com uma coluna destinada ao cálculo da taxa de variação e com este título). A intenção dessa atividade é que o estudante verifique que, independente da variação de x, o quociente $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$ é constante e vale dois. $P(x)$ significa valor a ser pago, em reais, pela pintura de x metros quadrados de área.

A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo.

Complete a tabela:

Intervalo x_1 **a** x_2	**Variação do valor** $P(x_2)-P(x_1)$	**Taxa de variação** $\dfrac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=20$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20		
1 a 30		
10 a 40		
15 a 25		
20 a 45		

Figura 14: Problema da Folha de Atividades 1

Na Figura 15 deseja-se que o estudante conclua que a taxa de variação é dois e que relacione esse valor com a função obtida no exercício 5: $P(x)=2x+25$ e, por fim, responda, por associação, que a taxa de variação da função $f(x)=7x+10$ é sete.

O que você notou?

____

7) Consideremos outro exemplo de função: $f(x)=7x+10$. Quanto você acha que vale sua taxa de variação? Resposta: ________________________

Figura 15: Item 7) da Folha de Atividades 1

A primeira folha de atividade tem fim com um exemplo associado à Física. É dada uma tabela já preenchida que associa a posição, em metros, de um móvel de acordo com o tempo, em segundos. O estudante deve construir um gráfico e verificar, primeiramente que é retilíneo e, depois, que a taxa de variação é constante, características da função afim.

Da mesma forma que no problema da pintura do muro, o estudante deve escrever a função que relaciona o espaço com o tempo, verificar a taxa de variação e reconhecer que neste caso, no estudo da Cinemática, recebe o nome de velocidade.

8) Vamos pensar agora em um exemplo de Física!

Você já aprendeu, na Física, que uma partícula, como um carrinho, em Movimento Retilíneo Uniforme percorre uma trajetória reta com velocidade CONSTANTE.

Figura 16: Item 8) da Folha de Atividades 1

Em uma tabela, dividida em duas colunas, teremos envolvidos o tempo (dado em segundos) e a localização (dada em metros) de um carrinho.

TEMPO (s)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
POSIÇÃO (m)	**1**	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**

Figura 17: Uma tabela da Folha de Atividades 1

Ao marcar os pontos da tabela no plano cartesiano, é esperado que o estudante verifique que o gráfico de uma função afim é uma reta e que ele note que a cada segundo que se passa, o móvel se desloca três metros.

Marque os pontos da tabela no sistema cartesiano abaixo e desenhe o gráfico da função unindo os pontos em uma reta.

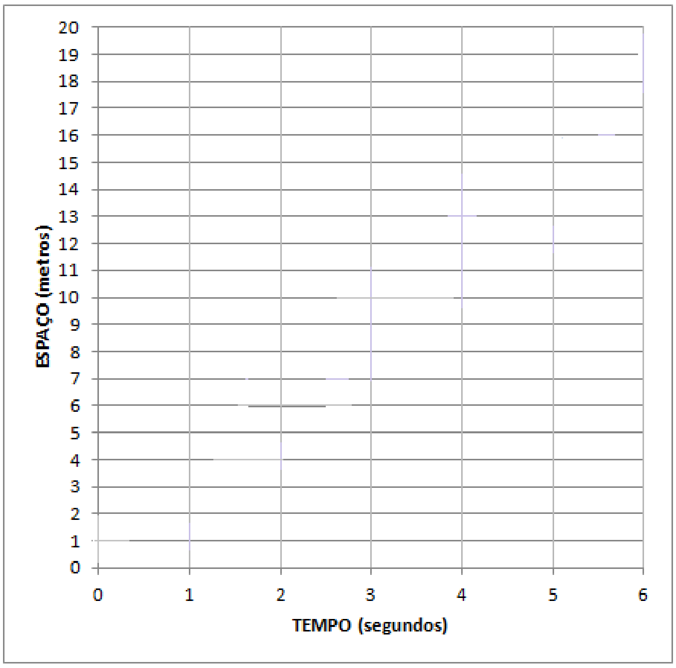


Figura 18: Problema da Folha de Atividades 1

Após a construção do gráfico da Figura 18, espera-se que o estudante consiga concluir que o móvel se desloca três metros por segundo e, para confirmar tal constatação, existem os itens a), b) e c).

Já a intenção do item d) é que se escreva a função afim que associa o espaço e o tempo $S(t) = 1 + 3t$.

Os itens e) e f) têm o intuito de confirmar o entendimento de que os 3 metros por segundo significam a taxa de variação da função afim na Matemática e a velocidade na Física.

9) Responda:

a) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? ________________________

b) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? ________________________

c) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? _______________________

d) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$$S(t) =$$

e) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo?

____

f) Qual o nome que a física dá para essa variação? ____________________

Figura 19: Item 9) da Folha de Atividades 1

O final da primeira folha de atividade traz a definição de função afim e é feita uma última pergunta com a intenção de que o estudante identifique a taxa de variação no caso geral $f(x) = ax + b$.

Função Afim

Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$

Pergunta:

Qual a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$? Resposta:

____

A principal propriedade que caracteriza as funções afins é que sua taxa de variação é constante.

Figura 20: Texto da Folha de Atividades 1

No item abaixo o estudante tem a chance de expressar sua opinião quanto à atividade e quanto ao nível de dificuldade sentido por ele.

Gostou da atividade?	SIM	☐	NÃO	☐			
Achou:	DIFÍCIL	☐	MÉDIO	☐	FÁCIL	☐	

Figura 21: Texto da Folha de Atividades 1

2.3.2 – Folha de Atividades 2

Depois do assunto função afim ser apresentado aos estudantes através da Folha de Atividades 1, nossa sequência didática prevê a única aula "normal" do material didático referente a esse tema, para em seguida ser aplicada a Folha de Atividades 2. Nesta aula, além do formalismo habitual presente no texto, é proposto ao estudante a construção de dois gráficos da função afim, um em que a taxa de variação é positiva e outro para taxa de variação negativa, com a intenção de se estudar a monotonicidade em cada caso. Nenhum exercício proposto pelo material é contextualizado e a teoria é iniciada com a definição da função afim.

A segunda Folha de Atividades tem a intenção de explorar mais o conhecimento do estudante quanto ao assunto função afim, utilizando dois problemas. O primeiro consta de uma função que relaciona o preço a ser pago em um restaurante e a quantidade de comida colocada no prato. O segundo trata de uma função que relaciona a taxa a ser paga e o número de cheques emitidos por duas instituições bancárias distintas.

A intenção do primeiro problema é que o estudante conclua que se trata de uma função afim particular com a constante "b" valendo zero. Primeiramente foi dado o preço de um quilograma de comida (conforme o texto da Figura 21) neste restaurante e perguntado o valor de cem e, em seguida, de dez gramas para facilitar os próximos cálculos das próximas questões (conforme problema da Figura 23).

Foram dados desenhos na Figura 22 que representam a balança com os indicadores da quantidade de alimento, em gramas, que cada um dos seis clientes pegou para que o estudante calcule cada valor a ser pago, em reais.

Hora do almoço

Clipart free

Marta e seus amigos de trabalho no restaurante...

Marta trabalha em uma loja de sapatos que fica no centro da cidade. Ela descobriu um restaurante muito bom e barato que ficava ali perto. O quilograma custa R$ 30,00. Ela achou que o preço estava muito bom e convidou alguns amigos do trabalho para irem almoçar junto com ela. Lúcia, amiga de Marta, disse que não iria porque come muito pouco e não "compensaria" financeiramente. Mas Marta explicou que não era um restaurante do tipo em que se paga uma quantia fixa e come-se à vontade; Trata-se de um restaurante em que você paga por exatamente o que comer. Depois de tudo explicado, eles foram ao restaurante: Cláudio, Marta, Lúcia, Carmem, Ricardo e José.

Figura 22: Problema 1 da Folha de Atividades 2

Logo abaixo estará representado o visor da balança após cada um deles ter terminado de se servir:

120g	420g	650g
Lúcia	Carmem	Ricardo
490g	710g	820g
Marta	José	Cláudio

Figura 23: Continuação do problema 1 da Folha de Atividades 2

Foi informado que o preço de um quilograma de comida é R$30,00 e, ao perguntar o valor de cem e de dez gramas, nessa ordem, há duas intenções: Primeiramente que o estudante faça os cálculos mentalmente ao notar que cem gramas é a décima parte de um quilograma, portanto, o preço também é dez vezes mais barato que R$30,00, ou seja, R$3,00. E assim, sucessivamente, que o preço de dez gramas é trinta centavos. A segunda intenção é que o estudante utilize o preço de dez gramas de comida para facilitar no cálculo da conta a ser paga pelos clientes citados nesse problema, visto que, intencionalmente, todos os valores indicados nos visores são múltiplos de dez.

Por exemplo, no caso de Lúcia, que consumiu cento e vinte gramas (doze dezenas), espera-se que seja feito:

120g $\rightarrow$ 1 x 100 + 2 x 10 e, portanto, R$ 3,00 + 2 x R$ 0,30 = R$ 3,60

Você reparou que no visor da balança a unidade utilizada foi o grama para indicar o consumo de cada colega e o preço de R$30,00 era do quilograma de comida.

Lembrando que um quilograma equivale a 1000 gramas, quanto custa 100 gramas de comida? Resposta:______________________________

Para lhe ajudar nos próximos cálculos, quanto custa 10 gramas de comida? Resposta:____________________

Agora responda:

1) Quanto Lúcia irá pagar? R$ 3,60
2) Quanto Carmem irá pagar? __________________________
3) Quanto Ricardo irá pagar? __________________________
4) Quanto Marta irá pagar?_____________________________
5) Quanto José irá pagar? _____________________________
6) Quanto Cláudio irá pagar? __________________________

Figura 24: Problema da Folha de Atividades 2

Para revisar mais uma vez a concepção de função, foi desenhado um esquema na Figura 25 relacionando a quantidade de comida e o valor pago por esta quantidade:

As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:

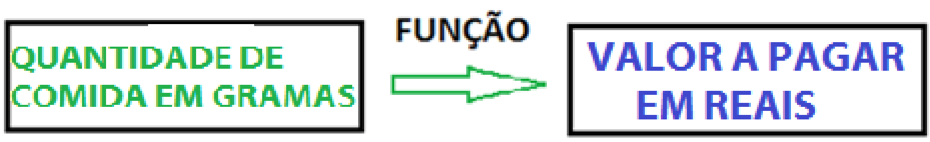


Figura 25: Texto da Folha de Atividades 2

Na Figura 26, foi perguntado o valor a ser pago por meio quilograma, por seiscentos gramas e, finalmente, por um grama de comida, com a intenção de que os estudantes obtivessem a taxa de variação e conseguissem escrever a função do valor a ser pago, em reais, $V(x)$, em que x representava a quantidade de comida, em gramas.

Para finalizar o primeiro problema da Folha de Atividades 2, pergunta-se o valor de um grama de comida com a intenção de que, em seguida, o estudante consiga escrever a função $V(x) = 0{,}03x$ que relaciona o valor a ser pago, em reais, e a quantidade de comida, em gramas.

7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: ________________________ E V(600)? ________________ E V(1)? Resposta:____________________

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$$\boxed{V(x) = \qquad\qquad\qquad}$$

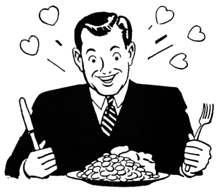
Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação?

Resposta: ________________________

Figura 26: Problema da Folha de Atividades 2

O segundo problema da Folha de Atividades 2 trata de duas funções afins relacionadas a tarifas de manutenção de conta cobradas por dois bancos distintos: ABC e XY, conforme é explicado no texto da Figura 26. Em cada um dos bancos é cobrada uma taxa fixa acrescida de um valor por cheque emitido, portanto, diferentes da função linear trabalhada na situação anterior: a do restaurante. Além das exigências dos problemas anteriores, essa última situação diferencia-se por tratar de duas funções distintas e por exigir uma resolução algébrica para o problema, já que tem por objetivo estudar a viabilidade de contratação dos bancos envolvidos. Com isso temos uma oportunidade de destacar uma característica do parâmetro a na função $f(x) = ax + b$. O estudante poderá perceber que, mantendo o valor de b, um aumento no valor de a implica no aumento do valor da função. Por outro lado, o valor de b indica por onde "começa" a função, isto é, é o ponto do eixo dos y em que se encontra o gráfico.

VEJAMOS OUTRA SITUAÇÃO!!!



Clipart free

André estuda economia e conseguiu um emprego. A sua primeira tarefa era escolher qual banco era mais vantajoso financeiramente para abrir uma conta corrente para movimentar o dinheiro da empresa. Ele consultou as taxas de dois bancos: Banco ABC e banco XY. O banco ABC cobra uma tarifa de manutenção de conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$10,00 mensais e mais uma taxa de R$0,15 por cheque emitido. O banco XY cobra de TMC uma taxa de R$20,00 mensais e mais uma taxa de R$0,10 por cheque emitido. Para decidir entre os dois bancos, André fez algumas contas. Ajude-o nessas contas!

Figura 27: Texto da Folha de Atividades 2

A proposta é a de que um recém contratado faça o estudo de cada banco para descobrir qual é mais vantajoso financeiramente. Para isto, são perguntados, na Figura 28, os valores das tarifas para uma mesma quantidade de cheques nos dois bancos, para que haja comparação. A intenção desta atividade é que os estudantes façam os cálculos e percebam que para duzentos cheques emitidos, o gasto é o mesmo nos dois bancos. Os valores solicitados foram: vinte, cinquenta e cinco, cem, duzentos, duzentos e vinte e duzentos e quarenta cheques emitidos.

Para garantir que o tempo seja suficiente para a resolução de toda a Folha de Atividade 2, é permitido que o estudante utilizasse calculadora. No caso de vinte cheques, por exemplo, deve-se calcular o gasto no banco ABC e no banco XY, da seguinte maneira:

Banco ABC $\rightarrow$ R$ 10,00 + 20 x R$ 0,15 = R$ 13,00 e banco XY $\rightarrow$ R$ 20,00 + 20 x R$ 0,10 = R$ 22,00

1) Se ele gastar 20 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________.
E no banco XY? _______________.

2) Se ele gastar 55 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _______.
E no banco XY? ______________.

3) Se ele gastar 100 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _______.
E no banco XY? ______________.

4) Se ele gastar 200 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ______.
E no banco XY? _____________.

5) Se ele gastar 220 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ______.
E no banco XY? _____________.

6) Se ele gastar 240 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _______.
E no banco XY? _____________.

Figura 28: Problema da Folha de Atividades 2

Com os valores calculados, os estudantes terão condições de responder que a partir de 200 cheques emitidos o banco ABC passa a ser mais vantajoso financeiramente. Assim como terão condições de escrever, em cada caso, a expressão que relaciona a tarifa a ser paga a cada banco em função do número de cheques emitidos, visto que essa é a quarta vez em que é solicitada a expressão de uma função afim (ver Figura 29).

No caso do banco ABC, a expressão é dada por $10 + 0{,}15\,x$ e no banco XY, por $20 + 0{,}10\,x$.

7) Considerando apenas os valores acima, a partir de qual quantidade de cheques mensais o banco XY se torna mais viável financeiramente? _____________________________

8) Qual expressão representa o gasto com taxas mensais no banco ABC? ________________
E no banco XY? _______________________

Figura 29: Problema da Folha de Atividades 2

É solicitado que os estudantes preencham duas tabelas presentes na Figura 30 para depois esboçarem, em um mesmo gráfico como na Figura 31, as retas que representam os gastos no banco ABC e no banco XY com a intenção de que consigam verificar o ponto de encontro das retas, seu significado e que este ponto os auxilie na resolução algébrica proposta no fim da atividade sobre função afim.

E por se tratar de funções afins, os estudantes já saberão que os pontos serão colineares e, ainda que o correto seja a marcação apenas de pontos, é esperado que eles liguem os pontos formando duas retas.

9) Preencha a tabela abaixo:

BANCO ABC

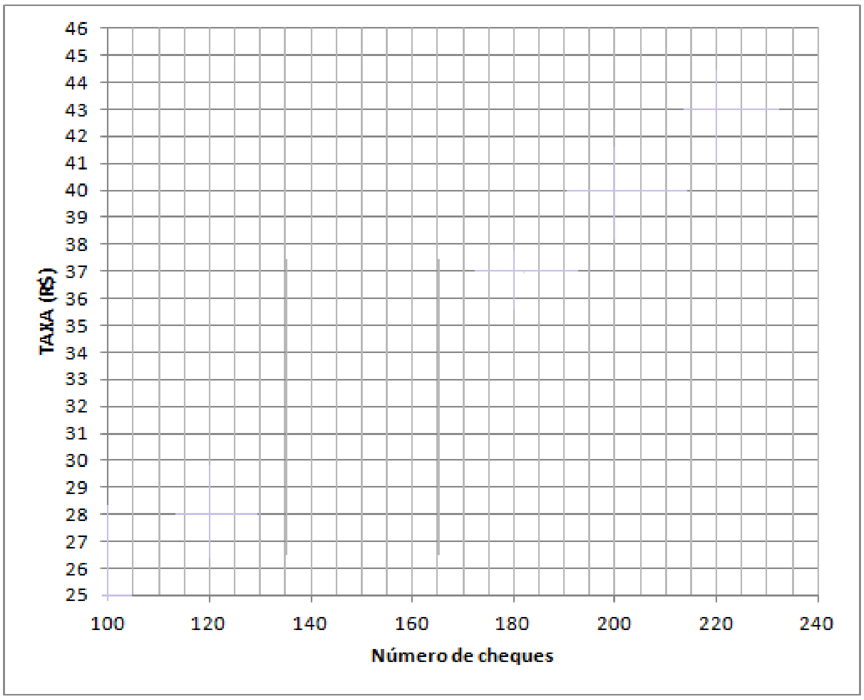
Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

BANCO XY

Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

Figura 30: Problema da Folha de Atividades 2

10) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.



11) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

Figura 31: Problema da Folha de Atividades 2

Já foram solicitadas as funções afins referentes aos gastos dos bancos ABC e XY com a emissão de cheques. Então, a intenção da última atividade da folha 2 é que o estudante utilize tais funções para resolver algebricamente o problema sobre a determinação de qual banco é mais vantajoso através de uma inequação do primeiro grau. Para responder à pergunta feita na Figura 32, deseja-se que a partir da resolução da inequação $20 + 0{,}10x < 10 + 0{,}15x$, o estudante determine que para $x > 200$ o banco XY é mais viável financeiramente que o banco ABC.

12) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

____

Figura 32: Problema da Folha de Atividades 2

No item abaixo, referente à Figura 33, o estudante tem a chance de expressar sua opinião quanto à atividade e quanto ao nível de dificuldade sentido por ele.

Gostou da atividade? SIM ☐ NÃO ☐

Achou: DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL ☐

Figura 33: Texto da Folha de Atividades 2

2.3.3 – Folha de Atividades 3

A Folha de Atividades 3 será aplicada após uma primeira aula sobre funções quadráticas. Para essa aula, usaremos o texto da escola e faremos uma aula explicativa. Com ela esperamos que os estudantes aprendam a reconhecer uma função quadrática e construir seu gráfico. Acrescentamos ao material da escola a representação de funções quadráticas em forma fatorada. Não houve dificuldade para fazer isso, pois os estudantes estudam detalhadamente a equação quadrática no nono ano do Ensino Fundamental.

Na Figura 34 vemos a primeira atividade dessa aula. Trata-se de uma situação que envolve o número de jogos de um campeonato de futebol e o número de times participantes. Esperamos que os estudantes, ao examinar os padrões dessa situação, reconheçam que ela pode ser descrita por uma função quadrática. Para facilitar a observação dos padrões é apresentada uma tabela que os estudantes devem completar e, a partir dela, consigam escrever a expressão algébrica correspondente.

Iniciamos a atividade com um número pequeno de participantes: times A, B e C, para que o estudante, além de determinar quantos, também consiga escrever um a um os jogos realizados da seguinte forma: AxB, BxA, AxC, CxA, BxC e CxB, totalizando seis jogos.

Função quadrática – Aplicações

1)Preparando um campeonato

Clipart fre

Carlos, estudante do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio no interior de São Paulo, pediu para que seu professor de educação física organizasse um campeonato de futebol de salão com times de sua classe. Primeiramente a ideia era que participassem desse campeonato apenas os meninos do primeiro ano, que eram quinze. Uma equipe de futebol de salão é composta por cinco jogadores, portanto formaram-se os times A, B e C. Na primeira fase desse campeonato, cada time jogará com cada um dos outros times exatamente duas vezes. Escreva abaixo os jogos que serão realizados por esses três times:

Resposta: ____

Quantos jogos foram realizados com esses 3 times? Resposta: ______________________

Figura 34: Problema 1 da Folha de Atividades 3

Na segunda parte dessa atividade, acrescentamos um time, como se vê na Figura 35. Solicitamos que o estudante escreva os jogos realizados pelos times A, B, C e D: AxB, BxA, AxC, CxA, AxD, DxA, BxC, CxB, BxD, DxB, CxD e DxC.

A intenção de solicitar que o estudante escreva uma lista dos jogos é que ele perceba que cada time joga com todos os outros duas vezes. Assim, no caso de 4 times, o total é obtido pela multiplicação 4x3. O estudante deverá perceber que não é 4x4, pois o time não poderá jogar contra si próprio. Por sua vez, também não é (4x3)/2, pois isso implicaria que 2 times quaisquer jogariam entre si apenas uma vez. Portanto a resposta é dada por $4 \times (4-1) = 12$.

Antes que o torneio começasse, cinco alunos do segundo ano do Ensino Médio pediram para participar do campeonato. Temos agora quatro times: A, B, C e D. Lembrando que cada time joga com cada um dos outros times exatamente duas vezes nessa primeira etapa, escreva os jogos que foram realizados:

Resposta:____

____

Quantos jogos foram realizados com esses 4 times? Resposta: ___________

Figura 35: Segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 3

Na sequência da atividade, pedimos para o estudante preencher uma tabela com diversos valores para as quantidades de times participantes. Com isso temos a expectativa de que o estudante ache cansativo listar todos os jogos, e tente resolver o problema procurando uma fórmula. A intenção é que seja notado o padrão para obtenção do número de jogos em função do número de times.

A tabela a ser preenchida pelo estudante está apresentada na Figura 36.

Como o assunto campeonato de futebol de salão gerou muitos comentários na escola, os estudantes do segundo e do terceiro ano do Ensino Médio quiseram participar também. Mas todos os jogos deveriam acontecer no horário da aula de educação física e o professor ficou com receio de não terminar a primeira etapa porque as férias de julho estavam chegando. Ele pediu ajuda ao Carlos para fazer os cálculos de quantos jogos seriam realizados e começaram a construir uma tabela para se organizarem. Veja como ficou:

Número de times de futebol	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de jogos realizados	**2**	**6**	**12**	**20**					

Você notou que a tabela possui espaços em branco? Preencha-os para ajudar Carlos e seu professor!

Figura 36: Tabela do problema 1 da Folha de Atividades 3

A última parte desse problema solicita o número de jogos para valores mais altos para o número de times participantes que fogem da sequência da tabela anterior. É mais um incentivo para o estudante tentar obter uma fórmula. A atividade se encerra pedindo para o estudante colocar a fórmula algébrica para x times participantes: $N(x) = x(x-1)$ ou $N(x) = x^2 - x$.

A partir do momento que conseguirem escrever uma das expressões acima, relacionando o número de jogos com o número de times, é esperado que reconheçam se tratar de uma função quadrática. Para isso fazemos uma pergunta, como está na Figura 37.

Agora responda:

1) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes?
   Resposta:___________________
2) E 20 times? Resposta:___________________
3) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta:___________________
4) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?
   Resposta:_____________________________________

Figura 37: Parte final do problema 1 da Folha de Atividades 3

Após apresentar uma situação contextualizada em que aparece a função quadrática, nossa intenção era, inicialmente, trabalhar com a taxa de variação de funções quadráticas. Esse projeto apresentou várias dificuldades e percebemos que o texto ficaria excessivamente longo. Assim, por hora, desistimos dessa ideia e resolvemos continuar a Folha de Atividades 3 apresentando algumas situações que conectam as 3 representações básicas das funções quadráticas: fórmula, tabela e gráfico cartesiano.

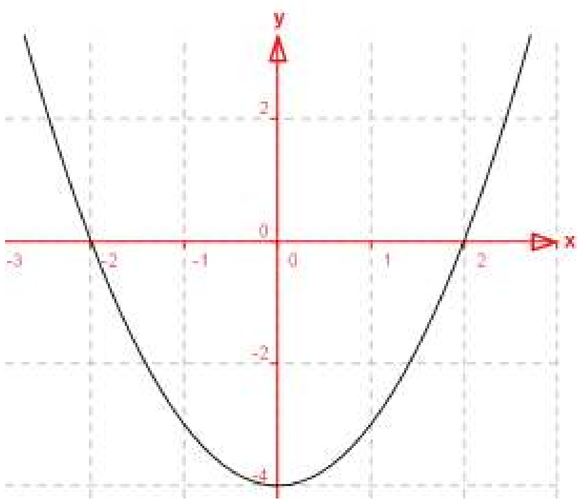
Primeiramente foram dados os esboços de duas parábolas com informações suficientes para a obtenção da expressão algébrica exata da função quadrática correspondente. Aqui o estudante está livre para escolher qual forma irá utilizar: a fatorada ou a expandida. Confira a Figura 38.

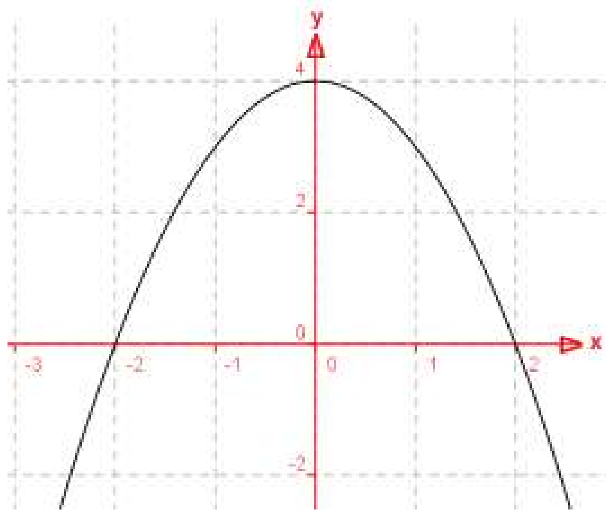
É esperado que os estudantes escrevam as expressões $f(x) = 1(x+2)(x-2)$ e $f(x) = -1(x+2)(x-2)$ ou, $f(x) = x^2 - 4$ e $f(x) = -x^2 + 4$ respectivamente.

As duas formas serão consideradas. Pessoalmente, temos expectativa que os estudantes trabalhem com a forma fatorada, pois ela é mais adequada para o estudo dos sinais da função e pode ser vista como uma preparação par ao estudo de polinômios. Entretanto, se alguns estudantes usarem a forma expandida, isso também será bom, visto que eles reclamam muito quando têm que resolver um sistema linear.

2) Estudando gráficos...

2a) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso, escreva a expressão exata da função. Faça a resolução no espaço abaixo do gráfico.





Os pontos (-2;0), (0,-4) e (2,0) são pontos do gráfico

Os pontos (-2;0), (0,4) e (2,0) são pontos do gráfico

Expressão exata da função:______________________

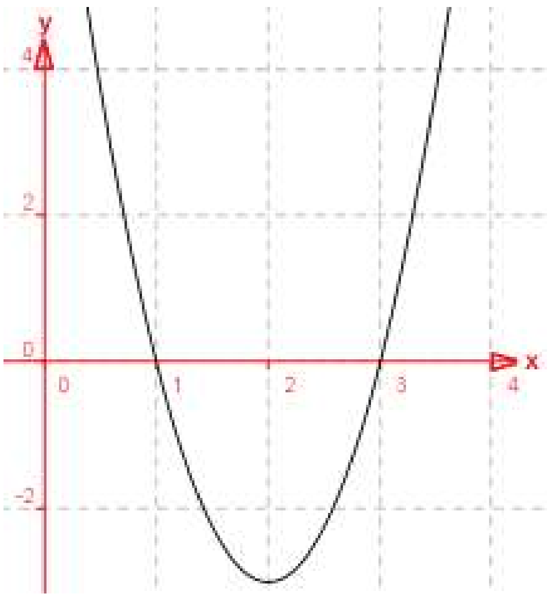
Expressão exata da função:_________________________

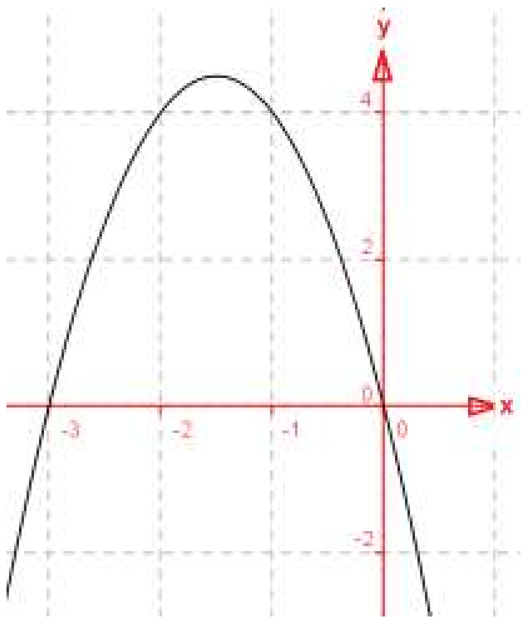
Figura 38: Primeira parte do problema 2 da Folha de Atividades 3

A próxima etapa é apresentada na Figura 39. Essa atividade explora a transformação da representação gráfica para a forma algébrica, primeiro a forma fatorada e depois a forma expandida. A princípio, o estudante poderá assinalar qualquer valor ao parâmetro a, desde que seja com o sinal adequado. Em seguida o texto estimula que ele usa +1 ou -1, para evitar que ele permaneça com a letra a, sem dar resposta para o sinal desse parâmetro.

Solicitamos que o estudante faça um estudo do sinal de "a" para, em seguida, atribuir o valor +1 ou -1 para o coeficiente dominante. A intenção dessa atividade é que o estudante note a conveniência da utilização da forma fatorada em situações em que se conhece o valor das raízes. As respostas na forma fatorada são: $f(x)=(x-1)(x-3)$ e $f(x)=-x(x-3)$ e na forma expandida são: $f(x)=x^2-4x+3$ e $f(x)=-x^2+3x$.

2b) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso escreva uma expressão algébrica do tipo $f(x)=a.(x-x_1).(x-x_2)$ em que x_1 e x_2 representam as raízes de cada função. Escreva também, em cada caso, se a pode ser 1 ou -1. Utilize esses valores para calcular a expressão expandida de $f(x)$.





Os pontos (1;0) e (3,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

Função expandida:____________________ _

Os pontos (-3;0) e (0,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

Função expandida:____________________ _

Figura 39: Segunda parte do problema 2 da Folha de Atividades 3

Para finalizar a Folha de Atividades 3, é solicitado que os estudantes façam os esboços de duas parábolas, partindo de tabelas já preenchidas. A ideia aqui é passar da representação de uma função quadrática dada por uma tabela para a representação gráfica.

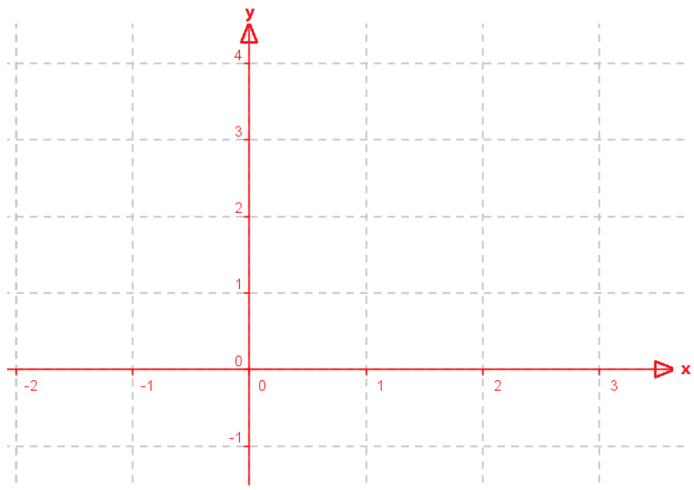
O primeiro esboço, conforme se vê na Figura 40, visa explorar a situação em que é única a intersecção entre a parábola com o eixo das abscissas. Aqui o estudante precisa lembrar que o gráfico de uma função quadrática possui um eixo de simetria, e a tabela diz onde está este eixo.

Esperamos que o estudante escreva que essa função tem uma única raiz real.

3) Hora de desenhar...

Cada uma das tabelas abaixo corresponde a valores de uma função quadrática $f(x)$. Faça seus gráficos!

3a) Escreva, no espaço abaixo da tabela ao lado, o que você notou no gráfico após construí-lo.

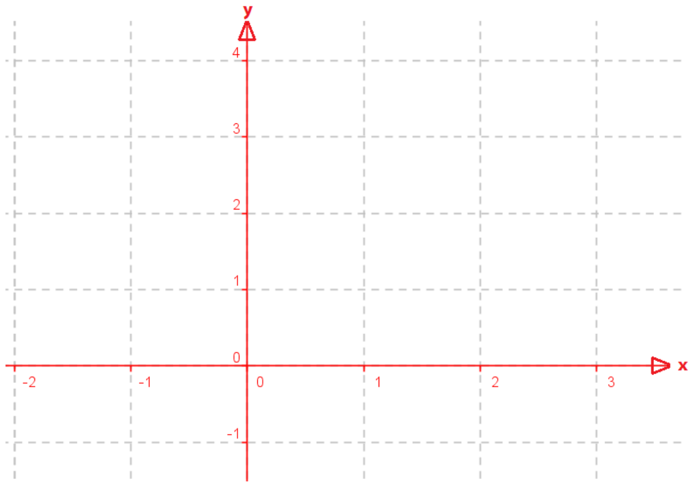


X	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

Figura 40: Primeira parte do problema 3 da Folha de Atividades 3

A intenção da segunda parte do problema 3, apresentado nas Figuras 41 e 42, é parecida. O estudante deve verificar a posição de eixo de simetria e, a partir dele, obter o valor da outra raiz (zero da função). A resposta é 3.

3b)



X	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	3	2

Figura 41: Segunda parte do problema 3 da Folha de Atividades 3

De forma sucinta deseja-se que o estudante explique o método utilizado para obtenção da outra raiz da função, na expectativa de que ele cite o termo eixo de simetria, ou pelo menos, descreva-o, visto que é uma característica de extrema importância das parábolas.

Qual é a outra raiz da função? Resposta:_______________

Explique como você fez 3b):

Resposta:____

Figura 42: Final do problema 3 da Folha de Atividades 3

No item abaixo, referente à Figura 43, o estudante tem a chance de expressar sua opinião quanto à atividade e quanto ao nível de dificuldade sentido por ele.

Gostou da atividade? SIM ☐ NÃO ☐

Achou: DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL ☐

Figura 43: Texto final da Folha de Atividades 3

2.3.4 – Folha de Atividades 4

Essa última Folha de Atividades é exclusivamente destinada ao estudo do vértice da parábola e foi dividida em quatro atividades (epidemia de gripe, lançamento de uma bolinha, construção de uma pasta e construção de uma pipa). A atividade referente ao lançamento da bolinha é um problema comum de Física, já o problema da pasta é uma adaptação de um problema do livro “Funções Elementares” (CAETANO et. al 2013) e o da pipa é baseado no mesmo livro.

Antes da aplicação da Folha de Atividades 4, os estudantes tiveram uma aula teórica sobre máximos e mínimos de funções quadráticas. Nesta aula, usamos o material da escola e resolvemos alguns exercícios utilizando apenas fórmula para obtenção da abscissa do vértice. Vimos quatro problemas, sendo três deles contextualizados e um para obtenção da imagem da função dada. Esperamos assim, com a Folha de Atividades 4 que os estudantes resolvam esses problemas contextualizados com o mínimo de interferência do professor. Na verdade essa interferência só ocorreu no problema 3 da Folha de Atividades 4, pois alguns estudantes precisaram de ajuda ao fazer a dobradura para obter a pasta tipo arquivo citada no problema.

O primeiro problema apresenta uma função que relaciona o número de pessoas infectadas pela gripe, $N(x)$, e o número de dias, x: $N(x) = -5x^2 + 150x$

Conforme o texto apresentado na Figura 44, são feitas 3 perguntas. A primeira pede o número de dias que se passam até acabar o número de infectados. Aqui o estudante precisa perceber que esse valor ocorre quando a função vale zero. Desejamos que o estudante compreenda a necessidade de igualar a expressão a zero e, portanto, determinar o valor das duas raízes existentes. Como uma das raízes já foi dada no texto, ele precisa encontrar a outra, que é 30.

A segunda pergunta, o item b), pede o número de dias em que ocorre o maior número de infectados. A intenção é que o estudante obtenha o valor da abscissa do vértice da parábola, utilizando a fórmula $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{2(-5)} = 15$ ou através da média aritmética dos valores das raízes obtidos no item b), calculando $x_v = \frac{0+30}{2} = 15$.

O item c) solicita o cálculo do número máximo de pessoas doentes, ou seja, a ordenada do vértice da função quadrática dada. Para isto, desejamos que o estudante substitua o valor de x encontrado no item b) na expressão $N(x) = -5x^2 + 150x$, obtendo $N(15) = -5(15)^2 + 150(15) = 1125$.

1) Será que é gripe?

Muitas vezes confundimos gripe com resfriado. De repente espirramos por entrarmos em contato com ar frio e já pensamos que estamos gripados. Na verdade estamos apenas resfriados. A gripe é bem perigosa: Em crianças e idosos pode ser grave e até levar à morte.

Vamos considerar uma determinada localidade durante inverno muito rigoroso que sofreu uma epidemia de gripe. Essa localidade foi estudada e dados foram recolhidos por profissionais de modo que uma modelagem da situação fosse feita. O número de pessoas infectadas N durante um certo número x de dias era dado por:

$$N(x) = -5x^2 + 150x$$

Observe que no início da contagem, a quantidade de pessoas infectadas era

$$N(0) = -5.0^2 + 150.0 = 0$$

a) Com base nesse estudo, quantos dias serão necessários para acabar com essa epidemia?

Resolva aqui:

Resposta:_____________

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: _____________

c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: _____________

Figura 44: Problema 1 da Folha de Atividades 4

A segunda atividade trata do lançamento vertical de uma bolinha, fazendo uma conexão com a matéria de Cinemática na Física. Vemos na Figura 45 uma questão bem simples que tem a intenção de usar o vértice da parábola.

Espera-se, com este problema, que o estudante faça a ligação entre o conteúdo aprendido na Física com o assunto recentemente visto em Matemática; que ele associe o tempo de subida ser igual ao tempo de descida da bolinha com o fato da parábola possuir o eixo de simetria, visto que a função que descreve a altura de um objeto em relação ao tempo, em lançamento vertical, é $h(t) = s_o + v_o t - \frac{g}{2}t^2$.

As respostas esperadas são $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-5)} = 1$ e $h(1) = -5(1)^2 + 10(1) + 1 = 6$.

2) Quanto sobe a bolinha

Clipart free

Um estudo importante da Cinemática, na Física, é o lançamento vertical. Os físicos desconsideram a resistência do ar e a aceleração envolvida é de-10m/s² (o sinal negativo é por causa da aceleração da gravidade ser dirigida para baixo, então durante a subida da bolinha, a aceleração utilizada será negativa) e a velocidade inicial empregada foi de 10m/s e a bolinha foi lançada a 1m do solo. A função que descreve a altura H atingida pela bolinha depois de t segundos do lançamento é dada pela função quadrática $h(t) = -5t^2 + 10t + 1$.

a) Quanto tempo a bolinha demora para atingir o ponto mais alto da trajetória?

Resolva aqui:

Resposta:____

b) Qual a altura máxima atingida pela bolinha?

Resolva aqui:

Resposta:____

Figura 45: Problema 2 da Folha de Atividades 4

A terceira atividade exige um pouco mais do estudante, pois não fornece uma expressão algébrica pronta. O estudante precisa primeiro interpretar o problema para depois obter essa expressão e aplicar os conhecimentos obtidos sobre função quadrática. O texto do problema é apresentado nas Figuras 46 e 47.

A situação proposta contextualiza a confecção de uma pasta para arquivos a partir de uma folha retangular, cujas dimensões são dadas. A função a ser encontrada deve relacionar o volume da pasta com as dimensões da folha.

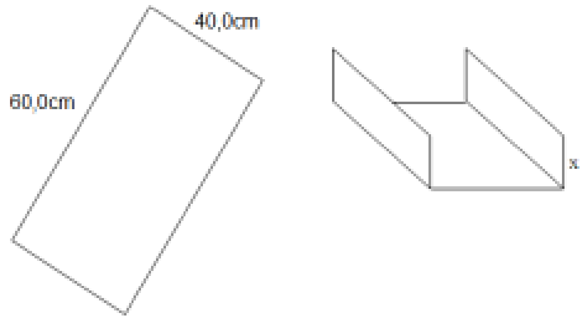
Lembramos que os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio estudaram superficialmente o assunto Geometria Espacial no Ensino Fundamental e que o estudo será retomado no segundo ano do Ensino Médio, de acordo com o currículo adotado pelas escolas envolvidas na nossa pesquisa. Por isso fornecemos no texto informações à parte suficientes para que eles consigam obter a expressão algébrica para o volume da pasta.

Depois que escreverem a função que associa o volume com as dimensões da folha, serão capazes de responder para quais dimensões o volume será máximo e qual é esse valor.

Para esta atividade fornecemos aos estudantes folhas de papel A4 para auxiliar a visualização das formas geométricas envolvidas. A intenção é que o estudante faça dobradura com essa folha para perceber como entram em jogo as dimensões da folha retangular do problema.

3) Fabricando pastas

Uma determinada empresa deseja fabricar arquivos para pastas em formato de U. Para isso é necessário uma folha de plástico retangular com 60,0cm de comprimento e 40,0cm de largura, na qual são feitas duas dobras ao longo do lado maior como mostra a figura abaixo:



Observação: O volume interno do arquivo é dado pelo produto de suas três dimensões.

Figura 46: Texto para o problema 3 da Folha de Atividades 4

O estudante deverá notar que o comprimento da folha, que é o lado de 60,0cm, não será alterado e que o valor da altura da aba, chamado de x, deve ser descontado duas vezes da largura original que é de 40,0cm. Com isso o estudante encontra as 3 dimensões do paralelepípedo reto retângulo, que é formato do arquivo.

Na expectativa de que o estudante tenha conseguido visualizar as três dimensões da pasta tipo arquivo, esperamos que ele multiplique os três valores da forma sugerida na observação dada para obter a expressão do volume da pasta: $V(x) = 60x(40-2x)$, e assim, poder calcular, mais uma vez, o valor da abscissa e da ordenada do vértice.

A partir da expressão algébrica que relaciona o volume com a altura x da pasta, a melhor expectativa de nossa parte é que os estudantes determinem o x_v (valor de x que torna o volume da pasta máximo) através da média aritmética entre as raízes que são facilmente calculadas a partir da forma fatorada da expressão, obtendo $x_v = \dfrac{20+0}{2} = 10$. Em seguida, o estudante calculará o valor do volume máximo que vem a ser $V(10) = 600(40-20) =$ 12000 .

Entretanto, alguns estudantes poderão expandir a expressão da função e obter esses cálculos dessa forma.

a) Você conseguiria escrever uma expressão para relacionar o volume V do arquivo com a altura x?

Resposta:____

b) Qual deve ser o valor de x para que o volume interno seja máximo?

Resolva aqui:

Resposta:____

c) Qual o valor do volume máximo?

Resolva aqui:

Resposta:____

Figura 47: Final do problema 3 da Folha de Atividades 4

A última atividade, bem como a anterior, necessita de boa interpretação de texto para se obter a expressão da função. Essa função deve relacionar a área da pipa as partes nas quais se deve quebrar a vareta de três metros de comprimento. O texto dessa atividade está apresentado na Figura 48.

Os estudantes também recebem informações suficientes, na descrição da atividade, sobre o quadrilátero notável losango (formato da pipa) e quanto ao modo de se obter sua área, caso tenham esquecido sobre o assunto.

Como a vareta mede três metros e deve ser cortada em dois pedaços, esperamos que o estudante denote por x um deles e por $3-x$ o outro pedaço. Em seguida, o estudante deve seguir as instruções para obtenção da área da pipa, lembrando que foi deixada uma observação nesta quarta folha de atividades esclarecendo que a área do losango é dada pela metade do produto de suas diagonais, no caso, dos "pedaços" da vareta.

Após a obtenção da função quadrática que descreve a área da pipa $A(x) = \dfrac{x.(3-x)}{2}$, os estudantes devem determinar o comprimento de cada pedaço da vareta que tornam máxima a área (através da abscissa do vértice). Aqui novamente se espera que, para obter abscissa do vértice, o estudante use a forma fatorada e calcule a média aritmética das duas raízes, obtendo assim $x_v = \dfrac{0+3}{2} = 1{,}5$. Novamente poderá ocorrer que alguns estudantes usem a forma expandida.

4) Construindo uma pipa

Clipart free

Uma criança quer fazer uma pipa na forma de losango (quando estiver esticada em um plano). Para isso tem muito papel, mas dispõe de apenas uma vareta de 3 m, que deve ser quebrada em duas partes para fazer as diagonais do losango. Como deve ser dividida essa vareta para que a pipa tenha a maior área possível?

Vale lembrar que losango é um quadrilátero com lados de mesma medida, cuja área é dada pela metade do produto de suas duas diagonais, que são perpendiculares entre si

Resposta: ____

Figura 48: Problema 4 da Folha de Atividades 4

No item abaixo, na Figura 49, o estudante tem a chance de expressar sua opinião quanto à atividade e quanto ao nível de dificuldade sentido por ele.

Gostou da atividade? SIM ☐ NÃO ☐

Achou: DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL ☐

Figura 49: Texto final da Folha de Atividades 4

2.4 Conclusão

A intenção desse capítulo foi de descrever as quatro Folhas de Atividades que compõem nosso produto didático. Descrevemos também nossos objetivos pedagógicos em cada atividade e a resposta esperada.

Desejamos que as atividades auxiliem os estudantes na compreensão dos assuntos função afim e função quadrática tão importantes no ensino de Matemática, bem como a aplicação desses assuntos no cotidiano.

Capítulo 3

A aplicação e suas considerações

3.1 – Introdução

As quatro Folhas de Atividades foram aplicadas em classes de estudantes do Ensino Médio. Cada folha foi trabalhada em uma aula de cinquenta minutos. Para referência, as Folhas de Atividades estão apresentadas no Apêndice A exatamente da forma como foram aplicadas nas classes.

Consideramos nesse capítulo alguns aspectos gerais da aplicação de nosso produto didático, que teve como objetivo validar nossa proposta.

3.2 – A escolha das classes

Desde o início da proposta de nosso problema já tínhamos a intenção de construir nosso produto didático para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Lembramos que nossa proposta surgiu de nossas observações sobre o aprendizado desses estudantes nos assuntos função afim e função quadrática. Vimos que esses estudantes têm dificuldade de conectar esse conhecimento com a disciplina de Física, e que, quando retomam esse assunto no terceiro ano do Ensino Médio, mostram que não fizeram um aprendizado significativo.

Em nossas atividades profissionais trabalhamos com classes de estudantes do Ensino Médio em várias cidades do interior do Estado de São Paulo. Optamos por aplicar nossa proposta didática em todas essas classes. Fizemos assim essa experiência com as turmas de primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Objetivo das cidades de Jaboticabal, Monte Alto e Pontal.

As três cidades envolvidas são próximas entre si e apresentam características demográficas parecidas. As escolas são franquias do Colégio Objetivo sendo que as de Jaboticabal e Monte Alto são escolas parceiras e apresentam praticamente o mesmo corpo docente.

A classe de uma das cidades possui vinte e nove estudantes e estes costumam apresentar maior dificuldade se comparados aos estudantes das outras duas cidades. Levantamos a hipótese de que esse fato pode se tratar de uma defasagem no aprendizado durante o Ensino Fundamental.

Os estudantes das outras duas cidades apresentam aspecto muito parecido, não têm tanta dificuldade. Uma delas possui a classe mais numerosa, contém cinquenta estudantes, já a outra é menor, tem vinte e cinco estudantes.

O material utilizado nessas três cidades é idêntico e é preparado e fornecido pela matriz da rede que se localiza na capital do Estado de São Paulo. Trata-se de um sistema apostilado. É dividido em módulos que devem ser trabalhados, cada um, em aulas expositivas de cinquenta minutos. A intenção do material dessa rede é preparar os estudantes para o ingresso no Ensino Superior.

Para aplicar nosso produto didático conversamos com os coordenadores das três escolas para pedirmos autorização e para explicarmos como seria o procedimento, além de darmos a garantia de que não acarretaria atraso no cumprimento do material da escola, visto que isso é algo primordial nas escolas dessa rede.

3.3 – Metodologia da aplicação do produto didático

Conforme já explicamos, optamos por construir Folhas de Atividades com o objetivo de proporcionar aos estudantes um aprendizado mais autônomo e colaborativo. Ao iniciar a aplicação desse material didático, foi explicado em cada sala que os estudantes teriam cinquenta minutos para resolver cada Folha de Atividades e que eles deveriam formar grupos com dois integrantes cada para a resolução das mesmas, porém, a entrega das folhas resolvidas deveria ser individual. As cidades com número ímpar de estudantes possuíram um grupo com três integrantes. Também foi explicado que poderiam e deveriam debater entre os integrantes do grupo para explorarem da melhor maneira possível as atividades, deixando claro que a intervenção da docente seria praticamente nula.

Ao aplicar as Folhas de Atividades, ocorreu a seguinte divisão das classes. A classe com cinquenta estudantes foi dividida em vinte e cinco grupos, a classe com vinte e nove estudantes foi dividida em catorze grupos e a sala com vinte e cinco estudantes foi divida em doze grupos, temos, portanto um total de cinquenta e um grupos. Esses grupos se conservaram durante a aplicação das quatro Folhas de Atividades. O único percalço foi que, na aplicação da segunda Folha de Atividades, faltou uma estudante de um grupo de três integrantes, de modo que esse grupo ficou desfalcado nessa ocasião.

Para a análise da aplicação das Folhas de Atividades, consideraremos igualmente todos os grupos sem fazer distinção das classes a que pertenciam. Observamos pelo desempenho dos grupos que não há necessidade de separar as classes para fazer essa análise. Observamos também que os estudantes de cada grupo responderam as questões de forma praticamente idêntica.

Prosseguimos nesse capítulo com uma análise geral e qualitativa do desempenho dos estudantes em cada Folha de Atividade. A análise detalhada e quantitativa será feita no capítulo 4.

3.3.1 – Análise qualitativa da aplicação da Folha de Atividades 1

A primeira Folha de Atividades foi entregue sem ter sido ministrada nenhuma aula antes e possuía o intuito de trabalhar o conceito de função afim com os estudantes. Eles se manifestaram desconfortáveis com o fato da docente apresentar uma atividade sobre um conteúdo que não havia sido abordado anteriormente. Alguns deles acharam isso um absurdo, mostrando como estão influenciados pela metodologia tradicional de ensino. Para contornar essa dificuldade, explicamos que era uma atividade que dependia da interpretação de texto e que não haveria necessidade de teoria ou fórmulas. Eles deveriam explorar as situações-problema.

Esta folha possui um primeiro problema de fácil resolução e todos o fizeram sem dificuldade e nem apresentaram dúvidas. Observamos que alguns grupos gastaram muito tempo com a primeira atividade, para eles isso acarretou um prejuízo de tempo para realizar a segunda atividade, que era mais longa e se tratava da exploração da taxa de variação. Lembramos que a segunda atividade apresenta três tabelas que deveriam ser preenchidas com cálculos sobre a taxa de variação.

A segunda atividade foi a que mais tomou tempo dos estudantes, pois alguns se confundiram nos cálculos durante o preenchimento das tabelas e, em alguns casos, nem terminaram de preencher, passaram para a próxima atividade. Nas próprias tabelas havia instruções suficientes para que os estudantes a preenchessem. O maior problema mesmo foi a resistência por parte deles em relação a esse tipo de metodologia.

A terceira atividade era sobre um problema de Física e todos os estudantes a realizaram sem dificuldade, gastando menos tempo.

Por ser a primeira folha, eles debateram pouco o assunto. Ainda não haviam se adaptado àquele tipo de atividade.

No mesmo dia, em uma próxima aula, foi lecionada a única aula referente à função afim que o material didático utilizado pelas escolas em questão possui.

3.3.2 – Análise qualitativa da aplicação da Folha de Atividades 2

Os estudantes não perderam tempo para iniciar a resolução da Folha de Atividades 2, pois esperavam que seria tão extensa quanto a primeira. Lembramos que foi permitido o uso da calculadora.

A primeira atividade era um problema de fácil interpretação e resolução. Mesmo assim, alguns estudantes pediram para usar a apostila, material didático da escola, pois não acreditavam que apenas com exploração e interpretação conseguiriam resolver. Em contrapartida, houve casos em que, mesmo tendo levado a calculadora, não a utilizaram nesse primeiro problema.

A segunda atividade foi dividida em três itens, mas foi o primeiro que tomou a maior parte do tempo dos estudantes, pois muitos cálculos deveriam ser realizados e, mesmo com a utilização da calculadora, demoraram para responder.

Para que os estudantes construíssem o gráfico no segundo item da segunda atividade, era necessário que tivessem respondido corretamente o primeiro. Notamos que alguns estudantes, ao marcarem os pontos no plano cartesiano, perceberam que algo estava errado quando um ponto não estava alinhado com os demais. Nesse momento, eles voltavam ao item anterior e refaziam as contas. Isto fez com que se reduzissem o número de erros nessa atividade.

O terceiro item, que exigia resolução algébrica, apresentou pequeno número de acertos. Menos da metade de todos os estudantes conseguiram resolver este item, talvez por destoar da proposta ou por ser muito brusca (e única) e passagem para uma resolução algébrica.

3.3.3 – Análise qualitativa da aplicação da Folha de Atividades 3

Ao contrário do início das atividades sobre função afim, na qual não houve prévia alguma sobre o assunto, nesse momento foi lecionada a primeira das três aulas expositivas referentes à função quadrática presentes no material.

O primeiro problema da Folha de Atividades 3 não tomou muito o tempo dos estudantes, quase todos preencheram corretamente a tabela e raríssimos deles se confundiram ao responder as perguntas. Grande parte escreveu a função quadrática na forma fatorada, sendo assim, alguns não concluíram que se tratava de um exemplo de função quadrática.

O segundo problema tomou bastante o tempo dos estudantes, principalmente para aqueles que optaram pela forma expandida para determinar a expressão algébrica, pois atrapalharam-se um pouco na resolução dos sistemas. Mesmo assim, não pareciam ter dúvidas, apenas acharam a atividade trabalhosa.

Já a última atividade tumultuou um pouco a sala, pois se tratava da obtenção da segunda raiz de uma função quadrática utilizando apenas o eixo de simetria que a parábola possui. A maior parte dos estudantes ficou muito insegura para justificar a resposta. Alguns tentaram obter a expressão exata da função e depois igualar a zero para obter as raízes. Estes não conseguiram concluir a atividade e acharam-na difícil.

3.3.4 – Análise qualitativa da aplicação da Folha de Atividades 4

No mesmo dia da aplicação da Folha de Atividades 3, foi ministrada a segunda aula expositiva sobre função quadrática trazida pelo material da escola, cujo tema era máximos/mínimos. Os estudantes já haviam se acostumado com a rotina de se agruparem e resolverem as folhas juntos. Alguns até se precipitaram um pouco na empolgação e falaram muito alto. Mas notamos que era exclusivamente sobre a atividade que debatiam.

A primeira atividade possuía três itens, sendo que um deles exigia as raízes da função que alguns deixaram em branco, pois, como esperavam por exercícios de máximo ou mínimo e não queriam perder tempo, já começaram determinando o vértice da parábola, sem ler o que estava sendo pedido.

A segunda atividade foi responsável pelo maior índice de acerto das três cidades. Trata-se de lançamento vertical. Apenas um estudante de uma das cidades quis pegar a apostila para copiar a fórmula que havia aprendido em Física, mas isto não foi permitido. Explicamos a ele que não seria necessária a utilização de fórmulas da Física.

As duas últimas atividades que eram sobre geometria espacial e geometria plana deram trabalho e, portanto, muitos reclamaram. Para resolver estas atividades, eram dadas as informações quanto ao volume e à área, ou seja, havia informação suficiente para a resolução dessas atividades. A dificuldade que sentiram foi na modelagem da função quadrática. Ainda assim mais da metade conseguiu fazer e não desistiu antes de muito tentar resolver.

Neste mesmo dia, foi ministrada a última aula expositiva sobre função quadrática trazida pelo material da escola. Essa aula continha apenas exercícios de mínimos ou de máximos, cuja contextualização era bem mais complicada que as situações das folhas.

3.4 – Conclusão

Em geral os estudantes responderam muito bem as Folhas de Atividades. Eles manifestaram uma certa resistência a essa metodologia por ser nova para eles, mas, a partir da aplicação da segunda Folha de Atividades, a insegurança foi passando e começaram a se familiarizar com o nosso produto didático.

Um dos pontos mais positivos observado durante a aplicação das Folhas de Atividades foi o trabalho em grupo. Os estudantes debateram os problemas, discutiram e se ajudaram, o que não é possível durante as aulas expositivas. Esta é uma das principais razões pelas quais acreditamos ter sido satisfatório também para os estudantes.

Capítulo 4

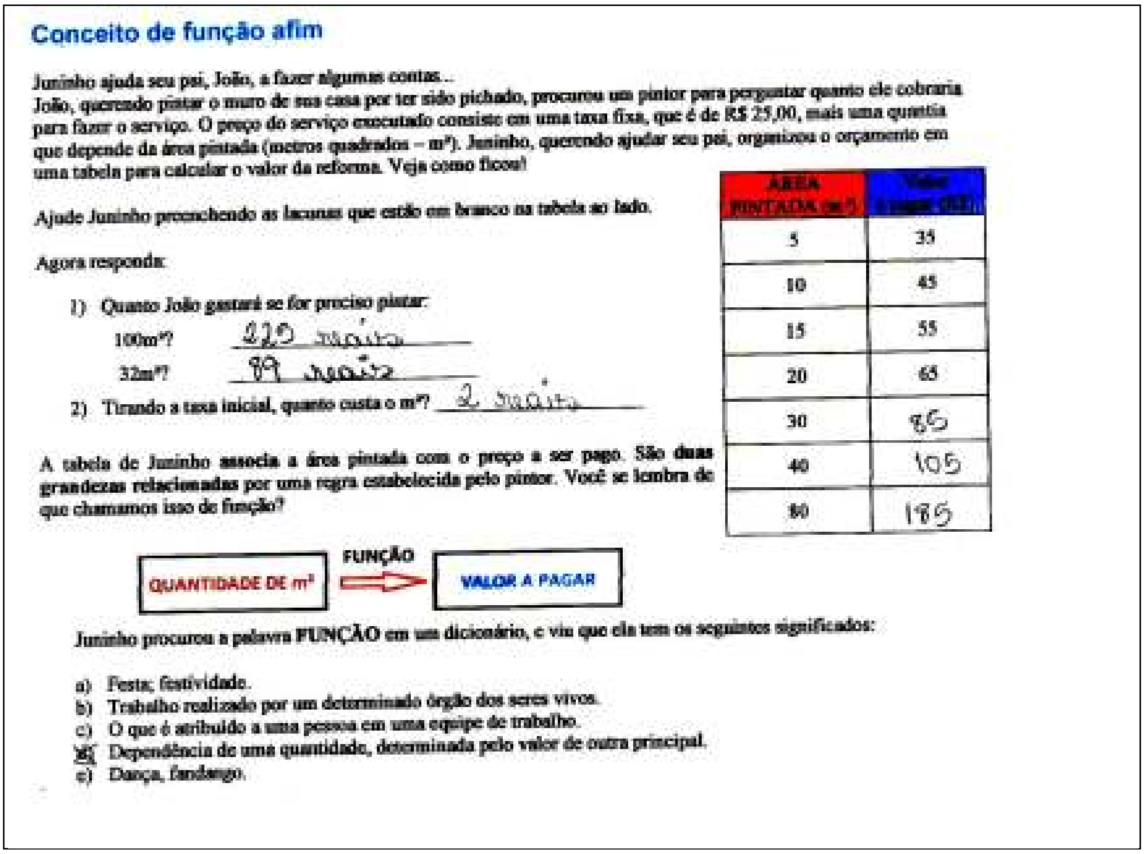
Análise detalhada da aplicação

4.1 – Introdução

Nesse capítulo fazemos uma análise detalhada das respostas dos estudantes para as atividades. Pretendemos assim analisar nossa sequência didática e efetuar possíveis correções. Em particular, mostramos digitalizações de parte das respostas de modo que possamos ter maior clareza sobre o desempenho dos grupos.

4.2 – Análise detalhada da aplicação da Folha de Atividades 1

A Folha de Atividades 1, como já descrito no Capítulo 2, possui nove itens sobre o conceito de função afim, repartidos em três situações. A primeira delas trazia uma situação-problema referente ao orçamento de pintura de um muro. Já observamos também que os estudantes não apresentaram dificuldades, e alcançaram nossas expectativas. Os estudantes completaram corretamente a tabela e conseguiram determinar o valor da taxa de variação (preço por metro quadrado). No final, a maior parte escreveu corretamente a expressão algébrica que representava o preço em função da quantidade de metros quadrados. De um total de cinquenta e um grupos, os vinte estudantes de dez grupos não realizaram a primeira atividade de forma totalmente correta. Segue na Figura 50 uma das respostas digitalizada.



Conceito de função afim

Juninho ajuda seu pai, João, a fazer algumas contas...
João, querendo pintar o muro de sua casa por ter sido pichado, procurou um pintor para perguntar quanto ele cobraria para fazer o serviço. O preço do serviço executado consiste em uma taxa fixa, que é de R$ 25,00, mais uma quantia que depende da área pintada (metros quadrados – m²). Juninho, querendo ajudar seu pai, organizou o orçamento em uma tabela para calcular o valor da reforma. Veja como ficou!

Ajude Juninho preenchendo as lacunas que estão em branco na tabela ao lado.

Agora responda:

1) Quanto João gastará se for preciso pintar:
   100m²? 225 reais
   32m²? 89 reais
2) Tirando a taxa inicial, quanto custa o m²? 2 reais

ÁREA PINTADA (m²)	Valor a pagar (R$)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	85
40	105
80	185

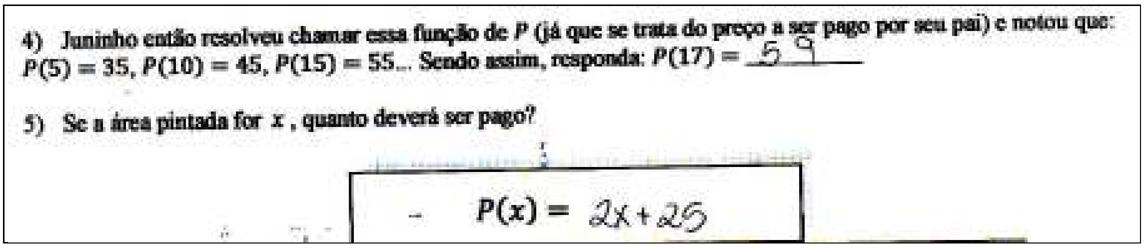
A tabela de Juninho **associa** a área pintada com o preço a ser pago. São **duas grandezas relacionadas** por uma regra estabelecida pelo pintor. Você se lembra de que chamamos isso de função?

QUANTIDADE DE m² → FUNÇÃO → VALOR A PAGAR

Juninho procurou a palavra **FUNÇÃO** em um dicionário, e viu que ela tem os seguintes significados:

a) Festa; festividade.
b) Trabalho realizado por um determinado órgão dos seres vivos.
c) O que é atribuído a uma pessoa em uma equipe de trabalho.
d) Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal.
e) Dança, fandango.

Figura 50: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 1 da Folha de Atividades 1



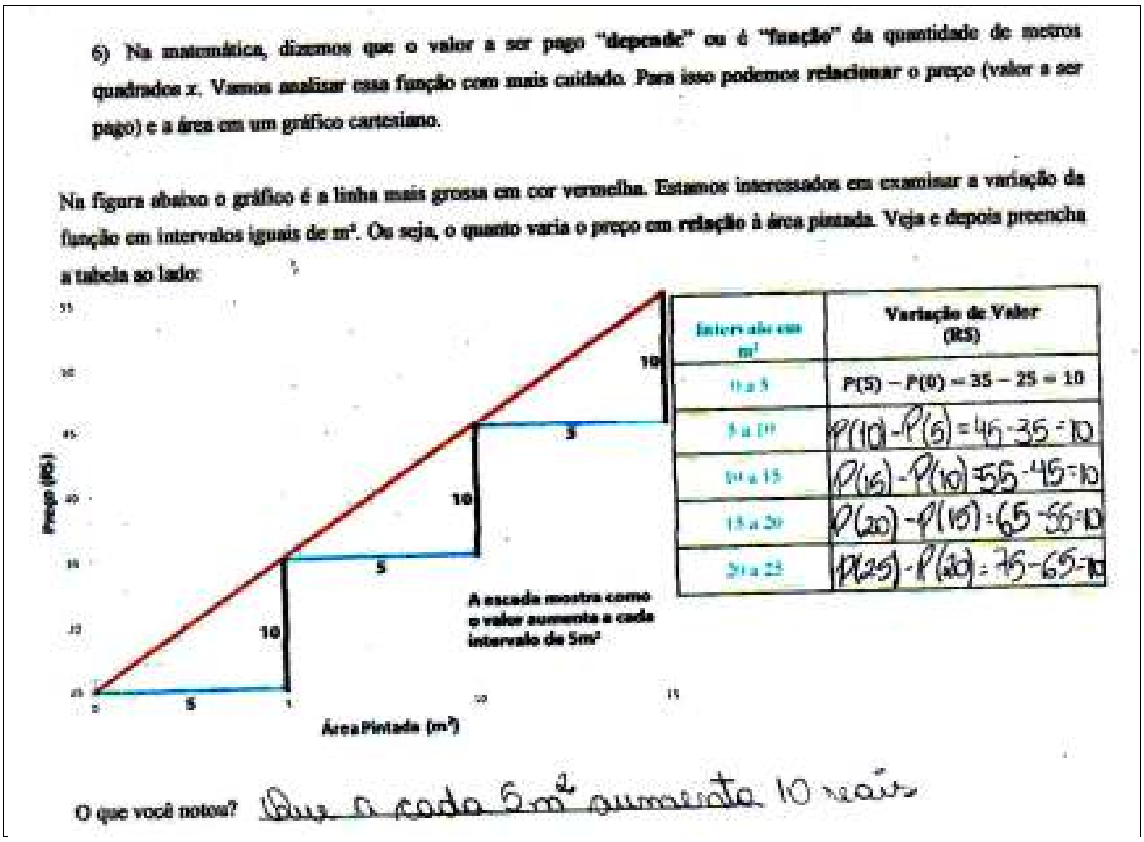
4) Juninho então resolveu chamar essa função de P (já que se trata do preço a ser pago por seu pai) e notou que: $P(5) = 35$, $P(10) = 45$, $P(15) = 55$... Sendo assim, responda: $P(17) =$ 59

5) Se a área pintada for x, quanto deverá ser pago?

$P(x) = 2x + 25$

Figura 51: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 1

A próxima atividade tinha como intenção trabalhar o conceito de taxa de variação e o seu cálculo. A não ser pelo fato de parte dos estudantes reclamarem um pouco em relação à falta de tempo, grande parte conseguiu atingir o objetivo da atividade. De um total de cinquenta e um grupos, seis estudantes de três grupos não preencheram corretamente as duas primeiras tabelas, já vinte e cinco estudantes de doze grupos não preencheram corretamente a terceira tabela ou preencheram-na de forma incompleta. Vemos abaixo, nas Figuras 52, 53, 54 e 55, exemplos de texto preenchido corretamente.

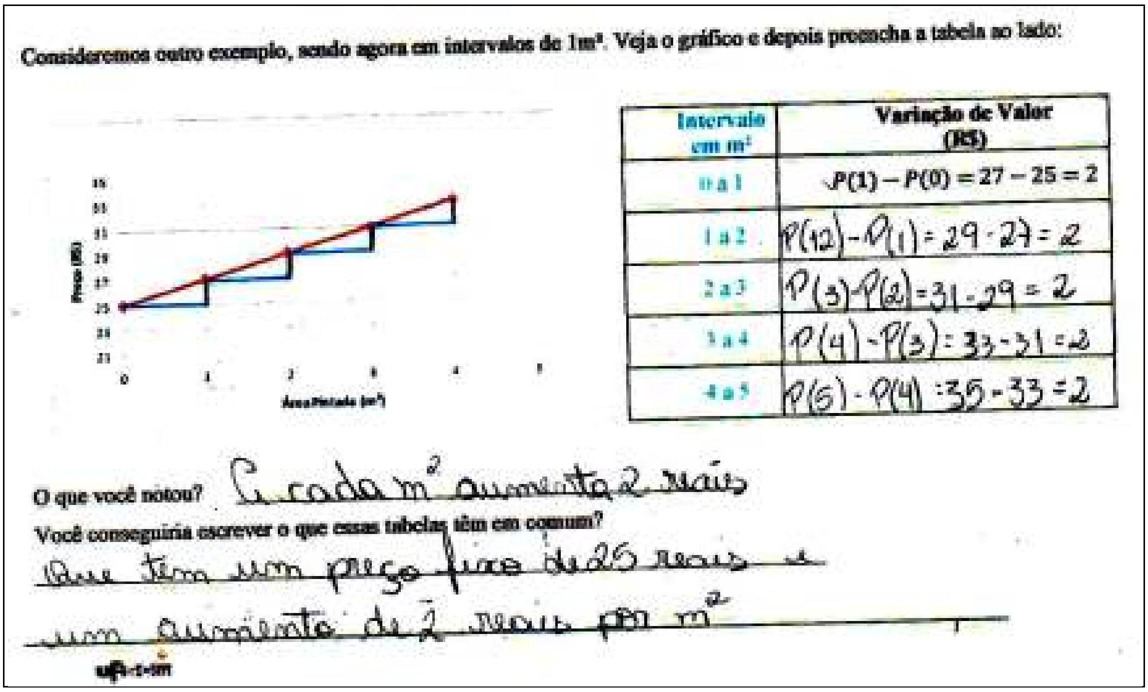

6) Na matemática, dizemos que o valor a ser pago "depende" ou é "função" da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos relacionar o preço (valor a ser pago) e a área em um gráfico cartesiano.

Na figura abaixo o gráfico é a linha mais grossa em cor vermelha. Estamos interessados em examinar a variação da função em intervalos iguais de m². Ou seja, o quanto varia o preço em relação à área pintada. Veja e depois preencha a tabela ao lado:

Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 5	$P(5) - P(0) = 35 - 25 = 10$
5 a 10	P(10)-P(5)=45-35=10
10 a 15	P(15)-P(10)=55-45=10
15 a 20	P(20)-P(15)=65-55=10
20 a 25	P(25)-P(20)=75-65=10

O que você notou? Que a cada 5m² aumenta 10 reais

Figura 52: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 2 da Folha de Atividades 1


Consideremos outro exemplo, sendo agora em intervalos de 1m². Veja o gráfico e depois preencha a tabela ao lado:

Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 1	$P(1) - P(0) = 27 - 25 = 2$
1 a 2	P(2)-P(1)=29-27=2
2 a 3	P(3)-P(2)=31-29=2
3 a 4	P(4)-P(3)=33-31=2
4 a 5	P(5)-P(4)=35-33=2

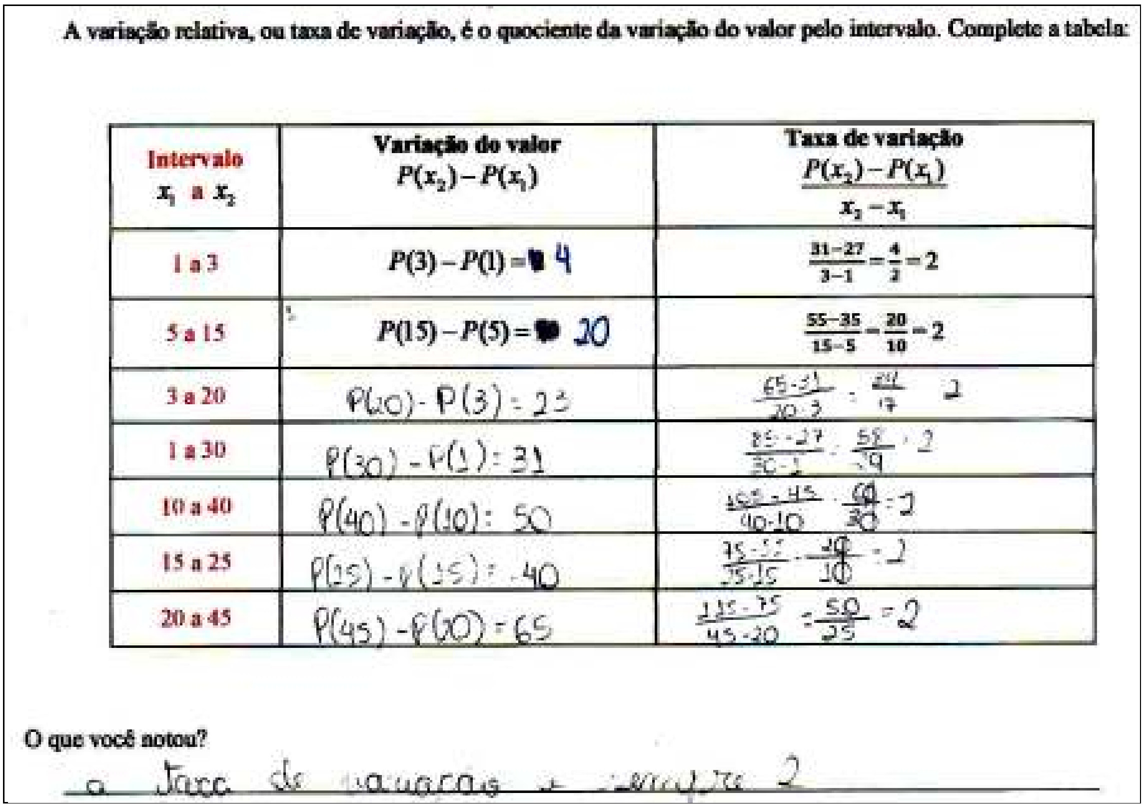
O que você notou? A cada m² aumenta 2 reais

Você conseguiria escrever o que essas tabelas têm em comum?

Que têm um preço fixo de 25 reais e um aumento de 2 reais por m²

Figura 53: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 2 da Folha de Atividades 1

E finalmente preencheram a tabela na qual é citado pela primeira vez o termo taxa de variação:


A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 a x_2	Variação do valor $P(x_2)-P(x_1)$	Taxa de variação $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=$ 4	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=$ 20	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20	P(20) - P(3) = 23	$\frac{65-31}{20-3} = \frac{34}{17}$ 2
1 a 30	P(30) - P(1) = 31	$\frac{85-27}{30-1} = \frac{58}{29} = 2$
10 a 40	P(40) - P(10) = 50	$\frac{105-45}{40-10} = \frac{60}{30} = 2$
15 a 25	P(25) - P(15) = 40	$\frac{75-55}{25-15} = \frac{20}{10} = 2$
20 a 45	P(45) - P(20) = 65	$\frac{115-75}{45-20} = \frac{50}{25} = 2$

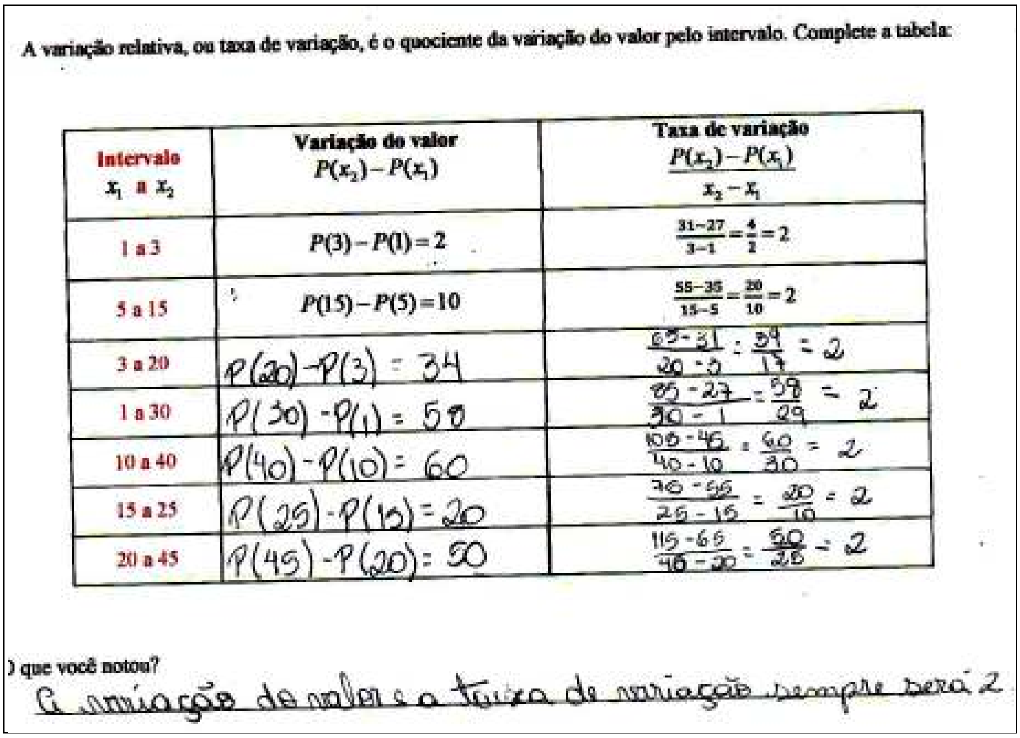
O que você notou?

a Taxa de variação é sempre 2

Figura 54: Resposta do mesmo estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 1

Segue, na Figura 55, uma outra resposta dessa última tabela. Chamou-nos atenção que o estudante assinalou que a “variação do valor” (uma das colunas da tabela) também era constante. Isso nos pareceu simplesmente um descuido do estudante.

Nas Figuras 56 e 57 seguem as respostas incorretas ou incompletas de dois estudantes.



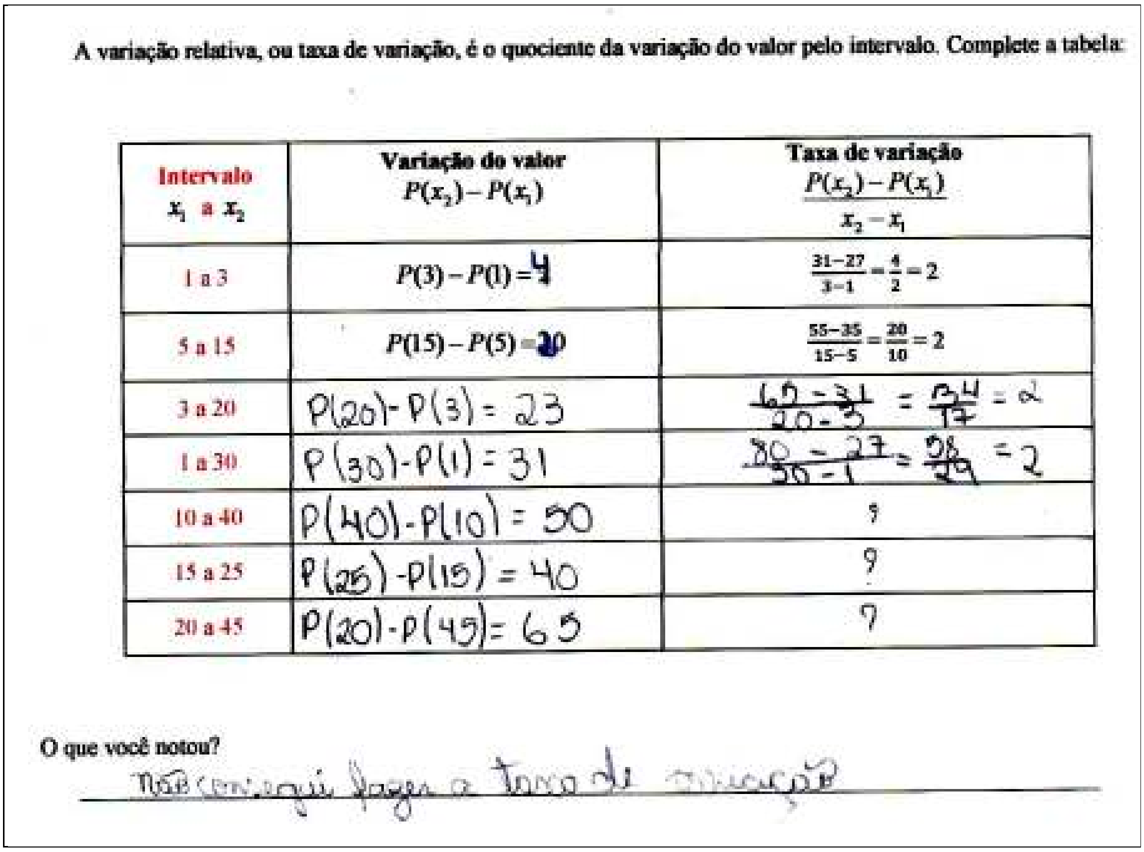
A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 a x_2	Variação do valor $P(x_2)-P(x_1)$	Taxa de variação $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=2$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=10$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20	$P(20)-P(3)=34$	$\frac{65-31}{20-3}=\frac{34}{17}=2$
1 a 30	$P(30)-P(1)=58$	$\frac{85-27}{30-1}=\frac{58}{29}=2$
10 a 40	$P(40)-P(10)=60$	$\frac{100-40}{40-10}=\frac{60}{30}=2$
15 a 25	$P(25)-P(15)=20$	$\frac{75-55}{25-15}=\frac{20}{10}=2$
20 a 45	$P(45)-P(20)=50$	$\frac{115-65}{45-20}=\frac{50}{25}=2$

O que você notou?

A variação do valor e a taxa de variação sempre será 2

Figura 55: Resposta de outro estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 1



A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 a x_2	Variação do valor $P(x_2)-P(x_1)$	Taxa de variação $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=20$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20	$P(20)-P(3)=23$	$\frac{65-31}{20-3}=\frac{34}{17}=2$
1 a 30	$P(30)-P(1)=31$	$\frac{80-27}{30-1}=\frac{58}{29}=2$
10 a 40	$P(40)-P(10)=50$	?
15 a 25	$P(25)-P(15)=40$	?
20 a 45	$P(20)-P(45)=65$	?

O que você notou?

Não consegui fazer a taxa de variação

Figura 56: Resposta de outro estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 1

A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 a x_2	Variação do valor $P(x_2)-P(x_1)$	Taxa de variação $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=20$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20	$P(30)-P(3)=34$	$\frac{65-31}{20-3}=\frac{34}{17}=2$
1 a 30	$P(30)-P(1)=58$	$\frac{85-27}{30-1}=\frac{58}{29}=2$
10 a 40	$P(40)-P(10)=60$	$\frac{105-45=60}{40-10=30}=2$
15 a 25	$P(25)-P(15)=20$	$\frac{75-55=20}{25-15=5}=4$
20 a 45	$P(45)-P(20)=$	$\frac{90-65=25}{45-20=25}=0$

O que você notou?

nada

Figura 57: Resposta de outro estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 1

Para concluir e verificar se os estudantes conseguiram associar o valor da taxa de variação ao parâmetro a na formulação algébrica $f(x)=ax+b$, foi dada, item 7), uma função para que respondessem o valor da taxa de variação da mesma. De um total de cinquenta e um grupos, vinte e três estudantes de doze grupos não responderam corretamente ou deixaram em branco. Confira uma resposta na Figura 58.

7) Consideremos outro exemplo de função: $f(x)=7x+10$. Quanto você acha que vale sua taxa de variação?

Resposta: sua taixa de variacão sempre será 7.

$x=1$ $f(x)=7x+10$

$7.1+10=17$

Figura 58: Resposta correta de um estudante da quarta parte do problema 2 da Folha de Atividades 1

Para encerrar a primeira Folha de Atividades, foi proposta uma atividade envolvendo movimento uniforme da Física. Uma tabela foi fornecida totalmente preenchida relacionando espaço e tempo. Primeiramente foi solicitado que marcassem os pontos da tabela no gráfico e que ligassem os pontos com uma reta. Os estudantes não tiveram dificuldade nessa atividade. Todos a realizaram corretamente.

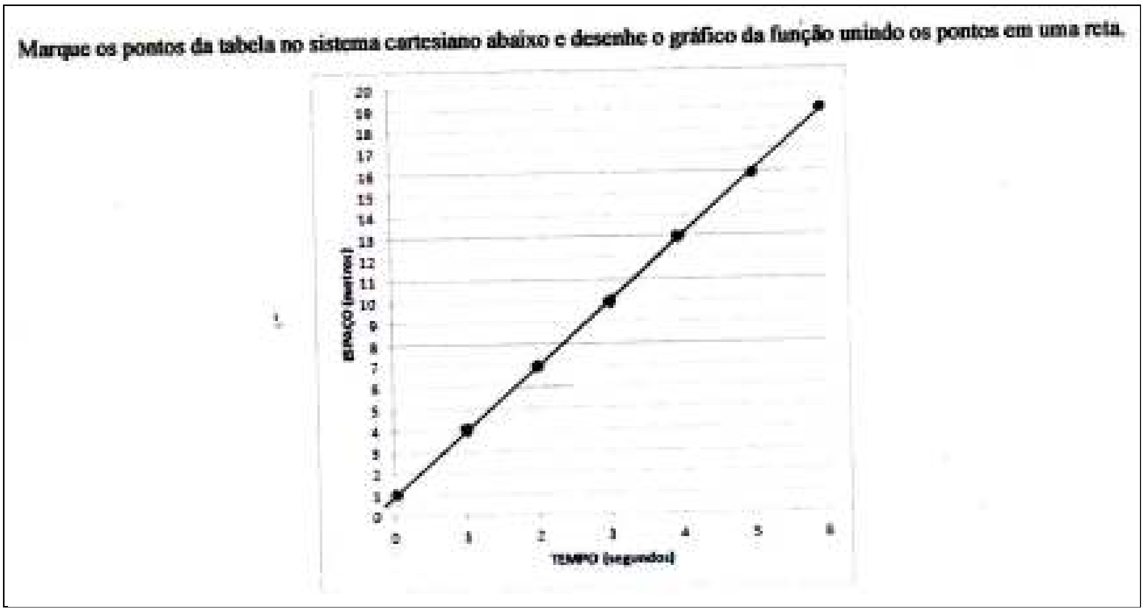
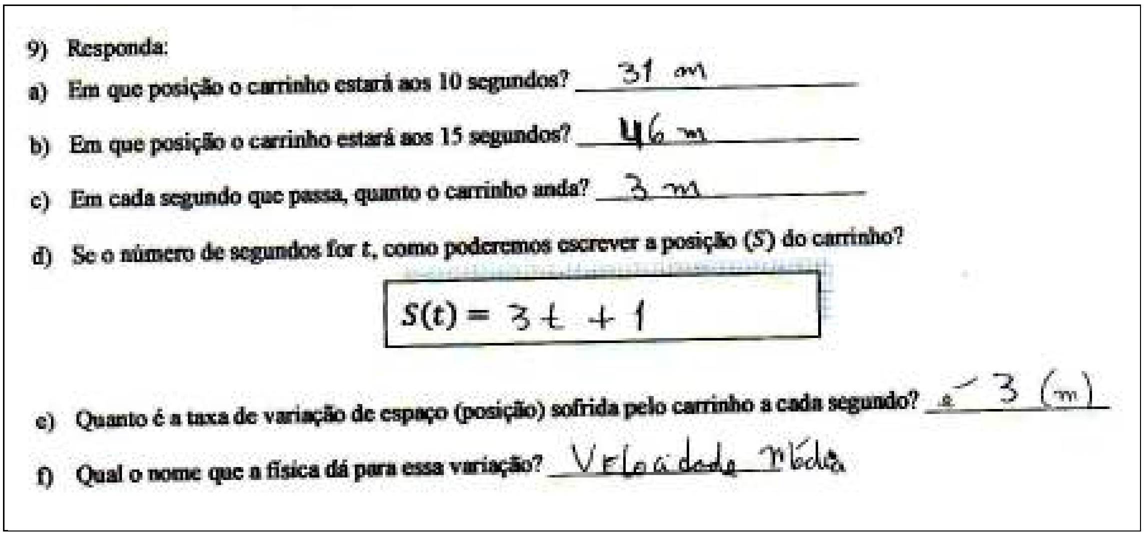


Figura 59: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 3 da Folha de Atividades 1

Em seguida algumas perguntas foram feitas para que conseguissem escrever a função afim que relacionava o espaço e o tempo. A relação desejada em relação à Física era que o estudante identificasse que a taxa de variação da função era a velocidade, e a expectativa foi alcançada. Apenas dezesseis estudantes de oito grupos não responderam essa questão ou responderam de forma incorreta. Confira exemplos nas Figuras 60 e 61.



9) Responda:

a) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? 31 m

b) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? 46 m

c) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? 3 m

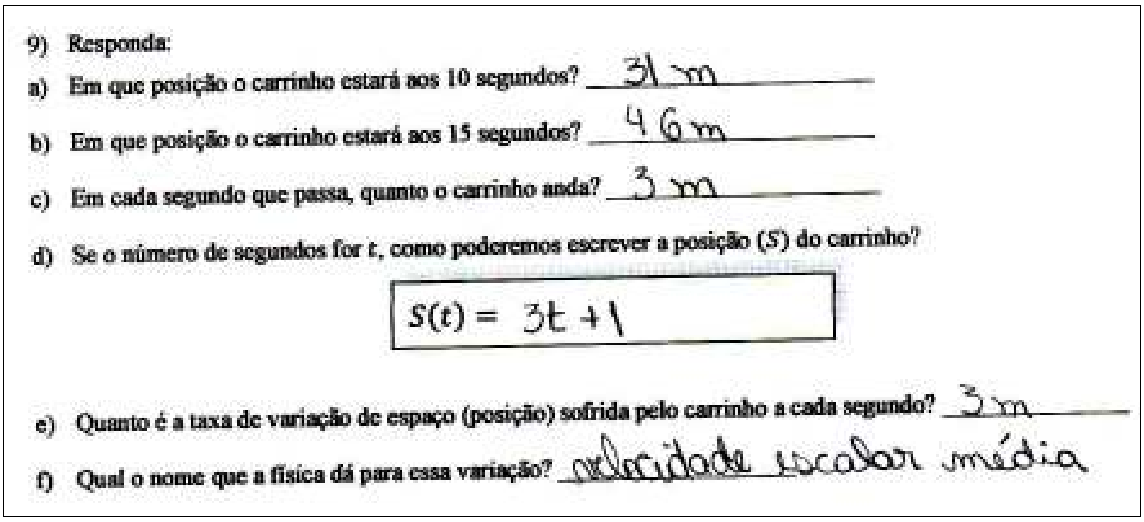
d) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$$\boxed{S(t) = 3t + 1}$$

e) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo? 3 (m)

f) Qual o nome que a física dá para essa variação? Velocidade média

Figura 60: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 3 da Folha de Atividades 1



9) Responda:

a) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? 31 m

b) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? 46 m

c) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? 3 m

d) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$$\boxed{S(t) = 3t + 1}$$

e) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo? 3 m

f) Qual o nome que a física dá para essa variação? velocidade escalar média

Figura 61: Resposta de outro estudante da segunda parte do problema 3 da Folha de Atividades 1

No final da primeira Folha de Atividades foi dada a definição de função afim e foi perguntada a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$. Os estudantes não apresentaram dificuldade em responder essa última pergunta. Acreditamos que os dez estudantes de cinco grupos que não responderam esse problema não o fizeram porque faltou tempo.

Função Afim
Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$

Pergunta:
Qual a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$? Resposta: ____________

A principal propriedade que caracteriza as funções afins é que sua taxa de variação é constante.

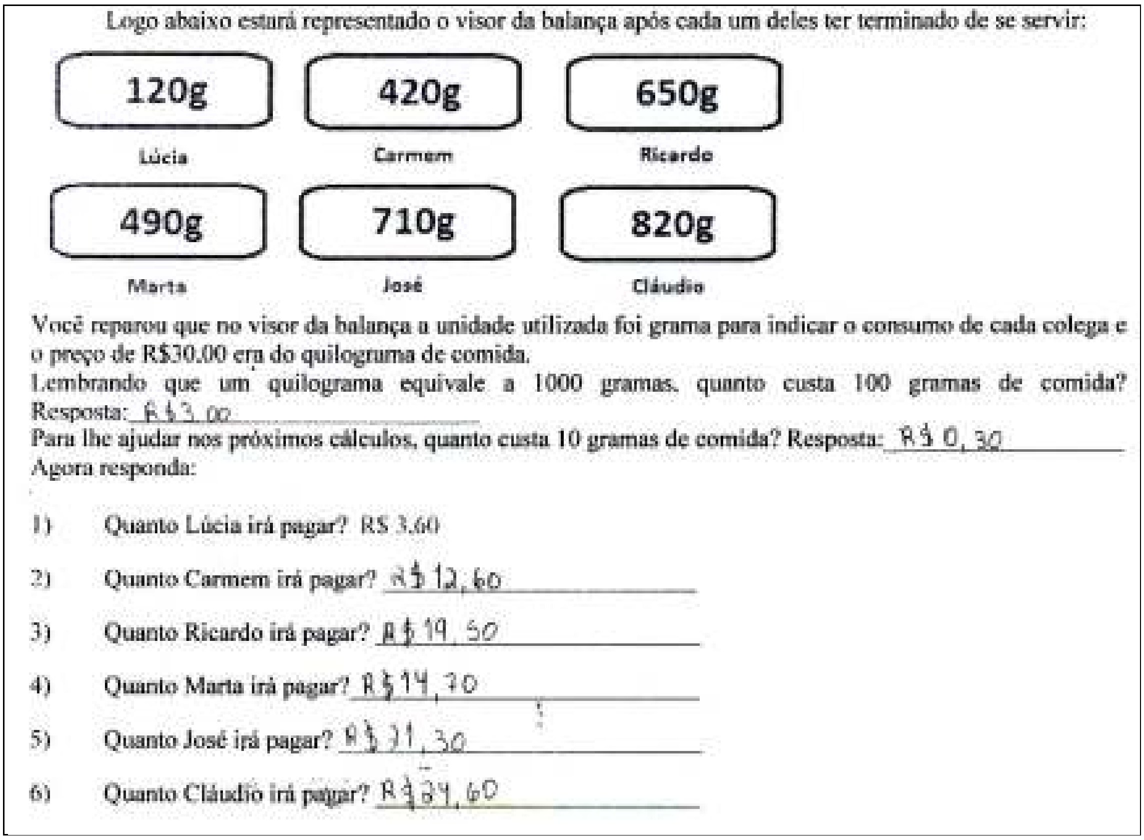
Figura 62: Resposta correta de um estudante para o problema final da Folha de Atividades 1

Todas as Folhas de Atividades possuíam duas perguntas no final: Uma questionava se haviam gostado da atividade e a outra sobre o nível de dificuldade (fácil, médio ou difícil). Cem por cento dos estudantes assinalaram que gostaram da atividade e a maioria achou a atividade de nível médio, num total de cinquenta e seis estudantes de vinte e oito grupos. Trinta e um estudantes de quinze grupos acharam a atividade fácil e dezessete estudantes de oito grupos consideraram difícil.

4.3 – Análise detalhada da aplicação da Folha de Atividades 2

A Folha de Atividades 2, como já descrita no Capítulo 2, foi dividida em duas atividades sobre função afim. A primeira atividade propõe a situação de um restaurante em que seis pessoas foram almoçar. A quantidade de comida de cada um dos clientes e o preço do quilograma da comida foram fornecidos.

Primeiramente foi perguntado o valor pago por cem gramas de comida e por dez gramas. Em seguida, foi perguntado o valor pago pelos clientes um a um. A grande maioria realizou essa atividade sem problemas. De um total de cinquenta e um grupos, apenas dez estudantes de cinco grupos não responderam corretamente esse problema. Alguns estudantes reclamaram das contas por envolver números decimais. Na Figura 63 podemos conferir uma resposta de um dos estudantes.



Logo abaixo estará representado o visor da balança após cada um deles ter terminado de se servir:

120g	420g	650g
Lúcia	Carmem	Ricardo
490g	710g	820g
Marta	José	Cláudio

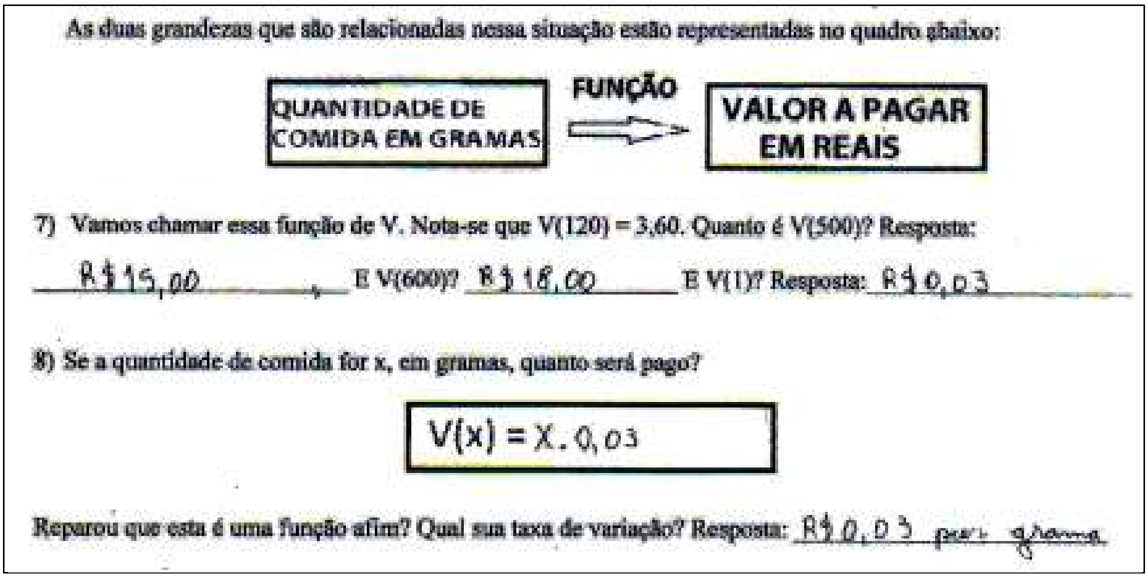
Você reparou que no visor da balança a unidade utilizada foi grama para indicar o consumo de cada colega e o preço de R$30,00 era do quilograma de comida.
Lembrando que um quilograma equivale a 1000 gramas, quanto custa 100 gramas de comida? Resposta: R$3,00
Para lhe ajudar nos próximos cálculos, quanto custa 10 gramas de comida? Resposta: R$ 0,30
Agora responda:

1) Quanto Lúcia irá pagar? R$ 3,60
2) Quanto Carmem irá pagar? R$ 12,60
3) Quanto Ricardo irá pagar? R$ 19,50
4) Quanto Marta irá pagar? R$ 14,70
5) Quanto José irá pagar? R$ 21,30
6) Quanto Cláudio irá pagar? R$ 24,60

Figura 63: Resposta correta de um estudante da primeira parte do problema 1 da Folha de Atividades 2

Foi perguntado o valor pago no caso do consumo de quinhentos, seiscentos e um grama para que, em seguida, fosse escrita a função que descreve a situação desse problema.

Ainda que fosse dado o esquema relacionando a quantidade de comida e valor a pagar, pouco mais da metade dos estudantes conseguiu atingir a expectativa dessa atividade. Alguns não conseguiram expressar da maneira desejada, porém conseguiram descrever a sua maneira, que entenderam o problema proposto. Alguns estudantes escreveram o preço e um grama de comida ao invés da função $V(x) = 0{,}03x$. Sessenta e cinco estudantes de trinta e dois grupos responderam corretamente a segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 2. Podemos conferir a resposta de dois estudantes nas Figuras 64 e 65.



As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:

QUANTIDADE DE COMIDA EM GRAMAS → FUNÇÃO → VALOR A PAGAR EM REAIS

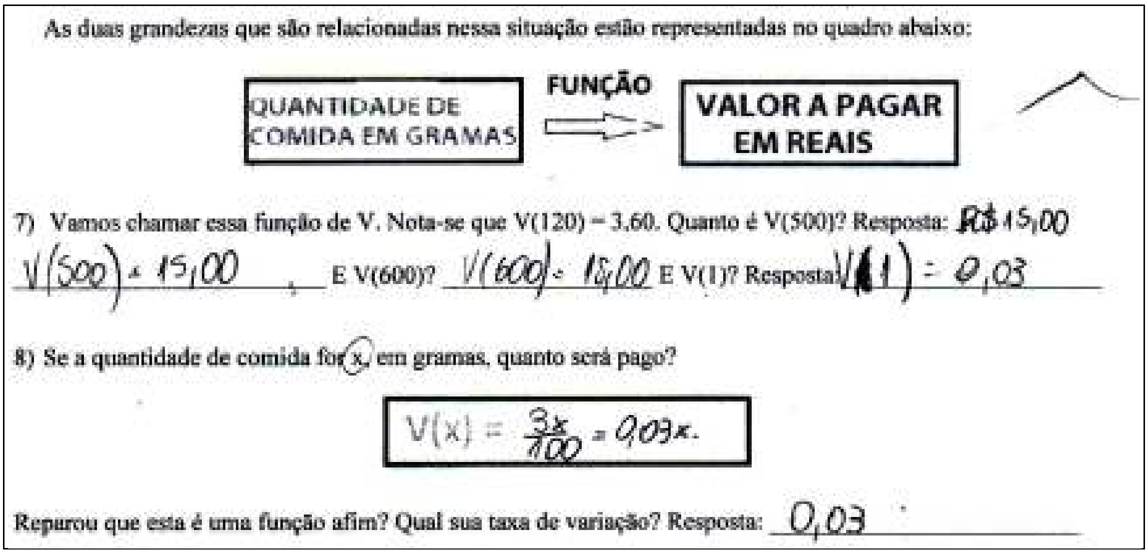
7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: R$ 15,00. E V(600)? R$ 18,00 E V(1)? Resposta: R$ 0,03

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$\boxed{V(x) = x \cdot 0{,}03}$

Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação? Resposta: R$ 0,03 por grama

Figura 64: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 2



As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:

QUANTIDADE DE COMIDA EM GRAMAS → FUNÇÃO → VALOR A PAGAR EM REAIS

7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: R$ 15,00 $V(500) = 15{,}00$. E V(600)? $V(600) = 18{,}00$ E V(1)? Resposta $V(1) = 0{,}03$

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$\boxed{V(x) = \frac{3x}{100} = 0{,}03x.}$

Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação? Resposta: 0,03

Figura 65: Resposta de outro estudante da segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 2

A segunda atividade dessa folha é mais extensa. Trata-se de escolher um dentre dois bancos levando em conta a taxa mensal cobrada em função do número de cheques emitidos. Foi permitido o uso da calculadora para essa atividade. O primeiro banco, chamado ABC, cobrava uma taxa fixa de manutenção no valor de dez reais mais quinze centavos por cheque emitido. Já o segundo banco, o XY, possuía taxa fixa de quinze reais e cobrava dez centavos por emissão de cheque.

Primeiramente os estudantes deveriam calcular a taxa mensal cobrada pelos dois bancos no caso de seis valores distintos de quantidade de emissão de cheques. Não tiveram dúvidas e cumpriram corretamente a atividade, porém, as reclamações aumentaram em decorrência dos cálculos. De um total de cinquenta e um grupos, vinte e um estudantes de dez grupos se confundiram nos cálculos e erraram um ou dois itens desse problema. Na Figura 66 temos a resposta de um dos estudantes que efetuou os cálculos corretamente.

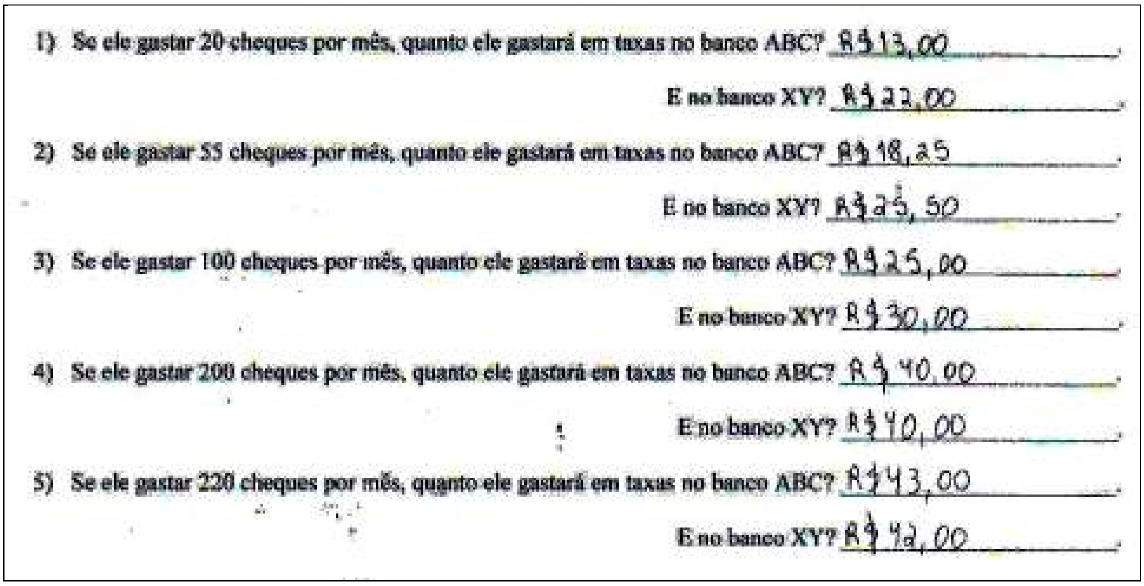
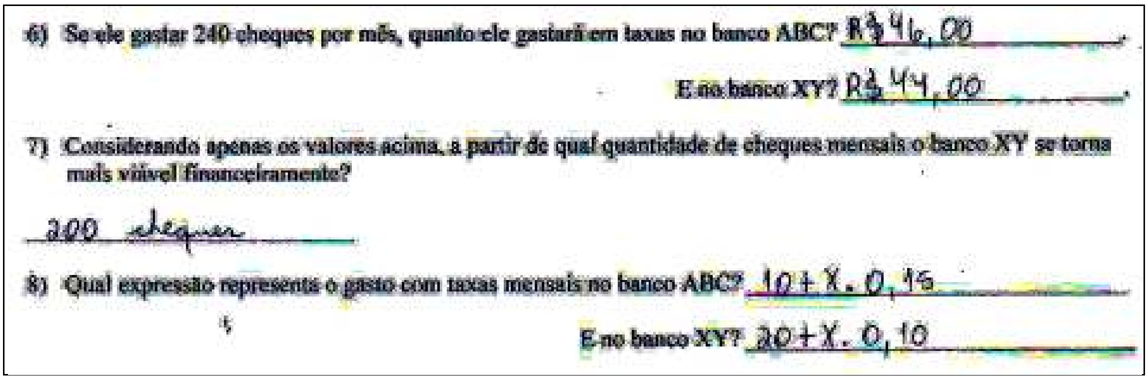

1) Se ele gastar 20 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$13,00.
E no banco XY? R$22,00.
2) Se ele gastar 55 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$18,25.
E no banco XY? R$25,50.
3) Se ele gastar 100 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$25,00.
E no banco XY? R$30,00.
4) Se ele gastar 200 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$40,00.
E no banco XY? R$40,00.
5) Se ele gastar 220 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$43,00.
E no banco XY? R$42,00.

Figura 66: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 2 da Folha de Atividades 2

A intenção de tantos cálculos era que os estudantes notassem que para duzentos cheques emitidos, o valor a ser pago é o mesmo. E que a partir desta quantidade, o banco mais viável financeiramente passava a ser o XY. Esta pergunta quanto à viabilidade foi feita e também deveriam escrever a expressão do valor a ser pago em função do número de cheques no caso de cada banco. A maior parte dos estudantes conseguiu atingir a expectativa. Apenas sete estudantes de três grupos não responderam corretamente a partir de quantos cheques o banco mais viável seria o XY e de dezesseis estudantes de oito grupos não escreveram corretamente as funções solicitadas. A resposta de um estudante podemos conferir na Figura 67.



6) Se ele gastar 240 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 46,00.

E no banco XY? R$ 44,00.

7) Considerando apenas os valores acima, a partir de qual quantidade de cheques mensais o banco XY se torna mais viável financeiramente?

200 cheques

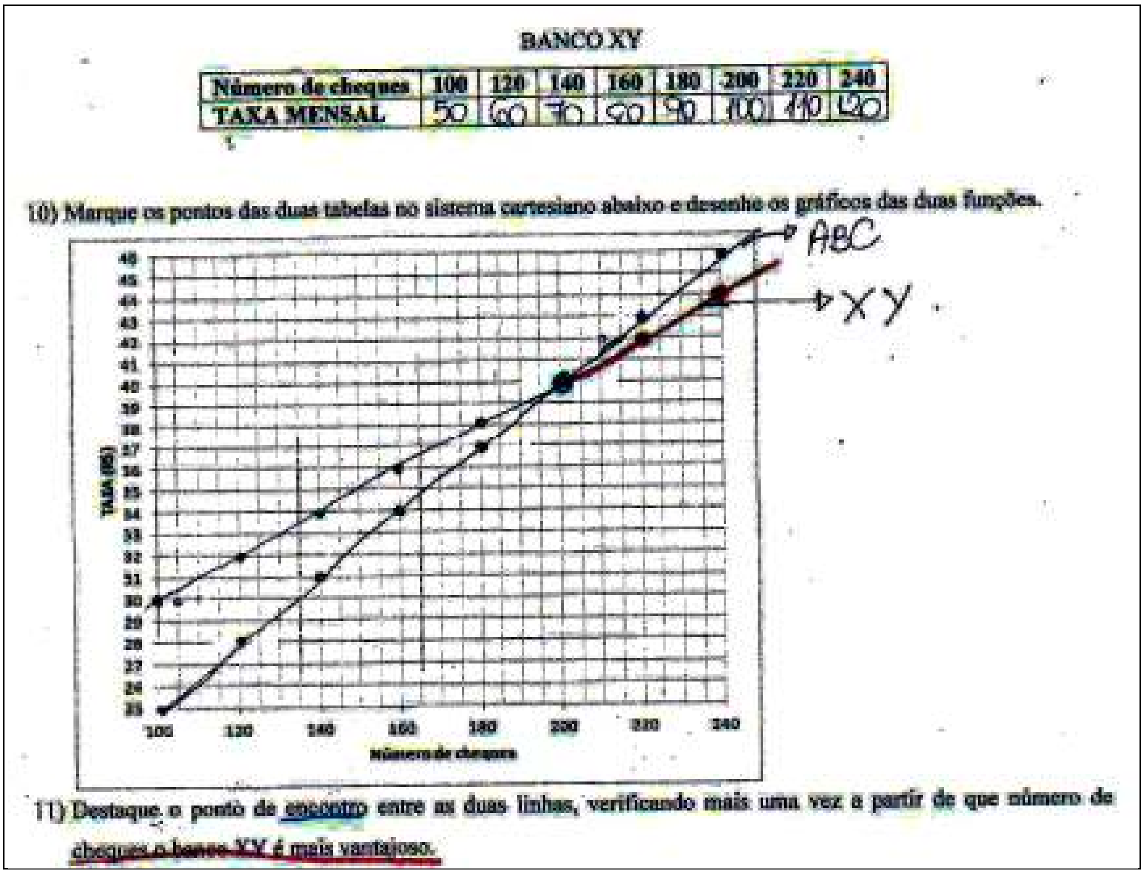
8) Qual expressão representa o gasto com taxas mensais no banco ABC? 10+X.0,15

E no banco XY? 20+X.0,10

Figura 67: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 2 da Folha de Atividades 2

A última atividade dessa folha solicita o preenchimento de duas tabelas: uma referente ao banco ABC e outra, ao banco XY. Em seguida os estudantes devem colocar os valores obtidos no mesmo sistema cartesiano, o que permite identificar o ponto de encontro das duas retas. Assim pode-se verificar graficamente que a partir da emissão de duzentos cheques, o banco XY torna-se mais viável financeiramente. Essa atividade deve auxiliá-los na resolução algébrica dessa situação. Assim os estudantes devem resolver uma inequação, última atividade solicitada nessa folha. Os vinte e um estudantes de dez grupos que erraram alguns itens na primeira parte desse problema 2, não conseguiram construir corretamente os gráficos solicitados.

Esta última atividade, a resolução algébrica da inequação, não obteve resultado desejado. Apenas trinta estudantes de quinze grupos, dentre o total de cinquenta e um, conseguiram concluir essa atividade corretamente. Alguns conseguiram escrever a inequação, mas não prosseguiram na resolução. Vemos exemplos de soluções nas Figuras 69 e 71. Já nas Figuras 68 e 70 encontramos os gráficos das funções.



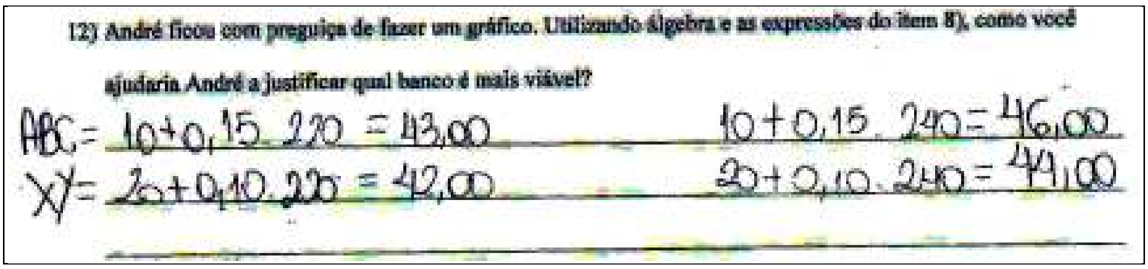
BANCO XY

Número de cheques	100	120	140	160	180	200	220	240
TAXA MENSAL	50	60	70	80	90	100	110	120

10) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.

11) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

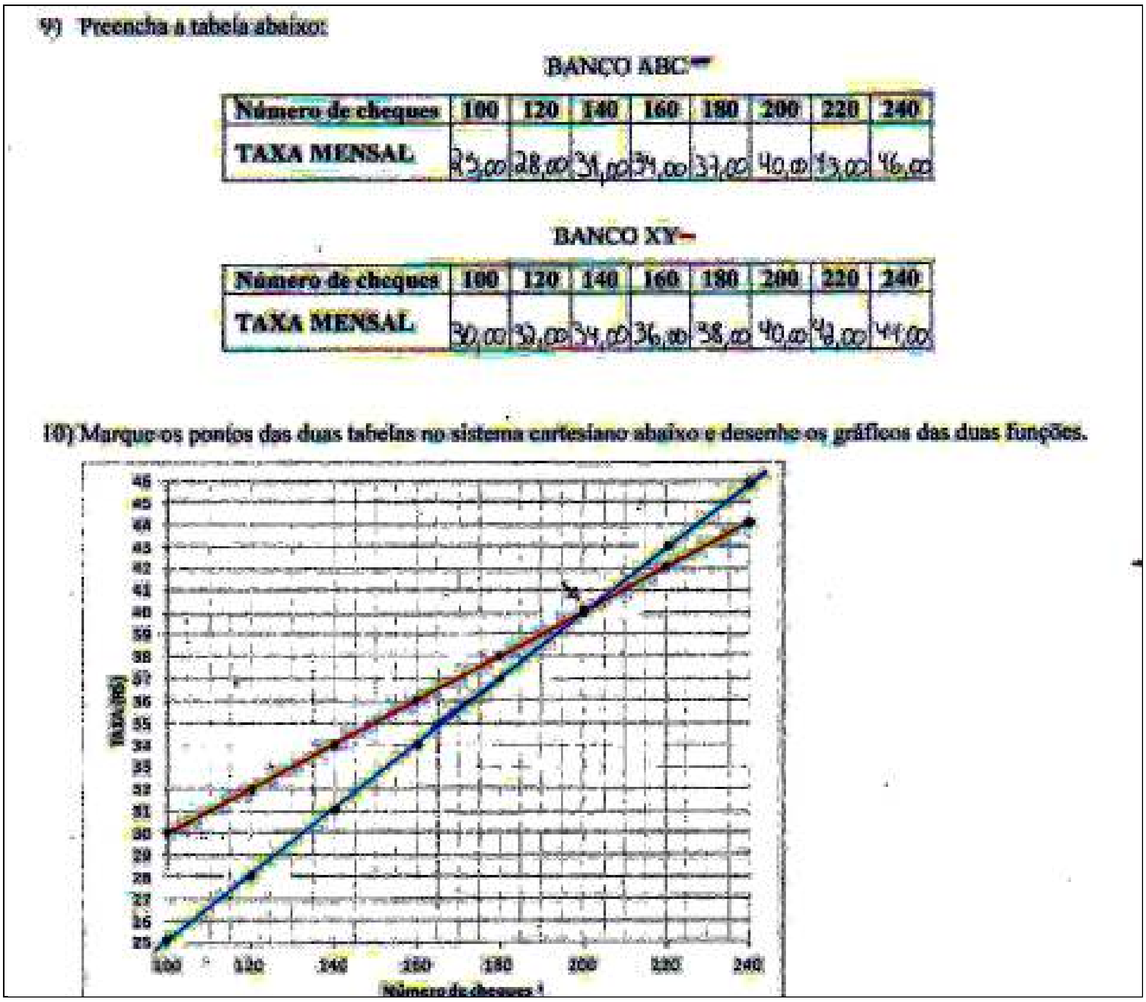
Figura 68: Resposta de um estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 2



12) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

ABC = 10+0,15 . 220 = 43,00 10+0,15 . 240 = 46,00
XY = 20+0,10 . 220 = 42,00 20+0,10 . 240 = 44,00

Figura 69: Resposta do mesmo estudante da quarta parte do problema 2 da Folha de Atividades 2



9) Preencha a tabela abaixo:

BANCO ABC

Número de cheques	100	120	140	160	180	200	220	240
TAXA MENSAL	25,00	28,00	31,00	34,00	37,00	40,00	43,00	46,00

BANCO XY

Número de cheques	100	120	140	160	180	200	220	240
TAXA MENSAL	30,00	32,00	34,00	36,00	38,00	40,00	42,00	44,00

10) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.

Figura 70: Resposta de outro estudante da terceira parte do problema 2 da Folha de Atividades 2

11) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

12) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

$20 + X . 0,10 < 10 + X . 0,15 = 200$

Figura 71: Resposta do mesmo estudante da quarta parte do problema 2 da Folha de Atividades 2

Na última pergunta da Folha de Atividades 3, que pede a opinião dos estudantes, cem por cento deles assinalaram que gostaram da atividade. Vinte estudantes de dez grupos acharam a atividade fácil e o restante achou de nível médio.

4.4 – Análise detalhada da aplicação da Folha de Atividades 3

A Folha de Atividades 3 não se refere mais à função afim, e sim à função quadrática. Foi aplicada aos estudantes depois de uma primeira aula teórica e possui três atividades. Sobre a primeira atividade, foram feitas três perguntas.

A primeira das três atividades era sobre um campeonato de futebol amador de uma escola, no qual cada time deveria jogar com todos os demais exatamente duas vezes. Em um primeiro momento, apenas três times participavam, em seguida, seis times. Raríssimos estudantes colocaram apenas metade dos jogos, pois se esqueceram de que cada jogo seria realizado duas vezes exatamente. Mais de noventa por cento do total de participantes respondeu corretamente a essa questão. De um total de cinquenta e um estudantes, seis estudantes de três grupos responderam de forma incorreta às perguntas iniciais dessa Folha de Atividades. Na Figura 72 encontramos a resposta de um estudante para esse primeiro problema.

1)Preparando um campeonato

Carlos, estudante do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio no interior de São Paulo, pediu para que seu professor de educação física organizasse um campeonato de futebol de salão com times de sua classe. Primeiramente a ideia era que participassem desse campeonato apenas os meninos do primeiro ano, que eram quinze. Uma equipe de futebol de salão é composta por cinco jogadores, portanto formaram-se os times A, B e C. Na primeira fase desse campeonato, cada time jogará com cada um dos outros times exatamente duas vezes. Escreva abaixo os jogos que serão realizados por esses três times:

Clipart free

Resposta: A-B|A-C|B-C|A-B|A-C|B-C

Quantos jogos foram realizados com esses 3 times? Resposta: 6

Antes que o torneio começasse, cinco alunos do segundo ano do Ensino Médio pediram para participar do campeonato. Temos agora quatro times: A, B, C e D. Lembrando que cada time joga com cada um dos outros times exatamente duas vezes nessa primeira etapa, escreva os jogos que foram realizados:

Resposta: A-B/A-C|B-C|A-D|D-B|D-C|A-B|A-C|B-C|A-D|D-B|D-C

Quantos jogos foram realizados com esses 4 times? Resposta: 12

Figura 72: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 1 da Folha de Atividades 3

Foi solicitado também que uma tabela fosse preenchida. Nela deveriam constar o número de jogos caso participassem de dois a dez times nesse campeonato. Como os quatro primeiros valores já estavam preenchidos, mesmo os alunos que não haviam compreendido muito bem que se tratava de uma função quadrática, conseguiram preencher corretamente. A expectativa foi atingida nessa questão, todos os estudantes responderam corretamente, mesmo os seis estudantes que não acertaram o problema anterior. Acreditamos que estes estudantes notaram um padrão no preenchimento da tabela e não fizeram a ligação com o problema que haviam acabado de resolver. Vejamos na Figura 73 a resposta de um dos estudantes.

Como o assunto campeonato de futebol de salão gerou muitos comentários na escola, os estudantes do segundo e do terceiro ano do Ensino Médio quiseram participar também. Mas todos os jogos deveriam acontecer no horário da aula de educação física e o professor ficou com receio de não terminar a primeira etapa porque as férias de julho estavam chegando. Ele pediu ajuda ao Carlos para fazer os cálculos de quantos jogos seriam realizados e começaram a construir uma tabela para se organizarem. Veja como ficou:

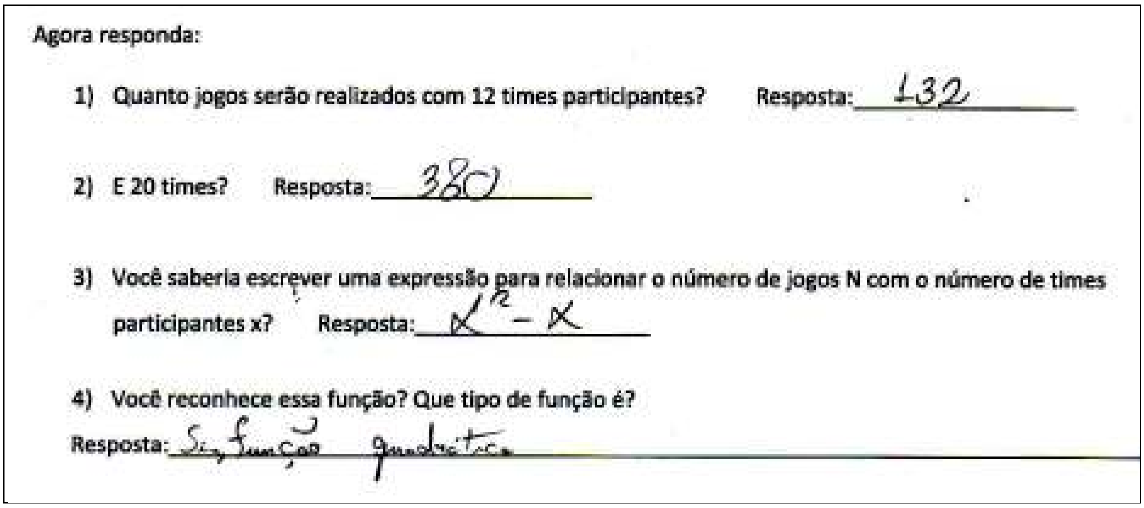
Número de times de futebol	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de jogos realizados	2	6	12	20	30	42	56	72	90

Você notou que a tabela possui espaços em branco? Preencha-os para ajudar Carlos e seu professor!

Figura 73: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 1 da Folha de Atividades 3

A primeira atividade tem fim com mais quatro perguntas, sendo que as duas últimas tinham a intenção de verificar se os estudantes conseguiram notar que se tratava de uma função quadrática.

Notamos na Figura 74 bastante formalismo por parte do estudante. Tanto ao escrever corretamente o termo função quadrática, quanto ao fato de deixar a expressão na forma expandida no item 4. Já na Figura 75 não houve preocupação em utilizar o termo correto, utilizou o termo função do segundo grau, como o material didático da escola propõe. E, ao escrever a expressão, mesmo que na forma fatorada, o estudante atingiu a expectativa esperada, mostrando que entendeu muito bem a situação proposta pelo problema. De um total de cinquenta e um grupos, vinte e cinco estudantes de doze grupos não responderam corretamente à terceira parte do problema 1 da Folha de Atividades 3.



Agora responda:

1) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes? Resposta: 132

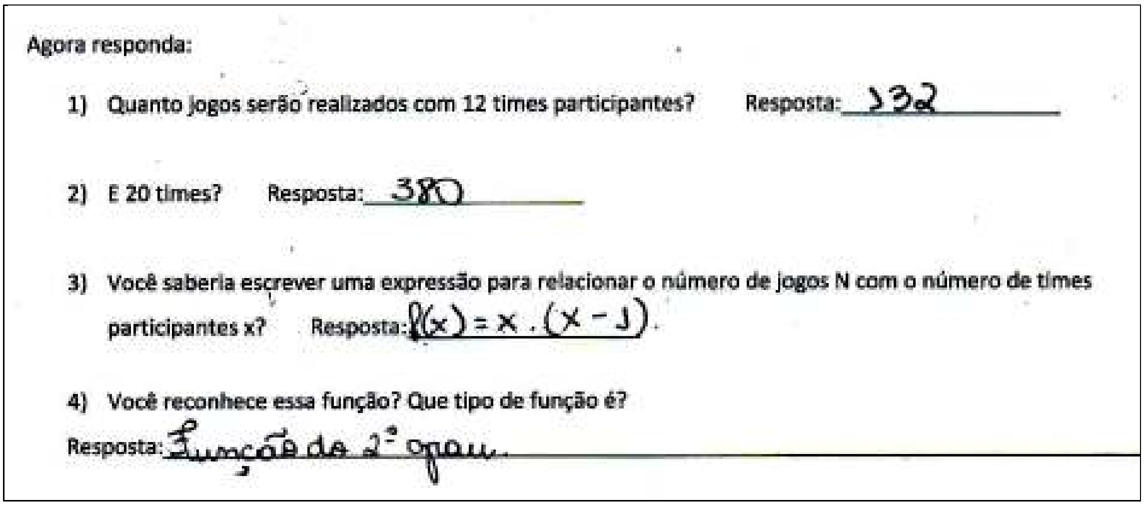
2) E 20 times? Resposta: 380

3) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta: $x^2 - x$

4) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?

Resposta: Sim, função quadrática

Figura 74: Resposta do mesmo estudante da terceira parte do problema 1 da Folha de Atividades 3



Agora responda:

1) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes? Resposta: 132

2) E 20 times? Resposta: 380

3) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta: $f(x) = x \cdot (x - 1)$.

4) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?

Resposta: função do 2° grau.

Figura 75: Resposta de outro estudante da terceira parte do problema 1 da Folha de Atividades 3

A segunda atividade procurou utilizar os gráficos da função quadrática para que os estudantes conseguissem determinar a expressão algébrica. Os dois primeiros gráficos solicitavam a expressão exata da função, visto que eram fornecidos três pontos: as raízes e o vértice. Os estudantes que optaram pela forma expandida, gastaram mais tempo, pois tiveram que resolver sistemas lineares e alguns destes deixaram o problema incompleto. De um total de cinquenta e um grupos, trinta estudantes de quinze grupos não responderam ou responderam de forma incompleta.

Na Figura 76 vemos a resposta de um estudante que optou pela forma fatorada para determinar a expressão algébrica.

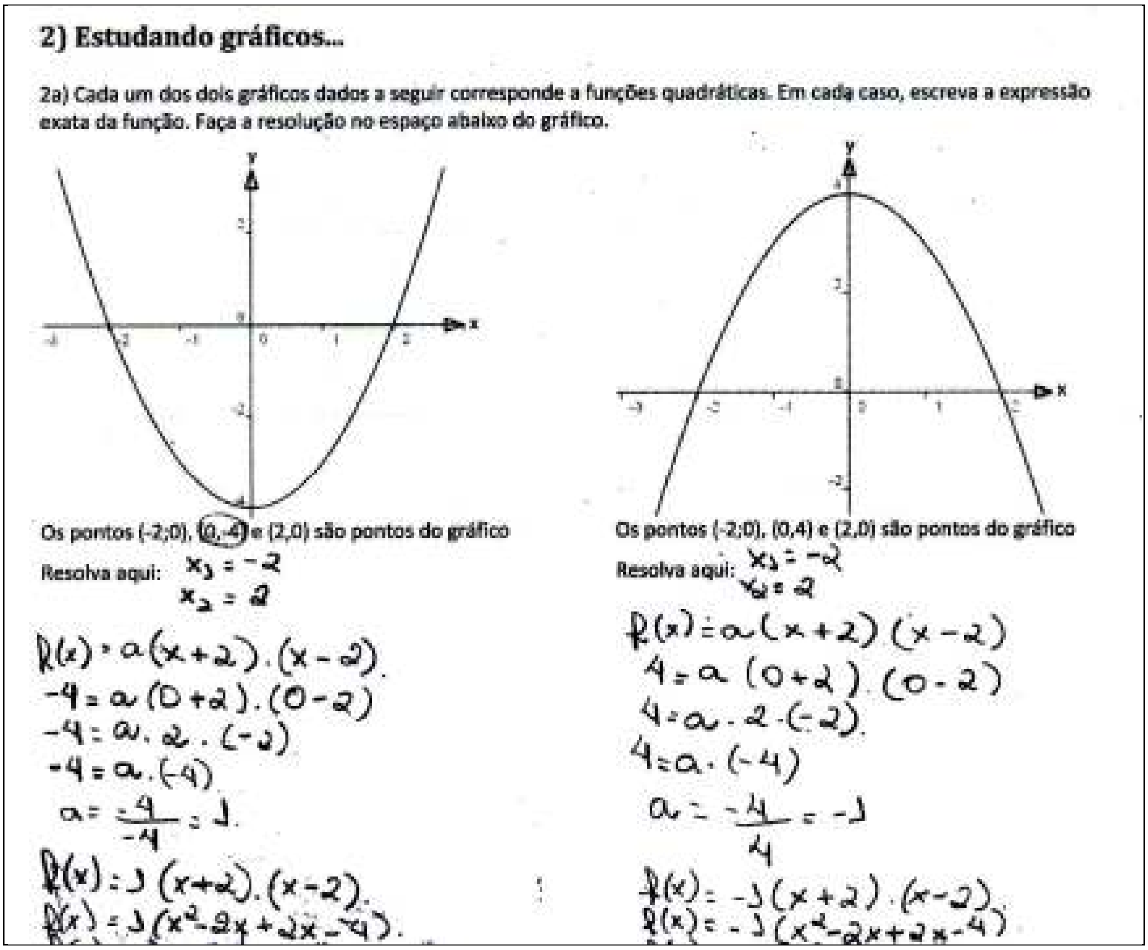


Figura 76: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 2 da Folha de Atividades 3

Já os dois últimos gráficos solicitavam uma expressão da função quadrática, pois eram fornecidas apenas as raízes. Tinha por objetivo estudar a concavidade da parábola: para cima ou para baixo. Todos os estudantes escreveram corretamente o valor das raízes e o sinal de a, porém, quarenta estudantes de vinte grupos não escreveram as expressões algébricas solicitadas. Alguns deles, por não ser possível determinar o valor de a, não substituíram o valor 1 ou -1 e mantiveram a na expressão. Na Figura 77 vemos a resposta de um estudante para a segunda parte do problema 2. Ele calculou corretamente a expressão da primeira função, mas na segunda, cometeu um erro ao multiplicar $(x+3)$ por x.

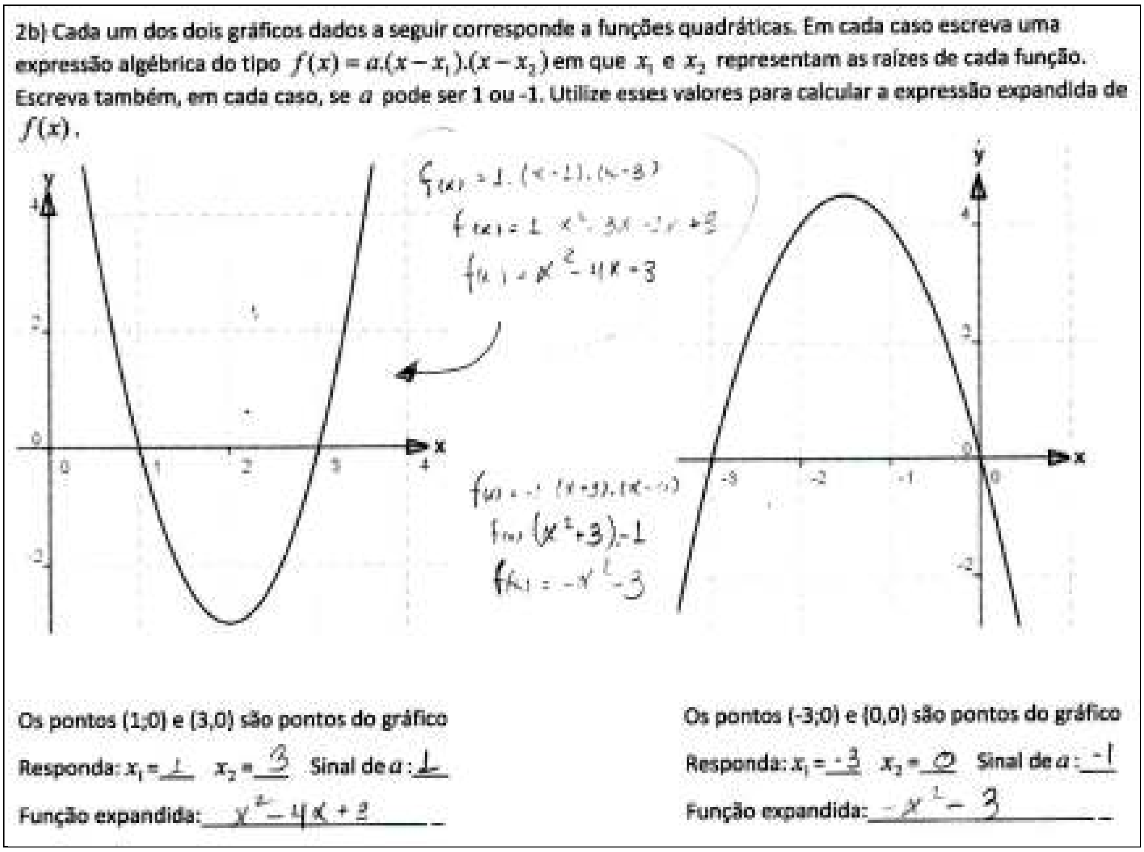
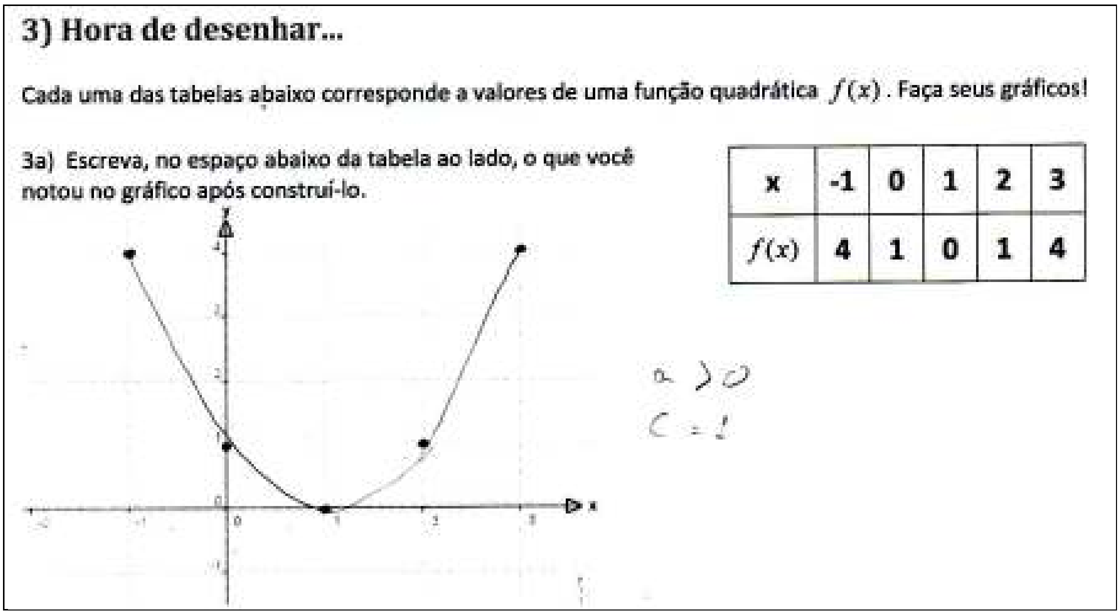


Figura 77: Resposta parcialmente correta de um estudante da segunda parte do problema 2 da Folha de Atividades 3

A última atividade dessa terceira folha solicitava o gráfico de duas parábolas a partir de duas tabelas devidamente preenchidas. A primeira parte tinha a intenção de fazê-los verificar apenas um ponto de intersecção com o eixo das abscissas, todos os estudantes obtiveram êxito nessa atividade. Vemos uma resposta de um estudante na Figura 78.



3) Hora de desenhar...

Cada uma das tabelas abaixo corresponde a valores de uma função quadrática $f(x)$. Faça seus gráficos!

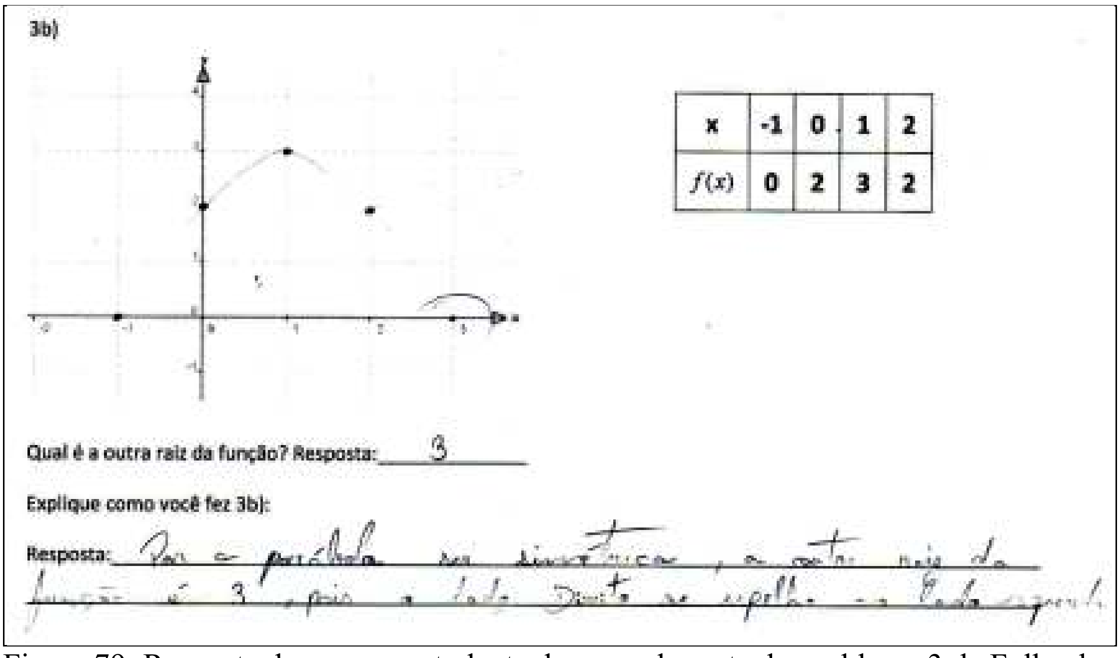
3a) Escreva, no espaço abaixo da tabela ao lado, o que você notou no gráfico após construí-lo.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

$a > 0$
$C = 1$

Figura 78: Resposta de um estudante da primeira parte do problema 3 da Folha de Atividades 3

A segunda parte do problema 3 solicitava o valor da outra raiz, já que uma delas era fornecida na tabela, com o intuito de explorar o conhecimento sobre o eixo de simetria existente nas parábolas. A maior parte dos estudantes conseguiu responder corretamente esse problema. De um total de cinquenta e um grupos, vinte e quatro estudantes de doze grupos não realizou de forma correta ou realizou de forma incompleta a segunda parte do problema 3. Uma das respostas está na Figura 79.



3b)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	3	2

Qual é a outra raiz da função? Resposta: 3

Explique como você fez 3b):

Resposta: Por a parábola ser simétrica, a outra raiz da função é 3, pois o lado direito se espelha ao lado esquerdo

Figura 79: Resposta do mesmo estudante da segunda parte do problema 3 da Folha de Atividades 3

Segue na Figura 80 outra das respostas apresentadas para o problema que tinha o intuito de estudar a simetria da parábola:

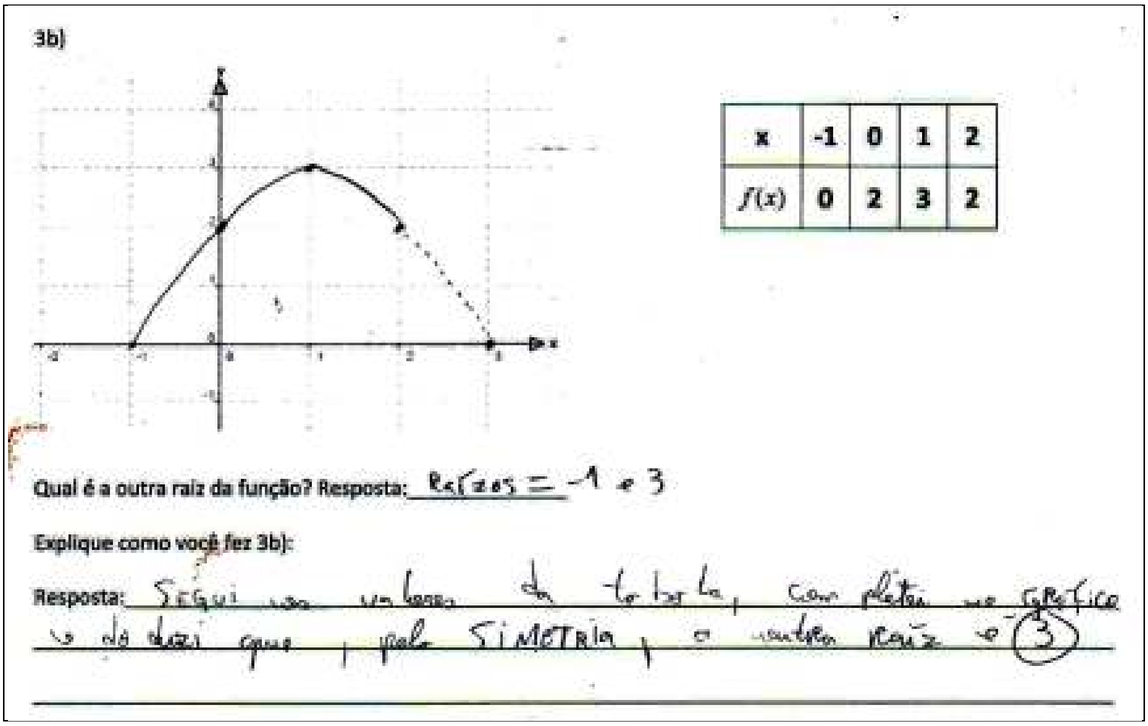


Figura 80: Resposta de outro estudante da segunda parte do problema 3 da Folha de Atividades 3

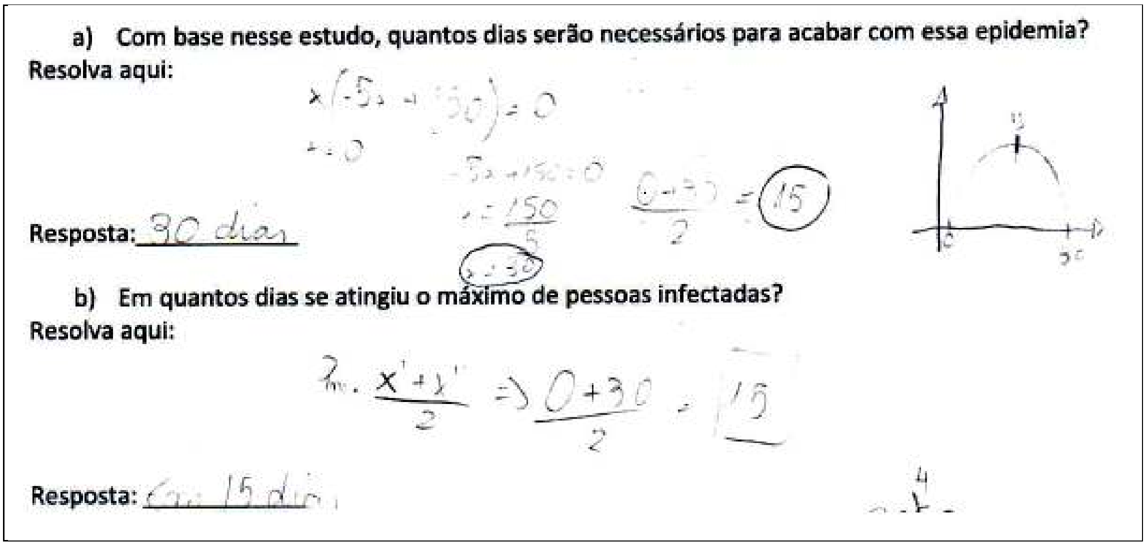
Nenhum dos estudantes avaliou essa Folha de Atividades como sendo fácil. Dez estudantes de cinco grupos consideraram difícil e o restante achou de nível médio. Todos afirmaram ter gostado da atividade.

4.5 – Análise detalhada da aplicação da Folha de Atividades 4

A Folha de Atividades 4 refere-se a máximos e mínimos de funções quadráticas e foi aplicada após uma aula teórica sobre vértice de parábola.

Quatro problemas compõem a última Folha de Atividades. O primeiro era dividido em três itens. O primeiro solicitava a outra raiz da função, pois era perguntado o número de dias necessário para acabar com a epidemia. Trinta e três estudantes de dezesseis grupos não responderam esse item ou responderam incorretamente calculando o vértice da parábola. Notei em conversas que tivemos posteriormente que estes estudantes não leram direito ou não interpretaram corretamente o problema. Alguns disseram que esperavam por problemas que exigissem apenas situações envolvendo o vértice da parábola.

O segundo item perguntava o número de dias em que se obteve o número máximo de pessoas infectadas. Para esse item, quatro estudantes de dois grupos não responderam corretamente. Encontramos uma resposta de um dos estudantes na Figura 81.



a) Com base nesse estudo, quantos dias serão necessários para acabar com essa epidemia?
Resolva aqui:

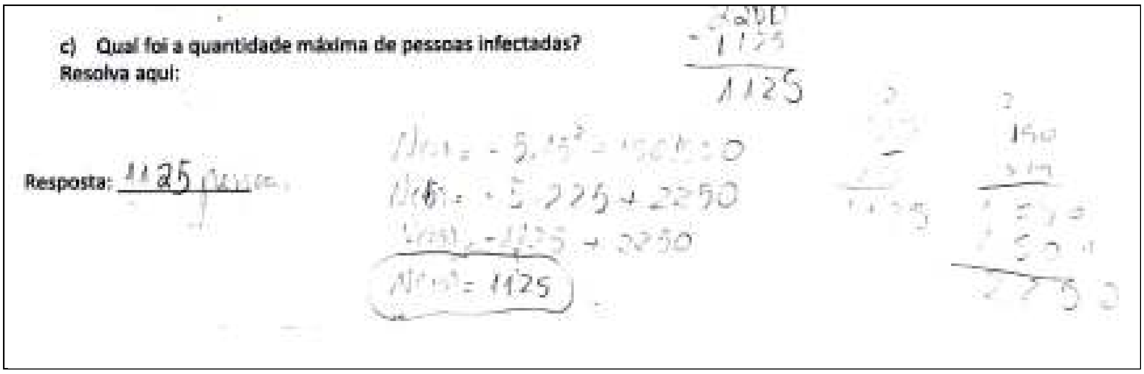
Resposta: 30 dias

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?
Resolva aqui:

Resposta: Em 15 dias

Figura 81: Resposta de um estudante dos itens a) e b) do problema 1 da Folha de Atividades 4

Para finalizar o primeiro problema, como já se previa, perguntamos o número máximo de pessoas infectadas, com a intenção de que o estudante substituísse o valor encontrado no item b). Apenas os estudantes que não responderam corretamente o item b) não acertaram o item c). Uma das respostas desse item está na Figura 82.

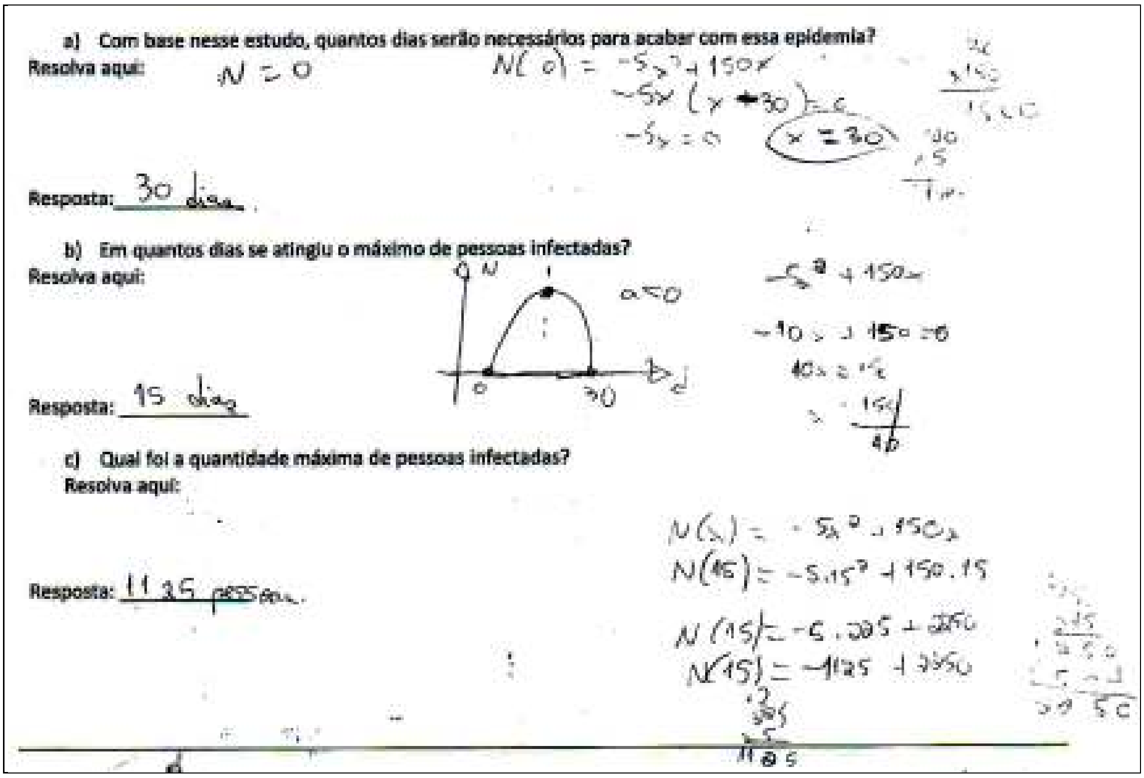


c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?
Resolva aqui:

Resposta: 1125 pessoas

Figura 82: Resposta do mesmo estudante do item c) do problema 1 da Folha de Atividades 4

Na Figura 83 encontramos a resposta de mais um estudante para o primeiro problema da Folha de Atividades 4.


a) Com base nesse estudo, quantos dias serão necessários para acabar com essa epidemia?

Resolva aqui:

$N = 0$

$N(0) = -5x^2 + 150x$

$-5x(x - 30) = 0$

$-5x = 0$ $x = 30$

Resposta: 30 dias

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

$a < 0$

$-5x^2 + 150x$

$-10x + 150 = 0$

$10x = 150$

$x = \frac{150}{10}$

Resposta: 15 dias

c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

$N(x) = -5x^2 + 150x$

$N(15) = -5 \cdot 15^2 + 150 \cdot 15$

$N(15) = -5 \cdot 225 + 2250$

$N(15) = -1125 + 2250$

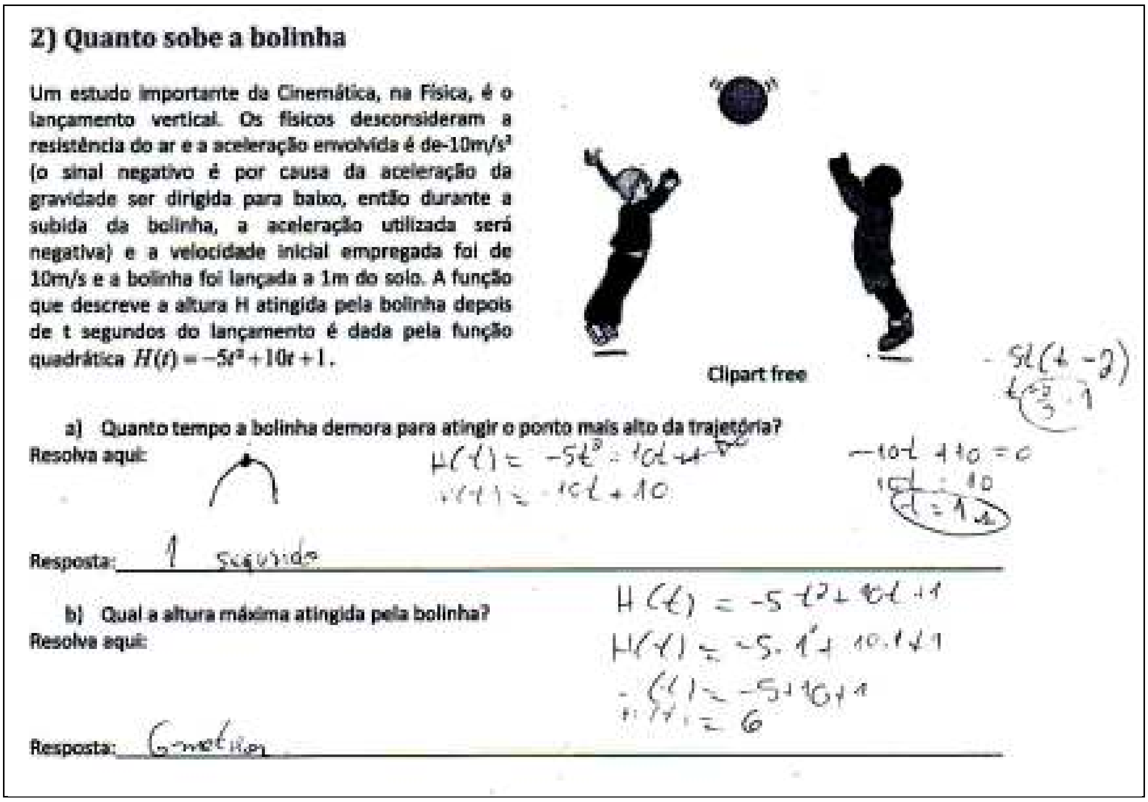
Resposta: 1125 pessoas

Figura 83: Resposta de outro estudante do problema 1 da Folha de Atividades 4

A segunda atividade envolvia um problema de Física (lançamento vertical). Foi fornecida a expressão que relacionava a altura, em metros, atingida pela bolinha que havia sido lançada para cima com o tempo, em segundos.

Primeiramente perguntamos o tempo gasto para a bolinha alcançar a altura máxima e, em seguida, perguntava-se o valor da altura máxima.

Alguns estudantes utilizaram seus conhecimentos em Cinemática para resolver esse problema, visto que queda livre era o que estavam estudando em Física, concomitante ao ensino de funções quadráticas em Matemática, como notamos na resposta contida na Figura 84. Todos os estudantes resolveram esse problema corretamente.



2) Quanto sobe a bolinha

Um estudo importante da Cinemática, na Física, é o lançamento vertical. Os físicos desconsideram a resistência do ar e a aceleração envolvida é de-10m/s² (o sinal negativo é por causa da aceleração da gravidade ser dirigida para baixo, então durante a subida da bolinha, a aceleração utilizada será negativa) e a velocidade inicial empregada foi de 10m/s e a bolinha foi lançada a 1m do solo. A função que descreve a altura H atingida pela bolinha depois de t segundos do lançamento é dada pela função quadrática $H(t) = -5t^2 + 10t + 1$.

Clipart free

a) Quanto tempo a bolinha demora para atingir o ponto mais alto da trajetória?

Resolva aqui:

$H(t) = -5t^2 + 10t + 1$

$v(t) = -10t + 10$

$-10t + 10 = 0$

$10t = 10$

$t = 1$

Resposta: 1 segundo

b) Qual a altura máxima atingida pela bolinha?

Resolva aqui:

$H(t) = -5t^2 + 10t + 1$

$H(1) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 1$

$H(1) = -5 + 10 + 1$

$H(1) = 6$

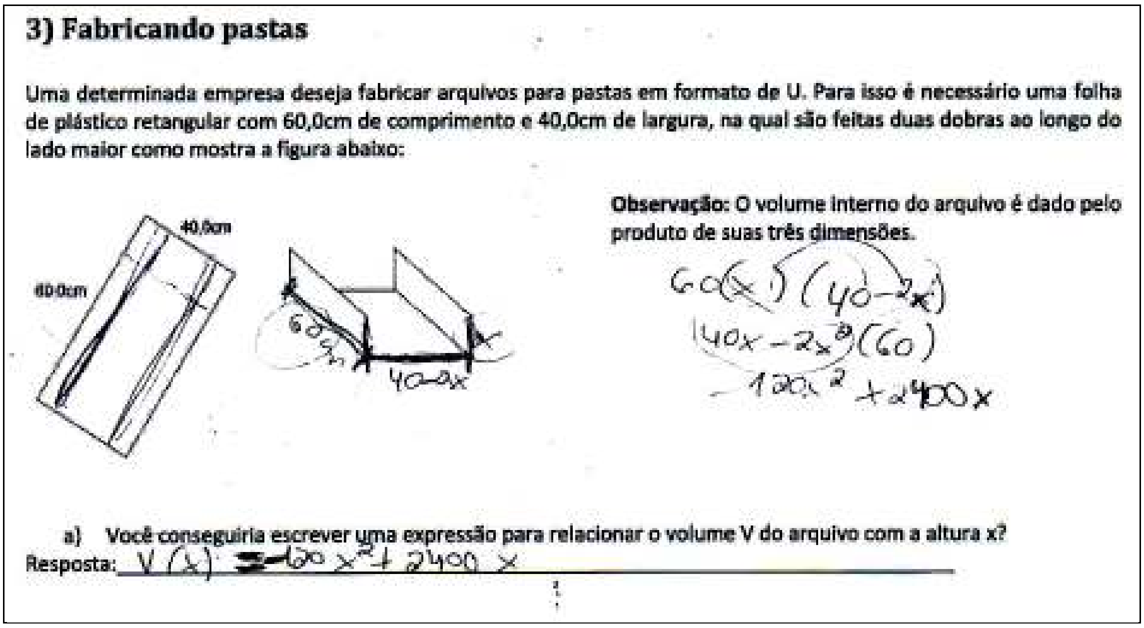
Resposta: 6 metros

Figura 84: Resposta de um estudante do problema 2 da Folha de Atividades 4

O terceiro problema era sobre fabricação de arquivos para pastas em formato de “U”. Considerando o ainda não conhecimento sobre geometria espacial, foi colocada uma observação sobre como calcular o volume interno da pasta.

Os estudantes pegaram folhas A4 para dobrarem de acordo com a proposta do exercício, auxiliando na visualização.

Diferentemente dos dois primeiros problemas, não era fornecida a expressão do volume interno da pasta em função das dimensões da folha dada. Aliás, a primeira pergunta dessa terceira atividade foi a expressão da função quadrática que descrevia a situação do problema. Vinte e sete estudantes de treze grupos não responderam corretamente o problema 3. Na Figura 85 encontramos uma resposta correta de um estudante do item a) do problema 3.



3) Fabricando pastas

Uma determinada empresa deseja fabricar arquivos para pastas em formato de U. Para isso é necessário uma folha de plástico retangular com 60,0cm de comprimento e 40,0cm de largura, na qual são feitas duas dobras ao longo do lado maior como mostra a figura abaixo:

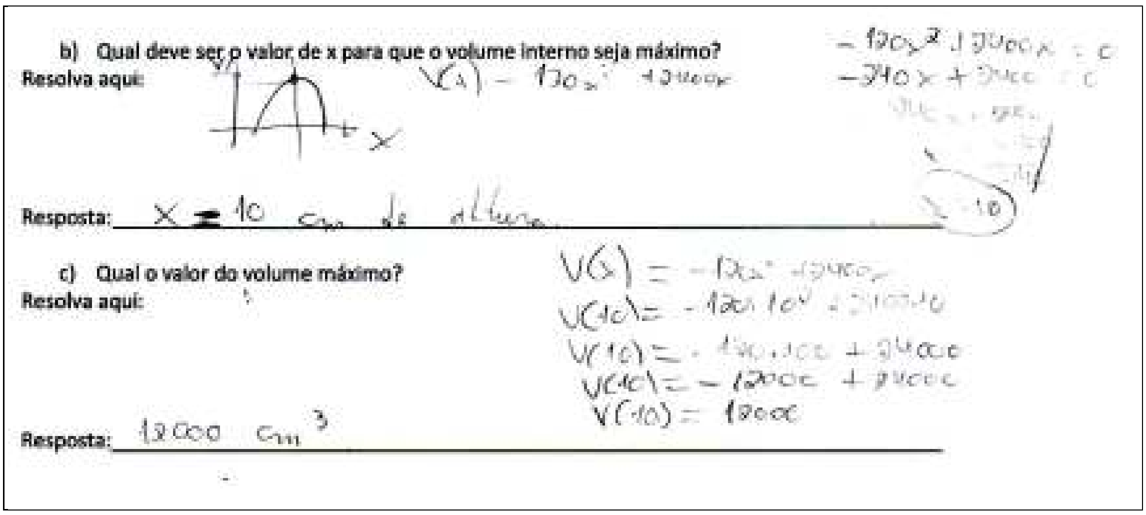
Observação: O volume interno do arquivo é dado pelo produto de suas três dimensões.

a) **Você conseguiria escrever uma expressão para relacionar o volume V do arquivo com a altura x?**

Resposta: $V(x) = -120x^2 + 2400x$

Figura 85: Resposta de um estudante do item a) problema 3 da Folha de Atividades 4

Os dois itens seguintes eram sobre o vértice da parábola. No item b) perguntamos o valor de x que tornava máximo o valor do volume da pasta. E no item c) perguntamos o valor do volume máximo. Os estudantes que não responderam corretamente esses dois itens são os componentes dos treze grupos citados anteriormente que não escreveram a expressão algébrica que relaciona o volume com as dimensões da folha. Na Figura 86 encontramos uma resposta correta do dos itens b) e c) do problema 3.



b) **Qual deve ser o valor de x para que o volume interno seja máximo?**

Resolva aqui:

Resposta: x = 10 cm de altura

c) **Qual o valor do volume máximo?**

Resolva aqui:

Resposta: 12000 cm³

Figura 86: Resposta do mesmo estudante dos itens b) e c) do problema 3 da Folha de Atividades 4

A maioria dos estudantes apresentou dificuldade ao escrever a expressão solicitada no item a). Diziam que sabiam os itens b) e c), mas não conseguiam determinar a expressão algébrica. Para as duplas que apresentavam muita dificuldade na visualização, a própria docente fez a dobradura com a folha A4 e os questionamos sobre as dimensões.

A mesma dificuldade ocorreu no último problema. Porém, muitos fizeram por tentativa e não manifestaram tanta dúvida durante a resolução, por isso a dificuldade foi percebida apenas no momento da correção. A resposta de um estudante está na Figura 87.

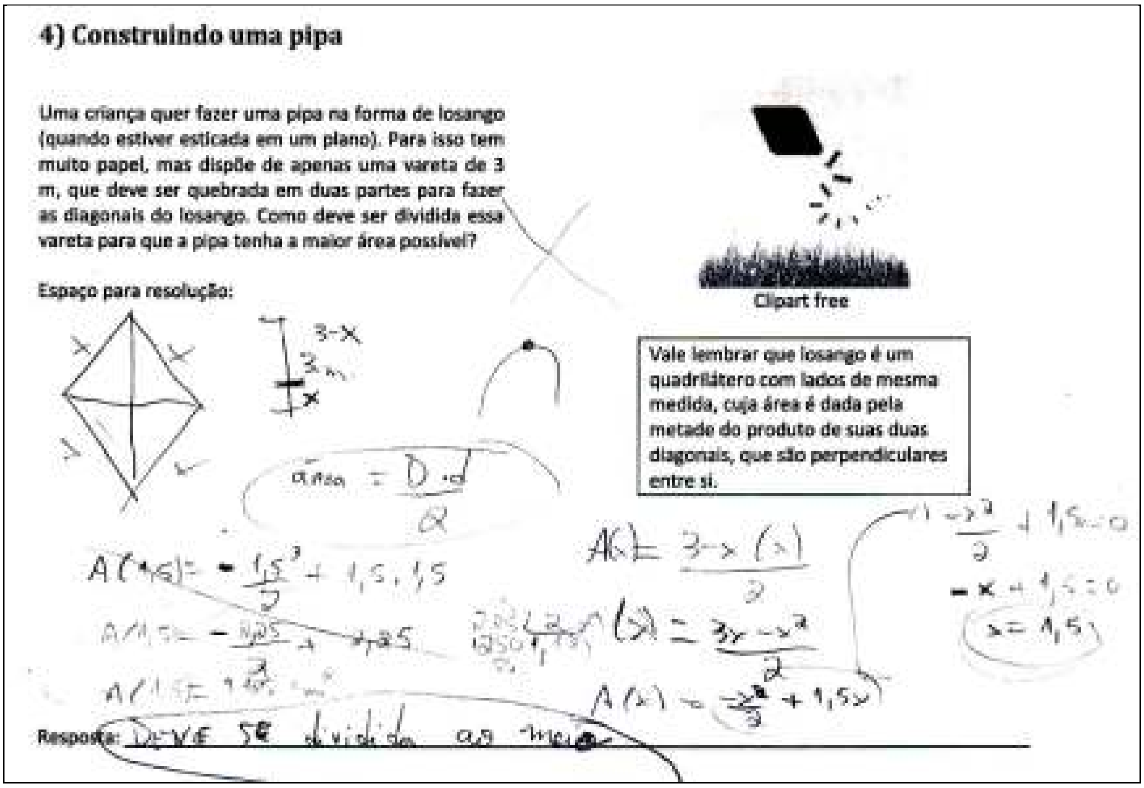


Figura 87: Resposta de um estudante do problema 4 da Folha de Atividades 4

A diferença desse último problema foi a não segmentação da questão. A separação do questionamento em itens muitas vezes facilita por nortear a estratégia de resolução. Nesse problema, a situação foi proposta e apenas uma pergunta foi feita. De um total de cinquenta e um grupos, trinta e quatro estudantes de dezessete grupos não responderam corretamente o problema 4.

Como foi comentado anteriormente, os estudantes apresentaram maior dificuldade nos dois últimos problemas pelo fato da expressão não ter sido fornecida, o que leva a crer que a falha esteja mais na interpretação de texto que nas operações matemáticas. De um modo geral, a resolução dessa última Folha de Atividades foi bastante satisfatória. Os estudantes atingiram a expectativa.

Agradou bastante o fato de mais uma vez todos terem respondido ter gostado da atividade, embora tenha aumentado o número de estudantes que responderam ter achado difícil. Quarenta e sete estudantes de vinte e três grupos acharam a atividade difícil e o restante achou o nível médio.

O fato de se tratar de situações-problema fez com que todos se envolvessem. Foi percebido ânimo por parte dos discentes, o que não foi tão notado na Folha de Atividades 3 pelo fato de serem exigidas mais situações abstratas.

4.6 – Conclusão

No Capítulo 4 fizemos uma análise detalhada e quantitativa da aplicação de nosso produto didático. Isso foi feito para cada problema de cada Folha de Atividades.

Em geral os estudantes responderam muito bem as Folhas de Atividades. Quantitativamente o resultado foi bastante satisfatório. O índice de acertos foi alto comparado ao número de erros cometidos. Mesmo assim, como já comentado anteriormente, o ponto mais positivo durante a aplicação das Folhas de Atividades foi o trabalho colaborativo.

Capítulo 5

Conclusão e validação da experiência

5.1 – Introdução

Neste capítulo retomamos nossa proposta didática, bem como nossos objetivos pedagógicos. Revisamos a aplicação do nosso produto didático e encaminhamos justificativas para as alterações realizadas nas Folhas de Atividades após a aplicação. A intenção dessas alterações é eliminar das Folhas de Atividades alguns pequenos obstáculos que foram observados e melhorar a dinâmica da aplicação.

Após a aplicação do nosso produto didático referente à função afim e função quadrática, algumas ideias surgiram para confeccionar novas Folhas de Atividades. Sugestões referentes a isto serão comentadas nesse capítulo. Encerraremos esse trabalho com as considerações finais.

5.2 – Ideias principais da proposta didática

Nosso produto didático apresenta uma abordagem e uma intenção diferente de alguns materiais didáticos tradicionais. Nossa preocupação é de proporcionar aos estudantes oportunidades de realizar uma construção significativa do conceito de função e adquirir algumas técnicas para reconhecer esses objetos e transitar de um tipo de representação para outra.

Escolhemos utilizar Folhas de Atividades, pois elas proporcionam ao estudante a oportunidade de desenvolver um estudo autônomo, já que o professor praticamente não intervém em momento algum durante a resolução. Outro fator favorável a essa escolha é o aspecto colaborativo, pois os estudantes se ajudam, debatem e tiram conclusões, o que não é possível em uma aula expositiva.

Os problemas que compõem as Folhas de Atividades são de fácil interpretação. São subdivididos em vários itens. Nossa intenção é que os estudantes organizem suas ideias e resolvam os problemas passo a passo.

Seguimos as fases da Engenharia Didática para nortear nossa investigação. Nossas Folhas de Atividades foram construídas a partir das análises prévias que nos deram a oportunidade de preparar um material diferente dos materiais didáticos tradicionais.

Ao escolher as atividades que compõem as Folhas de Atividades buscamos proporcionar ao estudante uma aprendizagem significativa do conceito do conceito de função afim e quadrática, escolhendo problemas contextualizados em situações que fazem parte da experiência comum da maioria dos jovens.

5.3 – Resumo da análise da aplicação do produto didático

Foram utilizadas quatro aulas de cinquenta minutos cada para a aplicação das quatro Folhas de Atividades. Os estudantes trabalharam em grupos de dois componentes cada um. Nas escolas em que lecionamos raramente as aulas de Matemática são realizadas em grupo e geralmente são aulas expositivas. Por isso nosso trabalho foi bastante diferente para os estudantes.

A maior dificuldade sentida pelos estudantes foi iniciar uma atividade sem ter tido uma aula expositiva antes para o professor explicar-lhes a teoria. Isto talvez explique porque eles gastaram tanto tempo na resolução da Folha de Atividades 1. Mostraram-se receosos e solicitavam a intervenção da professora a todo momento. Percebemos que não estavam acostumados com um trabalho autônomo abordando conceitos não comentados pelo professor em uma aula imediatamente anterior. Realmente estavam muito presos ao sistema tradicional de ensino.

A partir da aplicação da Folha de Atividades 2, a postura dos estudantes foi diferente. Nesses momentos falavam bastante, discutiam, ajudavam-se e agiam com maior autonomia. Buscavam entre si as respostas que antes insistiam em tirar da professora. Isso fez com que conseguissem concluir as atividades no tempo solicitado sem muita tensão. Pensamos que conseguimos proporcionar aos estudantes uma oportunidade de aprender com maior autonomia e incentivamos o trabalho colaborativo.

De um modo geral os estudantes responderam bem aos problemas das quatro Folhas de Atividades. Eles se saíram bem na maioria das resoluções e nas justificativas. Destacamos apenas uma exceção. No último item do último problema da Folha de Atividades 2 os estudantes foram solicitados a resolver uma inequação que exigia uma resolução algébrica. Tratava-se de uma inequação para verificar qual banco era mais viável financeiramente. Eles já tinham essa resposta com a análise de vários valores e com a análise dos gráficos. A análise algébrica seria uma confirmação, entretanto muitos estudantes não conseguiram fazê-la.

Por esses motivos, acreditamos que nosso produto didático atingiu os objetivos esperados.

5.4 – Modificações do produto didático pós-aplicação

Após a aplicação das Folhas de Atividades, fizemos uma análise do material aplicado aos estudantes e verificamos a necessidade de realizar algumas alterações. As Folhas de Atividades resultantes estão apresentadas no Apêndice B.

Uma alteração comum a todas as Folhas de Atividades é que retiramos a "Data" do rodapé e a colocamos no começo das quatro folhas. Fizemos ainda várias correções ortográficas.

Na Folha de Atividades 1, na página 2, segundo parágrafo de baixo pra cima, modificamos o texto antigo

06) Na matemática, dizemos que o valor a ser pago "**depende**" ou é "**função**" da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um gráfico cartesiano.

por

Na Matemática, dizemos que o valor a ser pago "**depende**" ou é "**função**" da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um sistema cartesiano de coordenadas.

No final da Folha de Atividades 1 temos um texto com a definição de função afim da seguinte forma: Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$. No entanto, o livro de Elon L. Lima, no qual nos baseamos, não possui a restrição quanto a $a \neq 0$, então a retiramos da nossa Folha de Atividades.

No texto do problema 1 da Folha de Atividades 2, encontramos as frases “Ela descobriu um restaurante muito bom e barato que ficava ali perto. O quilograma custa R$ 30,00.” Decidimos retirar o adjetivo barato do texto, pois não achamos que condiz com a realidade, afinal um restaurante cujo quilograma custa R$30,00 não é considerado “em conta”.

5.5 – Sugestões de novas pesquisas

Percebemos que a produção de Folhas de Atividades seguindo os passos da Engenharia Didática pode trazer uma contribuição importante para o trabalho do professor e para o Ensino da Matemática. Imaginamos que muitos assuntos do Ensino Médio poderiam ser objeto desse tipo de trabalho.

Um dos assuntos que achamos importante fazer esse trabalho é o de Análise Combinatória, pois ele causa muita insegurança aos estudantes, principalmente quanto ao entendimento (interpretação) e compreensão dos problemas.

5.6 – Conclusão final

Acreditamos ter alcançado o objetivo traçado para este projeto. Os estudantes, em sua grande maioria, apresentaram uma boa compreensão do conteúdo e manifestaram-se positivamente quanto à proposta diferenciada, com menor utilização de formalismo algébrico, maior interpretação e maior autonomia diante das diversas situações apresentadas a eles.

Os estudantes compreenderam que a Matemática é muito mais que definições, formalismos e conceitos. Viram que é possível realizarem atividades sem ter havido antes uma aula sobre o assunto, sem a teoria e ainda assim conseguirem construir sozinhos o conceito de função afim, por exemplo.

Concluímos que é possível mudar a maneira de ensinar função afim e quadrática. Não há necessidade de se iniciar uma aula sobre função afim ou quadrática com um formalismo algébrico próprio de um texto matemático de finalização. Em particular, a taxa de variação e sua importância para função afim podem ser percebidas através do exame de padrões.

Observamos que esses procedimentos proporcionam aos estudantes maior segurança e autonomia em seu aprendizado.

O nosso produto didático está à disposição dos professores que desejam utilizá-lo. Podem ser obtidos diretamente no Apêndice B.

5.7 – Observações pessoais

O mestrado profissional me permitiu ver que estamos tão presos à metodologia tradicional quanto os estudantes e que podemos fazer muito para colaborar com o Ensino de Matemática. Em particular, com relação ao meu trabalho de dissertação, com toda certeza colaborou com o meu crescimento profissional e fez com que eu mudasse meu olhar em relação ao ensino, aos estudantes e ao modo de preparar as aulas, mesmo as expositivas. Mudamos a forma como abordar os assuntos, a dinâmica de trabalho e até a forma de como encarar a dificuldade e/ou falta de interesse de alguns estudantes.

Particularmente no primeiro ano do Ensino Médio temos tentado explorar ao máximo a espontaneidade dos estudantes para que eles construam os conceitos, evitando o excesso de formalismos.

Por enquanto, a mudança tem sido na postura em relação aos estudantes durante as aulas dando-lhes a maior liberdade possível para realizarem as atividades do material. Mas a intenção futura é de preparar novas Folhas de Atividades para outros temas e para os outros anos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANEd. **Revista Eletrônica da Educação Matemática,** Florianópolis, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008. Disponível em: <http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62> Acesso em: 01 set. 2013

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Paris, v. 9, n. 3p. 281-308, 1988.

BERNARDO, F. G. **Gráfico de funções:** uma abordagem dinâmica e experimental. 2013. Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

BRAGA, E. R. et al. **A planilha como suporte à construção do conceito de função afim**. Canoas/RS. ULBRA, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais.** Brasília, 1997. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio. Brasília, 1999. 4 v.

CAETANO, P. A. S. et al. **Funções elementares.** Cuiabá: Central de Texto, 2013.

FORTES, L. B., **A taxa de variação na compreensão da função afim por estudantes do ensino médio.** 2011. 67 p. Monografia (Trabalho de graduação em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciência e aplicações.** 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção matemática: ciência e aplicações- 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio).).

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

MACEDO, J. C. A. **Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa.** Brasília: Editora da UnB, 1999. 129 p.

NERY, C.; TROTTA, F. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2001. v. único.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

Apêndice A
Folhas de Atividades conforme foram aplicadas nas classes

Folha de atividade nº 1 – Colégio Objetivo

Nome:______________________________Série:_____

Clipart free

Conceito de função afim

Juninho ajuda seu pai, João, a fazer algumas contas...

João, querendo pintar o muro de sua casa por ter sido pichado, procurou um pintor para perguntar quanto ele cobraria para fazer o serviço. O preço do serviço executado consiste em uma taxa fixa, que é de R$ 25,00, mais uma quantia que depende da área pintada (metros quadrados – m²). Juninho, querendo ajudar seu pai, organizou o orçamento em uma tabela para calcular o valor da reforma. Veja como ficou!

Ajude Juninho preenchendo as lacunas que estão em branco na tabela ao lado.

ÁREA PINTADA (m²)	Valor a pagar (R$)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	
40	
80	

Agora responda:

1) Quanto João gastará se for preciso pintar:

100m²? ___________________________

32m²? ___________________________

2) Tirando a taxa inicial, quanto custa o m²? _______________________

A tabela de Juninho **associa** a área pintada com o preço a ser pago. São **duas grandezas relacionadas** por uma regra estabelecida pelo pintor. Você se lembra de que chamamos isso de função?

QUANTIDADE DE m² $\xrightarrow{\text{FUNÇÃO}}$ VALOR A PAGAR

Juninho procurou a palavra **FUNÇÃO** em um dicionário, e viu que ela tem os seguintes significados:

a) Festa; festividade.
b) Trabalho realizado por um determinado órgão dos seres vivos.
c) O que é atribuído a uma pessoa em uma equipe de trabalho.
d) Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal.
e) Dança, fandango.

3) Qual desses itens é o significado usado na Matemática?
Resposta: ______________

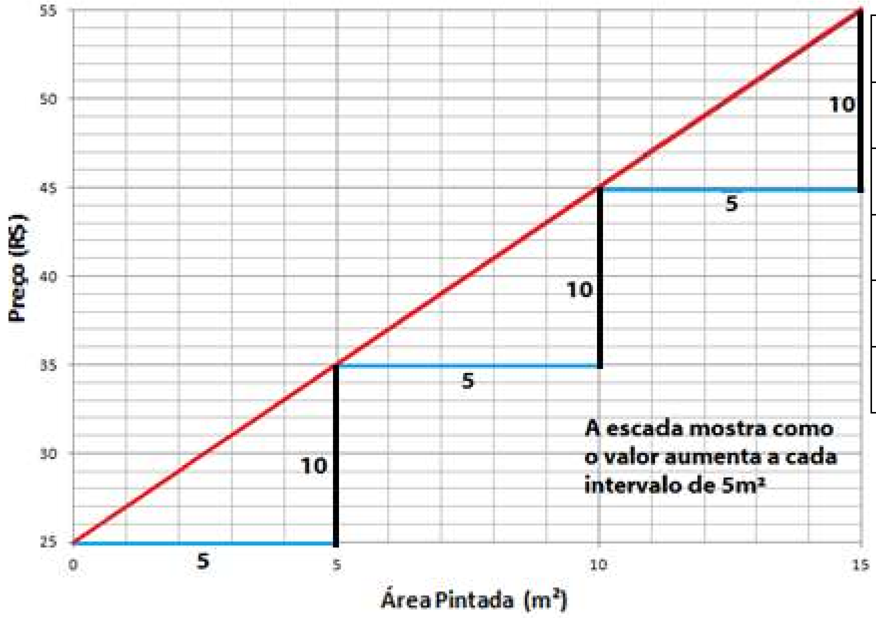
4) Juninho então resolveu chamar essa função de P (já que se trata do preço a ser pago por seu pai) e notou que:
$P(5) = 35$, $P(10) = 45$, $P(15) = 55$... Sendo assim, responda: $P(17) =$ __________

5) Se a área pintada for x , quanto deverá ser pago?

$$P(x) =$$

6) Na matemática, dizemos que o valor a ser pago "**depende**" ou é "**função**" da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um gráfico cartesiano.

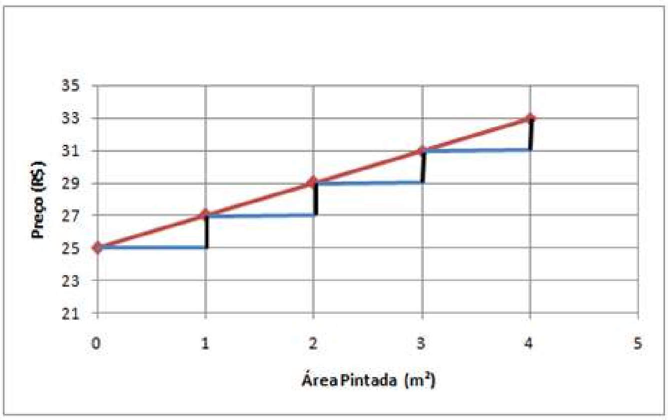
Na figura abaixo o gráfico é a linha mais grossa em cor vermelha. Estamos interessados em examinar a variação da função em intervalos iguais de m². Ou seja, o quanto varia o preço em **relação** à área pintada. Veja e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 5	$P(5) - P(0) = 35 - 25 = 10$
5 a 10	
10 a 15	
15 a 20	
20 a 25	

O que você notou? ____

Consideremos outro exemplo, sendo agora em intervalos de 1m². Veja o gráfico e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 1	$P(1) - P(0) = 27 - 25 = 2$
1 a 2	
2 a 3	
3 a 4	
4 a 5	

O que você notou? ____

Você conseguiria escrever o que essas tabelas têm em comum?

____

A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 **a** x_2	**Variação do valor** $P(x_2)-P(x_1)$	**Taxa de variação** $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=10$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20		
1 a 30		
10 a 40		
15 a 25		
20 a 45		

O que você notou?

____

7) Consideremos outro exemplo de função: $f(x)=7x+10$. Quanto você acha que vale sua taxa de variação? Resposta: ________________________

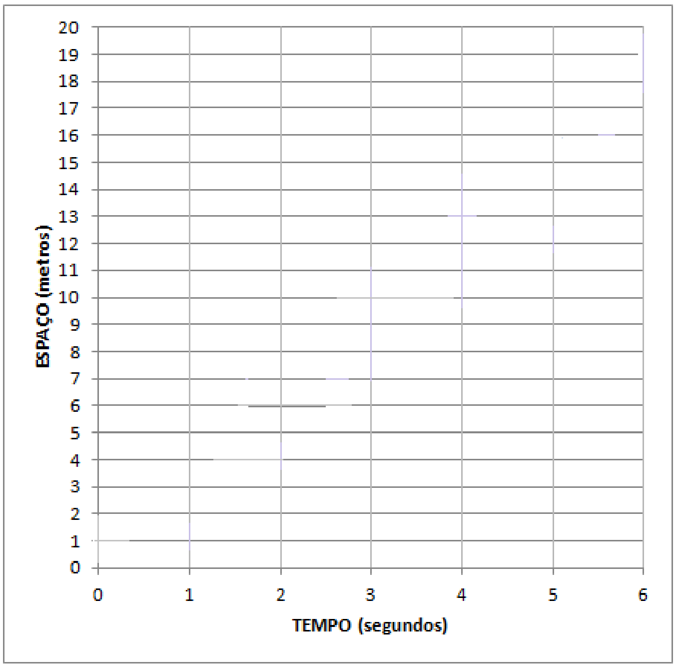
8) Vamos pensar agora em um exemplo de Física!

Você já aprendeu, na Física, que uma partícula, como um carrinho, em Movimento Retilíneo Uniforme percorre uma trajetória reta com velocidade CONSTANTE.

Em uma tabela, dividida em duas colunas, teremos envolvidos o tempo (dado em segundos) e a localização (dada em metros) de um carrinho.

TEMPO (s)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
POSIÇÃO (m)	**1**	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**

Marque os pontos da tabela no sistema cartesiano abaixo e desenhe o gráfico da função unindo os pontos em uma reta.



9) Responda:

a) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? ________________________

b) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? ________________________

c) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? _______________________

d) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$$S(t) =$$

e) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo? _____________

f) Qual o nome que a física dá para essa variação? ____________________

Função Afim

Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$

Pergunta:

Qual a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$? Resposta: ___________________________________

A principal propriedade que caracteriza as funções afins é que sua taxa de variação é constante.

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Folha de atividade nº 2 – Colégio Objetivo

Nome:_________________________________Série:_____

Hora do almoço

Clipart free

Marta e seus amigos de trabalho no restaurante...

Marta trabalha em uma loja de sapatos que fica no centro da cidade. Ela descobriu um restaurante muito bom e barato que ficava ali perto. O quilograma custa R$ 30,00. Ela achou que o preço estava muito bom e convidou alguns amigos do trabalho para irem almoçar junto com ela. Lúcia, amiga de Marta, disse que não iria porque come muito pouco e não "compensaria" financeiramente. Mas Marta explicou que não era um restaurante do tipo em que se paga uma quantia fixa e come-se à vontade; Trata-se de um restaurante em que você paga por exatamente o que comer. Depois de tudo explicado, eles foram ao restaurante: Cláudio, Marta, Lúcia, Carmem, Ricardo e José.

Logo abaixo estará representado o visor da balança após cada um deles ter terminado de se servir:

120g	420g	650g
Lúcia	Carmem	Ricardo
490g	710g	820g
Marta	José	Cláudio

Você reparou que no visor da balança a unidade utilizada foi grama para indicar o consumo de cada colega e o preço de R$30,00 era do quilograma de comida.

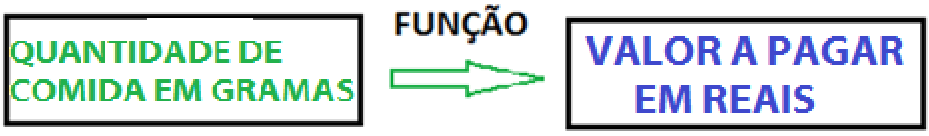
Lembrando que um quilograma equivale a 1000 gramas, quanto custa 100 gramas de comida? Resposta:______________________________

Para lhe ajudar nos próximos cálculos, quanto custa 10 gramas de comida? Resposta:____________________

Agora responda:

1) Quanto Lúcia irá pagar? R$ 3,60
2) Quanto Carmem irá pagar? ___________________________
3) Quanto Ricardo irá pagar? ____________________________
4) Quanto Marta irá pagar?______________________________
5) Quanto José irá pagar? _______________________________
6) Quanto Cláudio irá pagar? ____________________________

As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:



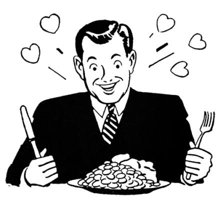
7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: __________________________ E V(600)? __________________ E V(1)? Resposta:_______________________

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$\boxed{V(x) = \qquad\qquad}$

Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação? Resposta: ___________________________

VEJAMOS OUTRA SITUAÇÃO!!!



Clipart free

André estuda economia e conseguiu um emprego. A sua primeira tarefa era escolher qual banco era mais vantajoso financeiramente para abrir uma conta corrente para movimentar o dinheiro da empresa. Ele consultou as taxas de dois bancos: Banco ABC e banco XY. O banco ABC cobra uma tarifa de manutenção de conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$10,00 mensais e mais uma taxa de R$0,15 por cheque emitido. O banco XY cobra de TMC uma taxa de R$20,00 mensais e mais uma taxa de R$0,10 por cheque emitido. Para decidir entre os dois bancos, André fez algumas contas. Ajude-o nessas contas!

9) Se ele gastar 20 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _________________________.
E no banco XY? _________________________.

10) Se ele gastar 55 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _________________________.
E no banco XY? _________________________.

11) Se ele gastar 100 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

12) Se ele gastar 200 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

13) Se ele gastar 220 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

14) Se ele gastar 240 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

15) Considerando apenas os valores acima, a partir de qual quantidade de cheques mensais o banco XY se torna mais viável financeiramente? _____________________________

16) Qual expressão representa o gasto com taxas mensais no banco ABC? _________________________________
E no banco XY? __________________________________

17) Preencha a tabela abaixo:

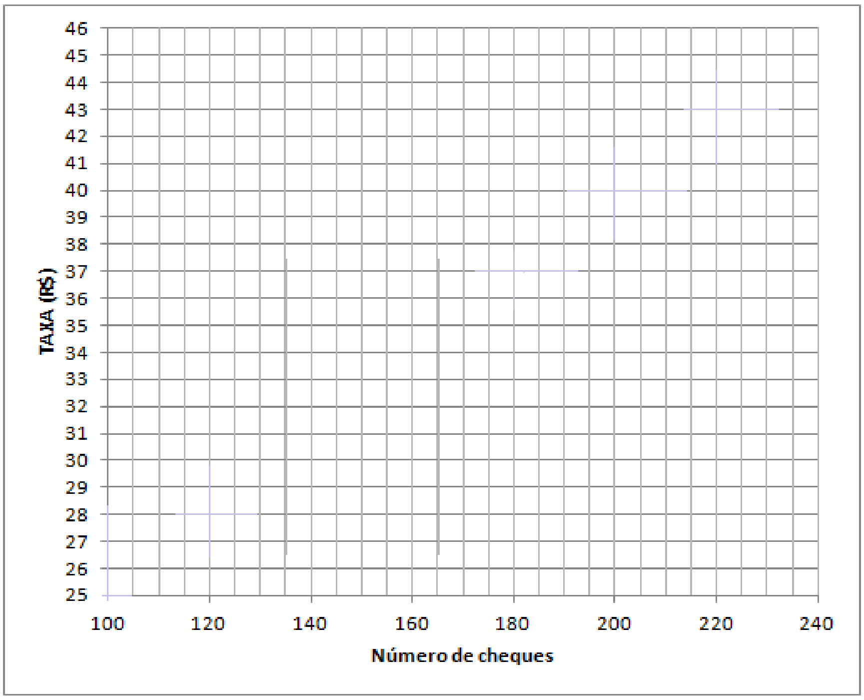
BANCO ABC

Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

BANCO XY

Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

18) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.



19) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

20) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

____

____

____

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Espero que tenham gostado de trabalhar com função afim!!!

Folha de atividade nº 3 – Colégio Objetivo

Nome:__________________________________Série:_____

Função quadrática - Aplicações

1)Preparando um campeonato

Carlos, estudante do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio no interior de São Paulo, pediu para que seu professor de educação física organizasse um campeonato de futebol de salão com times de sua classe. Primeiramente a ideia era que participassem desse campeonato apenas os meninos do primeiro ano, que eram quinze. Uma equipe de futebol de salão é composta por cinco jogadores, portanto formaram-se os times A, B e C. Na primeira fase desse campeonato, cada time jogará com cada um dos outros times exatamente duas vezes. Escreva abaixo os jogos que serão realizados por esses três times:

Clipart free

Resposta:____

Quantos jogos foram realizados com esses 3 times? Resposta: ____________

Antes que o torneio começasse, cinco alunos do segundo ano do Ensino Médio pediram para participar do campeonato. Temos agora quatro times: A, B, C e D. Lembrando que cada time joga com cada um dos outros times exatamente duas vezes nessa primeira etapa, escreva os jogos que foram realizados:

Resposta:____

Quantos jogos foram realizados com esses 4 times? Resposta: ____________

Como o assunto campeonato de futebol de salão gerou muitos comentários na escola, os estudantes do segundo e do terceiro ano do Ensino Médio quiseram participar também. Mas todos os jogos deveriam acontecer no horário da aula de educação física e o professor ficou com receio de não terminar a primeira etapa porque as férias de julho estavam chegando. Ele pediu ajuda ao Carlos para fazer os cálculos de quantos jogos seriam realizados e começaram a construir uma tabela para se organizarem. Veja como ficou:

Número de times de futebol	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de jogos realizados	**2**	**6**	**12**	**20**					

Você notou que a tabela possui espaços em branco? Preencha-os para ajudar Carlos e seu professor!

Agora responda:

a) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes? Resposta:___________________

b) E 20 times? Resposta:___________________

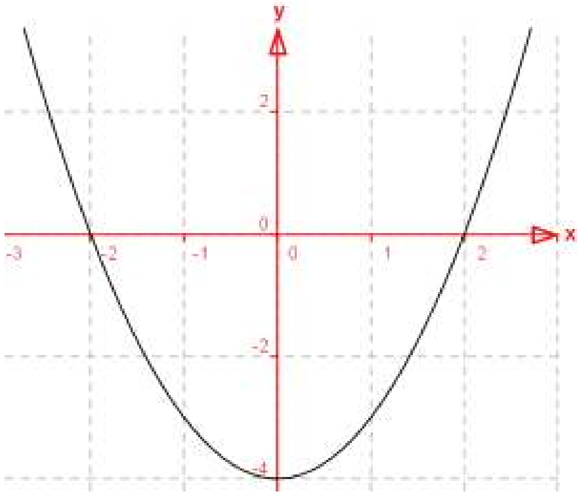
c) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta:____________________

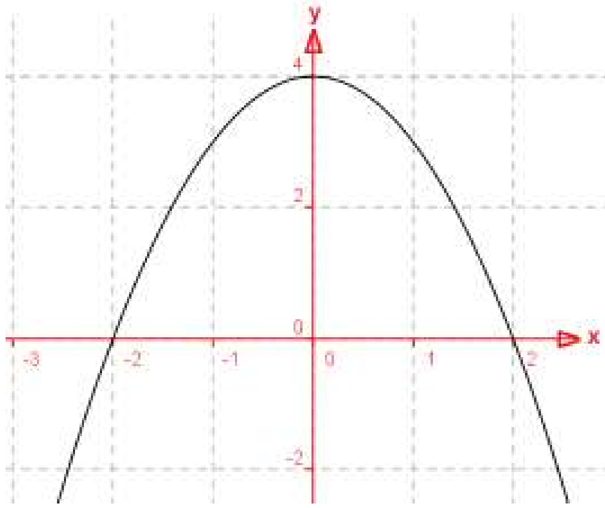
d) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?

Resposta:____

2) Estudando gráficos...

2a) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso, escreva a expressão exata da função. Faça a resolução no espaço abaixo do gráfico.





Os pontos (-2;0), (0,-4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

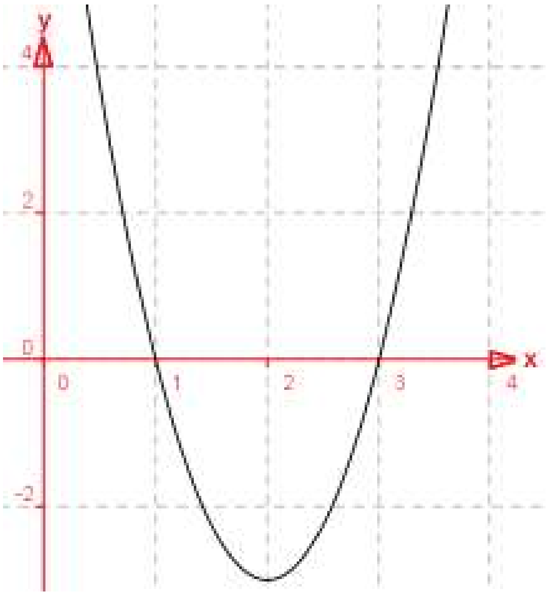
Expressão exata da função:______________________

Os pontos (-2;0), (0,4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

Expressão exata da função:________________________

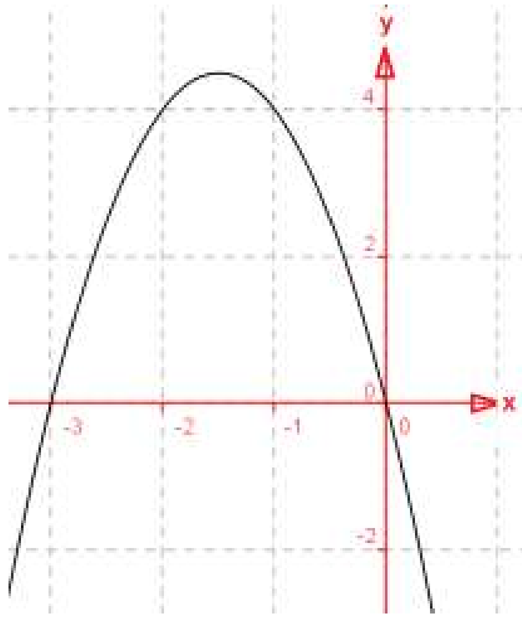
2b) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso escreva uma expressão algébrica do tipo $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$ em que x_1 e x_2 representam as raízes de cada função. Escreva também, em cada caso, se a pode ser 1 ou -1. Utilize esses valores para calcular a expressão expandida de $f(x)$.



Os pontos (1;0) e (3,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

Função expandida:_____________________ _



Os pontos (-3;0) e (0,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

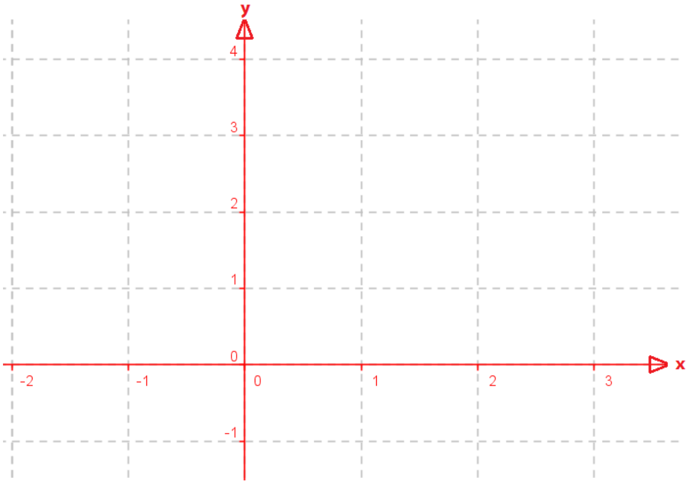
Função expandida:_____________________ _

3) Hora de desenhar...

Cada uma das tabelas abaixo corresponde a valores de uma função quadrática $f(x)$. Faça seus gráficos!

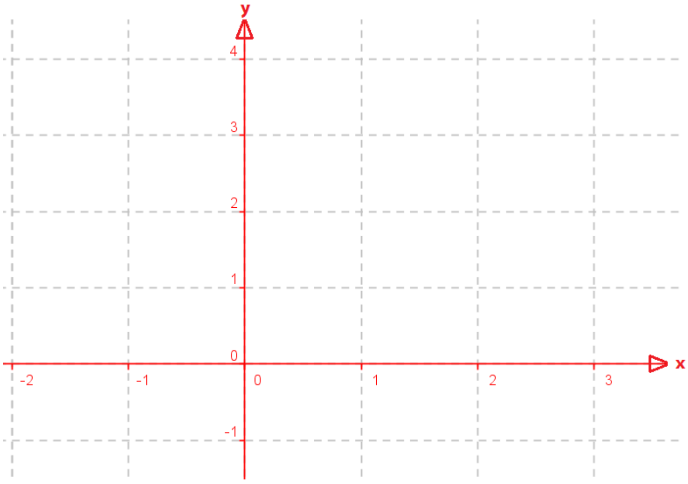
3a) Escreva, no espaço abaixo da tabela ao lado, o que

você notou no gráfico após construí-lo.



x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

3b)



x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	3	2

Qual é a outra raiz da função? Resposta:_______________

Explique como você fez 3b):

Resposta:____

____

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Folha de atividade nº 4 – Colégio Objetivo

Nome:_______________________________Série:____

Função quadrática – Máximos e Mínimos

1) Será que é gripe?

Muitas vezes confundimos gripe com resfriado. De repente espirramos por entrarmos em contato com ar frio e já pensamos que estamos gripados. Na verdade estamos apenas resfriados. A gripe é bem perigosa: Em crianças e idosos pode ser grave e até levar à morte.

Vamos considerar uma determinada localidade durante inverno muito rigoroso que sofreu uma epidemia de gripe. Essa localidade foi estudada e dados foram recolhidos por profissionais de modo que uma modelagem da situação fosse feita. O número de pessoas infectadas N durante um certo número x de dias era dado por:

$$N(x) = -5x^2 + 150x$$

Observe que no início da contagem, a quantidade de pessoas infectadas era

$$N(0) = -5.0^2 + 150.0 = 0$$

a) Com base nesse estudo, quantos dias serão necessários para acabar com essa epidemia?

Resolva aqui:

Resposta:____________

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: ____________

c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: ___________

2) Quanto sobe a bolinha

Um estudo importante da Cinemática, na Física, é o lançamento vertical. Os físicos desconsideram a resistência do ar e a aceleração envolvida é de-10m/s² (o sinal negativo é por causa da aceleração da gravidade ser dirigida para baixo, então durante a subida da bolinha, a aceleração utilizada será negativa) e a velocidade inicial empregada foi de 10m/s e a bolinha foi lançada a 1m do solo. A função que descreve a altura H atingida pela bolinha depois de t segundos do lançamento é dada pela função quadrática $H(t) = -5t^2 + 10t + 1$.

Clipart free

a) Quanto tempo a bolinha demora para atingir o ponto mais alto da trajetória?

Resolva aqui:

Resposta:____

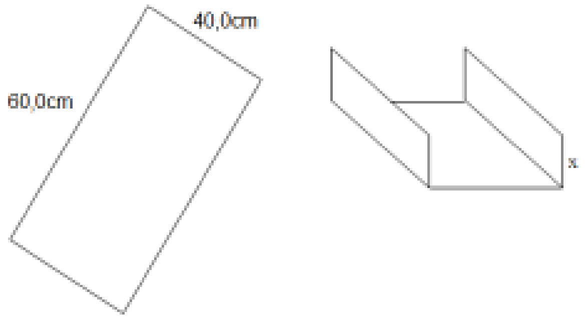
b) Qual a altura máxima atingida pela bolinha?

Resolva aqui:

Resposta:____

3) Fabricando pastas

Uma determinada empresa deseja fabricar arquivos para pastas em formato de U. Para isso é necessário uma folha de plástico retangular com 60,0cm de comprimento e 40,0cm de largura, na qual são feitas duas dobras ao longo do lado maior como mostra a figura abaixo:



Observação: O volume interno do arquivo é dado pelo produto de suas três dimensões.

a) Você conseguiria escrever uma expressão para relacionar o volume V do arquivo com a altura x?

Resposta:____

b) Qual deve ser o valor de x para que o volume interno seja máximo?

Resolva aqui:

Resposta:____

c) Qual o valor do volume máximo?

Resolva aqui:

Resposta:____

4) Construindo uma pipa

Uma criança quer fazer uma pipa na forma de losango (quando estiver esticada em um plano). Para isso tem muito papel, mas dispõe de apenas uma vareta de 3 m, que deve ser quebrada em duas partes para fazer as diagonais do losango. Como deve ser dividida essa vareta para que a pipa tenha a maior área possível?

Clipart free

Espaço para resolução:

Vale lembrar que losango é um quadrilátero com lados de mesma medida, cuja área é dada pela metade do produto de suas duas diagonais, que são perpendiculares entre si.

Resposta:____

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Apêndice B

Folhas de Atividades com correções pós-aplicação

produto final

Folha de atividade nº 1

www.gnurf.net/clipart/clipart001.html

Nome:____________________Série:____ Data:_/_/_

Conceito de função afim

Juninho ajuda seu pai, João, a fazer algumas contas...

João, querendo pintar o muro de sua casa por ter sido pichado, procurou um pintor para perguntar quanto ele cobraria para fazer o serviço. O preço do serviço executado consiste em uma taxa fixa, que é de R$ 25,00, mais uma quantia que depende da área pintada (metros quadrados – m²). Juninho, querendo ajudar seu pai, organizou o orçamento em uma tabela para calcular o valor da reforma. Veja como ficou!

ÁREA PINTADA (m²)	Valor a pagar (R$)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	
40	
80	

Ajude Juninho preenchendo as lacunas que estão em branco na tabela ao lado.

Agora responda:

1) Quanto João gastará se for preciso pintar:

100 m²? ________________________

32 m²? _________________________

2) Tirando a taxa inicial, quanto custa o m²? _____________________

A tabela de Juninho **associa** a área pintada com o preço a ser pago. São **duas grandezas relacionadas** por uma regra estabelecida pelo pintor. Você se lembra de que chamamos isso de função?

QUANTIDADE DE m² $\xrightarrow{\text{FUNÇÃO}}$ VALOR A PAGAR

Juninho procurou a palavra **FUNÇÃO** em um dicionário, e viu que ela tem os seguintes significados:

a) Festa; festividade.
b) Trabalho realizado por um determinado órgão do corpo dos seres vivos.
c) O que é atribuído a uma pessoa em uma equipe de trabalho.
d) Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal.
e) Dança, fandango.

3) Qual desses itens é o significado usado na Matemática?

Resposta: ______________

4) Juninho então resolveu chamar essa função de P (já que se trata do preço a ser pago por seu pai) e notou que:

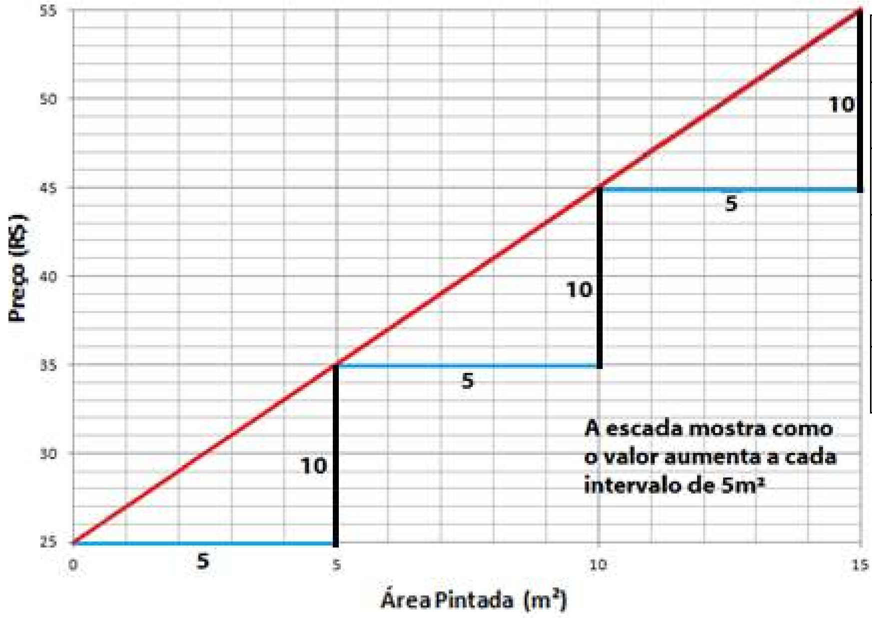
$P(5) = 35$, $P(10) = 45$, $P(15) = 55$... Sendo assim, responda: $P(17) =$ __________

5) Se a área pintada for x, quanto deverá ser pago?

$$P(x) =$$

Na Matemática, dizemos que o valor a ser pago “**depende**” ou é “**função**” da quantidade de metros quadrados x. Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um sistema cartesiano de coordenadas.

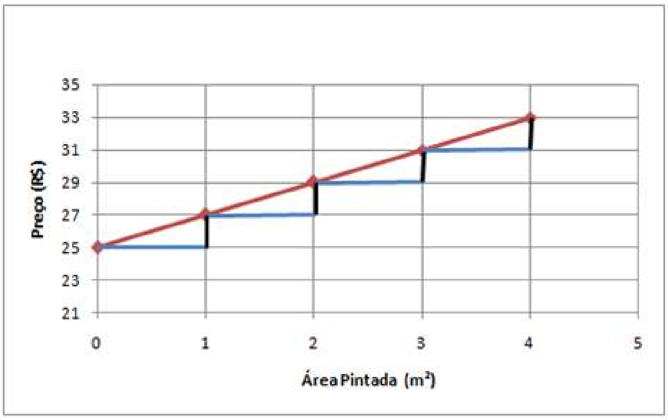
Na figura abaixo o gráfico é a linha mais grossa em cor vermelha. Estamos interessados em examinar a variação da função em intervalos iguais de m². Ou seja, o quanto varia o preço em **relação** à área pintada. Veja e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 5	$P(5) - P(0) = 35 - 25 = 10$
5 a 10	
10 a 15	
15 a 20	
20 a 25	

O que você notou? ____

Consideremos outro exemplo, sendo agora em intervalos de 1 m². Veja o gráfico e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 1	$P(1) - P(0) = 27 - 25 = 2$
1 a 2	
2 a 3	
3 a 4	
4 a 5	

O que você notou? ____

Você conseguiria escrever o que essas tabelas têm em comum?

____

A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 **a** x_2	**Variação do valor** $P(x_2)-P(x_1)$	**Taxa de variação** $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=20$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20		
1 a 30		
10 a 40		
15 a 25		
20 a 45		

O que você notou?

____

6) Consideremos outro exemplo de função: $f(x)=7x+10$. Quanto você acha que vale sua taxa de variação? Resposta: _______________________

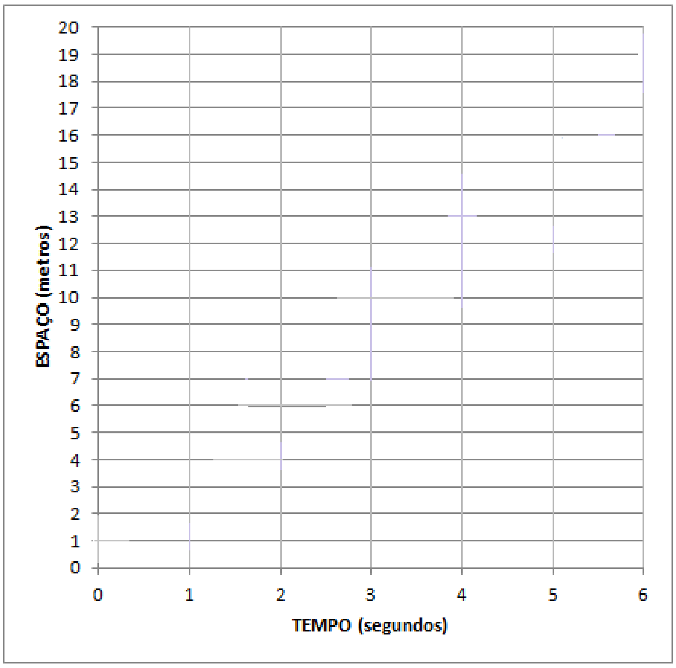
7) Vamos pensar agora em um exemplo de Física!

Você já aprendeu, na Física, que uma partícula, como um carrinho, em Movimento Retilíneo Uniforme percorre uma trajetória reta com velocidade CONSTANTE.

Em uma tabela, dividida em duas colunas, teremos envolvidos o tempo (dado em segundos) e a localização (dada em metros) de um carrinho.

TEMPO (s)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
POSIÇÃO (m)	**1**	**4**	**7**	**10**	**13**	**16**	**19**

Marque os pontos da tabela no sistema cartesiano abaixo e desenhe o gráfico da função unindo os pontos em uma reta.



8) Responda:

9) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? ________________________

10) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? ________________________

11) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? _______________________

12) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$$S(t) =$$

13) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo? ________________

14) Qual o nome que a Física dá para essa variação? ____________________

Função Afim

Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$

Pergunta:

Qual a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$? Resposta: ____________________________________

A principal propriedade que caracteriza as funções afins é que sua taxa de variação é constante.

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Folha de atividade nº 2

Nome:____________________________Série:_____Data:_/_/_

Hora do almoço

http://www.picturesof.net/pages/ '090113-214001-226009.html

Marta e seus amigos de trabalho no restaurante...

Marta trabalha em uma loja de sapatos que fica no centro da cidade. Ela descobriu um restaurante muito bom que ficava ali perto. O quilograma custa R$ 30,00. Ela achou que o preço estava muito bom e convidou alguns amigos do trabalho para irem almoçar junto com ela. Lúcia, amiga de Marta, disse que não iria porque come muito pouco e não "compensaria" financeiramente. Mas Marta explicou que não era um restaurante do tipo em que se paga uma quantia fixa e come-se à vontade; Trata-se de um restaurante em que você paga por exatamente o que comer. Depois de tudo explicado, eles foram ao restaurante: Cláudio, Marta, Lúcia, Carmem, Ricardo e José.

Logo abaixo estará representado o visor da balança após cada um deles ter terminado de se servir:

120g	420g	650g
Lúcia	Carmem	Ricardo
490g	**710g**	**820g**
Marta	José	Cláudio

Você reparou que no visor da balança a unidade utilizada foi grama para indicar o consumo de cada colega e o preço de R$30,00 era do quilograma de comida.

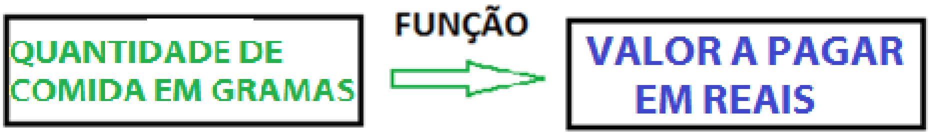
Lembrando que um quilograma equivale a 1000 gramas, quanto custa 100 gramas de comida? Resposta:______________________________

Para lhe ajudar nos próximos cálculos, quanto custa 10 gramas de comida? Resposta:____________________

Agora responda:

1) Quanto Lúcia irá pagar? R$ 3,60
2) Quanto Carmem irá pagar? ______________________________
3) Quanto Ricardo irá pagar? ______________________________
4) Quanto Marta irá pagar?__________________________________
5) Quanto José irá pagar? __________________________________
6) Quanto Cláudio irá pagar? ______________________________

As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:



7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: ______________________________ E V(600)? ____________________ E V(1)? Resposta:_________________________

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$\boxed{V(x) = \qquad\qquad\qquad}$

Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação? Resposta: ______________________________

VEJAMOS OUTRA SITUAÇÃO!!!

http://imgarcade.com/1/demonstrate-clipart/

André estuda economia e conseguiu um emprego. A sua primeira tarefa era escolher qual banco era mais vantajoso financeiramente para abrir uma conta corrente para movimentar o dinheiro da empresa. Ele consultou as taxas de dois bancos: Banco ABC e banco XY. O banco ABC cobra uma tarifa de manutenção de conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$10,00 mensais e mais uma taxa de R$0,15 por cheque emitido. O banco XY cobra de TMC uma taxa de R$20,00 mensais e mais uma taxa de R$0,10 por cheque emitido. Para decidir entre os dois bancos, André fez algumas contas. Ajude-o nessas contas!

9) Se ele gastar 20 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _________________________.
E no banco XY? _________________________.

10) Se ele gastar 55 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? _________________________.
E no banco XY? _________________________.

11) Se ele gastar 100 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

12) Se ele gastar 200 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

13) Se ele gastar 220 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

14) Se ele gastar 240 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? ________________________.
E no banco XY? ________________________.

15) Considerando apenas os valores acima, a partir de qual quantidade de cheques mensais o banco XY se torna mais viável financeiramente? ____________________________

16) Qual expressão representa o gasto com taxas mensais no banco ABC? ________________________________
E no banco XY? ________________________________

17) Preencha a tabela abaixo:

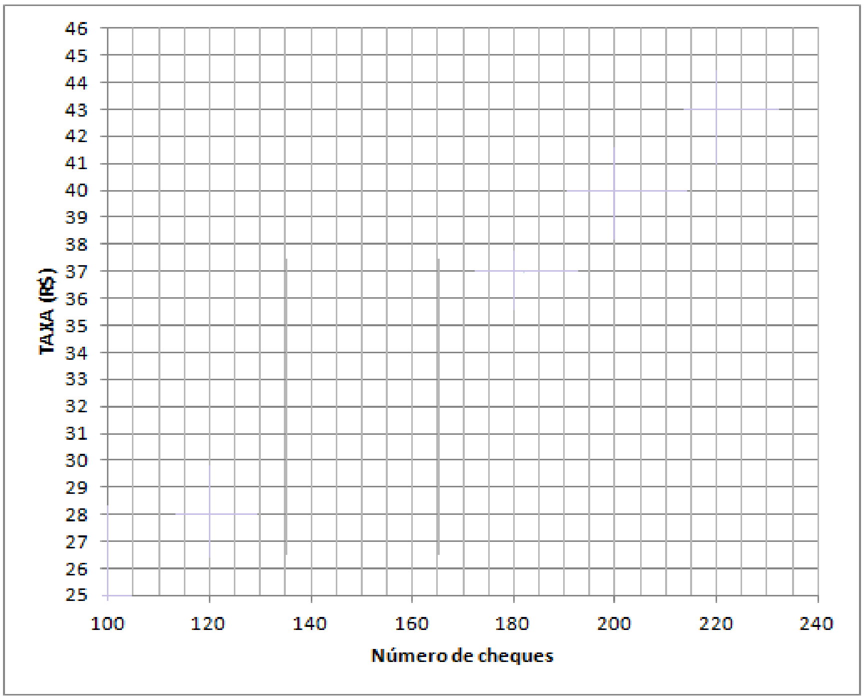
BANCO ABC

Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

BANCO XY

Número de cheques	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**
TAXA MENSAL								

18) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.



19) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

20) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

____

____

____

____

Gostou da atividade? SIM ☐ NÃO ☐

Achou: DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL ☐

Espero que tenham gostado de trabalhar com função afim!!!

Folha de atividade nº 3

Nome:______________________________Série:___Data:_/_/_

Função quadrática - Aplicações

1)Preparando um campeonato

Carlos, estudante do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio no interior de São Paulo, pediu para que seu professor de educação física organizasse um campeonato de futebol de salão com times de sua classe. Primeiramente a ideia era que participassem desse campeonato apenas os meninos do primeiro ano, que eram quinze. Uma equipe de futebol de salão é composta por cinco jogadores, portanto formaram-se os times A, B e C. Na primeira fase desse campeonato, cada time jogará com cada um dos outros times exatamente duas vezes. Escreva abaixo os jogos que serão realizados por esses três times:

Clipart free

Resposta:____

Quantos jogos foram realizados com esses 3 times? Resposta: ___________

Antes que o torneio começasse, cinco alunos do segundo ano do Ensino Médio pediram para participar do campeonato. Temos agora quatro times: A, B, C e D. Lembrando que cada time joga com cada um dos outros times exatamente duas vezes nessa primeira etapa, escreva os jogos que foram realizados:

Resposta:____

Quantos jogos foram realizados com esses 4 times? Resposta: ___________

Como o assunto campeonato de futebol de salão gerou muitos comentários na escola, os estudantes do segundo e do terceiro ano do Ensino Médio quiseram participar também. Mas todos os jogos deveriam acontecer no horário da aula de educação física e o professor ficou com receio de não terminar a primeira etapa porque as férias de julho estavam chegando. Ele pediu ajuda ao Carlos para fazer os cálculos de quantos jogos seriam realizados e começaram a construir uma tabela para se organizarem. Veja como ficou:

Número de times de futebol	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de jogos realizados	**2**	**6**	**12**	**20**					

Você notou que a tabela possui espaços em branco? Preencha-os para ajudar Carlos e seu professor!

Agora responda:

1) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes? Resposta:___________________

2) E 20 times? Resposta:___________________

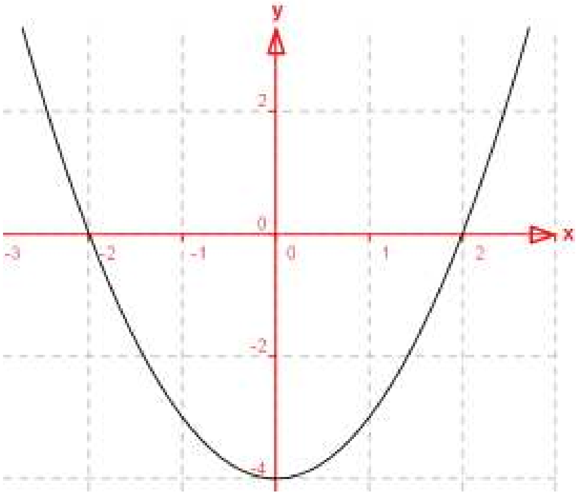
3) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta:____________________

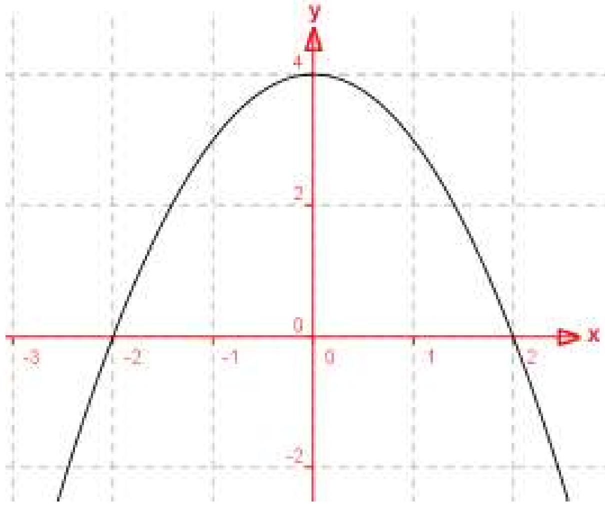
4) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?

Resposta:____

2) Estudando gráficos...

2a) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a uma função quadrática. Em cada caso, escreva a expressão exata da função. Faça a resolução no espaço abaixo do gráfico.





Os pontos (-2;0), (0,-4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

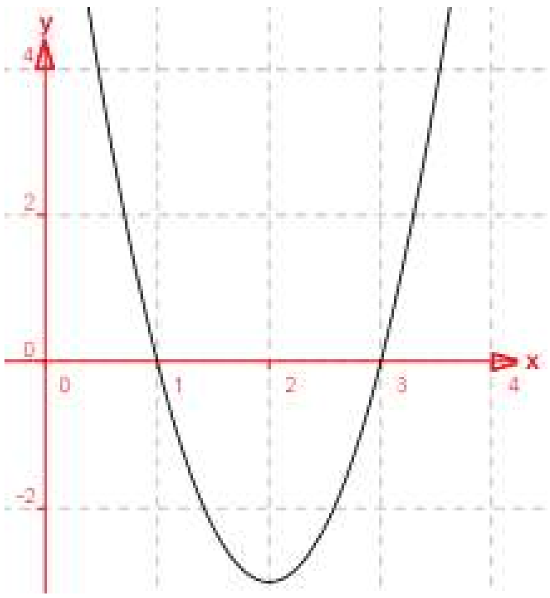
Os pontos (-2;0), (0,4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

Expressão exata da função:______________________

Expressão exata da função:________________________

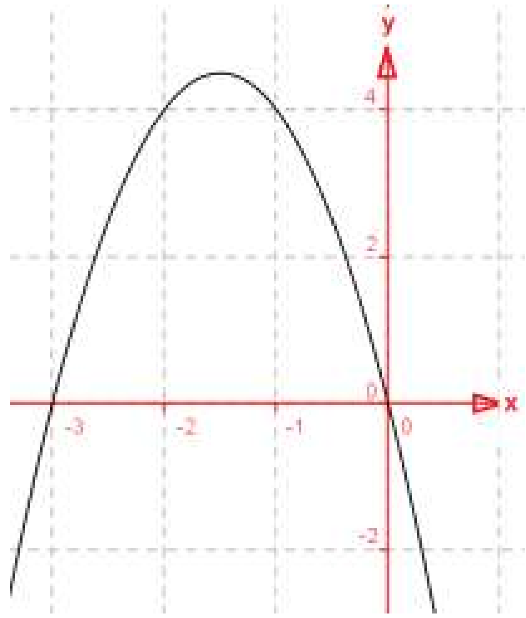
2b) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso escreva uma expressão algébrica do tipo $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$ em que x_1 e x_2 representam as raízes de cada função. Escreva também, em cada caso, se a pode ser 1 ou -1. Utilize esses valores para calcular a expressão expandida de $f(x)$.



Os pontos (1;0) e (3,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

Função expandida:_____________________



Os pontos (-3;0) e (0,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 =___ x_2 =___ Sinal de a :___

Função expandida:_____________________

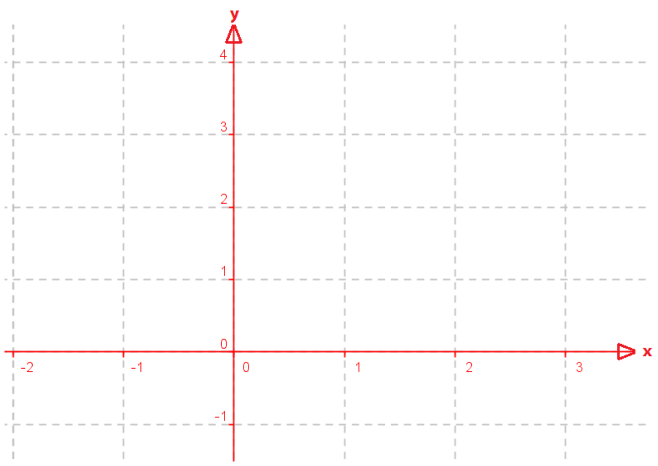
3) Hora de desenhar...

Cada uma das tabelas abaixo corresponde a valores de uma função quadrática $f(x)$. Faça seus gráficos!

Escreva, no espaço abaixo da tabela ao lado, o que

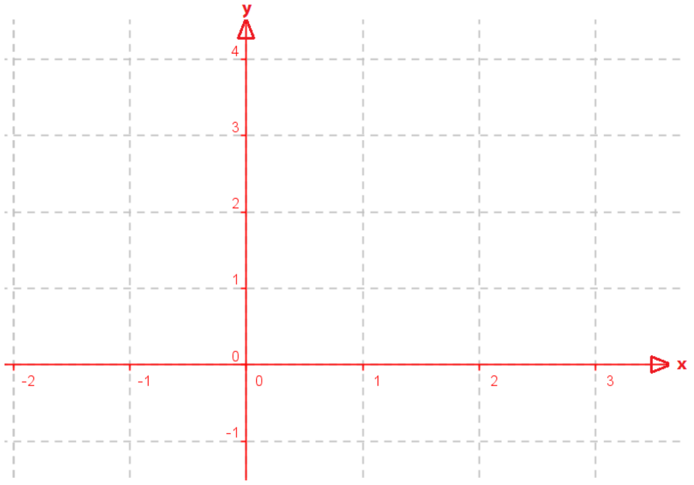
você notou no gráfico após construí-lo.

3a)



x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$f(x)$	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**

3b)



x	-1	0	1	2
$f(x)$	**0**	**2**	**3**	**2**

Qual é a outra raiz da função? Resposta:_______________

Explique como você fez 3b):

Resposta:____

____

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Folha de atividade nº 4

Nome:______________________________Série:___Data:_/_/_

Função quadrática – Máximos e Mínimos

1) Será que é gripe?

Muitas vezes confundimos gripe com resfriado. De repente espirramos por entrarmos em contato com ar frio e já pensamos que estamos gripados. Na verdade estamos apenas resfriados. A gripe é bem perigosa: Em crianças e idosos pode ser grave e até levar à morte.

Vamos considerar uma determinada localidade durante inverno muito rigoroso que sofreu uma epidemia de gripe. Essa localidade foi estudada e dados foram recolhidos por profissionais de modo que uma modelagem da situação fosse feita. O número de pessoas infectadas N durante um certo número x de dias era dado por:

$$N(x) = -5x^2 + 150x$$

Observe que no início da contagem, a quantidade de pessoas infectadas era

$$N(0) = -5.0^2 + 150.0 = 0$$

a) Com base nesse estudo, quantos dias transcorreram para acabar com essa epidemia?

Resolva aqui:

Resposta:_____________

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: _____________

c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

Resposta: _____________

2) Quanto sobe a bolinha

Um estudo importante da Cinemática, na Física, é o lançamento vertical. Os físicos desconsideram a resistência do ar e a aceleração envolvida é de-10m/s² (o sinal negativo é por causa da aceleração da gravidade ser dirigida para baixo, então durante a subida da bolinha, a aceleração utilizada será negativa) e a velocidade inicial empregada foi de 10m/s e a bolinha foi lançada a 1m do solo. A função que descreve a altura H atingida pela bolinha depois de t segundos do lançamento é dada pela função quadrática $H(t) = -5t^2 + 10t + 1$.

vector.me/search/playing-paint-ball

a) Quanto tempo a bolinha demora para atingir o ponto mais alto da trajetória?

Resolva aqui:

Resposta:____

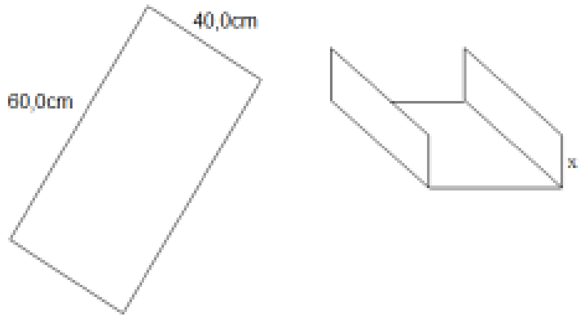
b) Qual a altura máxima atingida pela bolinha?

Resolva aqui:

Resposta:____

3) Fabricando pastas

Uma determinada empresa deseja fabricar arquivos para pastas em formato de U. Para isso é necessário uma folha de plástico retangular com 60,0cm de comprimento e 40,0cm de largura, na qual são feitas duas dobras ao longo do lado maior como mostra a figura abaixo:



Observação: O volume interno do arquivo é dado pelo produto de suas três dimensões.

a) Você conseguiria escrever uma expressão para relacionar o volume V do arquivo com a altura x?
Resposta:____

b) Qual deve ser o valor de x para que o volume interno seja máximo?
Resolva aqui:

Resposta:____

c) Qual o valor do volume máximo?
Resolva aqui:

Resposta:____

4) Construindo uma pipa

Uma criança quer fazer uma pipa na forma de losango (quando estiver esticada em um plano). Para isso tem muito papel, mas dispõe de apenas uma vareta de 3m, que deve ser quebrada em duas partes para fazer as diagonais do losango. Como deve ser dividida essa vareta para que a pipa tenha a maior área possível?

www.fotosearch.com/clip-art/kite.html

Espaço para resolução:

Vale lembrar que losango é um quadrilátero com lados de mesma medida, cuja área é dada pela metade do produto de suas duas diagonais, que são perpendiculares entre si.

Resposta:____

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Apêndice C

Folhas de Atividades – produto final com as respostas propostas pela docente

Folha de atividade nº 1

Nome:______________________Série:_____ Data:_/_/_

Conceito de função afim

Juninho ajuda seu pai, João, a fazer algumas contas...

João, querendo pintar o muro de sua casa por ter sido pichado, procurou um pintor para perguntar quanto ele cobraria para fazer o serviço. O preço do serviço executado consiste em uma taxa fixa, que é de R$ 25,00, mais uma quantia que depende da área pintada (metros quadrados – m²). Juninho, querendo ajudar seu pai, organizou o orçamento em uma tabela para calcular o valor da reforma. Veja como ficou!

ÁREA PINTADA (m²)	Valor a pagar (R$)
5	35
10	45
15	55
20	65
30	85
40	105
80	185

Ajude Juninho preenchendo as lacunas que estão em branco na tabela ao lado.

Agora responda:

1) Quanto João gastará se for preciso pintar:

100 m²? R$ 225,00

32 m²? R$ 89,00

2) Tirando a taxa inicial, quanto custa o m²? R$ 2,00

A tabela de Juninho **associa** a área pintada com o preço a ser pago. São **duas grandezas relacionadas** por uma regra estabelecida pelo pintor. Você se lembra de que chamamos isso de função?

QUANTIDADE DE m² $\xrightarrow{\text{FUNÇÃO}}$ VALOR A PAGAR

Juninho procurou a palavra **FUNÇÃO** em um dicionário, e viu que ela tem os seguintes significados:

a) Festa; festividade.
b) Trabalho realizado por um determinado órgão do corpo dos seres vivos.
c) O que é atribuído a uma pessoa em uma equipe de trabalho.
d) Dependência de uma quantidade, determinada pelo valor de outra principal.
e) Dança, fandango.

3) Qual desses itens é o significado usado na Matemática?

Resposta: D

4) Juninho então resolveu chamar essa função de (já que se trata do preço a ser pago por seu pai) e notou que:

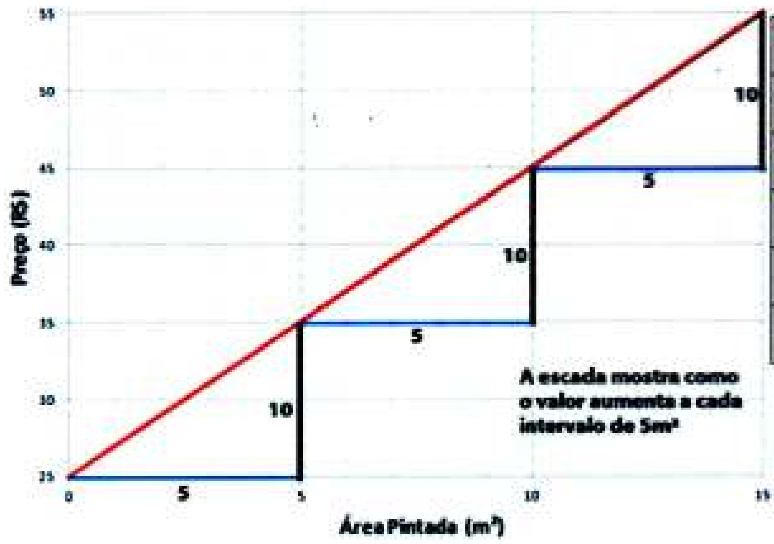
$P(5)=35, P(10)=45, P(15)=55$ ... Sendo assim, responda: $P(17)=59$

5) Se a área pintada for x, quanto deverá ser pago?

$$P(x) = 2x + 25$$

Na Matemática, dizemos que o valor a ser pago **"depende"** ou é **"função"** da quantidade de metros quadrados . Vamos analisar essa função com mais cuidado. Para isso podemos **relacionar** o preço (valor a ser pago) e a área em um sistema cartesiano de coordenadas.

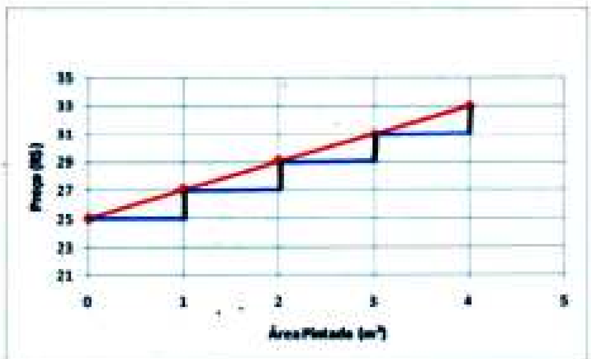
Na figura abaixo o gráfico é a linha mais grossa em cor vermelha. Estamos interessados em examinar a variação da função em intervalos iguais de m². Ou seja, o quanto varia o preço em **relação** à área pintada. Veja e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 5	P(5) - P(0) = 35 - 25 = 10
5 a 10	P(10) - P(5) = 45 - 35 = 10
10 a 15	P(15) - P(10) = 55 - 45 = 10
15 a 20	P(20) - P(15) = 65 - 55 = 10
20 a 25	P(25) - P(20) = 75 - 65 = 10

O que você notou? Resposta típica

Consideremos outro exemplo, sendo agora em intervalos de 1 m². Veja o gráfico e depois preencha a tabela ao lado:



Intervalo em m²	Variação de Valor (R$)
0 a 1	P(1) - P(0) = 27 - 25 = 2
1 a 2	P(2) - P(1) = 29 - 27 = 2
2 a 3	P(3) - P(2) = 31 - 29 = 2
3 a 4	P(4) - P(3) = 33 - 31 = 2
4 a 5	P(5) - P(4) = 35 - 33 = 2

O que você notou? Resposta típica

Você conseguiria escrever o que essas tabelas têm em comum?

A variação relativa, ou taxa de variação, é o quociente da variação do valor pelo intervalo. Complete a tabela:

Intervalo x_1 a x_2	Variação do valor $P(x_2)-P(x_1)$	Taxa de variação $\frac{P(x_2)-P(x_1)}{x_2-x_1}$
1 a 3	$P(3)-P(1)=4$	$\frac{31-27}{3-1}=\frac{4}{2}=2$
5 a 15	$P(15)-P(5)=20$	$\frac{55-35}{15-5}=\frac{20}{10}=2$
3 a 20	$P(20)-P(3)=34$	$\frac{65-31}{20-3}=\frac{34}{17}=2$
1 a 30	$P(30)-P(1)=58$	$\frac{85-27}{30-1}=\frac{58}{29}=2$
10 a 40	$P(40)-P(10)=60$	$\frac{105-45}{40-10}=\frac{60}{30}=2$
15 a 25	$P(25)-P(15)=20$	$\frac{75-55}{25-15}=\frac{20}{10}=2$
20 a 45	$P(45)-P(20)=50$	$\frac{115-65}{45-20}=\frac{50}{25}=2$

O que você notou?

Resposta típica

6) Consideremos outro exemplo de função: $f(x)=7x+10$. Quanto você acha que vale sua taxa de variação? Resposta: 7

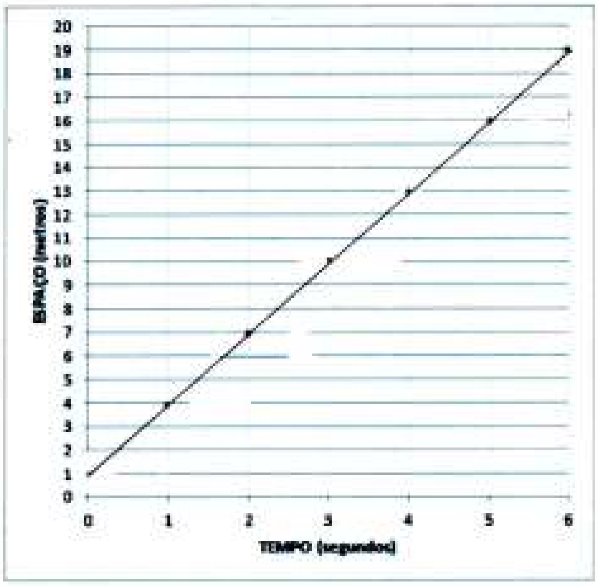
7) Vamos pensar agora em um exemplo de Física!

Você já aprendeu, na Física, que uma partícula, como um carrinho, em Movimento Retilíneo Uniforme percorre uma trajetória reta com velocidade CONSTANTE.

Em uma tabela, dividida em duas colunas, teremos envolvidos o tempo (dado em segundos) e a localização (dada em metros) de um carrinho.

TEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	6
POSIÇÃO (m)	1	4	7	10	13	16	19

Marque os pontos da tabela no sistema cartesiano abaixo e desenhe o gráfico da função unindo os pontos em uma reta.



8) Responda:

9) Em que posição o carrinho estará aos 10 segundos? 31m

10) Em que posição o carrinho estará aos 15 segundos? 46m

11) Em cada segundo que passa, quanto o carrinho anda? 3m

12) Se o número de segundos for t, como poderemos escrever a posição (S) do carrinho?

$S(t) = 3t + 1$

13) Quanto é a taxa de variação de espaço (posição) sofrida pelo carrinho a cada segundo? 3

14) Qual o nome que a Física dá para essa variação? Velocidade

Função Afim

Uma função chama-se afim quando existem constantes reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$

Pergunta:

Qual a taxa de variação da função $f(x) = ax + b$? Resposta: a

A principal propriedade que caracteriza as funções afins é que sua taxa de variação é constante.

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO Resposta pessoal do aluno.

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL

Folha de atividade nº 2

Nome:______________________________Série:_____Data:_/_/_

Hora do almoço

http://www.picturesof.net/pages/090113-214001-226009.html

Marta e seus amigos de trabalho no restaurante...

Marta trabalha em uma loja de sapatos que fica no centro da cidade. Ela descobriu um restaurante muito bom que ficava ali perto. O quilograma custa R$ 30,00. Ela achou que o preço estava muito bom e convidou alguns amigos do trabalho para irem almoçar junto com ela. Lúcia, amiga de Marta, disse que não iria porque come muito pouco e não "compensaria" financeiramente. Mas Marta explicou que não era um restaurante do tipo em que se paga uma quantia fixa e come-se à vontade; Trata-se de um restaurante em que você paga por exatamente o que comer. Depois de tudo explicado, eles foram ao restaurante: Cláudio, Marta, Lúcia, Carmem, Ricardo e José.

Logo abaixo estará representado o visor da balança após cada um deles ter terminado de se servir:

120g	420g	650g
Lúcia	Carmem	Ricardo
490g	710g	820g
Marta	José	Cláudio

Você reparou que no visor da balança a unidade utilizada foi grama para indicar o consumo de cada colega e o preço de R$30,00 era do quilograma de comida.

Lembrando que um quilograma equivale a 1000 gramas, quanto custa 100 gramas de comida? Resposta: R$ 3,00

Para lhe ajudar nos próximos cálculos, quanto custa 10 gramas de comida? Resposta: R$ 0,30

Agora responda:

1) Quanto Lúcia irá pagar? R$ 3,60
2) Quanto Carmem irá pagar? R$ 12,60
3) Quanto Ricardo irá pagar? R$ 19,50
4) Quanto Marta irá pagar? R$ 14,70
5) Quanto José irá pagar? R$ 21,30
6) Quanto Cláudio irá pagar? R$ 24,60

As duas grandezas que são relacionadas nessa situação estão representadas no quadro abaixo:

QUANTIDADE DE COMIDA EM GRAMAS	FUNÇÃO ⟹	VALOR A PAGAR EM REAIS

7) Vamos chamar essa função de V. Nota-se que V(120) = 3,60. Quanto é V(500)? Resposta: R$ 15,00 E V(600)? R$ 18,00 E V(1)? Resposta: R$ 0,03

8) Se a quantidade de comida for x, em gramas, quanto será pago?

$$\boxed{V(x) = 0{,}03\,x}$$

Reparou que esta é uma função afim? Qual sua taxa de variação? Resposta: 0,03

VEJAMOS OUTRA SITUAÇÃO!!!

http: imgarcade.com 1 demonstrate-clipart

André estuda economia e conseguiu um emprego. A sua primeira tarefa era escolher qual banco era mais vantajoso financeiramente para abrir uma conta corrente para movimentar o dinheiro da empresa. Ele consultou as taxas de dois bancos: Banco ABC e banco XY. O banco ABC cobra uma tarifa de manutenção de conta (TMC) da seguinte forma: uma taxa de R$10,00 mensais e mais uma taxa de R$0,15 por cheque emitido. O banco XY cobra de TMC uma taxa de R$20,00 mensais e mais uma taxa de R$0,10 por cheque emitido. Para decidir entre os dois bancos, André fez algumas contas. Ajude-o nessas contas!

9) Se ele gastar 20 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 13,00.
E no banco XY? R$ 22,00.

10) Se ele gastar 55 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 18,25.
E no banco XY? R$ 25,50.

11) Se ele gastar 100 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 25,00.
E no banco XY? R$ 30,00.

12) Se ele gastar 200 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 40,00.
E no banco XY? R$ 40,00.

13) Se ele gastar 220 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 43,00.
E no banco XY? R$ 42,00.

14) Se ele gastar 240 cheques por mês, quanto ele gastará em taxas no banco ABC? R$ 46,00.
E no banco XY? R$ 44,00.

15) Considerando apenas os valores acima, a partir de qual quantidade de cheques mensais o banco XY se torna mais viável financeiramente? 200

16) Qual expressão representa o gasto com taxas mensais no banco ABC? $10 + 0,15 \cdot x$
E no banco XY? $20 + 0,10 \cdot x$

17) Preencha a tabela abaixo:

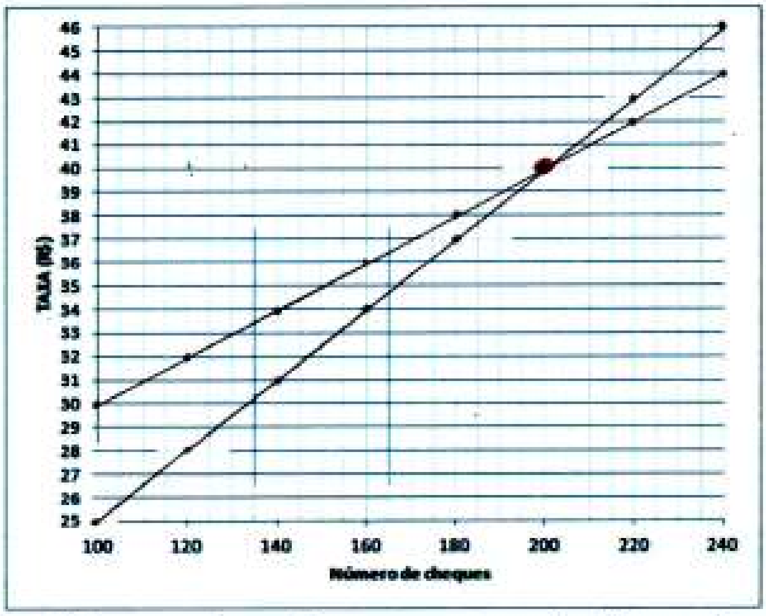
BANCO ABC

Número de cheques	100	120	140	160	180	200	220	240
TAXA MENSAL	25	28	31	34	37	40	43	46

BANCO XY

Número de cheques	100	120	140	160	180	200	220	240
TAXA MENSAL	30	32	34	36	38	40	42	44

18) Marque os pontos das duas tabelas no sistema cartesiano abaixo e desenhe os gráficos das duas funções.



19) Destaque o ponto de encontro entre as duas linhas, verificando mais uma vez a partir de que número de cheques o banco XY é mais vantajoso.

20) André ficou com preguiça de fazer um gráfico. Utilizando álgebra e as expressões do item 8), como você ajudaria André a justificar qual banco é mais viável?

$20 + 0{,}10x < 10 + 0{,}15x$

$0{,}10x - 0{,}15x < 10 - 20$

$-0{,}05x < -10$

$x > 200$

Gostou da atividade? SIM ☐ NÃO ☐

Achou: DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL ☐

Resposta pessoal do aluno

Espero que tenham gostado de trabalhar com função afim!!!

Folha de atividade nº 3

Nome:____________________________________Série:____Data:_/_/_

Função quadrática - Aplicações

1)Preparando um campeonato

Carlos, estudante do primeiro ano do Ensino Médio de um colégio no interior de São Paulo, pediu para que seu professor de educação física organizasse um campeonato de futebol de salão com times de sua classe. Primeiramente a ideia era que participassem desse campeonato apenas os meninos do primeiro ano, que eram quinze. Uma equipe de futebol de salão é composta por cinco jogadores, portanto formaram-se os times A, B e C. Na primeira fase desse campeonato, cada time jogará com cada um dos outros times exatamente duas vezes. Escreva abaixo os jogos que serão realizados por esses três times:

Clipart free

Resposta: A x B, B x A, A x C, C x A, B x C, C x B

Quantos jogos foram realizados com esses 3 times? Resposta: 6

Antes que o torneio começasse, cinco alunos do segundo ano do Ensino Médio pediram para participar do campeonato. Temos agora quatro times: A, B, C e D. Lembrando que cada time joga com cada um dos outros times exatamente duas vezes nessa primeira etapa, escreva os jogos que foram realizados:

Resposta: A x B, B x A, A x C, C x A, A x D, D x A, B x C, C x B, B x D, D x B, C x D, D x C

Quantos jogos foram realizados com esses 4 times? Resposta: 12

Como o assunto campeonato de futebol de salão gerou muitos comentários na escola, os estudantes do segundo e do terceiro ano do Ensino Médio quiseram participar também. Mas todos os jogos deveriam acontecer no horário da aula de educação física e o professor ficou com receio de não terminar a primeira etapa porque as férias de julho estavam chegando. Ele pediu ajuda ao Carlos para fazer os cálculos de quantos jogos seriam realizados e começaram a construir uma tabela para se organizarem. Veja como ficou:

Número de times de futebol	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de jogos realizados	2	6	12	20	30	42	56	72	90

Você notou que a tabela possui espaços em branco? Preencha-os para ajudar Carlos e seu professor!

Agora responda:

1) Quanto jogos serão realizados com 12 times participantes? Resposta: 132

2) E 20 times? Resposta: 380

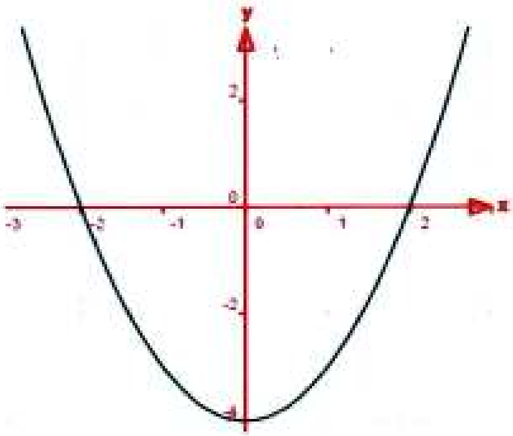
3) Você saberia escrever uma expressão para relacionar o número de jogos N com o número de times participantes x? Resposta: $N(x) = x \cdot (x-1)$

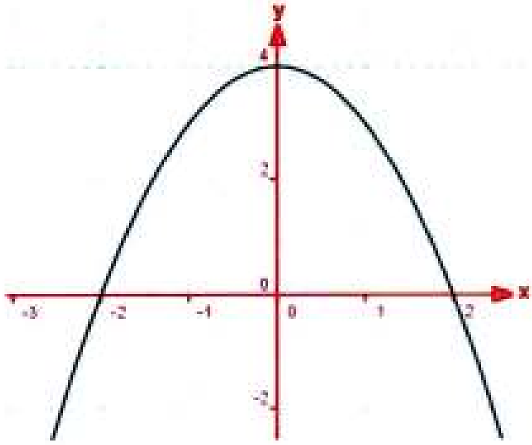
4) Você reconhece essa função? Que tipo de função é?

Resposta: Sim. Função quadrática.

2) Estudando gráficos...

2a) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a uma função quadrática. Em cada caso, escreva a expressão exata da função. Faça a resolução no espaço abaixo do gráfico.





Os pontos (-2;0), (0,-4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

$-4 = a \cdot (0+2) \cdot (0-2)$

$a = 1$

Expressão exata da função: $f(x) = x^2 - 4$

Os pontos (-2;0), (0,4) e (2,0) são pontos do gráfico

Resolva aqui:

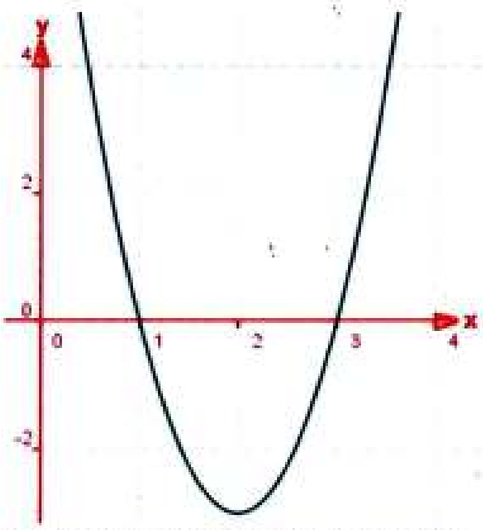
$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

$4 = a \cdot (0+2) \cdot (0-2)$

$a = -1$

Expressão exata da função: $f(x) = -x^2 + 4$

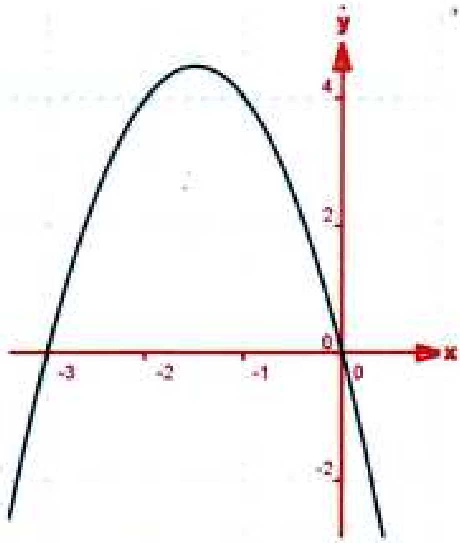
2b) Cada um dos dois gráficos dados a seguir corresponde a funções quadráticas. Em cada caso escreva uma expressão algébrica do tipo $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$ em que x_1 e x_2 representam as raízes de cada função. Escreva também, em cada caso, se a pode ser 1 ou -1. Utilize esses valores para calcular a expressão expandida de $f(x)$.



Os pontos (1;0) e (3,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 = 1 x_2 = 3 Sinal de a: +

Função expandida: $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Os pontos (-3;0) e (0,0) são pontos do gráfico

Responda: x_1 = -3 x_2 = 0 Sinal de a: −

Função expandida: $f(x) = -x^2 - 3x$

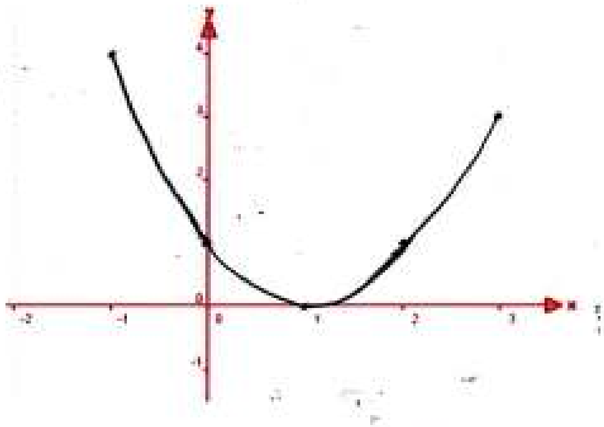
3) Hora de desenhar...

Cada uma das tabelas abaixo corresponde a valores de uma função quadrática $f(x)$. Faça seus gráficos!

Escreva, no espaço abaixo da tabela ao lado, o que

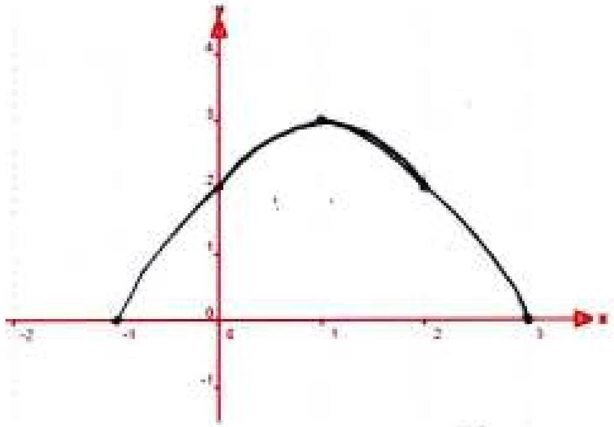
você notou no gráfico após construí-lo.

3a)



x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

3b)



x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	3	2

Qual é a outra raiz da função? Resposta: 3

Explique como você fez 3b):

Resposta: Resposta típica

Gostou da atividade? [ ] SIM [ ] NÃO

Resposta pessoal do aluno.

Achou: [ ] DIFÍCIL [ ] MÉDIO [ ] FÁCIL

Folha de atividade nº 4

Nome:__________________________________Série:____Data:_/_/_

Função quadrática – Máximos e Mínimos

1) Será que é gripe?

Muitas vezes confundimos gripe com resfriado. De repente espirramos por entrarmos em contato com ar frio e já pensamos que estamos gripados. Na verdade estamos apenas resfriados. A gripe é bem perigosa: Em crianças e idosos pode ser grave e até levar à morte.

Vamos considerar uma determinada localidade durante inverno muito rigoroso que sofreu uma epidemia de gripe. Essa localidade foi estudada e dados foram recolhidos por profissionais de modo que uma modelagem da situação fosse feita. O número de pessoas infectadas N durante um certo número x de dias era dado por:

$$N(x) = -5x^2 + 150x$$

Observe que no início da contagem, a quantidade de pessoas infectadas era

$$N(0) = -5.0^2 + 150.0 = 0$$

a) Com base nesse estudo, quantos dias transcorreram para acabar com essa epidemia?

Resolva aqui:

$$-5x^2 + 150x = 0 \rightarrow x.(-5x+150) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 30 \end{matrix}$$

Resposta: 30 dias

b) Em quantos dias se atingiu o máximo de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

$$x_v = \frac{0+30}{2} = 15$$

Resposta: 15 dias

c) Qual foi a quantidade máxima de pessoas infectadas?

Resolva aqui:

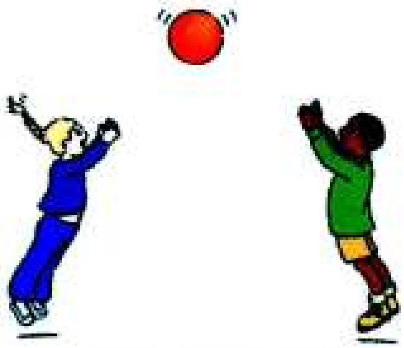
$$N(15) = -5 . 15^2 + 150 . 15$$

$$N(15) = 1125$$

Resposta: 1125

2) Quanto sobe a bolinha

Um estudo importante da Cinemática, na Física, é o lançamento vertical. Os físicos desconsideram a resistência do ar e a aceleração envolvida é de-10m/s² (o sinal negativo é por causa da aceleração da gravidade ser dirigida para baixo, então durante a subida da bolinha, a aceleração utilizada será negativa) e a velocidade inicial empregada foi de 10m/s e a bolinha foi lançada a 1m do solo. A função que descreve a altura H atingida pela bolinha depois de t segundos do lançamento é dada pela função quadrática $H(t) = -5t^2 + 10t + 1$.



vector.me/search/playing-paint-ball

a) Quanto tempo a bolinha demora para atingir o ponto mais alto da trajetória?

Resolva aqui:

$$t_v = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

$$t_v = -\frac{10}{2 \cdot (-5)} = 1$$

Resposta: 1 segundo

b) Qual a altura máxima atingida pela bolinha?

Resolva aqui:

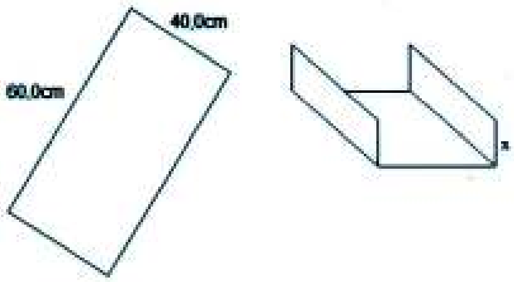
$$H(1) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 1$$

$$H(1) = 6$$

Resposta: 6 metros

3) Fabricando pastas

Uma determinada empresa deseja fabricar arquivos para pastas em formato de U. Para isso é necessário uma folha de plástico retangular com 60,0cm de comprimento e 40,0cm de largura, na qual são feitas duas dobras ao longo do lado maior como mostra a figura abaixo:



Observação: O volume interno do arquivo é dado pelo produto de suas três dimensões.

a) Você conseguiria escrever uma expressão para relacionar o volume V do arquivo com a altura x?

Resposta: $V(x) = x \cdot 60 \cdot (40-2x)$

b) Qual deve ser o valor de x para que o volume interno seja máximo?

Resolva aqui:

$$x_v = \frac{0+20}{2} = 10$$

Resposta: 10 cm

c) Qual o valor do volume máximo?

Resolva aqui:

$$V(10) = 10 \cdot 60 \cdot (40 - 2 \cdot 10)$$
$$V(10) = 600 \cdot 20$$
$$V(10) = 12000$$

Resposta: $12000\ cm^3$

4) Construindo uma pipa

Uma criança quer fazer uma pipa na forma de losango (quando estiver esticada em um plano). Para isso tem muito papel, mas dispõe de apenas uma vareta de 3m, que deve ser quebrada em duas partes para fazer as diagonais do losango. Como deve ser dividida essa vareta para que a pipa tenha a maior área possível?

www.fotosearch.com/clip-art/kite.html

Espaço para resolução:

$$A(x) = \frac{x.(3-x)}{2}$$

$$x_v = \frac{0+3}{2} = 1,5$$

> Vale lembrar que losango é um quadrilátero com lados de mesma medida, cuja área é dada pela metade do produto de suas duas diagonais, que são perpendiculares entre si.

Resposta: Deve ser dividida ao meio.

Gostou da atividade? ☐ SIM ☐ NÃO   Resposta pessoal do aluno.

Achou: ☐ DIFÍCIL ☐ MÉDIO ☐ FÁCIL