UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Introdução às Identidades Funcionais sobre a Álgebra de Matrizes Triangulares Superiores

Mateus Eduardo Salomão

SÃO CARLOS - SP

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Introdução às Identidades Funcionais sobre a Álgebra de Matrizes Triangulares Superiores

Mateus Eduardo Salomão

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S173i

Salomão, Mateus Eduardo
Uma introdução às identidades funcionais sobre a álgebra de matrizes triangulares superiores / Mateus Eduardo Salomão. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
96 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Identidades funcionais. 2. Matrizes triangulares superiores. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Mateus Eduardo Salomão, realizada em 23/02/2016:

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas Jose Goncalves
UFSCar

P. Kochloukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov
UNICAMP

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força que meu deu durante o período do mestrado;

À minha mãe Ione, por todo o apoio e incentivo neste tempo, e pelas orações que a mim dedicou. Também agradeço a toda minha família, que também torceu e rezou por mim;

Ao professor Dimas, por ter aceitado me orientar, e pela dedicação e paciência que teve com o meu trabalho. Isso sem contar os ensinamentos e auxílios que me deu durante o mestrado;

Aos meus amigos Carlos, Daiana e Evandro pelo companheirismo, por todo o apoio, auxilio, incentivo e força que me deram durante esse período. Agradeço especialmente ao Evandro, pela companhia, pelos conselhos, por todos os momentos de estudos e momentos alegres de descontração;

Aos demais amigos, que torceram por mim, me apoiaram e incentivaram;

Aos meus professores, pela excelente formação dispensada;

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

O assunto tratado nesta dissertação diz respeito à identidades funcionais (FI) de um determinado anel. São fornecidos conceitos, exemplos e alguns resultados envolvendo os temas: solução standard de uma FI, grau forte de um anel, anéis fortemente d-livres e FI-grau de um anel. Em particular, são estudadas soluções de uma específica FI para a álgebra das matrizes triangulares superiores, isto é: Sejam r e n inteiros positivos com $r \geq 2$, $\mathcal{T}_r$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ uma função multilinear tal que

$$[f(A, A, \ldots, A), A] = 0, \text{ para todo } A \in \mathcal{T}_r.$$

Se $n \leq r$ e $|\mathbb{F}| > n + 1$, então tais funções f são descritas.

Palavras Chave: *Identidades funcionais, matrizes triangulares superiores.*

Abstract

The subject treated in this dissertation is functional identities (FI) of a especific ring. We present concepts, examples and some results involving the themes: standard solution of a FI, strong degree of a ring, strongly d-free rings and FI-degree of a ring. In particular, it is studied the solutions of a particular FI on upper triangular matrices algebra, that is: Let r and n be positive integers with $r \geq 2$, $\mathcal{T}_r$ be the algebra of upper triangular $r \times r$ matrices over a field $\mathbb{F}$ and $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ be a multilinear mapping such that

$$[f(A, A, \ldots, A), A] = 0, \text{ for all } A \in \mathcal{T}_r.$$

If $n \leq r$ and $|\mathbb{F}| > n + 1$ then f is described.

Keywords: *Functional identities, upper triangular matrices.*

Sumário

Introdução

O assunto a ser tratado nesta dissertação é *Identidades Funcionais* (FI). Sem muito rigor, daremos a definição do que vem a ser uma FI para um determinado anel A. Considere um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ em variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ e com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Na teoria de FI procura-se por funções $F_i : A^m \longrightarrow A$, $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$f(r_1, \ldots, r_m, F_1(r_1, \ldots, r_m), \ldots, F_n(r_1, \ldots, r_m)) = 0 \tag{1}$$

para todos $r_1, \ldots, r_m \in A$. Caso tais funções existam, dizemos que elas formam uma solução da FI (1).

O início da FI-teoria deu-se por volta de 1990 com a tese de doutorado de Matej Brešar. Depois, também com os trabalhos de Konstantin Beidar e Mikhail Chebotar, a teoria passou a ser fundamentada e extensivamente desenvolvida. Uma das aplicações de FI-teoria são as soluções das conjecturas de Herstein sobre homomorfismos de Lie e derivações de Lie em anéis associativos. Para maiores detalhes da importância e dos aspectos históricos da FI-teoria, sugerimos o livro [4].

Um tipo especial de FI é aquela deduzida a partir de polinômios f do tipo

$$f = \sum_i y_{1i} x_i + \sum_j x_j y_{2j}.$$

Sob certas condições nas soluções desejadas, podemos definir o conceito de *anel fortemente d-livre* e deduzir relações entre o *grau forte* e o *FI-grau* do anel A.

No artigo [1] os autores estudam identidades funcionais sobre a álgebra de matrizes triangulares superiores: Sejam r e n inteiros positivos com $r \geq 2$, $\mathcal{T}_r$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ uma função multilinear tal que

$$[f(A, A, \dots, A), A] = 0, \text{ para todo } A \in \mathcal{T}_r.$$

Se $n \leq r$ e $|\mathbb{F}| > n + 1$ então é provado que existem $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ e funções multilineares $\lambda_i : (\mathcal{T}_r)^i \longrightarrow \mathbb{F}$, para $i = 1, \dots, n$, tais que

$$f(A, A, \dots, A) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(A, A, \dots, A)A^{n-i}, \text{ para todo } A \in \mathcal{T}_r.$$

Como uma aplicação de tal resultado, ainda em [1] é mostrado o seguinte: Seja $\mathbb{F}$ um corpo com $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ e $|\mathbb{F}| > 3$. Então toda função linear bijetiva $\theta : \mathcal{T}_r \longrightarrow \mathcal{T}_r$, onde $r \geq 3$, satisfazendo

$$[\theta(A^2), \theta(A)] = 0$$

para todo $A \in \mathcal{T}_r$, é da forma

$$\theta(A) = \lambda\varphi(A) + \mu(A)Id_r,$$

onde $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, μ é um funcional linear em $\mathcal{T}_r$ e φ é um automorfismo ou um antiautomorfismo de $\mathcal{T}_r$.

Vale a pena mencionar que os automorfismos e antiautomorfismos de $\mathcal{T}_r$ são descritos em [8] e [10, Corolários 6 e 7].

A dissertação está dividida da seguinte maneira: no Capítulo 1 são apresentados alguns resultados básicos da teoria de anéis e da teoria de PI-álgebras. Esses resultados são fundamentais para os capítulos seguintes, em especial, o Teorema da Densidade de Jacobson. Para um melhor aprofundamento do assunto citamos os livros [5, 7, 6, 9]. No Capítulo 2 apresentamos um pouco da teoria de Identidades Funcionais. O material foi extraído da referência [4, Capítulos 1 e 2]. No Capítulo 3 apresentamos os resultados citados do artigo [1].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados algumas definições e resultados básicos da Teoria de Anéis Associativos e da Teoria de PI-álgebras. Para maiores informações e um aprofundamento do assunto, sugerimos as referências [5], [7], [6] e [9].

1.1 Teoria de Anéis Associativos

Ao longo do texto, os anéis considerados serão associativos com ou sem unidade e não necessariamente comutativos. Quando o anel tiver unidade será chamado *anel unitário.*

A seguir, vamos apresentar (relembrar) algumas definições e resultados da Teoria de Anéis Associativos que aparecerão com uma certa frequência na dissertação.

Para qualquer anel A e $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $M_n(A)$ o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em A. Caso A seja um anel unitário, então $M_n(A)$ contém as chamadas *matrizes unitárias*, isto é, matrizes que têm exatamente uma entrada igual a 1 e as demais entradas nulas. Vamos denotar uma matriz unitária com entrada 1 na posição (i, j) por e_{ij}.

Seja A um anel e S um subconjunto de A. O *ideal gerado* por S é o conjunto das somas e subtrações de elementos do tipo

$$a_1sa_2, \ a_1s, \ sa_2 \text{ e } s,$$

onde $a_1, a_2 \in A$ e $s \in S$. Vamos denotar o ideal gerado pelo subconjunto S por (S).

Um tipo especial de ideal que será considerado no próximo capítulo é o *ideal central.*

Definição 1.1.1. Seja A um anel. Um ideal I de A é dito um **ideal central** se I está contido no centro de A.

Relembramos que o centro de um anel A, denotado por $\mathcal{Z}(A)$, é o conjunto

$$\mathcal{Z}(A) = \{a \in A \ : \ ab = ba, \ \forall b \in A\}.$$

Relacionado ao conceito "comutar" podemos associar um elemento, chamado *comutador*.

Definição 1.1.2. Seja A um anel e $a, b \in A$. Definimos o **comutador de** a **e** b por

$$[a, b] = ab - ba.$$

Observe que $a \in \mathcal{Z}(A)$ se, e somente se, $[a, b] = 0$ para todo $b \in A$.

A partir da definição do comutador de a e b temos a seguinte relação que será muito útil para nossos propósitos:

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b.$$

De fato, $[ab, c] = abc - cab = abc - cab - acb + acb = a[b, c] + [a, c]b$.

Definição 1.1.3. Um anel A é dito **anel primo** se para quaisquer ideais I e J de A, $IJ = 0$ implica $I = 0$ ou $J = 0$.

Uma condição equivalente à Definição 1.1.3 é que para todos $a, b \in A$, $aAb = 0$ implica $a = 0$ ou $b = 0$ (para mais detalhes desse resultado ver [5, Lema 2.17]).

Definição 1.1.4. Um anel A é dito **anel semiprimo** se para todo ideal I de A, $I^2 = 0$ implica $I = 0$.

Uma condição equivalente à Definição 1.1.4 é que para todo $a \in A$, $aAa = 0$ implica $a = 0$ (para mais detalhes desse resultado ver [5, Lema 2.21]).

Na sequência, apresentaremos algumas definições envolvendo módulos, o Teorema da Densidade de Jacobson e o Lema de Schur. Como os módulos considerados serão apenas módulos à esquerda, usaremos apenas o termo *módulo* e omitiremos o *a esquerda*, a menos que seja necessário.

Definição 1.1.5. Seja A um anel. Um A-módulo M é dito:

i) **simples** se $AM \neq 0$ e se seus únicos submódulos são 0 e M.

ii) **fiel** se $aM \neq 0$ para todo $0 \neq a \in A$.

Com base na definição acima definimos *anel primitivo* como abaixo:

Definição 1.1.6. Um anel A é dito **primitivo** (à esquerda) se existe um A-módulo M simples e fiel.

Portanto, temos que um anel A é primitivo se existe um A-módulo M tal que $M \neq 0$ e cumpre as duas condições:

i) $Am = M, \ \forall \ 0 \neq m \in M$.

ii) $aM \neq 0, \ \forall \ 0 \neq a \in A$.

Um lema de demonstração simples, mas que cumpre um papel importante na teoria é o famoso *Lema de Schur*. Antes de enunciá-lo, denotaremos por $End_A M$ o conjunto de todos os endomorfismos (de módulos) de um A-módulo M.

Lema 1.1.7 (Lema de Schur). *Seja A um anel e M um A-módulo simples. Então o anel de endomorfismos $\Delta = End_A M$ é um anel de divisão.*

Demonstração. Para a demonstração ver [5, Lema 3.50] □

Definição 1.1.8. Seja M um espaço vetorial sobre um anel de divisão Δ, e seja A um subanel de $End_\Delta(M)$. Dizemos que A é um **anel denso de operadores lineares** de M se para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto linearmente independente $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de M, e todo subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de M, existe $f \in A$ tal que

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

Com base na definição acima, podemos caracterizar os anéis primitivos a partir do próximo resultado.

Teorema 1.1.9 (Teorema da Densidade de Jacobson). *Um anel A é primitivo se, e somente se, é isomorfo a um anel denso de operadores lineares de um espaço vetorial sobre um anel de divisão.*

Demonstração. Faremos apenas uma parte da demonstração, a que se refere a construção do homomorfismo injetor.

Suponha que A é um anel primitivo e seja M um A-módulo simples e fiel. Pelo Lema 1.1.7 temos que $\Delta = End_A M$ é um anel de divisão. Além disso, como M é um A-módulo então M é um grupo abeliano. Assim, temos que M é um espaço vetorial sobre Δ com a operação

$$\delta m := \delta(m),$$

onde $\delta \in \Delta$ e $m \in M$. Agora, dado $\delta \in \Delta$ temos que

$$\delta(am) = a(\delta m), \tag{1.1}$$

para todo $a \in A$ e $m \in M$.

Definimos, para cada $a \in A$, a função $\overline{a} : M \longrightarrow M$ por

$$\overline{a}(m) = am,$$

onde $m \in M$. Por (1.1) segue que $\overline{a} \in End_\Delta M$.

Logo, a aplicação

$$A \longrightarrow End_\Delta M, \ a \mapsto \overline{a},$$

é um homomorfismo de anéis. Ainda mais, como M é fiel a aplicação acima é um homomorfismo de anéis injetor.

Para a demonstração da "densidade" e para mais detalhes ver [5, Teorema 5.16]. $\square$

Seja A um anel e denote por $End(A)$ o conjunto de todos os endomorfismos do grupo aditivo A. Para $a, b \in A$ definimos a *multiplicação bilateral* ${}_aM_b \in End(A)$ por

$${}_aM_b(x) = axb.$$

Definição 1.1.10. Seja A um anel. Definimos $\mathcal{M}(A)$ como sendo o conjunto de todos os elementos em $End(A)$ que podem ser escritos como uma soma finita de multiplicações bilaterais ${}_aM_b$. Temos que $\mathcal{M}(A)$ é um subanel de $End(A)$, chamado de **anel de multiplicação** de A.

Note que se $f \in \mathcal{M}(A)$, então existem $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in A$ tais que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x b_k, \ \forall x \in A.$$

Além disso, A é um módulo sobre $\mathcal{M}(A)$ com operação produto definida por $f \cdot x = f(x)$ se $f \in \mathcal{M}(A)$ e $x \in A$.

Agora, apresentaremos a definição de *anel simples*, e na sequência dois resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

Definição 1.1.11. Um anel A é dito **simples** se $A^2 \neq 0$ e os únicos ideais de A são 0 e A.

Proposição 1.1.12. *Se A é um anel simples e unitário então A é um módulo simples sobre o anel $\mathcal{M}(A)$.*

Demonstração. Seja B um submódulo de A e suponha que $B \neq 0$. Queremos mostrar que $B = A$.

Seja $a \in A$. Como $B \neq 0$ então existe $b \in B$ não nulo. Considere o ideal $AbA \neq 0$. Então como A é simples temos que $AbA = A$ e assim, $a = \sum_{k=1}^{m} a_k b c_k$ para certos $a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_m \in A$.

Defina $f \in \mathcal{M}(A)$ por $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k x c_k$. Temos que

$$f \cdot b = f(b) = \sum_{k=1}^{m} a_k b c_k = a \in B.$$

Logo, $A = B$. □

Proposição 1.1.13. *Seja A um anel unitário. O anel $End_{\mathcal{M}(A)}A$ é isomorfo a $\mathcal{Z}(A)$.*

Demonstração. Seja $f \in End_{\mathcal{M}(A)}A$ e sejam $a, b \in A$. Como f é um homomorfismo de módulos temos para todo $x \in A$ que a premissa e a implicação abaixo válidas:

$$f({}_aM_b x) = {}_aM_b f(x) \Rightarrow f(axb) = af(x)b.$$

Fazendo $x = 1$ e $a = 1$ na expressão acima temos

$$f(b) = f(1b) = f(1)b = f(1)Id(b).$$

Além disso,

$$f(1)b = f(1b) = f(b1) = bf(1).$$

Logo, $f(1) \in \mathcal{Z}(A)$ e $f = f(1)Id$.

Concluímos assim que a função

$$\varphi : \mathcal{Z}(A) \longrightarrow End_{\mathcal{M}(A)}A$$

definida por $\varphi(r) = rId$ é um isomorfismo. $\square$

Para finalizar esta seção definiremos os conceitos de função aditiva, função n- aditiva e o traço de uma função. Usaremos a notação

$$G^n = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{n-vezes},$$

onde é G um grupo.

Definição 1.1.14. Sejam G e H dois grupos aditivos.

i) Uma função $F : G \longrightarrow H$ é dita **aditiva** se $F(a+b) = F(a) + F(b)$, para todos $a, b \in G$.

ii) Uma função $F : G^n \longrightarrow H$ é dita n-**aditiva** se for uma função aditiva em cada argumento, isto é,

$$F(g_1, \ldots, g_i + g_i', \ldots, g_n) = F(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) + F(g_1, \ldots, g_i', \ldots, g_n),$$

para todos $g_1, \ldots, g_i, g_i', \ldots, g_n \in G$ e todo $i = 1, \ldots, n$.

A partir da definição anterior podemos definir o traço de uma função n-aditiva.

Definição 1.1.15. Sejam G e H dois grupos aditivos e $F : G^n \longrightarrow H$ uma função n-aditiva. A função

$$\begin{array}{rcl} G & \to & H \\ x & \mapsto & F(x, x, \ldots, x) \end{array}$$

é dita ser o **traço** de F.

A partir desta definição vamos falar do processo de *linearização*. Suponha que o traço da função F da definição anterior é zero. Neste caso temos

$$\sum_{\pi \in S_n} F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = 0, \tag{1.2}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in G$, onde S_n denota o grupo simétrico de ordem n. Vamos verificar com detalhes que a identidade (1.2) é verdadeira para os casos quando $n = 2$ e $n = 3$. Quando $n = 2$, F é uma aplicação biaditiva, então temos

$$F(x_1, x_2) + F(x_2, x_1) = F(x_1 + x_2, x_1 + x_2) - F(x_1, x_1) - F(x_2, x_2) = 0.$$

Quando $n = 3$, temos que F é uma aplicação 3-aditiva. Assim, se substituímos x por $x_1 + x_2$ em $F(x, x, x) = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) &= F(x_1, x_1, x_2) + F(x_1, x_2, x_1) + F(x_2, x_1, x_1) \\ &+ F(x_1, x_2, x_2) + F(x_2, x_1, x_2) + F(x_2, x_2, x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todos $x_1, x_2 \in G$. Analogamente, se substituirmos x por $x_1 + x_3$ em $F(x, x, x) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_3) &= F(x_1, x_1, x_3) + F(x_1, x_3, x_1) + F(x_3, x_1, x_1) \\ &+ F(x_1, x_3, x_3) + F(x_3, x_1, x_3) + F(x_3, x_3, x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e também , quando substituímos x por $x_2 + x_3$ em $F(x, x, x) = 0$, temos

$$\begin{aligned} F(x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_2 + x_3) &= F(x_2, x_2, x_3) + F(x_2, x_3, x_2) + F(x_3, x_2, x_2) \\ &+ F(x_2, x_3, x_3) + F(x_3, x_2, x_3) + F(x_3, x_3, x_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das equações acima e de $F(x_1, x_1, x_1) = 0, F(x_2, x_2, x_2) = 0$ e $F(x_3, x_3, x_3) = 0$, segue que

$$F(x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) = \sum_{\pi \in S_3} F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) = 0,$$

para todos $x_1, x_2, x_3 \in G$.

Para os casos em que $n > 3$, obtemos a identidade (1.2) de maneira análoga.

Dizemos que a identidade (1.2) é obtida através da *linearização* de $F(x, x \ldots, x) = 0$, para todo $x \in G$.

1.2 Teoria de PI-álgebras

Nesta seção recordamos alguns conceitos básicos sobre a teoria de PI-álgebras (do inglês *Polynomial Identity*) e introduzimos algumas notações que serão usadas no decorrer da dissertação.

Denotaremos por $\mathbb{F}$ um corpo qualquer e por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Ao longo desta seção, as álgebras consideradas serão associativas, com unidade e sobre $\mathbb{F}$.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis. Denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle$ a *álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por* X, isto é, $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tem uma base formada por 1 e pelas palavras

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n \in \mathbb{N},$$

com multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})(x_{j_1} \cdots x_{j_m}) = x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{j_1} \cdots x_{j_m}.$$

O elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ são chamados de *polinômios*.

Definição 1.2.1. Seja R uma álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n) = f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para R se

$$f(r_1, \ldots, r_n) = 0,$$

para todos $r_1, \ldots, r_n \in R$. Denotamos por $T(R)$ o conjunto das identidades polinomiais de R. Se $T(R) \neq \{0\}$ dizemos que R é uma **PI-álgebra**.

Exemplo 1.2.2. Seja R uma álgebra comutativa. Então temos que o comutador

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial para R. Logo, R é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.2.3. Seja R uma álgebra de dimensão finita com $\dim(R) < n$. Então o *Polinômio Standard* de grau n

$$St_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ, é uma identidade polinomial para R. Portanto, R é uma PI-álgebra. Para a demonstração ver [6, Exemplo 2.1.3].

Segue do exemplo anterior que todo polinômio standard de grau $\geq n^2+1$ é identidade polinomial para $M_n(\mathbb{F})$, visto que $\dim(M_n(\mathbb{F})) = n^2$. Além disso, em 1950, Amitsur e Levitzki demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 1.2.4 (Teorema de Amitsur-Levitzki)**.** *A álgebra $M_n(\mathbb{F})$ satisfaz a identidade standard de grau $2n$*

$$St_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n)}.$$

Além disso, $2n$ é o grau mínimo de uma identidade polinomial para $M_n(\mathbb{F})$.

Demonstração. Para a demonstração ver [6, Página 80 ou 82]. □

Definição 1.2.5. Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é chamado de **T-ideal** se

$$\varphi(I) \subseteq I$$

para todo endomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \to \mathbb{F}\langle X \rangle$.

Pela propriedade universal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, temos que um ideal I é um T-ideal se, e somente se,

$$f(g_1, \ldots, g_n) \in I$$

para todo $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X \rangle$.

Se R é uma PI-álgebra, então $T(R)$ é um T-ideal. Reciprocamente, pode ser mostrado que se I é um T-ideal, então

$$T(\mathbb{F}\langle X \rangle / I) = I.$$

Então um ideal é um T-ideal se, e somente se, é o conjunto das identidades polinomiais de alguma PI-álgebra.

Dado um subconjunto S de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, dizemos que a interseção dos T-ideais que contêm S é o *T-ideal gerado por S*. Ele é o menor T-ideal que contém S e será denotado por $\langle S \rangle^T$. Abaixo o descrevemos.

Proposição 1.2.6. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. O T-ideal gerado por S é formado por todas as combinações lineares de elementos do tipo*

$$uf(g_1,\ldots,g_n)v,$$

onde $u,g_1,\ldots,g_n,v\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$.

Demonstração. Para a demonstração ver [6, Observação 2.2.6]. □

Em geral, dado um T-ideal, queremos encontrar um "bom" conjunto de geradores. Para isso, precisamos de alguns conceitos. Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{F}\langle X\rangle$ é *homogêneo* de grau d em x_i, se é uma combinação linear de monômios tais que em cada monômio de f, a variável x_i aparece d vezes. Se $f(x_1,\ldots,x_m)$ é homogêneo de grau d_i em x_i, para todo $i=1,\ldots,m$, dizemos que $f(x_1,\ldots,x_m)$ é *multi-homogêneo* de grau $(d_1,\ldots,d_m)$. Um polinômio multi-homogêneo de grau $(1,\ldots,1)$ é chamado *multilinear* de grau m.

Lema 1.2.7. *Seja*

$$f(x_1,...,x_m)=\sum_{i=0}^{n} f_i(x_1,...,x_m)\in\mathbb{F}\langle X\rangle,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1. Se o corpo $\mathbb{F}$ contém mais que n elementos, então

$$\langle f_0,f_1,...,f_n\rangle^T=\langle f\rangle^T.$$

Em particular, se $\mathbb{F}$ é infinito, então todo T-ideal é gerado por seus elementos multi-homogêneos.

Demonstração. Temos que $\langle f\rangle^T\subseteq\langle f_0,f_1,...,f_n\rangle^T$. Assim, para provar o lema é suficiente mostrar que

$$f_0,f_1,...,f_n\in\langle f\rangle^T.$$

Sejam $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ elementos distintos de $\mathbb{F}$. Como $\langle f\rangle^T$ é T-ideal temos que

$$f(\alpha_j x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{i=0}^{n} f_i(\alpha_j x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_j^i f_i(x_1,x_2,...,x_m)\in\langle f\rangle^T,$$

para todo $j=0,1,...,n$.

Escrevendo em notação matricial temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, ..., x_m) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, ..., x_m) \\ \vdots \\ f(\alpha_n x_1, x_2, ..., x_m) \end{bmatrix}$$

A matriz A é a matriz de Vandermonde que tem determinante

$$\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0.$$

Logo, A é invertível.

Assim,

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n+1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+1\ 1} & b_{n+1\ 2} & \cdots & b_{n+1n+1} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, ..., x_m) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, ..., x_m) \\ \vdots \\ f(\alpha_n x_1, x_2, ..., x_m) \end{bmatrix}$$

e portanto,

$$f_0, f_1, ..., f_n \in \text{span}\{f(\alpha_0 x_1, x_2, ..., x_m), ..., f(\alpha_n x_1, x_2, ..., x_m)\} \subseteq \langle f \rangle^T.$$

Entende-se por "span" o subespaço vetorial gerado pelo subconjunto em questão.

Se $\mathbb{F}$ é infinito, então podemos usar o mesmo argumento acima sobre cada f_i mas agora na variável x_2. Após alguns passos, teremos que o T-ideal gerado por f é o mesmo T-ideal gerado pelo conjunto de todas componentes multi-homogêneas de f, concluindo assim o resultado. □

Note que podemos dizer algo mais do lema acima: se o corpo $\mathbb{F}$ tem mais que n elementos e $\deg_{x_i} f < n$ para todo $i = 1, \ldots, m$, então o T-ideal gerado por f é o mesmo T-ideal gerado por todas as suas componentes multi-homogêneas.

Lema 1.2.8. *Considere um polinômio*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{d_1=0,\ \ldots,\ d_m=0}^{n} \alpha_{(d_1,\ \ldots,\ d_m)} x_1^{d_1} \cdots x_m^{d_m} \in \mathbb{F}\langle X \rangle.$$

Se f é uma identidade polinomial para $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo com $|\mathbb{F}| \geq n+1$, então $f = 0$ (polinômio nulo).

Demonstração. Pelo Lema 1.2.7 cada monômio $\alpha_{(d_1,\ \ldots,\ d_m)}x_1^{d_1}\cdots x_m^{d_m}$ de f também é uma identidade polinomial para $\mathbb{F}$. Substituindo todos os x_i's por 1 tem-se que $\alpha_{(d_1,\ \ldots,\ d_m)} = 0$ e consequentemente $f = 0$. □

Proposição 1.2.9. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial f, então A também satisfaz uma identidade polinomial multilinear de grau $\leq$ grau(f).*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A. Denote por d_i o grau de f em x_i. A prova será feita por indução em $d = \max\{d_1, \ldots, d_n\} > 0$.

Se $d = 1$, então cada x_i aparece em cada monômio de f no máximo uma vez. Observe que x_i pode não aparecer em cada monômio de f. Então f não é necessariamente multilinear. Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda x_1 \cdots x_m$, onde λ é um escalar não-nulo, é um monômio de f de grau minimal. Então $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ é uma identidade multilinear não-nula de grau menor ou igual ao grau de f.

Suponha que $d > 1$. Sem perda de generalidade suponha que existe $k \leq n$ tal que $d_k = \cdots = d_n = d$ e $d_i < d$ para $i < k$. Defina um novo polinômio que envolve uma variável adicional $g = g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ por

$$g := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}).$$

Note que g é também uma identidade de A. Vamos escrever

$$f = \sum_i \lambda_i w_i,$$

onde os w_i's são monômios de f (distintos entre si) e os λ_i's são escalares não-nulos. Então g pode ser escrito como

$$g = \sum_i \lambda_i g_i,$$

onde g_i é obtido a partir de w_i da mesma forma como g foi obtido a partir de f. Se x_n não aparece em w_i, então $g_i = -w_i$. Se x_n aparece apenas uma vez em w_i, então $g_i = 0$. Se x_n aparece pelo menos duas vezes em w_i, então g_i é a soma de todos os possíveis monômios obtidos pela substituição de pelo menos um, mas não todos, dos x_n's em w_i por x_{n+1}. Assim, se em qualquer um desses monômios substituirmos x_{n+1} por x_n, então temos novamente o monômio w_i. Portanto, os monômios que aparecem em g_i são diferentes dos que aparecem em $g_{i'}$, se $i' \neq i$. Como $d > 1$, existem índices i tais que x_n aparece pelo menos duas vezes em w_i. Isso mostra que $g \neq 0$.

As seguintes conclusões podem ser obtidas a partir do parágrafo anterior:

i) g é uma identidade não-nula de A.

ii) O grau de g é menor ou igual ao grau de f.

iii) Para $j = 1, \ldots, n-1$, o grau de g em x_j é menor ou igual a d_j

iv) O grau de g em x_n e x_{n+1} é $d-1$.

Repetindo esse processo, primeiro com g no lugar de f e x_{n-1} no lugar de x_n e, em seguida, com as demais variáveis até x_k, chegaremos em uma situação onde uma identidade não-nula tem grau no máximo $d-1$ em cada variável e usamos a hipótese de indução. $\square$

O processo de construção do polinômio multilinear acima é chamado de *linearização* de f.

Capítulo 2

Identidades Funcionais

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos e vários exemplos de identidades funcionais. O assunto a ser apresentado foi extraído da referência [4].

2.1 Exemplos de Identidades Funcionais

Antes de apresentar a definição formal do que vem a ser uma *identidade funcional*, faremos uma seção com vários exemplos a fim de que o leitor se familiarize com a notação e com o tema.

Dado um anel A, considere o seguinte problema:

Problema: Quais são as funções $E, F : A \longrightarrow A$ tais que

$$E(x)y + F(y)x = 0, \ \forall \ x, y \in A \ ? \tag{2.1}$$

Por um abuso de linguagem, para o momento, chamaremos a expressão (2.1) de *identidade funcional* (ou de maneira abreviada FI, do inglês *functional identities*). Observe que as funções E e F fazem o papel de incógnitas. A teoria de FI estuda as funções que satisfazem certas identidades, como em (2.1).

Vamos dar alguns exemplos de *soluções*, isto é, funções E e F que satisfazem a FI (2.1).

Exemplo 2.1.1. Um exemplo simples de solução para (2.1) é $E = F = 0$. Chamaremos essa solução de *solução standard*. O conceito geral de solução standard de uma FI será fornecido no próximo capítulo.

Exemplo 2.1.2. Se A é um anel comutativo, então $E = Id$ e $F = -Id$, onde Id é a função identidade de A, são soluções da FI (2.1).

De fato,

$$E(x)y + F(y)x = xy - yx = 0, \ \forall\ x, y \in A.$$

Ao longo desta seção, dado um anel A qualquer, denotaremos por $\mathcal{Z}$ o seu centro $\mathcal{Z}(A)$.

Exemplo 2.1.3. Seja A um anel com um ideal central não nulo I. Dado qualquer $c \in I$, as funções $E(x) = -F(x) = cx$ são soluções da FI (2.1).

Com efeito,

$$E(x)y + F(y)x = cxy - cyx = ycx - ycx = 0, \ \forall\ x, y \in A.$$

Note que a penúltima igualdade da expressão acima segue de $cx \in I \subset \mathcal{Z}$ (então $cxy = ycx$) e de $c \in I \subset \mathcal{Z}$ (então $cy = yc$).

A partir da identidade (2.1) pode-se encontrar uma outra identidade que depende apenas de uma das duas funções. Para isso, suponha que A é um anel qualquer. Temos para todos $x, y, z, w \in A$ as seguintes implicações:

$$\begin{aligned}
E(x)y + F(y)x = 0 \quad &\Rightarrow \quad E(x)yz = -F(yz)x \\
&\Rightarrow \quad (E(x)yz)w = -F(yz)xw = E(xw)yz = -F(y)xwz = E(x)ywz \\
&\Rightarrow \quad E(x)yzw - E(x)ywz = 0 \\
&\Rightarrow \quad E(x)y[z, w] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$E(A)A[A, A] = 0. \tag{2.2}$$

Usaremos essa informação nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.1.4. Se A é um anel primo e não comutativo, então a única solução da FI (2.1) é a standard, isto é, $E = F = 0$.

De fato, suponha por absurdo que $E \neq 0$. Então existe $\overline{x} \in A$ tal que $E(\overline{x}) \neq 0$. Dados $y, z \in A$ temos de (2.2) a igualdade

$$E(\overline{x})A[y, z] = 0.$$

Mas como A é primo segue que $E(\overline{x}) = 0$ ou $[y, z] = 0$. Logo $[y, z] = 0$, $\forall\ y, z \in A$. Contradição, pois A não é comutativo. Portanto, $E = 0$.

Fazendo um processo análogo temos que $F = 0$. Basta notar que (2.2) também é válido trocando E por F.

A partir dos exemplos 2.1.2 e 2.1.4, temos que se um anel primo é comutativo então existe uma solução não standard da FI (2.1), e se um anel primo é não comutativo então a única solução da FI (2.1) é a standard.

Exemplo 2.1.5. Sejam A um anel semiprimo e $E,\ F$ soluções de (2.1), onde $E \neq 0$. Se $I = (E(A))$, então I é um ideal central de A. Para provar isso, primeiro mostraremos que

$$[I, A]A[I, A] = 0.$$

Observe que $[I, A] = IA - AI \subseteq I$ pois I é ideal de A. Assim,

$$[I, A]A[I, A] \subseteq IA[A, A].$$

Portanto, a primeira afirmação se resume a mostrar que

$$IA[A, A] = 0.$$

Sabemos que os elementos de I são somas e subtrações de elementos da forma asb, as, sb e s, onde $a, b \in A$ e $s \in E(A)$. Mostraremos apenas que $asbr[p, q] = 0$, onde $a, b, r, p, q \in A$ e $s \in E(A)$. Como por (2.2) temos $sbr[p, q] = 0$, segue o desejado. Procedendo analogamente para os demais casos, temos que $IA[A, A] = 0$.

Agora, para provar que I é um ideal central de A, basta mostrar que $[I, A] = 0$. Dado $x \in [I, A]$, de $[I, A]A[I, A] = 0$ temos $xAx = 0$. Como A é semiprimo, segue que $x = 0$.

Fazendo um processo análogo para o caso em que $E,\ F$ são soluções de (2.1), onde $F \neq 0$, temos que $J = (F(A))$ é também um ideal central de A.

Dos exemplos 2.1.3 e 2.1.5 podemos concluir que um anel semiprimo contém um ideal central não nulo se, e somente se, existe uma solução não standard de (2.1) para esse anel.

Exemplo 2.1.6. Seja $A = M_n(C)$, $n \geq 2$, onde C é um anel unitário comutativo. A única solução da FI (2.1) é a standard, isto é, $E = F = 0$.

De fato, sejam $i \neq j$, onde $1 \leq i, j \leq n$. De (2.2) temos para todo $x \in A$ o seguinte:

$$E(x)e_{ij}[e_{ji}, e_{ii}] = E(x)e_{ii} = 0.$$

Logo,

$$E(x) = E(x)Id_n = E(x)e_{11} + E(x)e_{22} + ... + E(x)e_{nn} = 0,$$

concluindo que $E = 0$. De maneira análoga concluímos que $F = 0$.

Dado um anel A, considere agora o seguinte problema:

Problema: Quais são as funções $E, F : A \longrightarrow A$ tais que

$$(\ E(x)y + F(y)x)\ ) \in \mathcal{Z},\ \forall\ x, y \in A\ ? \tag{2.3}$$

Por um abuso de linguagem, chamamos a expressão (2.3) também de identidade funcional. Observe que esta é equivalente a identidade funcional

$$[E(x)y + F(y)x, z] = 0,\ \forall\ x, y, z \in A.$$

Uma solução da FI (2.3) é dada por $E = F = 0$, também chamada de solução standard de tal FI.

Antes de prosseguir, faremos uma pausa e falaremos um pouco do polinômio característico de uma matriz. Isso será necessário para estudar a identidade funcional (2.3) em matrizes com entradas num anel comutativo e para outras situações. Seja C um anel comutativo e considere $B \in M_n(C)$. O polinômio em $C[\lambda]$ definido por

$$p_B(\lambda) = \det(\lambda Id_n - B)$$

é chamado de *polinômio característico* de B. Embora o Teorema de Cayley-Hamilton seja enunciado para matrizes com entradas num corpo, ele pode ser generalizado para B.

Teorema 2.1.7 (Cayley-Hamilton)**.** *Seja C um anel comutativo e considere $B \in M_n(C)$. Se $p_B(\lambda)$ é o polinômio característico de B, então $p_B(B) = 0$.*

Demonstração. Se C é um domínio comutativo, então podemos mergulhar C no seu corpo de frações K. Como o resultado é válido para $M_n(K)$, temos o resultado provado neste caso. Considere o anel de polinômios comutativo

$$\mathbb{Z}[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}]$$

nas variáveis $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$. Como este anel é um domínio comutativo, temos que

$$p_{\overline{B}}(\overline{B}) = 0$$

onde $\overline{B} = (x_{ij})_{ij}$. Se C é um anel comutativo qualquer e $B = (b_{ij})_{ij} \in M_n(C)$, então $p_B(B)$ é exatamente $p_{\overline{B}}(\overline{B})$ quando trocamos as variáveis x_{ij} por b_{ij}. Logo, $p_B(B) = 0$. $\square$

Exemplo 2.1.8. Seja $A = M_n(C)$, onde C é um anel comutativo unitário. Existe uma solução não standard de (2.3) se, e somente se, $1 \leq n \leq 2$.

Vamos verificar tal afirmação:

i) Para $n = 1$ temos $A = C$. Logo, $E, F : C \longrightarrow C$ definidas por $E = Id$ e $F = -Id$ formam uma solução não standard da FI.

ii) Para $n = 2$ temos $A = M_2(C)$. Se $x \in A$, o polinômio característico de x é

$$p(\lambda) = \det(\lambda(Id_2) - x) = \lambda^2 - tr(x)\lambda + det(x).$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se $p(x) = 0$ e valem as implicações

$$\begin{aligned} p(x) = x^2 - tr(x)x + det(x)Id_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - tr(x)x = -det(x)Id_2 \in \mathcal{Z} \\ &\Rightarrow \quad [x^2 - tr(x)x, z] = 0, \ \forall \ x, z \in A. \end{aligned}$$

Substituindo x por $x + y$ na última igualdade tem-se

$$[(x+y)^2 - tr(x+y)(x+y), z] = 0.$$

Abrindo as contas e agrupando os fatores, temos

$$[x^2 - tr(x)x, z] + [y^2 - tr(y)y, z] + [(x - tr(x)Id_2)y + (y - tr(y)Id_2)x, z] = 0,$$

Como os dois primeiros comutadores são nulos, segue que

$$[(x - tr(x)Id_2)y + (y - tr(y)Id_2)x, z] = 0.$$

Assim, $E, F : A \longrightarrow A$ dadas por $E(x) = F(x) = x - tr(x)Id_2$ formam uma solução não standard de (2.3) para A.

iii) Suponha $n \geq 3$. Defina

$$\pi(x, y) = E(x)y + F(y)x$$

e suponha que $\pi(x, y) \in \mathcal{Z}$, para todo $x, y \in A$. Queremos mostrar que $E = F = 0$. Primeiro faremos isso para E.

Para todo $x, y, t \in A$ temos

$$\pi(xt, y) - \pi(x, y)t = E(xt)y + F(y)xt - E(x)yt - F(y)xt = E(xt)y - E(x)yt.$$

Agora,

$$\begin{aligned} [E(xt)y - E(x)yt, t] &= [\pi(xt, y) - \pi(x, y)t, t] \\ &= [\pi(xt, y), t] - [\pi(x, y)t, t] \\ &= -[\pi(x, y)t, t] \\ &= -[\pi(x, y), t]t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, abrindo a expressão $[E(xt)y - E(x)yt, t] = 0$ teremos

$$-E(x)yt^2 + (tE(x) + E(xt))yt - tE(xt)y = 0.$$

Dado $1 \leq i \leq n$, substitua $t = e_{12} + e_{23}$ e $y = e_{i1}$ na expressão acima e depois multiplique a direita por e_{3i}. O resultado será $-E(x)e_{ii} = 0$. Assim, para todo $x \in A$ temos

$$E(x) = E(x)Id_n = E(x)e_{11} + \ldots + E(x)e_{nn} = 0 + \ldots + 0 = 0.$$

De maneira análoga mostra-se que $F = 0$.

Proposição 2.1.9. *Seja C um anel comutativo e $A = M_n(C)$. Existem funções k-aditivas $\zeta_k : A^k \to C$ tais que*

$$x^n + \zeta_1(x)x^{n-1} + \zeta_2(x, x)x^{n-2} + \ldots + \zeta_n(x, \ldots, x)Id_n = 0$$

para todo $x \in A$.

Demonstração. Para facilitar a notação, faremos com detalhes o caso $n = 2$ e depois o caso geral. Sejam

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de x é dado por

$$p(\lambda) = \det(\lambda Id_2 - x) = \lambda^2 - (x_{11} + x_{22})\lambda + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}).$$

Definindo $\zeta_1 : A \to C$ e $\zeta_2 : A^2 \to C$ por

$$\zeta_1(x) = -(x_{11} + x_{22}) \quad \text{e} \quad \zeta_2(x, y) = (x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21}),$$

segue do Teorema de Cayley-Hamilton que

$$x^2 + \zeta_1(x)x + \zeta_2(x, x)Id_2 = 0$$

para todo $x \in A$.

Considere agora o caso geral $n \geq 1$. Se $x = (x_{ij})_{ij} \in A = M_n(C)$, então podemos escrever seu polinômio característico como

$$p(\lambda) = \lambda^n + u_1(x)\lambda^{n-1} + u_2(x)\lambda^{n-2} + \ldots + u_{n-1}(x)\lambda + u_n(x),$$

onde $u_k(x)$ é formado por somas ou subtrações de elementos do tipo

$$x_{i_1j_1}x_{i_2j_2} \ldots x_{i_kj_k}.$$

Vamos denotar, sem muito rigor matemático,

$$u_k(x) = \sum \pm x_{i_1j_1}x_{i_2j_2} \ldots x_{i_kj_k}.$$

Defina a função $\zeta_k : A^k \to C$ da seguinte maneira: se $x_1 = (x^1_{ij})_{ij}, x_2 = (x^2_{ij})_{ij}, \ldots, x_k = (x^k_{ij})_{ij} \in A$, então

$$\zeta_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum \pm x^1_{i_1j_1}x^2_{i_2j_2} \ldots x^k_{i_kj_k}.$$

Temos que ζ_k é k-aditiva, $\zeta_k(x, x, \ldots, x) = u_k(x)$ e pelo Teorema de Cayley-Hamilton o resultado está provado. □

Chamamos a atenção do leitor para o fato que na demonstração da proposição acima as funções ζ_1 e ζ_n satisfazem

$$\zeta_1(x) = -\mathrm{tr}(x) \;\text{ e }\; \zeta_n(x, \ldots, x) = (-1)^n \det(x)$$

para todo $x \in M_n(C)$.

A proposição anterior será útil na análise do problema abaixo:

Problema: Dado um anel A, quais são as funções $E, F, G : A^2 \longrightarrow A$ tais que

$$(\ E(x,y)z + F(x,z)y + G(y,z)x\ ) \in \mathcal{Z},\ \forall\ x, y, z \in A\ ? \tag{2.4}$$

Por um abuso de linguagem, chamamos a expressão (2.4) também de identidade funcional. Uma solução da FI (2.4) é dada por $E = F = 0$, também chamada de solução standard de tal FI.

Para o caso matricial, temos uma resposta para o problema acima:

Exemplo 2.1.10. Seja $A = M_n(C)$, onde C é um anel comutativo unitário. Existe uma solução não standard de (2.4) se, e somente se, $1 \leq n \leq 3$.

Vamos verificar tal afirmação:

i) Para $n = 1$ temos $A = C$. Logo, E, F, G definidas por

$$E(x,y) = 0,\ F(x,z) = x \text{ e } G(y,z) = -y$$

formam uma solução não standard da FI.

ii) Para $n = 2$ temos $A = M_2(C)$. Provamos que a FI

$$\overline{F}(x)y + \overline{G}(y)x \in \mathcal{Z}, \forall x, y \in A,$$

admite uma solução não standard, onde $\overline{F}, \overline{G} : A \to A$. Com base nessas soluções temos soluções não standard de (2.4) definidas por

$$E(x,y) = 0,\ F(x,z) = \overline{F}(x) \text{ e } G(y,z) = \overline{G}(y).$$

iii) Para $n = 3$ temos $A = M_3(C)$. Pela Proposição 2.1.9 existem funções k-aditivas $\zeta_k : A^k \to C$ tais que

$$x^3 + \zeta_1(x)x^2 + \zeta_2(x,x)x + \zeta_3(x,x,x)Id_3 = 0, \forall x \in A.$$

Logo,

$$x^3 + \zeta_1(x)x^2 + \zeta_2(x,x)x = -\zeta_3(x,x,x)Id_3 \in \mathcal{Z}, \forall x \in A.$$

Linearizando a expressão acima obteremos

$$E(x,y)z + E(x,z)y + E(y,z)x \in \mathcal{Z}, \ \forall \ x,y,z \in A,$$

onde $E : A^2 \longrightarrow A$ é dada por

$$E(x,y) = xy + yx + \zeta_1(x)y + \zeta_1(y)x + \zeta_2(x,y)Id_3 + \zeta_2(y,x)Id_3. \tag{2.5}$$

Note que $E \neq 0$, pois

$$\begin{aligned} E(e_{12},e_{23}) &= e_{13} + \zeta_1(e_{12})e_{23} + \zeta_1(e_{23})e_{12} + (\zeta_2(e_{12},e_{23}) + \zeta_2(e_{23},e_{12}))Id_3 \\ &= e_{13} + (\zeta_2(e_{12},e_{23}) + \zeta_2(e_{23},e_{12}))Id_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Observe que usamos na igualdade acima os seguintes fatos:

$$\zeta_1(e_{12}) = \mathrm{tr}(e_{12}) = 0 \text{ e } \zeta_1(e_{23}) = \mathrm{tr}(e_{23}) = 0.$$

Sendo assim, temos que a FI (2.4) tem uma solução não standard para $A = M_3(C)$, onde $E = F = G$ como em (2.5).

iv) Para $n \geq 4$ mostraremos que a FI admite apenas a solução standard. Primeiro vamos encontrar, a partir de (2.4), uma identidade funcional que dependa apenas de uma das três funções, no caso E. Defina

$$\pi(x,y,z) = E(x,y)z + F(x,z)y + G(y,z)x,$$

e suponha que $\pi(x,y,z) \in \mathcal{Z}, \ \forall \ x,y,z \in A$. Então para todo $t \in A$ temos as 4 igualdades:

$$[\pi(xt,yt,z),t] = 0, \ [\pi(xt,y,z)t,t] = 0, \ [\pi(x,yt,z)t,t] = 0 \text{ e } [\pi(x,y,z)t^2,t] = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\pi(xt,yt,z) - \pi(xt,y,z)t - \pi(x,yt,z)t + \pi(x,y,z)t^2 = \\ &E(xt,yt)z - (E(xt,y) + E(x,yt))zt + E(x,y)zt^2 \in \mathcal{Z}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Então,

$$[E(xt,yt)z - (E(xt,y) + E(x,yt))zt + E(x,y)zt^2, t] = 0$$

e após agrupar os termos,

$$E(x,y)zt^3 + E_1(x,y,t)zt^2 + E_2(x,y,t)zt + E_3(x,y,t)z = 0, \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_1(x,y,t) &= -E(xt,y) - E(x,yt) - tE(x,y),\\
E_2(x,y,t) &= +E(xt,yt) + tE(xt,y) + tE(x,yt),\\
E_3(x,y,t) &= -tE(xt,yt).
\end{aligned}$$

Assim, temos uma identidade que segue de (2.4) e depende apenas da função E. Fixe $1 \leq i \leq n$. Substituindo na equação (2.7)

$$t = e_{12} + e_{23} + e_{34},\ \ z = e_{i1}$$

e depois multiplicando por e_{4i} à direita tem-se

$$E(x,y)e_{ii} = 0.$$

Logo,

$$E(x,y) = E(x,y)Id_n = E(x,y)e_{11} + \ldots + E(x,y)e_{nn} = 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Procedendo analogamente também temos $F = G = 0$.

Dado um anel A, o problema que vamos considerar envolverá uma identidade que é uma extensão da FI (2.1).

Problema: Seja a um elemento não nulo fixado em A. Quais são as funções $E, F : A \longrightarrow A$ tais que

$$E(x)ya + F(y)xa = 0,\ \forall\ x, y \in A? \tag{2.8}$$

Por um abuso de linguagem, para o momento, chamaremos tais identidades de *identidades funcionais generalizadas*(ou de maneira abreviada GFI, do inglês *generalized functional identities*). Nessa identidade, as funções E e F também fazem o papel de incógnitas.

Uma solução da GFI (2.8) é dada por $E = F = 0$, também chamada de solução standard dessa GFI.

Observe os seguintes casos:

i) se $a = 1$ então a identidade (2.8) é a própria identidade (2.1).

ii) se a é invertível então multiplicando (2.8) à direita por a^{-1} temos a identidade (2.1).

Sendo assim, essas duas situações não precisam ser consideradas. Portanto, vamos considerar o caso em que a não é invertível. Faremos alguns exemplos que envolvem a GFI (2.8).

Exemplo 2.1.11. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $A = M_n(C)$, onde C é um anel comutativo unitário e seja $a = e_{11}$. Uma solução para a GFI (2.8) é dada por

$$E(x) = -F(x) = x_{11}e_{11},$$

onde $x = (x_{ij})_{ij} \in A$. Com efeito,

$$E(x)ya + F(y)xa = x_{11}e_{11}ye_{11} - y_{11}e_{11}xe_{11} = (x_{11}y_{11} - y_{11}x_{11})e_{11} = 0.$$

Exemplo 2.1.12. Seja A um anel e $a \in A$ um elemento tal que

$$aAa = \mathcal{Z}a \neq 0. \tag{2.9}$$

Então $E(x) = -F(x) = axa$ é uma solução não standard da GFI (2.8).

De fato,

$$E(x)ya + F(y)xa = axaya - ayaxa.$$

Mas de $axa \in aAa = \mathcal{Z}a$, existe $z \in \mathcal{Z}$ tal que $axa = za$. Logo,

$$E(x)ya + F(y)xa = zaya - ayza \overset{z\in\mathcal{Z}}{=} 0.$$

A seguir vamos mostrar que a recíproca do exemplo anterior é válida se A é um anel unitário simples. Relembramos que se um anel A é simples e unitário então ele é primo.

Exemplo 2.1.13. Seja A um anel unitário simples. Se a GFI (2.8) admite uma solução não standard, então $aAa = \mathcal{Z}a \neq 0$.

De fato, suponhamos sem perda de generalidade que $F \neq 0$. Assim, da identidade (2.8) tem-se

$$E(x)yaza = -F(yaz)xa, \ \forall\ x, y, z \in A.$$

Por outro lado,

$$E(x)yaza = -F(y)xaza, \ \forall\ x, y, z \in A.$$

Das duas equações acima, obtém-se

$$F(yaz)xa = F(y)xaza, \ \forall\ x, y, z \in A. \tag{2.10}$$

Como $F \neq 0$, existe $y_0 \in A$ tal que $F(y_0) \neq 0$. Pelo fato de A ser simples, vale a igualdade de ideais $(F(y_0)) = A$. Logo, existem $x_i, y_i \in A$, $(i = 1, \ldots, n)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i F(y_0) y_i = 1.$$

Primeiramente, mostraremos que $aAa \subseteq \mathcal{Z}a$. Para isso, dado $z \in A$, temos para todo $x \in A$ que

$$xaza = \sum_{i=1}^{n} x_i F(y_0) y_i xaza \overset{(2.10)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i F(y_0 az) y_i xa.$$

Fazendo $c = \sum_{i=1}^{n} x_i F(y_0 az) y_i \in A$ temos que

$$xaza = cxa.$$

Assim, para todos $x, y \in A$ valem as implicações

$$c(yx)a = (yx)aza = ycxa \Rightarrow (cy - yc)xa = 0 \Rightarrow [c, y]xa = 0 \Rightarrow [c, A]Aa = 0.$$

Então se $b \in [c, A]$, pela igualdade acima temos

$$bAa = 0 \overset{A \text{ é primo}}{\Rightarrow} b = 0 \text{ ou } a = 0 \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} b = 0.$$

Portanto,

$$[c, A] = 0 \Rightarrow c \in \mathcal{Z}.$$

Logo,

$$xaza = cxa = xca \overset{x=1}{\Rightarrow} aza = ca \in \mathcal{Z}a \Rightarrow aAa \subseteq \mathcal{Z}a.$$

Observe que $aAa \neq 0$, pois se $aAa = 0$ então, como A é primo, teríamos $a = 0$, o que é um absurdo.

Agora, como A é simples e unitário então $\mathcal{Z}$ é um corpo. Assim A pode ser visto como $\mathcal{Z}$-espaço vetorial. Temos $\dim_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}a) = 1$. Como aAa é subespaço de $\mathcal{Z}a$ e $aAa \neq 0$, temos $\dim_{\mathcal{Z}}(aAa) = 1$. Portanto, $aAa = \mathcal{Z}a$, como desejávamos mostrar.

Uma pergunta natural que surge a partir dos exemplos anteriores é a seguinte: Quais são os anéis unitários simples A que contêm elementos satisfazendo (2.9)? Pode ser mostrado que tais anéis A só podem ser anéis de matrizes com entradas em algum corpo. Omitimos a demonstração e citamos [4, Exemplo 1.4] para mais detalhes.

Dado um anel A, considere agora o seguinte problema:

Problema: Quais são as funções $F : A \longrightarrow A$ tais que

$$F(x)y + F(y)x = yF(x) + xF(y), \ \forall x, y \in A? \tag{2.11}$$

A expressão (2.11) também será chamada, por abuso de linguagem, de identidade funcional. Note que esta é equivalente a identidade funcional

$$[F(x), y] - [x, F(y)] = 0, \ \forall \ x, y \in A.$$

Observe que toda função da forma

$$F(x) = \lambda x + \mu(x), \tag{2.12}$$

onde $\lambda \in \mathcal{Z}$ e $\mu : A \longrightarrow \mathcal{Z}$, é uma solução da FI (2.11). De fato,

$$\begin{aligned} F(x)y + F(y)x &= \lambda xy + \mu(x)y + \lambda yx + \mu(y)x \\ &= x\lambda y + y\mu(x) + y\lambda x + x\mu(y) \\ &= y(\lambda x + \mu(x)) + x(\lambda y + \mu(y)) \\ &= yF(x) + xF(y). \end{aligned}$$

Chamaremos essa solução de *solução standard* para a FI (2.11) e voltaremos a falar dela após algumas definições.

Definição 2.1.14. Seja A um anel e $S \subseteq A$. Uma função $F : A \longrightarrow A$ é dita:

a) **comutativa** em S se $[F(x), x] = 0$ para todo $x \in S$.

b) **centralizada** em S se $[F(x), x] \in \mathcal{Z}$ para todo $x \in S$.

Exemplo 2.1.15. Se a função F é aditiva e comutativa em A então tem-se (2.11).

De fato, como F é comutativa em A temos $[F(x), x] = 0$ para todo $x \in A$. *Linearizando* essa expressão tem-se as implicações abaixo para todo $x, y \in A$:

$$\begin{aligned} [F(x+y), x+y] = 0 \ &\Rightarrow \ [F(x) + F(y), x+y] = 0 \\ &\Rightarrow \ [F(x), x] + [F(x), y] + [F(y), x] + [F(y), y] = 0 \\ &\Rightarrow \ [F(x), y] + [F(y), x] = 0. \end{aligned}$$

Na sequência, vamos fazer um exemplo de um anel em que (2.11) tem apenas a solução standard. Mas para esse exemplo necessitamos de algumas definições.

Definição 2.1.16. Seja A um anel.

a) Uma função aditiva $\delta : A \longrightarrow A$ é uma **derivação** se

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y), \ \forall x, y \in A.$$

b) Uma função biaditiva $\Delta : A^2 \longrightarrow A$ é chamada de **biderivação** se ela é uma derivação em cada coordenada, isto é, para todo $y \in A$ as aplicações $x \mapsto \Delta(x, y)$ e $x \mapsto \Delta(y, x)$ são derivações.

Exemplo 2.1.17. Seja A um anel e $\lambda \in \mathcal{Z}$. A função $\Delta : A^2 \longrightarrow A$ definida por

$$\Delta(x, y) = \lambda[x, y]$$

é uma biderivação.

Com efeito, definimos para cada $y \in A$ fixado, uma função $\delta_y : A \longrightarrow A$ por $\delta_y(x) = \lambda[x, y]$. Temos que

$$\delta_y(xz) = \lambda[xz, y] = \lambda(x[z, y] + [x, y]z) = (\lambda[x, y])z + x(\lambda[z, y]) = \delta_y(x)z + x\delta_y(z).$$

Portanto, δ_y é uma derivação. Analogamente, podemos definir para $y \in A$ fixado, uma função $\gamma_y : A \longrightarrow A$ por $\gamma_y(x) = \lambda[y, x]$ e mostrar que γ_y é também uma derivação.

Portanto, Δ é uma biderivação.

Definição 2.1.18. Seja A um anel e $\lambda \in \mathcal{Z}$. As funções $\Delta : A^2 \longrightarrow A$ definidas por

$$\Delta(x, y) = \lambda[x, y]$$

são chamadas de *biderivações internas.*

Em anéis comutativos a única biderivação interna é a função nula. Sendo assim, toda biderivação que não é a função nula é não interna. Por exemplo, no anel dos polinômios $\mathbb{F}[x]$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, a função Δ definida por

$$\Delta(f, g) = f'g',$$

onde f' é a derivada formal do polinômio f, é uma biderivação não interna. Já em alguns anéis não comutativos todas as biderivações são internas. Vamos analisar este caso.

Exemplo 2.1.19. Seja A um anel não comutativo em que todas as biderivações são internas. Então (2.11) tem apenas a solução standard.

De fato, temos que a FI (2.11) é equivalente a $[F(x), y] = [x, F(y)]$, para todos $x, y \in A$. Defina $\Delta : A^2 \longrightarrow A$ por $\Delta(x, y) = [F(x), y]$.

Afirmação: Δ é uma biderivação.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \Delta(xz, y) &= [F(xz), y] = [xz, F(y)] = [x, F(y)]z + x[z, F(y)] \\ &= [F(x), y]z + x[F(z), y] = \Delta(x, y)z + x\Delta(z, y). \end{aligned}$$

e

$$\Delta(x, yz) = [F(x), yz] = [F(x), y]z + y[F(x), z] = \Delta(x, y)z + y\Delta(x, z).$$

Assim, a afirmação está provada.

Como por hipótese todas as biderivações no anel são internas, existe $\lambda \in \mathcal{Z}$ tal que para todos $x, y \in A$ valem a premissa e as implicações:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = \lambda[x, y] &\Rightarrow [F(x), y] = [\lambda x, y] \\ &\Rightarrow [F(x) - \lambda x, y] = 0 \\ &\Rightarrow \mu(x) = F(x) - \lambda x \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.11) tem apenas a solução standard.

Com base no exemplo anterior, vamos encontrar um anel A tal que toda biderivação de A é interna. Para tal, vamos deduzir primeiramente uma identidade a partir de um anel A qualquer e uma biderivação Δ arbitrária.

Como Δ é uma derivação na primeira coordenada tem-se

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, yv)u + x\Delta(u, yv).$$

E como Δ também é derivação na segunda coordenada tem-se a premissa e implicação válidas:

$$\Delta(xu, yv) = (\Delta(x, y)v + y\Delta(x, v))u + x(\Delta(u, y)v + y\Delta(u, v)) \Rightarrow$$

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, y)vu + y\Delta(x, v)u + x\Delta(u, y)v + xy\Delta(u, v). \tag{2.13}$$

Por outro lado, usando primeiro o fato que Δ é derivação na segunda coordenada e depois na primeira coordenada, tem-se

$$\Delta(xu, yv) = \Delta(x, y)uv + x\Delta(u, y)v + y\Delta(x, v)u + yx\Delta(u, v). \tag{2.14}$$

Das equações (2.13) e (2.14) tem-se

$$\Delta(x, y)(uv - vu) + (yx - xy)\Delta(u, v) = 0$$

e portanto

$$\Delta(x, y)[u, v] = [x, y]\Delta(u, v),$$

para todos $x, y, u, v \in A$. Substituindo v por zv e usando as relações $[u, zv] = [u, z]v + z[u, v]$ e $\Delta(u, zv) = \Delta(u, z)v + z\Delta(u, v)$ tem-se

$$\Delta(x, y)[u, zv] = [x, y]\Delta(u, zv) \Rightarrow$$

$$\Delta(x, y)[u, z]v + \Delta(x, y)z[u, v] = [x, y]\Delta(u, z)v + [x, y]z\Delta(u, v) \Rightarrow$$

$$\Delta(x, y)z[u, v] = [x, y]z\Delta(u, v),\ \forall\ x, y, z, u, v \in A. \tag{2.15}$$

Portanto, se A é um anel qualquer e Δ é uma biderivação então a igualdade (2.15) é válida.

Exemplo 2.1.20. Se A é um anel unitário e $([A, A]) = A$ então toda biderivação de A é interna.

De fato, como A é unitário e $([A, A]) = A$ existem $z_i, u_i, v_i, w_i \in A$, com $i = 1, \ldots, n$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} z_i[u_i, v_i]w_i = 1. \tag{2.16}$$

Seja Δ uma biderivação em A. Então

$$\Delta(x, y) \overset{(2.16)}{=} \sum_{i=1}^{n} \Delta(x, y)z_i[u_i, v_i]w_i \overset{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} [x, y]z_i\Delta(u_i, v_i)w_i,$$

ou seja,

$$\Delta(x, y) = [x, y] \cdot \lambda,\ \forall\ x, y \in A \tag{2.17}$$

onde $\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i\Delta(u_i, v_i)w_i \in A$.

Vamos mostrar que $\lambda \in \mathcal{Z}$ para concluir que Δ é uma biderivação interna. Temos para todos $x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} [x,y]z\lambda + y[x,z]\lambda &= [x,yz]\lambda \overset{(2.17)}{=} \Delta(x,yz) \\ &= \Delta(x,y)z + y\Delta(x,z) \overset{(2.17)}{=} [x,y]\lambda z + y[x,z]\lambda \\ &\Rightarrow [x,y]z\lambda - [x,y]\lambda z = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$[x,y][z,\lambda] = 0, \ \forall x,y,z \in A. \tag{2.18}$$

Agora substituindo z por zw tem-se

$$[x,y][zw,\lambda] = 0 \Rightarrow [x,y][z,\lambda]w + [x,y]z[w,\lambda] = 0 \overset{(2.18)}{\Rightarrow} [x,y]z[w,\lambda] = 0$$

para todos $x, y, z, w \in A$. Logo tem-se

$$[A,A]A[\lambda,A] = 0.$$

Em particular, para os z_i, u_i, v_i, w_i tomados no início do exemplo tem-se

$$[u_i,v_i]w_i[\lambda,A] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i[u_i,v_i]w_i[\lambda,A] = 0 \overset{(2.16)}{\Rightarrow} [\lambda,A] = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathcal{Z}.$$

Portanto, Δ é uma biderivação interna no anel A.

2.2 Definição formal de Identidade Funcional

Nesta seção apresentaremos a definição formal do que vem a ser uma identidade funcional, solução de tal identidade e exemplos. Além disso, vamos também introduzir dois problemas que serão discutidos de forma mais geral nas próximas seções.

Primeiramente, apresentaremos a definição de identidade polinomial para um "anel". Mas antes vamos fazer uma observação: na seção 1.2, definimos $\mathbb{F}\langle X\rangle$, a álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X. Podemos definir de maneira análoga $\mathbb{Z}\langle X\rangle$, a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre, livremente gerada por X.

Definição 2.2.1. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre, livremente gerada por X. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}\langle X\rangle$ um polinômio tal que ao menos um de seus monômios de grau mais alto tem coeficiente 1. Seja R um subconjunto não vazio de um anel A. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** em R se

$$f(r_1, \ldots, r_n) = 0,$$

para todos $r_1, \ldots, r_n \in R$. Neste caso, dizemos que R satisfaz a identidade polinomial f. Os anéis que satisfazem identidades polinomiais, isto é, quando existe f acima para $R = A$, são chamados **PI-anéis**.

A seguir, vamos definir o conceito de identidade funcional (FI) modificando apropriadamente o conceito de identidade polinomial (PI).

Definição 2.2.2. Sejam $X = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável e $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre, livremente gerada por X. Seja

$$f = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}\langle X\rangle,$$

onde $m \geq 1$ e $n \geq 0$, um polinômio tal que ao menos um de seus monômios de grau mais alto tem coeficiente 1. Seja R um subconjunto não vazio de um anel A e considere funções $F_i : R^m \longrightarrow A$, $i = 1, \ldots, n$. Dizemos que f é uma **identidade funcional (FI) em** R **com as funções** $F_1, \ldots, F_n$ se

$$f(r_1, \ldots, r_m, F_1(r_1, \ldots, r_m), \ldots, F_n(r_1, \ldots, r_m)) = 0$$

para todos $r_1, \ldots, r_m \in R$. Neste caso, dizemos ainda que as funções $F_1, \ldots, F_n$ são **soluções** desta identidade funcional.

Na sequência faremos alguns exemplos de FI's.

Exemplo 2.2.3. Note que a identidade (2.4) é equivalente a

$$[E(x, y)z + F(x, z)y + G(y, z)x, u] = 0, \ \forall\, x, y, z, u \in A.$$

Assim, pode-se dizer que o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) = [y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3, x_4]$$

é uma FI em A com funções F_1, F_2 e F_3 (soluções) definidas por

$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_2, x_3)$, $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x_1, x_3)$ e $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = E(x_1, x_2)$.

Exemplo 2.2.4. Sabemos que a identidade (2.11) é equivalente a

$$[x, F(y)] - [F(x), y] = 0, \ \forall \ x, y \in A.$$

Logo, essa identidade pode ser expressa pela FI

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = [x_1, y_1] - [y_2, x_2]$$

com as funções $F_1(x_1, x_2) = F(x_2)$ e $F_2(x_1, x_2) = F(x_1)$ como soluções.

Exemplo 2.2.5. Se F é uma função comutativa em A então $[F(x), x] = 0$, para todo $x \in A$, e isso é o mesmo que dizer que

$$f(x_1, y_1) = [y_1, x_1]$$

é uma FI em A com a própria função F como solução.

O próximo exemplo relacionará o conceito de PI com o de FI.

Exemplo 2.2.6. Qualquer PI pode ser vista como uma FI.

De fato, seja A um anel, $R \subseteq A$, $R \neq \emptyset$ e $g = g(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$ uma PI em R. Podemos escrever g da seguinte forma:

$$g = f_1 x_1 + \ldots + f_m x_m,$$

onde $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$. Denotando por $F_i : R^m \longrightarrow A$ a função polinomial associada a f_i, para $i = 1, \ldots, m$ e considerando o polinômio

$$f = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) = y_1 x_1 + \ldots + y_m x_m,$$

temos que a PI g pode ser vista como a FI f com funções $F_1, \ldots, F_m$ como soluções.

Para esclarecer o exemplo acima, daremos um outro exemplo de uma PI que pode ser expressa como uma FI.

Exemplo 2.2.7. Um anel A satisfaz uma identidade polinomial multilinear de grau 3 se

$$\sum_{\pi \in S_3} n_\pi x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} x_{\pi(3)} = 0$$

para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ e os n_π's são inteiros fixados com pelo menos um n_π igual a 1. Podemos escrever a identidade acima como

$$E(x_1, x_2)x_3 + F(x_1, x_3)x_2 + G(x_2, x_3)x_1 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2) &= n_{Id}x_1x_2 + n_{(12)}x_2x_1, \\ F(x_1, x_3) &= n_{(23)}x_1x_3 + n_{(132)}x_3x_1, \\ G(x_2, x_3) &= n_{(123)}x_2x_3 + n_{(13)}x_3x_2. \end{aligned}$$

Note que este é um caso especial da FI

$$E(x, y)z + F(x, z)y + G(y, z)x \in \mathcal{Z}$$

onde E, F, G são funções arbitrárias.

Agora, vamos descrever os tipos mais fundamentais de identidades funcionais que podem ser completamente analisadas. Elas correspondem ao polinômio

$$\sum_i y_{1i}x_i + \sum_j x_j y_{2j}.$$

Para tal, vamos antes introduzir algumas notações. Seja A um anel e $m \in \mathbb{N}$. Para $x_1, \ldots, x_m \in A$, escrevemos

$$\overline{x}_m = (x_1, \ldots, x_m) \in A^m.$$

Definimos $A^0 = \{0\}$. Além disso, para todo $1 \leq i \leq m$, escrevemos

$$\overline{x}^i_m = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in A^{m-1}$$

e para todos $1 \leq i < j \leq m$

$$\overline{x}^{ij}_m = \overline{x}^{ji}_m = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in A^{m-2}.$$

Após as notações definidas, sejam $I, J \subseteq \mathbb{N}$ subconjuntos finitos e $m \in \mathbb{N}$ tal que $I, J \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Sejam também $E_i, F_j : A^{m-1} \longrightarrow A$, onde $i \in I$ e $j \in J$ funções arbitrárias (uma função definida em $A^0 = \{0\}$ será considerada como um elemento fixo em A). Estamos interessados em FI's envolvendo expressões do tipo

$$\sum_{i \in I} E_i(\overline{x}^i_m)x_i \quad \text{e} \quad \sum_{j \in J} x_j F_j(\overline{x}^j_m).$$

Mais precisamente, as FI's básicas que vamos considerar são

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i + \sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) = 0, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m \tag{2.19}$$

e

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i + \sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) \in \mathcal{Z}, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m \tag{2.20}$$

onde $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$. Note que os casos em que $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$ não estão excluídos, nestes casos, a soma sobre o $\emptyset$ é 0. Por exemplo, quando $J = \emptyset$, (2.19) se reduz a

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i = 0, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.21}$$

Nas FI's da seção anterior temos alguns exemplos dessas FI's básicas. A FI (2.11) é um exemplo de (2.19) e a FI (2.4) é um exemplo de (2.20) (com $J = \emptyset$).

A respeito das FI's (2.19) e (2.20), podemos dizer que existem soluções "óbvias" que são chamadas de soluções standards e algumas vezes também podem existir outras soluções devido a particularidade do anel em questão.

Agora vamos nos concentrar (ainda de maneira informal) em encontrar soluções standards de (2.19) e (2.20). Daremos apenas alguns exemplos de casos particulares de soluções standards para essas FI's com o intuito que o leitor se familiarize com o tema.

Exemplo 2.2.8. Seja

$$E_1(x_2, x_3)x_1 + E_2(x_1, x_3)x_2 + x_2F_2(x_1, x_3) + x_3F_3(x_1, x_2) = 0 \tag{2.22}$$

para todo $\overline{x}_3 = (x_1, x_2, x_3) \in A^3$. Neste exemplo temos $I = \{1, 2\}$, $J = \{2, 3\}$ e $m = 3$. Vamos fazer uma análise de como seria uma solução "natural" da FI (2.22). A ideia é definir as funções E_1 e E_2 do modo mais geral possível e definir simultaneamente as funções F_2 e F_3. Por exemplo, a função $x_2p_{12}(x_3)$, onde $p_{12} : A \longrightarrow A$ é uma função arbitrária, poderá ser um somando de E_1, desde que a função $-p_{12}(x_3)x_1$ seja um somando de F_2, pois com isso, os termos $x_2p_{12}(x_3)x_1$ e $-x_2p_{12}(x_3)x_1$ aparecerão na FI (2.22) quando substituirmos as funções E_1 e F_2 e se anularão. Similarmente, $x_3p_{13}(x_2)$, onde $p_{13} : A \longrightarrow A$ é uma função arbitrária, pode ser um somando de E_1, desde que $-p_{13}(x_2)x_1$ seja um somando de F_3. Com esse mesmo raciocínio, $x_3p_{23}(x_1)$ pode ser um somando de E_2 , onde $p_{23} : A \longrightarrow A$ é arbitrária, desde que $-p_{23}(x_1)x_2$ seja um somando de F_3. Além disso, como E_2 e F_2

têm o mesmo índice, E_2 pode conter um somando $\lambda_2(x_1, x_3)$, onde $\lambda_2 : A^2 \longrightarrow \mathcal{Z}$ é uma função arbitrária, desde que $-\lambda_2(x_1, x_3)$ seja um somando de F_2. Observe que E_1 não pode conter um termo central $\lambda_1(x_2, x_3)$, onde $\lambda_1 : A^2 \longrightarrow \mathcal{Z}$, pois $\lambda_1(x_2, x_3)x_1$ não poderia ser cancelado.

Assim, tem-se que uma solução da FI será da forma

$$\begin{aligned} E_1(x_2, x_3) &= x_2 p_{12}(x_3) + x_3 p_{13}(x_2), \\ E_2(x_1, x_3) &= x_3 p_{23}(x_1) + \lambda_2(x_1, x_3), \\ F_2(x_1, x_3) &= -p_{12}(x_3)x_1 - \lambda_2(x_1, x_3), \\ F_3(x_1, x_2) &= -p_{13}(x_2)x_1 - p_{23}(x_1)x_3, \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $p_{12}, p_{13}, p_{23} : A \longrightarrow A$ e $\lambda_2 : A^2 \longrightarrow \mathcal{Z}(A)$ são funções arbitrárias.

Note que a componente λ_2 aparece pois $I \cap J = \{2\}$. Note também que essas funções são soluções da FI em questão independente do anel A considerado. Assim, (2.23) pode ser chamada de *solução standard* de (2.22).

Na equação (2.21), podemos notar que além da possibilidade trivial, quando todas as funções são nulas, não há outras escolhas naturais tais que (2.21) é satisfeito. Portanto, a solução $E_i = 0$, para todo $i \in I$, é a *solução standard* de (2.21).

Considere agora a seguinte situação envolvendo a FI (2.19): dado um anel A, suponha que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que

(a) Sempre que $\max\{|I|, |J|\} \leq d$, (2.19) tem apenas a solução standard.

A pergunta a ser feita é a seguinte: o que pode ser dito sobre a estrutura do anel A?

Exemplo 2.2.9. Se $d = 2$, $|I| = 2$ e $J = \emptyset$ então (2.19) é da forma

$$E_1(x)y + E_2(y)x = 0, \ \forall\, x, y \in A.$$

Se (a) for satisfeito, então A não é anel comutativo. De fato, se A for anel comutativo, definindo $E_1(x) = x$ e $E_2(y) = -y$ tem-se

$$E_1(x)y + E_2(y)x = xy - yx = 0$$

e assim temos uma solução não-standard de (2.19).

Considere agora a condição

(b) Sempre que $\text{máx}\{|I|, |J|\} \leq d-1$, (2.20) tem apenas a solução standard.

Em [3], Brešar construiu um exemplo de um anel que cumpre a propriedade (a) mas não satisfaz a (b). Similarmente, (a) nem sempre segue de (b), ou seja, em geral (a) e (b) são independentes uma da outra, mas em algumas classes importantes de anéis (a) é equivalente a (b).

Exemplo 2.2.10. Seja A um anel simples e unitário que satisfaz a propriedade (a) para $d = 2$. Mostraremos que a propriedade (b) as vezes também é satisfeita. Considere a FI

$$E(y)x + yF(x) = \lambda(x, y) \in \mathcal{Z}, \ \forall \ x, y \in A. \tag{2.24}$$

Como visto no exemplo anterior, temos que A não pode ser anel comutativo. Logo, $\dim_{\mathcal{Z}} A \geq 2$ e existe um elemento $t \in A$ tal que $\{1, t\}$ é linearmente independente sobre $\mathcal{Z}$. Substituindo y por ty em (2.24) temos

$$E(ty)x + tyF(x) = \alpha, \ \text{onde } \alpha = \lambda(x, ty). \tag{2.25}$$

Agora, multiplicando (2.24) à esquerda por t tem-se

$$tE(y)x + tyF(x) = t\beta, \ \text{onde } \beta = \lambda(x, y) \tag{2.26}$$

Subtraindo a equação (2.26) de (2.25):

$$E(ty)x - tE(y)x = \alpha - \beta t \Rightarrow$$

$$(E(ty) - tE(y))x = \alpha - \beta t \Rightarrow$$

$$G(y)x = \alpha - \beta t, \tag{2.27}$$

onde $G(y) = E(ty) - tE(y)$. Assim, tem-se

$$[G(y)x, t] = [\alpha - \beta t, t] \Rightarrow$$

$$G(y)xt - tG(y)x = \alpha t - \beta t^2 - t\alpha + t\beta t \overset{\alpha,\beta \in \mathcal{Z}}{=} 0 \Rightarrow$$

$$G(y)xt - tG(y)x = 0. \tag{2.28}$$

Como A é simples e unitário, segue da Proposição 1.1.12 que A é um módulo simples sobre o anel de multiplicação $\mathcal{M}(A)$. Portanto A é um módulo simples e fiel sobre $\mathcal{M}(A)$. Pela Proposição 1.1.13, o anel de divisão $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$ é isomorfo a $\mathcal{Z}$. Pela definição do isomorfismo, segue que $\{1,\ t\}$ é um conjunto linearmente independente sobre $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$. Pelo Teorema da Densidade de Jacobson existe $\xi \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi(t) = 1$ e $\xi(1) = 0$. Considere elementos $a_k, b_k \in A$ tais que

$$\xi(x) = \sum_k a_k x b_k,\ \forall x \in A.$$

Substituindo x por a_k em (2.28) tem-se

$$\begin{array}{lcll}
G(y)a_k t - tG(y)a_k & = & 0 & \Rightarrow \\
G(y)a_k t b_k - tG(y)a_k b_k & = & 0 & \Rightarrow \\
\sum_k G(y)a_k t b_k - \sum_k tG(y)a_k b_k & = & 0 & \Rightarrow \\
G(y)\sum_k a_k t b_k - tG(y)\sum_k a_k b_k & = & 0 & \Rightarrow \\
G(y)\xi(t) - tG(y)\xi(1) & = & 0 & \Rightarrow \quad G(y) \;=\; 0.
\end{array}$$

De (2.27) temos $\alpha - \beta t = 0$ e como $\{1, t\}$ é LI então $\beta = 0$. Assim, (2.24) reduz-se a

$$E(y)x + yF(x) = 0$$

que tem apenas a solução standard $E(y) = yp$ e $F(x) = -px$, onde $p \in A$, pois A cumpre a condição (a).

Definição 2.2.11. Dizemos que um anel A é **d-livre** se tanto (a) quanto (b) são satisfeitos.

Exemplo 2.2.12. Seja A um anel unitário simples e suponha que existe um elemento $t \in A$ tal que $\{1, t, t^2\}$ é um conjunto LI sobre $\mathcal{Z}$. Então A é um anel 3-livre. Mostraremos apenas a verificação de tal fato para a FI

$$E(x, y)z + F(x, z)y + G(y, z)x = 0, \tag{2.29}$$

isto é, mostraremos que a única solução é a standard $E = F = G = 0$. Note que essa FI é um caso particular da FI (2.4), então com o mesmo raciocínio feito para deduzir a equação (2.6) tem-se que

$$E(xt, yt)z - (E(xt, y) + E(x, yt))zt + E(x, y)zt^2 = 0. \tag{2.30}$$

Como A é simples então A é um módulo simples sobre o anel de multiplicação $\mathcal{M}(A)$, mais ainda, o anel de divisão $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$ é isomorfo a $\mathcal{Z}$. Em particular, como$\{1, t, t^2\}$ é um conjunto LI sobre $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$, pelo Teorema da Densidade de Jacobson existe $\xi \in \mathcal{M}(A)$ dada por $\xi(x) = \sum_k a_k x b_k$ tal que $\xi(1) = \xi(t) = 0$ e $\xi(t^2) = 1$.

Substituindo z por a_k em (2.30) temos

$$E(xt, yt)a_k - (E(xt, y) + E(x, yt))a_k t + E(x, y)a_k t^2 = 0.$$

Multiplicando a direita por b_k e somando, obtemos

$$\begin{gathered}\sum_k E(xt, yt)a_k b_k - \sum_k (E(xt, y) + E(x, yt))a_k t b_k + \sum_k E(x, y)a_k t^2 b_k = 0 \Rightarrow \\ E(xt, yt)\xi(1) - (E(xt, y) + E(x, yt))\xi(t) + E(x, y)\xi(t^2) = 0 \Rightarrow \\ E(x, y) = 0.\end{gathered}$$

Com um raciocínio análogo para F e G tem-se que (2.29) admite apenas a solução $E = F = G = 0$.

2.3 O Grau Forte

Dado um anel A com unidade, relembramos que $\mathcal{M}(A)$ denota o seu anel de multiplicação e $\mathcal{Z}$ o seu centro $\mathcal{Z}(A)$. Fixamos a notação $t^0 = 1$ para todo $t \in A$ e δ_{ij} denotará o delta de Kronecker.

Definição 2.3.1. Sejam $n \geq 0$ um inteiro, A um anel com unidade e $t \in A$ não nulo.

a) O **grau forte** de t é dito ser maior do que n se para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ existe $\xi_i \in \mathcal{M}(A)$ tal que

$$\xi_i(t^j) = \delta_{ij}$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. Neste caso denotamos s-deg$(t) > n$.

b) Se s-deg$(t) > n - 1$ mas s-deg$(t) \not> n$, dizemos que o **grau forte** de t é n e denotamos s-deg$(t) = n$. Se s-deg$(t) > n$ para todo $n \geq 0$ denotamos s-deg$(t) = \infty$.

c) O **grau forte** de A é definido como

$$\text{s-deg}(A) = \sup\{\text{s-deg}(t) : \ t \in (A - \{0\})\}.$$

A partir da definição temos o seguinte fato:

Lema 2.3.2. *Se A_0 é subanel de A, ambos com a mesma unidade 1, então*

$$s\text{-}deg(A_0) \leq s\text{-}deg(A).$$

Proposição 2.3.3. *Todo elemento não nulo $t \in A$ tem grau forte $s\text{-}deg(t) > 0$.*

Demonstração. Temos que mostrar que existe $\xi_0 \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi_0(t^0) = \delta_{00} = 1$. Mas a função identidade cumpre essa propriedade e é um elemento de $\mathcal{M}(A)$. □

Proposição 2.3.4. *Seja t um elemento de um anel A. Existe $\xi \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi(t) = 1$ se, e somente se, $(t) = A$.*

Demonstração. Suponha que exista $\xi \in \mathcal{M}(A)$ dada por

$$\xi(x) = \sum_k a_k x b_k$$

tal que $\xi(t) = 1$. Então

$$\sum_k a_k t b_k = 1 \in (t)$$

e portanto $(t) = A$.

Para a recíproca, suponha $(t) = A$. Como A é unitário existem $a_k, b_k \in A$ tais que

$$1 = \sum_k a_k t b_k.$$

Defina $\xi \in \mathcal{M}(A)$ por

$$\xi(x) = \sum_k a_k x b_k.$$

Assim, $\xi(t) = 1$. □

Note que se s-deg$(t) > 1$ então $\xi(t) = 1$ para algum $\xi \in \mathcal{M}(A)$, pois por definição existe $\xi_1 \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi_1(1) = 0$ e $\xi_1(t) = 1$. Isso quer dizer que a existência de $\xi \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi(t) = 1$ é uma condição necessária para termos que s-deg$(t) > 1$. Mas a condição não é suficiente, por exemplo, para $t = 1$ temos s-deg$(t) = 1$ (a justificativa desse fato é dada pela próxima proposição, considerando que $t \in \mathcal{Z}$).

Proposição 2.3.5. *Se $z \in \mathcal{Z}$ então $s\text{-}deg(z) = 1$.*

Demonstração. Suponha que s-deg$(z) > 1$, onde $z \in \mathcal{Z}$. Então por definição existe $\xi_1 \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\xi_1(1) = 0$ e $\xi_1(z) = 1$. Como $\xi_1 \in \mathcal{M}(A)$, existem $a_k, b_k \in A$ tais que $\xi_1(x) = \sum_k a_k x b_k$. Assim,

$$\xi_1(1) = 0 \Rightarrow \sum_k a_k b_k = 0$$

e também

$$\xi_1(z) = \sum_k a_k z b_k \overset{z \in \mathcal{Z}}{=} \sum_k z a_k b_k = z \sum_k a_k b_k = 0.$$

Absurdo. □

Relembramos que um conjunto M é chamado de (A, A)-bimódulo unitário se M for um A-módulo à esquerda e também um A-módulo à direita e, além disso, para todos $x, y \in A$ e $m \in M$ tem-se

$$(xm)y = x(my) \quad \text{e} \quad 1m = m1 = m.$$

Definição 2.3.6. O **centro** de um (A, A)-bimódulo unitário M é o conjunto

$$\mathcal{Z}(M) = \{\lambda \in M : \ \lambda x = x\lambda, \ \forall \ x \in A\}.$$

A partir desses conceitos e da definição de grau forte, temos o seguinte lema:

Lema 2.3.7. *Seja M um (A, A)-bimódulo unitário, sejam $u_i, v_j \in M$ com $i = 0, 1, \ldots, m$ e $j = 0, 1, \ldots, n$, e fixe $t \in A$.*

i) *Se s-deg$(t) > m$ e $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} u_i x t^i = 0$ para todo $x \in A$, então cada $u_i = 0$.*

ii) *Se s-deg$(t) > n$ e $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} t^j x v_j = 0$ para todo $x \in A$, então cada $v_j = 0$.*

iii) *Se s-deg$(t) > \max\{n, m\}$ e $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} u_i x t^i + \sum_{j=0}^{n} t^j x v_j = 0$ para todo $x \in A$, então cada $u_i \in \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathcal{Z}(M) t^j$ e cada $v_j \in \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \mathcal{Z}(M) t^i$.*

Demonstração. i) Por hipótese, existem $\xi_i \in \mathcal{M}(A)$, onde $i = 0, 1, \ldots, m$, tais que

$$\xi_i(t^j) = \delta_{ij}, \ j = 0, 1, \ldots, m.$$

Fixando $0 \leq j \leq m$ escreva
$$\xi_j(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k x b_k.$$

Também por hipótese temos $\sum_{i=0}^{m} u_i a_k t^i = 0$. Logo,

$$\sum_{i=0}^{m} u_i a_k t^i b_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{m} u_i a_k t^i b_k = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m} u_i \sum_{k=1}^{p} a_k t^i b_k = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{m} u_i \underbrace{\xi_j(t^i)}_{\delta_{ji}} = u_j.$$

ii) Análogo à i).

iii) Vamos mostrar que $v_j \in \sum_{i=0}^{m} \mathcal{Z}(M) t^i$.

Por hipótese, existem $\xi_i \in \mathcal{M}(A)$, onde $0 \leq i \leq \max\{m, n\}$, tais que

$$\xi_i(t^j) = \delta_{ij},\ \ j = 0, 1, \ldots, \max\{m, n\}.$$

Fixamos $0 \leq k \leq n$ e escrevemos $\xi_k(x) = \sum_{l=1}^{q} a_l x b_l$. Também por hipótese, temos que para todo $x \in A$ valem a premissa e as implicações abaixo:

$$\sum_{j=0}^{n} t^j b_l x v_j = -\sum_{i=0}^{m} u_i b_l x t^i \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_l t^j b_l x v_j = -\sum_{i=0}^{m} a_l u_i b_l x t^i \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{j=0}^{n} a_l t^j b_l x v_j = -\sum_{l=1}^{p} \sum_{i=0}^{m} a_l u_i b_l x t^i \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\xi_k(t^j)}_{\delta_{kj}} x v_j = \sum_{i=0}^{m} -\xi_k(u_i) x t^i \Rightarrow$$

$$x v_k = \sum_{i=0}^{m} z_i x t^i, \quad \text{onde} \quad z_i = -\xi_k(u_i). \tag{2.31}$$

Afirmação: $z_i \in \mathcal{Z}(M)$.

Com efeito, fixe $0 \leq l \leq m$ e escreva $\xi_l(x) = \sum_{p=1}^{r} a'_p x b'_p$. Por hipótese tem-se

$$\sum_{j=0}^{n} t^j x a'_p v_j = -\sum_{i=0}^{m} u_i x a'_p t^i.$$

Multiplicando por b'_p à direita e somando em p tem-se

$$\sum_{j=0}^{n} t^j x \xi_l(v_j) = \sum_{i=0}^{m} -u_i x \xi_l(t^i).$$

Substituindo x por $b_k x$ tem-se

$$\sum_{j=0}^{n} t^j b_k x \xi_l(v_j) = \sum_{i=0}^{m} -u_i b_k x \xi_l(t^i).$$

Multiplicando à esqueda por a_k e somando em k tem-se a validade da premissa e da implicação abaixo:

$$\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\xi_k(t^j)}_{\delta_{kj}} x \xi_l(v_j) = \sum_{i=0}^{m} \underbrace{-\xi_k(u_i)}_{z_i} x \underbrace{\xi_l(t^i)}_{\delta_{li}} \Rightarrow$$

$$x \xi_l(v_k) = \sum_{i=0}^{m} z_i x \delta_{li} = z_l x, \ \forall\ x \in A. \tag{2.32}$$

Fazendo $x = 1$ em (2.32) obtemos $\xi_l(v_k) = z_l$, e a substituição dessa última expressão em (2.32) resulta que

$$x z_l = z_l x, \ \forall\ x \in A,$$

ou seja, $z_l \in \mathcal{Z}(M)$, o que prova a afirmação.

Portanto, fazendo $x = 1$ em (2.31) tem-se

$$v_k = \sum_{i=0}^{m} z_i t^i \in \sum_{i=0}^{m} \mathcal{Z}(M) t^i, \quad \text{para todo} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

De maneira análoga demonstra-se que $u_i \in \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathcal{Z}(M) t^j$, para todo i. □

A seguir, vamos definir outro conceito que usaremos adiante para alguns resultados.

Definição 2.3.8. Seja A um anel, $\mathcal{Z}$ seu centro e $t \in A$.

a) Dizemos que t é **algébrico sobre** $\mathcal{Z}$ se existem $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{Z}$ tais que

$$z_0 + z_1 t + \ldots + z_n t^n = 0 \quad \text{e} \quad z_n \neq 0. \tag{2.33}$$

Neste caso, dizemos que t é algébrico de grau no máximo n.

b) O **grau algébrico de** t sobre $\mathcal{Z}$ é definido como sendo o menor n que satisfaz (2.33) e será denotado por $\deg(t) = n$. Vamos denotar $\deg(t) = \infty$ no caso quando t é não algébrico sobre $\mathcal{Z}$.

c) Definimos o **grau algébrico de** A como

$$\deg(A) = \sup\{\deg(t) : \ t \in A\}.$$

Existe uma relação entre o grau forte e o grau algébrico de um elemento $t \in A$. Essa relação será descrita na próxima proposição.

Proposição 2.3.9. *Seja A um anel com unidade e $t \in A$ um elemento não nulo. Então*

$$s\text{-}deg(t) \leq deg(t).$$

Demonstração. Se $\deg(t) = \infty$ não há o que provar.

Suponha que $\deg(t) = n < \infty$. Por (2.33) existem $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{Z}$ tal que

$$z_0 + z_1 t + \ldots + z_n t^n = 0 \quad \text{e} \quad z_n \neq 0.$$

Assim, para todo $x \in A$, temos

$$x(\sum_{i=0}^{n} z_i t^i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} z_i x t^i = 0.$$

Como $z_n \neq 0$, pelo Lema 2.3.7 - i) tem-se s-deg$(t) \leq n$. □

Agora vamos dar um exemplo, mostrando que a inequação da proposição anterior pode ser estrita.

Exemplo 2.3.10. Seja $A = \mathbb{F}\langle X \rangle$ a $\mathbb{F}$-álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por um conjunto X, onde $\mathbb{F}$ é um corpo. Seja $t \in X$.

a) t não é algébrico.

Suponha que seja. Então existem $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{Z}(A)$ tal que

$$z_0 + z_1 t + \ldots + z_n t^n = 0 \text{ com } z_n \neq 0.$$

Mas $\mathcal{Z}(A) = \mathbb{F}$, ou seja, $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{F}$. Assim, $\{1, t, \ldots, t^n\}$ é um conjunto LD em A, o que é um absurdo, pois ele faz parte de uma base de A. Logo, t não é algébrico e $\deg(t) = \infty$.

b) s-deg$(t) = 1$.

Na verdade, mostraremos algo maior: s-deg$(t) = 1$ para todo $t \in A$. Se $t \in \mathcal{Z}$ então o resultado segue da Proposição 2.3.5. Seja $t \in A - \mathcal{Z}$ e suponha que s-deg$(t) > 1$. Então por definição existem $a_i, b_i \in A$ tal que

$$\sum_i a_i b_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i a_i t b_i = 1.$$

Podemos escrever $t = \lambda + t_0$, onde $\lambda \in \mathbb{F}$ e t_0 tem termo constante 0. Então

$$1 = \sum_i a_i t b_i = \sum_i a_i(\lambda + t_0) b_i = \lambda \underbrace{\sum_i a_i b_i}_{=0} + \sum_i a_i t_0 b_i.$$

Absurdo. Logo, s-deg$(t) = 1$ como queríamos e, em particular, s-deg$(A) = 1$.

Lema 2.3.11. *Seja A um anel unitário simples. Então s-deg(t) = deg(t), para todo $t \in A$ não nulo.*

Demonstração. Já mostramos que s-deg$(t) \leq$ deg(t). Assim, resta mostrar que s-deg$(t) \geq$ deg(t).

Dado $t \in A$ não nulo, suponha que deg$(t) = n+1$. Queremos mostrar que s-deg$(t) > n$. Como deg$(t) = n + 1$ tem-se que para todos $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{Z}$ não todos nulos que

$$z_0 + z_1 t + \ldots + z_n t^n \neq 0.$$

Logo, o conjunto $\{1, t, \ldots, t^n\}$ é LI sobre $\mathcal{Z}$.

Como A é simples e unitário, então A é um $\mathcal{M}(A)$-módulo à esquerda simples (ver a Proposição 1.1.12) e também fiel. Além disso, o anel de divisão $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$ é isomorfo a $\mathcal{Z}$ (ver a Proposição 1.1.13). Logo, como o conjunto $\{1, t, \ldots, t^n\}$ é LI sobre $\mathcal{Z}$, e portanto sobre $End_{\mathcal{M}(A)}(A)$, segue do Teorema da Densidade de Jacobson que para todo $0 \leq i \leq n$ existe $\xi_i \in \mathcal{M}(A)$ tal que

$$\xi_i(t^j) = \delta_{ij},$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. Portanto, s-deg$(t) > n$ e consequentemente s-deg$(t) \geq$ deg(t), para todo $t \in A$ não nulo.

O mesmo raciocínio pode ser usado no caso em que deg$(t) = \infty$. □

O próximo teorema nos dará uma relação entre o grau forte do anel $M_n(R)$ e o grau forte do anel R.

Teorema 2.3.12. *Seja R um anel unitário. Então*

$$s\text{-}deg(M_n(R)) \geq n \cdot (s\text{-}deg(R)).$$

Demonstração. Seja $A = M_n(R)$. Podemos identificar R com o subanel de A formado pelas matrizes escalares (que são da forma $r \cdot Id_n$, onde $r \in R$) e também considerar $\mathcal{M}(R)$ como um subanel de $\mathcal{M}(A)$.

Vamos considerar dois casos: s-deg$(R) = \infty$ e s-deg$(R) = m$, para $m \in \mathbb{N}$.

Para o primeiro caso, como podemos ver R como subanel de $M_n(R)$ e s-deg$(R) = \infty$ então tem-se s-deg$(M_n(R)) = \infty$ (ver Lema 2.3.2) e o teorema está provado.

Para o caso em que s-deg$(R) = m$, onde $m \in \mathbb{N}$, mostraremos que s-deg$(A) > mn-1$.

Como s-deg$(R) = m$ então existe $a \in R$ tal que s-deg$(a) = m$. Seja

$$t = e_{12} + e_{23} + \ldots + e_{n-1,n} + ae_{n1}.$$

Vamos mostrar que s-deg$(t) > mn - 1$. Note que $t^n = a(Id_n) =: a$ e portanto $t^{np} = a^p$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Usaremos a multiplicação bilateral definida na Seção 1.1. Dado $0 \leq i, j \leq n-1$ tem-se

$$_{e_{k1}}M_{e_{i+1,k}}(t^j) = e_{k1}t^j e_{i+1,k} = \delta_{ij}e_{kk}, \ \forall\ 1 \leq k \leq n.$$

Para cada $0 \leq i \leq n-1$ defina

$$\mathcal{U}_i = \sum_{k=1}^{n} {}_{e_{k1}}M_{e_{i+1,k}}.$$

Tem-se

$$\mathcal{U}_i(t^j) = \sum_{k=1}^{n} {}_{e_{k1}}M_{e_{i+1,k}}(t^j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}e_{kk} = \delta_{ij},$$

para todo $0 \leq i, j \leq n-1$.

Como s-deg$(a) = m$, existem $\mathcal{V}_q \in \mathcal{M}(R) \subseteq \mathcal{M}(A)$, com $0 \leq q \leq m-1$ tais que

$$\mathcal{V}_q(a^p) = \delta_{qp}, \ \forall\ 0 \leq p, q \leq m-1.$$

Agora, dado $0 \leq k \leq mn-1$, podemos escrever $k = qn + i$, onde $0 \leq i \leq n-1$ e $0 \leq q \leq m-1$. Fixado k, como acima, defina

$$\xi_k = \mathcal{V}_q\mathcal{U}_i.$$

Mostraremos que ξ_k tem a propriedade desejada. Tomando $0 \leq l \leq mn-1$, escreva $l = pn + j$, onde $0 \leq j \leq n-1$ e $0 \leq p \leq m-1$. Assim, para todos $0 \leq k, l \leq mn-1$ temos

$$\begin{aligned} \xi_k(t^l) &= (\mathcal{V}_q\mathcal{U}_i)(a^pt^j) = \mathcal{V}_q(\mathcal{U}_i(a^pt^j)) = \mathcal{V}_q(\sum_{k=1}^{n} e_{k1}M_{e_{i+1,k}}(a^pt^j)) \\ &= \mathcal{V}_q(\sum_{k=1}^{n} e_{k1}a^pt^je_{i+1,k}) = \mathcal{V}_q(a^p\delta_{ij}) = \delta_{qp}\delta_{ij} = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Portanto, s-deg$(t) > mn-1$. □

Corolário 2.3.13. *Seja C um anel comutativo unitário. Então s-deg$(M_n(C)) = n$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.12 tem-se

$$\text{s-deg}(M_n(C)) \geq n(\text{s-deg}(C)) = n,$$

pois s-deg$(C) = 1$ pela Proposição 2.3.5.

Por outro lado, dado $a \in M_n(C)$, seja $p_a(x) = \det(xId_n - a)$ seu polinômio característico. Podemos escrever $p_a(x)$ da seguinte maneira:

$$p_a(x) = x^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{n-j}.$$

Como C é comutativo temos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1 \in \mathcal{Z}(M_n(C))$ (após a identificação adequada).

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos

$$0 = p_a(a) = a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}a + \alpha_n Id_n.$$

Portanto,

$$\deg(a) \leq n, \ \forall\ a \in M_n(C) \Rightarrow \deg(M_n(C)) \leq n.$$

Pela Proposição 2.3.9 temos s-deg$(M_n(C)) \leq n$ e o resultado está provado. □

Corolário 2.3.14. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então,*

$$\textit{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Demonstração. Se $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n < \infty$, então $End_{\mathbb{F}}(V) \simeq M_n(\mathbb{F})$ e pelo Corolário 2.3.13 tem-se

$$\text{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \text{s-deg}(M_n(\mathbb{F})) = n = \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Suponha agora que $\dim_{\mathbb{F}}(V) = \infty$. Por [5, Exemplo 4.23] temos o seguinte isomorfismo de anéis:

$$End_{\mathbb{F}}(V) \simeq M_2(End_{\mathbb{F}}(V)).$$

Por esse fato e pelo Teorema 2.3.12,

$$\text{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \text{s-deg}(M_2(End_{\mathbb{F}}(V))) \geq 2(\text{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)))$$

e portanto $\text{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \infty$. □

2.4 Anéis Fortemente d-livres

Ao longo desta seção, A será um anel unitário e M será um (A, A)-bimódulo unitário com centro $\mathcal{Z}(M)$. Vamos escrever apenas $\mathcal{Z}$ para $\mathcal{Z}(A)$. Sejam I e J subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $I \cup J \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Considere ainda funções arbitrárias $E_i, F_j : A^{m-1} \longrightarrow M$, onde $i \in I$ e $j \in J$.

Relembramos que as FI's básicas são da forma

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i + \sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) = 0, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m \tag{2.34}$$

e também

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i + \sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) \in \mathcal{Z}(M), \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.35}$$

Convencionamos que uma soma sobre o $\emptyset$ é nula, então as FI's

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i = 0, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m, \tag{2.36}$$

$$\sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) = 0, \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m \tag{2.37}$$

são casos particulares de (2.34) e

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i)x_i \in \mathcal{Z}(M), \ \forall\, \overline{x}_m \in A^m, \tag{2.38}$$

$$\sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) \in \mathcal{Z}(M), \ \forall\ \overline{x}_m \in A^m \tag{2.39}$$

são casos particulares de (2.35).

Suponha que existam funções

$$p_{ij} : A^{m-2} \longrightarrow M, \quad i \in I, j \in J, i \neq j, \quad \text{e}$$

$$\lambda_k : A^{m-1} \longrightarrow \mathcal{Z}(M), \quad k \in I \cup J,$$

tais que

$$\begin{aligned} E_i(\overline{x}_m^i) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda_i(\overline{x}_m^i), \quad i \in I,\\ F_j(\overline{x}_m^j) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) x_i - \lambda_j(\overline{x}_m^j), \quad j \in J,\\ \lambda_k &= 0 \quad \text{se} \quad k \notin I \cap J. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Então (2.40) é uma solução de (2.34) e consequentemente de (2.35). De fato,

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}_m^i) x_i + \sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) =$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) x_i + \sum_{i\in I\cap J} \lambda_i(\overline{x}_m^i) x_i - \sum_{j\in J}\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) x_i - \sum_{j\in I\cap J} x_j \lambda_j(\overline{x}_m^j) \overset{\lambda_i \in \mathcal{Z}(M)}{=} 0.$$

Definição 2.4.1. Dizemos que cada solução da forma (2.40) é uma **solução standard** de (2.34) e também de (2.35). No caso em que $J = \emptyset$ convencionamos que $E_i = 0$ para todo $i \in I$ é a **solução standard** de (2.36) e (2.38). No caso em que $I = \emptyset$ convencionamos que $F_j = 0$ para todo $j \in J$ é a **solução standard** de (2.37) e (2.39).

Nos dois últimos casos da definição (caso $J = \emptyset$ e $I = \emptyset$), convencionamos "algo". Observe a coerência com o que estamos convencionando, pois em (2.40) estaríamos realizando somas sobre um conjunto de índices vazio, o que automaticamente significa para nós uma soma nula.

Convencionamos também que $A^0 = \{0\}$. Em vista disso, uma função que é definida em A^0 é uma constante, e assim, pode ser identificada com um elemento fixo de M.

Vamos dar uma explicação adicional ao caso em que $|I \cup J| \leq 2$. Por exemplo, quando $I = J = \{1\}$ e $m = 1$, (2.34) equivale a

$$E_1 x_1 + x_1 F_1 = 0,$$

para todo $x_1 \in A$ e para elementos fixos $E_1, F_1 \in M$, pois essas funções são definidas em A^0 e a solução standard dessa identidade é expressa como $E_1 = -F_1 \in \mathcal{Z}(M)$. Vamos fazer outro exemplo, suponha agora que $I = \{1\}$, $J = \emptyset$ e $m = 1$. Então (2.34) significa que $E_1 \in M$ satisfaz $E_1 x_1 = 0$, para todo $x_1 \in A$ e a solução standard é $E_1 = 0$.

Definição 2.4.2. Seja $d \in \mathbb{N}$. Um anel A é **fortemente** d **- livre** se para todo (A, A)-bimódulo unitário M, para todo $m \in \mathbb{N}$ e todos $I, J \subseteq \{1, \ldots, m\}$, as duas seguintes condições são satisfeitas:

a) Se $\max\{|I|, |J|\} \leq d$ então (2.34) tem apenas a solução standard (2.40);

b) Se $\max\{|I|, |J|\} \leq d - 1$ então (2.35) tem apenas a solução standard (2.40).

Se A é fortemente d-livre para todo $d \in \mathbb{N}$, então dizemos que A é ∞-livre.

Proposição 2.4.3. *Todo anel unitário A é fortemente 1-livre.*

Demonstração. Para provar isso, é necessário verificar apenas a condição (a) da definição acima. De fato, se $d = 1$ então em (b) teríamos $\max\{|I|, |J|\} \leq 0$, isto é, a FI (2.35) seria

$$0 \in \mathcal{Z}(M),$$

não havendo assim a possibilidade de provar a falsidade de (b).

Para o item (a) existem quatro casos a serem considerados:

i) $E(\overline{x}^a_m)x_a = 0$, onde $a \in \{1, \ldots, m\}$ (caso em que $I = \{a\}$ e $J = \emptyset$);

ii) $x_b F(\overline{x}^b_m) = 0$, onde $b \in \{1, \ldots, m\}$ (caso em que $I = \emptyset$ e $J = \{b\}$);

iii) $E(\overline{x}^a_m)x_a + x_a F(\overline{x}^a_m) = 0$, onde $a \in \{1, \ldots, m\}$ (caso em que $I = J = \{a\}$);

iv) $E(\overline{x}^a_m)x_a + x_b F(\overline{x}^b_m) = 0$, onde $a, b \in \{1, \ldots, m\}$ são distintos (caso em que $I = \{a\}$ e $J = \{b\}$).

Substituindo 1 em x_a e x_b nas FI's acima, segue que todas elas têm apenas as soluções standards. Faremos apenas o item iv): sem perda de generalidade vamos supor que $a < b$. Fazendo $x_a = 1$, temos

$$E(\overline{x}^a_m) = -x_b F(x_1, \ldots, x_{a-1}, 1, x_{a+1}, \ldots, x_{b-1}, x_{b+1}, \ldots, x_m).$$

Assim,

$$-x_b F(x_1,\ldots,x_{a-1},1,x_{a+1},\ldots,x_{b-1},x_{b+1},\ldots,x_m)x_a + x_b F(\overline{x}_m^b) = 0.$$

Substituindo $x_b = 1$ nesta última igualdade temos:

$$F(\overline{x}_m^b) = F(x_1,\ldots,x_{a-1},1,x_{a+1},\ldots,x_{b-1},x_{b+1},\ldots,x_m)x_a.$$

Definindo então

$$p_{ab}(\overline{x}_m^{ab}) = -F(x_1,\ldots,x_{a-1},1,x_{a+1},\ldots,x_{b-1},x_{b+1},\ldots,x_m)$$

temos que

$$E(\overline{x}_m^a) = x_b p_{ab}(\overline{x}_m^{ab}),$$
$$F(\overline{x}_m^b) = -p_{ab}(\overline{x}_m^{ab})x_a,$$

como desejado. □

Lema 2.4.4. *Seja A um anel fortemente d-livre. Então:*

i) A é d'-livre para todo $d' < d$.

ii) Se $|I| \leq d$ então (2.36) implica que cada $E_i = 0$.

iii) Se $|J| \leq d$ então (2.37) implica que cada $F_j = 0$.

iv) Se $|I| \leq d-1$ então (2.38) implica que cada $E_i = 0$.

v) Se $|J| \leq d-1$ então (2.39) implica que cada $F_j = 0$.

vi) Se $\max\{|I|,|J|\} \leq d$ e se E_i faz parte do conjunto de uma solução standard de uma FI então existem únicos p_{ij}'s e λ_i's tais que

$$E_i(\overline{x}_m^i) = \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda_i(\overline{x}_m^i).$$

O mesmo vale para F_j. (Aqui cabe uma observação: não está sendo dito que para cada $i \in I$ e $j \in J$ o E_i e F_j são únicos. O que está sendo dito é que podemos escrever cada E_i e F_j de maneira única em termos das funções p's e λ's.)

vii) Se $\max\{|I|,|J|\} \leq d$ *e todas* E_i*'s e* F_j*'s de (2.40) são* $(m-1)$*-aditivas então todos os* p_{ij}*'s e* λ_i*'s (que definem as* E_i*'s e* F_j*'s) são* $(m-2)$*-aditivas e* $(m-1)$*-aditivas, respectivamente.*

Demonstração. Os ítens de *i)* a *v)* seguem diretamente da definição.

vi) Suponha que $\max\{|I|,|J|\} \leq d$ e que existam funções

$$p_{ij}, q_{ij} : A^{m-2} \longrightarrow M, \quad i \in I, j \in J, i \neq j \quad \text{e}$$

$$\lambda_k, \mu_k : A^{m-1} \longrightarrow \mathcal{Z}(M), \quad k \in I \cup J, \quad \lambda_k = \mu_k = 0 \text{ se } \quad k \notin I \cap J,$$

tal que

$$E_i(\overline{x}^i_m) = \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) + \lambda_i(\overline{x}^i_m) = \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j q_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) + \mu_i(\overline{x}^i_m),$$

para todos $\overline{x}_m \in A^m$ e todo $i \in I$.

Assim,

$$\sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j[p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) - q_{ij}(\overline{x}^{ij}_m)] = \mu_i(\overline{x}^i_m) - \lambda_i(\overline{x}^i_m) \in \mathcal{Z}(M) \tag{2.41}$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m$. Vamos considerar dois casos:

a) Se $i \in J$, então $|J \setminus \{i\}| \leq d-1$. Aplicando *v)* em (2.41) tem-se para todo $\overline{x}_m \in A^m$ que

$$p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) - q_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) = 0, \ \forall \ j \in J \setminus \{i\}.$$

Substituindo essa expressão em (2.41) tem-se

$$\mu_i(\overline{x}^i_m) - \lambda_i(\overline{x}^i_m) = 0.$$

Logo, $p_{ij} = q_{ij}$ e $\mu_i = \lambda_i$.

b) Se $i \notin J$, então $i \notin I \cap J$. Logo, $\lambda_i = \mu_i = 0$ e por (2.41) tem-se, para todo $\overline{x}_m \in A^m$, que

$$\sum_{j\in J} x_j[p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) - q_{ij}(\overline{x}^{ij}_m)] = 0.$$

Agora segue de *iii)* que

$$p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) - q_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) = 0$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m$, isto é, $p_{ij} = q_{ij}$.

Portanto, $p_{ij} = q_{ij}$ e $\lambda_k = \mu_k$, para todos $i \in I$, $j \in J$ e $k \in I \cup J$.

vii) Suponha que os E_i's e os F_j's são $(m-1)$-aditivas e que (2.40) é válido.

Fixando $i \in I$ temos de (2.40) que

$$E_i(\overline{x}_m^i) = \sum_{\substack{j \in J, \\ j \neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda_i(\overline{x}_m^i),$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m$.

Fixe agora $l \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ para mostrarmos que p_{ij} e λ_i são funções aditivas referente a coordenada l. Para simplificar a notação, dado $a \in A$, vamos denotar (só nesta demonstração) por a' a $(n-1)$-upla $\overline{x}_m^i$ quando substituímos x_l por a. Vamos denotar também por a'' a $(n-2)$-upla $\overline{x}_m^{ij}$ quando substituímos x_l por a.

Por hipótese E_i é $(m-1)$-aditiva, então para todo $y_l, z_l \in A$ temos a validade da premissa e das implicações abaixo:

$$E_i((y_l + z_l)') = E_i(y_l') + E_i(z_l') \Rightarrow$$

$$\sum_{\substack{j \in J \setminus \{l\}, \\ j \neq i}} x_j p_{ij}((y_l + z_l)'') + (y_l + z_l) p_{il}(\overline{x}_m^{il}) + \lambda_i((y_l + z_l)') =$$

$$\sum_{\substack{j \in J \setminus \{l\}, \\ j \neq i}} x_j p_{ij}(y_l'') + y_l p_{il}(\overline{x}_m^{il}) + \lambda_i(y_l') + \sum_{\substack{j \in J \setminus \{l\}, \\ j \neq i}} x_j p_{ij}(z_l'') + z_l p_{il}(\overline{x}_m^{il}) + \lambda_i(z_l') \Rightarrow$$

$$\sum_{\substack{j \in J \setminus \{l\}, \\ j \neq i}} x_j (p_{ij}((y_l + z_l)'') - p_{ij}(y_l'') - p_{ij}(z_l'')) \overset{(*)}{=} \lambda_i(y_l') + \lambda_i(z_l') - \lambda_i((y_l + z_l)') \in \mathcal{Z}(M).$$

Logo, por *v)* temos

$$p_{ij}((y_l + z_l)'') = p_{ij}(y_l'') + p_{ij}(z_l''),$$

mostrando que os p_{ij}'s são funções $(m-2)$-aditivas.

Resta mostrar que os λ_i's são $(m-1)$-aditivas. Se $i \notin I \cap J$ então λ_i é a função nula, logo $(m-1)$-aditiva. Se $i \in I \cap J$ então usando que os p_{ij}'s são $(m-2)$-aditivas, temos pela igualdade $(*)$ que

$$\lambda_i((y_l + z_l)') = \lambda_i(y_l') + \lambda_i(z_l').$$

Portanto, cada λ_i é $(m-1)$-aditiva. □

A seguir, vamos usar o resultado anterior para relacionar anéis fortemente d-livres com identidades polinomiais.

Lema 2.4.5. *Um anel fortemente d-livre não satisfaz uma identidade polinomial de grau $\leq d$.*

Demonstração. Seja A um anel fortemente d-livre e suponha que A satisfaz uma PI de grau $n \leq d$. Usando o processo de linearização, caso necessário, A satisfaz uma PI multilinear com grau $\leq n$. Então existe $f = f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$ multilinear com grau $m \leq d$ tal que A satisfaz f e não satisfaz nenhuma PI com grau $m-1$.

Podemos escrever

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\overline{x}_m^i)x_i.$$

Note que f_i tem grau $m-1$ ou é o polinômio nulo. Como f é um polinômio não nulo, existe b tal que f_b é um polinômio não nulo e não é uma PI para A. Fixe tal b.

Denotando por $E_i : A^{m-1} \to A$ a função polinomial induzida por f_i, temos uma FI para A:

$$\sum_{i=1}^{m} E_i(\overline{x}_m^i)x_i = 0, \ \forall \overline{x}_m \in A^m.$$

Pelo Lema 2.4.4 (ii), com $M = A$, temos que $E_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Absurdo, pois $E_b \neq 0$. □

Definição 2.4.6. Seja A um anel unitário. Dizemos que A tem **FI-grau** d (que denotamos por FI-deg$(A) = d$) se A é fortemente d-livre e não é fortemente $(d+1)$- livre. No caso quando A é ∞- livre, dizemos que A tem FI-grau ∞ (FI-deg$(A) = \infty$).

Exemplo 2.4.7. Se C é um anel comutativo unitário, então FI-deg$(C) = 1$.

De fato, mostramos anteriormente que todo anel unitário é fortemente 1-livre. Resta mostrar que ele não é fortemente 2-livre. Tome $|I| = 2$ e $J = \emptyset$. Então (2.34) reduz-se à

$$E_1(x)y + E_2(y)x = 0,$$

e fazendo $E_1(x) = x$ e $E_2(y) = -y$ temos $xy - yx = 0$. Assim, E_1 e E_2 formam uma solução não-standard de (2.34) e portanto C não é fortemente 2- livre.

Exemplo 2.4.8. Seja A um anel unitário fortemente 2-livre. Se existem funções k-aditivas $\alpha_k : A^k \longrightarrow \mathcal{Z}$, para $k = 1, 2$, tais que

$$x^2 + \alpha_1(x)x + \alpha_2(x, x) = 0,$$

para todo $x \in A$, então FI-deg$(A) = 2$.

De fato, temos que mostrar que A não é fortemente 3-livre. Suponha por absurdo que seja. Então linearizando a expressão $x^2 + \alpha_1(x)x + \alpha_2(x, x) = 0$ temos que

$$x_1x_2 + x_2x_1 + \alpha_1(x_1)x_2 + \alpha_1(x_2)x_1 + \alpha_2(x_1, x_2) + \alpha_2(x_2, x_1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 + \alpha_1(x_1))x_2 + (x_2 + \alpha_1(x_2))x_1 = -\alpha_2(x_1, x_2) - \alpha_2(x_2, x_1) \in \mathcal{Z}.$$

Como estamos supondo que A é 3-livre e como $|\{1, 2\}| = 2 < 3$, então pelo Lema 2.4.4 (iv) temos que

$$x_1 + \alpha_1(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad x_2 + \alpha_1(x_2) = 0,$$

para todo $x_1, x_2 \in A$. Assim, temos

$$1 \cdot x_1 = -\alpha_1(x_1) \in \mathcal{Z},$$

mas por A ser 3-livre, novamente aplicando o Lema 2.4.4 (iv) temos $1 = 0$, absurdo.

Logo, A não é 3-livre e assim FI-deg$(A) = 2$.

Lema 2.4.9. *Seja A um anel unitário fortemente d-livre. Se existem traços de funções k-aditivas $\alpha_k : A \longrightarrow \mathcal{Z}$, $k = 1, \ldots, d$, tal que*

$$x^d + \alpha_1(x)x^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1}(x)x + \alpha_d(x) = 0 \tag{2.42}$$

para todo $x \in A$, então FI-deg$(A) = d$.

Demonstração. Devemos mostrar que A não é fortemente $(d + 1)$-livre.

Por hipótese, para cada $k = 1, \ldots, d$, existe uma função k-aditiva $\xi_k : A^k \longrightarrow \mathcal{Z}$ tal que $\alpha_k(x) = \xi_k(x, \ldots, x)$.

Considere as funções k-aditivas $T_k : A^k \longrightarrow A$, $1 \leq k \leq d$, definidas por

$$\begin{aligned} T_k(\overline{x}_k) \quad = \quad & \sum_{\pi \in S_k} (x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} + \xi_1(x_{\pi(1)})x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} + \cdots \\ & + \xi_{k-1}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k-1)})x_{\pi(k)} + \xi_k(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)})). \end{aligned}$$

Primeiramente, a linearização de (2.42) é dada por

$$T_d(\overline{x}_d) = 0.$$

Temos também a igualdade

$$T_k(\overline{x}_k) = \sum_{i=1}^{k} T_{k-1}(\overline{x}_k^i)x_i + \sum_{\pi \in S_k} \xi_k(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)}) \tag{2.43}$$

válida para todo $1 \leq k \leq d$.

Afirmação: *$T_k \neq 0$, para todo $k < d$.*

De fato, se $T_k = 0$ para algum $k < d$, então

$$\sum_{i=1}^{k} T_{k-1}(\overline{x}_k^i)x_i = -\sum_{\pi \in S_k} \xi_k(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}) \in \mathcal{Z},$$

ou seja, tem a forma de (2.38). Mas por hipótese, A é fortemente d-livre e $|\{1,\ldots,k\}| = k \leq d-1$. Logo, pelo Lema 2.4.4 (iv), temos que $T_{k-1} = 0$. Usando o mesmo raciocínio, após alguns passos teremos $T_1 = 0$. Assim,

$$x_1 + \alpha_1(x_1) = 0$$

para todo $x_1 \in A$. Como no exemplo anterior, chegamos no absurdo $1 = 0$. Portanto, $T_k \neq 0$ para todo $k < d$, e em particular $T_{d-1} \neq 0$. Contudo, como $T_d = 0$, de (2.43) tem-se

$$\sum_{i=1}^{d} T_{d-1}(\overline{x}_d^i)x_i = -\sum_{\pi \in S_d} \xi_d(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(d)}) \in \mathcal{Z}.$$

Assim, se A for fortemente $(d+1)$-livre, o Lema 2.4.4 (iv) nos dá que $T_{d-1} = 0$, o que é uma contradição.

Logo, FI-deg$(A) = d$. □

2.5 Anéis Fortemente $(t;d)$-livres.

Nesta seção vamos manter a notação da seção anterior e vamos adicionar algumas novas notações.

Ao longo desta seção, t será um elemento fixo em A e denotaremos por $C(t)$ o conjunto

$$C(t) = \{\mu \in M : \ \mu t = t\mu\}.$$

Mais ainda, $a, b \geq 0$ serão inteiros e

$$E_{iu}, F_{jv} : A^{m-1} \longrightarrow M, \quad i \in I, j \in J, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq b,$$

serão funções arbitrárias.

Consideraremos a FI

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u + \sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) = 0,\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.44}$$

Definimos uma **solução standard** de (2.44) como

$$\begin{aligned} E_{iu}(\overline{x}_m^i) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij}) + \sum_{v=0}^{b} \lambda_{iuv}(\overline{x}_m^i)t^v, \\ F_{jv}(\overline{x}_m^j) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}}\sum_{u=0}^{a} p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij})x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \lambda_{juv}(\overline{x}_m^j)t^u, \\ \lambda_{kuv} &= 0 \quad \text{se} \quad k \notin I \cap J, \end{aligned} \tag{2.45}$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m, i \in I, j \in J, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq b$, onde

$p_{iujv} : A^{m-2} \longrightarrow M, \quad i \in I, j \in J, i \neq j, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq b,$

$\lambda_{kuv} : A^{m-1} \longrightarrow \mathcal{Z}(M), k \in I \cap J, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq b.$

Note que de fato (2.45) é solução de (2.44), pois

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u + \sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) =$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a}(\sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij}))x_i t^u + \sum_{i\in I\cap J}\sum_{u=0}^{a}\sum_{v=0}^{b} \lambda_{iuv}(\overline{x}_m^i)t^v x_i t^u$$

$$+\sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b}(-\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}}\sum_{u=0}^{a} t^v x_j p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij})x_i t^u) - \sum_{j\in I\cap J}\sum_{v=0}^{b}\sum_{u=0}^{a} t^v x_j \lambda_{juv}(\overline{x}_m^j)t^u = 0.$$

Definição 2.5.1. Um anel A é dito **fortemente** $(t;d)$**-livre**, onde $t \in A$ e $d \in \mathbb{N}$, se para todo (A, A)-bimódulo unitário M, todo $m \in \mathbb{N}$, todos $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ e todos os inteiros $a, b \geq 0$, a seguinte condição é satisfeita:
Se $\max\{|I| + a, |J| + b\} \leq d$ então (2.44) implica em (2.45).

Diferentemente da Definição 2.4.2, essa definição requer apenas uma condição que deve ser realizada, ou seja, essa definição não considera também a FI

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u + \sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) \in \mathcal{Z}(M),\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.46}$$

A justificativa deste fato será dada pelo Corolário 2.5.6 que veremos mais a diante nesta seção.

Quando um dos conjuntos I ou J for vazio temos dois casos particulares de (2.44):

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u = 0,\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m, \tag{2.47}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) = 0,\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.48}$$

Também indicamos mais duas relações gerais

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u \in C(t),\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m, \tag{2.49}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) \in C(t),\ \forall\ \overline{x}_m \in A^m. \tag{2.50}$$

Vamos fazer um lema análogo ao Lema 2.4.4.

Lema 2.5.2. *Seja A um anel fortemente $(t;d)$-livre. Então:*

i) A é $(t;d')$-livre para todo $d' < d$.

ii) Se $|I| + a \leq d$ então (2.47) implica que cada $E_{iu} = 0$.

iii) Se $|J| + b \leq d$ então (2.48) implica que cada $F_{jv} = 0$.

iv) Se $|I| + a \leq d - 1$ então (2.49) implica que cada $E_{iu} = 0$.

v) Se $|J| + b \leq d - 1$ então (2.50) implica que cada $F_{jv} = 0$.

vi) Se $\max\{|I| + a, |J| + b\} \leq d$ e se E_{iu} faz parte de uma solução standard de uma FI então existem únicos p_{iujv}'s e λ_{iuv}'s tais que

$$E_{iu}(\overline{x}_m^i) = \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda_{iuv}(\overline{x}_m^i).$$

vii) *Se* $\max\{|I|+a, |J|+b\} \leq d$ *e todas* E_{iu}*'s e* F_{jv}*'s de (2.45) são* $(m-1)$*-aditivas então todos os* p_{iujv}*'s e* λ_{iuv}*'s (que definem as* E_{iu}*'s e* F_{jv}*'s) são* $(m-2)$*-aditivas e* $(m-1)$*-aditivas, respectivamente.*

Demonstração. i) Segue direto da definição.

ii) Basta usar a hipótese com $J=\emptyset$ em (2.45), pois assumimos que um somatório, cujo índice percorre um conjunto vazio, é nulo.

iii) Basta usar a hipótese com $I=\emptyset$.

iv) Suponha $|I|+a \leq d-1$ e (2.49). Temos

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u \in C(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u t - t\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u = 0 \Rightarrow$$

$$-\sum_{i\in I} tE_{i0}(\overline{x}_m^i)x_i + \sum_{i\in I}\sum_{u=1}^{a}\left(-tE_{iu}(\overline{x}_m^i)+E_{i,u-1}(\overline{x}_m^i)\right)x_i t^u + \sum_{i\in I} E_{i,a}(\overline{x}_m^i)x_i t^{a+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a+1} G_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
G_{i0}(\overline{x}_m^i) &= -tE_{i0}(\overline{x}_m^i),\\
G_{iu}(\overline{x}_m^i) &= -tE_{iu}(\overline{x}_m^i)+E_{i,u-1}(\overline{x}_m^i), \quad u=1,\ldots,a,\\
G_{i,a+1}(\overline{x}_m^i) &= E_{ia}(\overline{x}_m^i),
\end{aligned}$$

para todo $i\in I$.

Por hipótese, $|I|+a\leq d-1$. Logo, $|I|+(a+1)\leq d$ e por (ii) temos que $G_{iu}=0$, para todo $u=0,1,\ldots,a+1$.

As três igualdades que definem as funções G_{iu}'s acima nos fornecem uma "relação de recorrência". Assim, de $G_{i,a+1}=0$ segue que $E_{ia}=0$. De $G_{ia}=0$ e de $E_{ia}=0$ temos pela relação que $E_{i,a-1}=0$. Continuando, temos $E_{iu}=0$ para todo $u=0,1,\ldots,a$.

v) Análogo a (iv).

vi) Análogo a (vi) do Lema 2.4.4.

vii) Análogo a (vii) do Lema 2.4.4.

□

Lema 2.5.3. *Seja A um anel fortemente $(t;d)$-livre, onde $t \in A$, e M um (A,A)-bimódulo unitário. Se*

$$\sum_{u=0}^{d-1} \gamma_u t^u = 0$$

para alguns $\gamma_u \in \mathcal{Z}(M)$, então todo $\gamma_u = 0$.

Demonstração. Por hipótese, para alguns $\gamma_u \in \mathcal{Z}(M)$ tem-se

$$\sum_{u=0}^{d-1} \gamma_u t^u = 0 \Rightarrow \sum_{u=0}^{d-1} \gamma_u x_1 t^u = 0, \ \forall \ x_1 \in A.$$

Isso pode ser considerado como um caso especial de (2.47), e então pelo Lema 2.5.2 (ii) tem-se que cada $\gamma_u = 0$ □

Na demonstração do próximo lema vamos usar pela primeira vez um método que vamos mostrar no seguinte exemplo.

Exemplo 2.5.4. Considere a função

$$H(\overline{x}_m) = \sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i) x_i t^u + \sum_{j \in J} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j). \tag{2.51}$$

Suponha que $1 \in J$. Construa a função

$$H(tx_1, x_2, \ldots, x_m) - tH(\overline{x}_m). \tag{2.52}$$

Expandindo (2.52) e reorganizando tem-se

$$H(tx_1, x_2, \ldots, x_m) - tH(\overline{x}_m) = \sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} G_{iu}(\overline{x}_m^i) x_i t^u + \sum_{\substack{j \in J, \\ j \neq 1}} \sum_{v=0}^{b+1} t^v x_j H_{jv}(\overline{x}_m^j)$$

para funções G_{iu}'s e H_{jv}'s apropriadas.

Com esse método, a cardinalidade de J foi reduzida em uma unidade, ou seja, J pode ser substituido por $\overline{J} = J \setminus \{1\}$. De uma maneira informal, vamos nos referir a qualquer processo similar ao feito no exemplo anterior como *operação t-substituição.*

Lema 2.5.5. *Suponha que existam funções* $\mu_w : A^m \longrightarrow \mathcal{Z}(M)$, $0 \leq w \leq c$, *tais que*

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u + \sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) = \sum_{w=0}^{c} \mu_w(\overline{x}_m)t^w,$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m$. *Se* A *é um anel fortemente* $(t;d)$*-livre e* $\max\{a+|I|, c+|J|\} \leq d-1$ *então cada* $\mu_w = 0$.

Demonstração. Vamos provar por indução em $|J|$.

Se $|J| = 0$, então pelo Lema 2.5.2 (iv) temos que o elemento em $C(t)$ abaixo é nulo:

$$\sum_{w=0}^{c} \mu_w(\overline{x}_m)t^w = 0.$$

Como $c + |J| \leq d-1$ e $|J| = 0$ então $c \leq d-1$. Logo, pelo Lema 2.5.3, temos que cada $\mu_w = 0$.

Suponha por hipótese de indução que o teorema é válido para $|J| = n \geq 0$, e vamos mostrar que o resultado vale para $|J| = n+1$. Sem perda de generalidade, suponha que $1 \in J$. Usando a operação t-substituição em H definida como em (2.51) e construindo (2.52) tem-se

$$H(tx_1, x_2, \ldots, x_m) - tH(\overline{x}_m) = \sum_{w=0}^{c} \mu_w(tx_1, x_2, \ldots, x_m)t^w - t\sum_{w=0}^{c} \mu_w(\overline{x}_m)t^w \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} G_{iu}(\overline{x}_m^i)x_i t^u + \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}}\sum_{v=0}^{b+1} t^v x_j H_{jv}(\overline{x}_m^j) =$$

$$\mu_0(tx_1, \ldots, x_m) + \sum_{w=1}^{c}(\mu_w(tx_1, \ldots, x_m) - \mu_{w-1}(\overline{x}_m))t^w - \mu_c(\overline{x}_m)t^{c+1},$$

para algumas funções G_{iu}'s e H_{jv}'s.

Temos que $(c+1) + |J \setminus \{1\}| = c + |J| \leq d-1$. Assim, por hipótese de indução tem-se

$$\begin{cases} \mu_0(tx_1, \ldots, x_m) = 0, \\ \mu_w(tx_1, \ldots, x_m) - \mu_{w-1}(\overline{x}_m) = 0, \\ -\mu_c(\overline{x}_m) = 0, \end{cases}$$

para todo $\overline{x}_m \in A^m$. Então, podemos concluir que cada $\mu_w = 0$, onde $0 \leq w \leq c$. □

Corolário 2.5.6. *Seja* A *um anel fortemente* $(t;d)$*-livre. Se* $\max\{|I|+a, |J|+b\} \leq d-1$ *então (2.46) implica (2.45).*

Demonstração. Tomando $c = 0$ no Lema 2.5.5 temos que (2.46), com $\max\{|I| + a, |J|\} \leq d - 1$, é na verdade a equação (2.44). Por definição de anel fortemente $(t; d)$-livre temos que (2.44) e $\max\{|I| + a, |J| + b\} \leq d - 1 < d$ implicam em (2.45). $\square$

Corolário 2.5.7. *Se um anel A é fortemente $(t; d)$-livre para algum $t \in A$, então A é fortemente d-livre.*

Demonstração. Tomando $a = b = 0$ na Definição 2.5.1, temos que a condição (a) da definição de anel fortemente d-livre é satisfeita. Aplicando o Corolário 2.5.6 para $a = b = 0$ então temos a condição (b).

Portanto, A é fortemente d-livre. $\square$

2.6 A desigualdade s-deg$(A) \leq$ FI-deg(A)

A fórmula descrita no título será demonstrada no decorrer da seção. Observe que essa fórmula é uma ferramenta para encontrarmos anéis fortemente d-livres a partir do grau forte do anel.

Nesta seção, vamos manter a notação da seção anterior e fazer algumas abreviações para simplificação. Mais precisamente, para as funções $F : A^{m-1} \longrightarrow M$ e $G : A^{m-2} \longrightarrow M$ escrevemos

$$F^i \quad \text{para} \quad F(\overline{x}^i_m) \quad \text{e}$$
$$G^{ij} \quad \text{para} \quad G(\overline{x}^{ij}_m).$$

Então, por exemplo, (2.44) será escrita como

$$\sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} E^i_{iu} x_i t^u + \sum_{j \in J} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j F^j_{jv} = 0.$$

Mais ainda, para $H : A^m \longrightarrow M$ escrevemos

$$H(x_k t) \quad \text{para} \quad H(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k t, x_{k+1}, \ldots, x_m)$$

e para $F : A^{m-1} \longrightarrow M$ escrevemos

$$\begin{aligned} F^i(x_k t) \quad \text{para} \quad & F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k t, x_{k+1}, \ldots, x_m) \quad \text{se} \quad i < k \\ \text{e} \quad & F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k t, x_{k+1}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \quad \text{se} \quad i > k. \end{aligned}$$

A seguir, faremos um lema que será utilizado adiante nesta seção.

Lema 2.6.1. *Se s-deg$(t) \geq |I|+a$, então (2.47) implica que cada $E_{iu} = 0$. Analogamente, se s-deg$(t) \geq |J|+b$, então (2.48) implica que cada $F_{ij} = 0$.*

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira afirmação, pois a segunda é análoga.

Usaremos o Princípio de Indução em $|I|$.

Se $|I| = 1$, podemos supor sem perda de generalidade que $I = \{1\}$. Então (2.47) fica

$$\sum_{u=0}^{a} E_{1u}^{1} x_1 t^u = 0, \ \forall\ \overline{x}_m \in A^m.$$

Por hipótese s-deg$(t) \geq a+1$, então fixando $x_2, \ldots, x_m$ e aplicando o Lema 2.3.7 (i) temos que cada $E_{1u} = 0$.

Suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para $|I| = n \geq 1$. Queremos mostrar que ele é válido para $|I| = n+1$. Suponha então que $|I| = n+1$ e sem perda de generalidade suponha que $1, 2 \in I$.

Fazendo a operação de t-substituição na função

$$H(\overline{x}_m) = \sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} E_{iu}^{i} x_i t^u = 0$$

tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= H(x_1 t) - H(\overline{x}_m)t = \\
&= \sum_{u=0}^{a} E_{1u}^{1} x_1 t t^u + \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} E_{i0}^{i}(x_1 t) x_i + \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} \sum_{u=1}^{a} E_{iu}^{i}(x_1 t) x_i t^u \\
&- \sum_{u=0}^{a} E_{1u}^{1} x_1 t^u t - \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} E_{ia}^{i} x_i t^{a+1} - \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} \sum_{u=1}^{a} E_{i,u-1}^{i} x_i t^u \\
&= \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} E_{i0}^{i}(x_1 t) x_i + \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} \sum_{u=1}^{a} (E_{iu}^{i}(x_1 t) - E_{i,u-1}^{i}) x_i t^u - \sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq 1}} E_{ia}^{i} x_i t^{a+1}.
\end{aligned}$$

Por hipótese s-deg$(t) \geq |I|+a = (n+1)+a = |I \setminus \{1\}| + (a+1)$, então por hipótese de indução temos

$$E_{ia} = 0 \quad \text{e} \quad E_{iu}^{i}(x_1 t) - E_{i,u-1}^{i} = 0, \ \forall\ i \neq 1 \quad \text{e} \quad u = 1, \ldots, a.$$

Então $E_{iu} = 0$ para todo $i \neq 1$ e $u = 0, 1, \ldots, a$.

Repetindo o mesmo processo para a variável x_2 temos que $E_{1u} = 0$ para todo $u = 0, 1, \ldots, a$ também, completando a demonstração. □

Teorema 2.6.2. *Seja A um anel unitário e seja $t \in A$ não nulo. Se s-deg$(t) \geq d$, então A é fortemente $(t;d)$-livre. Em particular, A é fortemente d-livre.*

Demonstração. Devemos mostrar que A é fortemente $(t;d)$-livre, ou seja, que se $\max\{|I|+a, |J|+b\} \leq d$ então (2.44) tem apenas a solução (2.45).

Pois bem, temos por hipótese que (2.44) é válido e s-deg$(t) \geq d \geq \max\{|I|+a, |J|+b\}$. Antes de prosseguir, relembramos que as E^i_{iu}'s de (2.45) são da forma

$$E^i_{iu} = \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j p^{ij}_{iujv} + \sum_{v=0}^{b} \lambda^i_{iuv} t^v, \quad \text{com} \quad \lambda_{iuv} = 0 \quad \text{se} \quad i \notin J$$

e as F^j_{jv}'s de (2.45) são da forma

$$F^j_{jv} = -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} \sum_{u=0}^{a} p^{ij}_{iujv} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \lambda^j_{juv} t^u, \quad \text{com} \quad \lambda_{juv} = 0 \quad \text{se} \quad j \notin I.$$

Afirmação: *Se as E_{iu}'s são como em (2.45) então as F_{jv}'s também são da forma como em (2.45).*

Com efeito, substituindo as E^i_{iu}'s em (2.44) temos

$$\sum_{i\in I} \sum_{u=0}^{a} \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j p^{ij}_{iujv} x_i t^u + \sum_{i\in I} \sum_{u=0}^{a} \sum_{v=0}^{b} \lambda^i_{iuv} t^v x_i t^u + \sum_{j\in J} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j F^j_{jv} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in J} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j [F^j_{jv} + \sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} \sum_{u=0}^{a} p^{ij}_{iujv} x_i t^u + \sum_{u=0}^{a} \lambda^j_{juv} t^u] = 0.$$

Mas por hipótese temos s-deg$(t) \geq |J| + b$, então pelo Lema 2.6.1 temos que

$$F^j_{jv} = -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} \sum_{u=0}^{a} p^{ij}_{iujv} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \lambda^j_{juv} t^u.$$

Portanto, a afirmação está provada.

Analogamente, podemos fazer uma afirmação para mostrar que se as F_{ij}'s são como em (2.45) então todas as E_{iu}'s também são como em (2.45).

Muito bem, vamos provar o teorema. A demonstração será por indução em $|I|+|J|$.

Observação: Se $|I| = 0$ ou $|J| = 0$ então o resultado segue imediatamente do Lema 2.6.1.

Para o caso em que $|I| + |J| = 1$, temos necessariamente $|I| = 0$ ou $|J| = 0$. Então o resultado segue da observação anterior.

Vamos provar o resultado para $|I| + |J| = 2$. Em vista da observação anterior, o único caso a considerar é quando $|I| = 1 = |J|$. Existem dois subcasos para serem considerados:

i) Se $I = \{1\} = J$, temos que (2.44) é

$$\sum_{u=0}^{a} E_{1u}^{1} x_1 t^u + \sum_{v=0}^{b} t^v x_1 F_{1v}^{1} = 0, \quad \forall \overline{x}_m \in A^m.$$

Fixando $x_2, x_3, \ldots, x_m$, pelo Lema 2.3.7 (iii) segue que

$$E_{1u}(x_2, \ldots, x_m) = \sum_{v=0}^{b} \lambda_{1uv}(x_2, \ldots, x_m) t^v$$

para alguns $\lambda_{1uv}(x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{Z}(M)$, $0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq b$. Mas como $I = \{1\} = J$, as E_{1u}'s são da forma como em (2.45), e pela afirmação acima as F_{1v}'s também são como em (2.45). Logo, o resultado está provado para este subcaso.

ii) Se $I = \{2\}$ e $J = \{1\}$ então (2.44) é

$$\sum_{u=0}^{a} E_{2u}^{2} x_2 t^u + \sum_{v=0}^{b} t^v x_1 F_{1v}^{1} = 0. \tag{2.53}$$

Fixamos $0 \leq v \leq b$ qualquer. Como s-deg$(t) \geq \max\{|I| + a, |J| + b\}$, pela definição de grau forte existem $c_l, d_l \in A$, $l = 1, \ldots, n$ tais que

$$\sum_{l=1}^{n} c_l t^w d_l = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad w = v \\ 0, & \text{se} \quad w \neq v \end{cases} .$$

Portanto,

$$F_{1v}^{1} = \sum_{w=0}^{b} \sum_{l=1}^{n} c_l t^w d_l F_{1w}^{1} = \sum_{l=1}^{n} c_l \sum_{w=0}^{b} t^w d_l F_{1w}^{1}. \tag{2.54}$$

Temos ainda que (2.53) implica

$$\sum_{v=0}^{b} t^v x_1 F_{1v}^{1} = -\sum_{u=0}^{a} E_{2u}^{2} x_2 t^u. \tag{2.55}$$

Substituindo (2.55) em (2.54) temos

$$F^1_{1v} = -\sum_{l=1}^{n} c_l \sum_{u=0}^{a} E_{2u}(d_l, x_3, \ldots, x_m) x_2 t^u = -\sum_{u=0}^{a} p_u(x_3, \ldots, x_m) x_2 t^u,$$

onde $p_u(x_3, \ldots, x_m) = \sum_{l=1}^{n} c_l E_{2u}(d_l, x_3, \ldots, x_m)$. Isso implica que todos os F_{1v}'s são dados como em (2.45) e pela afirmação todos os E_{2u}'s também são como em (2.45). Assim, o segundo subcaso também está provado.

Suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para $|I| + |J| = n \geq 2$. Vamos mostrar que o resultado também é válido para $|I| + |J| = n + 1$.

Sem perda de generalidade suponha que $|J| \geq 2$ e que $1, 2 \in J$.

Seja

$$H(\overline{x}_m) = \sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} E^i_{iu} x_i t^u + \sum_{j \in J} \sum_{v=0}^{b} t^v x_j F^j_{jv}.$$

Vamos aplicar a operação de t-substituição (2.52). Por hipótese temos que $H = 0$. Assim,

$$H(tx_1) - tH(\overline{x}_m) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{u=0}^{a} G^i_{iu} x_i t^u + \sum_{\substack{j \in J,\\ j \neq 1}} x_j F^j_{j0}(tx_1) + \sum_{\substack{j \in J,\\ j \neq 1}} \sum_{v=1}^{b} t^v x_j (F^j_{jv}(tx_1) - F^j_{j,v-1}) - \sum_{\substack{j \in J,\\ j \neq 1}} t^{b+1} x_j F^j_{jb} = 0$$

para funções G_{iu}'s apropriadas. Note que $|J \setminus \{1\}| + b + 1 = |J| + b$, então por hipótese de indução temos

$$F^j_{jb} = -\sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq j}} \sum_{u=0}^{a} q^{ij}_{iuj(b+1)} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \mu^j_{ju(b+1)} t^u, \quad j \neq 1 \quad \text{e}$$

$$F^j_{jv}(tx_1) - F^j_{j,v-1} = -\sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq j}} \sum_{u=0}^{a} q^{ij}_{iujv} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \mu^j_{juv} t^u, \quad j \neq 1, \ v = 1, \ldots, b$$

e $\mu_{juv} = 0$, se $j \notin I$. A partir destas identidades, começando por F_{jb} e prosseguindo recursivamente, temos que

$$F^j_{jv} = -\sum_{\substack{i \in I,\\ i \neq j}} \sum_{u=0}^{a} p^{ij}_{iujv} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \lambda^j_{juv} t^u, \quad j \neq 1,$$

para apropriados p_{iujv} e λ_{juv} com $\lambda_{juv} = 0$ se $j \notin I$.

Analogamente, considerando agora $H(tx_2) - tH(\overline{x}_m)$ temos

$$F_{1v}^1 = -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} \sum_{u=0}^{a} p_{iu1v}^{i1} x_i t^u - \sum_{u=0}^{a} \lambda_{1uv}^1 t^u,$$

e $\lambda_{1uv} = 0$ se $1 \notin I$. Então todos F_{jv}'s têm a forma de (2.45). Pela afirmação, cada E_{iu} também é da forma (2.45).

Portanto, o teorema está provado. □

Demonstraremos no próximo corolário a fórmula descrita no título da seção. Na sequência, faremos mais alguns resultados que obtemos a partir do teorema anterior.

Corolário 2.6.3. *Seja A um anel unitário. Então*

$$s\text{-}deg(A) \leq FI\text{-}deg(A).$$

Demonstração. Se s-deg$(A) = n < \infty$, então de

$$n = \sup\{\text{s-deg}(t) : \ t \in A - \{0\}\},$$

segue que $n =$s-deg(t) para algum t. Logo, pelo Teorema 2.6.2, A é fortemente n-livre. Por definição, FI-deg$(A) \geq n$.

Se s-deg$(A) = \infty$, então com uma pequena variação no raciocínio anterior, segue do Teorema 2.6.2 que FI-deg$(A) = \infty$. □

Corolário 2.6.4. *Seja R um anel unitário e $n \in \mathbb{N}$. Então FI-deg$(M_n(R)) \geq n$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.6.3 e Teorema 2.3.12 temos

$$\text{FI-deg}(M_n(R)) \geq \text{s-deg}(M_n(R)) \geq n(\text{s-deg}(R)) \geq n$$

como queríamos. □

Corolário 2.6.5. *Seja C um anel comutativo unitário e $n \in \mathbb{N}$. Então FI-deg$(M_n(C)) = n$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.6.4 temos FI-deg$(M_n(C)) \geq n$. Logo, pelo Lema 2.4.4-i), $M_n(C)$ é fortemente n-livre.

Pela Proposição 2.1.9 existem traços de funções k-aditivas $\alpha_k : M_n(C) \longrightarrow C$, $k = 1, \ldots, n$ tais que

$$x^n + \alpha_1(x)x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(x)x + \alpha_n(x)Id_n = 0, \ \forall\, x \in M_n(C).$$

Logo, pelo Lema 2.4.9 concluímos que FI-deg$(M_n(C)) = n$. □

Corolário 2.6.6. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então*

$$\textit{FI-deg}(\textit{End}_{\mathbb{F}}(V)) = \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Em particular, FI-deg$(End_{\mathbb{F}}(V)) = \infty$ se, e somente se, V tem dimensão infinita.

Demonstração. Se $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n < \infty$, então $End_{\mathbb{F}}(V) \simeq M_n(\mathbb{F})$. Logo, pelo Corolário 2.6.5,

$$\text{FI-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \text{FI-deg}(M_n(\mathbb{F})) = n = \dim_{\mathbb{F}}(V).$$

Se $\dim_{\mathbb{F}}(V) = \infty$, temos pelo Corolário 2.3.14 que s-deg$(End_{\mathbb{F}}(V)) = \infty$ e pelo Corolário 2.6.3

$$\text{FI-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) \geq \text{s-deg}(End_{\mathbb{F}}(V)) = \infty.$$

Finalizamos assim a demonstração. □

Corolário 2.6.7. *Seja A um anel simples e unitário. Então $\dim_{\mathcal{Z}}(A) = d^2$ se, e somente se, deg$(A) = d$. Mais ainda, neste caso existem traços de funções k-aditivas $\alpha_k : A \longrightarrow \mathcal{Z}$, $k = 1, \ldots, d$, tais que*

$$x^d + \alpha_1(x)x^{d-1} + \ldots + \alpha_{d-1}(x)x + \alpha_d(x) = 0,$$

para todo $x \in A$.

Demonstração. Ver Corolário C.3 de [4]. □

Corolário 2.6.8. *Seja A um anel simples e unitário. Então*

$$\textit{FI-deg}(A) = \sqrt{\dim_{\mathcal{Z}}(A)}.$$

Em particular, FI-deg$(A) = \infty$ se, e somente se, A não é um PI-anel.

Demonstração. Seja $d = \deg(A)$. Pelo Lema 2.3.11 temos

$$\text{s-deg}(A) = \deg(A) = d.$$

Caso 1. $d \neq \infty$.

Pelo Corolário 2.6.7 temos

$$\sqrt{\dim_{\mathcal{Z}}(A)} = d.$$

Pelo Corolário 2.6.3 temos FI-deg$(A) \geq d$, o que implica que A é fortemente d-livre. Assim, pelo Lema 2.4.9 e o Corolário 2.6.7 temos que

$$\text{FI-deg}(A) = d.$$

Caso 2. $d = \infty$.

Neste caso, $\dim_{\mathcal{Z}}(A) = \infty$. De fato, se $\dim_{\mathcal{Z}}(A) = n \in \mathbb{N}$, então todo elemento de A teria grau algébrico $\leq n$ (as potências de um elemento fixado em A formariam um conjunto L.D. sobre $\mathcal{Z}$).

Pelo Corolário 2.6.3 temos

$$\text{FI-deg}(A) = \infty.$$

Assim, por um abuso de notação $\sqrt{\infty} = \infty$ temos a primeira parte do corolário provada.

A segunda parte do corolário é equivalente a sentença: FI-deg$(A) < \infty$ se, e somente se, A é um PI-anel. Provaremos ela:

Caso ($\Rightarrow$): Neste caso, pela primeira parte do corolário, temos $\dim_{\mathcal{Z}}(A) < \infty$. Logo, algum polinômio standard é uma identidade polinomial para A, isto é, A é um PI-anel.

Caso ($\Leftarrow$): Por [5, Lema 7.53], temos que um PI-anel simples e unitário é uma álgebra de dimensão finita sobre o seu centro, assim $\dim_{\mathcal{Z}}(A) < \infty$. Logo,

$$\text{FI-deg}(A) = \sqrt{\dim_{\mathcal{Z}}(A)} < \infty.$$

$\square$

Capítulo 3

FI para a álgebra das matrizes triangulares

Neste capítulo estudaremos o artigo [1], de Beidar, Brešar e Chebotar. Seja $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_r(\mathbb{F}), r \geq 2$, a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. O principal resultado deste capítulo consiste em estudar funções multilineares $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ tais que

$$[f(A, \ldots, A), A] = 0,$$

para todo $A \in \mathcal{T}_r$. Além disso, como aplicação, vamos descrever os automorfismos lineares $\theta : \mathcal{T}_r \longrightarrow \mathcal{T}_r$ tais que

$$[\theta(A^2), \theta(A)] = 0,$$

para todo $A \in \mathcal{T}_r$, sob certas condições a serem acrescentadas. A principal referência deste capítulo é [1].

3.1 Identidades Funcionais em $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$

Ao longo desta seção, $\mathbb{F}$ denotará um corpo e $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_r(\mathbb{F}), r \geq 2$, a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ com entradas em $\mathbb{F}$. Além disso, $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ será a $\mathbb{F}$-álgebra associativa comutativa livre, livremente gerada pelas variáveis $x_1, \ldots, x_m$.

Antes de enunciar o principal resultado deste capítulo, faremos um resultado auxiliar.

Proposição 3.1.1. *Sejam m, n e k inteiros positivos com $n \leq m$ e sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ polinômios tais que cada monômio envolvido em cada f_i tem grau k. Suponha que $x_i - x_j$ divide $f_i - f_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Então existem polinômios $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ tais que*

$$f_i = \sum_{j=0}^{k} p_j x_i^{k-j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

e todo monômio de p_j tem grau j.

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução em k.

Para $k = 0$ temos que todo monômio das f_i's tem grau 0. Logo $f_i = c_i \in \mathbb{F}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Por hipótese,

$$(x_i - x_j) \mid (f_i - f_j) \;\Rightarrow\; c_i - c_j = u(x_i - x_j), \quad \text{para algum } u \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m].$$

Se $u \neq 0$ então $c_i - c_j$ terá grau maior ou igual a 1. Absurdo, pois $(c_i - c_j) \in \mathbb{F}$. Portanto, $u = 0$ e $c_i = c_j$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

Suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para todo natural menor do que k.

Afirmação: *Existe $g \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ tal que todo monômio de g tem grau k e*

$$f_i - g = h_i x_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ e $h_i \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$.

De fato, podemos escrever

$$f_1 = h_{1,0} x_1 + g_1,$$

onde $g_1 \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ e x_1 não divide nenhum monômio de g_1. Temos que $f_1 - g_1 = h_{1,0} x_1$.

Fazemos

$$\begin{cases} f_1 - g_1 = f_1' \\ f_2 - g_1 = f_2' \\ \quad\vdots \\ f_n - g_1 = f_n' \end{cases}$$

onde f_1' tem a forma que desejamos na afirmação.

Agora, escrevemos

$$f_2' = h_{2,0}x_2 + x_1 r + s,$$

onde $h_{2,0}, r, s \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ e x_2 não divide nenhum monômio em r, e ainda, x_1 e x_2 não dividem nenhum monômio em s. Fazendo $g_2 = x_1 r$ temos

$$\begin{cases} f_1 - g_1 - g_2 = h_{1,0}x_1 - x_1 r = h_{1,1}x_1 \quad \text{e} \\ f_2 - g_1 - g_2 = h_{2,0}x_2 + s. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $s = 0$. Temos a validade da premissa e da implicação para algum $u \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$:

$$\begin{aligned} & f_1 - f_2 = h_{1,1}x_1 - h_{2,0}x_2 - s = u(x_1 - x_2), \quad u \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m] \Rightarrow \\ & s = (h_{1,1} - u)x_1 + (u - h_{2,0})x_2. \end{aligned}$$

Logo, como x_1 e x_2 não dividem nenhum monômio em s então $s = 0$. Agora, fazemos

$$\begin{cases} f_1 - g_1 - g_2 = f_1'' \\ f_2 - g_1 - g_2 = f_2'' \\ \quad\quad \vdots \\ f_n - g_1 - g_2 = f_n'' \end{cases}$$

onde f_1'' e f_2'' têm a forma como desejamos na afirmação.

Após alguns passos, suponha que tenhamos escrito

$$\begin{cases} f_1 - g_1 - \ldots - g_t = f_1^{(t)} \\ f_2 - g_1 - \ldots - g_t = f_2^{(t)} \\ \quad\quad \vdots \\ f_t - g_1 - \ldots - g_t = f_t^{(t)} \\ \quad\quad \vdots \\ f_n - g_1 - \ldots - g_t = f_n^{(t)} \end{cases}$$

onde $f_1^{(t)}, f_2^{(t)}, \ldots, f_t^{(t)}$ estão da forma como na afirmação, isto é,

$$f_i^{(t)} = h_{i,t-i}x_i, \quad i = 1, \ldots, t-1 \quad \text{e} \quad f_t^{(t)} = h_{t,0}x_t.$$

Escrevemos

$$f_{t+1}^{(t)} = h_{t+1,0}x_{t+1} + x_1 x_2 \cdots x_t p + q,$$

onde $h_{t+1}, p, q \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m]$ e

a) x_{t+1} não divide nenhum monômio de p;

b) x_{t+1} e $x_1x_2\cdots x_t$ não dividem nenhum monômio de q.

Denotando $g_{t+1} = x_1\cdots x_t p$ temos

$$\begin{cases} f_i - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = h_{i,t-i}x_i - x_1\cdots x_t p = h_{i,t-i+1}x_i, \quad i = 1,\ldots,t; \\ f_{t+1} - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = h_{t+1,0}x_{t+1} + q. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $q = 0$. Primeiramente, mostramos que $x_1 \mid q$. De fato, temos a validade da premissa e da implicação abaixo para algum u:

$$f_1 - f_{t+1} = h_{1,t}x_1 - h_{t+1,0}x_{t+1} - q = u(x_1 - x_{t+1}), \quad u \in \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_m] \Rightarrow$$

$$q = (h_{1,t} - u)x_1 + (u - h_{t+1,0})x_{t+1}.$$

Por a) temos que x_{t+1} não divide nenhum monômio de q. Então todo monômio de q aparece em $(h_{1,t} - u)x_1$ e consequentemente $x_1 \mid q$. Fazendo o mesmo raciocínio para $i = 2,\ldots,t$, temos que $x_i \mid q$, para todo $i = 1,\ldots,t$. Assim, $x_1\cdots x_t \mid q$ e por b) temos $q = 0$.

Escrevendo

$$\begin{cases} f_1 - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = f_1^{(t+1)} \\ f_2 - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = f_2^{(t+1)} \\ \quad\vdots \\ f_t - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = f_t^{(t+1)} \\ f_{t+1} - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = f_{t+1}^{(t+1)} \\ \quad\vdots \\ f_n - g_1 - \ldots - g_t - g_{t+1} = f_n^{(t+1)} \end{cases}$$

teremos que $f_1^{(t+1)}, f_2^{(t+1)}, \ldots, f_{t+1}^{(t+1)}$ serão da forma desejada na afirmação.

Repetindo esse processo até n e fazendo $g = g_1 + \ldots + g_n$ temos que

$$f_i - g = h_i x_i, \quad i = 1,\ldots,n$$

provando a afirmação.

Note que cada monômio de cada h_i tem grau $(k-1)$ e ainda

$$f_i - f_j = h_i x_i - h_j x_j = h_i(x_i - x_j) + (h_i - h_j)x_j = u(x_i - x_j), \quad u \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_m] \Rightarrow$$

$$u'(x_i - x_j) = (h_i - h_j)x_j, \quad \text{onde} \quad u' = u - h_i.$$

Portanto $(x_i - x_j) \mid (h_i - h_j)$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Por hipótese de indução temos

$$h_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_j x_i^{k-1-j}, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

e portanto

$$f_i - g = \sum_{j=0}^{k-1} p_j x_i^{k-j}.$$

Fazendo $g = p_k$ temos

$$f_i = \sum_{j=0}^{k} p_j x_i^{k-j},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Agora, faremos o principal resultado desta dissertação.

Teorema 3.1.2. *Sejam r e n inteiros positivos com $r \geq 2$, $\mathcal{T}_r$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ uma função multilinear tal que*

$$[f(A, A, \ldots, A), A] = 0, \quad \textit{para todo} \quad A \in \mathcal{T}_r. \tag{3.1}$$

Seja $n \leq r$ e $|\mathbb{F}| > n+1$. Então existe $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ e existem funções multilineares $\lambda_i : (\mathcal{T}_r)^i \longrightarrow \mathbb{F}$, para $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$f(A, A, \ldots, A) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(A, A, \ldots, A)A^{n-i}, \quad \textit{para todo} \quad A \in \mathcal{T}_r. \tag{3.2}$$

Demonstração. Seja $K = \mathbb{F}[x_{ij} : \ 1 \leq i \leq j \leq r]$ e G o corpo quociente de K. Seja ainda $A = (a_{ij})_{i,j=1}^r \in \mathcal{T}_r$. Note que $a_{ij} \in \mathbb{F}$ e $a_{ij} = 0$ se $i > j$. É conveniente escrever $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq r}$, ficando subentendido que todas as outras entradas de A são 0. Dado $g \in K$, escrevemos $g(A)$ para $g(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$.

Como $f : (\mathcal{T}_r)^n \longrightarrow \mathcal{T}_r$ é multilinear temos que

$$f(A, A, \ldots, A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq j_1 \leq n} \cdots \sum_{1 \leq i_n \leq j_n \leq n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} f(e_{i_1 j_1}, \ldots, e_{i_n j_n}).$$

Assim, existem polinômios $f_{ij} \in K$ tais que

$$f(A, A, \ldots, A) = (f_{ij}(A))_{1 \leq i \leq j \leq r}, \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{T}_r,$$

onde cada

$$f_{ij} = \sum_{1 \leq i_1 \leq j_1 \leq n} \cdots \sum_{1 \leq i_n \leq j_n \leq n} x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_n j_n} \alpha^{ij}_{i_1 j_1, \ldots, i_n j_n},$$

para alguns $\alpha^{ij}_{i_1 j_1, \ldots, i_n j_n} \in \mathbb{F}$. Note que $\alpha^{ij}_{i_1 j_1, \ldots, i_n j_n}$ é a entrada (i, j) de $f(e_{i_1 j_1}, \ldots, e_{i_n j_n})$. Assim, cada monômio de f_{ij} tem grau n, $1 \leq i \leq j \leq r$. Como $|\mathbb{F}| > n + 1$, os polinômios f_{ij} são unicamente determinados. De fato, suponha que exista $g_{ij} \in K$ tal que

$$g_{ij}(A) = f_{ij}(A), \quad \forall A \ \in \mathcal{T}_r.$$

Então $g_{ij} - f_{ij}$ é identidade polinomial para $\mathbb{F}$. Assim, pelo Lema 1.2.8, temos que $g_{ij} - f_{ij} = 0$ e então $f_{ij} = g_{ij}$.

Afirmação 1: *$x_{jj} - x_{ii}$ divide $f_{jj} - f_{ii}$, para todo $1 \leq i < j \leq r$.*

A justificativa desta afirmação é bastante extensa e devido a isso, para facilitar o entendimento da prova do teorema, neste momento vamos assumir tal afirmação, que será provada após a conclusão da demonstração do teorema.

Assumindo portanto a Afirmação 1, pela Proposição 3.1.1 segue que existem polinômios $p_0, p_1, \ldots, p_n \in K$ tais que

$$f_{ii} = p_0 x_{ii}^n + p_1 x_{ii}^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x_{ii} + p_n, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, r,$$

e todo monômio de p_j tem grau j, para $j = 0, 1, \ldots, n$.

Defina a função $g : \mathcal{T}_r \longrightarrow \mathcal{T}_r$ por

$$g(A) = f(A, A, \ldots, A) - \sum_{j=0}^{n} p_j(A) A^{n-j}.$$

Então, para todo $A \in \mathcal{T}_r$ temos

$$[g(A), A] = [f(A, A, \ldots, A), A] + \left[- \sum_{j=0}^{n} p_j(A) A^{n-j}, A \right] = 0, \tag{3.3}$$

pois por hipótese $[f(A, A, \ldots, A), A] = 0$ e $p_j(A) \in \mathbb{F}$.

Como $f(A, A, \ldots, A) = (f_{ij}(A))_{1 \leq i \leq j \leq r}$, podemos escrever $g(A) = (g_{ij}(A))_{1 \leq i \leq j \leq r}$, onde cada $g_{ij} \in K$ e cada monômio de g_{ij} tem grau n.

Note que $g_{ii} = 0$ para todo i. De fato, de

$$\begin{bmatrix} g_{11}(A) & * & & * \\ 0 & g_{22}(A) & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{rr}(A) \end{bmatrix} = g(A) = \begin{bmatrix} f_{11}(A) & * & & * \\ 0 & f_{22}(A) & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{rr}(A) \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} p_0(A)a_{11}^n & * & & * \\ 0 & p_0(A)a_{22}^n & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_0(A)a_{rr}^n \end{bmatrix} - \cdots - \begin{bmatrix} p_n(A) & * & & * \\ 0 & p_n(A) & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n(A) \end{bmatrix}$$

segue que

$$\begin{aligned} g_{ii}(A) &= f_{ii}(A) - p_0(A)a_{ii}^n - p_1(A)a_{ii}^{n-1} - \ldots - p_n(A) \\ &= f_{ii}(A) - f_{ii}(A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, cada g_{ii} é uma PI de grau n para $\mathbb{F}$, e como o corpo tem mais que n elementos então pelo Lema 1.2.8 temos $g_{ii} = 0$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

De (3.3) temos que dado $1 \leq i < j \leq r$ então

$$[g(A), A] = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{t=i}^{j} g_{it}(A)a_{tj} - \sum_{t=i}^{j} a_{it}g_{tj}(A) = 0, \quad \forall A \;\in \mathcal{T}_r.$$

Assim, como $|\mathbb{F}| > n+1$ temos que

$$\sum_{t=i}^{j} g_{it}x_{tj} - \sum_{t=i}^{j} x_{it}g_{tj} = 0. \tag{3.4}$$

Afirmação 2: *$g_{ij} = 0$, para todos $1 \leq i \leq j \leq r$.*

Vamos provar usando indução em $j - i$.

Se $j - i = 0$ então $j = i$ e provamos anteriormente que $g_{ii} = 0$, para todo $i = 1, \ldots r$.

Vamos fazer o caso $j - i = 1$. Neste caso, $j = i + 1$.

Por (3.4) temos

$$\begin{aligned} \sum_{t=i}^{i+1} g_{it}x_{t,i+1} - \sum_{t=i}^{i+1} x_{it}g_{t,i+1} = 0 \;&\Rightarrow\; g_{ii}x_{i,i+1} + g_{i,i+1}x_{i+1,i+1} - x_{ii}g_{i,i+1} - x_{i,i+1}g_{i+1,i+1} = 0 \\ &\Rightarrow\; g_{i,i+1}(x_{i+1,i+1} - x_{ii}) = 0 \\ &\Rightarrow\; g_{i,i+1} = 0. \end{aligned}$$

Suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para $j-i=k<n$. Vamos mostrar que é válido para $j-i=n$. Por (3.4) temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=i}^{j} g_{it}x_{tj} - \sum_{t=i}^{j} x_{it}g_{tj} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{t=i}^{j-1} g_{it}x_{tj} + g_{ij}x_{jj} - x_{ii}g_{ij} - \sum_{t=i+1}^{j} x_{it}g_{tj} = 0 \\
&\Rightarrow \quad g_{ij}(x_{jj} - x_{ii}) = 0 \\
&\Rightarrow \quad g_{ij} = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $g_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i \leq j \leq r$, provando a Afirmação 2.

Portanto, pela Afirmação 2 temos $g(A) = 0$. Assim, pela definição da função g temos

$$f(A, A, \ldots, A) = \sum_{j=0}^{n} p_j(A)A^{n-j}, \quad \forall\ A \in \mathcal{T}_r. \tag{3.5}$$

Agora vamos definir, para cada $t = 1, \ldots, n$, um polinômio

$$u_t \in \mathbb{F}[x_{ijs} :\ 1 \leq i \leq j \leq r \quad \text{e} \quad s = 1, 2, \ldots, t]$$

da seguinte maneira: dado um monômio $\alpha x_{i_1j_1}x_{i_2j_2}\ldots x_{i_tj_t}$, $\alpha \in \mathbb{F}$, que forma p_t, dizemos que $\alpha x_{i_1j_11}x_{i_2j_22}\ldots x_{i_tj_tt}$ é o seu correspondente em u_t. Defina u_t como a soma de todos os monômios que correspondem a algum monômio de p_t. Note que p_t é obtido por substituindo os x_{ijs} de u_t por x_{ij}.

Agora, para cada $t = 1, \ldots, n$ defina a função $\lambda_t : (\mathcal{T}_r)^t \longrightarrow \mathbb{F}$ por

$$\lambda_t(A_1, A_2, \ldots, A_t) = u_t(\{a_{ijs} :\ 1 \leq i \leq j \leq r \quad \text{e} \quad s = 1, 2, \ldots, t\}),$$

onde $A_s = (a_{ijs})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ para todo s. Na notação acima, substituimos toda variável x_{ijs} de u_t por a_{ijs} para obter $\lambda_t(A_1, A_2, \ldots, A_t)$.

Temos que λ_t é uma função multilinear e

$$\lambda_t(A, A, \ldots, A) = p_t(A). \tag{3.6}$$

Portanto, de (3.5) e (3.6) temos

$$f(A, A, \ldots, A) = \sum_{t=0}^{n} \lambda_t(A, A, \ldots, A)A^{n-t},$$

para todo $A \in \mathcal{T}_r$, onde $\lambda_0 = p_0 \in \mathbb{F}$.

Logo, o teorema está provado.

Agora faremos a justificativa da Afirmação 1. Para provar tal afirmação, vamos antes observar alguns fatos e fazer uma outra afirmação que vai auxiliar na justificativa.

Dados $1 \leq i \leq j \leq r$, segue de (3.1) que

$$\sum_{t=i}^{j} f_{it}(A)a_{tj} - \sum_{t=i}^{j} a_{it}f_{tj}(A) = 0, \quad \forall\ A \in \mathcal{T}_r. \tag{3.7}$$

Assim, como $|\mathbb{F}| > n+1$ então pelo Lema 1.2.8, (3.7) implica que o polinômio

$$\sum_{t=i}^{j} f_{it}x_{tj} - \sum_{t=i}^{j} x_{it}f_{tj} = 0. \tag{3.8}$$

Seja $\mathcal{M}_{ij} = \{M : \ M \subseteq \{i, i+1, \ldots, j\} \quad \text{e} \quad i, j \in M\}$.

Dado $M = \{i = k_1 < k_2 < \ldots < k_t = j\} \in \mathcal{M}_{ij}$, definimos

$$P_M = x_{k_1k_2}x_{k_2k_3}\cdots x_{k_{t-1}k_t}, \quad P_{l,M} = f_{k_lk_l}P_M \quad \text{e} \quad Q_{l,M} = \prod_{\substack{1\leq s\leq t,\\ s\neq l}} (x_{k_lk_l} - x_{k_sk_s}).$$

Afirmação 3: *Temos*

$$f_{ij} = \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \sum_{l=1}^{|M|} \frac{P_{l,M}}{Q_{l,M}} \in G, \tag{3.9}$$

onde $|M| = t$ *é a cardinalidade de* M.

Provaremos a afirmação por indução em $j - i$.

Se $j - i = 1$ então $j = i + 1$ e por (3.8) temos

$$\sum_{t=i}^{i+1} f_{it}x_{tj} - \sum_{t=i}^{i+1} x_{it}f_{tj} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{ii}x_{i,i+1} + f_{i,i+1}x_{i+1,i+1} - x_{ii}f_{i,i+1} - x_{i,i+1}f_{i+1,i+1} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{i,i+1} = \frac{f_{ii}x_{i,i+1} - f_{i+1,i+1}x_{i,i+1}}{x_{ii} - x_{i+1,i+1}}.$$

Por outro lado, $\mathcal{M}_{ii+1} = \{\{i, i+1\}\}$. Seja $M = \{i, i+1\}$. Temos

$$P_{1,M} = f_{ii}x_{i,i+1},\ P_{2,M} = f_{i+1,i+1}x_{i,i+1},\ Q_{1,M} = x_{ii} - x_{i+1,i+1} \text{ e } Q_{2,M} = x_{i+1,i+1} - x_{ii}$$

então

$$\frac{P_{1,M}}{Q_{1,M}} + \frac{P_{2,M}}{Q_{2,M}} = \frac{f_{ii}x_{i,i+1} - f_{i+1,i+1}x_{i,i+1}}{x_{ii} - x_{i+1,i+1}} = f_{i,i+1}.$$

Agora, fixando $j-i>1$, suponha por hipótese de indução que o resultado é válido para todo natural menor do que $j-i$. De (3.8) obtemos

$$\sum_{t=i}^{j} f_{it}x_{tj} - \sum_{t=i}^{j} x_{it}f_{tj} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{ij}x_{jj} + \sum_{t=i}^{j-1} f_{it}x_{tj} - x_{ii}f_{ij} - \sum_{t=i+1}^{j} x_{it}f_{tj} = 0 \Rightarrow$$

$$f_{ij}(x_{jj}-x_{ii}) = -\sum_{t=i}^{j-1} f_{it}x_{tj} + \sum_{t=i+1}^{j} x_{it}f_{tj} \Rightarrow$$

$$f_{ij}(x_{jj}-x_{ii}) = x_{ij}f_{jj} + \sum_{t=i+1}^{j-1} x_{it}f_{tj} - \sum_{t=i+1}^{j-1} f_{it}x_{tj} - f_{ii}x_{ij} \Rightarrow$$

$$f_{ij}(x_{jj}-x_{ii}) = x_{ij}f_{jj} + \sum_{t=i+1}^{j-1}\sum_{K\in\mathcal{M}_{tj}}\sum_{l=1}^{|K|}\frac{x_{it}P_{l,K}}{Q_{l,K}} - \sum_{t=i+1}^{j-1}\sum_{L\in\mathcal{M}_{it}}\sum_{l=1}^{|L|}\frac{P_{l,L}x_{tj}}{Q_{l,L}} - f_{ii}x_{ij}. \quad (3.10)$$

Dado $K\in\mathcal{M}_{tj}$, então $K\cup\{i\}\in\mathcal{M}_{ij}$. Por outro lado, dado $M=\{k_1,\ldots,k_t\}\in\mathcal{M}_{ij}$ e $M\neq\{i,j\}$, onde $i=k_1<\ldots<k_t=j$, temos que $M'=M\setminus\{i\}\in\mathcal{M}_{k_2j}$. Então

$$P_{l,M} = f_{k_lk_l}P_M = f_{k_lk_l}x_{k_1k_2}x_{k_2k_3}\cdots x_{k_{t-1}k_t} = P_{l,M'}x_{ik_2} \quad \text{e}$$

$$Q_{l,M} = \prod_{\substack{1\leq s\leq t\\ s\neq l}}(x_{k_lk_l}-x_{k_sk_s}) = (x_{k_lk_l}-x_{ii})\prod_{\substack{2\leq s\leq t\\ s\neq l}}(x_{k_lk_l}-x_{k_sk_s}) = Q_{l,M'}(x_{k_lk_l}-x_{ii}).$$

Temos

$$\sum_{t=i+1}^{j-1}\sum_{K\in\mathcal{M}_{tj}}\sum_{l=1}^{|K|}\frac{x_{it}P_{l,K}}{Q_{l,K}} = \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}}\sum_{l=2}^{|M|}\frac{P_{l,M}(x_{k_lk_l}-x_{ii})}{Q_{l,M}}. \quad (3.11)$$

Analogamente, temos

$$\sum_{t=i+1}^{j-1}\sum_{L\in\mathcal{M}_{it}}\sum_{l=1}^{|L|}\frac{P_{l,L}x_{tj}}{Q_{l,L}} = \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}}\sum_{l=1}^{|M|-1}\frac{P_{l,M}(x_{k_lk_l}-x_{jj})}{Q_{l,M}}. \quad (3.12)$$

De (3.10), (3.11) e (3.12) temos

$$f_{ij}(x_{jj}-x_{ii}) = x_{ij}f_{jj} - f_{ii}x_{ij} + \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}}\frac{P_{|M|,M}(x_{jj}-x_{ii})}{Q_{|M|,M}} +$$

$$\sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}}\sum_{l=2}^{|M|-1}\left[\frac{P_{l,M}(x_{k_lk_l}-x_{ii})}{Q_{l,M}} - \frac{P_{l,M}(x_{k_lk_l}-x_{jj})}{Q_{l,M}}\right] - \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}}\frac{P_{1,M}(x_{ii}-x_{jj})}{Q_{1,M}}$$

$$= x_{ij}f_{jj} - f_{ii}x_{ij} + \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}} \frac{P_{|M|,M}(x_{jj}-x_{ii})}{Q_{|M|,M}} + \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}} \sum_{l=2}^{|M|-1} \frac{P_{l,M}(x_{jj}-x_{ii})}{Q_{l,M}} - \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}} \frac{P_{1,M}(x_{ii}-x_{jj})}{Q_{1,M}}.$$

Note que se $M = \{i,j\}$ então

$$P_{1,M} = f_{ii}x_{ij}, \quad P_{2,M} = f_{jj}x_{ij}, \quad Q_{1,M} = x_{ii} - x_{jj} \quad \text{e} \quad Q_{2,M} = x_{jj} - x_{ii}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_{jj}-x_{ii}) &= (x_{jj}-x_{ii})\frac{P_{1,\{i,j\}}}{Q_{1,\{i,j\}}} + (x_{jj}-x_{ii})\frac{P_{2,\{i,j\}}}{Q_{2,\{i,j\}}} + \sum_{\substack{M\in\mathcal{M}_{ij}\\ M\neq\{i,j\}}} \sum_{l=1}^{|M|} \frac{P_{l,M}(x_{jj}-x_{ii})}{Q_{l,M}} \\ &= \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \sum_{l=1}^{|M|} \frac{P_{l,M}(x_{jj}-x_{ii})}{Q_{l,M}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{ij} = \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \sum_{l=1}^{|M|} \frac{P_{l,M}}{Q_{l,M}}.$$

Assim, a Afirmação 3 está provada.

Vamos relembrar o que diz a Afirmação 1:

Afirmação 1: *$x_{jj} - x_{ii}$ divide $f_{jj} - f_{ii}$, para todo $1 \leq i < j \leq r$.*

Para provar essa afirmação, defina $\alpha \in End(K)$ por $\alpha(x_{jj}) = x_{ii}$ e $\alpha(x_{pq}) = x_{pq}$, se $(p,q) \neq (j,j)$. Temos que $ker(\alpha) = (x_{ii} - x_{jj})K$.

Note que se mostrarmos que $\alpha(f_{ii} - f_{jj}) = 0$ então $f_{ii} - f_{jj} = (x_{ii} - x_{jj})h$, com $h \in K$, e com isso prova a afirmação.

Portanto, vamos mostrar que $\alpha(f_{ii} - f_{jj}) = 0$.

Note que $x_{jj} - x_{ii}$ divide um polinômio $Q_{l,M}$ se, e somente se, $l = 1$ ou $l = |M|$. De fato, temos da definição de $Q_{l,M}$ que se $l = 1$ então o termo $(x_{ii} - x_{jj})$ aparece em $Q_{1,M}$ e se $l = |M|$ então $(x_{jj} - x_{ii})$ é um dos fatores de $Q_{|M|,M}$. Nos demais casos, nenhum desses dois termos aparece, logo $x_{jj} - x_{ii}$ não pode dividir $Q_{l,M}$ se $l \neq 1, |M|$.

Defina

$$Q = \prod_{i\leq k<l\leq j} (x_{kk} - x_{ll}) \quad \text{e} \quad R_{l,M} = \frac{Q}{Q_{l,M}}.$$

Note que cada $R_{l,M}$ é um polinômio. Temos que

$$\alpha(P_M) = P_M \quad \text{e} \quad \alpha(R_{1,M}) = -\alpha(R_{|M|,M}), \quad \text{para todo } M \in \mathcal{M}_{ij}. \tag{3.13}$$

De fato, a primeira igualdade segue do seguinte:

$$\alpha(P_M)=\alpha(x_{k_1k_2}\cdots x_{k_{t-1}k_t})=\alpha(x_{k_1k_2})\cdots\alpha(x_{k_{t-1}k_t})=x_{k_1k_2}\cdots x_{k_{t-1}k_t}=P_M.$$

Para a segunda igualdade

$$\alpha(R_{|M|,M})=\alpha(R_{t,M})=\alpha\left(\frac{\prod_{i\leq k<l\leq j}(x_{kk}-x_{ll})}{\prod_{s=1}^{t-1}(x_{jj}-x_{k_sk_s})}\right)=(-1)^{t-1}\prod_{\substack{i\leq k<l\leq j\\ (k,l)\neq(k_1,j),\ldots,(k_t,j)}}\alpha(x_{kk}-x_{ll})\Rightarrow$$

$$\alpha(R_{|M|,M})=\left((-1)^{t-1}\prod_{i\leq k<l\leq j-1}(x_{kk}-x_{ll})\right)\prod_{\substack{i\leq k\leq j\\ k\notin M}}(x_{kk}-x_{ii}). \tag{3.14}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha(R_{1,M}) &= \alpha\left(\frac{\prod_{i\leq k<l\leq j}(x_{kk}-x_{ll})}{\prod_{s=2}^{t}(x_{ii}-x_{k_sk_s})}\right)=\alpha\left(\prod_{\substack{i\leq k<l\leq j\\ (k,l)\neq(i,k_2),\ldots,(i,k_t)}}(x_{kk}-x_{ll})\right)\\
&= \prod_{\substack{i\leq l\leq j\\ l\notin M}}(x_{ii}-x_{ll})\prod_{i+1\leq k<l\leq j-1}(x_{kk}-x_{ll})\prod_{k=i+1}^{j-1}(x_{kk}-x_{ii})\\
&= \prod_{\substack{i\leq l\leq j\\ l\notin M}}(x_{ii}-x_{ll})\prod_{i+1\leq k<l\leq j-1}(x_{kk}-x_{ll})(-1)^{j-i-1}\prod_{k=i+1}^{j-1}(x_{ii}-x_{kk})\\
&= \prod_{\substack{i\leq l\leq j\\ l\notin M}}(x_{ii}-x_{ll})\prod_{i\leq k<l\leq j-1}(x_{kk}-x_{ll})(-1)^{j-i-1}\\
&= (-1)^{j-i+1-t}(-1)^{j-i-1}\prod_{\substack{i\leq l\leq j\\ l\notin M}}(x_{ll}-x_{ii})\prod_{i\leq k<l\leq j-1}(x_{kk}-x_{ll})\\
&\overset{(3.14)}{=} \frac{(-1)^{-t}}{(-1)^{t-1}}\alpha(R_{|M|,M})\\
&= -\alpha(R_{|M|,M}).
\end{aligned}$$

Multiplicando (3.9) por Q tem-se da Afirmação 3 que

$$f_{ij}Q=\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}}\sum_{l=1}^{|M|}\frac{P_{l,M}}{Q_{l,M}}Q=\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}}\sum_{l=1}^{|M|}P_{l,M}R_{l,M}. \tag{3.15}$$

Aplicando α em (3.15), usando (3.13) e o fato que $\alpha(Q)=0=\alpha(R_{l,M})$, para todo

$M \in \mathcal{M}_{ij}$ e $l \neq 1, |M|$ então

$$0 = \alpha(f_{ij})\alpha(Q) = \alpha(f_{ij}Q) = \alpha(\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}}\sum_{l=1}^{|M|} P_{l,M}R_{l,M}) \Rightarrow$$

$$\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(P_{1,M}R_{1,M}) + \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}}\sum_{l=2}^{|M|-1} \alpha(P_{l,M})\alpha(R_{l,M}) + \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(P_{|M|,M}R_{|M|,M}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(P_{1,M})\alpha(R_{1,M}) + \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(P_{|M|,M})\alpha(R_{|M|,M}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(f_{ii})\alpha(P_M)\alpha(R_{1,M}) + \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} \alpha(f_{jj})\alpha(P_M)(-\alpha(R_{1,M})) = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha(f_{ii}) - \alpha(f_{jj})) \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} P_M\alpha(R_{1,M}) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha(f_{ii} - f_{jj}) \sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} P_M\alpha(R_{1,M}) = 0. \tag{3.16}$$

Tomando $L = \{i, i+1, \dots, j\}$, temos

$$P_L = x_{i,i+1}x_{i+1,i+2}\cdots x_{j-1,j}, \quad Q_{1,L} = \prod_{i<l\leq j}(x_{ii}-x_{ll}) \quad \text{e} \quad R_{1,L} = \frac{Q}{Q_{1,L}} = \prod_{i<k<l\leq j}(x_{kk}-x_{ll}).$$

Como $L \in \mathcal{M}_{ij}$ então $P_L\alpha(R_{1,L})$ é uma parcela de $\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} P_M\alpha(R_{1,M})$, mas

$$\begin{aligned} P_L\alpha(R_{1,L}) &= x_{i,i+1}x_{i+1,i+2}\cdots x_{j-1,j}\prod_{i<k<l\leq j}(x_{kk} - \alpha(x_{ll})) \\ &= \underbrace{x_{i,i+1}x_{i+1,i+2}\cdots x_{j-1,j}x_{i+1,i+1}^{j-i-1}x_{i+2,i+2}^{j-i-2}\cdots x_{j-1,j-1}}_{(*)} + g. \end{aligned}$$

Logo, o termo $(*)$ é um monômio de $\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} P_M\alpha(R_{1,M})$ com coeficiente 1. Portanto, $\sum_{M\in\mathcal{M}_{ij}} P_M\alpha(R_{1,M}) \neq 0$ e como K é um domínio de integridade, de (3.16) temos

$$\alpha(f_{ii} - f_{jj}) = 0,$$

como desejávamos.

Portanto, a afirmação 1 está provada. □

Agora vamos fazer um exemplo em que o teorema não é válido quando $|\mathbb{F}| = n$.

Exemplo 3.1.3. Seja $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ e $\mathcal{T}_r$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre $\mathbb{Z}_2$. Defina $f : \mathcal{T}_r^2 \longrightarrow \mathcal{T}_r$ por $f(x, y) = e_{11}xe_{1r}ye_{rr}$.

Temos que f é multilinear e para todo $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{T}_r$ vale

$$\begin{aligned}
[f(A), A] &= e_{11}Ae_{1r}Ae_{rr}A - Ae_{11}Ae_{1r}Ae_{rr} \\
&= a_{11}a_{rr}a_{rr}e_{1r} - a_{11}a_{11}a_{rr}e_{1r} \\
&= a_{11}a_{rr}(a_{rr} - a_{11})e_{1r} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade se deve ao fato que $a_{11}, a_{rr} \in \mathbb{Z}_2$, logo se um deles for igual a $\overline{0}$ então $a_{11}a_{rr} = \overline{0}$ e a expressão é nula. Caso $a_{11} = a_{rr} = \overline{1}$ então $a_{rr} - a_{11} = \overline{0}$ e a expressão é nula.

Vamos mostrar que $f(x, y)$ não é da forma como em (3.2).

Dados $X, Y \in \mathcal{T}_r$ escreva $X = (x_{ij})_{ij}$ e $Y = (y_{ij})_{ij}$. Assim,

$$f(X, Y) = x_{11}y_{rr}e_{1r}. \tag{3.17}$$

Suponha que $f(x, y)$ tem a forma (3.2), ou seja, existem $\lambda_i : \mathcal{T}_r^i \longrightarrow \mathbb{F}$, $i = 0, 1, 2$ tal que

$$f(A, A) = \lambda_0 A^2 + \lambda_1(A)A + \lambda_2(A, A)Id_r, \quad \forall\ A \in \mathcal{T}_r.$$

Assim,

$$f(Id_r, Id_r) = \lambda_0 Id_r^2 + \lambda_1(Id_r)Id_r + \lambda_2(Id_r, Id_r)Id_r = \alpha Id_r, \quad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{F}.$$

Mas por (3.17) deveríamos ter $f(Id_r, Id_r) = e_{1r}$, contradição.

Portanto, $f(x, y)$ não pode ser da forma como em (3.2).

Na sequência, vamos introduzir algumas notações e a definição de *quase-polinômio multilinear*.

Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito e k um inteiro com $0 \leq k \leq n$. Denotamos por $\mathcal{M}_n^k$ o conjunto de todos os monômios multilineares de grau k nas variáveis não comutativas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{M}_n^k,$$

onde $\mathcal{M}_n^0 = \{1\}$.

Seja $L = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_u} \in \mathcal{M}_n$. Dada uma função multilinear $F : \mathcal{T}_r^{n-u} \longrightarrow \mathbb{F}$, definimos

$$F^L(s_1, s_2, \ldots, s_n) = F(s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_{n-u}}), \quad \forall\ s_1, s_2 \ldots, s_n \in \mathcal{T}_r,$$

onde $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-u}\} = \{1, 2, \ldots, n\}\backslash\{i_1, i_2, \ldots, i_u\}$ e $j_t < j_{t+1}$, para todo $t = 1, 2, \ldots, n-u-1$.

Definição 3.1.4. A expressão

$$q = \sum_{L\in\mathcal{M}_n} \lambda_L^L L,$$

onde $\lambda_L : \mathcal{T}_r^{n-u} \longrightarrow \mathbb{F}$ é função multilinear, é chamada de **quase-polinômio multilinear** com coeficientes λ_L.

A seguir apresentaremos um resultado envolvendo quase-polinômios multilineares na álgebra $\mathcal{T}_r$.

Teorema 3.1.5. *Seja $\mathcal{T}_r, r \geq 2$, o anel das matrizes triangulares superiores $r \times r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Além disso, seja $q : \mathcal{T}_r^n \longrightarrow \mathcal{T}_r, n < r$, um quase-polinômio multilinear tal que*

$$q(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0, \quad \forall\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}_r. \tag{3.18}$$

Então todos os coeficientes de q são iguais a zero.

Demonstração. Por definição temos que

$$q = \sum_{L\in\mathcal{M}_n} \lambda_L^L L.$$

Suponha que nem todos os λ_L's sejam iguais a zero. Seja $W \in \mathcal{M}_n$ o monômio de grau mais alto tal que $\lambda_W \neq 0$.

Vamos supor sem perda de generalidade que

$$W = x_1x_2\cdots x_m, \quad m \leq n.$$

Como λ_W é multilinear por hipótese, então

$$\lambda_W(e_{i_{m+1},j_{m+1}}, e_{i_{m+2},j_{m+2}}, \ldots, e_{i_n,j_n}) \neq 0$$

para alguns $1 \leq i_s \leq j_s \leq r, s = m+1, m+2, \ldots, n$.

Defina

$$K = \{1, 2, \ldots, r\} \setminus \{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n\}.$$

Como $m \leq n < r$, temos que $|K| = r - (n-m) = m + (r-n) > m$. Assim, podemos escrever $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$, onde $l > m$ e $k_1 < k_2 < \ldots < k_l$. Defina

$$A_t = \begin{cases} e_{k_t, k_{t+1}}, & \text{se} \quad 1 \leq t \leq m, \\ e_{i_t, j_t}, & \text{se} \quad m+1 \leq t \leq n. \end{cases}$$

Afirmação:

$$e_{k_1 k_1} q(A_1, \ldots, A_n) e_{k_{m+1}, k_{m+1}} = \lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) e_{k_1, k_{m+1}}. \tag{3.19}$$

De fato, tome qualquer $L \in \mathcal{M}_n$, com $\lambda_L \neq 0$ e $L \neq W$. Pela construção de W temos $\deg(L) \leq \deg(W)$. Escreva

$$L = x_{l_1} x_{l_2} \cdots x_{l_p}.$$

Note que por construção temos $p \leq m$.

Suponha por absurdo que

$$e_{k_1 k_1} A_{l_1} A_{l_2} \cdots A_{l_p} e_{k_{m+1}, k_{m+1}} \neq 0. \tag{3.20}$$

Para que (3.20) seja satisfeita, devemos ter $A_{l_p} e_{k_{m+1}, k_{m+1}} \neq 0$, e consequentemente, pela definição dos A_t's, devemos ter necessariamente $A_{l_p} = e_{k_m, k_{m+1}} = A_m$. Note que A_{l_p} não pode assumir a forma e_{i_t, j_t}, se $m+1 \leq t \leq n$, pois $k_{m+1} \in K$, mas $j_t \notin K$, para $m+1 \leq t \leq n$. Logo, temos que $m = l_p$.

Usando o mesmo argumento, temos

$$l_{p-1} = m-1, l_{p-2} = m-2, \ldots, l_1 = m-p+1.$$

Logo, de (3.20) vale a premissa e a implicação abaixo:

$$e_{k_1 k_1} \underbrace{e_{k_{(m-p+1)}, k_{(m-p+2)}}}_{A_{l_1}} \underbrace{e_{k_{(m-p+2)}, k_{(m-p+3)}}}_{A_{l_2}} \cdots \underbrace{e_{k_m, k_{m+1}}}_{A_{l_p}} e_{k_{m+1} k_{m+1}} \neq 0 \Rightarrow$$

$$e_{k_1, k_1} e_{k_{(m-p+1)}, k_{m+1}} \neq 0.$$

Se $p = m$ então $L = x_1 \cdots x_m = W$, absurdo. Se $p < m$, então $e_{k_1 k_1} e_{k_{(m-p+1)}, k_{m+1}} = 0$, absurdo.

Acabamos de mostrar que se $L = x_{l_1} \cdots x_{l_p}$, $L \neq W$, então

$$e_{k_1k_1} A_{l_1} A_{l_2} \cdots A_{l_p} e_{k_{m+1},k_{m+1}} = 0. \tag{3.21}$$

Para facilitar a notação, vamos denotar $L = L(x_1, \ldots, x_n)$. Assim,

$$\begin{aligned} e_{k_1k_1} q(A_1, \ldots, A_n) e_{k_{m+1},k_{m+1}} &= e_{k_1k_1} \sum_{L \in \mathcal{M}_n} \lambda_L^L(A_1, \ldots, A_n) L(A_1, \ldots, A_n) e_{k_{m+1},k_{m+1}} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{M}_n} \lambda_L^L(A_1, \ldots, A_n) e_{k_1k_1} L(A_1, \ldots, A_n) e_{k_{m+1},k_{m+1}} \\ &= \lambda_W^W(A_1, \ldots, A_n) e_{k_1k_1} W(A_1, \ldots, A_n) e_{k_{m+1},k_{m+1}} \\ &= \lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) e_{k_1k_1} A_1 \cdots A_m e_{k_{m+1},k_{m+1}} \\ &= \lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) e_{k_1,k_{m+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação está provada.

Como $\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) = \lambda_W(e_{i_{m+1},j_{m+1}}, \ldots, e_{i_n,j_n}) \neq 0$ e $\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) \in \mathbb{F}$ temos

$$\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) e_{k_1,k_{m+1}} \neq 0.$$

Então, por (3.19), $q(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$ e temos um absurdo.

Concluímos que cada coeficiente de q é zero, como queríamos. $\square$

Com algumas modificações, podemos generalizar o Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.6. *Seja $\mathcal{T}_r(A), r \geq 2$, a $\mathbb{F}$-álgebra das matrizes triangulares superiores $r \times r$ com entradas numa $\mathbb{F}$-álgebra A sem unidade. Além disso, seja $q : \mathcal{T}_r^n(A) \longrightarrow \mathcal{T}_r(A), n < r$, um quase-polinômio multilinear tal que*

$$q(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0, \quad \forall\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}_r(A). \tag{3.22}$$

Se A não é nilpotente de classe $n+2$, então todos os coeficientes de q são iguais a zero.

Demonstração. Seja β_A uma base do $\mathbb{F}$-espaço vetorial A. Então uma base para $\mathcal{T}_r(A)$ é

$$\{ae_{ij} : \ a \in \beta_A \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq j \leq r\}.$$

Por definição temos que

$$q = \sum_{L \in \mathcal{M}_n} \lambda_L^L L.$$

Suponha que nem todos os λ_L's sejam iguais a zero. Seja $W \in \mathcal{M}_n$ o monômio de grau mais alto tal que $\lambda_W \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$W = x_1x_2\cdots x_m, \quad m \leq n.$$

Como λ_W é multilinear temos

$$\lambda_W(a_{i_{m+1},j_{m+1}}e_{i_{m+1},j_{m+1}}, a_{i_{m+2},j_{m+2}}e_{i_{m+2},j_{m+2}}, \ldots, a_{i_n,j_n}e_{i_n,j_n}) \neq 0$$

para alguns $1 \leq i_s \leq j_s \leq r$, $a_{i_s,j_s} \in \beta_A$, $s = m+1, m+2, \ldots, n,$.

Defina

$$K = \{1, 2, \ldots, r\} \setminus \{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n\}.$$

Como $m \leq n < r$, temos que $|K| = r - (n-m) = m + (r-n) > m$. Assim, podemos escrever $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$, $l > m$ e $k_1 < k_2 < \ldots < k_l$.

Pela hipótese, de nilpotência, existem $a_{k_1,k_1}, a_{k_1,k_2}, \ldots, a_{k_m,k_{m+1}}, a_{k_{m+1},k_{m+1}} \in A$ tais que

$$a_{k_1,k_1}a_{k_1,k_2}\cdots a_{k_m,k_{m+1}}a_{k_{m+1},k_{m+1}} \neq 0.$$

Defina

$$A_t = \begin{cases} a_{k_t,k_{t+1}}e_{k_t,k_{t+1}}, & \text{se} \quad 1 \leq t \leq m, \\ a_{i_t,j_t}e_{i_t,j_t}, & \text{se} \quad m+1 \leq t \leq n. \end{cases}$$

Afirmação:

$$a_{k_1,k_1}e_{k_1k_1}q(A_1, \ldots, A_n)a_{k_{m+1},k_{m+1}}e_{k_{m+1},k_{m+1}} =$$

$$\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n)a_{k_1,k_1}a_{k_1,k_2}\cdots a_{k_m,k_{m+1}}a_{k_{m+1},k_{m+1}}e_{k_1,k_{m+1}}.$$

A justificativa para essa afirmação é análoga à feita no Teorema 3.1.5.

Assim, de

$$\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) = \lambda_W(a_{i_{m+1},j_{m+1}}e_{i_{m+1},j_{m+1}}, \ldots, a_{i_n,j_n}e_{i_n,j_n}) \neq 0$$

e $\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n) \in \mathbb{F}$ temos

$$\lambda_W(A_{m+1}, \ldots, A_n)a_{k_1,k_1}a_{k_1,k_2}\cdots a_{k_m,k_{m+1}}a_{k_{m+1},k_{m+1}}e_{k_1,k_{m+1}} \neq 0.$$

Pela afirmação acima segue que

$$a_{k_1,k_1}e_{k_1k_1}q(A_1, \ldots, A_n)a_{k_{m+1},k_{m+1}}e_{k_{m+1},k_{m+1}} \neq 0.$$

Mas então $q(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$, o que é uma contradição.

Concluímos que cada coeficiente de q é zero, como queríamos. $\square$

3.2 Funções satisfazendo $[\theta(A^2), \theta(A)] = 0$

Nesta seção vamos fazer uma aplicação do Teorema 3.1.2. Para isso, precisaremos da definição de um *homomorfismo de Jordan* e de dois resultados que enunciaremos na sequência.

Definição 3.2.1. Sejam A e B álgebras sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma função linear $\varphi : B \longrightarrow A$ é chamada de **homomorfismo de Jordan** se

$$\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a),$$

para todo $a, b \in B$.

Teorema 3.2.2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo tal que char$(\mathbb{F}) \neq 2$ e seja $r \geq 2$ um inteiro. Então todo automorfismo de Jordan φ de $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ é um automorfismo ou um antiautomorfismo.*

Demonstração. Para a demonstração ver [11, Corolário 4]. □

Lema 3.2.3. *Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{F}$. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

i) *char$(\mathbb{F}) \neq 2$ e $|\mathbb{F}| > 3$.*

ii) *o centro de A é $\mathbb{F} \cdot 1$, onde 1 é a identidade de A.*

iii) *o polinômio $[[x^2, y], [x, y]]$ não é identidade polinomial de A.*

iv) *se $f : A \times A \longrightarrow A$ é função bilinear satisfazendo $[f(a, a), a] = 0$, para todo $a \in A$, então existem $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, uma função linear $\lambda_1 : A \longrightarrow \mathbb{F}$, e uma função $\lambda_2 : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$ tais que $f(a, a) = \lambda_0 a^2 + \lambda_1(a)a + \lambda_2(a, a)$, para todo $a \in A$.*

Então toda função linear bijetora $\theta : A \longrightarrow A$ satisfazendo $[\theta(a^2), \theta(a)] = 0$, para todo $a \in A$ é da forma $\theta(a) = \lambda\varphi(a) + \mu(a)1$, onde $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, μ é um funcional linear em A e φ é um automorfismo de Jordan de A.

Demonstração. A demonstração desse lema pode ser feita como em [2, Teorema 2]. □

Com esses conceitos e resultados podemos fazer a seguinte aplicação do Teorema 3.1.2:

Teorema 3.2.4. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo com $char(\mathbb{F}) \neq 2$, $|\mathbb{F}| > 3$ e $r \geq 3$. Se $\theta : \mathcal{T}_r(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ é uma função linear bijetiva e*

$$[\theta(A^2), \theta(A)] = 0,$$

para todo $A \in \mathcal{T}_r(\mathbb{F})$, então

$$\theta(A) = \lambda\varphi(A) + \mu(A)Id_r,$$

onde $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, μ é um funcional linear em $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ e φ é um automorfismo ou um antiautomorfismo de $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$.

Demonstração. Vamos verificar que as condições i), ii), iii) e iv) do Lema 3.2.3 são satisfeitas para $A = \mathcal{T}_r(\mathbb{F})$.

i) É satisfeito por hipótese.

ii) É fato bem conhecido.

iii) Vamos mostrar que $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ não satisfaz identidades polinomiais de grau menor do que $2r$. De fato, suponha o contrário. Então, usando o processo de linearização, caso necessário, temos que $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ tem uma identidade polinomial multilinear $f(x_1, \ldots, x_m)$, com $m < 2r$.

Fazendo

$$f(x_1, \ldots, x_m)x_{m+1} \cdots x_{2r-1} = g(x_1, \ldots, x_{2r-1}),$$

escreva

$$g(x_1, \ldots, x_{2r-1}) = \sum_{\sigma \in S_{2r-1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2r-1)}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_{id} \neq 0$. Assim,

$$0 = g(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \ldots, e_{r-1,r-1}, e_{r-1,r}, e_{rr}) = \alpha_{id}e_{1r},$$

o que implica em $\alpha_{id} = 0$, absurdo.

Como $[[x^2, y], [x, y]]$ tem grau 5 e por hipótese $r \geq 3$, essa expressão não pode ser identidade polinomial para $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$ e a condição iii) está satisfeita.

iv) Este item é satisfeito em decorrência do Teorema 3.1.2.

Portanto, pelo Lema 3.2.3, a existência de λ, φ e μ está garantida, mas com um porém: φ é um automorfismo de Jordan de $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$. Mas pelo Teorema 3.2.2 temos que φ

é um automorfismo ou um antiautomorfismo de $\mathcal{T}_r(\mathbb{F})$, concluindo assim a demonstração.

$\square$

As referências [10] e [11] apresentam exemplos em que o Teorema 3.2.4 não é válido quando $r = 2$.

Referências Bibliográficas

[1] K. I. Beidar, M. Brešar, M.A. Chebotar. *Functional identities on upper triangular matrix algebras*. Journal of Mathematical Sciences, **102**, 4557-4565, (2000).

[2] M. Brešar. *Commuting Traces of Biadditive Mappings, Commutativity Preserving Mappings and Lie Mappings*. Transactions of the American Mathematical Society, **335**, 525-546, (1993).

[3] M. Brešar. *On d-free rings*. Comm. Algebra, **31**, 2287-2309, (2003).

[4] M. Brešar, M.A. Chebotar, W. S. Martindale. *Functional Identities*. Birkhauser Verlag, Basel, (2007).

[5] M. Brešar. *Introduction to Noncommutative Algebra*. Springer, (2014).

[6] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, (1999).

[7] A. Giambruno, M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.122, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[8] T. P Kezlan. *A Note on Algebra Automorphisms of Triangular Matrices over Commutative Rings*. Linear Algebra and its Applications, **135**, 181-184, (1990).

[9] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag, New York, (1991).

[10] L.W. Marcoux, A.R. Sourour. *Commutativity preserving linear maps and Lie automorphisms of triangular matrix algebras*. Linear Algebra and its Applications, **288**, 89-104, (1999).

[11] L. Molnár, P. Semrl. *Some linear preserver problems on upper triangular matrices*. Linear Multilinear Algebra, **45**, 189-206, (1998).