UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HIPOELIPTICIDADE, RESOLUBILIDADE E FORMAS NORMAIS PARA CAMPOS VETORIAIS NO TORO

PATRÍCIA YUKARI SATO RAMPAZO

São Carlos-SP
20 de Março de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HIPOELIPTICIDADE, RESOLUBILIDADE E FORMAS NORMAIS PARA CAMPOS VETORIAIS NO TORO

PATRÍCIA YUKARI SATO RAMPAZO
Orientador: LUÍS ANTÔNIO CARVALHO DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
20 de Março de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rampazo, Patrícia Yukari Sato
R177hr Hipoelipticidade, resolubilidade e formas normais para campos vetoriais no toro / Patrícia Yukari Sato Rampazo. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
71 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Operadores diferencias parciais. 2. Hipoelipticidade. 3. Resolubilidade. 4. Toro n-dimensional. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Patrícia Yukari Sato Rampazo, realizada em 24/04/2015:

Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos
UFSCar

Prof. Dr. Gerson Petronilho
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!

Mário Quintana

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo carinho e incentivo. Meu pai Valdir, minha mãe Elisa e minha irmã Vanessa, acreditam em minha capacidade mais do que eu mesma.

Ao professor Luís Antônio, pela paciência, excelente orientação e dedicação depositada neste trabalho.

Aos professores José Roberto e Suetônio por me iniciarem à pesquisa e incentivarem a seguir meus estudos após a graduação. E ao professor Marinaldo por me guiar ao caminho da Matemática.

Aos colegas e amigos do DM, pela ajuda e palavras de motivação, pelos compartilhamentos de experiências e momentos de descontração.

Aos demais contribuintes e, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar uma classe de campos vetoriais reais definidos sobre um toro, onde os conceitos de hipoelipticidade global, resolubilidade global C^∞ e redução à sua forma normal são equivalentes. Também estudamos que uma família de campos vetoriais reais que comutam entre si, pode ser transformada em uma família de campos vetoriais constantes com a condição de que um deles tenha o seu operador transposto dado por um operador hipoelíptico. Fornecemos ainda algumas aplicações sobre a propriedade de hipoelipticidade global para uma classe de sublaplaceanos. Este trabalho foi baseado nos artigos [11] and [12] de Gerson Petronilho.

Abstract

The main aim of this work is to study a class of real vector fields defined on a torus, where the concepts of global hypoellipticity, global C^∞ solvability and reduction to its normal form are equivalents. We also study a family of commuting vector fields that can be converted into a family of constant vector fields provided that there is one of them which its transpose operator is given by a hypoelliptic operator. We also provide some applications on the global hypoellipticity property for a class of sublaplaceans. This work was based on articles [11] and [12] from Gerson Petronilho.

Sumário

Introdução

Neste trabalho foram estudados os artigos do autor Gerson Petronilho que seguem nas referências [11] e [12]. O objetivo principal do primeiro artigo é apresentar uma classe de campos vetoriais reais definidos no toro $\mathbb{T}^N$ onde os conceitos de hipoelipticidade global, resolubilidade C^∞ e redução do campo a sua forma normal são equivalentes, e no segundo, obter a redução simultânea de uma família de campos vetoriais reais que comutam entre si à sua forma normal.

Em 1973, Greenfield e Wallach [6], considerando o operador $L = a_1(u,v)\partial_u + a_2(u,v)\partial_v$ em $\mathbb{T}^2$, com $a_1, a_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ provaram que se o adjunto de L é hipoelíptico, então existe uma transformação suave $\tau : (u,v) \to (x,y)$ tal que $L = F(x,y)(\partial_x + \Lambda\partial_y)$, onde $F \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $F(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{T}^2$. Ainda, Λ é um número real chamado Diofantino, ou seja, existem constantes positivas C_0 e N_0 tais que

$$|k + \ell\Lambda| \geq \frac{C_0}{(|k| + |\ell|)^{N_0}}, \quad \forall k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Chen e Chi [2], mostraram que o adjunto L^* de um campo vetorial L é globalmente hipoelíptico se, e somente se, existe um difeomorfismo global C^∞, $\tau : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^N$ que conjuga L à sua forma normal, isto é, sendo $y = \tau(x)$, pode-se escrever $L = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$, onde os coeficientes reais Λ_j satisfazem a seguinte condição Diofantina. Existem $K \in \mathbb{Z}_+$ e $C > 0$ tais que

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \Lambda_j \right| \geq \frac{C}{(1 + |\xi|)^K}, \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \qquad (\star).$$

Em [11], Petronilho obtém o seguinte resultado. Dado um campo vetorial real suave $L = \sum_{j=1}^N a_j \partial_{x_j}$ definido no toro $\mathbb{T}^N$, suponha que $\ker L^* = [\omega]$, onde $w \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^N$, então são equivalentes:

1. Existe um difeomorfismo C^∞, $\tau : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^N$, que conjuga L à sua forma normal $L = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$, sendo que os números $\Lambda_1, ..., \Lambda_N$ satisfazem a condição $(\star)$.

2. L^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

3. L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

4. L é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$.

5. L^* é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$.

Usando argumentos clássicos prova-se que se o transposto L^* de um campo vetorial real suave é globalmente hipoelíptico, então $\ker L^* = [\omega]$, com $w \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\omega(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{T}^N$. Entretanto, tal condição pode ocorrer mesmo que o operador transposto não seja globalmente hipoelíptico. De fato, considere por exemplo o campo $L = \partial_t + \lambda\partial_x$ onde λ é um número de Liouville, então L não é globalmente hipoelíptico muito embora $\ker L^* = [1]$.

Um fato importante em [2] é que quando o operador L^* é globalmente hipoelíptico então o operador L é globalmente resolúvel em C^∞. Tal fato é fundamental para a construção de um difeomorfismo que conjuga o campo L num campo com coeficientes constantes, satisfazendo a condição $(\star)$. Para a prova da resolubilidade global é usado um argumento clássico conhecido como estimativa à priori em espaços de Sobolev, $H^s(\mathbb{T}^N)$ como segue.

Seja $P = P(x, D)$ um ODPL e denotemos por P^* o seu transposto, supondo que P^* seja globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, então existem $\ell \in \mathbb{Z}_+$ e $c > 0$ tais que

$$\|\varphi\|_{H^0} \leq c\,\|P^*\varphi\|_{H^\ell}, \quad \forall\varphi \in (\ker P^*)^\perp \cap C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Por outro lado, a recíproca em geral não ocorre, ou seja, a resolubilidade global C^∞ não implica a hipoelipticidade de L ou L^*. De fato, considere o operador $X = \partial_t + \lambda\partial_x$, com $(t, x) \in \mathbb{T}^2$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$. Temos que L é globalmente C^∞ resolúvel mas L e $L^* = -L$ não são globalmente hipoelípticos em $\mathbb{T}^2$.

Como aplicação do resultado central, consideramos operadores da forma $P = -\Delta_t - L_x^2$ no toro $\mathbb{T}^{n+m}$, sendo $t \in \mathbb{T}^n$, $x \in \mathbb{T}^m$, $\Delta_t = \sum_{k=1}^n \partial_{t_k}^2$ e L_x um campo vetorial real suave sobre $\mathbb{T}^m$. Analisamos a relação de hipoelipticidade global e resolubilidade global C^∞ entre os operadores P em $\mathbb{T}^{n+m}$ e L_x em $\mathbb{T}^m$ bem como entre seus transpostos. Para obter a hipoelipticidade de P^* foi necessário utilizar a transformada parcial de Fourier, obtemos a suavidade de uma distribuição em $\mathbb{T}^{n+m}$ observando o decaimento rápido de sua transformada parcial de Fourier em uma das variáveis.

Ainda, analisamos o operador $X = \partial_t + a(t)\partial_x + b(t)\partial_y$ em $\mathbb{T}^3$, para relacionar os vários tópicos apresentados no trabalho até então. No estudo da hipoelipticidade de X foi necessário utilizar conceitos de análise microlocal e observando condições especiais para o seu núcleo, todos os resultados vistos no Capítulo 2 são aplicáveis a esse operador.

Em [12] verifica-se resultados não somente para um campo, mas para $X_1, ..., X_m$ uma família de campos vetoriais reais em $\mathbb{T}^N$. Adicionando a hipótese de que os campos desta família comutam entre si, e que o transposto de um deles é um operador globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$, então, mostra-se que existem coordenadas globais y em $\mathbb{T}^N$ tais que a família $\{X_j\}_1^m$ admite a forma normal $\{\sum_{k=1}^N \Lambda_{jk}\partial_{y_k}\}_1^m$. Sob as mesmas hipóteses, obtém-se que o operador $P = -\sum_{j=1}^m X_j^2$ é globalmente hipoelíptico, o que é um resultado significativo, pois a hipoelipticidade de operadores dessa forma ainda é um problema em aberto.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Resultados de Análise Funcional

Notação 1.1.1. Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, isto é, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ $i = 1, ..., n$

1. $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$
2. $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$
3. $\xi \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$
4. $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}$

Recordemos as seguintes identidades

A) Fórmula de Newton Generalizada

$$(t_1 + \ldots + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}. \tag{1.1}$$

para todo $N \geq 1$ inteiro e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

B) $n^N = \displaystyle\sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!}$.

C) $2^N = \displaystyle\sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!}$.

D) $\displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2^{|\alpha|}$.

E) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \leq 2^{|\alpha|}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \leq \alpha$.

Proposição 1.1.1. *Dados* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $M \in \mathbb{Z}_+$

$$|\xi|^M \leq \sum_{|\alpha|=M} \frac{M!}{\alpha!}|\xi^\alpha|$$

sendo $|\xi|^2 = |\xi_1|^2 + ... + |\xi_1|^2$.

Demonstração. Aplicando a Fórmula de Newton Generalizada temos

$$\begin{aligned}|\xi|^{2M} = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^M &= \sum_{|\alpha|=M} \frac{N!}{\alpha!}(\xi_1)^{\alpha_1} \cdots (\xi_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=M} \frac{N!}{\alpha!}(\xi^\alpha)^2 = \sum_{|\alpha|=M} \frac{N!}{\alpha!}|\xi^\alpha|^2.\end{aligned}$$

Elevando a potência 1/2 ambos os membros da expressão acima e usando a subaditividade da função $\varphi(t) = t^{1/2}$ temos

$$\begin{aligned}|\xi|^M = \left(\sum_{|\alpha|=M} \frac{N!}{\alpha!}|\xi^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{|\alpha|=M} \left(\frac{N!}{\alpha!}\right)^{1/2} |\xi^\alpha| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=M} \frac{N!}{\alpha!}|\xi^\alpha|.\end{aligned}$$

Completando assim a prova da Proposição. □

Lema 1.1.1. *Seja* $k \in \mathbb{N}$.

a) *Existem* $A_1, A_2 > 0$ *tais que*

$$A_1|\xi|^{2k} \leq \sum_{|\alpha|=k} |\xi^\alpha|^2 \leq A_2|\xi|^{2k} \tag{1.2}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

b) *Existem* $C_1, C_2 > 0$ *tais que*

$$C_1(1 + |\xi|^2)^k \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2(1 + |\xi|^2)^k \tag{1.3}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. a) Tome $F(\xi) = \dfrac{\sum_{|\alpha|=k} |\xi^\alpha|^2}{|\xi|^{2k}} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Note que F é homogênea, ou seja, $F(\lambda\xi) = F(\xi)$, $\forall \lambda > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Como F é contínua e positiva na esfera unitária $S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ |\xi| = 1\}$ então F assume valores mínimo e máximo $A_1, A_2 > 0$ em S^{n-1}, ou seja,

$$A_1 \leq F(\eta) \leq A_2, \quad \forall \eta \in S^{n-1}.$$

Dado $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ seja $\eta \doteq |\xi|^{-1}\xi \in S^{n-1}$ então

$$F(\xi) = F\left(|\xi|\eta\right) = F(\eta)$$

e portanto

$$A_1|\xi|^{2k} \le \sum_{|\alpha|=k} |\xi^\alpha|^2 \le A_2|\xi|^{2k}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Desenvolvendo o binômio de Newton temos

$$(1+|\xi|^2)^k = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) |\xi|^{2j}.$$

Aplicando a primeira desigualdade em (1.2) temos

$$|\xi|^{2j} = (\xi_1^1 + \ldots + \xi_n^2)^j \le A_1^{-1} \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^k &\le A_1^{-1} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2 \\ &\le 2^k A_1^{-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2 \\ &= 2^k A_1^{-1} \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, $(1+|\xi|^2)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) |\xi|^{2j}$.

Aplicando a segunda desigualdade em (1.2) obtemos

$$|\xi|^{2j} = (\xi_1^1 + \ldots + \xi_n^2)^j \ge A_2^{-1} \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^k &\ge A_2^{-1} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2 \\ &\ge A_2^{-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} |\xi^\alpha|^2 \\ &= A_2^{-1} \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2. \end{aligned}$$

Portanto temos que a desigualdade (1.3) é verdadeira se tomarmos $C_1 = 2^{-k}A_1^{-1}$ e $C_2 = A_2$. □

Definição 1.1.1. Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado espaço de Banach.

Definição 1.1.2. Um espaço de Hilbert é um espaço produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ (real ou complexo) e $p : E \longrightarrow [0, \infty)$ uma função que satisfaz:*

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x),\ \forall x \in E$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{F}$;

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y),\ \forall x, y \in E$.

Além disso, considere $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g : G \longrightarrow \mathbb{F}$ um funcional linear tal que $|g(x)| \leq p(x),\ \forall x \in G$. Então existe um funcional $f : E \longrightarrow \mathbb{F}$, extensão linear de g, tal que $|f(x)| \leq p(x),\ \forall x \in E$.

Demonstração. Veja [1]. □

Teorema 1.1.2 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ seu dual. A aplicação $\gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, $\gamma(\xi) = f_\xi$, para cada $\xi \in \mathcal{H}$, dada por*

$$\gamma(\xi)(\eta) = f_\xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

é uma isometria antilinear e sobrejetora em $\mathcal{H}^*$.

Demonstração. Vide [10]. □

Proposição 1.1.2 (Desigualdade de Bessel)**.** *Se $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então para cada $\xi \in \mathcal{H}$*

$$\sum_{\alpha \in J} |\langle \xi_\alpha, \xi \rangle|^2 \leq \|\xi\|^2 .$$

Demonstração. Veja [10]. □

Definição 1.1.3. Uma sequência (ξ_n) em um espaço normado $\mathcal{N}$ converge fracamente a $\xi \in \mathcal{N}$ se $\lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ para todo $f \in \mathcal{N}^*$.

Demonstração. Veja [10]. □

Teorema 1.1.3. *Se $\mathcal{H}$ é Hilbert, então toda sequência limitada em $\mathcal{H}$ possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja [10]. □

Proposição 1.1.3. *Toda sequência ortonormal num espaço de Hilbert converge fracamente a zero.*

Demonstração. Seja $\{e_j\}$ uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Devemos mostrar que $f(e_j) \to f(0)$ para toda $f \in \mathcal{H}^*$ dual de $\mathcal{H}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(e_j) = \langle e_j, \xi \rangle.$$

Pela desigualdade de Bessel, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, tem-se que $\sum_{\alpha \in J} |\langle e_j, \xi \rangle|^\alpha$ é convergente, assim, $|\langle e_j, \xi \rangle| \to 0$. Logo, $f(e_j) \to 0$. Portanto, $e_j \to 0$ fracamente. □

Proposição 1.1.4. *Toda sequência limitada em um espaço de Hilbert possui subsequência que converge fracamente.*

Demonstração. Veja [10]. □

Teorema 1.1.4 (Projeção Ortogonal)**.** *Se E é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}.$$

Demonstração. Veja [1]. □

Para o que se segue denotaremos por X' o dual topológico de um espaço topológico X. Ou seja, o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos x', definidos sobre X.

Definição 1.1.4. Sejam E e F dois espaços vetoriais topológicos, e $u : E \to F$ uma aplicação linear contínua. O operador transposto, $u^* : F' \to E'$ é definido por

$$\langle u^*(y'), x\rangle = \langle y', u(x)\rangle. \tag{1.4}$$

para todo $y' \in F'$ e $x \in E$.

Definição 1.1.5. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial topológico E, então podemos definir o conjunto polar A^0 por

$$A^0 \doteq \{x' \in E' \ : \ \langle x', x\rangle = 0, \text{ para todo } x \in A\}. \tag{1.5}$$

Proposição 1.1.5. *Sejam E, F espaços vetoriais topológicos e $u : E \to F$ uma aplicação linear e contínua. Então,*

$$\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^0. \tag{1.6}$$

Demonstração. Ver em [15] □

Definição 1.1.6. Seja A um subconjunto de E, e A^0 o polar de A. Supondo que E esteja identificado com seu bidual E''. Então definimos o cojunto bipolar A^{00} como sendo o polar de A^0 dado por

$$A^{00} \doteq \{x \in E \ : \ \langle x, x'\rangle = 0 \text{ para todo } x' \in A^0\}. \tag{1.7}$$

Proposição 1.1.6. *Seja A um subespaço vetorial de E. Então*

$$A^{00} = \overline{A}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Ver em [15] □

1.2 Teoria das Distribuições

Consideremos ao longo dessa seção, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.1. Seja $(X, \mathcal{M}, m)$ um espaço de medida, definimos o espaço $L^p = L^p(X)$ como sendo o espaço das funções m-mensuráveis em X tais que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0;\ m(\{x :\ |f(x)| > a\}) = 0\}, \quad p = \infty$$

quando $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ é uma norma.

Ao longo desse trabalho, utilizaremos m como sendo a medida de Lebesgue.

Definição 1.2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : \ \forall K \subset \Omega \text{ compacto}, \ \int_K |f(x)|dx < \infty\}.$$

Definição 1.2.3. $C^\infty(\Omega)$ é espaço de Fréchet com as seminormas

$$\|\varphi\|_{m,K} = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

sendo $m \in \mathbb{Z}_+$ e $K \subset \Omega$ compacto.

Definição 1.2.4. Uma sequência (ϕ_j) de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero se para todo compacto K e todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $\partial^\alpha \phi \longrightarrow 0$ uniformemente em K quando $j \to \infty$.

Definição 1.2.5. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos o suporte de u, denotado por $S(u)$, como sendo o fecho do seguinte conjunto:

$$\{x \in \Omega : \ u(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.2.6. Denotamos por $C^\infty_c(\Omega)$ o espaço de todas as funções C^∞ com suporte compacto em Ω.

Fixado K compacto, podemos munir $C^\infty_c(K)$ com as seminormas

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

$C^\infty_c(K)$ é espaço de Fréchet com essas seminormas.

Considere $K_1 \subset K_2 \subset .... \subset K_j \subset .... \subset \Omega$, sendo $\Omega = \cup_{j=1}^\infty K_j$. Temos que

$$C^\infty_c(\Omega) = \cup_{j=1}^\infty C^\infty_c(K_j).$$

Munimos então $C^\infty_c(\Omega)$ com a topologia limite indutivo.

Proposição 1.2.1. $C^\infty_c(\Omega)$ *com a topologia descrita acima não é metrizável.*

Demonstração. Veja [7]. □

Definição 1.2.7. Dizemos que uma sequência $(\phi_j)_{j\geq 1} \subset C^\infty_c(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty_c(\Omega)$ se:

1. $\exists K \subset \Omega$ compacto tal que $S(\phi_j) \subset K$, $\forall j = 1, 2, ...$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi_j(x)| = 0$.

Definição 1.2.8. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um funcional linear $u : C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição se satisfizer:

1. $\langle u, \phi_1 + \lambda\phi_2\rangle = \langle u, \phi_1\rangle + \lambda \langle u, \phi_2\rangle$, $\forall \phi_1, \phi_2 \in C^\infty_c(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (linearidade).
2. $\phi_j \to 0$ em $C^\infty_c(\Omega) \Longrightarrow \langle u, \phi_j\rangle \to 0$ quando $j \to \infty$ (continuidade sequencial).

   O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O resultado a seguir nos diz que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço dual de $C^\infty_c(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Um funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição se, e somente se, para todo $K \subset \Omega$ compacto, existem constantes $C_K > 0$ e $N_K \in \mathbb{Z}_+$ tais que para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $S(\phi) \subset K$,*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq N_K} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \phi(x)|.$$

Demonstração. Veja [7]. □

Proposição 1.2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então valem as seguintes propriedades $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$:*

1. *(Produto por uma função C^∞) Seja $f \in C^\infty(\Omega)$, então*

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle .$$

2. *(Diferenciação) Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$\langle \partial_x^\alpha u, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial_x^\alpha \phi\rangle.$$

3. *(Mudança de variável) Seja $\Phi : \Omega \to \Omega$ um difeomorfismo C^∞, então*

$$\langle u \circ \Phi, \phi\rangle = \left\langle u, |\det D\Phi^{-1}|\phi \circ \Phi\right\rangle .$$

Demonstração. Vide [7]. □

Exemplo 1.2.1. Denotamos por δ a distribuição Delta de Dirac, tal que para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0).$$

Considere a Função de Heaviside dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

então temos que sua derivada em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é igual a δ. De fato,

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle = -\int H(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_0^\infty \varphi'(t)\, dt \\ &= -\varphi(t)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Definição 1.2.9. Definimos o suporte de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como sendo:

$$\{x \in \Omega : \ \forall U \subset \Omega \text{ aberto com } x \in U \ u|_U \neq 0\}.$$

Definição 1.2.10. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $V \subset \Omega$ é um aberto, dizemos que u é C^∞ em V se, e somente se, $\exists f \in C^\infty(V)$ tal que $u = T_f$ em V, ou seja,

$$\langle u, \phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(V).$$

Definição 1.2.11. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte singular de u, $SS(u)$, como sendo a interseção de todos os fechados fora dos quais u é C^∞, ou seja,

$$SS(u) = \{x \in \Omega : \ \forall U \subset \Omega \text{ aberto com }, x \in U \ u|_U \notin C^\infty(U)\}.$$

Definição 1.2.12. Denote por $\mathcal{D}'_{comp}(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto em Ω.

Definição 1.2.13. Denotamos com $\mathcal{E}'(\Omega)$ o dual topológico de $C^\infty(\Omega)$, ou seja, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ se, e somente se, é linear e existem $K \subset \Omega$ compacto, $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^n$ tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Teorema 1.2.2. *Dada $u \in \mathcal{D}'_{comp}(\Omega)$, existe um único funcional linear $\widetilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. $\widetilde{u}(\phi) = u(\phi), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$
2. $\widetilde{u}(\phi) = 0$ *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $S(\phi) \cap S(u) = \varnothing$
3. $\widetilde{u} \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Demonstração. Veja [7]. □

Com o resultado acima, é possível obter o seguinte:

Proposição 1.2.3. $\mathcal{E}'(\Omega) = \mathcal{D}'_{comp}(\Omega)$*, isto é, o conjunto das distribuições de suporte compacto é o espaço dual de* $C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Veja [7] □

Teorema 1.2.3. *Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. São equivalentes:*

1. *u é sequencialmente contínuo*
2. *Existem $K \subset \Omega$ compacto, $m \in \mathbb{Z}_+$ e $C > 0$ tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Vide [8]. □

Definição 1.2.14. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos, $f \in C_c^\infty(X)$ e $g \in C_c^\infty(Y)$. O produto tensorial de f por g é definido por:

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

e pertence ao espaço $C_c^\infty(X \times Y)$.

Teorema 1.2.4. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos, então o espaço vetorial formado pelas combinações lineares finitas de elementos de $C_c^\infty(X) \otimes C_c^\infty(Y)$ é denso em $C_c^\infty(X \times Y)$.*

Demonstração. Veja [8]. □

Teorema 1.2.5. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos, $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $v \in \mathcal{D}'(Y)$. Então existe uma única $w \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ tal que*

$$\langle w, \phi \otimes \psi \rangle = \langle u, \phi \rangle \langle v, \psi \rangle \quad \forall \phi \in C_c^\infty(X), \psi \in C_c^\infty(Y).$$

Além disso,

$$w(\phi) = \langle u(x), \langle v(y), \phi(x,y) \rangle \rangle \quad \forall \phi \in C_c^\infty(X \times Y).$$

Denotamos $w = u \otimes v$ e chamaremos de produto tensorial de u por v.

Demonstração. Veja [8]. □

Definição 1.2.15 (Convolução)**.**

1. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos a convolução de f e g como

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x-y) dy = \int f(x-y) g(y) dy.$$

2. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u * \varphi(x) = \langle u(y), \varphi(x-y) \rangle.$$

3. Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definimos o produto convolução $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned} \langle u * v, \phi \rangle &= \langle u(x), \langle v(y), \phi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle v(y), \langle u(x), \phi(x+y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.2.2. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, está bem definida a convolução $\delta * u$, sendo δ a distribuição Delta de Dirac dada no Exemplo 1.2.1 , e ainda,para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle u * \delta, \varphi \rangle = \langle u(x) \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle u(x), \varphi(x) \rangle.$$

Definição 1.2.16. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f se define por:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

A seguir mostraremos um conjunto especial onde a transformada de Fourier se torna um operador continuamente invertível:

Definição 1.2.17. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que:

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

A convergência nesse espaço é dada por: $\varphi_j \longrightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ se e somente se, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$,

$$x^\beta \partial^\alpha \varphi_j(x) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.2.6. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e vale:*

1. $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$
2. $\mathcal{F}[x^\alpha \varphi(x)](\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.

Demonstração. Vide [7]. $\square$

Teorema 1.2.7. *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ é continuamente inversível de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \phi(\xi) d\xi; \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Demonstração. Vide [7]. $\square$

Definição 1.2.18. Definimos o espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'$ como sendo o espaço de todos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}$.

Proposição 1.2.4. *Um funcional linear $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence a $\mathcal{S}'$ se, e somente se, existem constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que:*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + x^2)^m \partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Demonstração. Ver [8]. $\square$

Definição 1.2.19. Dizemos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ cresce lentamente no infinito se existem $A, B, C > 0$ tais que

$$|f(x)| < A(1 + |x|)^B, \quad \forall |x| > C.$$

Definição 1.2.20. Dada $u \in \mathcal{S}'$, definimos a transformada de Fourier $\widehat{u}$ de u como

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Teorema 1.2.8.

1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então as transformadas de Fourier de f como função e como distribuição temperada coincidem.*
2. *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e vale:*
$$\|f\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|^2_{L^2}.$$
3. *Se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}$ é uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por:*
$$\widehat{f}(\xi) = \langle f, e^{-ix\cdot\xi} \rangle.$$

Demonstração. Veja [7] $\square$

Como consequência do item *3* acima, vemos que se $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ então sua transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ define uma função suave com crescimento lento no infinito. De fato, segue do Teorema 1.2.3 que existem constantes, $C > 0$, $N > 0$ e um compacto $K \subset \Omega$ tais que

$$\begin{aligned}
|\langle f, e^{-ix\cdot\xi} \rangle| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha_x e^{-ix\cdot\xi}| \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |(-i\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} |\xi^\alpha| \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} |\xi|^{|\alpha|} \leq C_N |\xi|^N \leq C'(1 + |\xi|)^N
\end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{f}$ cresce lentamente no infinito.

1.3 Distribuições Periódicas

O toro de dimensão N, denotado por $\mathbb{T}^N$ é o subespaço quociente $\dfrac{\mathbb{R}^N}{2\pi\mathbb{Z}^N}$ definido através da seguinte relação de equivalência: $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \sim y$ se existe $k \in \mathbb{Z}^N$ tal que $x - y = 2k\pi$. Denotando por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in \mathbb{R}^N; x \sim y\} \\ &= \{x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}^N\} \end{aligned}$$

podemos definir, de forma natural, o seguinte epimorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \frac{\mathbb{R}^N}{2\pi\mathbb{Z}^N} \\ x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

Seja $f : \mathbb{T}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função definida no toro $\mathbb{T}^N$. Então, esta induz a função $f_0 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ através da seguinte relação:

$$f_0(x) = f([x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Note que f_0 é 2π-periódica em cada uma de suas coordenadas. De fato, sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (x_1, ..., x_j + 2\pi, ..., x_n)$, então

$$x - y = (0, ..., 2\pi, ..., 0) \in 2\pi\mathbb{Z}^N$$

implica que

$$f_0(x) = f([x]) = f([y]) = f_0(y)$$

como queríamos demonstrar.

Definição 1.3.1. Sejam $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$ uma função a valores complexos e $\xi \in \mathbb{Z}^N$, definimos o ξ-ésimo coeficiente de Fourier de f por

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx. \tag{1.9}$$

Observe que (1.9) está bem definida pois a função $x \longmapsto e^{-ix\cdot\xi}$ é 2π-periódica em cada coordenada quando $x \in \mathbb{T}^N$.

Definição 1.3.2. Denotamos por $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ o espaço dual de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$. $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ é chamado espaço das distribuições periódicas.

Exemplo 1.3.1. Analogamente ao que definimos em $\mathbb{R}^N$, definimos a distribuição delta de Dirac em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ como sendo $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. E ainda temos que

$$\delta = (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi}, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi}, \phi \right\rangle &= (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \langle e^{ix\cdot\xi}, \phi(x) \rangle = (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\, dx \\ &= (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\phi}(\xi)e^{i0\cdot\xi} = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Definição 1.3.3. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, definimos a transformada de Fourier de u por

$$\widehat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\cdot\xi} \rangle, \quad \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Definição 1.3.4. Seja $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$, definimos a série de Fourier da função f como sendo:

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}.$$

Proposição 1.3.1. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{T}^N)$ funções a valores complexos. Então para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{T}^N$ e todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, vale:*

1. $\widehat{(f+g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$
2. $\widehat{(\lambda f)}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\xi)$
3. $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$
4. $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^N)}$
5. $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$
6. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, *quando* $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Vide [5]. □

Proposição 1.3.2. *Dados $f, g \in L^2(\mathbb{T}^N)$, segue:*

1. *(Identidade de Parseval)* $\|f\|_{L^2} = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(m)|^2$.
2. *(Relação de Plancherel)* $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}$.

Demonstração. Veja [5]. □

Definição 1.3.5. Dizemos que uma sequência numérica (a_k) é rapidamente decrescente se para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$, existe $C > 0$ tal que

$$|a_k| \leq C|k|^{-\ell}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Lema 1.3.1. *Uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente se, e somente se, para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_\ell > 0$ tal que*

$$|a_k| \leq \frac{C_\ell}{(1+|k|)^\ell}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Demonstração. Por um lado claro que $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, dado $\ell \in \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{C}{(1+|k|)^\ell} \leq \frac{C}{|k|^\ell}.$$

Por outro lado, se existe $C > 0$ tal que $|a_k| \leq C|k|^{-\ell}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, então, como $1 + |k| \leq 2|k|$, temos:

$$|a_k| \leq \frac{C}{|k|^\ell}\frac{2^\ell}{2^\ell} \leq \frac{2^\ell C}{(1+|k|)^\ell}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

□

Lema 1.3.2. *Se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então a sequência dos seus coeficientes de Fourier é rapidamente decrescente.*

Demonstração. Dado $\ell \in \mathbb{Z}_+$, utilizando a Proposição 1.1.1, temos

$$\begin{aligned}
|\xi|^\ell |\widehat{\varphi}(\xi)| &= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{\ell!}{\alpha!}|\xi^\alpha||\widehat{\varphi}(\xi)| = \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{\ell!}{\alpha!}|\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{\ell!}{\alpha!}|\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi)| \leq \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{\ell!}{\alpha!} \sup |D^\alpha \varphi(\xi)| \leq C_{\ell,\varphi}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{C_{\ell,\varphi}}{|\xi|^\ell}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

□

Teorema 1.3.1. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então*

$$f(x) = (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}$$

sendo que a série acima converge na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Os Lemas 1.3.1 e 1.3.2, nos garantem que dado $\ell \in \mathbb{Z}^N$ existe $C > 0$ tal que,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_\ell}{(1+|\xi|^2)^\ell}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Então, pelo Teste M de Weiertrass, temos que a série $(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente e absolutamente para uma função contínua Φ. De fato, escolhendo $\ell \geq \frac{n}{2} + 1$,

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}| = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{f}(\xi)| \leq C_\ell \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\ell}$$

sendo a última série convergente.

E ainda, note que $\widehat{f}(m) = \widehat{\Phi}(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}^N$, pois, sendo

$$S_k(x) = (2\pi)^{-N} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$$

então $S_k \to \Phi$ uniformemente em $\mathbb{T}^N$. Então, pelo Teorema da convergência uniforme

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(m) &= \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot m}\Phi(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot m}\left((2\pi)^{-N}\sum_{|\xi|\leq k}\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\right)dx \\
&= (2\pi)^{-N}\lim_{k\to\infty}\sum_{|\xi|\leq k}\widehat{f}(\xi)\int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\cdot(\xi-m)}dx = \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

Denote $g = f - \Phi \in C^0(\mathbb{T}^N)$. Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, existe um polinômio trigonométrico $t(x) = \sum_{|\xi|\leq M} a_\xi e^{ix\cdot\xi}$, tal que $\|g - t\|_{L^\infty} < \epsilon$.

Como Φ e f possuem os mesmos coeficientes de Fourier, segue que g é ortogonal ao espaço dos polinômios trigonométricos. De fato, seja $t(x)$ como acima, então

$$\int_{\mathbb{T}^N} g(x)\overline{t(x)}dx = \int_{\mathbb{T}^N} g(x) \sum_{|\xi|\leq M} a_\xi e^{-ix\cdot\xi}dx = \sum_{|\xi|\leq M} a_\xi \int_{\mathbb{T}^N} g(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = \sum_{|\xi|\leq M} a_\xi \widehat{g}(\xi) = 0.$$

Utilizando o fato acima, note que

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^N} |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^N} g(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{T}^N} g(x)(\overline{g(x) - t(x)})dx \\ \leq \|g\|_{L^2} \|g-t\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \|g-t\|_{L^\infty}^2 \leq \|g\|_{L^2} \epsilon^2\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|g\|_{L^2}^2 \leq \epsilon^2 \|g\|_{L^2}. \tag{1.10}$$

Agora, lembrando que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Longrightarrow ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

temos

$$\|g\|_{L^2}^2 \leq \epsilon^2 \|g\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon^4 + \|g\|_{L^2}^2}{2} = \frac{\epsilon^4}{2} + \frac{1}{2}\|g\|_{L^2}^2.$$

Então

$$\frac{1}{2}\|g\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon^4}{2} \Longrightarrow \|g\|_{L^2} \leq \epsilon^2.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $g = 0$ q.t.p. em $\mathbb{T}^N$. Portanto, f e Φ contínuas implica

$$f(x) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Portanto $(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente para f. Mostremos que a convergência ocorre também na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$. De fato, tome $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, observe que

$$\begin{aligned}\partial^\alpha S_k(x) &= \partial^\alpha (2\pi)^{-N} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi} = (2\pi)^{-N} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{f}(\xi)\partial^\alpha e^{ix\cdot\xi} \\ &= (2\pi)^{-N} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{f}(\xi)(i\xi)^\alpha e^{ix\cdot\xi} = (2\pi)^{-N} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{\partial^\alpha f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}.\end{aligned}$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $\partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ também, então, pela convergência uniforme obtida anteriormente, segue que $\partial^\alpha S_k(x) \to \partial^\alpha f$ uniformemente quando $k \to \infty$. E portanto

$$(2\pi)^{-N} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi} = f$$

sendo que convergência ocorre também na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

□

Corolário 1.3.1. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ é tal que sua transformada de Fourier possui decaimento rápido, então $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Veja em [14]. □

Proposição 1.3.3. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então*

$$\langle u, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(-\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.1, temos

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \langle u(x), \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \lim_{k \to \infty} \langle u(x), \sum_{|\xi| \leq k} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \left\langle u(x), e^{ix\cdot\xi} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(-\xi)\widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.6. Uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é denominada de crescimento lento se existem constantes $C > 0$ e $N \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|a_k| \leq C|k|^N, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Exemplo 1.3.2. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, então $(\widehat{u}(\xi))_{\xi \in \mathbb{Z}^N}$ é uma sequência de crescimento lento.

De fato, como $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, temos que exitem constantes $C > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(\xi)| = |\langle u, e^{-ix\cdot\xi} \rangle| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |D_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}| \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}| \leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\xi^\alpha| \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\xi|^{|\alpha|} \leq C_2 |\xi|^K
\end{aligned}$$

portanto, $(\widehat{u}(\xi))$ é de crescimento lento.

Definição 1.3.7 (Espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$)**.** Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$ o espaço das sequências de decaimento rápido $f : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{C}$.

Corolário 1.3.2. *$\mathcal{F} : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$ é uma bijeção.*

Demonstração. Veja em [14]. □

Definição 1.3.8 (Distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$)**.** Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$ o espaço dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^N)$.

Proposição 1.3.4. *O espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$ é formado por sequências $u : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ de crescimento lento.*

Teorema 1.3.2. *Seja $(a_\xi)_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^N)$, ou seja, uma sequência de crescimento lento. Então a série $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} a_\xi e^{ix\cdot\xi}$ é convergente em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ e se $u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} a_\xi e^{ix\cdot\xi}$, então $a_\xi = (2\pi)^{-N}\widehat{u}(\xi)$.*

Demonstração. Primeiro considere $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ uma sequência de crescimento lento, ou seja, existem $C_0>0$ e $K\in\mathbb{Z}_+$ tais que

$$|a_\xi|\leq C_0|\xi|^K \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N. \tag{1.11}$$

Para cada $\xi\in\mathbb{Z}^N$ e $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, pelo Lema 1.3.2, existe $C_1>0$ tal que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|\leq\frac{C_1}{|\xi|^{K+n+1}},\quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}.$$

Considere a reduzida $S_j(x)=\sum_{|\xi|\leq j}a_\xi e^{ix\cdot\xi}$. Para $j\leq l$

$$\begin{aligned}|\langle S_l-S_j,\varphi\rangle|&=\left|\left\langle\sum_{j\leq|\xi|\leq l}a_\xi e^{ix\cdot\xi},\varphi\right\rangle\right|\leq\sum_{j\leq|\xi|\leq l}|a_\xi||\widehat{\varphi}(\xi)|\\&\leq\sum_{j\leq|\xi|\leq l}|\xi|^K\frac{C_1}{|\xi|^{K+n+1}}=\sum_{j\leq|\xi|\leq l}\frac{C_1}{|\xi|^{n+1}}.\end{aligned}$$

Como a série $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{C_1}{|\xi|^{n+1}}$ é convergente, temos que $\sum_{j\leq|\xi|\leq l}\frac{C_1}{|\xi|^{n+1}}$ tende a zero quando $j,l\to\infty$. Logo S_j é de Cauchy, segue que existe $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}a_\xi e^{ix\cdot\xi}=\lim_{j\to\infty}S_j=u$$

portanto a série é convergente em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.
Além disso,

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi)=\left\langle u,e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle&=\lim_{j\to\infty}\left\langle\sum_{|\eta|\leq j}a_\eta e^{ix\cdot\eta},e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle\\&=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}a_\eta\int_{\mathbb{T}^N}e^{ix\cdot(\eta-\xi)}dx=a_\xi(2\pi)^N.\end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.3. *Se $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, então $(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge para u em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Já vimos, no Exemplo 1.3.2, que $(\widehat{u}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ tem crescimento lento. Então pelo Teorema 1.3.2, existe $v\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}=v$, assim

$$\begin{aligned}\langle v,\varphi(x)\rangle&=\left\langle(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi},\varphi(x)\right\rangle=(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)\left\langle e^{ix\cdot\xi},\varphi\right\rangle\\&=(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)\widehat{\varphi}(-\xi)=(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left\langle u(x),e^{-ix\cdot\xi}\right\rangle\widehat{\varphi}(-\xi)\\&=(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left\langle u(x),e^{-ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(-\xi)\right\rangle=\left\langle u(x),(2\pi)^{-N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}e^{ix\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\right\rangle=\langle u,\varphi\rangle\end{aligned}$$

sendo a última igualdade obtida pelo Teorema 1.3.1. Portanto

$$u = (2\pi)^{-N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi}.$$

$\square$

1.4 Transformada Parcial de Fourier Periódica

Definição 1.4.1. Definimos o espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$ das funções $\phi : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, C^∞ na primeira variável, tais que para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ e $N > 0$ existe uma constante $C = C_{N,\alpha,\phi}$ tal que

$$|D^\alpha \phi(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)^{-N},$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^m$.

$C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$ é um espaço de Frechét com a topologia induzida pela família enumerável de seminormas

$$p_{K,l}(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \sup_{|\alpha| \leq K} (1 + |\xi|^2)^K \left\| \partial^\alpha \varphi \right\|_{L^\infty}.$$

Definição 1.4.2. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, então, definimos a transformada parcial de Fourier de φ com respeito a variável y como

$$\widehat{\varphi}(x, \xi) = \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(x, y) e^{-iy\cdot\xi}\, dy, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Proposição 1.4.1. *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, então $\widehat{\varphi}(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$.*

Demonstração. Para cada ξ fixo, denote

$$\widehat{\varphi}(x, \xi) = \varphi_\xi(x), \quad \forall x \in \mathbb{T}^n.$$

Tome (x_j) sequência em $\mathbb{T}^n$ tal que $x_j \to x_0$ quando $j \to \infty$, então

1. $\lim_{j\to\infty} \varphi(x_j, y) e^{-iy\cdot\xi} = \varphi(x_0, y) e^{-iy\cdot\xi}$, e ainda,

2. $|\varphi(x_j, y) e^{-iy\cdot\xi}| \leq |\varphi(x_j, y)| \leq C$, sendo que C não depende de j pois φ é limitada.

Logo, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada:

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_\xi(x_j) = \int_{\mathbb{T}^m} \lim_{j\to\infty} \varphi(x_j, y) e^{-iy\cdot\xi} dy = \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(x_0, y) e^{-iy\cdot\xi} dy = \varphi_\xi(x_0).$$

Portanto, φ_ξ é contínua.

Ainda, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, mais uma vez pelo teorema da convergência dominada, podemos derivar sob o sinal de integração, ou seja,

$$D_x^\alpha(\varphi_\xi(x)) = D_x^\alpha \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(x, y) e^{-iy\cdot\xi} dy = \int_{\mathbb{T}^m} D_x^\alpha \varphi(x, y) e^{-iy\cdot\xi} dy$$

Assim, $D_x^\alpha \varphi_\xi$ também é contínua e portanto $\varphi_\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Além disso, tome $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$, temos:

$$\begin{aligned}|\xi^\beta D_x^\alpha \varphi_\xi(x)| =& |\int_{\mathbb{T}^m} D^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)\xi^\beta e^{-iy\cdot\xi}dy| = |\int_{\mathbb{T}^m} D^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)D^{(0,\beta)}e^{-iy\cdot\xi}dy|\\ =& |\int_{\mathbb{T}^n} D^{(\alpha,\beta)}\varphi(x,y)e^{-iy\cdot\xi}dy| \leq (2\pi)^m \sup|D^{(\alpha,\beta)}\varphi(x,y)|.\end{aligned}$$

Dado $K \in \mathbb{Z}_+$, utilizando o resultado acima e a Proposição 1.1.1, segue que

$$\begin{aligned}|\xi|^K|D^\alpha\varphi_\xi(x)| &\leq \sum_{|\beta|=K}\frac{K!}{\beta!}|\xi^\beta||D^\alpha\varphi_\xi(x)|\\ &= \sum_{|\beta|=K}\frac{K!}{\beta!}\left|\xi^\beta D^\alpha\varphi_\xi(x)\right|\\ &= \sum_{|\beta|=K}\frac{K!}{\beta!}\left|\int_{\mathbb{T}^m} D^{(\alpha,\beta)}\varphi(x,y)e^{-iy\cdot\xi}dy\right|\\ &\leq \sum_{|\beta|=K}\frac{K!}{\beta!}(2\pi)^m\sup|D^{(\alpha,\beta)}\varphi(x,y)| = C_{K,\alpha,\varphi}.\end{aligned}$$

Logo, escrevendo $C = C_{K,\alpha\varphi}$

$$|D^\alpha\widehat{\varphi}(x,\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^K}.$$

Portanto $\widehat{\varphi}(x,\xi)$ é de classe C^∞ na primeira variável e possui decaimento rápido na segunda, ou seja, $\widehat{\varphi}(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$.

□

Teorema 1.4.1. *Seja* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$*. Então*

$$\varphi(x,y) = (2\pi)^{-m}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi}$$

sendo que a convergência ocorre na topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$*.*

Demonstração. Pela Proposição 1.4.1, temos que dados $K \in \mathbb{Z}_+$ e $\alpha \in \mathbb{T}^n$, existe $C_{K,\alpha} > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha\widehat{\varphi}(x,\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^K}.$$

Então pelo Teste M de Weierstrass, segue que $(2\pi)^{-m}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi}$ converge uniformemente e absolutamente para uma função contínua ψ.

Temos ainda, que $\widehat{\psi}(x,\xi) = \widehat{\varphi}(x,\xi)$, de fato, denote

$$S_j(x,y) = (2\pi)^{-m}\sum_{|\xi|\leq j}\widehat{\varphi}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi}.$$

Segue que $S_j \to \psi$ uniformemente em $\mathbb{T}^{n+m}$, então, pelo teorema da convergência uniforme,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x,\xi) &= \int_{\mathbb{T}^m}\psi(x,y)e^{-iy\cdot\xi}dy = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{T}^m}\left((2\pi)^{-m}\sum_{|\eta|\leq j}\widehat{\varphi}(x,\xi)e^{iy\cdot\eta}\right)e^{-iy\cdot\xi}dy\\ &= (2\pi)^{-m}\lim_{j\to\infty}\sum_{|\eta|\leq j}\widehat{\varphi}(x,\xi)\int_{\mathbb{T}^m}e^{iy\cdot(\eta-\xi)}dy = \widehat{\varphi}(x,\xi).\end{aligned}$$

Escreva $\Phi = \varphi - \psi \in C^0(\mathbb{T}^{n+m})$. Então, dado $\epsilon > 0$, o Teorema de Stone-Weiertrass garante a existência de um polinômio trigonométrico $t(x,y) = \sum_{|(\eta,\xi)|\leq M} a_{(\eta,\xi)} e^{i(x,y)\cdot(\eta,\xi)}$ tal que $\|g - t\|_{L^\infty} < \epsilon$. E mais,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^{n+m}} \Phi(x,y)\overline{t(x,y)}dxdy &= \int_{\mathbb{T}^{n+m}} \Phi(x,y) \sum_{|(\eta,\xi)|\leq M} a_{(\eta,\xi)} e^{-(ix\cdot\eta + iy\cdot\xi)}dxdy \\
&= \sum_{|(\eta,\xi)|\leq M} a_{(\eta,\xi)} \int_{\mathbb{T}^n} e^{ix\cdot\eta} \left(\int_{\mathbb{T}^m} \Phi(x,y) e^{-iy\cdot\xi)}dy \right) dx \\
&= \sum_{|(\eta,\xi)|\leq M} a_{(\eta,\xi)} \int_{\mathbb{T}^n} e^{ix\cdot\eta} \widehat{\Phi}(x,\xi)\, dx = 0
\end{aligned}$$

pois $\widehat{\Phi}(x,\xi) = \widehat{\varphi}(x,\xi) - \widehat{\psi}(x,\xi) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}^{n+m}} |\Phi(x,y)|\, dxdy = \int_{\mathbb{T}^{n+m}} \Phi(x,y)\overline{\Phi(x,y)}\, dxdy \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n+m}} \Phi(x,y)(\overline{\Phi(x,y) - t(x,y)})\, dxdy \leq \|\Phi\|_{L^2} \|\Phi - t\|_{L^2} \\
&\leq \|\Phi\|_{L^2} \|\Phi - t\|_{L^\infty}^2 \leq C \|\Phi\|_{L^2} \epsilon \\
&\leq \frac{\epsilon^4 + \|\Phi\|_{L^2}^2}{2} = \frac{\epsilon^4}{2} + \frac{\|\Phi\|_{L^2}^2}{2}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\|\Phi\|_{L^2} \leq \epsilon^2.$$

Portanto, como ϵ é arbitrário, $\Phi = 0$ q.t.p., ainda, como φ e ψ são contínuas, temos $\varphi = \psi$ em $\mathbb{T}^{n+m}$. Ou seja, S_j converge uniformemente para φ.

Além disso, dados $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e $\beta \in \mathbb{Z}^m$, temos

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha \partial_y^\beta S_j(x,y) &= (2\pi)^{-m} \sum_{|\xi|\leq j} \partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\xi) \partial_y^\beta e^{iy\cdot\xi} \\
&= (2\pi)^{-m} \sum_{|\xi|\leq j} \widehat{\partial_x^\alpha \varphi}(x,\xi)(i\xi)_y^\beta e^{iy\cdot\xi} \\
&= (2\pi)^{-m} \sum_{|\xi|\leq j} \widehat{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi}(x,\xi) e^{iy\cdot\xi}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$|\partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\xi)| = |\widehat{\partial_x^\alpha \varphi}(x,\xi)| \leq \frac{C_0}{(1+|\xi|^2)^K} \leq \frac{C}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Assim, $\partial^\alpha \widehat{\varphi}(x,\xi) e^{iy\cdot\xi} \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$.

Portanto, como vimos anteriormente, segue que $\partial^\alpha \partial^\beta S_j \longrightarrow \partial^\alpha \partial^\beta \varphi$ uniformemente. Ou seja,

$$\varphi(x,y) = (2\pi)^{-m} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(x,\xi) e^{iy\cdot\xi}$$

em $C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$. □

Corolário 1.4.1. *Se $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{S}(\mathbb{Z}^m))$ então existe uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ tal que $\hat{\varphi}(x,\xi) = \phi(x,\xi)$ para todo $(x,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^m$.*

Demonstração. Veja em [16]. □

Definição 1.4.3. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$ definimos a transformada parcial de Fourier de u na segunda variável por

$$\langle \widehat{u}(x,\xi), \varphi(x)\rangle = \langle u, \varphi(x)e^{-iy\cdot\xi}\rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

É claro que a definição da transformada de Fourier com relação à primeira variável segue analogamente.

Lema 1.4.1. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$, então $\widehat{u}(x,\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ para cada ξ fixo.*

Demonstração. A linearidade é trivial.

Dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, existem $C > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\begin{aligned}|\langle \widehat{u}(x,\xi), \varphi(x)\rangle| =& |\langle u, \varphi(x)e^{iy\cdot\xi}\rangle| \leq C \max_{\substack{|\alpha|\leq K\\ |\beta|\leq K}} \left\| D_x^\alpha D_y^\beta \varphi e^{iy\cdot\xi}\right\|_{L^\infty}\\ \leq& C_\varphi |\xi|^K \max_{|\alpha|\leq K} \|D_x^\alpha \varphi\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

e segue a continuidade.

Portanto $\widehat{u}(x,\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. □

Teorema 1.4.2. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$, então*

$$u = (2\pi)^{-m} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{u}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi}$$

com a convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Escreva

$$\langle u_\xi(x), \varphi(x)\rangle = \langle u, \varphi(x)e^{-iy\cdot\xi}\rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n).$$

Denote

$$S_j = \sum_{|\xi|\leq j} u_\xi(x)e^{iy\cdot\xi}.$$

Mostremos que para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, $\{S_j(\phi)\}_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}$ é de Cauchy, e portanto será convergente.

De fato, temos $u_\xi(x)e^{iy\cdot\xi} = u_\xi(x) \otimes e^{iy\cdot\xi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$, assim, supondo $l \geq j$

$$\begin{aligned}|S_l(\phi) - S_j(\phi)| &= \left|\sum_{|\xi|\leq l} \langle u_\xi(x) \otimes e^{iy\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle - \sum_{|\xi|\leq j} \langle u_\xi(x) \otimes e^{iy\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle\right|\\ &= \left|\sum_{j\leq|\xi|\leq l} \langle u_\xi(x) \otimes e^{iy\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j\le|\xi|\le l} \langle u_\xi(x), \langle e^{iy\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{j\le|\xi|\le l} \langle u(x,z), e^{-iz\cdot\xi}\langle e^{iy\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{j\le|\xi|\le l} \langle u(x,z), \langle e^{i(y-z)\cdot\xi}, \phi(x,y)\rangle\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle u(x,z), \sum_{j\le|\xi|\le l} \int e^{i(y-z)\cdot\xi}\phi(x,y)dy \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle u(x,z), \sum_{j\le|\xi|\le l} \left(\int \phi(x,y)e^{-iy\cdot\xi}dy\right) e^{iz\cdot\xi} \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle u(x,z), \sum_{j\le|\xi|\le l} \widehat{\phi}(x,\xi)e^{iz\cdot\xi} \right\rangle \right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Converge pois pelo Teorema 1.4.1

$$(2\pi)^{-m}\sum_{|\xi|\le j} \widehat{\phi}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi} \longrightarrow \phi(x,y), \quad \text{em} \quad C^\infty \quad \text{quando } j\to\infty.$$

Ou seja, $(2\pi)^{-m}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{\phi}(x,\xi)e^{iy\cdot\xi} = \phi(x,y)$.

Observando esse fato e o cálculo acima, temos

$$u = (2\pi)^{-m}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} u_\xi(x)e^{iy\cdot\xi}.$$

□

Proposição 1.4.2. *Sejam $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$ e $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, então*

$$\langle u,\phi\rangle = (2\pi)^{-n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}\langle \widehat{u}(-\tau,x), \widehat{\phi}(\tau,x)\rangle.$$

Demonstração. Utilizando a definição de transformada parcial de Fourier com relação a primeira variável, e o Teorema 1.4.1

$$
\begin{aligned}
\langle u,\phi\rangle &= \langle u(t,x), (2\pi)^{-n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\phi}(\tau,x)e^{it\cdot\tau}\rangle \lim_{k\to\infty}\langle u(t,x), (2\pi)^{-n}\sum_{|\tau|\le k}\widehat{\phi}(\tau,x)e^{it\cdot\tau}\rangle \\
&= (2\pi)^{-n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}\langle u(t,x), \widehat{\phi}(\tau,x)e^{it\cdot\tau}\rangle = (2\pi)^{-n}\sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n}\langle \widehat{u}(-\tau,x), \widehat{\phi}(\tau,x)\rangle.
\end{aligned}
$$

□

1.5 Operadores Diferenciais Parciais lineares

Definição 1.5.1. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Um operador diferencial parcial linear de ordem m em Ω é um operador linear definido de $C^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ da forma

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

cujos coeficientes a_α são funções a valores complexos pertencentes ao espaço $C^\infty(\Omega)$, sendo $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_N^{\alpha_N} = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N}.$$

Proposição 1.5.1. *Seja P um ODPL de ordem m em Ω então a aplicação $\varphi \mapsto P\varphi$ define uma aplicação linear e contínua de $C^\infty(\Omega)$(resp. $C_c^\infty(\Omega)$) nele mesmo.*

Em dados momentos denotaremos $P(x,D)$ apenas por P e chamaremos este operador de ODPL, nomenclatura esta que será utilizada doravante.

Definição 1.5.2. Seja $P : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ um ODPL de ordem m. Dizemos que o operador ${}^tP : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é o transposto formal de P se, e somente se,

$$\int (P\varphi)\psi \, dx = \int \varphi({}^tP\psi) \, dx$$

quaisquer que sejam φ, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.5.1. O operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2.$$

Temos que o operador transposto de Δ é ele mesmo. De fato, temos

$$\int (\Delta\varphi)\psi \, dx = \int \varphi(\Delta\psi) \, dx$$

quaisquer que sejam φ, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.5.3. Seja P um ODPL de ordem m definido sobre um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, dizemos que $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é uma solução fundamental de P se $PE = \delta$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Um resultado importante, conhecido como Teorema de Malgrange [13] e Ehrenpreis [3], afirma que todo ODPL com coeficientes constantes admite uma solução fundamental.

Uma consequência importante deste resultado diz que se E é uma solução fundamental de $P = P(D)$, um operador com coeficientes constantes, para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ podemos definir a distribuição $u = E * f$ que satisfaz

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ou seja, podemos sempre resolver a equação quando o termo não-homogêneo é tomado no espaço das funções testes. Entretanto, o fato de f ser suave não garante que u também seja suave.

Exemplo 1.5.2. O operador do calor é definido em $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\partial_t - \Delta_x = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial^2_{x_j}}. \tag{1.12}$$

Vamos encontrar sua solução fundamental. Ou seja $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\partial_t E(t,x) - \Delta_x E(t,x) = \delta(t,x). \tag{1.13}$$

Primeiramente, note que

$$\delta(t,x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$$

pois dada $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ pelo Teorema 1.2.5

$$\begin{aligned}\langle \delta(t) \otimes \delta(x), \phi(t,x)\rangle &= \langle \delta(t), \langle \delta(x), \phi(t,x)\rangle\rangle = \langle \delta(t), \phi(t,0)\rangle \\ &= \phi(0,0) = \langle \delta, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier parcial com relação a x em (1.13), obtemos

$$\partial_t \widehat{E}(t,\xi) + |\xi|^2 \widehat{E}(t,\xi) = \delta(t) \otimes 1. \tag{1.14}$$

Agora, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo, considere o operador $\left(\frac{d}{dt} + |\xi|^2\right)$, sua solução fundamental é dada por $H(t)e^{-t|\xi|^2}$. De fato, derivando no sentido das distribuições temos

$$\left(\frac{d}{dt} + |\xi|^2\right)(H(t)e^{-t|\xi|^2}) = \delta(t)e^{-t|\xi|^2} - H(t)|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} + H(t)|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} = \delta(t).$$

Defina

$$\widehat{E}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} H(t) \otimes 1 = e^{-t|\xi|^2}(H(t) \otimes 1). \tag{1.15}$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{E}(t,\xi) = -|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}(H(t)\otimes 1) + e^{-t|\xi|^2}(\delta(t) \otimes 1).$$

Logo,

$$\left(\frac{d}{dt} + |\xi|^2\right)(e^{-t|\xi|^2} H(t) \otimes 1) = \delta(t) \otimes 1.$$

Além disso, $\widehat{E}(t,\xi)$ define uma distribuição temperada na variável ξ permitindo assim que sua transformada parcial inversa esteja definida de dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[H(t)e^{-t|\xi|^2}] = H(t)\frac{e^{\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}. \tag{1.16}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}ix\cdot\xi - t|\xi|^2 = t\left(\frac{ix\cdot\xi}{t} - |\xi|^2\right) &= -t\left[\left(-\frac{ix_1\cdot\xi_1}{t} + \xi_1^2\right) + ... + \left(-\frac{ix_n\cdot\xi_n}{t} + \xi_n^2\right)\right] \\ &= -t\left[\left(-\xi_1 - \frac{ix_1}{2t}\right)^2 + ... + \left(-\xi_n - \frac{ix_n}{2t}\right)^2\right] - \frac{|x|^2}{4t}.\end{aligned}$$

Logo, para $t > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^2}] = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\pi)^n} \int e^{-t\left[\left(-\xi_1 - \frac{ix_1}{2t}\right)^2 + \ldots + \left(-\xi_n - \frac{ix_n}{2t}\right)^2\right]} d\xi.$$

Calculemos $I_j = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(-\xi_j - \frac{ix_j}{2t}\right)^2} d\xi_j = \lim_{M\to\infty} \int_{-M-\frac{ix_j}{2t}}^{M-\frac{ix_j}{2t}} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j.$

Utilizando o Teorema de Cauchy. podemos deslocar o caminho de integração e escrever

$$I_j = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{ds}{\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2t}}\sqrt{2\pi} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, para $t > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^2}] = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

Aplicando a transformada inversa em (1.15),

$$\begin{aligned}
\langle E(t,x), \varphi \otimes \psi(t,x)\rangle &= \langle \mathcal{F}_x^{-1}(\widehat{E}(t,\xi))(x), \varphi(t)\psi(x)\rangle = \langle \widehat{E}(t,x), \varphi(t)\check{\psi}(\xi)\rangle \\
&= \langle e^{-t|\xi|^2} H(t) \otimes 1, \varphi(t)\check{\psi}(\xi)\rangle = \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2}\varphi(t)\check{\psi}(\xi) d\xi dt \\
&= \int_0^{\infty} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2}\check{\psi}(\xi) d\xi\right) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{e^{-t|\xi|^2}}\psi(x) dx\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\psi(x) dx\right) dt = \int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\varphi(t)\psi(x) dx dt \\
&= \langle \frac{e^{\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}, \varphi \otimes \psi(t,x)\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.2.4, a solução fundamental do operador do calor é

$$E(t,x) = H(t)\frac{e^{\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

Definição 1.5.4. Um operador $P : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é dito localmente resolúvel em Ω se todo ponto de Ω possui uma vizinhança $U \subset \Omega$ tal que

$$P\mathcal{D}'(U) \supseteq C_c^{\infty}(U). \tag{1.17}$$

Proposição 1.5.2. *Sejam $P : C_c^{\infty}(\Omega) \to C_c^{\infty}(\Omega)$ um ODPL de ordem m e ${}^tP$ o seu transposto formal. Suponha que exista $c > 0$ tal que*

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq c \left\|{}^tP\varphi\right\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \tag{1.18}$$

então, $PL^2(\Omega) \supseteq L^2(\Omega)$. Em particular, P é resolúvel em todo ponto de Ω.

Demonstração. Seja $\mathcal{E} \doteq \{\psi = {}^tP\varphi : \ \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)\} \subset L^2(\Omega)$. Consideramos $\mathcal{E}$ um subespaço vetorial normado de $L^2(\Omega)$ munido com a norma $L^2(\Omega)$. Dada $f \in L^2(\Omega)$

mostraremos que existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $Pu = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, definimos sobre $\mathcal{E}$ o funcional linear λ que para cada $\psi \in \mathcal{E}$, associa o número complexo

$$\lambda(\psi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Primeiro, note que λ está bem definido, para tal, basta mostrarmos que

$$\psi = 0 \Longrightarrow \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx = 0. \tag{1.19}$$

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que ${}^tP\varphi = 0$, então por (1.18)

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \left\|{}^tP\varphi\right\|_{L^2} = 0 \implies \varphi = 0 \; q.t.p.$$

e portanto (1.19) está satisfeita.

Ainda, pela desigualdade de Hölder, note que

$$|\lambda(\psi)| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq c\,\|f\|_{L^2} \left\|{}^tP\varphi\right\|_{L^2} = c\,\|f\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}.$$

Então, pelo Teorema de Hahn Banach, existe um funcional linear $T : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $T|_{\mathcal{E}} = \lambda$ e $|T(g)| \leq c\,\|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$ para todo $g \in L^2(\Omega)$.

Como $T \in (L^2(\Omega))^*$, segue do Teorema de Representação de Riesz que existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que para todo $g \in L^2(\Omega)$

$$T(g) = \int_\Omega u(x) g(x) dx.$$

Então

$$\int_\Omega (Pu)(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega u(x)({}^tP\varphi)(x)\, dx = T({}^tP\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx.$$

Portanto, $Pu = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Analogamente ao que vimos em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, iremos agora considerar ODPL definidos sobre $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $P : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ sendo os coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e por $P^* : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ o operador transposto.

Definição 1.5.5. Sejam $P : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$ um ODPL de ordem m com transposto $P^* : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. Dizemos que P é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$ se para cada $f \in (\ker P^*)^0 = \{g \in C^\infty(\mathbb{T}) \; : \; \langle w, g\rangle = 0, \text{ para toda } w \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}), \text{ com } P^*w = 0\}$, existir $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $Pu = f$.

De acordo com a definição acima um operador P é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$ se:

$$PC^\infty(\mathbb{T}^N) \supseteq (\ker P^*)^0. \tag{1.20}$$

Considerando a imagem do operador $PC^\infty(\mathbb{T}^N)$ como um subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ temos o seguinte resultado

Proposição 1.5.3. *$PC^\infty(\mathbb{T}^N)$ é fechado se, e somente se, $PC^\infty(\mathbb{T}^N) = (\ker P^*)^0$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\overline{PC^\infty(\mathbb{T}^N)} = PC^\infty(\mathbb{T}^N)$. Graças à Proposição1.1.5 temos

$$\ker P^* = (PC^\infty(\mathbb{T}^N))^0.$$

Escrevendo o conjunto polar do núcleo do operador transposto e aplicando a Proposição1.1.6 obtemos

$$(\ker P^*)^0 = (PC^\infty(\mathbb{T}^N))^{00} = \overline{PC^\infty(\mathbb{T}^N)} = PC^\infty(\mathbb{T}^N).$$

A recíprova é demonstrada de forma análoga. $\square$

Definição 1.5.6. Dizemos que $P : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^N$ se para cada $f \in \{h \in C^\infty(\mathbb{T}^N) : \langle w, h\rangle = 0, \forall w \in \ker P^*\}$ existir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Pu = f$, onde

$$P^* : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

é o operador transposto de P.

Definição 1.5.7. Dizemos que $P : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ se para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Pu \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tem-se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

1.6 Teorema de Paley-Wiener

Definição 1.6.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ um ODPL de ordem m com coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. O conjunto característico de P é definido por

$$Char(P) = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \; P_m(x, \xi) = 0\}$$

onde

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

denota o símbolo principal de P.

Definição 1.6.2. Seja $P(x, D)$ um operador definido sobre um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que P é elíptico em $x_0 \in \Omega$ se

$$P_m(x_0, \xi) = 0 \implies \xi = 0.$$

Dizemos que o operador P é elíptico se for elíptico para todo $x_0 \in \Omega$, equivalentemente $Char(P) = \varnothing$.

Exemplo 1.6.1. O operador de Laplace (dado no Exemplo 1.5.1) é elíptico.

De fato, note que Δ é um operador com coeficientes constantes. Logo analisando o símbolo principal, temos

$$\Delta_2(x, \xi) = -|\xi|^2 \iff \xi = 0$$

portanto $Char(\Delta) = \varnothing$.

Podemos descrever a hipoelipticidade global de P através do suporte singular de uma distribuição.

Definição 1.6.3. Um ODPL P é dito hipoelíptico em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, aberto, se $SS(Pu) = SS(u)$ para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 1.6.1. Seja P um operador hipoelíptico, então se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $Pu = f \in C^\infty(\Omega)$, temos que $SS(u) = SS(Pu) = SS(f) = \varnothing$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.6.1. *Se P é um operador de coeficientes constantes com solução fundamental E tal que $SS(E) = \{0\}$, então P é hipoelíptico. Reciprocamente, se P é hipoelíptico, então toda solução fundamental de P é C^∞ fora da origem.*

Demonstração. Vide [7]. □

Exemplo 1.6.2. O operador de Laplace possui solução fundamental dada por

$$E(x) = \begin{cases} C|x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \\ (2\pi)^{-1} \ln |x|, & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Claramente $SS(E) = \{0\}$, então, pelo Teorema 1.6.1, temos que o operador de Laplace é hipoelíptico.

Definição 1.6.4. Uma função de classe C^1, f definida em um aberto $\Omega \in \mathbb{C}^n$ é dita holomorfa se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$, $j = 1, ..., n$.

Definição 1.6.5. Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a sua transformada de Fourier-Laplace por:

$$\widehat{u}(\zeta) = \langle u, e^{-ix\cdot\zeta} \rangle, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n$$

sendo $x \cdot \zeta = x_1\zeta_1 + ... + x_n\zeta_n$.

Teorema 1.6.2 (Paley-Wiener)**.**

1. *Uma função U inteira em $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $S(u) \subset \{x; |x| \leq R\}$ se somente se, existem constantes C e N tais que:*
$$|U(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{R|Im\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

2. *Uma função inteira U em $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier-Laplace de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $S(u) \subseteq \{x; |x| \leq R\}$ se e somente se, para cada $N \in \mathbb{Z}_+$, existe uma constante C_N tal que:*

$$|U(\zeta)| \leq \frac{C_N e^{R|Im\zeta|}}{(1 + |\zeta|)^N}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Demonstração. Ver [7]. □

É uma consequência direta do Teorema de Paley-Wiener 1.6.2, que, para todo $\xi \in \{\zeta \in C^n : Im(\zeta) = 0\} \approx \mathbb{R}^n$, temos

A transformada de Fourier $\hat{u}$ de uma função $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz
$\forall N \in \mathbb{Z}_+$, $\exists C_N$ tal que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1 + |\xi|)^N}. \tag{1.21}$$

Reciprocamente, se $\hat{u}$ satisfaz (1.21), então $\hat{u}$ é a transformada de Fourier de alguma $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.7 Conjunto Frente de Onda

A seguir, trataremos um pouco sobre análise microlocal de operadores, conceito essencial na área de equações diferenciais parciais, e portanto indispensável neste trabalho.

Lema 1.7.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Então $x_0 \notin SS(u)$ se, e somente se, existe $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi = 1$ numa vizinhança de x_0 e, para cada $K \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_K > 0$ tal que*

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq \frac{C_K}{(1+|\xi|)^K}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Veja [8]. □

Definição 1.7.1. Um subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ é dito um cone se dado $x \in \Gamma$ e $\rho > 0$, então $\rho x \in \Gamma$.

Definição 1.7.2. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Dizemos que u é C^∞ (ou microlocalmente regular) em (x_0, ξ_0) se existem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0 e um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contendo ξ_0 tal que, para todo $K \in \mathbb{N}$, existe $C_K > 0$ tal que

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq \frac{C_K}{(1+|\xi|)^K}, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Definição 1.7.3. O conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é definido por:

$$WF(u) = \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\});\ u \text{ não é } C^\infty \text{ em } (x,\xi)\}.$$

Proposição 1.7.1.

1. *Se $\Pi : \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \Omega$ é a projeção na primeira variável, então*

$$\Pi(WF(u)) = SS(u).$$

2. *Se $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $\alpha \in C^\infty(\Omega)$, então*

$$WF(Pu) \subset WF(u).$$

Demonstração. Vide [8]. □

Teorema 1.7.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e P um ODPL. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então*

$$WF(u) \subset WF(Pu) \cup Char(P).$$

Demonstração. Vide [8]. □

Corolário 1.7.1. *Todo operador elíptico é hipoelíptico.*

Demonstração. Temos que para todo operador linear P, $SS(Pu) \subset SS(u)$. Por outro lado, se P é elíptico, $Char(P) = \varnothing$. Então pelo teorema anterior, $WF(u) \subset WF(Pu)$ portanto, utilizando a Proposição 1.7.1, temos

$$SS(u) = \Pi(WF(u)) \subset \Pi(WF(Pu)) = SS(Pu)$$

e segue o resultado. □

Exemplo 1.7.1. O operador do calor $P = \partial_t - \Delta_x = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$ é hipoelíptico mas não é elíptico.

Já vimos no Exemplo 1.5.2 que sua solução fundamental é dada por

$$E(t,x) = H(t)\frac{e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}$$

Note que E é C^∞ em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$, portanto, pelo Teorema 1.6.1, temos que P é hipoelíptico.

Por outro lado, se $P(\tau,\xi)$ é o símbolo principal do operador do calor, então

$$P(\tau,\xi) = |\xi|^2$$

como $(\tau, 0) \in Char(P)$ para todo $\tau \neq 0$, segue que P não é elíptico.

Definição 1.7.4. Dizemos que $\Upsilon \subset \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ é um cone discreto se $\Upsilon = \mathbb{Z}^n \cap \Gamma$ para algum cone Γ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.7.5. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, definimos o conjunto frente de onda toroidal $WF_T(u) \subset \mathbb{T}^N \times (\mathbb{Z}^N \setminus \{0\})$ como segue: $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{T}^N \times (\mathbb{Z}^N \setminus \{0\})$ não pertence a $WF_T(u)$ se e somente se, existe $\chi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e um cone aberto discreto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ tal que $\chi(x_0) \neq 0$, $\xi_0 \in \Gamma$ e

$$\forall N > 0,\ \exists C_N \text{ tal que } |\widehat{(\chi u)}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}.$$

Adequando-se às definições acima, os resultados de análise microlocal obtidos para $\mathbb{R}^N$, são válidos também em $\mathbb{T}^N$. Veja [14].

1.8 Espaços de Sobolev no toro $\mathbb{T}^N$

Definição 1.8.1. Seja $s \in \mathbb{R}$, denotamos o espaço de Sobolev de ordem s por $H^s(\mathbb{T}^N)$ e é definido por

$$H^s(\mathbb{T}^N) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 < \infty\}.$$

Proposição 1.8.1. *Dados $t, s \in \mathbb{R}$, existe uma isometria entre $H^t(\mathbb{T}^N)$ e $H^{t+s}(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Seja φ_s um operador linear tal que para cada $u \in H^0(\mathbb{T}^N)$

$$\varphi_s(u)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi},$$

então φ_s é uma isometria entre $H^t(\mathbb{T}^N)$ e $H^{t+s}(\mathbb{T}^N)$. De fato, dado $k \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_s(u)}(k) &= \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot k} \varphi_s(u) dx = \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot k} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi} dx \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix(k-\xi)} dx = (1+|k|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{u}(k). \end{aligned}$$

E ainda,

$$\|\varphi_s(u)\|^2_{H^{t+s}} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^{t+s}|\widehat{\varphi_s(u)}(\xi)|^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^{t+s}(1+|\xi|^2)^{-s}|\widehat{u}(\xi)|^2 = \|u\|^2_{H^t}.$$

logo $\varphi_s(u)\in H^{t+s}(\mathbb{T}^N)$.

Seja $u\in H^t(\mathbb{T}^N)$ tal que $u\in\ker\varphi_s$, então da igualdade obtida acima

$$\begin{aligned}\varphi_s(u)=0 \;&\Rightarrow\; \|\varphi_s(u)\|_{H^{t+s}}=0\\ &\Rightarrow\; \|u\|_{H^t}=0\\ &\Rightarrow\; u=0\end{aligned}$$

Logo $u=0$ e φ_s é injetora.

Dada $v\in H^{t+s}(\mathbb{T}^N)$, tome u tal que $\widehat{u}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{v}(\xi)$. Note que $u\in H^t(\mathbb{T}^N)$:

$$\|u\|_{H^t} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^t|\widehat{u}(\xi)|^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s(1+|\xi|^2)^t|\widehat{v}(\xi)|^2 = \|v\|_{H^{t+s}}<\infty.$$

E ainda, temos que $\varphi_s(u)=v$ em H^{t+s}. De fato,

$$\|\varphi_s(u)(\xi)-v(x)\| = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^{t+s}|\mathcal{F}[\varphi_s(u)-v](\xi)|^2=0,$$

pois

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi_s(u)-v](\xi) &= \mathcal{F}[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{u}(\eta)e^{ix\cdot\eta}-v(x)](\xi)\\ &= \mathcal{F}[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{v}(\eta)e^{ix\cdot\eta}](\xi)-\widehat{v}(\xi)\\ &= \mathcal{F}[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\widehat{v}(\eta)e^{ix\cdot\eta}](\xi)-\widehat{v}(\xi)=0\end{aligned}$$

portanto φ_s é sobrejetora, e segue o lema.

□

Teorema 1.8.1. *Para cada $s\in\mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^N)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle u,v\rangle_{H^s} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}.$$

A norma é então dada por

$$\|u\|_{H^s} = \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Sabemos que L^2 é um espaço completo, pelo Corolário 1.8.1, temos que $H^0(\mathbb{T}^N)$ também o é. Logo, tomando $t=0$ na Proposição 1.8.1, segue que $H^s(\mathbb{T}^N)$ é espaço de Hilbert com a norma induzida pelo produto interno. □

Proposição 1.8.2. *Os polinômios trigonométricos são densos em $H^s(\mathbb{T}^N)$*

Demonstração. Veja [14] □

Lema 1.8.1. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 < \infty$, então $u \in L^2(\mathbb{T}^N)$, e além disso vale Parseval, ou seja,*

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2. \tag{1.22}$$

Demonstração. Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \subset L^2(\mathbb{T}^N)$. Pela Proposição 1.3.3

$$\begin{aligned}
|\langle u, \phi \rangle| = \left| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(\xi)\widehat{\phi}(-\xi) \right| &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{u}(\xi)||\widehat{\phi}(-\xi)| \\
&\leq \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \, \|\phi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de extensão de Hahn Banach, existe $T \in (L^2)^*$ que estende u. E ainda, pelo Teorema de Riesz, existe $f \in L^2(\mathbb{T}^N)$ tal que $u = T_f \in L^2(\mathbb{T}^N)$.

Como temos a desigualdade de Parseval válida para função em $L^2(\mathbb{T}^N)$, segue o resultado. □

Teorema 1.8.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$, então*

$$H^m(\mathbb{T}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^N) : \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 < \infty\}. \tag{1.23}$$

.

Demonstração. Considere $u \in H^m(\mathbb{T}^N)$ no sentido da Definição 1.8.1, então temos que $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1 + |\xi|^2)^m \widehat{u}(\xi) < \infty$.Tome $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, tal que $|\alpha| \leq m$. Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2 &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |(i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\xi|^{2|\alpha|} |\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 < \infty
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 1.8.1, segue que $\partial^\alpha u \in L^2\mathbb{T}^N)$. Assim, utilizando Plancherel

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial_x^\alpha u\|_{L^2} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi)|^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2 \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} C|\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq C \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 \leq C \, \|u\|_{H^m}
\end{aligned}$$

onde $C = \#\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : \, |\alpha| \leq m\}$.

Por outro lado, se u está no conjunto dado em (1.23), $\partial^\alpha u(\xi) \in L^2(\mathbb{T}^N)$ sempre que $|\alpha| \leq m$. Pelo Lema 1.1.1 que existe constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 &\leq C \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |\partial^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \\
&= C \left\| \partial_j^m u \right\|_{L^2} < \infty.
\end{aligned}$$

sendo utilizado Parseval na última igualdade. □

Do Teorema acima, segue que para $m \in \mathbb{N}$

$$\|u\|_{H^m} \cong \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{T}^N} |\partial^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corolário 1.8.1. $H^0(\mathbb{T}^N) = L^2(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Utilizando a definição de H^0 como aparece no Teorema 1.8.2, note que

$$\|u\|_{H^0} = \|u\|_{L^2}.$$

□

Lema 1.8.2. *Se $t < s$ então $H^s(\mathbb{T}^N) \subset H^t(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{T}^N)$. Como $(1+|\xi|^2)^t < (1+|\xi|^2)^s \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N$, temos

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^t |\widehat{u}(\xi)|^2 \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 < \infty.$$

Assim $\|u\|_{H^t} \leq \|u\|_{H^s}$. □

Proposição 1.8.3. *Se $u \in H^{s+t}(\mathbb{T}^N)$ e $v \in H^{s-t}(\mathbb{T}^N)$ então $|\langle u, v \rangle_{H^s}| \leq \|u\|_{H^{s+t}} \|v\|_{H^{s-t}}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
|\langle u, v \rangle_{H^s}| &= |\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)}| \\
&\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{\frac{s+t}{2}} |\widehat{u}(\xi)| (1+|\xi|^2)^{\frac{s-t}{2}} |\widehat{v}(\xi)| \\
&\leq \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{s+t} |\widehat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|^2)^{s-t} |\widehat{v}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é obtida por Cauchy-Schwartz. □

Proposição 1.8.4. *Para cada $s \in \mathbb{R}$, o operador D^α é limitado de $H^{s+|\alpha|}(\mathbb{T}^N)$ em $H^s(\mathbb{T}^N)$, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|D^\alpha u\|_{H^s} \leq c \|u\|_{H^{s+|\alpha|}}$, para todo $u \in H^{s+|\alpha|}(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Primeiramente, note que

$$|\xi^\alpha| = |(\xi_1^{\alpha_1}, ..., \xi_n^{\alpha_n})| \leq |\xi|^{\alpha_1+...+\alpha_n} = |\xi|^{|\alpha|} \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \tag{1.24}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{H^s} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{D^\alpha u}(\xi)|^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s|\xi^\alpha\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s(1+|\xi|^2)^{|\alpha|}|\widehat{u}(\xi)|^2 = \|u\|_{H^{s+|\alpha|}} . \end{aligned}$$

□

Lema 1.8.3. *(Lema de Rellich). Seja $(u_j)_{j\geq 1}$ uma sequência em $H^t(\mathbb{T}^N)$ com $\|u_j\|_{H^t} \leq 1$ $\forall j \geq 1$. Se $s < t$, então existe uma subsequência $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ convergente em $H^s(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Note que

$$\|u_j\|_{H^t} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^t|\widehat{u_j}(\xi)|^2 \leq 1 \tag{1.25}$$

então, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$ fixo, $(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{u_j}(\xi)$ está na bola unitária de $\mathbb{C}$. Assim, fixando $\xi \in \mathbb{Z}^N$, existe uma subsequência $(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{u_{j_k}}(\xi)$ convergente em $\mathbb{C}$ (pois este é sequencialmente compacto).

Mostraremos que a subsequência $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ é de Cauchy em H^s, $s < t$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u_{j_k} - u_{j_l}\|_{H^s}^2 &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 \qquad (1.26) \\ &= \sum_{|\xi|\leq N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 + \sum_{|\xi|>N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

sendo $N \in \mathbb{N}$ qualquer.

Primeiro estimaremos o segundo somatório de (1.26). Por (1.25), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{|\xi|>N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 &= \sum_{|\xi|>N}(1+|\xi|^2)^{s-t}[(1+|\xi|^2)^t|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2] \\ &\leq \sum_{|\xi|>N}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{t-s}}(1+|\xi|^2)^t(2|\widehat{u_{j_k}}(\xi)|^2 + 2|\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2) \\ &\leq \sum_{|\xi|>N}\frac{1}{(N^2)^{t-s}}(1+|\xi|^2)^t(2|\widehat{u_{j_k}}(\xi)|^2 + 2|\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2) \\ &\leq N^{2(s-t)}\sum_{|\xi|>N}(1+|\xi|^2)^t(2|\widehat{u_{j_k}}(\xi)|^2 + 2|\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2) \\ &\leq 4N^{2(s-t)}. \end{aligned}$$

Como $s - t < 0$, podemos tomar $N = N_0$ suficientemente grande de tal forma que $4N^{2(s-t)}$ seja menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$\sum_{|\xi|>N_0}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi) - \widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{|\xi|\leq N_0}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2\leq\sum_{|\xi|\leq N_0}(1+|\xi|^2)^t|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2.$$

E mais, $((1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{u_{j_k}}(\xi))$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$ para cada ξ fixo, ou seja, para todo $\epsilon>0$, existe $N=N(\epsilon,\xi)$ tal que $\forall k,l>N$,

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|=|(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{u_{j_k}}(\xi)-(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}\widehat{u_{j_l}}(\xi)|\leq\left(\frac{\epsilon}{2C}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ou seja,

$$(1+|\xi|^2)^t|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|\leq\frac{\epsilon}{2C}\tag{1.28}$$

onde a constante $C=\#\{\zeta\in\mathbb{Z}^N:\ |\zeta|\leq N_0\}$, sendo $\#$ a medida de contagem. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{|\xi|\leq N_0}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|^2 &\leq \sum_{|\xi|\leq N_0}((1+|\xi|^2)^t|\widehat{u_{j_k}}(\xi)-\widehat{u_{j_l}}(\xi)|)^2\\ &< \frac{\epsilon}{2C}\sum_{|\xi|\leq N_0}1=\frac{\epsilon}{2}. \qquad (1.29)\end{aligned}$$

Tome $K=\max\{N(\epsilon,\xi);\ |\xi|\leq N_0\}$, então, por (1.26), (1.27) e (1.29), $\forall k,l>K$

$$\|u_{j_k}-u_{j_l}\|_{H^s}<\epsilon.$$

Portanto, $(u_{j_k})\subset(u_j)$ é de Cauchy em $H^s(\mathbb{T}^N)$ que é completo, logo (u_{j_k}) é convergente em $H^s(\mathbb{T}^N)$.

□

Proposição 1.8.5. *Se a sequência (u_j) converge em $H^s(\mathbb{T}^N)$, então converge também em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.8.3, com $t=0$, dada $\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^N)\subset H^{-s}(\mathbb{T}^N)$,

$$\begin{aligned}|\langle u-u_j,\phi\rangle| &= \left|\left\langle u-u_j,\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{\phi}(\xi)e^{-i\xi\cdot x}\right\rangle\right|=\left|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{\phi}(\xi)\left\langle u-u_j,e^{-i\xi\cdot x}\right\rangle\right|\\ &= \left|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{\phi}(\xi)(\widehat{u-u_j})(\xi)\right|=|\langle u-u_j,\phi\rangle_{H^0}|\\ &\leq \|u-u_j\|_{H^{0+s}}\|\phi\|_{H^{0-s}}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Lema 1.8.4 (Lema de Sobolev)**.** *Se $t\geq\left[\frac{N}{2}\right]+1$ e $u\in H^t(\mathbb{T}^N)$, então a série $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente, deste modo, cada u corresponde a uma função contínua. Ou seja, $H^t(\mathbb{T}^N)\subset C^0(\mathbb{T}^N)$, se $t\geq\left[\frac{N}{2}\right]+1$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a série $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge absolutamente.

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{|\xi|\leq M} |\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}| = \sum_{|\xi|\leq M} |\widehat{u}(\xi)| &= \sum_{|\xi|\leq M} (1+|\xi|^2)^{-\frac{t}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}|\widehat{u}(\xi)| \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|\leq M}(1+|\xi|^2)^{-t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|\xi|\leq M}(1+|\xi|^2)^{t}|\widehat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|\leq M}(1+|\xi|^2)^{-t}\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^t}.
\end{aligned}$$

Sendo que o último termo converge, para verificar, façamos o teste da integral. Antes, denotando $\epsilon = \left[\frac{N}{2}\right] + 1 - \frac{N}{2} > 0$, temos

$$\begin{aligned}
t \geq \left[\frac{N}{2}\right] + 1 &\Longrightarrow t \geq \epsilon + \frac{N}{2} \\
&\Longrightarrow 2t \geq 2\epsilon + N.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^t} d\xi = C_N \int_1^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^t} dr &\leq C_N \int_1^\infty \frac{r^{N-1}}{r^{2t}} dr \\
&\leq C_N \int_1^\infty \frac{1}{r^{-N+1+2t}} dr \leq C_N \int_1^\infty \frac{1}{r^{-N+1+2\epsilon+N}} dr \\
&= C_N \int_1^\infty \frac{1}{r^{1+2\epsilon}} dr = -\frac{1}{2\epsilon r^{2\epsilon}}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2\epsilon} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.8.2. *Se $u \in H^t(\mathbb{T}^N)$, sendo $t \geq \left[\frac{N}{2}\right] + 1 + m$, então $D^\alpha u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ converge absolutamente para $|\alpha| \leq m$. Logo $H^t(\mathbb{T}^N) \subset C^m(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Se $u \in H^t(\mathbb{T}^N)$ para $t \geq \left[\frac{N}{2}\right] + 1 + m$ e $|\alpha| \leq m$, pela Proposição 1.8.4, temos que $D^\alpha u \in H^{t-|\alpha|}(\mathbb{T}^N)$, onde $t - |\alpha| \geq \left[\frac{N}{2}\right] + 1$, pois

$$|\alpha| \leq m \Longrightarrow -|\alpha| \geq -m \Longrightarrow t - |\alpha| \geq t - m \geq \left[\frac{N}{2}\right] + 1.$$

Logo, pelo Lema de Sobolev segue que

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \widehat{D^\alpha u}(\xi)e^{ix\cdot\xi} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}$$

converge uniformemente. □

Corolário 1.8.3. $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^N) = C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Tome $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então para $\ell = \frac{N+1}{2} + t$, existe constante

$C_\ell > 0$ tal que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{C_\ell}{(1+|\xi|^2)^\ell}.$$

Então

$$\|\varphi\|^2_{H^t} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^t|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \leq C_\ell^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{2\ell-t}} \leq C_\ell^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}}} < \infty$$

ou seja, $C^\infty(\mathbb{T}^N) \subset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^N)$.

Por outro lado, pelo Corolário 1.8.2, temos que

$$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^N) \subset \bigcap_{s\in\mathbb{N}} C^s(\mathbb{T}^N) = C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

□

Observação 1.8.1. Se $\phi \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}_+} H^j(\mathbb{T}^N)$, então $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

De fato, basta mostrar que a transformada de Fourier de ϕ tem decaimento rápido. Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, temos por hipótese que $\phi \in H^{2m}(\mathbb{T}^N)$, ou seja,

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|^2)^{2m}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 < \infty \Rightarrow \; \exists\, c_m \text{ tal que } (1+|\xi|^2)^{2m}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 \leq c_m \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N$$

então $|\widehat{\phi}(\xi)| \leq \dfrac{\sqrt{c_m}}{(1+|\xi|^2)^m} \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N$.

Definição 1.8.2. Sejam $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $j \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{Z}$ definimos a norma Sobolev

$$\|\varphi\|_j = \sum_{|\alpha|\leq j}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq j}\left(\int_{\mathbb{T}^N}|\partial^\alpha\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e as seminormas

$$\|\varphi\|_{j,r} = \|P\varphi\|_j + \|\varphi\|_r$$

onde P é um operador linear definido em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e com coeficientes $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Lema 1.8.5. *Se P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, então $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ com a topologia definida pela família enumerável de seminormas $\{\|\cdot\|_{j,r}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$ e $r \in \mathbb{Z}$, é um espaço de Fréchet.*

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{Z}$, e considere a família de seminormas $\{\|\cdot\|_{j,r}\}$, $j = 0, 1, ...$, construímos a seguinte métrica para $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

$$d_1(\varphi,\psi) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\frac{\|\varphi-\psi\|_{j,r}}{1+\|\varphi-\psi\|_{j,r}}.$$

É conhecido que $(C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$ é um espaço métrico, mostraremos que é completo.

Seja (φ_n) uma sequência de Cauchy em $(C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1)$, então

$$d_1(\varphi_n,\varphi_m) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\frac{\|\varphi_n-\varphi_m\|_{j,r}}{1+\|\varphi_n-\varphi_m\|_{j,r}} \to 0 \quad \text{quando } m,n\to\infty$$

então, para cada $r \in \mathbb{Z}_+$ fixo,

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{j,r} \to 0 \quad \text{quando} \quad m, n \to \infty.$$

ou seja,

$$\|P(\varphi_n - \varphi_m)\|_j + \|\varphi_n - \varphi_m\|_r \to 0 \quad \text{quando} \quad m, n \to \infty. \tag{1.30}$$

Assim, $(P\varphi_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $H^j(\mathbb{T}^N)$ e $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy em $H^r(\mathbb{T}^N)$, que são espaços de Hilbert. Então existem $\varphi \in H^r(\mathbb{T}^N)$ e $\psi^j \in H^j(\mathbb{T}^N)$, para cada j tal que

$$\begin{cases} P\varphi_n & \to & \psi^j \in H^j(\mathbb{T}^N) \\ \varphi_n & \to & \varphi \in H^r(\mathbb{T}^N) \end{cases}.$$

Fixe $j \in \mathbb{Z}_+$. Seja $l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $j < l$, também temos que $P\varphi_n \to \psi^l \in H^l(\mathbb{T}^N)$. Sabemos que $\|f\|_j \leq \|f\|_l$, então

$$\left\|P\varphi_n - \psi^l\right\|_j \leq \left\|P\varphi_n - \psi^l\right\|_l \to 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} P\varphi_n & \to & \psi^j \in H^j(\mathbb{T}^N) \\ P\varphi_n & \to & \psi^l \in H^j(\mathbb{T}^N) \end{cases}$$

pela unicidade do limite, $\psi^l = \psi^j$ em $H^j(\mathbb{T}^N) \supset H^l(\mathbb{T}^N)$.

Analogamente, se $l < j$,

$$\left\|P\varphi_n - \psi^j\right\|_l \leq \left\|P\varphi_n - \psi^j\right\|_j \to 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} P\varphi_n & \to & \psi^j \in H^l(\mathbb{T}^N) \\ P\varphi_n & \to & \psi^l \in H^l(\mathbb{T}^N) \end{cases}$$

assim $\psi^j = \psi^l$ em $H^l(\mathbb{T}^N) \supset H^j(\mathbb{T}^N)$.

Defina $\psi = \psi^j \; \forall j \in \mathbb{Z}_+$, observe que $\psi \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}_+} H^j(\mathbb{T}^N)$, então, pela Proposição 1.8.1 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Pelo Lema 1.8.5,

$$\varphi_n \to \varphi \text{ em } H^r(\mathbb{T}^N) \;\Rightarrow\; \varphi_n \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N).$$

Então, como P é um operador contínuo, $P\varphi_n \to P\varphi$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. Mas $P\varphi_n \to \psi$ em$\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, de fato, dada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$,

$$\langle P\varphi_n, \phi\rangle \to \langle \psi^j, \phi\rangle = \langle \psi, \phi\rangle.$$

Logo, $P\varphi = \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. Como P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, segue que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. E mais,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi\|_{j,r} &= \|P\varphi_n - P\varphi\|_j + \|\varphi_n - \varphi\|_r \\ &= \|P\varphi_n - \psi\|_j + \|\varphi_n - \varphi\|_r \\ &= \left\|P\varphi_n - \psi^j\right\|_j + \|\varphi_n - \varphi\|_r \to 0. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi_n \to \varphi$ na norma $\|\cdot\|_{j,r}$. □

Lema 1.8.6. *Se o operador* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ *é globalmente hipoelíptico em* $\mathbb{T}^N$*, então existem* $l \in \mathbb{Z}_+$ *e* $c > 0$ *tais que*

$$\|\varphi\|_0 \leq c(\|P\varphi\|_l + \|\varphi\|_{-1}) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{Z}$ fixo, para cada $l \in \mathbb{Z}_+$, tome $k = \max\{m + l, r\}$. Observe que

$$H^k(\mathbb{T}^N) \subset H^{m+l}(\mathbb{T}^N) \subset H^l(\mathbb{T}^N) \text{ e } H^k(\mathbb{T}^N) \subset H^r(\mathbb{T}^N).$$

Como a ordem do operador P é m, temos que existe constante $c_1 > 0$ tal que $\|P\varphi\|_l \leq c_1 \|\varphi\|_{l+m} \leq c_1 \|\varphi\|_k$. Então, existe $c > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{l,r} = \|P\varphi\|_l + \|\varphi\|_r \leq c \|\varphi\|_k .$$

Com isso, temos que a aplicação

$$\begin{array}{llcll} Id: & (C^\infty(\mathbb{T}^N), d) & \to & (C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1) & \\ & \varphi & \mapsto & Id(\varphi) & = \varphi \end{array}$$

é uma bijeção linear contínua. Pelo teorema da aplicação aberta segue que $Id^{-1} : (C^\infty(\mathbb{T}^N), d_1) \to (C^\infty(\mathbb{T}^N), d)$ é contínua. Assim, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, existem $l \in \mathbb{Z}_+$ e $c > 0$ tais que

$$\|\varphi\|_j \leq c \|\varphi\|_{l,r}$$

portanto, tomando $j = 0$ e $r = -1$,

$$\|\varphi\|_0 \leq c(\|P\varphi\|_l + \|\varphi\|_{-1}).$$

$\square$

Proposição 1.8.6.

$$L^2(\mathbb{T}^N) = \ker P \oplus (\ker P)^\perp$$

Demonstração. Claramente $\ker P$ é fechado em $L^2(\mathbb{T}^N)$ que é um espaço de Hilbert, portanto, basta usar o teorema da projeção ortogonal 1.1.4. $\square$

Lema 1.8.7. *Suponha que P seja globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$. Então existem $l \in \mathbb{Z}_+$ e $c > 0$ tais que*

$$\|\varphi\|_0 \leq c \|P\varphi\|_l \quad \forall \varphi \in (\ker P)^\perp \cap C^\infty(\mathbb{T}^N) \tag{1.31}$$

Demonstração. Suponha que (1.31) seja falsa. Logo, $\forall l \in \mathbb{Z}_+$ e toda constante $c > 0$, em particular, para $c = j \in \mathbb{Z}_+$, $\exists\ \varphi_j^l \in (\ker P)^\perp \cap C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tais que $\left\|\varphi_j^l\right\|_0 > j \left\|P\varphi_j^l\right\|_l$, fixando l, podemos denotar $\varphi_j^l = \varphi_j$

$$\|P\varphi_j\|_l < \frac{\|\varphi_j\|_0}{j}.$$

Defina $\phi_j = \dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_0}$, logo

(I) $\|\phi_j\|_0 = 1$

(II) $\|P\phi_j\|_l = \left\|P\left(\dfrac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_0}\right)\right\|_l = \dfrac{1}{\|\varphi_j\|_0}\|P\varphi_j\|_l \leq \dfrac{1}{\|\varphi_j\|_0}\dfrac{\|\varphi_j\|_0}{j} = \dfrac{1}{j}.$

Note que $(\phi_j) \subset (\ker P)^\perp \cap C^\infty(\mathbb{T}^N)$ também.

De fato, dada $g \in \ker P$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\int \phi_j(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{\left\|\varphi_j^l\right\|_0}\int \varphi_j^l(x)\overline{g(x)}dx = 0.$$

Claramente, para cada j, $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ pois é a multiplicação de uma constante por $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. E ainda,

$$\|\phi_j\|_l = \frac{\|\varphi_j\|_l}{\|\varphi_j\|_0} < \frac{\|\varphi_j\|_0}{j\,\|\varphi_j\|_0} = \frac{1}{j}.$$

Com as propriedades que vimos acima para (ϕ_j), podemos supor, sem perda de generalidade, que a sequência $(\varphi_j) \subset (\ker P)^\perp \cap C^\infty(\mathbb{T}^N)$ satisfaz as seguintes condições:
(i) $\|\varphi_j\|_0 = 1$
(ii) $\|P\varphi_j\|_l < \frac{1}{j}$.
Para cada $l \in \mathbb{Z}_+$, fazendo $j \to \infty$,

$$P\varphi_j \to 0 \quad \text{em} \quad H^l(\mathbb{T}^N) \tag{1.32}$$

logo, pela Proposição 1.8.5

$$P\varphi_j \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \to \infty \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N). \tag{1.33}$$

Como $\|\varphi_j\|_0 = 1$ e $-1 < 0$, pelo Lema de Rellich (1.8.3), existem $u_{-1} \in H^{-1}(\mathbb{T}^N)$ e uma subsequência $(\varphi_{j_k}) \subset (\varphi_j)$ tal que

$$\varphi_{j_k} \longrightarrow u_{-1} \quad \text{em} \quad H^{-1}(\mathbb{T}^N) \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{1.34}$$

Assim, $\varphi_{j_k} \longrightarrow u_{-1}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, portanto,

$$P\varphi_{j_k} \longrightarrow Pu_{-1} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \quad \text{quando } j \to \infty. \tag{1.35}$$

Logo, por (1.33), (1.35) e da unicidade do limite, segue que $Pu_{-1} = 0$, ou seja, $u_{-1} \in \ker P$. Agora, dada $g \in \ker P$,

$$\int u_{-1}(x)\overline{g(x)}dx = \lim_{j\to\infty} \int \varphi_{j_k}(x)\overline{g(x)}dx = 0$$

então $u_{-1} \in (\ker P)^\perp \cap \ker P$. Portanto, $u_{-1} = 0$.

Como P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, segue do Lema 1.8.6 que existem $p \in \mathbb{Z}_+$ e $c > 0$ tais que

$$1 = \|\varphi_{j_k}\|_0 \le c(\|P\varphi_{j_k}\|_p + \|\varphi_{j_k}\|_{-1}).$$

Fazendo $k \to \infty$, por (1.32) e (1.34), segue que

$$1 \le c\,\|u_{-1}\|_{-1} \implies u_{-1} \neq 0$$

contradição. □

CAPÍTULO 2

Hipoelipticidade e Resolubilidade no Toro

O presente capítulo explora o principal tópico do trabalho, regularidade de campos vetoriais reais no toro $\mathbb{T}^N$. Apresenta-se a demonstração de relações como por exemplo, se um ODPL P é globalmente hipoelíptico então seu transposto P^* é globalmente resolúvel, e, sendo L um campo vetorial real de coeficientes constantes, então L^* é globalmente hipoelíptico se, e somente se, os coeficientes satisfazem a condição Diofantina. Ao reunir as relações obtidas, constrói-se a prova do resultado principal do trabalho, que apresenta uma classe de campos vetoriais onde os conceitos de hipoelipticidade global, resolubilidade global C^∞ e redução à forma normal são equivalentes.

2.1 Relações Básicas

Proposição 2.1.1. *Seja $P : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ um ODPL globalmente resolúvel e globalmente hipoelíptico, então P é globalmente C^∞-resolúvel em $\mathbb{T}^N$.*

Demonstração. Dado $f \in \mathcal{E}(P) = \{h \in C^\infty(\mathbb{T}^N) : \langle \omega, h\rangle = 0,\ \forall \omega \in \ker P^*\}$. Como P é globalmente resolúvel, segue da Definição 1.5.6 que existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Pu = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. Como $\mathcal{E}(P) \subset C^\infty(\mathbb{T}^N)$ temos que $Pu \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, pela hipoelipticidade de P, segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Portanto, como $Pu = f$, P é globalmente C^∞ resolúvel. □

Proposição 2.1.2. *Se P globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ então P^* é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^N$.*

Demonstração. Dada $f \in \mathcal{E}(P^*)$, devemos encontrar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $P^*u = f$.

Defina o seguinte conjunto

$$Y = PC^\infty(\mathbb{T}^N) \doteq \{\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N) :\ P\phi = \psi \text{ para alguma } \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)\}.$$

Seja $\lambda : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcional linear tal que para cada $\psi \in Y$, $\lambda(\psi) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)\phi(x)\,dx$ onde ϕ é tal que $P(\phi) = \psi$.

Observe que:

1) O funcional λ está bem definido.

De fato, sejam $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $\psi = P\phi_1 = P\phi_2$, então

$$\begin{aligned} P(\phi_1 - \phi_2) = 0 \ &\Rightarrow \ \phi_1 - \phi_2 \in \ker P \\ &\Rightarrow \ \int f(x)(\phi_1 - \phi_2)(x)dx = 0 \\ &\Rightarrow \ \int f(x)\phi_1(x)dx = \int f(x)\phi_2(x)dx \end{aligned}$$

2) Denotando por $\|\cdot\|_\ell$ a norma Sobolev, existem $c > 0$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\lambda(\psi)| \leq c \|\psi\|_\ell$$

para todo $\psi \in Y$.
De fato, graças ao Corolário 1.8.1 e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|\lambda(\psi)| = |\int f(x)\phi(x)dx| \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} = \|f\|_0 \|\phi\|_0 . \tag{2.1}$$

Como P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, pelo Lema 1.8.7, existem constantes $c > 0$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\|\psi\|_0 \leq c \|P\psi\|_\ell , \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap (\ker P)^\perp. \tag{2.2}$$

Pela Proposição 1.8.6, dada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, podemos escrever $\phi = \phi_1 + \phi_2$, onde $\phi_1 \in \ker P$ e $\phi_2 \in (\ker P)^\perp$. Seja ϕ tal que $P\phi = \psi$,

$$\lambda(\psi) = \int f(x)\phi(x)dx = \int f(x)\phi_1(x)dx + \int f(x)\phi_2(x)dx = \int f(x)\phi_2(x)dx.$$

Assim, por (2.1) e (2.2), segue que

$$\begin{aligned} |\lambda(\psi)| &= |\int f(x)\phi_2(x)dx| \leq \|f\|_0 \|\phi_2\|_0 \leq c_1 \|f\|_0 \|P\phi_2\|_\ell \\ &= c \|P(\phi_1 + \phi_2)\|_\ell = c \|\psi\|_\ell \end{aligned}$$

Então

$$|\lambda(\psi)| \leq c \|\psi\|_\ell , \quad \forall \psi \in Y. \tag{2.3}$$

Como $Y \subset C^\infty(\mathbb{T}^N)$ decorre da desigualdade (2.3) e do Teorema de Extensão de Hahn-Banach 1.1.1, que existe $u : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$, funcional linear tal que

(i) $|u(g)| \leq c \|g\|_l , \quad \forall g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

(ii) $u|_Y = \lambda$.

Por (i), temos que u é contínuo em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ munido com a norma Sobolev $\|\cdot\|_\ell$ uma vez que $C^\infty(\mathbb{T}^N) \subset H^s(\mathbb{T}^N)$ para todo s. Logo u pertence a $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, e ainda, para todo $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

$$\langle P^* u, \eta \rangle = \langle u, P\eta \rangle = \lambda(P\eta) = \int f(x)\eta(x)dx = \langle f, \eta \rangle.$$

Ou seja, $P^* u = f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. $\square$

Utilizando os mesmos argumentos contidos na proposição anterior, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.3. *Se P^* globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ então P é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^N$.*

Proposição 2.1.4. *Seja P um operador globalmente hipoelíptico, então* $\ker P$ *tem dimensão finita.*

Demonstração. Se P é globalmente hipoelíptico então temos que $\ker P \subset C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$. Suponha por absurdo que $\dim \ker P = +\infty$, então existiria uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{T}^n)$ definindo um sistema ortonormal completo para um subespaço de $L^2(\mathbb{T}^n)$. Pela Proposição 1.1.3, f_n converge fracamente a zero em $L^2(\mathbb{T}^n)$ e portanto converge no sentido das distribuições para a distribuição nula.

Graças ao Lema 1.8.6, temos que existem constantes $c > 0$ e $\ell > 0$ tais que

$$1 = \|f_n\|_0 \leq c(\|Pf_n\|_\ell + \|f_n\|_{-1}) = c\|f_n\|_{-1}. \tag{2.4}$$

Por outro lado, como $\|f_n\|_{L^2} = \|f_n\|_0 = 1$ segue do Lema 1.8.3 que existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ e uma $\eta \in H^{-1}$ tais que $f_{n_j} \to \eta$ quando $j \to \infty$.

Logo, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade (2.4) obtemos

$$1 \leq c\,\|\eta\|_{-1} = 0.$$

Contradição, logo $\dim \ker P < +\infty$.

□

2.2 Hipoelipticidade e Resolubilidade Global de Campos Vetoriais

Na presente seção, trataremos sobre o assunto principal deste trabalho. Será apresentada uma classe campos vetoriais definidos no toro onde os conceitos de hipoelipticidade global, resolubilidade C^∞ e redução do campo à sua forma normal são equivalentes.

Definição 2.2.1. Um campo vetorial real suave sobre $\mathbb{T}^N$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $L : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$ que satisfaz a regra de Leibniz, isto é,

$$L(fg) = fL(g) + gL(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Proposição 2.2.1. *Seja $L = \sum_{j=1}^N a_j(x)\partial_{x_j}$ um campo vetorial real suave, então*

1. $(L^2)^* = (L^*)^2$
2. $L^* = -L - divL$
3. *Se $J \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*J = 0$ então $L^*(Ju) = -JL(u)$, para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Sejam $\psi, \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

1. Observe que

$$\langle L^2\psi, \phi\rangle = \langle L\psi, L^*\phi\rangle = \langle \psi, L^*(L^*\phi)\rangle = \langle \psi, (L^*)^2\phi\rangle$$

portanto, $(L^2)^* = (L^*)^2$.

2. Aplicando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\langle L\psi, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N} L\psi(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_{x_j}\psi(x) \right) \phi(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{T}^N} \partial_{x_j}\psi(x)(a_j(x)\phi(x))dx \\
&= -\sum_{j=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{T}^N} \psi(x) \left(\partial_{x_j} a_j(x)\right) \phi(x)dx + \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x)\psi(x)\partial_{x_j}\phi(x)dx \right] \\
&= -\left[\int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^{N} \psi(x) \left(\partial_{x_j} a_j(x)\right) \phi(x)dx + \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\psi(x)\partial_{x_j}\phi(x)dx \right] \\
&= -\langle \psi, (L + divL)\phi \rangle.
\end{aligned}$$

3. Dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, pelo item *2* segue que

$$\begin{aligned}
L^*(Ju) &= -L(Ju) - \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) (Ju) \\
&= -(LJ)u - JLu - \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) (Ju) \\
&= (L^*J)u - JLu = -JLu.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.2. Sejam L, M dois campos vetoriais então dizemos que L e M são campos conjugados se existe um difeomorfismo $y = \tau(x)$, de classe C^∞ tal que

$$Lu(x) = M(u \circ \tau^{-1})(y)$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$.

Proposição 2.2.2. *Sejam L e M dois campos conjugados. Então, L é globalmente hipoelíptico se, e somente se, M é globalmente hipoelíptico.*

Demonstração. Observe que se τ é um difeomorfismo, então dada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$

$$L\phi(x) = M(\phi \circ \tau^{-1})(y).$$

Tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Sejam $\tilde{u} = u \circ \tau^{-1}$ e $\tilde{f} = f \circ \tau^{-1}$. Então $L_0\tilde{u} = \tilde{f} = f \circ \tau^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, se tivermos L_0 globalmente hipoelíptico, então segue que $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, como

$$\langle u, \phi \rangle = \langle \tilde{u} \circ \tau, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$$

segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

A recíproca segue analogamente. □

Definição 2.2.3. Se existe um difeomorfismo que conjuga um campo L a um campo L_0 de coeficientes constantes, então dizemos que L_0 é a forma normal de L.

Proposição 2.2.3. *Se existe um difeomorfismo C^∞, $\tau : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^N$ que transforma o campo vetorial $L = \sum_{j=1}^N a_j(x)\partial_{x_j}$ no campo $L_0 = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$ de coeficientes constantes, então a função J dada pelo determinante Jacobiano da função $\tau(x) = (\tau_1(x), ..., \tau_N(x))$ pertence ao núcleo de L^*.*

Demonstração. Temos que

$$J(x) = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}\tau_1(x) & \partial_{x_2}\tau_1(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_1(x) \\ \partial_{x_1}\tau_2(x) & \partial_{x_2}\tau_2(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\tau_N(x) & \partial_{x_2}\tau_N(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_N(x) \end{vmatrix}$$

e ainda,

$$L_0 = \sum_{j=1}^N (L\tau_j)\partial_{x_j} = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}.$$

Assim, $J(x)a_j(x) = J_j(x)$, onde $J_j(x)$ é o determinante da matriz que obtém-se substituindo a j-ésima coluna da matriz Jacobiana de $\tau(x)$ pelo vetor $(\Lambda_1, ..., \Lambda_N)^t$. Temos

$$L^*J(x) = -\sum_{j=1}^N \partial_{x_j}(a_j(x)J(x)) = -\sum_{j=1}^N \partial_{x_j} J_j(x). \tag{2.5}$$

Utilizando o fato de que J_j é uma forma N-linear alternada com respeito as colunas, segue que

$$\partial_{x_j} J_j(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N J_j^k(x) \tag{2.6}$$

sendo $J_j^k(x)$ o determinante que se obtém derivando a k-ésima coluna com relação a x_j, ou seja,

$$J_j^k(x) = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}\tau_1(x) & \partial_{x_2}\tau_1(x) & ... & \partial_{x_j}\partial_{x_k}\tau_1(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_1(x) \\ \partial_{x_1}\tau_2(x) & \partial_{x_2}\tau_2(x) & ... & \partial_{x_j}\partial_{x_k}\tau_2(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\tau_N(x) & \partial_{x_2}\tau_N(x) & ... & \partial_{x_j}\partial_{x_k}\tau_N(x) & ... & \partial_{x_N}\tau_N(x) \end{vmatrix}.$$

Note que trocando a j-ésima coluna de J_j^k pela k-ésima coluna, e utilizando Schwartz, concluímos que $J_j^k = -J_k^j$, então $J_j^k + J_k^j = 0$.

Substituindo (2.6) em (2.5), e utilizando o fato acima, e, supondo, sem perda de generalidade que $j \leq k$, obtemos

$$L^*J(x) = -\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N J_j^k(x) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq N} J_j^k(x) + J_k^j(x) = 0.$$

□

Teorema 2.2.1. *Seja $L = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{x_j}$ um campo vetorial com coeficientes constantes. Então são equivalentes:*

1. *L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.*

2. $\Lambda_1, ..., \Lambda_N$ *satisfazem a condição chamada Diofantina: existem constantes* $K \in \mathbb{Z}_+$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$\left| \sum_{j=1}^{N} m_j \Lambda_j \right| \geq \frac{C}{(1+|m|)^K} \quad \forall m = (m_1, ..., m_N) \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$$

.

Demonstração.

(*2*) $\Rightarrow$ (*1*) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Aplicando a transformada de Fourier nessa equação temos:

$$\sum_{j=1}^{N} i m_j \Lambda_j \widehat{u}(m) = \widehat{f}(m).$$

Disso e da condição Diofantina, para $m \neq 0$

$$|\widehat{u}(m)| \leq \frac{|\widehat{f}(m)|}{\left|\sum_{j=1}^{N} m_j \Lambda_j\right|} \leq |\widehat{f}(m)| C^{-1} (1+|m|)^K. \tag{2.7}$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $\widehat{f}$ tem decaimento rápido, ou seja, dado $l \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_l > 0$ tal que

$$|\widehat{f}(m)| \leq \frac{C_l}{(1+|m|)^{l-K}}. \tag{2.8}$$

Portanto, por (2.7) e (2.8)

$$|\widehat{u}(m)| \leq \frac{C^{-1} C_l}{(1+|m|)^l}.$$

Logo, pelo Corolário 1.3.1, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

(*1*) $\Rightarrow$ (*2*) Suponha por absurdo que a condição Diofantina não ocorra, então para todo $l \in \mathbb{Z}_+$, existem $m(l) = (m_1(l), ..., m_N(l)) \in \mathbb{Z}^N$ tais que

$$\left| \sum_{j=1}^{N} m_j(l) \Lambda_j \right| < \frac{1}{(1+|m(l)|)^l}. \tag{2.9}$$

Defina $f(x) = \displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} c_m e^{im \cdot x}$, onde c_m é dada por

$$c_m = \begin{cases} 0; & \text{se } m \neq m(l) \text{ ou } m = 0 \\ \frac{\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j m_j(l)}{1+|m(l)|^2}; & \text{se } m = m(l) \text{ e } m \neq 0. \end{cases}$$

Mostraremos que c_m tem decaimento rápido, assim, seguirá do Corolário 1.3.1 que $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. De fato, observe que basta verificarmos o fato para $m = m(l)$, caso contrário c_m é nula. Dado $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k \leq l$,

$$(1+|m(l)|)^k |c_m| < \frac{1}{(1+|m(l)|)^{2+l-k}} \leq 1.$$

Seja $M_k = \max\{(1+|m(l)|)^k |c_m| : \ l < k\}$. Então, tomando $c_k = \max\{M_k, 1\}$, segue que, dado $k \in \mathbb{Z}_+$, existe $c_k > 0$ tal que:

$$|c_m| \leq \frac{c_k}{(1+|m|)^k}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

Tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\langle u, e^{-ix\cdot m}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{1+|m|^2}; & \text{se } m = m(l) \\ 0; & \text{se } m \neq m(l) \end{cases},$$

segue que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Mostraremos que $Lu \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. De fato, dada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$,

$$\begin{aligned} \widehat{L\phi}(m) &= \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{x_j} \phi(x) e^{-ix\cdot m} dx = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \int_{\mathbb{T}^N} \partial_{x_j} \phi(x) e^{-ix\cdot m} dx \\ &= -\sum_{j=1}^N \Lambda_j \int_{\mathbb{T}^N} \phi(x)(-im_j) e^{-ix\cdot m} dx = i \sum_{j=1}^N \Lambda_j m_j \widehat{\phi}(m). \end{aligned}$$

Utilizando o fato acima, e observando que $L^* = -L$, temos

$$\begin{aligned} \langle Lu, \phi\rangle &= \langle u, L^*\phi\rangle = -\langle u, L\phi\rangle \\ &= -\left\langle u, \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \widehat{L\phi}(m) e^{ix\cdot m}\right\rangle = -\lim_{\nu\to\infty} \left\langle \check{u}, \sum_{|m|\leq\nu} \widehat{L\phi}(m) e^{-ix\cdot m}\right\rangle \\ &= -\lim_{\nu\to\infty} \sum_{m\leq\nu} \widehat{L\phi}(m) \left\langle \check{u}, e^{-ix\cdot m}\right\rangle = -\sum_{m=m(l)} \widehat{L\phi}(m)\hat{\check{u}}(m) \\ &= -i \sum_{l=1}^\infty \sum_{j=1}^N \Lambda_j m_j(l) \hat{\phi}(m(l)) \hat{\check{u}}(m(l)) = -i \sum_{l=1}^\infty \widehat{\phi}(m(l)) \frac{\sum_{j=1}^N \Lambda_j m_j(l)}{1+|m(l)|^2} \\ &= -i \sum_{l=1}^\infty \widehat{\phi}(m(l)) \widehat{f}(m(l)) = -i \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\phi}(m)\widehat{f}(m) \\ &= -i \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\phi}(m) \int e^{-ix\cdot m} f(x) dx = -\int if(x) \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\phi}(m) e^{-ix\cdot m} dx \\ &= -\int if(-x) \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \widehat{\phi}(m) e^{ix\cdot m} dx \int -i\check{f}(x)\phi(x) dx = \left\langle -i\check{f}, \phi\right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, teríamos $Lu = -i\check{f} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ com $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \setminus C^\infty(\mathbb{T}^N)$, contradizendo o fato de L ser globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$. □

Corolário 2.2.1. *Seja τ um difeomorfismo C^∞ que conjuga o campo $L = \sum_{j=1}^N a_j(x)\partial_{x_j}$ com sua forma normal $L_0 = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$, sendo que os coeficientes Λ_j satisfazem a condição Diofantina. Então o transposto de L é globalmente hipoelíptico.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.3, e pelo item *3* da Poposição 2.2.1 temos que, dada $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$

$$L^*(Ju) = -JL(u). \tag{2.10}$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Como τ é um difeomorfismo global, temos que

$$|J(x)| = |\det \tau(x)| > 0, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N$$

e ainda, $J \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Por (2.10), segue que

$$f = L^*u = L^*[JJ^{-1}u] = -JL[J^{-1}u]. \tag{2.11}$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que L é globalmente hipoelíptico, então por (2.11), $J^{-1}u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, e portanto $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e L^* é globalmente hipoelíptico.

□

A seguir, demonstraremos o teorema central do trabalho, o qual foi desenvolvido por Gerson Petronilho em [11]. Apresenta-se uma classe de campos vetoriais onde temos a equivalência entre hipoelipticidade global e resolubilidade global C^∞ do campo L e do seu transposto L^*, além disso, podemos escrever esse campo vetorial em sua forma normal.

Teorema 2.2.2. *Seja $L = \sum_{j=1}^N a_j(x)\partial_{x_j}$ um campo vetorial real suave em $\mathbb{T}^N$. Sendo $L^* : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ seu transposto, assuma que* $\ker L^* = [\omega]$, *onde $w \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\omega(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^N$. Então são equivalentes:*

1. *Existe um difeomorfismo C^∞, $\tau : \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}^N$, tal que, sendo $y = \tau(x)$*

$$L = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$$

onde os números $\Lambda_1, ..., \Lambda_N$ satisfazem a condição diofantina: existem $K \in \mathbb{Z}^N$ e $C > 0$ tais que

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \Lambda_j \right| \geq \frac{C}{(1+|\xi|)^K}, \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

2. *L^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.*

3. *L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.*

4. *L é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$.*

5. *L^* é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$.*

Demonstração. (*2*$\Rightarrow$ *3*):Tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Pelo item *3* da Poposição 2.2.1, temos que para cada $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$

$$L^*(\omega v) = -\omega L v. \tag{2.12}$$

Logo,

$$L^*(\omega u) = -\omega L u = -\omega f \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Assim, pela hipoelipticidade global de L^* em $\mathbb{T}^N$, temos que $\omega u = g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Portanto, como $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e não se anula

$$u = \frac{g}{\omega} \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$$

e L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

(*3* $\Rightarrow$ *2*): Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Por (2.12) e usando o fato de que $\omega(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^N$ temos

$$f = L^*u = L^*\left(\omega \frac{u}{\omega}\right) = -\omega L\left(\frac{u}{w}\right).$$

Então

$$L\left(\frac{u}{w}\right) = -\frac{1}{w} f \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Da hipótese L ser globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, segue que $\dfrac{u}{\omega} = g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, logo $u = g\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e L^* é globalmente hipoelíptico.

(*4* $\Rightarrow$ *3*): Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Tome $h \in \ker L^*$, então $h = c\omega$ onde c é uma constante. Temos:

$$\langle f, h\rangle = \langle Lu, c\omega\rangle = c\langle u, L^*\omega\rangle = c\langle u, 0\rangle = 0.$$

Desse fato, e da hipótese que L é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$, temos que existe $v \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lv = f$. Logo, podemos concluir que $L(u-v) = 0$. Utilizando (2.12) segue que

$$L^*[\omega(u-v)] = -\omega L(u-v) = 0.$$

Portanto, $u - v = c$ constante, ou seja, $u = v + c \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ implicando a hipoelipticidade global de L em $\mathbb{T}^N$.

(*3*$\Rightarrow$ *5*): Supondo que L seja globalmente hipoelíptico, segue da implicação (*3*)$\Rightarrow$(*2*) que L^* é globalmente hipoelíptico. Por outro lado, graças a Proposição 2.1.2, temos que L^* é globalmente resolúvel, e portanto, segue da Proposição 2.1.1 que L^* é C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$.

(*2* $\Rightarrow$ *4*) Análogo a (*3* $\Rightarrow$ *5*).

(*5* $\Rightarrow$ *2*): Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.
Para $T \in \ker L$, $\langle T, f\rangle = \langle T, L^*u\rangle = \langle LT, u\rangle = 0$, ou seja, $f \in \mathcal{E}(L^*)$. Então, como L^* é globalmente C^∞ resolúvel, existe $v \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*v = f$. Logo

$$L^*v = L^*u \;\Rightarrow\; u - v \in \ker L^* = [\omega].$$

Assim, para alguma constante c

$$u = v + c\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

(*1* $\Rightarrow$ *2*): Se podemos escrever $L = \sum_{j=1}^N \Lambda_j \partial_{y_j}$ com coeficientes constantes satisfazendo a condição Diofantina, pelo Teorema 2.2.1, L é globalmente hipoelíptico. Como já temos que *3* $\Rightarrow$ *2*, segue que L^* também é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

(*2* $\Rightarrow$ *1*): Temos $L = \sum_{j=1}^N a_j(x)\partial_{x_j}$, com $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Defina

$$\Lambda_j = \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x)\omega(x)dx.$$

Note que para cada j fixo, $\Lambda_j - a_j(x) \in \mathcal{E}(L)$. De fato, como $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e não muda de sinal, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\int_{\mathbb{T}^N} \omega(x)dx = 1$ e ainda,

$$\int_{\mathbb{T}^N} (\Lambda_j - a_j(x))\omega(x)dx = \Lambda_j \int_{\mathbb{T}^N} \omega(x)dx - \int_{\mathbb{T}^N} a_j(x)\omega(x)dx = 0.$$

Como *(2)⇒(4)*, L é globalmente C^∞ resolúvel, logo, para cada $j \in \{1, ..., N\}$ fixo, existe uma função $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$L\varphi_j(x) = \Lambda_j - a_j(x). \tag{2.13}$$

Defina $\tau_j(x) = x_j + \varphi_j(x)$, então para todo $j = 1, ..., N$

$$L\tau_j = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell(x)\partial_{x_\ell} x_j + L\varphi_j(x) = a_j(x) + \Lambda_j - a_j(x) = \Lambda_j.$$

Defina $\tau(x) = (\tau_1(x), ..., \tau_N(x))$ então, pela hipoelipticidade de L^* e o Teorema 2.3 de [2], segue que este é um difeomorfismo global. E ainda, se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $y = \tau(x)$ e $\tilde{f}(y) = f \circ \tau^{-1}(y) = f(x)$, segue que

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_{x_j} f(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\left[\sum_{k=1}^{N} \partial_{y_k}\tilde{f}(y)\partial_{x_j}\tau_k(x)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_{x_j}\tau_k(x)\right]\partial_{y_k}\tilde{f}(y) = \sum_{k=1}^{N}[L\tau_k(x)]\partial_{y_k}\tilde{f}(y) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\Lambda_k\partial_{y_k}\tilde{f}(y) \end{aligned}$$

Como *(2)⇒(3)*, temos que L é globalmente hipoelíptico, logo, pelo Teorema 2.2.1, segue que $\Lambda_1, ..., \Lambda_N$ satisfazem a condição Diofantina, provando assim que *(2)⇒(1)*. □

Em [2], graças ao Teorema de Kryloff-Bogolouboff [9] Chen e Chi apresentam o seguinte resultado

Teorema 2.2.3. *L^* globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ implica que $\ker L^* = [\omega]$, onde $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\omega(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{T}^N$.*

A recíproca do teorema acima não é válida, ou seja, existem campos vetoriais com com adjunto não globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ mas com o núcleo gerado por função suave que não se anula em ponto algum de $\mathbb{T}^N$.

Observação 2.2.1. Pelo Teorema 2.2.3, nas implicações do Teorema 2.2.2 *1⇒2*, *2⇒3* e *2⇒4*, a hipótese imposta para o núcleo é desnecessária pois já ocorre naturalmente.

Observação 2.2.2. Tendo que $\ker L^* = [\omega]$, com $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\omega(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{T}^N$, segue que $\ker L = \{\text{constantes}\}$.

De fato, utilizando (2.12), temos que para todo $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$, $\omega L v = -L^*(\omega v)$. Assim

$$\begin{aligned} Lv = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\omega}L^*(\omega v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad L^*(\omega v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \omega v \in \ker L^* = [\omega] \\ &\Leftrightarrow \quad v \text{ é constante.} \end{aligned}$$

Lema 2.2.1. *Se L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e existe uma função $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*\omega = 0$, com $\omega(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{T}^N$, então $\ker L^* = [\omega]$.*

Demonstração. Tome $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$ tal que $L^*T = 0$.
Defina $g = \frac{T}{\omega} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^N)$. Assim $T = \omega g$ e segue de (2.12) que

$$0 = L^*T = L^*(\omega g) = -\omega(Lg)$$

isto é, $Lg = 0$. Como L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, temos que $g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e portanto $T = \omega g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Observe que $L(g^k) = 0$, $\forall k \in \{0, 1, ...\}$. De fato, basta observar que

$$Lg^k = kg^{k-1}Lg = 0.$$

Assim, $\{1, g, g^2, ..., g^k, ...\} \subset \ker L$.

Como L é globalmente hipoelíptico, pela Proposição 2.1.4, segue que $\ker L$ tem dimensão finita. Então, para um certo k suficientemente grande, $1, g, g^2, ..., g^k$ são linearmente dependentes, ou seja, existem constantes $b_1, ..., b_k$ nem todas nulas tais que

$$\sum_{j=0}^{k} b_j g^j(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Logo, para cada x fixo, pelo Teorema Fundamental da Álgebra $g(x)$ assume no máximo k valores distintos. Como g é C^∞ no conexo $\mathbb{T}^N$ segue que $g = c$ constante.

Portanto, $T = c\omega$, ou seja, $T \in [\omega]$.

Por outro lado, se $T = c\omega$ podemos ver claramente que $L^*T = 0$.

□

2.3 O operador $P = -\Delta_t - L_x^2$

Nesta seção, analisaremos a resolubilidade C^∞ e a hipoelipticidade global para a seguinte classe de sublaplaceanos em $\mathbb{T}^{n+m}$:

$$P = -\Delta_t - L_x^2 = -\sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k}^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} a_j(x)\partial_{x_j}\right)^2 \tag{2.14}$$

onde $t \in \mathbb{T}^n$, $L_x = \sum_{j=1}^{m} a_j(x)\partial_{x_j}$ não se anula em $\mathbb{T}^m$ e $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ função a valores reais para cada $j = 1, ..., m$. O conceito de transformada parcial de Fourier é imprescindível para obtenção da hipoelipticidade.

A seguir, veremos as relações entre hipoelipticidade global e resolubilidade C^∞ para o operador P dado por (2.14), em relação as propriedades de L_x, bem como os resultados para o transposto P^*.

Teorema 2.3.1. *Seja $P = -\Delta_t - L_x^2$, então*

1. *P^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$ se, e somente se, L^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$.*

2. *Se assumirmos que* $\ker L^* = [\omega]$ *onde $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ e $\omega(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{T}^m$, então P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$ se, e somente se, L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$.*

Demonstração. *Demonstração de (1)*

($\Rightarrow$) Suponha que L^* não seja globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$. Assim, existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m)\setminus C^\infty(\mathbb{T}^m)$ tal que $L^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$. Então

$$(L^*)^2 u = L^*(L^*u) = L^*f = g \in C^\infty(\mathbb{T}^m).$$

A Proposição 2.2.1 nos dá que $(L^2)^* = (L^*)^2$. Assim

$$P^*u = -\Delta u - (L^*)^2 u = -(L^*)^2 u = g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$$

implicando na contradição de que P^* não é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

($\Leftarrow$) Dadas $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle P\phi, \psi\rangle &= \langle(-\Delta_t - L^2)\phi, \psi\rangle = -\langle\phi, \Delta_t\psi\rangle - \langle\phi, (L^2)^*\psi\rangle \\
&= \langle\phi, (-\Delta_t - (L^*)^2)\psi\rangle = \langle\phi, (-\Delta_t - (L + divL)^2)\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $P^* = -\Delta_t - (L + h(x))^2$, onde $h = divL$.

Segue pelos Teoremas 2.2.3 e 2.2.2 que L^* globalmente hipoelíptico implica na existência de um difeomorfismo $\tau : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$, $\tau(x) = y$ tal que $L = \sum_{j=1}^m a_j(x)\partial_{x_j}$ pode ser escrito como um operador de coeficientes constantes $L_y = \sum_{j=1}^m \Lambda_j \partial_{y_j}$, onde cada Λ_j satisfaz a condição Diofantina. Defina

$$\begin{aligned}
T :\ & \mathbb{T}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{T}^{n+m} \\
& (t, x) \longmapsto T(t, x) = (t, \tau(x)).
\end{aligned}$$

Assim, dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m)$, sendo $\widetilde{u} = u \circ T^{-1}$,

$$u(t, x) = u \circ T^{-1} \circ T(t, x) = \widetilde{u} \circ T(t, x) = \widetilde{u}(t, \tau(x)).$$

Faremos a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}
P^*\widetilde{u}(t, y) &= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L + h(x)]^2\widetilde{u}(t, y) \\
&= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L + h(x)](L\widetilde{u}(t, y) + h(x)\widetilde{u}(t, y)) \\
&= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L^2\widetilde{u}(t, y) + L(h(x)\widetilde{u}(t, y)) + h(x)L\widetilde{u}(t, y) + h(x)^2\widetilde{u}(t, y)] \\
&= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L^2\widetilde{u}(t, y) + h(x)L\widetilde{u}(t, y) + \widetilde{u}(t, y)Lh(x) + h(x)L\widetilde{u}(t, y) \\
&+ h(x)^2\widetilde{u}(t, y)]
\end{aligned}$$

Denote $\begin{cases} \widetilde{h} &= h \circ T^{-1} \\ \widetilde{Lh} &= Lh \circ T^{-1} \end{cases}$, observe que:

$$\widetilde{Lh}(t, y) = (Lh \circ T^{-1})(t, y) = L_y\widetilde{h} \circ T \circ T^{-1}(t, y) = L_y\widetilde{h}(t, y).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
P^*\widetilde{u}(t, y) &= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L_y^2\widetilde{u}(t, y) + \widetilde{h}(y)L_y\widetilde{u}(t, y) + \widetilde{u}(t, y)\widetilde{Lh}(y) + \widetilde{h}(y)L_y\widetilde{u}(t, y) \\
&+ \widetilde{h}^2(y)\widetilde{u}(t, y)] \\
&= -\Delta_t\widetilde{u}(t, y) - [L_y^2\widetilde{u}(t, y) + \widetilde{u}(t, y)\widetilde{Lh}(y) + 2\widetilde{h}(y)L_y\widetilde{u}(t, y) + \widetilde{h}^2(y)\widetilde{u}(t, y)] \\
&= (L_y + \widetilde{h}(y))^2\widetilde{u}(t, y).
\end{aligned}$$

Portando, sendo $b = h \circ T^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$,

$$P^* = -\Delta - (L_y + b(y))^2 = -\Delta - Q^2 \tag{2.15}$$

onde $Q = L_y + b(y)$.

Considere agora $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$ tal que $P^*u = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$.

Para obtermos a hipoeliptisidade de P^*, basta mostrarmos que a transformada de Fourier de u decai rapidamente. Para tal transferiremos o problema a analisar um operador de coeficientes constantes, onde a aplicação da transformada de Fourier se torna mais simples.

Seja $b_0 = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} b(y)dy$. Pela Observação 2.2.2, temos que $\ker L_y$ é dado por constantes, então, dado $c \in \ker L_y$

$$\begin{aligned}
\langle -b(y) + b_0, c\rangle &= \int_{\mathbb{T}^m} c(-b(y)+b_0)dy = c\left[\int_{\mathbb{T}^m} -b(y)dy + b_0\int_{\mathbb{T}^m} dy\right] \\
&= c\left[-\int_{\mathbb{T}^m} b(y)dy + \int_{\mathbb{T}^m} b(y)dy\right] = 0
\end{aligned}$$

ou seja, $-b(y) + b_0 \in \mathcal{E}(L_y) = \mathcal{E}(L_y^*)$ (pois L_y tem coeficientes constantes). Da hipoelipticidade global de L^*, segue que L_y é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$. Logo, existe $w(y) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ tal que $L_y w = -b(y) + b_0$.

Agora, tome $v = e^{-w}u$, temos

$$L_y u = L_y(ve^w) = e^w L_y v + vL_y e^w = e^w L_y v + e^w v L_y w = e^w L_y v + (-b(y)+b_0)e^w v$$

Então

$$\begin{aligned}
Q(u) &= L_y(e^w v) + b(y)e^w v = e^w L_y v + (-b(y)+b_0)e^w v + b(y)e^w v \\
&= e^w(L_y v + b_0 v).
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima,

$$\begin{aligned}
Q^2(u) &= Q(Q(u)) = (L_y + b(y)e^w)[e^w(L_y v + b_0 v)] \\
&= (L_y w)e^w(L_y v + b_0 v) + e^w L_y((L_y v + b_0 v) + b(y)e^w(L_y v + b_0 v) \\
&= b_0 e^w(L_y v + b_0 v) + e^w L_y(L_y v + b_0 v) \\
&= e^w[(L_y + b_0)(L_y v + b_0 v)] = e^w(L_y + b_0)^2 v. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$f = P^*u = -\Delta_t u - Q^2 u = -\Delta_t(e^w v) - e^w(L_y + b_0)^2 v = e^w[-\Delta_t v - (L_y + b_0)^2 v]$$

ou seja,

$$-\Delta_t v - (L_y + b_0)^2 v = e^{-w} f \doteq g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}).$$

Como previsto, analisaremos o operador de coeficientes constantes R dado por:

$$R = -\Delta_t - (L_y + b_0)^2 = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{t_j}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \partial_{y_k} + b_0\right)^2.$$

Aplicaremos a transformada de Fourier na equação $Rv = g$. Primeiramente para o termo $-\Delta_t v$ obtemos:

$$\begin{aligned}
-\widehat{\Delta_t v}(\zeta,\xi) &= -\int_{\mathbb{T}^{n+m}} e^{-i(\zeta\cdot t+\xi\cdot y)}\Delta_t v(t,y)dtdy = -\int_{\mathbb{T}^m} e^{-i\xi\cdot y}\left(\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i\zeta\cdot t}\Delta_t v(t,y)dt\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^m} e^{-i\xi\cdot y}|\zeta|^2\widehat{v}(\zeta,y)dy = |\zeta|^2\int_{\mathbb{T}^m} e^{-i\xi\cdot y}\widehat{v}(\zeta,y)dy = |\zeta|^2\widehat{v}(\zeta,\xi). \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Para a segunda parte, denote $F = L_y v + b_0 v$, então

$$\widehat{F}(\zeta,\xi) = (\widehat{L_y v + b_0 v})(\zeta,\xi) = \left(i\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k + b_0 \right) \widehat{v}(\zeta,\xi). \tag{2.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\mathcal{F}[(L_y+b_0)^2 v](\zeta,\xi) &= -\mathcal{F}[(L_y+b_0)F](\zeta,\xi) = -\widehat{L_y F}(\zeta,\xi) - \widehat{b_0 F}(\zeta,\xi) \\
&= -i\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k \widehat{F}(\zeta,\xi) - b_0 \widehat{F}(\zeta,\xi) \\
&= \left[-i\sum_{l=1}^{m} \Lambda_l \xi_l - b_0 \right] \left(i\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k + b_0 \right) \widehat{v}(\zeta,\xi) \\
&= \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k \right)^2 - 2i\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k b_0 + b_0^2 \right] \widehat{v}(\zeta,\xi). \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Por (2.17) e (2.19), obtemos $\widehat{Rv}(\zeta,\xi) = \widehat{g}(\zeta,\xi)$ se e somente se:

$$\left[|\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k - ib_0 \right)^2 \right] \widehat{v}(\zeta,\xi) = \widehat{g}(\zeta,\xi). \tag{2.20}$$

Ainda, do fato de $g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, dado $N \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{g}(\zeta,\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N}, \quad \forall (\zeta,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m}. \tag{2.21}$$

Para $\zeta = 0$, por (2.21) e pela condição Diofantina, existem constantes C_N e C_K tais que

$$\begin{aligned}
|\widehat{v}(0,\xi)| &= \frac{|\widehat{g}(0,\xi)|}{\left| \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k - ib_0\right)^2 \right|} \leq \frac{|\widehat{g}(0,\xi)|}{|(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k)^2|} \\
&\leq \frac{C_N}{(1+|(0,\xi)|)^{N+k}} C_K^{-1} (1+|\xi|)^K = \frac{C}{(1+|(0,\xi)|)^N}.
\end{aligned}$$

Para $\zeta \neq 0$ dividiremos em alguns subcasos:

(i) $b_0 = 0$. Para todo $(\zeta,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{v}(\zeta,\xi)| &= \frac{|\widehat{g}(\zeta,\xi)|}{|\zeta|^2 + \left| \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k\right)^2 \right|} \leq \frac{|\widehat{g}(\zeta,\xi)|}{|\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k|^2} \\
&\leq \frac{C_N}{(1+|(\zeta,\xi)|)^{N+k}} C_K^{-1} (1+|\xi|)^K \leq \frac{C}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N}.
\end{aligned}$$

(ii) $b_0 \neq 0$ e $|\zeta|^2 \geq b_0^2 + 1$. Como $|z| \geq |Re(z)|\ \forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\left| |\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k - ib_0 \right)^2 \right| &= \left| |\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k \right)^2 - 2ib_0 \sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k - b_0^2 \right| \\
&\geq |\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^{m} \Lambda_k \xi_k \right)^2 - b_0^2 \geq |\zeta|^2 + b_0^2 \geq 1
\end{aligned}$$

logo,

$$|\widehat{v}(\zeta,\xi)| = |\widehat{g}(\zeta,\xi)| \leq \frac{C}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N} \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

(iii) $b_0 \leq 0$ e $|\zeta|^2 < b_0^2 + 1$, mais uma vez utilizando a condição Diofantina, e o fato que $|z| \geq |Im(z)|\ \forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\left| |\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k - ib_0 \right)^2 \right| &= \left| |\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k \right)^2 - 2ib_0 \sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k - b_0^2 \right| \\
&\geq 2|b_0| \left| \sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k \right| \geq 2C_K |b_0| (1+|\xi|)^{-K}.
\end{aligned}$$

Então, $\forall \xi \neq 0$

$$|\widehat{v}(\zeta,\xi)| = \frac{C_N}{(1+|(\zeta,\xi)|)^{N+K}} \frac{(1+|\xi|)^K}{2C_K|b_0|} \leq \frac{C}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N}.$$

Assim, como vimos para cada caso, dado $N \in \mathbb{Z}_+$,

$$|\widehat{v}(\zeta,\xi)| \leq \frac{C}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N} \quad \forall (\zeta,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m} \setminus \vartheta.$$

onde $\vartheta = \{(\zeta,0) \in \mathbb{Z}^{n+m};\ |\zeta|^2 < b_0^2 + 1\}$ é um conjunto finito. Portanto, $v \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, bem como u, implicando que P^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Demonstração de (2)

($\Rightarrow$) Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^m)$ tal que $Lu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$. Então

$$Pu = -L^2 u = -Lf \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m}).$$

Portanto, da hipoelipticidade de P, segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$.

($\Leftarrow$) Como L está nas condições do Teorema 2.2.2 e é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$, segue que podemos reescrevê-lo com um operador de coeficientes constantes $L_y = \sum_{k=1}^m \Lambda_k \partial_{y_k}$ onde os números reias Λ_k satisfazem a condição Diofantina. Logo é possível escrever P como

$$P = -\Delta - \left(\sum_{k=1}^m \Lambda_k \partial_{y_k} \right)^2.$$

Agora, dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$ tal que $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ e aplicando a transformada de Fourier nessa expressão, temos:

$$\left[|\zeta|^2 + \left(\sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k \right)^2 \right] \widehat{u}(\zeta,\xi) = \widehat{f}(\zeta,\xi).$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, dado $N \in \mathbb{Z}_+$, existe C_N tal que

$$|\widehat{f}(\zeta,\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|(\zeta,\xi)|)^{N+K}}.$$

Disso e da condição diofantina segue que dado $N \in \mathbb{Z}_+$,

$$|\widehat{u}(\zeta,\xi)| \leq \frac{|\widehat{f}(\zeta,\xi)|}{|\zeta|^2 + |\sum_{k=1}^m \Lambda_k \xi_k|^2} \leq \frac{C_N}{(1+|(\zeta,\xi)|)^N}, \quad \forall (\zeta,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m} \setminus \{0\}.$$

Portanto $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ e P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$. $\square$

Para obter um resultado análogo ao do Teorema 2.3.1 trocando hipoelipticidade por resolubilidade C^∞, é necessário acrescentar hipóteses, bem como utilizar o seguinte resultado:

Lema 2.3.1. *Seja $P = -\Delta_t - L_x^2$, se P é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^{n+m}$, então L_x^2 é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$.*

Demonstração. Suponha que L^2 não seja globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$. Então existe $f \in \mathcal{E}(L^2)$ tal que

$$L^2 u \neq f \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^m).$$

Defina $g(t,x) = \displaystyle\sum_{(\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}} \widehat{g}(\tau,\xi) e^{i(t\cdot\tau + x\cdot\xi)}$, onde

$$\widehat{g}(\tau,\xi) = \begin{cases} \widehat{f}(\xi) & \text{se } \tau = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ pois, dado $N \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{g}(\tau,\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)| \leq C_N(1 + |(\tau,\xi)|)^{-N}.$$

Provemos que $g \in \mathcal{E}(P)$.

Seja $w \in \ker P^*$, então $P^* w = 0$, ou seja, $-\Delta_t w - (L^*)^2 w = 0$. Aplicando a transformada parcial de Fourier em t nessa expressão, temos

$$|\tau|^2 \widehat{w}(\tau,x) - (L^*)^2 \widehat{w}(\tau,x) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{Z}^n \text{ e } x \in \mathbb{T}^m$$

em particular, para $\tau = 0$,

$$(L^*)^2 \widehat{w}(0,x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{T}^m$$

isto é, $\widehat{w}(0,x) \in \ker(L^*)^2 = \ker(L^2)^*$, (pois $(L^2)^* = (L^*)^2$). Assim, como $f \in \mathcal{E}(L^2)$, temos

$$\langle f, \widehat{w}(0,x)\rangle = 0. \tag{2.22}$$

Observe que $\widehat{g}(0,x) = (2\pi)^n f(x)$, de fato,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(0,x) &= \int_{\mathbb{T}^n} g(t,x) e^{-it\cdot 0} dt = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{(\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}} \widehat{g}(\tau,x) dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\substack{(\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m} \\ \tau\neq 0}} \widehat{g}(\tau,\xi) dt + \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{(0,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}} \widehat{g}(0,\xi) dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(\xi) dt = (2\pi)^n f(x) \end{aligned}$$

Logo, como $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+m})$ e $g \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, utilizando a proposição 1.4.2 e (2.22), segue que

$$\langle w, g\rangle = (2\pi)^n \sum_{\tau\in\mathbb{Z}^n} \langle \widehat{w}(-\tau,x), \widehat{g}(\tau,x)\rangle = (2\pi)^n \langle \widehat{w}(0,x), \widehat{g}(0,x)\rangle = (2\pi)^{2n} \langle \widehat{w}(0,x), f(x)\rangle = 0$$

ou seja, $g \in \mathcal{E}(P)$.

Por hipótese P é globalmente C^∞ resolúvel, então existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ tal que $Pu = g$; aplicando a transformada parcial de Fourier nessa equação, temos

$$|\tau|^2\widehat{u}(\tau,x) + L^2\widehat{u}(\tau,x) = \widehat{g}(\tau,x), \quad \forall\tau \in \mathbb{Z}^n,\ x \in \mathbb{T}^m.$$

Em particular, para $\tau = 0$,

$$L^2\widehat{u}(0,x) = \widehat{g}(0,x) = (2\pi)^n f(x)$$

onde $\widehat{u}(0,x) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$, o que contradiz o fato de assumirmos L^2 não globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$. □

Teorema 2.3.2. *Assuma* $\ker L^* = \ker(L^*)^2 = [\omega]$, *onde* $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ *e* $\omega(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{T}^m$. *Então* $P = -\Delta_t - L_x^2$ *é globalmente* C^∞ *resolúvel em* $\mathbb{T}^{n+m}$ *se e somente se* L *é globalmente* C^∞ *resolúvel em* $\mathbb{T}^m$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tome $f \in \mathcal{E}(L)$, como por hipótese $\ker L^* = \ker(L^*)^2$, segue que $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}(L^2)$, assim $f \in \mathcal{E}(L^2)$. Como P é globalmente C^∞ resolúvel, pelo lema anterior, segue que L^2 também o é, logo existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ tal que $L^2u = f$. Então $v = Lu \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ e satisfaz

$$Lv = L^2u = f$$

portanto L é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$.

($\Leftarrow$) L está nas condições do Teorema 2.2.2 e é globlamente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^m$, então L^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$, logo pelo Teorema 2.3.1 (*1*) P^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$, então P é globalmente resolúvel (Proposição 2.1.3).

Mais uma vez pelo Teorema 2.2.2, temos que L é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^m$; utilizando o Teorema 2.3.1 (*2*), segue que P é globalmente hipoelíptico.

Portanto, pela Proposição 2.1.1, P é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^{n+m}$. □

O seguinte exemplo relaciona todos os resultados deste capítulo. Mostrando que o campo vetorial X dado em $\mathbb{T}^3$ é globalmente hipoelíptico, é possível obter resolubilidade C^∞ e redução para sua forma normal. Ainda, utilizando Teorema anterior, é possível concluir que o operador da forma $P = -\Delta - X^2$ é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^{n+3}$.

Exemplo 2.3.1. Considere em $\mathbb{T}^3$ seguinte campo vetorial:

$$X = \partial_t + a(t)\partial_x + b(t)\partial_y \tag{2.23}$$

onde $a, b \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ tomam valores reais. Sejam

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(t)dt \quad \text{e} \quad b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(t)dt.$$

Assumiremos que o vetor $v = (a_0, b_0)$ é um vetor não-Liouville, ou seja, existem $C > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que para cada $\eta \in \mathbb{Z}$ e $\xi \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$

$$|\eta - v\cdot\xi| \geq \frac{c}{|\xi|^K}. \tag{2.24}$$

Mostraremos que X é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^3$.

Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ tal que $Xu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Aplicando a transformada parcial de Fourier nas variáveis x e y, obtemos

$$\partial_t\widehat{u}(t,\xi,\eta) + i\xi a(t)\widehat{u}(t,\xi,\eta) + i\eta b(t)\widehat{u}(t,\xi,\eta) = \widehat{f}(t,\xi,\eta) \tag{2.25}$$

Para cada $(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2$, o operador na equação (2.25) é elíptico em t, então pelo Corolário 1.7.1 é também hipoelíptico na mesma variável e portanto, $\widehat{u}(\cdot,\xi,\eta)\in C^\infty(\mathbb{T})$.

Defina $A(t)=\int_0^t a(s)ds-a_0t$, $B(t)=\int_0^t b(s)ds-b_0t$ e

$$v(t,\xi,\eta)=e^{i\xi A(t)+i\eta B(t)}\widehat{u}(t,\xi,\eta).$$

Então

$$\begin{aligned}
&\partial_t v(t,\xi,\eta)+i(a_0\xi+b_0\eta)v(t,\xi,\eta)\\
&\quad=[i\xi(a(t)-a_0)-i\eta(b(t)-b_0)]e^{i\xi A(t)+i\eta B(t)}\widehat{u}(t,\xi,\eta)\\
&\quad+e^{i\xi A(t)+i\eta B(t)}\widehat{u}(t,\xi,\eta)+i(a_0\xi+b_0\eta)v(t,\xi,\eta)\\
&\quad=e^{i\xi A(t)+i\eta B(t)}\widehat{f}(t,\xi,\eta)\doteq g(t,\xi,\eta)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\partial_t v(t,\xi,\eta)+i(a_0\xi+b_0\eta)v(t,\xi,\eta)=g(t,\xi,\eta). \tag{2.26}$$

Afirmação 1: A solução de (2.26) é dada por

$$v(t,\xi,\eta)=\frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_0^{2\pi}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(t+s,\xi,\eta)ds. \tag{2.27}$$

De fato, derivando parcialmente a função $e^{i(a_0\xi+b_0\eta)}v(t,\xi,\eta)$, com respeito a variável t e usando a relação (2.26), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i(a_0\xi+b_0\eta)}v(t,\xi,\eta)\right)=e^{i(a_0\xi+b_0\eta)t}g(t,\xi,\eta).$$

Integrando a expressão anterior e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$v(t,\xi,\eta)=e^{-i(a_0\xi+b_0\eta)t}\left[\int_0^t e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(s,\xi,\eta)ds+v(0,\xi,\eta)\right].$$

Como v é periódica na primeira variável, ou seja, $v(0,\xi,\eta)=v(2\pi,\xi,\eta)$, temos que:

$$e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}v(0,\xi,\eta)=\int_0^{2\pi}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(s,\xi,\eta)ds+v(0,\xi,\eta).$$

Desta forma temos

$$v(0,\xi,\eta)=\frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_0^{2\pi}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(s,\xi,\eta)ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
v(t,\xi,\eta)&=e^{-i(a_0\xi+b_0\eta)t}\int_0^t e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(s,\xi,\eta)ds\\
&+\frac{e^{-i(a_0\xi+b_0\eta)t}}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_0^{2\pi}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s}g(s,\xi,\eta)ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $r=s-t$, obtemos:

$$\begin{aligned}
v(t,\xi,\eta)&=\int_{-t}^0 e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r}g(r+t,\xi,\eta)dr+\frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_{-t}^{2\pi-t}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r}g(r+t,\xi,\eta)dr\\
&=\frac{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_{-t}^0 e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r}g(r+t,\xi,\eta)dr\\
&+\frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_0^{2\pi-t}e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r}g(r+t,\xi,\eta)dr
\end{aligned}$$

ainda, fazendo a mudança de variável $r' = r + 2\pi$ apenas na primeira integral da expressão obtida acima,

$$
\begin{aligned}
v(t,\xi,\eta) =& \frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_{-t+2\pi}^{2\pi} e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r} g(r+t,\xi,\eta)dr \\
&+ \frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_{0}^{2\pi-t} e^{i(a_0\xi+b_0\eta)r} g(r+t,\xi,\eta)dr \\
=& \frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_{0}^{2\pi} e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s} g(t+r,\xi,\eta)dr
\end{aligned}
$$

demonstramos assim a afirmação.

Afirmação 2: Existem $C > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que $\forall(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, temos

$$
|e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)} - 1| \geq \frac{C}{|(\xi,\eta)|^K}. \tag{2.28}
$$

De fato, note que:

$$
\begin{aligned}
|e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)} - 1|^2 &= |\cos(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)) + i\,\mathrm{sen}(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)) - 1|^2 \\
&= \cos^2(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)) - 2\cos(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)) \\
&+ 1 + \mathrm{sen}^2(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)) \\
&= 2[1-\cos(2\pi i(a_0\xi+b_0\eta))] \\
&= 4\,\mathrm{sen}^2(\pi i(a_0\xi+b_0\eta))
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

sendo que a última igualdade segue do fato que dado θ, $\cos 2\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$. Da expressão acima obtemos que

$$
|e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)} - 1| = 2|\,\mathrm{sen}(\pi(a_0\xi+b_0\eta))|.
$$

Note que, para $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, uma das seguintes alternativas ocorre:

(i) Existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $|\pi(a_0\xi+b_0\eta) - K\pi| < \frac{\pi}{3}$.

(ii) $|\pi(a_0\xi+b_0\eta) - K\pi| \geq \frac{\pi}{3}$, $\forall K \in \mathbb{Z}$.

Suponha que a condição (i) ocorra, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_0 \in (\pi(a_0\xi+b_0\eta), \pi K)$ tal que:

$$
|\,\mathrm{sen}(\pi(a_0\xi+b_0\eta))| = |\,\mathrm{sen}(\pi(a_0\xi+b_0\eta)) - \mathrm{sen}(K\pi)| = |\cos\theta_0||\pi(a_0\xi+b_0\eta) - K\pi|.
$$

Logo, do fato de (a_0,b_0) ser não Liouville (2.24), existe c tal que

$$
2|\,\mathrm{sen}(\pi(a_0\xi+b_0\eta))| = 2\pi|\cos\theta_0||a_0\xi+b_0\eta-K| \geq \frac{\pi c}{|(\xi,\eta)|^K}.
$$

Por outro lado, se vale a condição (ii), temos que $2|\,\mathrm{sen}(\pi(a_0\xi+b_0\eta))| \geq \sqrt{3} \geq \frac{C_0}{|(\xi,\eta)|}$ para certa constante C_0. Portanto, tomando $C = \max\{c\pi, C_0\}$ obtemos válida (2.28).

Portanto, temos que, dado $n > 0$, pela afirmação 2, e pelo fato de $g \in C^\infty(\mathbb{T})$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|v(t,\xi,\eta)| =& \left|\frac{1}{e^{2\pi i(a_0\xi+b_0\eta)}-1}\int_0^{2\pi} e^{i(a_0\xi+b_0\eta)s} g(t+s,\xi,\eta)ds\right| \\
\leq& C^{-1}(1+|(\xi,\eta)|)^K \int_{\mathbb{T}} |g(t+s,\xi,\eta)|ds \\
\leq& \frac{C_1}{(1+|(\xi,\eta)|)^{n-K}}
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Então, para $n > 0$, ajustando as constantes, temos:

$$|\widehat{u}(\tau,\xi,\eta)| = \left|\int_{\mathbb{T}} e^{-it\cdot\tau} v(t,\xi,\eta)dt\right| \leq \int_{\mathbb{T}} |v(t,\xi,\eta)|dt \leq \frac{C_n}{|(\xi,\eta)|^n}.$$

Agora, observe que $(t,0,0,\tau,0,0) \notin CharX$, então para todo ponto da forma $(\tau,0,0)$, existe um cone aberto

$$\Gamma_\epsilon = \{(\tau,\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : \ |(\xi,\eta)| < \epsilon|\tau|\}$$

para algum $\epsilon > 0$, tal que dado $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|\widehat{u}(\tau,\xi,\eta)| \leq \frac{C_n}{|(\tau,\xi,\eta)|^n} \quad \forall(\tau,\xi,\eta) \in \Gamma_\epsilon. \tag{2.31}$$

Por outro lado, se $(\tau,\xi,\eta) \notin \Gamma_\epsilon$ e $(\tau,\xi,\eta) \neq (0,0)$, temos

$$|\widehat{u}(\tau,\xi,\eta)| \leq \frac{C_n}{|(\xi,\eta)|^n} = \frac{C_n}{\left(\frac{|(\xi,\eta)|}{2} + \frac{|(\xi,\eta)|}{2}\right)^n} \leq \frac{C_n'}{|(\tau,\xi,\eta)|} \tag{2.32}$$

Ademais, note que para $\xi = \eta = 0$, por (2.26),

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,0,0) = g(t,0,0) &\Longrightarrow \int_0^t \partial_s v(s,0,0)ds = \int_0^t g(s,0,0)ds \\ &\Longrightarrow v(t,0,0) = \int_0^t g(s,0,0)ds + c \end{aligned}$$

Como g é 2π-periódica, segue que

$$|\widehat{u}(0,0,0)| = |\int v(t,0,0)e^{-it\xi}dt| \leq C \tag{2.33}$$

Portanto, por (2.31), (2.32) e (2.33), segue que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, ou seja, o operador X é globalmente hipoelíptico.

Observação 2.3.1. Lembrando que $X^* = -X - divX$, aplicando na função constante 1 temos:

$$X^*1 = -\partial_t(1) + a(t)\partial_x(1) + b(t)\partial_y(1) - \partial_t(1) + \partial_x a(t) + \partial_y b(t) = 0.$$

Como vimos anteriormente que X é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^3$, segue pelo Lema 2.2.1, que

$$\ker X = [1] = \{\text{constantes}\}. \tag{2.34}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} X^* &= -X - divX = -X \\ (X^*)^2 &= (-X)^2 = X^2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ tal que $u \in \ker X^2$, então $X(Xu) = 0$, por (2.34), segue que $Xu = c$ constante. Assim

$$\langle c, 1\rangle = \langle Xu, 1\rangle = \langle u, X^*1\rangle = \langle u, 0\rangle = 0.$$

Então temos $c \in (\ker X)^\perp \cap \ker X$, isto é, $Xu = c = 0$ e $u \in \ker X$. Ou seja, $\ker X^2 = \ker X$. Pelas relações em (2.35), segue que

$$\ker(X^*)^2 = \ker X^*.$$

Pelo Teorema 2.2.2 X é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^3$, então pelo Teorema 2.3.2 o operador $P = -\Delta - X^2$ é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^{n+3}$.

Observação 2.3.2. Obtemos que X é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^3$, então existem $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ tais que:

$$\begin{aligned} X\varphi_1 &= 0 \\ X\varphi_2 &= a_0 - a(t) \\ X\varphi_3 &= b_0 - b(t) \end{aligned}$$

Neste exemplo, o difeomorfismo $\tau : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$, $\tau(t,x,y) = (t', x', y')$ garantido pelo Teorema 2.2.2 é dado por:

$$\begin{aligned} \tau_1(t,x,y) &= t + \varphi_1(t,x,y) \\ \tau_2(t,x,y) &= x + \varphi_2(t,x,y) \\ \tau_3(t,x,y) &= y + \varphi_3(t,x,y) \end{aligned}$$

onde as constantes $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ são dadas por:

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = a_0 \;\text{ e }\; \Lambda_3 = b_0.$$

De fato, denotando $\widetilde{u} = u \circ \tau^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} Xu(t,x,y) &= (\partial_t + a(t)\partial_x + b(t)\partial_y)\widetilde{u}(\tau(t,x,y)) \\ &= \partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y')(1 + \partial_t\varphi_1(t,x,y)) + \partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y')(\partial_t\varphi_2(t,x,y)) \\ &+ \partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y')(\partial_t\varphi_3(t,x,y)) + a(t)[\partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y')\partial_x\varphi_1(t,x,y) \\ &+ \partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y')(1 + \partial_x\varphi_2(t,x,y)) + \partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y')\partial_x\varphi_3(t,x,y)] \\ &+ b(t)[\partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y')\partial_y\varphi_1(t,x,y) + \partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y')\partial_y\varphi_2(t,x,y) \\ &+ \partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y')(1 + \partial_y\varphi_3(t,x,y))] \\ &= [1 + \partial_t\varphi_1(t,x,y) + a(t)\partial_x\varphi_1(t,x,y) + b(t)\partial_y\varphi_1(t,x,y)]\partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y') \\ &+ [a(t) + \partial_t\varphi_2(t,x,y) + a(t)\partial_x\varphi_2(t,x,y) + b(t)\partial_y\varphi_2(t,x,y)]\partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y') \\ &+ [(b(t) + \partial_t\varphi_3(t,x,y)) + a(t)\partial_x\varphi_3(t,x,y) + b(t)\partial_y\varphi_3(t,x,y)]\partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y') \\ &= (1 + X\varphi_1(t,x,y))\partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y') + (a(t) + X\varphi_2(t,x,y))\partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y') \\ &+ (b(t) + X\varphi_3(t,x,y))\partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y') \\ &= \Lambda_1\partial_{t'}\widetilde{u}(t',x',y') + \Lambda_2\partial_{x'}\widetilde{u}(t',x',y') + \Lambda_3\partial_{y'}\widetilde{u}(t',x',y') \end{aligned}$$

E ainda, do fato de $(a_0, b_0) = (\Lambda_2, \Lambda_3)$ ser não-Liouville, existem constantes $C > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$,

$$|\Lambda_1\xi_1 + \Lambda_2\xi_2 + \Lambda_3\xi_3| = |\xi_1 + a_0\xi_2 + b_0\xi_3| \geq \frac{C}{|(\xi_2,\xi_3)|^K} \geq \frac{C}{1 + |\xi|^K}.$$

Portanto, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ satisfazem a condição Diofantina.

CAPÍTULO 3

Famílias de Campos Vetoriais Reais

No presente capítulo, consideraremos a princípio uma família de campos vetoriais reais que comutam entre si, mostraremos que esta pode ser simultaneamente transformada em uma família de campos vetoriais com coeficientes constantes dado que um dos campos tenha o transposto globalmente hipoelíptico.

3.1 Redução Simultânea à Forma Normal

No seguinte Teorema pode-se considerar a hipótese de que qualquer um dos X_j^*, $j = 1, ..., m$ é globalmente hipoelíptico. Para facilitar a notação, diremos que X_1^* é globalmente hipoelíptico.

Teorema 3.1.1. *Seja $X_1, ..., X_m$ uma família de campos vetoriais reais em $\mathbb{T}^n$ que comutam entre si, tal que X_1^* é um operador globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$. Então, existem coordenadas globais y em $\mathbb{T}^n$ tal que a família $\{X_j\}_1^m$ admite a forma $\{\sum_{k=1}^n \Lambda_{jk}\partial_{y_k}\}_1^m$, onde Λ_{jk} são constantes reais. E ainda, os coeficientes Λ_{1k} de X_1 satisfazem a condição Diofantina.*

Demonstração. Como por hipótese X_1^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$, pelo Teorema 2.2.3 temos que $\ker X_1 = [\omega]$ tal que $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\omega(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{T}^n$, então, pelo Teorema 2.2.2 segue que existe um difeomorfismo $\tau : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, $\tau(x) = y$ tal que $X_1 = \sum_{k=1}^n \Lambda_{1k}\partial_{y_k}$, onde os coeficientes reais Λ_{1k} satisfazem a condição Diofantina, ou seja, existem constantes $K \in \mathbb{Z}_+$ e $C > 0$ tais que

$$\left|\sum_{k=1}^n \Lambda_{1k}\xi_k\right| \geq \frac{C}{(1+|\xi|)^K}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

Os demais campos vetoriais X_j, $2 \leq j \leq m$ também podem ser escritos nas coordenadas y como

$$X_j = \sum_{k=1}^n b_{jk}(y)\partial_{y_k} \tag{3.2}$$

onde as funções $b_{jk} = X_j\tau_k$ assume valores reais.

Como os coeficientes de X_1 são constantes, temos que dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$,

$$X_1 \partial_{y_j} u(y) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k} \partial_{y_k} \partial_{y_j} u(y) = \partial_{y_j} \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k} \partial_{y_k} u(y) = \partial_{y_j} X_1 u(y).$$

Do fato acima, e por Leibniz, obtemos, para $2 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} X_1 X_j =& (X_1 b_{j1}) \partial_{y_1} + ... + (X_1 b_{jn}) \partial_{y_n} + b_{j1} X_1 \partial_{y_1} + ... + b_{jn} X_1 \partial_{y_n} \\ =& (X_1 b_{j1}) \partial_{y_1} + ... + (X_1 b_{jn}) \partial_{y_n} + b_{j1} \partial_{y_1} X_1 + ... + b_{jn} \partial_{y_n} X_1 \\ =& (X_1 b_{j1}) \partial_{y_1} + ... + (X_1 b_{jn}) \partial_{y_n} + X_j X_1. \end{aligned}$$

Assim,

$$[X_1, X_j] = X_1 X_j - X_j X_1 = (X_1 b_{j1}) \partial_{y_1} + ... + (X_1 b_{jn}) \partial_{y_n}$$

como por hipótese os campos comutam entre si, segue que

$$X_1 b_{jk} = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 2 \leq j \leq m.$$

Agora, aplicando a transformada de Fourier na expressão acima, temos

$$i \left(\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{1l} \xi_l \right) \widehat{b_{jk}}(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Como a condição Diofantina (3.1) implica que $\sum_{l=1}^{n} \Lambda_{1l} \xi_l \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, segue da última equação que

$$\widehat{b_{jk}}(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \tag{3.3}$$

E ainda, como $b_{jk} \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, temos $b_{jk}(y) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{b_{jk}}(\xi) e^{iy \cdot \xi}$. Disso e de (3.3), segue que

$$b_{jk}(y) = \widehat{b_{jk}}(0), \quad \forall y \in \mathbb{T}^n.$$

Basta então definirmos $\Lambda_{jk} = \widehat{b_{jk}}(0)$ que são números reais. Portanto, substituindo em (3.2), temos

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{jk} \partial_{y_k}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

$\square$

3.2 Hipoelipticidade Global

Se $\{X_1, ..., X_m\}$ é uma família de campos vetoriais em uma variedade C^∞ $\mathcal{M}$, então a formulação de suficiência e necessidade para hipoelipticidade global do sublaplaceano $P = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$ é um problema em aberto. Aqui, acrescentando as hipóteses de que os campos da família dada comutam entre si e que um deles tenha o transposto globalmente hipoelíptico obtém-se a hipoelipticidade global para P.

Teorema 3.2.1. *Seja $X_1, ..., X_m$ uma família de campos vetoriais satisfazendo as mesmas condições do Teorema 3.1.1. Então o operador*

$$P = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2$$

é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$.

Demonstração. Como estamos nas mesmas hipóteses do Teorema 3.1.1, esse nos garante a existência de coordenadas globais y em $\mathbb{T}^n$ onde os campos vetoriais X_j são constantes, isto é,

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{jk}\partial_{y_k}, \quad 1 \leq j \leq m$$

onde os coeficientes Λ_{jk} são números reais e Λ_{1k} satisfaz a condição Diofantina. Logo, temos:

$$P = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 = -\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{jk}\partial_{y_k}\right)^2.$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Aplicando a transformada de Fourier nessa expressão, obtemos:

$$\left[\sum_{j=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{jk}\xi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k}\xi_k\right)^2\right]\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Agora, utilizando o fato de que $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ possui decaimento rápido, e a condição Diofantina (3.1) sobre os números Λ_{1k}, dado $N \in \mathbb{Z}_+$, obtemos:

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq \frac{|\widehat{f}(\xi)|}{|\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k}\xi_k|^2} \leq C^{-2}(1+|\xi|)^{2K}.\frac{C_0}{(1+|\xi|)^{N-2K}} = \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}$$

e portanto $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e o operador P globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$.

□

Corolário 3.2.1. *Seja $X_1, ..., X_m$ uma família de campos vetoriais em $\mathbb{T}^n$ que comutam entre si. Suponha também que existem coordenadas globais y em $\mathbb{T}^n$ onde X_1 admite a forma $\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k}\partial_{y_k}$, com os números Λ_{1k} satisfazendo a condição Diofantina. Então o operador $P = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2$ é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$.*

Demonstração. Como $X_1 = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{1k}\partial_{y_k}$ com os coeficiente Λ_{1k} satisfazendo a condição Diofantina, do Corolário 2.2.1, segue que X_1^* é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$. Logo, temos as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.1 e este nos garante que P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^n$. □

Diferente do feito até então no presente capítulo, modificaremos as hipóteses, retirando o que os campos da família comutem entre si, para ainda assim obter a hipoelipticidade do operador $P = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2$.

Teorema 3.2.2. *Seja $X_1, ..., X_m$ uma família de campos vetoriais reais em $\mathbb{T}^{m+n}$, sendo possível escolher coordenadas x, y em $\mathbb{T}^m$ e $\mathbb{T}^n$ respectivamente, em que os campos vetoriais dessa família admitem a forma $X_j = \partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_{y_k}$, onde $a_{1k}(x) = \lambda_k$ e o vetor $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ é não-Liouville. Então, o operador $P = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2$ é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{m+n}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{m+n})$ tal que $Pu = f \in C^\infty(\mathbb{T}^{m+n})$. Devemos mostrar que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{m+n})$ também.

Começaremos fazendo a transformada parcial de Fourier com respeito a y em $Pu = f$, obtemos:

$$-\sum_{j=1}^{m} Y_j^2\widehat{u}(x, \eta) = \widehat{f}(x, \eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^n \tag{3.4}$$

onde $Y_j = \partial_{x_j} + i\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\eta_k$.

Observe que (3.4) é elíptico na variável x, pois seu símbolo principal $p_1(x,\xi) = 0 \iff \xi = 0$. Logo, pela Proposição 1.7.1 o operador também é hipoelíptico em x, logo $\widehat{u}(\cdot,\eta) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$. Assim, multiplicando (3.4) por $\overline{\widehat{u}}$ e integrando com respeito a x, obtemos

$$\sum_{j=1}^{m} \|Y_j\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}(x,\eta)\overline{\widehat{u}}(x,\eta)dx. \tag{3.5}$$

Para prosseguir a demonstração, precisamos do seguinte resultado

Lema 3.2.1. *Existem constantes positivas C e K tais que*

$$\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 \leq C|\eta|^{2K}\|Y_1\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Para $\eta \in \mathbb{Z}^n$ fixado, tome $\varphi_\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$. Então,

$$Y_1\varphi_\eta(x) = \partial_{x_1}\varphi_\eta(x) + \left(i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right)\varphi_\eta(x) \doteq \psi_\eta(x).$$

Fazendo a transformada parcial de Fourier com respeito a x_1 na equação acima, obtemos:

$$i\left(\xi_1 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right)\widehat{\varphi_\eta}(\xi_1,\widehat{x}) = \widehat{\psi_\eta}(\xi_1,\widehat{x}) \tag{3.6}$$

onde $\widehat{x} = (x_2, ..., x_m)$.

Como por hipótese $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ é um vetor não-Liouville, existem constantes $C_0 > 0$ e $K \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\left|\xi_1 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right| \geq \frac{C_0}{|\eta|^K}, \quad \forall\eta \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},\ \forall\xi_1 \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7), segue que, para quaisquer $\eta \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $\xi_1 \in \mathbb{Z}$ e $\widehat{x} \in \mathbb{T}^{m-1}$

$$|\widehat{\varphi_\eta}(\xi_1,\widehat{x})|^2 \leq C_0^{-2}|\eta|^{2K}|\widehat{\psi_\eta}(\xi_1,\widehat{x})|^2.$$

Utilizando a identidade de Parseval na última inequação, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |\varphi_\eta(x)|^2 dx_1 = \sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_\eta}(\xi_1,\widehat{x})|^2 &\leq C_0^{-2}|\eta|^{2K}\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi_\eta}(\xi_1,\widehat{x})|^2 \\ &= C_0^{-2}|\eta|^{2K}\int_{\mathbb{T}}|\psi_\eta(x)|^2dx_1\end{aligned}$$

agora, integrando a inequação anterior com respeito a $\widehat{x} \in \mathbb{T}^{m-1}$ segue

$$\begin{aligned}\|\varphi_\eta\|_{L^2}^2 &\leq C_0^{-2}|\eta|^{2K}\int_{\mathbb{T}^m}|\psi_\eta(x)|^2dx \\ &= C_0^{-2}|\eta|^{2K}\int_{\mathbb{T}^m}\left|\partial_{x_1}\varphi_\eta(x) + \left(i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right)\varphi_\eta(x)\right|^2 dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, aplicando (3.8) para $\varphi_\eta(x) = \widehat{u}(x,\eta)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 &\leq C_0^{-2}|\eta|^{2K}\int_{\mathbb{T}^m}\left|\partial_{x_1}\widehat{u}(x,\eta) + \left(i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k\right)\widehat{u}(x,\eta)\right|^2 dx\\ &= C_0^{-2}|\eta|^{2K}\,\|Y_1\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

$\square$

Voltaremos à demonstração do Teorema 3.2.2.

Utilizaremos a afirmação demonstrada acima para mostrar que $\left\|\widehat{f}(\cdot,\eta)\right\|_{L^2}$ domina $\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}$. De fato, pela afirmação,

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 &\leq C|\eta|^{2K}\,\|Y_1\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 \leq C|\eta|^{2K}\left(\sum_{j=1}^{m}\|Y_j\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2\right)\\ &\leq C|\eta|^{2K}\int_{\mathbb{T}^m}\widehat{f}(x,\eta)\overline{\widehat{u}}(\cdot,\eta)dx\end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwartz segue que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}^2 \leq C|\eta|^{2K}\left\|\widehat{f}(\cdot,\eta)\right\|_{L^2}\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}$$

e portanto,

$$\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2} \leq C|\eta|^{2K}\left\|\widehat{f}(\cdot,\eta)\right\|_{L^2}. \tag{3.9}$$

Da equação acima e do fato de $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^n)$, segue que dado $N \in \mathbb{Z}_+$, existe C_N' tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2} \leq C|\eta|^{2K}\frac{C_N'}{|\eta|^{N+2K}} = \frac{C_N(2\pi)^{-\frac{m}{2}}}{|\eta|^N}.$$

Mais uma vez por Cauchy-Schuartz, temos:

$$|\widehat{u}(\xi,\eta)| = |\int \widehat{u}(x,\eta)e^{-ix\cdot\xi}dx| \leq \int|\widehat{u}(x,\eta)|dx \leq \|\widehat{u}(\cdot,\eta)\|_{L^2}(2\pi)^{\frac{m}{2}}$$

Logo, para todo $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{m+n}$ com $\eta \neq 0$

$$|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_N''}{|\eta|^N} \tag{3.10}$$

Observe que o operador P é elíptico em $(x, y, \xi_0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{T}^{m+n}$ e $\xi_0 \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$. Ou seja, $(x, y, \xi_0, 0) \notin WF(u)$. Então existe um cone $\Gamma_\epsilon = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{m+n} : |\eta| < \epsilon|\xi|\}$ contendo $(\xi_0, 0)$ tal que para cada $N \in \mathbb{Z}_+$, existe uma constante $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_N}{(|\xi| + |\eta|)^N}, \quad \forall(\xi,\eta) \in \Gamma_\epsilon. \tag{3.11}$$

Agora, sendo $\Gamma = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{m+n} : \ |\eta| > \frac{\epsilon}{2}|\xi|\}$, note que se $(\xi,\eta) \in \Gamma$, então $\eta \neq 0$. Assim, por (3.10)

$$|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_N''}{(\frac{1}{2}|\eta| + \frac{1}{2}|\eta|)^N} \leq \frac{C_N''}{(\frac{1}{2}|\eta| + \frac{\epsilon}{4}|\xi|)^N} \leq \frac{C_N}{|(\xi,\eta)|^N} \tag{3.12}$$

Portanto, por (3.11) e (3.12), temos

$$|\widehat{u}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_N}{|(\eta,\xi)|^N}$$

e portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{m+n})$ e P é hipoelíptico.

$\square$

Corolário 3.2.2. *Seja $\{X_j\}_1^m$ uma família de campos vetoriais reais em $\mathbb{T}^{m+n}$, onde existem coordenadas globais x, y em $\mathbb{T}^m$ e $\mathbb{T}^n$ respectivamente, nas quais os campos admitem a forma $X_j = \partial_{x_j} + \sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\partial_{y_k}$, sendo $a_{1k}(x) = a_{1k}(x_1)$ e o vetor $(a_{11}^0, ..., a_{1n}^0)$ é não-Liouville, onde $a_{1k}^0 = \int_{\mathbb{T}} a_{1k}(x_1)dx_1$. Então, o operador $P = -\sum_{j=1}^m X_j^2$ é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{m+n}$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que existe um difeomorfismo que transforma a família $\{X_j\}_1^m$ em $\{\partial_{t_j} + \sum_{k=1}^n b_{jk}(x)\partial_{s_k}\}_1^m$, onde $b_{1k}(t) = a_{1k}^0$ $1 \leq k \leq n$. Como o vetor $(a_{11}^0, ..., a_{1n}^0)$ é não-Liouville, seguirá do Teorema 3.2.2 que P é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^{m+n}$.

Seja $\tau : \mathbb{T}^{m+n} \to \mathbb{T}^{m+n}$ dado por $\tau(x,y) = (t,s)$ onde $t_j = x_j$ para $1 \leq j \leq m$, e $s_k = y_k - \int_0^{x_1} a_{1k}(r)dr + a_{1k}x_1$ para $1 \leq k \leq n$.

Tome $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{m+n})$, denote $\widetilde{u} = u \circ \tau^{-1}$ e

$$\tau(x,y) = (\tau_1(x,y), ..., \tau_m(x,y), \tau_{m+1}(x,y), ..., \tau_{m+n}(x,y)) = (t,s)$$

Note que

$$\partial_{x_1}\tau_l(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\partial_{x_j}\tau_l(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l = j \neq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad \forall j = 2, ..., m$$

$$\partial_{y_k}\tau_l(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l = m+k \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad \forall k = 1, ..., n$$

Note que a matriz Jacobiana com relação a τ é coincide com a matriz identidade, logo seu determinante é $1 \neq 0$. Segue do Teorema da Função Inversa que τ é de fato um difeomorfismo.

Além disso, para $2 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned}
X_j f(x,y) &= \left(\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\partial_{y_k}\right)\widetilde{f}(\tau(x,y)) \\
&= \sum_{l=1}^m \partial_{t_l}\widetilde{f}(t,s)\partial_{x_j}\tau_l(x,y) + \sum_{l=1}^n \partial_{s_l}\widetilde{f}(t,s)\partial_{x_j}\tau_{m+l}(x,y) \\
&+ \sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\left[\sum_{i=1}^m \partial_{t_i}\widetilde{f}(t,s)\partial_{y_k}\tau_i(t,s) + \sum_{i=1}^m \partial_{s_i}\widetilde{f}(t,s)\partial_{y_k}\tau_{m+i}(t,s)\right] \\
&= \partial_{t_j}\widetilde{f}(t,s) + \sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\partial_{s_k}\widetilde{f}(t,s)
\end{aligned}$$

e, para $j = 1$

$$\begin{aligned}
X_1 f(x,y) &= \left(\partial_{x_1} + \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(x)\partial_{y_k}\right)\widetilde{f}(\tau(x,y)) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \partial_{t_l}\widetilde{f}(t,s)\partial_{x_1}\tau_l(x,y) + \sum_{l=1}^{n} \partial_{s_l}\widetilde{f}(t,s)\partial_{x_1}\tau_{m+l}(x,y) \\
&= \partial_{t_1}\widetilde{f}(t,s) + \sum_{l=1}^{n} \partial_{s_l}\widetilde{f}(t,s)(-a_{1l}(x) + a_{1l}^0) + \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(x)\partial_{s_k}\widetilde{f}(t,s) \\
&= \partial_{t_1}\widetilde{f}(t,s) + \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^0\partial_{s_k}\widetilde{f}(t,s)
\end{aligned}$$

e segue o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BREZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[2] CHEN, W. and CHI, M.Y., **Hypoelliptic Vector Fields and Almost Periodic Motions on the Torus** $\mathbb{T}^n$. Partial Differential Equations, 25(1-2), (2000), 337-354.

[3] EHRENPREIS, L., **Solutions of some problems of division** I. Am. J. Math 76, 883-903, 1954.

[4] FOLLAND, G. B., **Real Analysis, Modern Techniques and their applications**. Seattle: John Wiley & Sons, 1999.

[5] GRAFAKOS, L., **Classical Fourier Analysis**, 2.ed. San Francisco: Board, 2008.

[6] GREENFIELD S. J., WALLACH N. R. **Globally Hypoelliptic vector fields** Topology 12 (1973), 247-254 35H05 (58F05).

[7] HOUNIE J. **Teoria elementar das distribuições** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[8] HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear partial differential operators I**. Springer-Verlag. Segunda edição, 1980.

[9] KRYLOFF, N. M., BOGOLIUBOFF, N.M. **La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire**. Ann. of Math, (2) 38 (1937), no. 1, 65-113.

[10] OLIVEIRA, C. R., **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[11] PETRONILHO, G. **Global hypoellipticity, global solvability and normal form for a class of real vector fields on a torus and application**. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 12, 6337-6349.

[12] PETRONILHO, G. **Simultaneous reduction of a family of commuting real vector fields and global hypoellipticity**. Israel J. Math. 155 (2006), 81-92.

[13] MALGRANGE, B. **Existence et Approximation des Solutions des Équations aux Dérivées Partielles et des Équations de Convolution**. Ann.Inst. Fourier Grenoble 6 271-355 (1955-56)

[14] RUZHANSKY, M., **Pseudo-Differential Operators and Symmetries**. Berlin: 2010.

[15] TREVES, F., **Topological Vector Spaces Distribuitions and Kernels**. New York, segunda edição, 1967.

[16] ZANI, S. L., **Hipoelipticidade Global para Operadores de Segunda Ordem**. Dissertação de Mestrado, 1988.