UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ALINE GERMANO FONSECA COURY

FREGE E AS LEIS DA ARITMÉTICA: DO IDEAL DE FUNDAMENTAÇÃO AO PARADOXO

SÃO CARLOS - SP
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ALINE GERMANO FONSECA COURY

FREGE E AS LEIS DA ARITMÉTICA: DO IDEAL DE FUNDAMENTAÇÃO AO PARADOXO

Dissertação apresentada ao Programa de PósGraduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos – PPGE/UFSCar, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação. Linha de Pesquisa: Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora**:** Profª Drª Denise Silva Vilela.

SÃO CARLOS - SP
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Coury, Aline Germano Fonseca.
C866fL	Frege e as Leis da Aritmética: do ideal de fundamentação ao paradoxo / Aline Germano Fonseca Coury. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
	171 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.
	1. Aritmética - Fundamentos. 2. Frege, Gottlob, 1848-1925. 3. Russell, Paradoxo de. I. Título.
	CDD: 372.72 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Aline Germano Fonseca Coury, realizada em 08/07/2015:

Profa. Dra. Denise Silva Vilela
UFSCar

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano
UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
UFSCar

Prof. Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto
UFSCar

Dedico este trabalho aos meus pais, meus irmãos, e meu esposo, Francisco, com amor.

AGRADECIMENTOS

Aos meus amados pais, Marli e Pedro, pelo exemplo de vida, força e determinação e por tornarem possível a realização de um sonho.

Ao meu amado esposo, Francisco, pelo incentivo, pelo carinho e paciência com os quais enfrentou comigo os momentos de tensão, por discutir comigo muitos dos tópicos deste trabalho e pela fonte de inspiração.

À minha irmã, Natália, pela paciência inesgotável, pelo suporte e amor dedicados a mim incondicionalmente.

Ao meu irmão, Paulo, pelos ensaios de apresentações, por torcer por mim e pelo bom humor sempre presente.

À minha orientadora, Profa. Dra. Denise Silva Vilela, pela confiança, pelas incontáveis contribuições à minha formação e pela compreensão nos momentos difíceis.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Educação da UFSCar pela ajuda e pelas contribuições à minha formação.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa em Educação Matemática pelas conversas, pelo apoio e pelo espírito de trabalho em equipe.

À minha amiga Thaís Cosmo pelo companheirismo, por estar sempre presente.

Aos professores Dr. Pedro Malagutti, Dra. Itala D’Ottaviano e Dr. Bento Prado Neto pelas valiosas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

“Eu queria certeza da mesma maneira que as pessoas querem fé religiosa. Eu pensava que a certeza é mais provável de ser encontrada na matemática do que em qualquer outra coisa. Mas descobri que muitas demonstrações matemáticas, que meus professores esperavam que eu aceitasse, estavam cheias de falácias, e que, se a certeza pudesse realmente ser descoberta na matemática, seria em um novo campo da matemática, com fundamentos mais sólidos do que os que tinham até então sido considerados seguros. Mas enquanto o trabalho prosseguia, eu me lembrava constantemente da fábula sobre o elefante e a tartaruga. Tendo construído um elefante sobre o qual poderia repousar o mundo matemático, vi que o elefante cambaleava, e passei a construir uma tartaruga, para evitar que ele caísse. Mas a tartaruga não estava mais segura que o elefante, e após uns 20 anos de trabalho muito árduo, cheguei à conclusão de que não havia mais nada que eu pudesse fazer a fim de tornar o conhecimento matemático indubitável.”

Bertrand Russell

RESUMO

A partir do fim do século XIX e início do século XX, alguns estudiosos, como Frege, Russell, Dedekind, Wittgenstein, dentre outros, buscaram alcançar os fundamentos últimos para a Matemática. Especificamente, Frege desenvolveu trabalhos a fim de fundamentar a Aritmética tendo como base a Lógica Clássica, ou seja, utilizando a lógica ele pretendia construir um sistema capaz de formalizar definições matemáticas e métodos de prova. Esses trabalhos culminaram na publicação de *Os Fundamentos da Aritmética* em 1884 e, posteriormente, em 1893 e 1902, em *As Leis Básicas da Aritmética*. No entanto, a tentativa proposta por Frege de reduzir a Aritmética à Lógica se mostrou inadequada, devido a um paradoxo na teoria apontado por Bertrand Russell em 1902. Assim sendo, o estudo aqui proposto tem como objetivo reconstruir lógico-matematicamente o *paradoxo de Russell* em sua formulação original nas *Leis Básicas da Aritmética* de Frege. Para realização deste estudo, o presente trabalho fundamentou-se numa pesquisa bibliográfica englobando, como bibliografia primária, as obras de Frege e, como bibliografia secundária, as obras de seus comentadores, assim como a correspondência entre Frege e Russell. A pesquisa proporciona uma formação lógica, filosófica e matemática para o educador que percorre este evento de fronteira entre as áreas que se configuram disciplinares na atualidade. Este é um momento fecundo na história e filosofia da Matemática e da Lógica, configurando-se como um divisor de águas para as teorias matemáticas, já que abre espaço para os Teoremas da Incompletude de Gödel e as lógicas não clássicas, possuindo também desdobramentos na Filosofia Contemporânea e que é de inquestionável valor nessa formação.

Palavras-chave: Os Fundamentos da Aritmética. Frege. Paradoxo de Russell. As Leis Básicas da Aritmética.

ABSTRACT

Since the end of the nineteenth century and early twentieth century, some scholars such as Frege, Russell, Dedekind, Wittgenstein, among others, started to seek the foundations of the mathematics. Specifically, Frege developed studies in order to build the arithmetic foundation based on classical logic, i. e., using logic, he intended to build a system capable of formalizing mathematical definitions and proof methods. These works resulted in the publication of *The Foundations of the Arithmetic* in 1884 and subsequently in 1893 and 1902, *The Basic Laws of Arithmetic*. However, Frege's attempt to reduce arithmetic to logic was inadequate due to a paradox discovered by Bertrand Russell in 1902. The aim of this research was to reconstruct mathematically and logically the Russell paradox in its original formulation in the Frege's *The Basic Laws of Arithmetic*. This study had as primary bibliography Frege's works and as secondary bibliography, works of his commentators, as well as the correspondence between Frege and Russell. This research provides a logical, philosophical and mathematical formation for the educator who is in contact with this event that covers both the areas that is disciplinary today. It is a fertile moment in the history of philosophy of mathematics and logic, configured as a watershed for mathematical theories since it enabled Gödel's incompleteness theorems and non-classical logics to be formulated, and also has repercussions in contemporary philosophy and which is of unquestionable value for the teacher formation.

Keywords: Foundations of the Arithmetic. Frege. Russell Paradox. The Basic Laws of the Arithmetic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação da problemática de pesquisa e aspectos metodológicos da investigação

Guillen (1983, p.19) inicia pertinentemente o segundo capítulo de seu livro *Pontes para o Infinito* com a seguinte frase: “São raras as pessoas que não preferem a certeza à dúvida”. A certeza enquanto um conhecimento claro e seguro de algo é um elemento apaziguador e tranquilizador para os seres humanos. Esta tem sido também o grande sonho dos matemáticos e parecia começar a se realizar com os *Elementos* de Euclides ainda por volta de 300 a.C. Até meados do século XIX, os matemáticos e os filósofos, mesmo em filosofias discrepantes como o racionalismo e o empirismo[1], acreditavam com convicção no mito de Euclides (DAVIS; HERSH, 1989). Esse mito consiste em certa idealização dos conteúdos dos livros de Euclides, aceitando-os como verdades absolutas e inquestionáveis acerca da realidade: a geometria nada mais seria do que uma descrição verdadeira da realidade[2]. A ideia vigente e quase unânime era de que Euclides atingiu o conhecimento “certo, objetivo e eterno” a partir de verdades evidentes e utilizando demonstrações rigorosas; uma ideia tão poderosa e convincente que mesmo atualmente “parece que a maior parte das pessoas com instrução acredita no mito de Euclides” (DAVIS; HERSH, 1989, p.366); a geometria euclidiana, ainda atualmente, é perpetuada como símbolo de verdade (VILELA; DEUS, 2014).

O ideal da irrefutabilidade da geometria[3] e possivelmente da aritmética, quase unânime no século XIX, pode ter relações com a filosofia platônica que entende os conteúdos matemáticos, sobretudo da geometria, como verdades que podem ser conhecidas pelos seres humanos por meio de métodos específicos, como o diálogo socrático. Ou seja, para os platonistas as verdades matemáticas podem ser acessíveis

[1] Para os racionalistas a matemática é independente da mente humana, de modo que a matemática é o exemplo mais adequado para confirmar a visão de mundo de seus seguidores. Já para os empiristas os objetos e afirmações matemáticas poderiam ser alcançados através do contato sensível com o mundo exterior, já que os objetos matemáticos nada mais eram do que elementos do mundo real.

[2] A palavra geometria resulta dos termos gregos “geo” e “métron” que significam, respectivamente, terra e medida. Desta forma, a origem da geometria, bem como o próprio nome “geometria” pressupõem a associação direta com a realidade.

[3] Neste trabalho ao usar a palavra geometria nos remetemos à geometria euclidiana. Os casos em que se tratar das geometrias não euclidianas serão devidamente indicados ao longo do texto.

a qualquer pessoa que se exponha a um determinado método. Platão acreditava na existência de “um reino de verdade absoluta, imutável, a fonte e a base de nosso conhecimento do Bem” de modo que a matemática reinava como testemunha da existência desse reino (DAVIS; HERSH, 1989, p.367).

Desde Euclides, grande parte da Matemática apoiou-se na magnificência da Geometria. Aqueles ramos que não possuíam ligações tão estreitas com a Geometria, como a Análise Matemática, eram questionados. Os demais ramos tinham sua legitimidade garantida pelas ligações que possuíam com esta. A Geometria, por sua vez, tinha sua legitimidade garantida pela lógica clássica desenvolvida por Aristóteles (384 – 322 a.C.). Dessa forma, os *Elementos* e o *Organon*[4] de Aristóteles representaram o apogeu da certeza matemática que perdurou por mais de 2000 anos, de forma que se acreditava que a lógica era o guia no caminho para a certeza e a geometria, a própria certeza (GUILLEN, 1983).

O sistema axiomático proposto por Euclides para a geometria possuía dez hipóteses iniciais que, segundo Guillen (1983, p.21), eram uma mistura de senso comum e “asserções plausíveis acerca de pontos, linhas e planos matemáticos”. Apesar da grande dose de intuição, ao mesmo tempo em que os axiomas eram tidos como verdades, era importante que se garantisse que cada um destes não poderia ser demonstrado a partir dos outros. O quinto postulado de Euclides, também conhecido como o axioma[5] das paralelas[6], chamou a atenção por não parecer ser trivial como os outros. De fato, as investigações acerca deste postulado, que tinham como objetivo mostrar se este era derivável dos outros axiomas, resultaram, no século XIX, na construção das geometrias não euclidianas[7], que, em geral, partiam de uma discussão relativa a não aceitação do quinto postulado. Este fato mostrou que era possível não só criar novas geometrias, mas principalmente que a geometria euclidiana não tinha um

[4] *Organon* obra que consiste da reuniu dos escritos lógicos de Aristóteles: *Categorias; Da Interpretação; Analíticos Anteriores; Analíticos Posteriores;Tópicos; Elencos Sofísticos.*

[5] Neste texto, utilizamos as palavras axioma e postulado de maneira indistinta.

[6] O quinto postulado de Euclides pode ser enunciado de diversas maneiras, dentre elas a seguinte por Davis e Hersh (1989, p. 251): “Se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por uma outra reta, e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor que dois retos, então as retas se encontrarão, se prolongadas suficientemente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos”.

[7] Trabalhos de Nikolai Lobachevski (1792-1856), János Bóliay (1802-1860) e Bernhard Riemann (1826-1866).

reinado tão absoluto. Segundo da Costa, citado por D’Ottaviano e Feitosa (2003), o surgimento das geometrias não euclidianas pode ser percebido como um dos maiores marcos na história da cultura, de forma que estas podem ser vistas, do ponto de vista epistemológico, como um abrir caminho para as lógicas não clássicas, as quais serão caracterizadas posteriormente. Ainda, tendo em vista a filosofia de Wittgenstein (1889-1951), que realça os limites da razão e o esvaziamento do ideal da verdade na Matemática e na Ciência, não é difícil concordar que se trata de uma revolução na história da cultura.

Ainda no século XIX, a Análise Matemática desenvolveu-se ainda mais, ultrapassando amplamente a intuição geométrica. Sobre isso, podemos citar, por exemplo, a elaboração da teoria de curvas contínuas no espaço, as quais não possuíam derivada em nenhum ponto. Como bem colocado por Davis e Hersh (1989, p.372), essas novas teorias, ou essas “surpresas chocantes”, “expuseram a vunerabilidade do único alicerce sólido – a intuição geométrica – sobre o qual se pensava que repousava a matemática”.

Antes deste momento crítico, em que o exemplo supremo de certeza encontra-se abalado[8], matemáticos como Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weierstrass (1815 – 1897) migraram do ideal da geometria para a aritmética como fundamento para toda a Matemática (DAVIS; HERSH, 1989). O período denominado ‘aritmetização da análise’ visava alcançar os fundamentos do número/grandeza irracional, projeto que possuía como idealizadores Dedekind, Weierstrass, Bernard Bolzano (1781-1848), Georg Cantor (1845-1918), dentre outros. Cabe ressaltar que, apesar de a crença na geometria enquanto fundamento para a Matemática encontrar-se abalada, isso não ocorreu com a crença e confiança no método dedutivo, que permaneceu forte também nas propostas que tangiam a aritmética como um fundamento e que, portanto, buscavam primeiramente a fundamentação da própria aritmética utilizando métodos de raciocínio dedutivo.

Até aquele momento, havia uma grande quantidade de teoremas e resultados para a aritmética, “um amontoado de afirmações” que nenhum matemático teve a intenção de questionar (DAVIS; HERSH, 1989f). Existiam muitos teoremas sem provas

[8] Fim do século XIX e início do século XX.

e este era o momento de construir a aritmética de maneira sistemática e precisa para que esta se tornasse o mapa[9] para o tesouro da certeza.

Com todas essas indagações, nesse mesmo período, cresce também a necessidade e o desejo de livrar a Matemática das ambiguidades da linguagem natural[10] e dos paradoxos gerados a partir de definições e métodos pautados na intuição. A necessidade de apurar a linguagem natural de ambiguidades fortaleceu o uso da linguagem simbólica (EBBINGHAUS; FLUM; THOMAS, 1939).

A preocupação em sistematizar definições e métodos de prova ocupou espaço considerável nos estudos de alguns filósofos e matemáticos. Neste contexto, destaca-se os trabalhos de Gottlob Frege (1848-1925), que buscou na lógica os meios para construção de uma base para a aritmética, encaixando-a em um formato lógico, de modo que toda afirmação matemática verdadeira pudesse ser demonstrada (GUILLEN, 1983)[11]. Nesse sentido, Frege se insere tanto no ideal de construção de uma linguagem formal quanto no ideal de fundamentação da Matemática[12] pela lógica e não diretamente com a ‘aritmetização da análise’. Como será visto posteriormente, Frege vivia num certo isolamento acadêmico. Seus trabalhos não foram muito discutidos por seus contemporâneos. O autor teve dificuldades para publicá-los e ser entendido devido à aparência estranha do seu simbolismo (SLUGA, 1999).

Frege dedicou grande parte de sua vida profissional à construção de tal sistema formal e à investigação acerca dos fundamentos da Matemática, dos anos de 1879 a 1902. Os trabalhos de Frege se iniciaram com *Begriffsschrift* (1879) e *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) e pretendiam encontrar um desfecho favorável no primeiro e segundo volume da obra *As Leis Básicas da Aritmética* (1893 -1902). Entretanto, em 1902, momento em que o segundo volume estava sendo impresso, Bertrand Russell (1872 - 1970) envia uma carta para Frege, comunicando-o de uma inconsistência gerada pelo sistema apresentado no primeiro volume. Essa

[9] A ideia de mapa para a certeza, ou para o tesouro da certeza, é “emprestada” de Guillen (1983), cujo capítulo que trata do assunto é pertinentemente intitulado *Um certo tesouro*.
[10] Neste trabalho, usaremos os termos “linguagem comum”, “linguagem natural” e “linguagem falada” para a linguagem usada no cotidiano a fim de diferenciá-la da linguagem artificial ou simbólica.
[11] Sobre isso, é pertinente citar Wittgenstein, herdeiro intelectual de Frege, em quem também se manifesta a necessidade e o desejo de lidar com as ambiguidades entre a lógica e a linguagem.
[12] Frege propunha a fundamentação da aritmética e da análise pela lógica. Para ele, a geometria seria um sistema à parte que não entraria no seu projeto.

inconsistência ficou posteriormente conhecida como o *paradoxo de Russell*, objeto de estudo deste trabalho.

Diante dos paradoxos e da insustentabilidade dos fundamentos matemáticos construídos até então, no fim do século XIX iniciou-se um período que é conhecido como a crise dos fundamentos, no qual três escolas filosóficas[13] lutaram para reestabelecer os fundamentos da Matemática. Inúmeros trabalhos foram realizados, inclusive por Russell e Frege, no sentido de superar e ultrapassar essas dificuldades. Alguns permaneciam com as ideias de Frege no seu programa logicista, esperando que a lógica de origem aristotélica fosse suficiente para remover paradoxos da teoria. Outros utilizavam princípios diferentes, como o formalismo e o intuicionismo[14]. Por fim, constatou-se que nenhuma das três escolas poderia reestabelecer os fundamentos (DAVIS; HERSH, 1989).

Segundo Davis e Hersh (1989, p.366), essa crise foi resultado da discrepância entre o “ideal tradicional da matemática”, ou seja, o ideal sustentado pelo “mito de Euclides”, e a “realidade da matemática, a prática real da atividade matemática em um instante dado qualquer”. Em outras palavras, a crise se configurou como um resultado de tensões entre a Filosofia da Matemática e a própria Matemática.

Novas perspectivas em relação ao problema de fundamentar a Matemática através lógica surgiram em 1931, quando o lógico Kurt Gödel (1906-1978) apresentou seus dois Teoremas da Incompletude, mostrando que, grosso modo, existem verdades matemáticas que não podem ser demonstradas (GOLDSTEIN, 2008). Em outras palavras, é impossível construir um sistema axiomático completo[15] e consistente[16] para a aritmética utilizando a lógica clássica.

A expansão das lógicas não clássicas foi estimulada tanto pelas geometrias não euclidianas quanto pelos teoremas de Gödel (D’OTTAVIANO; FEITOSA, 2003). Segundo D’Ottaviano e Feitosa (2003, p.21), as lógicas não clássicas são diferentes

[13] O logiscismo, o intuicionismo e o formalismo.
[14] O formalismo, assim como o logicismo, utilizava a lógica aristotélica, o que os diferencia é o fato de que para os formalistas as afirmações e demonstrações matemáticas deveriam ser expressos em símbolos estritamente definidos, sem considerar o aspecto semântico, ou do significado. Já para o intuicionismo os números e os objetos matemáticos são dados por uma intuição fundamental, todos os objetos matemáticos devem ser construídos a partir dos números naturais.
[15] Que contém e possibilita demonstrar todas as verdades da teoria.
[16] Não há contradições dentro do sistema.

das lógicas clássicas pelos seguintes motivos: podem “estar baseadas em linguagens mais ricas em formas de expressão”; podem “estar baseadas em princípios inteiramente distintos”; ou podem “ter uma semântica distinta”. Nesse sentido, estas podem ser complementares, que são aquelas que apenas acrescentam novos princípios, sem negar os princípios da lógica clássica ou excluí-los; é o caso das lógicas modais[17], deônticas[18], do tempo[19], etc. Ou podem ser alternativas, aquelas que eliminam um ou mais dos princípios básicos da lógica clássica; como exemplo, tem-se as paracompletas[20], as não-reflexivas[21], as lógicas polivalentes[22], paraconsistentes[23], etc[24].

Apesar da existência das geometrias não euclidianas, dos teoremas de Gödel e das lógicas não clássicas, muitos matemáticos ainda sustentam o ideal de um corpo de conhecimentos bem fundamentado, no qual toda e qualquer verdade pode ser demonstrada, ignorando assim os acontecimentos da década de 30 (GUILLEN, 1983). Muitos deles ainda acreditam no “mito de Euclides”, afinal, como defendido por David Hilbert (1862-1943) em seu discurso no 2º Congresso Internacional de Matemáticos de Paris em 1900, “se o pensamento matemático é defeituoso, onde vamos encontrar a verdade e a certeza”? (HILBERT, 2003).

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o estudo de um dos momentos e objetos apresentados neste contexto histórico: a identificação do paradoxo por Russell e o próprio paradoxo dentro da teoria de Frege. Nesse sentido, tem-se como intuito realizar uma reconstrução lógico-matemática do paradoxo que é conhecido como o *paradoxo de Russell*. Por reconstruir entende-se a ideia de identificar e estudar o *paradoxo de Russell* em sua formulação primária e, em particular, identificar as definições e hipóteses que levaram a essa contradição. Este objetivo está atrelado à ideia da fecundidade do estudo desse paradoxo na formação do professor de Matemática.

[17] Possuem operadores modais de possibilidade e necessidade.
[18] Possui os seguintes operadores: proibido, permitido, indiferente e obrigatório.
[19] Possuem operadores temporais.
[20] Não é válido o princípio do terceiro excluído.
[21] Não vale o princípio da identidade.
[22] Possuem outros valores de verdade além do verdadeiro e do falso.
[23] Pode ser usada para teorias inconsistentes e não triviais.
[24] Para um estudo mais próximo das lógicas não clássicas, ver D’Ottaviano e Feitosa (2003).

Por ser esta pesquisa do tipo histórico-bibliográfica (LAKATOS; MARCONI, 1995), a bibliografia utilizada neste trabalho se constitui de primária, isto é, as obras de Frege, e de bibliografia secundária, que se constitui das obras de pesquisadores reconhecidos como comentadores de Frege.

A bibliografia primária consta das obras de Frege publicadas por ele em alemão e de traduções correspondentes em inglês e português. O esquema abaixo apresenta esta bibliografia primária indicando o título da obra original de Frege em alemão, as traduções utilizadas, assim como o modo que a obra será citada neste trabalho. Sobre isso, pelo caráter histórico da presente pesquisa, será mantido o ano da primeira publicação, seguida do número da seção correspondente àquela publicação original, quando houver seção, enquanto que a página citada corresponde àquela tradução utilizada neste trabalho.

Bibliografia Primária

Ano	Obra (original/ tradução utilizada)	Citação
1879	- **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens**. Halle a. S., L. Nbert, 1879, X, 88 p. Cf.[48]. - Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought (HEIJENOORT, 1970).	(Frege, 1879)
1882	- Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. **Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik**, 81 (1882) pp.48-56. Cf. [48]. - Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia (Alcoforado, 2009).	(Frege, 1882)
1883	- Über den Zweck der Begriffsschrift. **Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft**, 16 (1883) Supplement, pp. 1-10. Cf. [48]. - Sobre a Finalidade de uma Conceitografia (Alcoforado, 2009).	(Frege, 1883)
1884	- **Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-**	(Frege, 1884)

mathematatische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, W. Koebner, 1884, XI, 199 p.

- Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número (Santos,1983).

1891 - **Funktion und Begriff**.Jena, H. Pohle, 1891, II, 31p. Cf.[47], [50]. (Frege, 1891)

- Função e Conceito (Alcoforado, 2009).

1892 - Über Sinn und Bedeutung. **Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik**, 100 (1892) pp.25-50. Cf[47], [50]. (Frege, 1892a)

- Sobre o sentido e a referência (Alcoforado, 2009).

1892 - **Über Begriff und Gegenstand**

- Sobre conceito e objeto (Alcoforado, 2009). (Frege, 1892b)

1893 - **Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet**. I. Band. Jena, H. Pohle, 1893, XXXII, 253 p. (Frege, 1983a)

- The Basic Laws of Arithmetic (Furth, 1964).

1893 - **Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet**. II. Band. Jena, H. Pohle, 1903, XV, 265 p. (Frege, 1902)

- The Basic Laws of Arithmetic, vol.2 (Furth, 1964).

As correspondências trocadas entre Russell e Frege, que também fazem parte da bibliografia primária, foram estudadas através da tradução do alemão para o inglês realizadas por Long e White (1980). Para citar essas cartas, optou-se pela seguinte forma: (AUTOR DA CARTA, ano em que a carta foi escrita, pag.). A página indicada na citação corresponde à publicação da tradução de Long e White (1980).

Como bibliografia secundária, foram utilizadas as obras de pesquisadores reconhecidos como comentadores de Frege, conforme indicado a seguir:

Bibliografia secundária
(Comentadores principais)

Obra	**Comentador (ano)**
Lógica e Filosofia da Linguagem	ALCOFORADO (2009)
Frege: philosophy of mathematics	Dummett (1991)
The seas of language	Dummett (1996)
O olho e o microscópio	Santos (2008)
Introdução na obra os pensadores	Santos (1983)
The arguments of the Philosophers: Gottlob Frege	Sluga (1999)
Introdution and Coments in *Begriffschrift*	Heijenoort (1970)
Introdution and Coments in *The Basic Laws of Arithmetic*	Furth (1964)
Introduction and Coments in *Philosofical and Mathematical Correspondence*	Long e White (1980)

Além disso, serão considerados para este trabalho autores que abordam os seguintes temas: paradoxos, lógicas clássica e não clássicas, história da lógica, teoria dos conjuntos, etc. Para essas discussões serão utilizados os estudos de Vilela (1996, 1999), Silva (2007), D'Ottaviano (1990, 2003), Gomes (2009), Griffin (2004), Grattan-Guinness (1979), Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1984), Anellis (1991), dentre outros.

Neste primeiro capítulo (introdução), serão apresentados ainda aspectos da vida e obra de Frege e do *paradoxo de Russell*, objeto de pesquisa deste trabalho. Em seguida, a dissertação apresenta-se estruturada em capítulos organizados pela sequência de publicações da obra de Frege.

No segundo capítulo, serão apresentadas as principais indagações de Frege ao escrever *Begriffsschrift*, bem como uma descrição breve desta obra. *Begriffsschrift* é divida em três partes, que contêm, respectivamente: 1. Apresentação e descrição do alfabeto da linguagem artificial e as regras de manipulação; 2. Axiomas da lógica proposicional e da lógica de predicados de primeira ordem, ou seja, o sistema axiomático para a lógica fregeana, com a derivação de alguns teoremas e; 3. Lógica de predicados de segunda ordem, incluindo a definição de *seguir em uma série*, necessária para a caracterização dos números. Neste trabalho, visando atender os objetivos propostos, optou-se por discutir mais amplamente a primeira e a terceira partes, a partir da própria obra de Frege e dos textos dos comentadores Sluga (1999), Dummett (1991), Santos (2008) e Heijenoort (1970).

No terceiro capítulo, será apresentada a segunda obra do autor, os *Fundamentos da Aritmética*. *Os Fundamentos* têm uma característica mais filosófica, na qual Frege opta por não utilizar a linguagem artificial construída em *Begriffsschrift*. Nesta obra, Frege discute a natureza do número e busca construir o conceito de número a partir da redução da aritmética à lógica. Nesse sentido, discute também os objetos e noções aritméticas, definindo as noções de conceito, extensão de conceito e objeto, necessárias para a definição de número. É a primeira vez que Frege apresenta, discute e defende sua posição logicista, tecendo críticas ao empirismo e ao psicologismo no que diz respeito à caracterização dos objetos matemáticos, os números. Neste capítulo, serão considerados os comentadores Sluga (1999), Dummett (1991), Santos (2008) acerca das definições de Frege e do programa logicista que estão em concatenação com os objetivos deste trabalho.

No quarto capítulo, será abordado o primeiro volume das *Leis Básicas da Aritmética*, privilegiando as discussões necessárias para derivar e reconstruir *o paradoxo de Russell* dentro da teoria. Nas *Leis Básicas*, Frege apresenta e aprofunda os resultados obtidos nos *Fundamentos* utilizando a simbologia construída em *Begriffsschrift*, demonstrando, inclusive, alguns dos teoremas que não foram demonstrados anteriormente. Vale ressaltar que alguns dos resultados que aparecem nos *Fundamentos* e em *Begriffsschrift* foram discutidos mais profundamente em artigos escritos pelo autor no período entre as obras. Estes artigos serão aqui apresentados dentro da relevância para o presente trabalho.

No quinto capítulo, serão apresentadas as discussões acerca do paradoxo: o momento da descoberta por Russell, o impacto sofrido por Frege e as tentativas de superá-lo. Além disso, serão discutidos brevemente as marcas da obra de Frege e do paradoxo para o desenvolvimento da teoria dos tipos de Russell e Whitehead, das formulações da teoria de conjuntos e das lógicas não clássicas.

Na próxima seção, serão apresentados, de maneira breve, aspectos da história, da vida e das obras de Frege.

1.2. Aspectos da vida e obra de Gottlob Frege

Friedrich Ludwig Gottlob Frege, matemático, filósofo e lógico[25], nasceu em Wismar, norte da Alemanha, em 8 de novembro de 1848. As pesquisas bibliográficas realizadas[26] indicaram, assim como afirma Alcoforado (2009), que pouco se sabe tanto sobre a vida pessoal e a personalidade de Frege quanto sobre a sua vida acadêmica. Seu pai, Karl Alexander Frege, foi fundador e diretor de uma escola para meninas em Wismar, e sua mãe, Auguste Bialloblotzky Frege, foi professora e, posteriormente, diretora da mesma escola.

Ao que tudo indica, os estudos primários e secundários de Frege[27] foram realizados no Ginásio local em Wismar (SANTOS, 1983), entretanto, tem-se registro apenas do período de 1864 a 1869 (KLEMENT, 2015); este último é o ano da graduação de Frege. Em 1869, Frege ingressou na Universidade de Jena, onde teve aulas e foi orientado por Ernst Karl Abbe (1840 – 1905) que, segundo Zalta (2012), teve forte influência sobre a vida profissional e pessoal de Frege. Ele permaneceu em Jena até 1871 quando foi para Universidade de Göttingen. Nesta última, Frege defendeu sua dissertação doutoral[28] na área de matemática, em 1873, mesmo ano em que foi indicado, possivelmente por Abbe, para o posto de professor na Universidade de Jena. Para ser admitido, Frege apresentou sua tese de docência para o cargo, intitulada "Métodos de cálculo baseados sobre uma extensão do conceito de grandeza" que, segundo Alcoforado (2009), possui o princípio de suas futuras contribuições para a lógica. Em 1874, se torna livre docente[29] na Universidade de Jena e, em 1896,

[25] Atualmente Frege é considerado matemático, filósofo e lógico. Entretanto, sua formação é de matemático.
[26] Alcoforado (2009), Santos (1983), Sluga (1999), O'Connor e Robertson (2002), Klement (2015), Zalta (2012).
[27] Em torno de 15 anos de estudo.
[28] Em sua dissertação doutoral, Frege pretendia estabelecer os fundamentos para uma parte da geometria (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002).
[29] Em alemão, a*usserordentliche*. Tradução para o português de Santos (1983).

professor titular[30]. Frege permaneceu por 44 anos envolvido não só no ensino, mas também na pesquisa em Matemática.

Após a publicação da obra *Begriffsschrift* (1879), não se sabe ao certo quando, Frege se casa com Margarete Lieseberg (1856-1905), com quem adota um filho, Alfred. Em 1917, Frege se aposenta de seu cargo de professor na Universidade de Jena e se muda para Bad Kleinen, na Alemanha, onde vem a falecer em 1925.

Segundo Santos (1983), a produção de Frege pode ser divida em quatro períodos. O primeiro deles é marcado por sua primeira obra *Begriffsschrift, uma linguagem formular do pensamento puro modelada sobre a da aritmética*[31][32], publicada em 1879. Quando escreveu *Begriffsschrift,* Frege ainda não tinha em mente a ideia da redutibilidade da Aritmética à Lógica, isto é, o que é denominado projeto logicista ainda não o guiava explicitamente (ALCOFORADO, 2009). O objetivo de Frege com a obra era a criação de um sistema formal que possuísse uma linguagem artificial capaz de expressar e tratar as relações existentes entre as verdades científicas.

O segundo período é marcado pela obra *Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*[33]*,* publicada em 1884. O objetivo de Frege nos *Fundamentos* é investigar a natureza das verdades aritméticas e a definibilidade do conceito de número através de estruturas lógicas. É também nesta obra que Frege enuncia, pela primeira vez, sua ideia sobre a redutibilidade da Aritmética à Lógica.

O terceiro período (1884-1903) refere-se à obra *As Leis Básicas da Aritmética*[34]*,* cujo primeiro volume foi publicado em 1893 e o segundo em 1902. As *Leis Básicas* representavam o desfecho final para o programa de Frege para a aritmética. Nesta obra, encontram-se os ideais de redutibilidade da aritmética à lógica, enunciados nos *Fundamentos,* utilizando a linguagem artificial proposta por Frege em *Begriffsschrift*. O

[30] Em alemão, o*rdentlicher honorarprofessor*. Tradução para o português de Santos (1983).
[31] Em alemão: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens Halle*.
[32] Segundo O'Connor e Robertson (2002) e Santos (1983), Frege possui poucas publicações fora do campo da lógica.
[33] *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.*
[34] *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.*

volume 1 das *Leis Básicas* é importante, como já mencionado acima, pois é a obra na qual Russell identificou o paradoxo, objeto deste estudo.

Por fim, o quarto período refere-se à busca pela solução do problema do paradoxo identificado por Russell a partir do volume um das *Leis Básicas*. Esse é o período mais curto, já que Frege logo desanimou dessa busca.

Além dessas três obras, Frege escreveu uma série de artigos[35], a maioria deles com o objetivo de elucidar suas definições, construções e conceitos. Os trabalhos de Frege passaram praticamente despercebidos, de forma que a maioria das poucas críticas que recebeu era contrária à sua visão. *Begriffsscrift*, por exemplo, recebeu apenas seis resenhas[36] (VILKKO, 1997), enquanto que *Os Fundamentos*, apenas uma[37] (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002).

Frege possuiu como interlocutores diretos de seu trabalho Georg Cantor, Ludwig Wittgenstein (1889-1951), Giuseppe Peano (1858-1932), Edmund Husserl (1859-1938), Ernst Schröder (1841-1902), John Stuart Mill (1806-1873), Bertrand Russell, dentre outros. Alcoforado (2009, p.11) afirma que o "grande público filosófico o desconhecia por completo" e ainda hoje ele é pouco conhecido por grande parte do público acadêmico, inclusive se comparado com a popularidade de alguns desses interlocutores.

O que aconteceu é que Frege estava, de certo modo, na contramão do movimento de disciplinarização da Matemática[38] (SCHUBRING, 1979), já que era um matemático que estudou duas áreas bem específicas da Filosofia, a epistemologia das ciências formais e a filosofia da linguagem (ALCOFORADO, 2009). O próprio Frege (1983, introdução, p.201), na introdução dos *Fundamentos*, enfatiza que suas investigações se tornaram mais "filosóficas do que pode parecer apropriado a muitos matemáticos", mas que "uma investigação radical do conceito de número deverá

[35] Uma relação das obras de Frege, e de alguns dos momentos de sua vida, pode ser encontrada no Apêndice I.
[36] As resenhas de Reinhold Hoppe, John Venn, Paul Tannery, Kurd Lasswitz, Karl Michaëlis e Ernst Schröder.
[37] De Georg Cantor.
[38] Até o século XVIII a matemática não era uma disciplina bem constituída e não havia a profissionalização da matemática. É na passagem do século XVIII para o século XIX que acontece o movimento de instituicionalização da matemática como profissão e a consequente disciplinarização da mesma (SCHUBRING, 1979).

sempre resultar um tanto filosófica”, acrescentando que se trata de uma “tarefa comum à matemática e à filosofia”. Posteriormente, nas *Leis Básicas*, Frege novamente aborda o assunto:

> Por outro lado, as perspectivas do meu livro são fracas. Em qualquer situação eu devo abandonar como leitores todos os matemáticos que, ao se chocarem com expressões lógicas como “conceito”, “relação”, “juízo”, pensarão: *metaphysica sunt, non leguntur*[39], e, de modo semelhante, aqueles filósofos que ao sinal de uma fórmula choram: *mathematica sunt, non leguntur*[40]; e o número de tais pessoas certamente não é pequeno. (FREGE, 1893, introdução, p. 9, tradução nossa).

Frege desenvolveu um trabalho fundamental na emergência da Lógica Moderna e da Filosofia Analítica e, mesmo assim, levou um longo período para ser reconhecido. Além disso, até hoje as ideias de Frege não são muito difundidas e não são completamente compreendidas (SLUGA, 1999).

Apesar da pouca atenção que recebeu entre os estudiosos, Frege parece que acreditava na relevância de sua produção. Antes de morrer ele deixou uma carta para seu filho adotivo Alfred, em que pediu para ele guardar seus escritos, e cuidar que estes fossem divulgados: “Eu acredito que existem coisas aqui que um dia serão mais valorizadas do que agora. Cuide para que nada se perca” (FREGE apud KLEMENT, 2015).

Alfred entregou os escritos de Frege, após sua morte, para Heinrich Scholz (1884-1956), da Universidade de Münster. Entretanto, uma bomba que atingiu a universidade em 25 de março de 1945 destruiu todo o material deixado por Frege, e que não havia sido publicado ainda. O que foi salvo foram as cópias feitas por Scholz de alguns dos escritos que ele julgou serem os mais importantes (KLEMENT, 2015).

Na próxima seção, serão apresentados aspectos gerais do objeto desta pesquisa, o *paradoxo de Russell*.

1.3. O objeto da pesquisa: o paradoxo de Russell

[39] Do latim, “metafísica, não leio”.
[40] Do latim, “matemática, não leio”.

Os trabalhos de Frege, *Begriffsschrift*, *Os Fundamentos da Aritmética* e *As Leis Básicas da Aritmética*, publicados entre 1879 e 1902, são considerados revolucionários na história da Matemática e da Lógica. Apesar de não ter alcançado seu objetivo inicial, Frege contribuiu de maneira significativa para as teorias da Lógica e da Matemática, como pontua Silva (2007):

> A teoria de Frege sobre a natureza dos números, que como veremos foi tão falsificada como uma teoria pode ser, nos moldes em que foi proposta, mesmo assim esclarece de modo tão cogente a íntima relação entre lógica e aritmética que, apesar do seu fracasso, não falta quem queira ressuscitar em forma corrigida e atualizada. Além disso, a filosofia de Frege gerou como subproduto a lógica matemática moderna, o que não é pouca coisa. (SILVA, 2007, p. 17).

A falsificação da teoria a qual o autor faz referência diz respeito a um paradoxo encontrado na teoria de Frege. Antes da publicação do segundo volume das *Leis Básicas*, Russell descobriu uma falha lógico-dedutiva no sistema fregeano, que ficou conhecida como o *paradoxo de Russell*. Russell comunicou a Frege sua descoberta através de uma carta enviada em junho de 1902. A notícia não poderia ter sido mais devastadora para Frege, que reconhece que todo o seu sistema e, mais amplamente, a ideia de fundamentar a Aritmética através da Lógica, estaria comprometida. O problema se encontrava na noção de classe, ou conjunto, entendida, até então, como a mera reunião de objetos similares unidos por certas propriedades, a qual Frege empregou em sua teoria, sobretudo na lei (axioma) V do seu sistema. O problema invalidou a lei V, o que resultou na inconsistência dos axiomas das *Leis Básicas* e, por isso, contaminando todo o sistema construído por Frege.

Sobre a noção de conjunto na teoria de Frege, Russell identificou que havia uma confusão entre conjunto de elementos e conjunto de conjuntos. Em linhas gerais, o paradoxo decorria de se admitir sem distinção dois tipos de conjuntos: aqueles que pertenciam a si mesmos e aqueles que não pertenciam a si mesmo. Por exemplo, o conjunto de cachorros, não é um cachorro, mas o conjunto de todas as ideias, ainda é uma ideia e, portanto, pertenceria a ele mesmo já que possuía as qualidades necessárias para abranger determinado objeto. Então, Russell considerou o conjunto que contém todos os conjuntos que não são membros deles mesmos. Este conjunto pertence a si mesmo? Se ele pertence, então deve possuir a qualidade que o caracteriza, ou seja, não deve pertencer. Por outro lado, se ele não pertence, então ele possui a qualidade de não ser membro de si próprio e, portanto, deve pertencer ao conjunto. Daí, conclui-se que este conjunto pertence a si mesmo se, e somente se, este não pertencer a si mesmo. Uma contradição, o *paradoxo de Russell*.

O *paradoxo de Russell* pode ser escrito, com a linguagem matemática atual, e levando em conta a formulação aqui apresentada, da seguinte maneira: Seja R o conjunto dos conjuntos x que não pertencem a si mesmo,

$$R = \{x/x \notin x\}.$$

Então, a conclusão do paradoxo apresentado por Russell, pode ser escrita como:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R,$$

o que inflige um dos três princípios lógicos[41], o princípio da não contradição, gerando assim o paradoxo.

Com desenvolvimento desta dissertação, pretendia-se conhecer o paradoxo de Russell e a teoria de fundamentação da Aritmética de Frege, que tiveram tantas implicações para a História da Matemática e da Filosofia. O estudo do *paradoxo de Russell* em sua formulação inicial nas *Leis Básicas da Aritmética* representa penetrar num momento rico e fecundo da Historia da Filosofia, da Matemática e da Lógica. Para a Matemática, os paradoxos indicam o fim da certeza e da verdade, o que tem reflexos na Filosofia da Ciência. Para a Lógica, é o marco de grande desenvolvimento que resulta nas lógicas não clássicas e na tentativa de formalização da teoria dos conjuntos; para a filosofia, pode ser o antecedente do movimento que ficou conhecido como virada linguística[42].

[41] Na lógica clássica aristotélica, os três princípios lógicos são:

1. Princípio da Identidade: $\forall x(x = x)$.
2. Princípio da não contradição: $\neg(A \wedge \neg A)$.
3. Princípio do terceiro excluído: $(A \vee \neg A)$.

[42] A virada linguística, ou *linguistic turn*, é um movimento da história da filosofia atribuído a Wittgenstein em que se abandonam o essencialismo, o fundamentalismo, o idealismo e o caráter referencial da linguagem. (VILELA, 2010)

2 *A* LINGUAGEM SIMBÓLICA DE FREGE E OS SEUS PRIMEIROS PASSOS EM DIREÇÃO ÀS LEIS DA ARITMÉTICA: a obra *Begriffsschrift*

Begriffschrift[43]*, uma linguagem formular do pensamento puro modelada sobre a da aritmética* se constitui como os passos iniciais de Frege a caminho da fundamentação da Aritmética. Apesar de não introduzir a ideia de redução da Matemática à Lógica como um de seus objetivos para este livro, as preocupações com as verdades e definições aritméticas são também elementos motivacionais de Frege para construir a conceitografia, como pode ser visto nas suas justificativas para o desenvolvimento da obra. A obra é de inegável importância para a Matemática e, sobretudo, para a Lógica. Para este trabalho, a importância desta obra repousa no fato de ser a primeira apresentação da linguagem simbólica a qual Frege utilizará para construir o sistema axiomático para a aritmética exposto nas *Leis Básicas*, 14 anos após a publicação de *Begriffsschrift*.

Neste capítulo serão apresentadas, primeiramente, as indagações e motivações de Frege para a construção da conceitografia. Os argumentos colocados na primeira seção advêm de comentadores da obra de Frege, da introdução de Frege à obra e de um artigo publicado três anos após *Begriffsschrift* (*Sobre a justificação científica de uma conceitografia* de 1882), no qual Frege defende a utilidade e a necessidade de uma linguagem simbólica como a conceitografia para os fins científicos.

Na segunda seção, será apresentada a exposição fregeana da conceitografia, tentando abranger os tópicos relevantes da obra no que diz respeito aos objetivos deste trabalho, e preservar a ordem da exposição feita por Frege a fim de estar mais próximo possível da proposta de reconstrução.

Na última seção deste capítulo, será abordada brevemente a reação da academia, dos estudiosos contemporâneos a Frege e os esforços do próprio Frege para ultrapassar as duras críticas recebidas.

2.1. Pressupostos preliminares de Frege para a construção da conceitografia

[43] O termo *begriffsschrift* é a união dos termos *begriff*, que significa ‘conceito’, e *schrift*, que significa ‘grafia’ ou ‘escrita’. Na linguagem da aritmética e da lógica, este último é frequentemente entendido como ‘notação’. Dessa forma, *begriffsschrift* pode ser traduzido como ‘notação ou grafia conceitual’ (ALCOFORADO, 2009).

Já nas fases iniciais do desenvolvimento de seus trabalhos, Frege preocupava-se com o delineamento preciso dos tópicos básicos em Matemática, como os conceitos e os pressupostos iniciais, de forma que estes tópicos fossem devidamente tratados. Este fato é evidenciado em uma resenha escrita por Frege, publicada em 1874, aos 26 anos, sobre um manual de Aritmética em que ele critica a forma intuitiva e sem justificava através da qual são apresentadas as teorias aritméticas:

> Após algumas explicações parcialmente infelizes (...) das operações de cálculo e de seus símbolos, são apresentadas algumas proposições no segundo e terceiro capítulos sob o título de 'os teoremas fundamentais e as fórmulas de transformações mais essenciais". Estas proposições, que formam realmente a fundamentação de toda a Aritmética, são reunidas sem provas... A generalização dos conceitos, tão importante em Aritmética,... deixa muito a desejar... O resultado de todas estas deficiências é que ao estudante só resta memorizar as leis da Aritmética e ficar satisfeito com palavras que ele não entende. (FREGE apud ALCOFORADO, 2009, p.11).

Segundo Dummett (1991), Heijenoort (1970), Sluga (1999), Alcoforado (2009) e Santos (1983), o ponto de partida de Frege nos estudos sobre lógica foram questões propriamente matemáticas, sobretudo no que diz respeito ao rigor, de modo que a Matemática deixou sua marca nos seus escritos lógicos. Nesse sentido, a Lógica "se afigura indispensável para a concretização de sua atitude inicial que é a de clarificar ou elucidar as noções básicas da aritmética" e que posteriormente "se transformará no programa logicista" (ALCOFORADO, 2009, p.12). A ideia de Frege era eliminar as intuições, preencher lacunas, esclarecer os tópicos obscuros, explicitar pressupostos e suprimir o excesso de concisão com o objetivo de repensar a Aritmética (ALCOFORADO, 2009).

O primeiro livro escrito por Frege, *Begriffsschrift* (1879), é basicamente um livro de lógica. Na literatura, podem-se encontrar diferentes traduções para o título da obra, *Begriffsschrift, Ideografia*, *Conceitografia* e *Notação Conceitual*. Além das diferentes traduções, o próprio Frege utiliza o termo *begriffsschrift* em três sentidos diferentes: 1. Em referência à sua obra publicada em 1879; 2. Em referência à "sua lógica formal ou a sua linguagem simbólica"; e 3. Em referência a "um sistema simbólico e artificial, elementar, não determinado e dotado (pelo menos potencialmente) de uma estrutura e de uma descrição rigorosa" (ALCOFORADO, 2009, p.14). Neste trabalho, assim como faz Gomes (2009), para evitar confusões, optou-se por utilizar o termo conceitografia para fazer referência aos dois últimos sentidos, distinguindo-os de maneira explícita quando necessário, e *Begriffsschrift* para se referir à obra em que ele desenvolve essa linguagem.

Begriffsschrift apresenta a construção de uma conceitografia, uma linguagem escrita com símbolos especiais, que tem como objetivo a captação do *pensamento puro*, ou seja, "o pensamento livre de enfeites retóricos e que é *modelada através da aritmética*, isto é, a linguagem é construída a partir de símbolos específicos que são manipulados de acordo com regras definidas" (HEIJENOORT, 1970, p.1, tradução nossa). O tema filosófico trabalhado e retomado por Frege é a relação entre a Linguagem (de símbolos específicos) e a Lógica. O que Frege faz, portanto, é uma logicização da Aritmética, e não uma aritmetização da Lógica (ALCOFORADO, 2009).

A obra foi resultado de cinco anos de reflexão que tiveram como influência as ideias de Trendelenburg, Lotze, Leibniz e Kant, culminando na construção de uma lógica completamente nova (SLUGA, 1999). O livro possui aproximadamente oitenta páginas, nas quais Frege desenvolve de maneira sistemática a construção de seu sistema lógico. Segundo Sluga (1999), *Begriffsschrift* talvez seja a obra mais duradoura de Frege, já que seus trabalhos posteriores, como os *Fundamentos da Aritmética* e as *Leis Básicas da Aritmética*, são mais filosóficos e foram considerados mais controversos.

Apesar de ser uma obra que recebeu influências de trabalhos anteriores, Frege criou um sistema inovador utilizando poucas referências da lógica aristotélica tradicional e da álgebra de Boole, diferindo, conforme esclarecimento a seguir, radicalmente dessas formas lógicas anteriores (SLUGA, 1999). Segundo Santos (1983), muitos historiadores consideram Frege como fundador da moderna lógica matemática, já que as investigações mais importantes desse ramo foram realizadas por ele.

Assim como Sluga (1999) e Santos (1983), Heijenoort (1970) também reitera *Begriffsschrift* como possivelmente o trabalho mais importante que já foi escrito em lógica. O autor enumera as principais e mais fundamentais contribuições contidas nesta obra, afirmando que qualquer uma delas garantiria um lugar permanente numa biblioteca de Lógica. As contribuições são: o cálculo proposicional com função de verdade, a análise das proposições por meio de função e argumento ao invés de sujeito e predicado, a teoria da quantificação, um sistema lógico cujas derivações são pautadas apenas na forma das expressões e uma definição lógica da noção de sequência matemática (HEIJENOORT, 1970).

Bynum, citado por Gomes (2009), apresenta o pioneirismo de *Begriffsschrift* no aparecimento do cálculo de predicados de primeira ordem, na definição de ancestral de uma relação, na análise lógica de prova por indução matemática, na primeira vez em que o “método de tabelas de verdade” foi utilizado para definir os conectivos proposicionais e justificar axiomas, na utilização do condicional material em um sistema lógico, na distinção entre axiomas e regras de inferência, dentre outras.

Frege percebeu sua inovação também no processo de constituição de seu sistema, já que realiza um caminho contrário ao que foi feito por Leibniz e Boole. Ele parte de proposições para construir seu sistema e não de conceitos. Ou seja, Frege parte de pensamentos, ou proposições, para alcançar os conceitos, realizando uma investigação sobre os componentes do pensamento pela decomposição do próprio pensamento. Nesse sentido, ele acreditava, posteriormente que o nome *Begriffsschrift* indicava o caminho contrário àquele realmente realizado por ele.

> Não parto de conceitos para com eles construir pensamentos ou proposições; pelo contrário, obtenho os componentes de um pensamento pela decomposição (Zerfällung) do pensamento. Sob este aspecto, minha conceitografia difere das criações similares de Leibniz e seus sucessores – em que pese seu nome, o qual eu talvez não tenha escolhido muito adequadamente (FREGE apud ALCOFORADO, 2009, p.14).

A lógica de Frege foi além da lógica de Aristóteles em dois aspectos fundamentais: alterando os princípios silogísticos de Aristóteles, pois as características das inferências aritméticas não poderiam ser analisadas de maneira satisfatória utilizando silogismos; e na conclusão de que o conteúdo conceitual de uma afirmação é apresentado, em geral, de modo imperfeito quando utiliza-se a linguagem cotidiana (SLUGA, 1999). Este fato levou Frege a construir uma ferramenta mais apropriada a seus objetivos, uma linguagem que fosse suficiente para tratar do conteúdo conceitual e para expressar as verdades aritméticas, possuindo elementos emprestados da própria Matemática.

Trata-se, portanto, de uma linguagem artificial que se apoia em uma simbologia característica para representar sentenças e proposições, além de procedimentos para derivar essas proposições dentro do sistema. Segundo Leclerc (2008), a linguagem criada por Frege pretendia eliminar qualquer possibilidade de erro nos raciocínios desenvolvidos e pode ser vista como um correspondente parcial do sonho de Leibniz que pretendia criar uma linguagem que poderia ser utilizada em toda situação real, inclusive diante de qualquer desentendimento que ocorresse entre os homens:

> Essa linguagem ideal corresponde a uma realização parcial do sonho de Leibiniz de uma *lingua característica*, uma linguagem artificial tão bem feita que, para qualquer desacordo ou controvérsia, seria simplesmente possível dizer: "Cavaleiros, vamos sentar e calcular". (LECLERC, 2008, p.44, grifos do original).

A diferença entre os ideais de Frege e Leibniz para com suas linguagens artificiais está no fato de que Frege restringia a aplicabilidade de sua conceitografia para determinados fins científicos, já a de Leibniz não teria restrições (ALCOFORADO, 2009).

A conceitografia de Frege tem, portanto, como objetivo apresentar uma linguagem que auxiliasse no tratamento de verdades científicas. Dessa forma, o ideal positivista da possibilidade de existência, de determinação e justificação da verdade ocupa um lugar fundamental e, possivelmente, primordial nas justificações fregeanas. Frege, partia, portanto, do pressuposto de que a verdade exista e, além disso, de que esta possa ser alcançada e apreendida (SANTOS, 1996).

Segundo Frege (1882), para se apreender uma verdade científica, um cientista, muitas vezes, constrói uma conjectura tendo como base um número restrito de observações de um caso particular, que pode, inclusive, ser em número insuficiente. Gradativamente, uma proposição geral mais segura surgirá dessa conjectura a partir de sua conexão com outras verdades e da utilização de cadeias de inferências. Nesse processo, Frege aponta duas questões que surgem naturalmente: de que maneira é possível gradativamente alcançar as proposições derivadas? Por qual motivo essas cadeias de inferências garantem de fato a verdade da proposição derivada?

Frege acreditava que a primeira questão pode ser respondida de diferentes maneiras. Entretanto, a segunda questão deve possuir uma resposta mais definitiva e, conforme Frege, esta dependerá da natureza interna da proposição considerada. Esta está relacionada com o fato de Frege distinguir a gênese de uma proposição da sua demonstração (ALCOFORADO, 2009). A gênese seria a descoberta ou a invenção de tal proposição, enquanto que a demonstração é uma prova ou justificação, que não está ligada a gênese. Nos *Fundamentos*, Frege irá discutir de maneira mais filosófica essa questão, a qual será abordada neste trabalho no capítulo seguinte. Neste momento, cabe ressaltar que, segundo Alcoforado (2009, p.43), na visão de Frege a gênese e a demonstração cobrem “o que há de mais importante no que diz respeito a uma proposição”.

Para Frege, quando é considerada uma proposição e sua demonstração, deve-se ter em mente que essas verdades que requerem demonstração são dividas em dois grupos. O primeiro grupo engloba as proposições que podem ser demonstradas de maneira puramente lógica, já o segundo, consiste das proposições que devem ser justificadas pelos fatos da experiência. Para Frege, as verdades aritméticas, ou as proposições aritméticas, pertencem ao primeiro grupo, ou seja, podem ser demonstradas utilizando apenas a lógica pura. Para outras ciências, aquelas diretamente relacionadas com o mundo físico, as observações podem assegurar as verdades.

> Enquanto a ausência de fundamentação suficiente pode, nas ciências do mundo empírico, ser compensada no momento do confronto com a experiência, na matemática, cuja relação com a experiência, se existir, é remota e mediata, onde entra em consideração o grau de transparência ao espírito das conexões lógicas tanto quanto a matéria do saber, a totalidade das verdades deve, por assim dizer, repousar sobre si própria (SANTOS, 2008, p. 15).

Ele atenta para o fato de que, utilizando apenas cadeias de inferência lógica, se pode englobar grande parte da Aritmética a partir apenas de suas leis de pensamento, que são transcendentes aos conhecimentos particulares. A discussão quanto à prova e a natureza das verdades aritméticas também aparece de maneira mais filosófica nos *Fundamentos*, momento em que Frege tecerá duras críticas àqueles que conferem a essas verdades um caráter empírico e/ou psicológico.

Como mostra Alcoforado (2009), Frege entendia que, para construir demonstrações lógicas para as verdades aritméticas, era necessário que os conceitos primitivos que a englobam fossem definidos de maneira estritamente lógica. Ou seja, o conceito de número, de relação e de suceder em uma sequência, por exemplo, devem ser apresentados em termos lógicos a fim de evitar lacunas nos processos de raciocínio, impedindo que a intuição penetrasse em um campo que deveria ser regido apenas pelas leis da lógica.

A ideia de Frege era que a sua conceitografia permitiria, portanto, testar de maneira segura a validade de uma cadeia de inferência, além de possibilitar a percepção e a investigação das origens de pressuposições que surgissem despercebidas e pudessem ameaçar a consistência[44] do sistema. Dessa forma, Alcoforado (2009) argumenta que Frege pretendia que todo conceito e todo princípio fossem devidamente enunciados, de maneira que nada ficasse implícito ou tácito. Toda inferência deveria ser pautada em uma regra de dedução já estabelecida nos termos lógicos, de modo que essa regra vinculasse a proposição resultante às premissas anteriormente estabelecidas ou a outra sentença já derivada.

Frege tenta explicitar de maneira mais compreensível a relação de sua conceitografia com a linguagem natural através da comparação dessa relação com a relação entre o olho e o microscópio. O olho, assim como a linguagem natural, possui grande aplicabilidade e versatilidade de adaptação às diferentes circunstâncias, e por este motivo pode ser visto como superior ao microscópio. Entretanto, o olho, enquanto um instrumento óptico, possui muitas imperfeições que não são percebidos porque têm uma relação próxima com a vida mental. Como aponta Frege, diante de um objetivo que demande uma resolução acurada, o olho será inadequado e o microscópio consideravelmente mais apropriado. Nesse sentido, há situações em que o olho é mais adequado, enquanto que em outras o microscópio se sobressai. Para Frege, sua conceitografia funciona como o microscópio, enquanto que a linguagem comum como o olho. Ou seja, a conceitografia é criada por Frege como um instrumento para certos objetivos científicos e, segundo ele, "não deve ser descartada pelo fato de não servir para outras finalidades[45]" (FREGE, 1879, introdução, p.6, tradução nossa).

Frege estabelece para sua conceitografia o papel de preencher as lacunas existentes nas linguagens artificiais que haviam sido desenvolvidas até sua época,

[44] Frege não chega a utilizar nem a discutir o termo "consistência", entretanto ele se preocupava com o aparecimento de contradições que viessem a comprometer todo o sistema.
[45] "(…) and one must not condemn it because it is not suited to others." (FREGE, 1879, introdução, p.6).

vislumbrando ampliá-la para domínios nos quais ainda não haviam sido utilizadas linguagens desse tipo e aplicá-la na associação de domínios até então separados. Especificamente, Frege pretende que essa obra seja utilizada e ampliada nos domínios que exijam demonstrações rigorosas, como a Geometria, o Cálculo Diferencial e Integral, a Cinemática, a Mecânica e a Física.

Cabe ressaltar que Frege tinha consciência da importância de seu trabalho a respeito de este se caracterizar como um progresso para a Lógica e da grande mudança de perspectiva que este representava. Ele defende que as mudanças fundamentais, ou os "desvios na tradição"[46], que aparecem no desenvolvimento do seu trabalho se devem ao fato de que anteriormente a Lógica estava muito próxima da Gramática (FREGE, 1879, p. 7, tradução nossa).

Begriffsschritf também representou, e Frege pretendia que representasse, uma ferramenta de grande valor para o campo da Filosofia. Segundo Sluga (1999), a obra de Frege abordava um programa filosófico completo que pode ser indicado nos seguintes passos: 1. Tomam-se afirmações significativas que possuem um conteúdo conceitual objetivo; 2. O conteúdo é inadequadamente representado na linguagem comum e; 3. Esboça-se um sistema de notação em que o conteúdo conceitual de qualquer afirmação pode ser dado através de uma expressão clara e adequada.

A compreensão dos objetivos e das indagações de Frege ao escrever a obra, bem como a compreensão de suas contribuições para a Filosofia e a Matemática, possibilita uma leitura mais significativa de *Begriffsschrift*. Na seção seguinte, será apresentada de maneira sucinta a construção da linguagem artificial de Frege presente em *Begriffsschrift*, enfatizando as noções necessárias para compreensão do caminho percorrido por Frege até as *Leis Básicas* e para a derivação do paradoxo, objetivo deste trabalho.

2.2. A Lógica em *Begriffsschrift*

A conceitografia de Frege possui duas espécies de símbolos: aqueles que indicam números, funções ou proposições indeterminadas e aqueles que possuem significados particulares e determinados. No primeiro caso, Frege utiliza letras latinas

[46] "(…)these deviations from what is traditional." (FREGE, 1879, introdução, p.7).

para expressar essa indeterminação, tornando possível, por exemplo, expressar a validade universal, ou a generalidade de proposições do tipo:

$$(a + b). c = ac + bc.$$

Em sua obra, os sinais que expressam significados particulares e determinados são: │, ı, —, ≡ e ‿. Frege apresenta os significados desses últimos no decorrer da exposição do sistema, conforme a necessidade destes para a teoria. Estes serão apresentados a seguir.

Podemos perceber que a forma como é definido o significado das letras corresponde ao que atualmente denominamos variáveis. Entretanto, Frege opta por não utilizar o termo variável por passar a ideia de que é algo que varia no tempo, um conceito mais aplicável à Física do que à Lógica e à Aritmética[47]. Além disso, para Frege a ideia de que um número varia não fazia sentido.

Frege também faz uma ressalva acerca da indeterminação de uma letra em relação a que, num contexto dado, esta reterá o significado imposto por aquele contexto, não importando o quão indeterminado seja seu significado.

As letras, então, servem tanto para exprimir “variáveis” proposicionais como “variáveis” individuais. Esses casos são distinguidos através da utilização do sinal “—“, denominado por Frege como traço de conteúdo. Dessa forma, no caso de ser uma proposição, esta virá acompanhada do traço de conteúdo, que aparecerá à sua esquerda, enquanto que uma “variável” individual virá desacompanhada deste sinal. O traço de conteúdo indica que o símbolo, ou a combinação de símbolos, que vem após este é um conteúdo ajuizável[48], ou seja, indica uma mera combinação de ideias, de modo que não sabemos se essa combinação é verdadeira ou falsa.

No caso em que o conteúdo ajuizável seja reconhecido como verdadeiro, este é denominado por Frege como um juízo e é denotado pela união do traço de conteúdo

[47] Apesar disso, em alguns momentos, para melhor exprimir a ideia proposta, o termo variável poderá ser utilizado neste trabalho.

[48] Em Begriffsschrift, Frege utiliza a expressão alemã “beurtheilen Inhalt” que foi traduzida para o inglês como “assertible content” por Bynum (1972), “a content that can become a judgment” por Heijenoort (1970) e em português como “conteúdo afirmável” por Gomes (2009), “conteúdo judicável” por Duarte (2009) e “conteúdo ajuizável” por Santos (2008). A palavra “beurtheilen” pode ser traduzida como “avaliar”, o que indica que com a expressão “beurtheilen Inhalt”, Frege pretendia indicar um conteúdo que poderia ser avaliado, ou seja, um conteúdo que poderia se tornar um juízo. Neste trabalho optamos por concordar com Santos (2008) e utilizar a expressão “conteúdo ajuizável” para referir a tais conteúdos.

"—", com o traço de juízo "|". O resultado é o sinal "⊢" que se refere, portanto, ao conteúdo do juízo que aparece à sua direita.

Como exemplo Frege traz o seguinte: Seja A a afirmação "Pólos magnéticos contrários atraem-se". Então $\vdash A$ expressa que a afirmação A é um juízo, ou seja, é verdadeira. Por outro lado, $—A$ não expressa um juízo. Esta notação indica a ideia de atração mútua de polos magnéticos contrários, com o intuito de derivar consequências disso e testar os significados para o caso em que esse pensamento é correto. Ou seja, não podemos a partir dessa notação isolada inferir que se trata de um juízo. Em casos desse tipo, o uso do sinal —, geralmente vem acompanhado de expressões como: "a circunstância em que...", "a proposição que...", dentre outras.

Frege, ainda, faz a distinção entre conteúdos ajuizáveis e conteúdos não ajuizáveis. Essa distinção é necessária já que não podemos colocar qualquer coisa após os sinais — e ⊢, ou seja, não podemos atestar ou supor a veracidade de qualquer coisa. Por exemplo, em — a, em que a expressa a palavra 'vermelho', não podemos decidir se 'vermelho' é verdadeiro ou falso. Não há nada para se afirmar sobre a palavra 'vermelho'; 'vermelho' é um termo conceitual que faz parte de uma sentença, não é um conteúdo ajuizável. Por outro lado, se a expressar 'a camisa que estou usando agora é vermelha', então posso decidir sobre sua veracidade ou falsidade, trata-se de um conteúdo ajuizável[49] [50].

Nesse sentido, para Frege um conteúdo é ajuizável quando há a concatenação entre pensamento e valor de verdade ou, em outras palavras, entre sentido e referência. Essa definição de conteúdo ajuizável não aparece em *Begriffsschrift*, sendo apresentada por Frege posteriormente, em 1892, no artigo *Sobre Conceito e Objeto*[51]. Esta é aqui apresentada com o objetivo de elucidar a distinção feita por Frege entre um conteúdo ajuizável e um conteúdo não ajuizável.

---

[49] Frege traz como exemplo a palavra "casa" e o conteúdo ajuizável "existe uma casa".

[50] Essa denominação causou controvérsias quanto ao estabelecimento da diferença entre dizer que um juízo é afirmado e que um conteúdo ajuizável é afirmado. A distinção entre negação e afirmação também parecia se opor a ideia fregeana de que há apenas um ato de julgar, no caso, julgar como verdadeiro, ao invés dos dois atos que os livros tradicionais mencionavam (SLUGA, 1999).

[51] Referencia à tradução de Alcoforado (2009).

Do mesmo modo, asserta-se que nem todo conteúdo se torna um juízo simplesmente pela adição do sinal ⊢ à esquerda desse conteúdo. Deve-se tratar de um conteúdo ajuizável para existir a possibilidade de torná-lo um juízo.

Na simbologia fregeana, o traço horizontal, que faz parte do sinal ⊢, ou seja, o traço de conteúdo transforma os sinais que o seguem numa totalidade, enquanto que a afirmação expressa pelo traço vertical, o traço do juízo, se refere a essa totalidade. E o que quer que apareça após o traço de conteúdo deve ser algo que possa se tornar um juízo, reforçando as condições apresentadas acima.

Na construção de um conteúdo ajuizável, ou de uma proposição, Frege abandona a distinção aristotélica entre sujeito e predicado, para adotar uma nova perspectiva de análise de proposição, a saber, através de função e argumento. Na próxima seção, respeitando a ordem de apresentação em *Begriffsschrift*, serão apresentadas as justificativas fregeanas para a rejeição da distinção sujeito e predicado.

2.2.1. Justificação fregeana para o abandono da distinção entre "sujeito e predicado"

No começo de suas investigações Frege tentou utilizar a distinção entre sujeito e predicado como um modo de analisar proposições, assim como feito por Aristóteles[52]. Entretanto, ele logo percebeu que isso seria um obstáculo para seus propósitos, resultando inclusive em complicações desnecessárias. Dessa forma, a tradicional dupla "sujeito e predicado", advinda da lógica aristotélica, é alterada na maneira de Frege expressar um juízo por dois principais motivos: a linguagem aristotélica é limitada para representar proposições de generalidade múltipla (SLUGA, 1999) e a importância para a conceitografia de não fazer distinções entre proposições que tenham o mesmo conteúdo conceitual[53].

Como exemplo para o primeiro motivo, a lógica aristotélica não conseguia lidar bem com proposições do tipo:

[52] A distinção entre sujeito e predicado tem origens gramaticais e permite analisar uma proposição do tipo 'Sócrates é mortal', tomando 'Sócrates' como sujeito e 'é mortal' como predicado.
[53] Conteúdo conceitual é a parte do conteúdo que é igual em duas proposições.

“Todo filho é a criança de algum pai”[54].

Apesar de não ser comum em linguagem cotidiana, esse tipo de proposição comumente aparece na Aritmética e nas Ciências, de forma que a impossibilidade de tratá-la resultaria na impossibilidade de expressar as verdades aritméticas utilizando a Lógica e, consequentemente, da conclusão do objetivo fregeano de reduzir a aritmética à lógica expresso posteriormente nos *Fundamentos*.

Sobre o segundo motivo, a importância de não fazer distinção entre proposições que tenham o mesmo conteúdo conceitual, Frege entendia que o conteúdo conceitual do juízo (uma forma lógica) era o que sua lógica deveria simbolizar, já que este era o único fator que influenciava em possíveis consequências lógicas. Como exemplo, Frege apresenta as seguintes proposições:

- Os gregos derrotaram os persas na Platea.
- Os persas foram derrotados pelos gregos na Platea.

As proposições acima diferem pelo fato de as consequências deriváveis da primeira, quando combinadas com outros juízos, sempre seguem também da segunda, quando combinadas com os mesmos juízos, e reciprocamente. Há também casos em que isso não acontece, de modo que o conteúdo dos juízos sejam completamente diferentes. Desse modo, Frege distingue os dois modos que dois juízos podem diferir um do outro, sendo que essa diferenciação não se dá pela estrutura interna desses conteúdos, mas pelas consequências geradas por eles, o que torna a distinção sujeito/predicado irrelevante em sua lógica. Na linguagem comum, o lugar do sujeito em uma frase adquire o significado de um lugar de destaque, de modo que o sujeito venha a se tornar o elemento para o qual se deseja direcionar a atenção do ouvinte. Desse modo, podemos demarcar certa relação do juízo dado tornando mais fácil a compreensão do ouvinte acerca de todo o contexto. Com essa argumentação, Frege tentou mostrar que a distinção sujeito/predicado é feita com base em atitudes subjetivas e nas expectativas do falante e do ouvinte; não seriam características lógicas objetivas. Dessa forma, essas peculiaridades que aparecem nas interações entre dois interlocutores não aprecem na conceitografia, já que em um juízo Frege considera apenas aquilo que influencia suas possíveis consequências lógicas. De

[54] Exemplo retirado e traduzido de Sluga (1999).

qualquer modo, é importante ressaltar que tudo que é necessário para que uma inferência seja realizada de maneira correta é expresso por completo na conceitografia de modo que "nada é deixado para adivinhação"[55] (FREGE, 1879, § 3, p.12, tradução nossa).

Além disso, existem linguagens em que não existe a possibilidade de se distinguir entre sujeito e predicado, de modo que essa divisão simplesmente não faça sentido, como é o caso na Matemática.

Frege traz ainda o exemplo de uma linguagem em que proposições como

"Arquimedes pereceu na captura de Siracusa",

sejam expressas da seguinte maneira:

"A morte violenta de Arquimedes na captura de Siracusa é um fato".

Neste caso, é possível distinguir entre sujeito e predicado, mas o sujeito possui o conteúdo completo, de modo que o predicado apenas desempenha o papel de tornar o conteúdo um juízo. Todos os juízos nesta linguagem teriam o predicado "é um fato". Na visão de Frege, a conceitografia é uma linguagem semelhante a esta em que o sinal $\vdash$ é o predicado comum para todos os juízos.

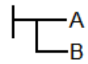
Frege substitui a forma *sujeito/predicado* por *função/argumento*, tomando como exemplo a linguagem simbólica da matemática "onde poderíamos causar violência se tentarmos distinguir sujeito e predicado" (FREGE, 1879, p.13, introdução tradução nossa). Deste modo, "a linguagem comum não faz justiça à igualdade de direitos lógicos que Frege pretende garantir às duas maneiras distintas de analisar o conteúdo proposicional, pecado que não se pode acusar o simbolismo artificial da aritmética" (SANTOS, 2008, p. 160).

Posteriormente, discutiremos de maneira mais detalhada a noção de função e argumento em Frege e as mudanças efetivas na forma de se representar e analisar uma proposição. Antes é necessário apresentar a condicional, a negação e o modo de inferência adotado por Frege para a construção de seu sistema, o que será feito na seção seguinte.

2.2.2. Condicional, negação e modos de inferência

[55] "(…)nothing is left to guesswork." (FREGE, 1879, §3, p. 12).

A condicional em Frege é denotada pelo sinal

,

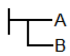
que indica o juízo no qual a terceira possibilidade dentre as quatro abaixo não acontece, mas uma das outras três acontece:

(1) A é afirmado e B é afirmado[56].

(2) A é afirmado e B é negado.

(3) A é negado e B é afirmado.

(4) A é negado e B é negado.

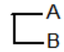
Quando  é negado, apenas a terceira possibilidade acontece.

Se, por exemplo, criamos um juízo, sem saber se A e B são afirmados ou negados, sendo A e B os seguintes:

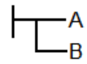
B = a lua está em quadratura com o sol.

A = a lua aparece como um semicírculo.

Então, neste caso, o juízo pode ser traduzido com o mesmo significado da condicional “se”. Ou seja, “Se B então A”. Entretanto, Frege pontua que a conexão causal inerente na palavra “se” não está expressa em sua simbologia, mesmo que apenas tal conexão possa prover o fundamento para um juízo semelhante ao que aparece no exemplo dado. A condicional estará mais perto da linguagem comum quando uma condicional entre A e B é afirmada sem saber se A e B são negados ou afirmados (SLUGA, 1999). A conexão causal seria algo geral, e até o momento da apresentação da condicional Frege não havia ainda introduzido o modo de expressar generalidade.

Sobre o símbolo em si, os traços horizontais que aparecem entre A e B e o traço vertical são denominados traços de conteúdo, como estipulado anteriormente. Também neste caso, A e B devem ser conteúdos ajuizáveis. O traço vertical é denominado por Frege como traço condicional. O traço de conteúdo total, que pode ser visto na figura 1 abaixo, indica que o conteúdo da expressão  é um conteúdo ajuizável. O traço do

[56] Os termos afirmado e negado são usados por Frege para percorrer todas as possibilidades existentes na relação condicional entre duas proposições. Frege utiliza, portanto, o raciocínio inerente no método de tabela verdade, ainda que não utilize este método.

juízo, por sua vez, também assinalado na figura, indica que temos um juízo, uma verdade. Cabe ressaltar, que a expressão  exprime um juízo, apenas se o item (3) não ocorrer.

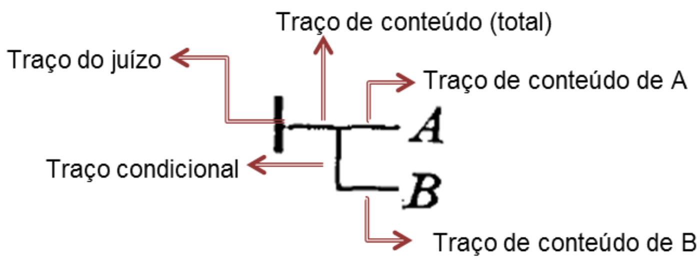
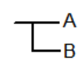
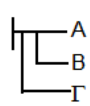


Figura 1 Esquema da condicional na conceitografia.

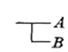
O traço condicional dentro da teoria fregeana é um símbolo relacional. A partir disso, podemos também dizer que A e B estão nessa relação se a possibilidade (3) não ocorrer.

Na lógica matemática contemporânea[57], a condicional é frequentemente representada pelo símbolo → [58], de forma que $B \rightarrow A$ equivaleria a  da simbologia fregeana, indicando, portanto, que dentre as quatro possibilidades, apenas a terceira não ocorre. Frege utiliza uma notação bidimensional que, segundo ele, possibilita a análise das relações lógicas de maneira mais eficaz. A sentença escrita da linguagem comum possuía uma aparência linear devido ao fato de que o som falado tem uma ordem temporal linear, de forma que sua conceitografia não poderia estar limitada às demandas da linguagem comum (SLUGA, 1999).

Na conceitografia há também a possibilidade de expressar relações condicionais mais complexas através da adição de um traço de conteúdo — e de um conteúdo ajuizável, por exemplo, Γ. Neste caso, poderíamos ter

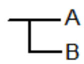
 [59]

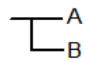
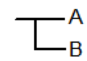
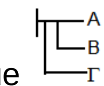
[57] Considerando as formulações de Ebbinghaus, Thomas e Flum (1996) e Mendelson (1997).

[58] Pode também ser representada por outros símbolos como “⊃” (DUARTE, 2009). Neste caso,  seria representado por $B \supset A$.

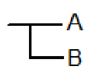
[59] $\Gamma \rightarrow (B \rightarrow A)$.

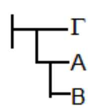
que indica o falso quando B e Γ são afirmados e A é negado, o que seria equivalente a não ocorrência do item (3). Podemos entender melhor esta situação se dividirmos a condicional em duas,

 e $—\Gamma$,

sendo que, para ser falsa, Γ deve ser afirmado e  negado. Daí, analisando , tínhamos que para este ser falso, B deveria ser afirmado e A negado. Juntando as duas condições, temos que Γ e B devem ser afirmados e A deve ser negado para que  seja falso.

Frege indica que se houvesse uma conexão causal no caso acima, poderíamos dizer que "A é condição necessária de Γ e B" ou "se Γ e B ocorrerem então A também ocorrerá".

Através da junção de  e $—\Gamma$ poderíamos também formar expressões do tipo

 [60]

na qual a análise seria análoga, levando em consideração o posicionamento dos traços condicionais.

Posteriormente, Frege apresenta a notação para a negação utilizando o símbolo I. Ao inserir este símbolo abaixo do traço de conteúdo indicamos que o conteúdo não ocorre. A expressão abaixo indica que A não ocorre, e que este é um juízo, uma proposição verdadeira:

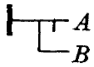
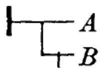
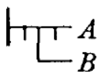
 .

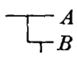
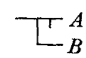
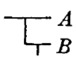
Do mesmo modo, em  [61] Frege indica a formação da ideia de que A não acontece, sem exprimir se essa ideia é verdadeira, ou seja, indica que  é um conteúdo ajuizável.

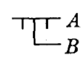
[60] $(B \rightarrow A) \rightarrow \Gamma$.

[61] Na lógica matemática contemporânea é frequentemente usado o símbolo $\neg$ para a negação (MENDELSON, 1997 , EBBINGHAUS; THOMAS, FLUM, 1939). Em outras formulações também pode ser encontrado o símbolo ~.

Utilizando os símbolos para condicional e negação outras relações podem ser formadas como, por exemplo:

-  [62] que indica que A e B excluem-se mutuamente. Ou seja, o caso em que B é afirmado e a negação de A é negada não acontece. Neste caso, podemos dizer também que a possibilidade (1) não acontece.
-  [63] que indica que A e B não são simultaneamente negados. Ou seja, Não acontece da negação de B ser afirmada e A ser negado. Podemos dizer também que a possibilidade (4) não acontece.
-  [64] representa a negação do primeiro item. Indica que A e B são afirmados. Podemos dizer que apenas a possibilidade (1) acontece.

O conteúdo  corresponde à disjunção, ao conectivo "ou"[65] (inclusivo) usado na lógica clássica contemporânea. Ou seja, este nos diz que nenhuma possibilidade a não ser A e B é imaginável. O "ou" exclusivo seria dado pela combinação de  e .

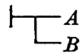
Semelhantemente, ao analisar o conteúdo de , este corresponde à conjunção, ou o conectivo "e", da lógica clássica contemporânea[66].

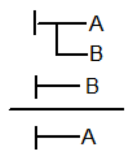
Diante disso, podemos perceber que Frege parte apenas da condicional e da negação para construir os demais conectivos do seu sistema lógico. Existem outros sistemas, como mostra Mendelson (1997), que utilizam outros conjuntos de conectivos funcionalmente completos[67]. É o caso, por exemplo, da utilização das duplas de conectivo "e" e negação ($\{\wedge, \neg\}$) e "ou" e negação ($\{\vee, \neg\}$). Frege também apresenta a possibilidade de representar a condicional a partir da conjunção e da negação, entretanto, o autor afirma que escolheu partir da condicional e da negação porque isto

[62] $B \rightarrow \neg A$
[63] $\neg B \rightarrow A$
[64] $\neg(B \rightarrow \neg A)$
[65] Em símbolos $\vee$.
[66] Em símbolos $\wedge$ ou ainda &.
[67] Mendelson (1997) também constrói o sistema lógico apresentado em seu livro a partir dos conectivos "negação" e "condicional", como Frege, mas ele mostra que é possível utilizar outros conjuntos de conectivos.

possibilita a representação de inferências de maneira mais simples. Segundo Heijenoort (1970), a estrutura da condicional de Frege, apesar de muito questionada na sua época, era puramente funcional no que diz respeito à funções de verdade e o levou à sua única regra de inferência.

Partindo então dos símbolos da conceitografia e da maneira como manipulá-los para construir conteúdos ajuizáveis e juízos, pode-se agora indicar os modos pelos quais Frege representa cadeias de inferência dentro de sua linguagem[68].

Sejam as proposições  e $\vdash B$. Como foi discutido anteriormente, a primeira proposição exclui a possibilidade (3), enquanto que a segunda exclui (2) e a (4), restando apenas a possibilidade (1), que indica que ambos A e B são afirmados. Daí, pode ser inferida a proposição $\vdash A$. Esse raciocínio, ou o método de inferência, é expresso por Frege da seguinte forma:



.

Apesar de Frege não o fazer, esta regra é denominada *modus ponens,* ou *modus ponendus ponens*, expressão do latim que significa modo de afirmar afirmando, (VILELA; DORTA, 2010) e pode ser apresentada como:

$$\frac{\begin{array}{c} B \to A \\ B \end{array}}{A}$$
[69].

Segundo o próprio Frege, Aristóteles mostrou que é possível enumerar poucos métodos de inferência. Frege opta por utilizar apenas o *modus ponens*[70].

Até o presente momento, foram apresentadas a simbologia Frege, a forma como construir proposições complexas e um método de inferência. A fim de melhor compreender os demais resultados apresentados por Frege, na próxima subseção

[68] Em *Begriffsschrift*, Frege apresenta o modo de representar uma cadeia de inferências entre a discussão da condicional e da negação. Aqui optamos por inverter essa ordem a fim de facilitar a exposição da obra.
[69]Ebbinghaus, Thomas e Flum (1996).
[70] Existem controvérsias a respeito da utilização ou não de apenas uma regra de inferência. Segundo Heijenoort (1970), além de *modus ponens*, Frege também utiliza uma regra de substituição não declarada por ele explicitamente.

serão apresentadas as noções de identidade de conteúdo, função, argumento e generalidade.

2.2.3. Identidade de conteúdo, função, argumento e generalidade

Frege introduz um novo símbolo à sua conceitografia, um símbolo para a identidade de conteúdo, ≡, que indica que dois sinais A e B possuem o mesmo conteúdo conceitual; esse fato seria expresso pelo juízo $\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- (A \equiv B)$. Quando esse juízo pode ser estabelecido entre dois sinais A e B, então podemos, em qualquer situação, trocar B por A, e reciprocamente.

A identidade de conteúdo não é expressa por Frege com auxílio da condicional e da negação porque estas são aplicadas a nomes e não a conteúdos. A identidade de conteúdo, portanto, estabelece uma relação diferente daquela observada até então na conceitografia, ou seja, os sinais às vezes significam o conteúdo, às vezes significam eles mesmos, estabelecendo uma relação entre estes e seus conteúdos enquanto que os demais símbolos estabelecem uma relação entre os conteúdos dos sinais.

Posteriormente, Frege discute sobre as funções na sua lógica, trazendo de antemão o seguinte exemplo:

"O hidrogênio é mais leve que o dióxido de carbono".

Suponhamos que essa afirmação possa ser expressa na linguagem fregeana. Podemos trocar o sinal "hidrogênio" pelo sinal "oxigênio" ou "nitrogênio", entretanto, a expressão também mudará de forma que um desses dois sinais entrará na relação no lugar que anteriormente pertencia ao sinal "hidrogênio". Frege discute que, se pudermos alterar uma expressão dessa maneira, então devemos estabelecer quais termos são estáveis, ou seja, aqueles que representam a totalidade da relação, e quais termos são substituíveis. O termo estável é denominado por Frege como função, enquanto que o termo substituível é denominado argumento. A distinção entre função e argumento não tem a ver com o conteúdo conceitual.

Tomando por base o exemplo dado, Frege assinala duas possibilidades para se determinar o que seria a função e o que seria o argumento. Na primeira possibilidade, a função seria "mais leve que o dióxido de carbono" e o argumento seria "hidrogênio". Já na segunda possibilidade, a função seria “mais pesado que hidrogênio” e o argumento seria “dióxido de carbono”.

Outro exemplo importante dado por Frege é construído a partir das seguintes expressões: “O dióxido de carbono é mais pesado que o hidrogênio” e “O dióxido de carbono é mais pesado que o oxigênio”. Podemos considerar duas funções iguais com argumentos diferentes, a saber, “hidrogênio” e “oxigênio”; ou podemos considerar funções diferentes com argumentos iguais, na qual o argumento seria “dióxido de carbono”.

Frege explica o significado da função e do argumento da seguinte forma:

> Se em uma expressão, cujo conteúdo não precisa ser capaz de se tornar um juízo, um sinal simples ou composto tem uma ou mais ocorrências e se levarmos em consideração aquele sinal como substituível por outra coisa (mas em todo lugar pela mesma coisa) em todas ou algumas de suas ocorrências, então chamamos a parte que mantém invariante na expressão de *função*, e a parte substituível de *argumento da função*. (FREGE, 1879, §9, p.22, grifos nossos)

Em outro exemplo dado por Frege, o autor considera a seguinte expressão:

“O número 20 pode ser representado como uma soma de quatro quadrados” e;

“Todo inteiro positivo pode ser representado como a soma de quatro quadrados”.

Frege explica que “ser representado como a soma de quatro quadrados” não pode ser uma função com argumentos “todo inteiro positivo” e “o número 20”, porque estes últimos não são conceitos de mesma categoria. Ou seja, o que é afirmado de “o número 20” não pode ser afirmado com o mesmo sentido para “todo inteiro positivo”. Esta última expressão não expressa uma ideia independente, apenas adquire um significado no contexto da sentença.

Nesse sentido, não é qualquer expressão que pode ser tomada como função ou argumento. Numa função as relações ocorrem entre os termos internos do conteúdo da sentença.

Frege também introduz funções de mais de um argumento. No exemplo dado anteriormente pelo autor, podemos tomar “o hidrogênio é mais leve que o dióxido de carbono” como uma função, a saber “é mais leve que”, dos argumentos “hidrogênio” e “dióxido de carbono”. O autor estabelece que uma função de um argumento se torna uma função de dois argumentos da seguinte maneira:

> Se, dado uma função, tomarmos um sinal que até então não era tido como substituível como um sinal substituível em alguma ou todas as suas ocorrências, então pela adoção dessa concepção obtermos uma função que tem um novo argumento em adição àquele que esta tinha anteriormente. (FREGE, 1879, §9, p. 23).

Na conceitografia, Frege representa uma função de um argumento através do sinal $\Phi(A)$, em que $\Phi()$ representa uma função indeterminada de argumento A. Essa mesma função, $\Phi(A)$ pode ser vista como uma função de argumento Φ, visto que a função também pode ser substituída por outras funções, representadas por sinais do tipo Ψ e X. Diante desta observação, Frege atenta para o fato de que apesar dele utilizar o conceito de função em análise como guia para o desenvolvimento de sua teoria, este conceito é mais flexível na conceitografia do que na própria análise.

De maneira semelhante, $\Psi(A, B)$ representa uma função indeterminada de argumentos A e B; as ocorrências dos argumentos nos parênteses indicam as ocorrências dos mesmos nas funções, de forma que $\Psi(B, A)$ difere de $\Psi(A, B)$. Funções de mais de dois argumentos são indicadas de maneira semelhante.

Todos os juízos da lógica aristotélica podem ser reescritos, ou analisados, utilizando a noção de função e argumento dentro da conceitografia. Alcoforado (2009) traz um exemplo de como é feita a formalização dos juízos em função e argumento por Frege. O juízo singular 'Pedro é mortal' seria formalizado na conceitografia como 'A função ξ *é mortal* é aplicada ao argumento *Pedro*'. No caso dos juízos universais, se o juízo 'Todo homem é mortal' for considerado, este equivalerá a 'A função de nível superior *todo* é aplicada à função *se* ξ *é homem, então* ξ *é mortal*' (ALCOFORADO, 2009, p.13, grifos do original).

Com base nisso, podemos notar como a opção de Frege por 'função e argumento' é mais extensiva do que 'sujeito e predicado', isso porque a função representa a relação entre dois objetos, com dois lugares para argumento, ou seja, a mesma função $\Psi(A, B)$, pode ser vista como função de A, ou de B ou de A e B, assim como $\Phi(A)$ pode ser vista como função de A ou Φ. Na lógica da predicação aristotélica, a distinção sujeito/predicado permite que reconheçamos apenas um lugar para o argumento (SLUGA, 1999).

Segundo Heijenoort (1970, p.3, tradução nossa), quando Frege estabelece que $\Phi(A)$ pode ser vista como função de argumento A ou uma função de argumento Φ, ele, de certa forma, antecipa o *paradoxo de Russell* que será gerado apenas nas *Leis Básicas*, já que este é “precisamente o ponto que Russell utiliza para suportar o peso de seu paradoxo”[71].

Dado juízo

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\, \Phi(\mathrm{A})$$

este representa “A tem a propriedade Φ”. E o juízo

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\, \Psi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

pode ser lido como: “B está na relação Ψ com A”.

Frege introduz então a noção de generalidade com o auxílio do sinal $\smile$ que ele denomina como concavidade. Segundo Frege, se substituirmos o argumento, em uma função, por uma letra gótica e se no traço de conteúdo de um juízo introduzirmos a concavidade com essa letra gótica acima dela, então o juízo indica que, qualquer argumento que tomemos para a função, esta será um fato. Em símbolos,

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$$ [72].

A concavidade com a letra gótica é necessária porque delimita o escopo da generalidade[73]; tudo aquilo que a letra cobre. A generalidade da letra gótica se aplica apenas ao conteúdo que a segue. Por exemplo,

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad\;\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, X(\mathfrak{a}) \end{array}$$ [74],

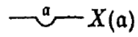
indica que o caso em que $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, X(\mathfrak{a})$ é afirmada e A é negada não ocorre. O escopo da letra gótica alcança apenas a expressão $X(\mathfrak{a})$ que a segue, de forma que A não é alcançada por esta. Entretanto, este fato não nega que o caso em que $\mathrm{X}(\Delta)$ é afirmado e A é negado ocorre. Ou seja, $\mathrm{X}(\Delta)$ pode ser afirmado e $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, X(\mathfrak{a})$ ainda pode ser

[71] “This is precisely the point that Russell will seize upon to make it bear the brunt of his paradox”. (HEIJENOORT, 1970, p. 3).

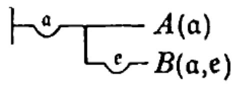
[72] $\forall a\ \Phi(a)$.

[73] Segundo Alcoforado (2009, p.13), a descoberta de que as variáveis têm um escopo ou que “a generalidade expressa pela variável pode ser delimitada a uma parte da sentença” é a mais importante contribuição lógica de Frege.

[74] $(\forall a\ \mathrm{X}(a)) \to A$.

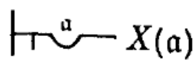
negado. Nesse sentido,  não pode ser verdadeiro para todo argumento, podendo ser para algum.

As letras góticas ainda podem ter vários escopos, como em

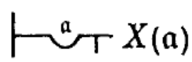
[75],

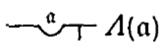
em que a cobre tanto a função A como a função B, e e cobre apenas a função B.

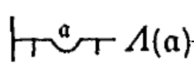
Com o auxilio da letra gótica expressando a generalidade podemos construir no sistema de Frege tanto afirmações do tipo “todo...é...”, “para todo...” e “existe...”, por exemplo. A expressão abaixo,

[76]

indica que é possível encontrar um argumento para o qual a função seria negada. Neste caso, utilizando a linguagem comum, a proposição ficaria “existe algum objeto que não tem a propriedade X”. Por outro lado, a expressão

[77]

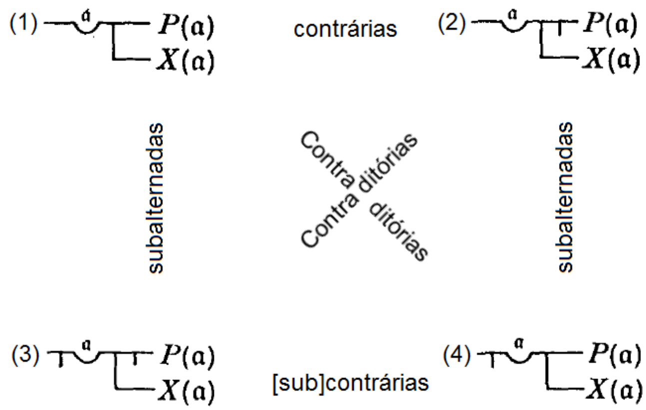
indica que qualquer argumento que seja tomado $X(\mathfrak{a})$ deve ser negado. Ou seja, “Não existe algo que satisfaça a propriedade X”. O conteúdo ajuizável que aparece neste juízo, , pode ser negado para gerar a expressão

[78]

que em palavras pode ser lida como “Existe Λ”.

A partir disso, Frege constrói as quatro proposições categóricas propostas por Aristóteles com os símbolos de sua linguagem para construir o quadro de oposições lógicas:

[75] $\forall a\ (\forall e\ B(a,e) \rightarrow A(a))$.
[76] $\exists a\ (\neg\, \mathrm{X}(a))$.
[77] $\nexists a\ (\mathrm{X}(a))$.
[78] $\exists a\ (\Lambda(a))$.



A formalização (1)[79] corresponde a "Todo X é P"; (2)[80] corresponde a "Nenhum X é P" ou "Todo X não é P"; (3)[81] corresponde a "Algum X é P" e; (4)[82] corresponde a "Algum X não é P". Segundo Sluga (1999, p.82, tradução nossa), a teoria fregeana vai além da teoria aristotélica já que se trata de "uma teoria que incorpora a teoria tradicional do silogismo, mas que é mais extensiva, mais rigorosa e mais útil".

O que foi exposto até o presente momento corresponde à primeira parte do livro *Begriffsschrift*, na qual Frege apresenta seus sinais e as regras de manipulação, além de algumas definições. Na segunda parte, Frege apresenta a representação e a derivação de alguns juízos do pensamento puro, exibindo o sistema axiomático de sua lógica proposicional e da lógica de predicados. Ele também apresenta a noção de seguir em uma série. Dessa parte exporemos apenas como exemplo os axiomas da lógica proposicional e a noção de seguir em uma série que é relevante para o desenvolvimento deste trabalho sobre o paradoxo.

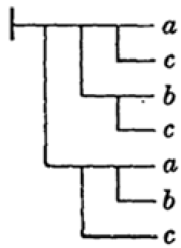
O sistema lógico proposicional desenvolvido por Frege possui seis axiomas que são apresentados na medida em que são necessários para realizar alguma inferência. O primeiro axioma apresentado por Frege é o seguinte:

[79] $\forall a(\mathrm{X}(a) \rightarrow \mathrm{P}(a))$.
[80] $\forall a(\mathrm{X}(a) \rightarrow \neg\mathrm{P}(a))$.
[81] $\neg(\forall a(\mathrm{X}(a) \rightarrow \neg\mathrm{P}(a)))$.
[82] $\neg(\forall a(\mathrm{X}(a) \rightarrow \mathrm{P}(a)))$.

(1)  [83]

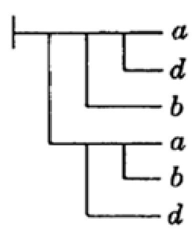
Caso em que a negado, b afirmado e a afirmado é excluído. Este axioma é evidente, segundo Frege, já que a não pode ser afirmado e negado ao mesmo tempo, pelo princípio da não contradição. Esse axioma equivale, utilizando a linguagem comum, à expressão: “Se a proposição a vale, então esta também vale no caso de uma proposição arbitrária b valer”. Na simbologia atual, $a \to (b \to a)$.

Como segundo, axioma temos:

(2) 

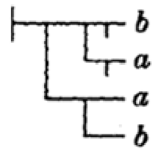
Este axioma corresponde ao caso em que a negado b afirmado e c afirmado é excluído. No caso de haver uma conexão casual entre as proposições, o axioma também pode ser expresso como: “Se a proposição a é uma consequência necessária de duas proposições b e c, e se uma dessas, b, é uma consequência necessária de c, então a proposição a é uma consequência necessária desta última, c, apenas”. Na simbologia atual, $(c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$.

O terceiro axioma apresentado por Frege é

(8) 

que corresponde ao caso em que a negado e b e d afirmados não ocorre. Podemos expressar este axioma utilizando a linguagem comum da seguinte maneira: “Se duas condições tem uma proposição como consequência, então a ordem é imaterial”. Na simbologia atual, $(d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$.

[83] Os números entre parênteses que aparecerão à esquerda dos axiomas se referem a numeração dada pelo próprio Frege, na ordem em que ocorrem em sua teoria, dando uma ideia de como eles aparecem espaçados, conforme a necessidade de Frege de inseri-los para inferir novas proposições, ou teoremas.

(28) 

é o quarto axioma apresentado por Frege e corresponde ao caso em que  negado e  afirmado não ocorre. De fato, a negação de  exclui . Se, tomarmos como exemplo as proposições

a: “O homem M está vivo” e,

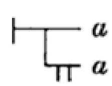
b: “M respira”,

Então o axioma produz: “Se da circunstância de que M está vivo podemos inferir que ele respira, então da circunstância de que ele não respira sua morte pode ser inferida”. Frege pontua que é este axioma que justifica a transição do modo de inferência conhecido como *modus ponens*, para *modus tollens*, ou *modus tollendo ponens*, que significa modo de afirmar negando. Este modo de inferência pode ser construído como

$$\begin{array}{c} B \to A \\ \neg A \\ \hline \neg B \end{array}.$$

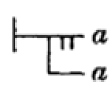
Na simbologia atual o axioma (28) é escrito como: $(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$.

O penúltimo axioma apresentado por Frege é o seguinte:

(31) 

Que indica que a negação da negação é uma afirmação.

Finalmente, o último axioma do cálculo proposicional apresentado por Frege é

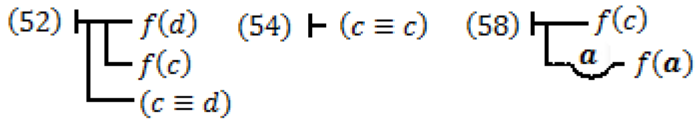
(41)  [84]

Que indica que a afirmação de a nega a negação de a.

Frege pontua que poderia ter escolhido outros axiomas, entretanto, para a composição de seu sistema ele acreditava que essa escolha era a mais sintética em número/quantidade. O sistema criado por Frege com os axiomas acima se constitui como o primeiro sistema axiomático para a lógica proposicional (LUKASIEWICZ, 1963).

[84] Frege indica que os axiomas (31) e (41) podem ser reduzidos à uma única fórmula $\vdash$ (┬┬ $a \equiv a$).

A lógica de predicados[85] de primeira ordem em Frege possui como axiomas os seis axiomas da lógica proposicional e mais os três axiomas seguintes:



O axioma (52) pode ser escrito na simbologia atual como $(c = d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d))$. Este axioma nos diz que o caso em que o conteúdo de c é idêntico ao conteúdo d e em que $f(c)$ é afirmado e $f(d)$ é negado não acontece. Esta indica, portanto, que se $c \equiv d$, então é possível colocar d no lugar de c em qualquer ocorrência deste último. Além disso, em $f(c)$ a letra c pode ser presente em lugares que não são lugares de argumentos, de forma que c ainda possa estar contido em $f(d)$.

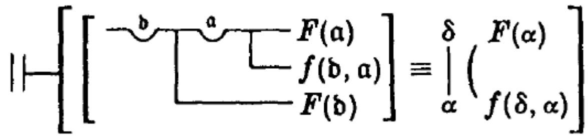
O axioma (54) indica que o conteúdo de c é idêntico ao conteúdo de c, e corresponde a fórmula $c = c$. Já o axioma (58), que pode ser escrito como $\forall a\, f(a) \rightarrow f(c)$, indica que se para qualquer a, $f(a)$ é afirmado, então $f(c)$ não pode ser negado.

Com a adição desses axiomas, forma-se um sistema axiomático mais amplo. Segundo Kneale, citado por Gomes (2009), a união dos seis axiomas proposicionais mais o axioma (58) forma um sistema de primeira ordem consistente e fracamente completo[86].

Por fim, Frege apresenta o que podemos entender como uma lógica de predicados de segunda ordem, momento em que também apresenta a definição de seguir em uma série. A definição da noção de seguir em uma série é dependente da definição de propriedade hereditária já que a afirmação “um objeto y segue um objeto x em uma série f” é equivalente a “y possui todas as propriedades hereditárias que os objetos que seguem imediatamente x na série f possuem”.

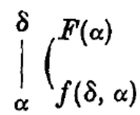
A propriedade hereditária pode ser definida da seguinte maneira: Se da proposição $\mathfrak{d}$ que tem a propriedade F pode ser inferido, qualquer que seja $\mathfrak{d}$, que todo resultado de uma aplicação do procedimento f em $\mathfrak{d}$ tem a propriedade F” então, dizemos que “A propriedade F é hereditária na série f”. Na simbologia fregeana esse resultado é expresso por:

[85] Aqui os predicados são inseridos como funções.
[86] Um sistema é fracamente completo se toda fórmula que é logicamente verdadeira no sistema é um teorema do sistema.

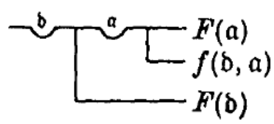


Frege atenta para o fato de que nesta definição aparecem símbolos até então não definidos. Originalmente essa expressão não pode ser considerada um juízo, mas, uma vez que seus sinais sejam especificados e se tornem fixos, esta se transformará num juízo analítico. Esse caráter dual dessa fórmula é indicado pelo duplo traço de juízo.

As letras gregas que ocorrem neste caso não representam um conteúdo independente, como era o caso das letras góticas e latinas. O propósito das letras gregas é permitir a reconstrução de maneira não ambígua da seguinte forma abreviada

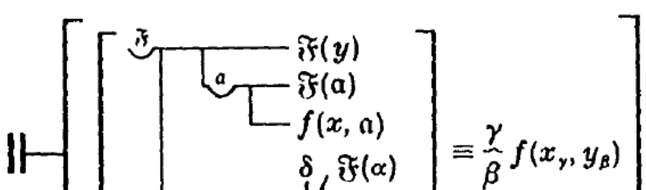


que correspondente à completa



.

Se da proposição de que todo resultado de uma aplicação do procedimento f a x tem a propriedade F e da proposição de que a propriedade F é hereditária na sequência f, pode ser inferido, para qualquer que seja F, que y tem a propriedade F, então, Frege afirma: “y segue x na sequência f” ou “x procede y na sequência f”. Na simbologia fregeana esta definição é expressa por:



.

Frege ainda apresenta algumas definições e deriva alguns teoremas usando cadeias de inferência. Exemplos de como são realizadas as cadeias de inferências são dados em detalhes no capítulo 3 em que é discutida as *Leis Básicas* e omitidas aqui para evitar repetição. Além disso, no que diz respeito ao foco deste trabalho, o que foi apresentado até aqui sobre a obra *Begriffsschrift* constitui-se como as ferramentas necessárias para compreender o caminho percorrido por Frege até as *Leis Básicas*.

2.3. A reação ao *Begriffsschrift* e as respostas de Frege

Englobando as indagações fregeanas e o resultado final de seu livro, pode-se fazer um panorama daquilo que Frege pretendia e acreditava ter alcançado com *Begriffsschrift*. Em primeiro lugar, conforme apresenta Sluga (1999), Frege tinha a percepção de ter criado uma linguagem simbólica que representava o pensamento puro e permitia que o conteúdo conceitual de um juízo fosse expresso com precisão. Em segundo lugar, Frege acreditava ter criado uma ilustração de como as deduções poderiam ser realizadas dentro dessa linguagem e como um sistema axiomático poderia ser construído para a Lógica Proposicional e a Lógica de Predicados. Além disso, Frege apresentou uma definição da noção matemática de um objeto seguir outro numa sequência e a prova do teorema fundamental que envolve essa noção, estabelecendo a utilidade da Lógica para a análise da aritmética. E, por fim, ele acreditava ter dado o primeiro passo a caminho do estabelecimento de um caráter a *priori* das leis básicas da Aritmética, isto é, garantir a possibilidade de demonstrar as verdades aritméticas partindo de leis gerais que não demandam demonstração.

Apesar de todas as realizações que Frege pretendia cumprir - a maioria das quais, de fato, cumpriu - seu trabalho não recebeu a atenção que ele esperava. Na verdade, a resposta a seu livro foi silenciosa, recebendo poucas respostas positivas e algumas críticas (SLUGA, 1999). Os estudiosos contemporâneos de Frege não vislumbraram contribuições significativas para a [Filosofia da] Ciência, de forma que a obra passou quase despercebida. Segundo Alcoforado (2009), alguns dos motivos para essa reação diante da obra de Frege pode ter sido a complexidade de seu sistema notacional, a originalidade de seu tema, a apresentação inusitada, a inaplicabilidade imediata de sua obra e a sua limitação quanto à aplicação ou utilidade como descoberta científica.

Entre as críticas que recebeu no campo da lógica, têm-se como exemplo, as de Ernst Schröder e outros estudiosos da Álgebra Booleana, que não entenderam por qual motivo Frege “julgou” necessário refazer um trabalho que acreditavam estar terminado. Segundo Sluga (1999), a revisão detalhada e dura de Schröder apresentava certa dose de vaidade ferida, já que Frege não citou nem seus trabalhos nem aquele desenvolvido por Boole. De fato, Frege rejeitava algumas noções presentes na lógica de Boole, o que foi percebido por Schröder.

Diante disso, Frege deixou de lado a continuação do *Begriffsschrift* e passou a responder às críticas a sua obra, esclarecendo e elucidando as ideias ali expostas. Ele escreveu dois artigos, *Sobre a justificação científica de uma conceitografia* (1882)[87] e *Sobre a finalidade da Conceitografia* (1882-1883)[88], que tinham essa finalidade. Somente após essa fase, caracterizada por Alcofrado como “defensiva”, é que Frege escreve os *Fundamentos da Aritmética*.

Em *Sobre a justificação científica de uma conceitografia,* Frege argumenta a favor da utilização de uma linguagem simbólica para fins científicos ao invés da linguagem verbal. Segundo o autor, esta última possui muitos defeitos por estar carregada de maleabilidade e mutabilidade que, se por um lado permite o desenvolvimento e abrangência da linguagem, por outro torna sua aplicação, às vezes, imprecisa. Dessa forma, a linguagem simbólica é a ferramenta necessária para precisar a expressão de conceitos.

> A razão dos defeitos salientados está em uma certa maleabilidade e mutabilidade da linguagem, que é por outro lado condição de sua capacidade de desenvolvimento e de sua aplicabilidade variada. Sob este aspecto, a linguagem pode comparar-se à mão, que, apesar de sua capacidade de se acomodar às mais diferentes tarefas, não nos basta. Criamo-nos mãos artificiais, instrumentos para fins particulares que operam de maneira mais precisa do que a mão seria capaz. E o que torna possível essa precisão? Justamente a rigidez, a imutabilidade das partes, cuja a falta torna a mão tão diversamente hábil. Assim, também a linguagem verbal não basta. Carecemos de um conjunto de sinais do qual se expulse toda a ambiguidade, e cuja forma rigorosamente lógica não deixe escapar o conteúdo. (FREGE, 1882, p. 193).

A linguagem verbal não satisfaz a característica de ser unívoca, inclusive, porque muitas vezes uma mesma palavra é utilizada para expressar um conceito e um indivíduo. Sobre isso, Frege (1882, p. 190) cita como exemplo a utilização da palavra

[87] Aqui foi utilizada a tradução de Santos (1989).
[88] Aqui foi utilizada a tradução de Alcoforado (2009).

cavalo em dois contextos distintos: “Isto é um cavalo” e “O cavalo é um animal herbívoro”. No primeiro caso, a palavra cavalo é usada de maneira a remeter a um conceito enquanto que no segundo a um indivíduo ou uma espécie[89]. Além disso, o autor atenta para o fato que mesmo Euclides na construção de seus *Elementos*, devido à estruturação da linguagem verbal, não deixa explícita algumas premissas, ou seja, “as relações lógicas são quase sempre apenas indicadas pela linguagem, adivinhadas e não propriamente expressas” (FREGE, 1882, p. 191).

Frege defende que uma conceitografia deve dispor de expressões simples para representar as relações lógicas e que estas possam ser dominadas de maneira segura e sem dificuldades, de forma que elas possam ser “apropriadas a se associarem a um conteúdo da maneira mais íntima”. Essas características podem ser construídas através das inúmeras possibilidades de representação bidimensional ao se utilizar a escrita.

Frege ainda ataca o pensamento de que uma conceitografia de nada contribuiria para o progresso científico, já que a construção deste pressupõe o acabamento da Ciência. Segundo o autor, “a mesma dificuldade aparente evidencia-se já no que concerne à linguagem” isso porque esta “deve ter tornado possível o desenvolvimento da razão; mas como pôde o homem sem razão criar a linguagem”? (FREGE, 1882, p. 193).

Frege (1882, p. 193) termina sua argumentação a favor de uma conceitografia, ou de uma linguagem simbólica. Ele afirma que sua tentativa na obra *Begriffsschrift* foi de “completar a linguagem de fórmulas da matemática com sinais para as relações lógicas, de modo a resultar para o domínio da Matemática uma conceitografia da espécie” a qual ele apresentou como desejável, afirmando ainda que as representações intuitivas das formas de pensamento possuem uma significação que

[89] Existem discussões acerca dos modos como Frege denomina a palavra cavalo nos dois exemplos dados acima. Segundo Louzado (1998), o filósofo Benno Kerry (1858-1889) teceu críticas a Frege por considerar que não seria possível realizar as distinções feitas acima. Para Kerry, o cavalo é um conceito e não pode ser considerado um objeto. Mas para Frege, o que quer que possa ser colocado na posição lógica de um objeto é um objeto. Além disso, no caso de “O cavalo é um animal herbívoro” a expressão “um animal herbívoro” é um nome de um conceito, de modo que cavalo deve ser o objeto que cai sob este conceito. Do mesmo modo, em “Isto é um cavalo” a expressão “um cavalo” é o nome de um conceito e ocupa posição predicativa. Ver Louzado (1998).

extrapola o campo da matemática, podendo ser aplicada a outras áreas do conhecimento.

Após esse período em que Frege se ocupou em rebater as críticas acerca de sua conceitografia, o autor se dedicou ao seu segundo livro, os *Fundamentos da Aritmética*. No próximo capítulo, exporemos algumas das discussões presentes nos *Fundamentos* e que julgamos necessárias para compreender o caminho percorrido por Frege até as *Leis Básicas*.

3 A FILOSOFIA FREGEANA PARA A BUSCA DA CERTEZA MATEMÁTICA: a obra *Os Fundamentos da Aritmética*

Nos *Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*, Frege propõe definir ou reconhecer como indefinível o conceito de número cardinal, apresentando discussões acerca da natureza do conceito de número e das verdades aritméticas. Apesar do cunho matemático, Frege se distanciou nesta obra da linguagem construída por ele em *Begriffsschrift*. Nesse sentido, o livro possui em grande parte a apresentação de conceitos e explicações em linguagem comum e “sem dúvida é a mais lida, a mais acessível e a mais filosófica de sua obra” (ALCOFORADO, 2009, p.19).

Os *Fundamentos da Aritmética* é dividido em cinco capítulos. Na introdução, o autor discute a importância de buscar pelos fundamentos e compreender que pouco se sabia até então sobre a constituição dos objetos e verdades mais básicas da Aritmética, havendo grande discordância entre matemáticos e filósofos. Nos dois primeiros capítulos, Frege discute as posições de alguns autores acerca da natureza das proposições aritméticas e do conceito de número, apresentando duras críticas às concepções formalistas puras, empiristas e psicologistas. No capítulo três, o autor discute também, a partir da opinião de outros autores, sobre a unidade e o um. No capítulo quatro, Frege apresenta sua construção do conceito de número a partir de elementos lógicos. Por fim, no capítulo cinco, o autor apresenta uma conclusão das discussões feitas no decorrer do livro.

Neste capítulo, serão abordadas as discussões consideradas relevantes para o desenvolvimento e para a compreensão das indagações e do caminho percorrido por Frege até as *Leis Básicas*, obra em que se encontra o paradoxo. Primeiramente serão apresentados de maneira breve os três primeiros capítulos, que dizem respeito às indagações de Frege sobre a fundamentação da Aritmética e as discussões de outros filósofos, privilegiando, então, o capítulo quatro no qual o autor apresenta aspectos de sua construção lógica do conceito de número.

3.1. Apresentação dos *Fundamentos da Aritmética*: indagações e justificações acerca da fundamentação da aritmética

Frege inicia os *Fundamentos da Aritmética* com o questionamento sobre o que seria o número um, ressaltando a necessidade de existir um consenso nas respostas dadas a essa questão e, antes de tudo, que essa questão possa ser respondida sem maiores dificuldades. Para o autor, além de os livros elementares não darem conta de responder a essa questão, as poucas discussões que existem a esse respeito não são contempladas como deveriam, já que as pessoas acreditam que sabem tudo sobre um conceito tão elementar quanto o conceito de número.

Frege defende que na época não havia um acordo entre os matemáticos e filósofos sobre a caracterização do número, de forma que muitas das discussões que existiam, resultavam em formulações contraditórias. Nesse sentido, ele indaga: “não é vergonhoso para a Ciência estar tão pouco esclarecida acerca de seu objeto mais próximo, e aparentemente tão simples?” (FREGE, 1884, introdução, p.200). Para o autor, apesar de o número ser uma das noções mais simples em Aritmética, este possui uma estrutura mais fina e deve ser apropriadamente investigado (FREGE, 1884).

A ausência de uma caracterização precisa para o número colaborava com o florescimento de diferentes justificativas para as afirmações que o envolviam e que estavam pautadas em diferentes aspectos do conhecimento, como a psicologia e o empirismo. Como resultado, tomando diferentes objetos e/ou diferentes situações a base de justificação mudava o que não seria apropriado para uma ciência como a Matemática:

> Não se devem considerar diferentes espécies de leis de pensamento conforme os objetos em questão. A diferença consiste apenas na maior ou menor pureza e independência com relação as influências psicológicas e adjutórios exteriores, como a linguagem, os numerais, etc., e ainda, em alguma medida, na finura da estrutura de conceitos; mas justamente neste ponto a matemática não se poderia deixar ultrapassar por nenhuma ciência, nem mesmo pela filosofia. (FREGE, 1884, introdução, p.200)

Frege defende a independência dos objetos e verdades matemáticas em relação às condições mentais e corporais humanas e aos elementos da natureza, sendo que sua convicção é que tanto o número quanto os demais objetos e noções fundamentais da Aritmética poderiam ser definidos de maneira exata utilizando a lógica. Nesta perspectiva, as proposições ou os teoremas seriam deduzidos a partir das regras de inferência da própria lógica. Aproximar a Aritmética da Lógica seria ao mesmo tempo separá-la de vez de aspectos psicológicos e empíricos, que para o autor nada tem a ver com a Matemática, já que “a instabilidade e a indeterminação” dessas disposições psicológicas “opõem-se firmemente à determinação e estabilidade dos objetos e conceitos matemáticos” (FREGE, 1884, introdução p.201).

A tentativa de reduzir a Aritmética à Lógica, conhecida posteriormente como o programa logicista, não estava presente em *Begriffsschrift*, aparecendo pela primeira vez nos *Fundamentos* e se concretizando em 1893 nas *Leis Básica da Aritmética* (ALCOFORADO, 2009). Cabe ressaltar, como faz Alcoforado (2009), que o programa logicista em Frege se restringia à Aritmética e à Análise, enquanto que, por exemplo, em Russell, o logicismo pretendia abranger a Matemática como um todo.

Nos *Fundamentos,* também aparece a preocupação com a possibilidade de demonstrar as verdades aritméticas sem que haja lacunas no percurso demonstrativo. A demonstrabilidade das proposições seria garantida através de uma compreensão refinada dos conceitos envolvidos, sobretudo os mais simples, que podem vir a servir de base para generalizações e para o entendimento dos conceitos mais complexos (FREGE, 1884).

O pensamento de Frege sobre a demonstrabilidade é, na visão do próprio autor, diferente do pensamento dos matemáticos, já que estes se satisfazem com a aplicabilidade e a ausência de contradições nas demonstrações e definições, dando pouca atenção aos fundamentos lógicos. Entretanto, ele discute que, neste caso, a legitimidade da argumentação se pauta em uma experiência puramente empírica o que pode posteriormente resultar no descobrimento de contradições que comprometam toda a teoria até então construída. Nesse sentido não basta, em Matemática, ter uma “convicção simplesmente moral, apoiada sobre muitas aplicações fecundas”, a demonstração deve ser exigida para o maior número de afirmações possíveis (FREGE, 1884, §1, p. 205). A demonstração surge não apenas com o intuito de atestar a verdade de uma afirmação, para Frege, ela também desempenha o papel de explicitar as relações de dependência entre as proposições ou entre as verdades de um sistema.

Frege acentua que a necessidade de manter rigor em Matemática surge com Euclides, que realizou um trabalho cuidadoso com respeito à Geometria e, ainda assim, acabaram surgindo investigações sobre o axioma das paralelas (FREGE, 1884). Desde então e até o período de Frege, o autor afirma que essa necessidade tem crescido com o objetivo de traçar os limites da verdade. É natural que após utilizar as verdades matemáticas por tanto tempo, sem que apareçam contradições, surja a questão que indaga sobre aquilo que a torna indefectível:

> Depois de nos termos convencido, por meio de frustradas tentativas de movê-lo, de que um rochedo é inabalável, podemos perguntar por aquilo que o sustenta assim tão firmemente. Quanto mais prosseguirmos nessa investigação menor é o número de leis primitivas a que tudo se reduz; e esta simplificação já é, em si mesma, um fim digno de esforços. (FREGE, 1884, §2, p.206)

Na primeira parte dos *Fundamentos da Aritmética*, Frege aborda as discussões realizadas por muitos matemáticos e filósofos sobre o conceito de número, contrapondo-as com a sua própria concepção. É através da exposição dessas discussões, assinalando suas inconsistências, que ele tenta despertar a necessidade de uma investigação mais precisa sobre tal conceito. Nesta parte, Frege utiliza argumentos negativos, críticas e ironias para discutir o ponto de vista de outros estudiosos dos quais o autor discordava. Esta pode ser vista, segundo Vilela (1996), como uma antecipação do sistema construído pelo autor, já que no decorrer das discussões ele apresenta suas ideias para usar como contraposição às de seus contemporâneos.

Para investigar o conceito de número, Frege se atém aos três princípios: 1. Deve-se separar o psicológico do lógico e o subjetivo do objetivo; 2. Deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, não isoladamente; 3. Não se deve perder de vista a distinção entre conceito e objeto.

Sobre o primeiro princípio, Frege esclarece que sempre utilizará a palavra representação num sentido psicológico, ou seja, a partir das imagens mentais e da subjetividade. Além disso, Frege faz uma distinção entre o conceito, o objeto e sua representação. Desse modo, a representação se distingue da definição, ou da essência, de um conceito ou de um objeto, o que é justificado pelo fato de que a representação sofreu alterações ao longo da história, contrariamente a sua definição. O não cumprimento do segundo princípio impossibilita o cumprimento do 1º, isso acontece porque ao se desconsiderar o contexto da proposição fica-se obrigado a tomar como significado imagens mentais internas. O terceiro e último princípio acena para a impossibilidade de converter um conceito em objeto sem alterá-lo.

Frege tem como ideia explicitar a distinção entre a gênese da representação de um número e sua natureza[90], ou definição, aspectos comumente confundidos. Para Frege, a definição de um número não deve ser confundida com a descrição da gênese de sua representação, assim como "a indicação das condições mentais e corporais para que uma proposição chegue à consciência" seja confundida com uma demonstração (FREGE, 1884, introdução, p.202). Segundo Frege, olhar para as definições dos conceitos a partir da sua gênese também leva à subjetividade, remetendo à ideia de que os conceitos matemáticos nascem na alma individual humana:

> Imagina-se, pelo que parece, que os conceitos nascem na alma individual como as folhas nas árvores, e pretende-se ser possível conhecer sua essência por meio da investigação de sua gênese, que se procura explicar psicologicamente a partir da alma humana. Mas esta concepção lança tudo no subjetivismo. (FREGE, 1884, introdução, p. 202)

Frege defende que, se fosse o caso de compreender a gênese como o conhecimento de um objeto ou verdade matemática, então não poderíamos indagar sobre o que tivesse ocorrido antes da gênese. Nesse sentido, para Frege os objetos e verdades matemáticas são independentes em relação às condições mentais e corporais humanas, o que os tornam conceitos objetivos.

Na próxima seção, serão exibidas de maneira breve algumas das discussões apresentadas por Frege sobre o conceito de número bem como o posicionamento do autor. As discussões se referem à negação de aspectos empiristas e psicologistas nas teorias matemáticas, nas quais Frege tem como principais interlocutores o filósofo John Stuart Mill (1806-1873) e o matemático Georg Cantor (1845-1918). Compreender os argumentos de Frege contra esses aspectos, ainda que de maneira geral, é importante para este trabalho no sentido de perceber as convicções que o fizeram tomar seu

[90] Para Vilela e Miguel (2008), o não mentalismo de Wittgenstein tem como procedência este pensamento.

caminho para a certeza, utilizando a Lógica ao invés de outras correntes filosóficas. Há, também, uma visível antecipação de muitos aspectos de sua teoria nestas críticas, expondo elementos fortes da mesma e o quão sistemático foi o trabalho de Frege.

Além disso, Vilela (1996, p.71) aponta que as argumentações de Frege representam uma inovação para a história da Filosofia da Matemática “tanto pelos argumentos positivos, isto é, por essas novas noções que Frege introduz, como pelos negativos, isto é, pela profundidade da análise que realiza ao formular as críticas”. Dessa forma, é parte constituinte e imprescindível no caminho percorrido por ele até as *Leis Básicas*.

3.1.1. O conceito de número e as críticas de Frege ao empirismo e ao psicologismo

As discussões sobre o conceito de número são tratadas por Frege por meio da apresentação de argumentos negativos, argumentos que negam as construções do conceito de número com que ele não concordava. Nessas discussões, pode-se distinguir três momentos: a negação do número como propriedade de coisas exteriores; a negação de que o número seja algo subjetivo e; a negação dos números como conjuntos. O termo negação, além de indicar a ação de uma problematização, ou seja, de colocar em discussão as concepções vigentes e entendidas por Frege como duvidosas, caracteriza também um teor de crítico que permeará toda a discussão fregeana nos *Fundamentos*, o que pode ser notado nos comentários irônicos e de desaprovação dos conceitos de número pautados em aspectos não lógicos.

Principalmente nos dois primeiros momentos, Frege ataca as ideias de filósofos que sustentam seus argumentos em torno de aspectos empiristas e psicologistas ao apresentar uma caracterização dos números e justificar suas propriedades. De acordo com Vilela (1996), essa distinção entre empirismo e psicologismo não é feita por Frege em nenhum momento da obra. Na verdade, a autora acentua que, na história da Filosofia, ambos eram aspectos de uma mesma abordagem filosófica da corrente naturalista. O naturalismo, do período anterior à publicação dos *Fundamentos*, por sua vez, valorizava as ciências empíricas, entendendo-as como fonte de explicação para todas as coisas, dentre estas a Matemática e a Lógica (VILELA, 1996). Dessa forma, em alguns momentos, neste trabalho, aparecerá a separação dos argumentos empiristas e psicologistas, com respaldo em Vilela (1996), com o intuito de facilitar a exposição e compreensão dos argumentos fregeanos.

É importante explicitar que a corrente filosófica empirista entende que "nosso conhecimento provém dos dados do sentido" (SELLARS, s/d, p.77), sendo que as críticas de Frege perpassavam este argumento. Segundo Davis e Hersh (1989), para os empiristas todo o conhecimento advém da observação, o que não se aplicava, entretanto, ao conhecimento matemático: os empiristas "geralmente não tentavam explicar como é obtido o conhecimento matemático. Uma exceção foi John Stuart Mill" que "propôs uma teoria empírica para o conhecimento matemático[91]" (DAVIS, HERSH, 1989, p.369). Dessa forma, especificamente, as críticas de Frege nos *Fundamentos*, assim como as que seguem nesta seção, são direcionadas ao empirismo de Stuart Mill, que afirmava os números são coisas no mundo físico (HERSH, 1997) e que as verdades aritméticas são "uma generalização da experiência" (SILVA, 2007, p. 127).

Nesse sentido, para Frege, os resultados apresentados por ele nos *Fundamentos* não agradariam os empiristas já que estes reconhecem apenas a indução como uma forma de inferência original. Mas a própria indução depende da aritmética. Nesse sentido, as verdades aritméticas seriam *a priori* porque as bases da aritmética situam-se mais profundamente do que qualquer verdade empírica (SLUGA, 1999). Frege irá mostrar, a partir disso, que as verdades aritméticas são não só *a priori*, mas também analíticas.

Sobre a ideia do número como propriedade das coisas exteriores, aparecem como interlocutores de Frege nos *Fundamentos* não apenas Mill, mas também Cantor, Schroeder, Brauman, dentre outros. Segundo Frege, a ideia de que os números podem ser extraídos das coisas exteriores leva a definições restritas e incompletas de forma que é impossível estendê-las a todos os números inteiros positivos. Em outras palavras, essa definição não contempla todos os números, o que compromete a coerência e a abrangência, assim como certos aspectos da teoria.

As maiores dificuldades dessa linha de pensamento se encontrariam, segundo Frege, exatamente na obtenção dos números grandes, do zero e do um. Com relação

[91] A base da Aritmética seria uma experiência empírica.

ao número zero, não é possível que uma pessoa veja este número em coisas exteriores, ou seja, veja zero estrelas ou zero casas; ou nas palavras de Frege (1884, §8, p.211): “misterioso seria então o número 0; pois até hoje ninguém viu ou tocou em 0 pedrinhas”. O número um, por sua vez, poderia facilmente ser propriedade de todas as coisas se olhamos para a unicidade de cada objeto físico, o que o descaracterizaria. Diante dessas dificuldades, a caracterização do número zero e do um ficava de lado em muitas discussões, inclusive nas de Mill, sobre a qual Frege ironiza: “Que pena Mill não ter descrito também os fatos físicos que fundamentam os números 0 e 1!” (FREGE, 1884, §7, p. 210).

No caso dos números grandes, Frege ironiza: se o número fosse propriedade das coisas exteriores, “onde no mundo estaria o fato observado ou, como Mill também diz, o fato físico, assertado na definição do número 777864?” (FREGE, 1884, §7, p. 210).

Para Frege, a teoria baseada em aspectos empíricos proposta por Mill apresenta certo caráter infantil e retrógrado, no sentido de que Mill menospreza a possibilidade de prosseguir a busca pela pureza de um conceito através da lógica para se dedicar a uma aritmética infantil, que relaciona os números com objetos do mundo real.

> O que dizer daqueles que, ao invés de prosseguir este trabalho[92] onde ele não aparece ainda realizado, o menosprezam, se dirigem ao quarto das crianças ou se transportam para as mais antigas fases conhecidas de desenvolvimento da humanidade, a fim de lá descobrir, como J. S. Mill, algo como aritmética de pãezinhos e pedrinhas! Falta atribuir ao sabor do pão um significado particular para o conceito de número. (FREGE, 1884, introdução, p. 202)

Outro argumento contrário ao empirismo parte da ideia de que o número também não poderia ser obtido através da “impressão sensível” dos objetos observados, já que os números são aplicados também a coisas não sensíveis, não sendo possível ter uma impressão sensível de uma coisa não sensível como ∴.

As teorias matemáticas de Cantor, que também teriam pressupostos empíricos, foram discutidas por Frege nos *Fundamentos*. A possibilidade de alcançar a natureza do número dar-se-ia através do processo de abstração a partir de objetos reais. Frege se opõe à tentativa de alcançar o conceito de número através da abstração. A

[92] Frege se refere ao trabalho de investigar o conceito de número em sua pureza.

abstração, conforme empregada por Cantor para definir números cardinais e ordinais, está associada ao psicologismo e ao empirismo: ao psicologismo porque esta “é realizada a partir das coisas ou objetos por meio de um processo mental” e ao empirismo porque para Frege abstrair seria negligenciar “elementos constitutivos” (VILELA, 1996, p.82). Nesse sentido, Frege traz uma exemplificação do modo pelo qual ele entende a abstração, como processo subjetivo ou psicológico. No exemplo, ele discute ironicamente sobre abstração como separação:

> Diante de uma gaiola de camundongos, os matemáticos reagem diferentemente quando o numero deles está em questão. Alguns incluem no número os camundongos como eles são, até o último pelo, outros – e eu devo incluir Cantor entre eles – acham fora de propósito que os pelos possam fazer parte do número e então abstraem deles. Eles encontram nos camundongos hospedeiros de outras coisas que são impróprias ao número e são indignas de incluí-las nele. Nada mais simples, alguém abstrai de todo o lote. De fato, quando você faz isso, todas as coisas do camundongo parecem fora de propósito: a gota de seus olhos não menos que o comprimento de sua calda e a acuidade de seus dentes. Então alguém abstrai da natureza do camundongo. Mas não é dito o que se abstrai da natureza; então abstrai-se presumivelmente, de todas as suas propriedades, mesmo daquelas em virtude de que nós os chamamos camundongos... (FREGE apud VILELA, 1996, p. 83).

Schroeder, outro interlocutor de Frege nos *Fundamentos*, também compartilha da ideia de Cantor no que diz respeito à necessidade de se utilizar a abstração para alcançar os números, que, na visão deste autor, copiaria a realidade efetiva. Dessa forma, a abstração seria necessária para extrair o número da realidade mediante a “figuração das unidades por uns” (FREGE, 1884, §29, p.229). Através de argumentos semelhantes àqueles utilizados para debater os de Cantor, Frege também se contrapõe aos argumentos de Schroeder. Por exemplo, Frege apresenta o poema Ilíada em que a ideia de abstrair o número de coisas exteriores tornava evidente o caráter também subjetivo dessa concepção. Isso aconteceria porque poderíamos apreender Ilíada como 1 poema, 24 cantos ou inúmeros versos, não parece natural a atribuição de um determinado número, neste caso. Não haveria a possibilidade de atribuir um único número ao poema Ilíada sem condicionamento à subjetividade daquele que realiza esta atribuição. Isto poderia resultar em números diferentes para um mesmo objeto.

O entendimento de que os números são propriedades das coisas exteriores ou advém destas, segundo Frege, tem origem na frequente utilização dos números como adjetivos, sendo gramaticalmente empregados assim como às cores. Entretanto, “mil folhas” e “folhas verdes” possuem sentidos diferentes. Poderíamos, por exemplo, entender “todas as folhas” como uma “ramagem” que ainda assim seria “verde”, mas não poderíamos dizer que são “mil”. Frege questiona a que pertenceria, ou do que seria obtido, a propriedade 1000; não seria nem às folhas e nem à totalidade, o que provavelmente significaria que 1000 não pertence propriamente às coisas do mundo exterior. Diante dessas discussões, Frege concorda com Brauman, outro interlocutor, no sentido de que os números não podem ser propriedade de coisas exteriores. Os números seriam atribuídos a conceitos e não a objetos físicos.

Sobre a ideia de número como algo subjetivo, Frege defende que o número não é um objeto da Psicologia ou um resultado de processos psíquicos, sendo, isto sim, independente de representações ou coisas semelhantes. Ele compara os números com o Mar do Norte, cuja objetividade não é prejudicada pelo nome arbitrário que atribuímos a este. Ou seja, não é o nome “Mar do Norte” que influência a região delimitada do oceano a qual denominamos dessa maneira. Poderíamos dar outro nome se quiséssemos. Não existe uma razão pela qual pretendêssemos “investigar este mar por vias psicológicas” (FREGE, 1884, §26, p.225).

Ao defender a objetividade do número, Frege tem em mente uma noção específica da objetividade: ser objetivo está diretamente ligado ao fato de que ao chegar ao conhecimento de determinado objeto nenhuma pessoa perceberá diferenças nas perspectivas fundamentais sobre ele. Desse modo, a representação objetiva é sempre a mesma e independente das pessoas, o que não acontece com a representação subjetiva que é diferente para cada pessoas.

> Assim, entendo por objetividade uma independência com respeito a nosso sentir, intuir, representar, ao traçado de imagens internas a partir de lembranças de sensações anteriores, mas não uma independência com relação à razão; pois responder à questão do que são as coisas independente da razão significa julgar sem julgar, lavar-se e não se molhar. (FREGE, 1884, §26, p.226).

Ainda sobre a objetividade, para Frege, se cada um pudesse entender, por exemplo, a constituição do número um ao seu modo, então, ao tomar uma mesma proposição a respeito desse número, encontrar-se-iam diferentes significações para as diferentes pessoas que a analisasse e, nesse sentido, “tais proposições não teriam nenhum {sic} conteúdo comum” (FREGE, 1884, introdução, p.197). Do mesmo modo, se as pessoas tivessem o direito de representar como bem entendessem o conceito de número, isso resultaria em diferentes representações do próprio conceito e, neste caso, resultaria em diferentes números dois, por exemplo: o meu dois, o seu dois, etc. Segundo Vilela (1996), o caráter objetivo do número possibilitaria que este fosse reconhecível publicamente repetidas vezes. Portanto, para Frege, o número é objetivo e a Lógica assegura a Matemática em termos epistemológicos:

> Ele acredita na objetividade e na certeza do conhecimento matemático, um exemplo quanto à existência de um conceito seguro. Fundamentar a aritmética na lógica assegura epistemologicamente a matemática, justifica a validade da matemática independentemente das coisas do mundo exterior e do sujeito. (VILELA, 1996 p.79).

É diante desses argumentos que, para Frege, “seria admirável que a mais exata das ciências se devesse apoiar sobre a Psicologia, que, de modo tão inseguro, ainda caminha às apalpadelas” (FREGE, 1884, §27, p. 227). Nesse sentido, justifica-se compreender os fundamentos da aritmética.

No terceiro momento, as críticas tecidas por Frege se referem à noção de número como um conjunto: um conjunto de unidades ou conjunto de coisas. Sobre o conjunto de coisas, as críticas se reduzem as já apresentadas, levando em consideração a atribuição do número às coisas exteriores. Por outro lado, sobre o conjunto de unidades, Frege faz ponderações sobre o que seriam as unidades, discutindo se o numeral “um” exprimiria uma propriedade de um objeto.

Neste sentido, a investigação se volta para a afirmação: “uma unidade seria um objeto ao qual conviria a propriedade ‘um’” (FREGE, 1983, p.229). Um dos argumentos dados por Frege, além das críticas anteriores relacionadas aos números como propriedades de coisas exteriores, diz respeito ao fato de o número um poder ser atribuído, sem maiores dificuldades, a todas as coisas. Essa atribuição universal descaracterizaria a noção de propriedade, que pode ser entendida como uma maneira de diferenciar certas coisas de outras. Por exemplo, se todas as coisas do mundo tivessem a mesma altura não faria sentido utilizar as categorias contrárias “alto” e “baixo” para estabelecer uma propriedade, nem mesmo a ideia de altura. No exemplo dado por Frege, só faz sentido dizer que “Sólon é sábio” diante do entendimento de que existem coisas que não são sábias. Conforme Frege (1983, p.229), “o conteúdo do conceito diminui quando sua extensão aumenta: se esta passa a abranger tudo, o conteúdo deve perder-se totalmente”. Desse modo, para Frege não faz sentido que uma palavra fosse utilizada para caracterizar um objeto se ela não servisse para determiná-lo de maneira mais completa. O autor conclui que o problema reside no fato de atribuir os números como propriedade das coisas.

Posteriormente, Frege discute se as unidades são iguais ou diferentes entre si. Se estas fossem iguais, ou se fossem tornadas iguais por abstração, a ideia da multiplicidade de coisas se perderia, existindo apenas uma coisa:

> Por meio de procedimentos meramente conceituais não se consegue tornar iguais coisas diferentes; se conseguíssemos, porém, não teríamos mais coisas, e sim uma coisa; pois como diz Descartes, o número – ou melhor a pluralidade – nas coisas nasce de sua diferença. (FREGE, 1884, §35, p. 232).

No caso da diferença entre as unidades, Frege questiona-se sobre como seria possível distinguir essas unidades. Além disso, a necessidade de distinguir as unidades torna irrelevante a necessidade de manter um elemento comum entre elas. Desse modo, se as unidades são iguais deve-se buscar por uma distinção entre estas, mas se não diferentes não precisam ter um elemento em comum. Há, portanto, um impasse na caracterização dos números como conjuntos de unidades.

Frege entende que tanto abordagens psicologistas quanto as empiristas fazem uma inversão entre aplicabilidade e origem. Este fato é percebido por Frege como o resultado da percepção de que a Matemática possui muitas aplicações no mundo exterior, levando muitos filósofos a acreditar que esta tem sua origem ali. Entretanto, mesmo pela aplicação, podem ser encontrados fatos que servem de contra-argumento à ideia de que a matemática tem origem ou pode ser obtida de coisas exteriores. Por exemplo, quando são misturados dois volumes de um líquido com cinco volumes de outro líquido, pode ser que ocorra alguma reação química que faça com que a solução final tenha menos ou mais que sete volumes de líquido.

> A proposição $5 + 2 = 7$ não significa que, quando vertemos dois volumes de líquido em cinco volumes de líquido, obtemos sete volumes de líquido, mas esta é uma aplicação apenas admissível se, em consequência de uma reação química, digamos, não ocorre alteração

> de volume... Mill confunde sempre as aplicações... Frequentemente físicas e pressupondo fatos observados, com a própria proposição puramente matemática. (FREGE, 1884, §9, p. 212).

Desse modo, para Frege o número não pode ser propriedade das coisas exteriores, não seria obtido daí e não é subjetivo. O número é, para Frege, um objeto lógico, objetivo e que é atribuído a conceitos. A construção precisa do conceito de número dada por Frege será apresentada após a subseção seguinte, na qual serão exibidos alguns dos conceitos fundamentais para a construção fregeana do número.

3.1.2. As noções de objeto, função, argumento e conceito em Frege

A teoria fregeana para alcançar a fundamentação da Aritmética, por meio da fundamentação do conceito de número, tem como base algumas noções primordiais: objeto, função, argumento e conceito[93]. Primeiramente serão apresentadas as noções de função e argumento, já que a noção de função é necessária para a definição de objeto, que será apresentada em seguida, junto com a noção de conceito.

A noção de função apresentada por Frege em *Begriffsschrift* se mantém quase inalterada nos *Fundamentos*. Na expressão $f(x)$, $f(\,)$ representa a função que é insaturada, ou seja, necessita de complemento, enquanto que x é o argumento, completo em si mesmo e, portanto, saturado. O argumento não faz parte da função, serve apenas para completá-la, já que esta é insaturada. Dessa forma, juntos, função e argumento constituem um todo completo. Num primeiro momento, Frege dá como exemplo de argumentos, os números que são completos em si mesmos, como veremos a seguir.

Uma função $f(\,)$ se torna saturada ao ser preenchida por um argumento, digamos x. Neste caso, $f(x)$, função saturada, possuirá um valor, que é denominado por Frege, assim como fazemos atualmente em Matemática, como valor da função. Os pares $(x, f(x))$ representam o percurso de valores da função dada.

Dada essa primeira ideia do que se constitui uma função, é possível discutir a noção de objeto. Frege tinha uma ideia diferente daquela comumente utilizada para

[93] Algumas das discussões presentes aqui sobre função, argumento e conceito, não aparecem nos *Fundamentos*, mas em um artigo publicado por Frege em 1891, intitulado "*Função e Conceito*" (Ver Frege (1891)). Essas discussões aparecem aqui com a finalidade de elucidar alguns pontos das discussões sobre essas noções que não aparecem amplamente discutidas nos *Fundamentos*.

caracterizar um objeto, ou seja, diferente daquela do senso comum. Na visão do autor, um objeto não é somente aquilo que pode ser percebido pelos sentidos, mas se constitui como tudo aquilo que não é uma função insaturada. Mais especificamente, um objeto é tudo aquilo que não possui um lugar vazio, ou seja, é saturado. Estes carecem de classificação já que todos, do ponto de vista lógico, são do mesmo tipo. Frege apresenta como exemplos de objetos lógicos os argumentos, e por isso os números, e a função saturada.

A noção de argumento de uma função é estendida a qualquer objeto, inclusive funções saturadas. Frege, portanto, amplia a possibilidade do que pode ser tomado como argumento de uma função, anteriormente colocado apenas para os números. Uma função pode ser constituída, no campo das operações binárias, pelos sinais $=, >$ e $<$ para formar expressões funcionais.

O valor que é atribuído a uma função saturada depende tanto de seu argumento quanto da própria função. Por exemplo, dada a função $2x^2 + x$ e o argumento 1, o valor da função será 3. Entretanto, se tomando como argumento o 2, o valor dessa mesma função será 10. O que há de comum é que em ambos os casos, a função retorna como valor um número. Por outro lado, se tomando a função $x^2 = 1$ e como argumento $x = 1$ ou $x = -1$, a função não retornará um número como seu valor, mas o valor verdadeiro. Em contrapartida, se tomarmos quaisquer outros argumentos, o lado esquerdo da expressão funcional não será igual ao seu lado direito e, portanto, retornará como valor o falso. Em casos como este, em que o valor retornado por uma função é o verdadeiro ou o falso, Frege estabelece que a função retorna um *valor de verdade*. Uma função pode possuir como valor, números, objetos em geral e valores de verdade, nos casos em que o valor da função é sempre um valor de verdade, esta é denominada por Frege como *conceito*.

Assim como apresentado em *Begriffsschrift*, sentenças afirmativas (proposições da Lógica Clássica) também são consideradas por Frege como funções, podendo ser decompostas em duas partes, uma insaturada e outra saturada. Por exemplo, no caso da sentença afirmativa:

César conquistou as Gálias.

“César” pode ser visto como o argumento da função “conquistou Gálias”, ou seja, como a parte saturada e “conquistou as Gálias” como parte insaturada. Pode ser percebido aqui um exemplo de argumento que não é um número.

Entretanto, nem toda sentença afirmativa pode ser tomada como um conceito. No caso, por exemplo, da sentença “A capital de x”, em que “a capital de” é a função e x demarca o lugar do argumento. Tomando como argumento “Império Alemão” então o valor da função será Berlim, que não é um valor de verdade. Dessa forma, essa sentença não é um conceito, pois não retorna como valor um valor de verdade. Daí, também se pode concluir que não existem apenas possibilidades de que um valor de uma função seja um número ou um valor de verdade, podendo se estender para qualquer objeto.

A possibilidade de se colocar qualquer argumento na lacuna de um conceito demanda que este seja bem delimitado para ser capaz de afirmar se um objeto cai ou não sob este. Como explicado por Vilela (1996, p.68), “o conceito deve ter limites nítidos para ser capaz de decidir o valor de verdade quando qualquer objeto o preenche”. Isso também serve para uma definição que tem como base um conceito. No caso, por exemplo, da definição de número esta deve ser capaz de decidir se aquilo que cai sob o conceito é ou não é um número.

Os conceitos podem ser, assim como as funções, de primeiro ou de segundo nível. Os conceitos (funções) de primeiro nível são aqueles que se aplicam a objetos, enquanto que os de segundo nível são aqueles que se aplicam a conceitos (funções) de primeiro nível. Os conceitos de segundo nível são utilizados posteriormente na definição fregeana de número.

Outra noção importante na teoria de Frege é a noção de *extensão de um conceito.* A extensão de um conceito corresponde ao percurso de valores, $(x, f(x))$, em que $f(\quad)$ é um conceito e $f(x)$ o valor de verdade para o argumento x. A extensão de um conceito é constituída, portanto, por pares ordenados compostos por um elemento do domínio, por um argumento, e pelo valor de verdade retornado pelo argumento. Nos *Fundamentos*, Frege não apresenta uma definição precisa desta noção e também não a discute profundamente. O autor apenas toma-a como uma noção familiar e utiliza-a sem restrições. Segundo Kneale e Kneale, citados por Gomes (2009), o termo extensão já era utilizado na Lógica antes mesmo de Frege. Em um livro de lógica, o termo extensão aparece em contraposição ao termo compreensão, sendo o segundo referente ao conjunto de atributos que determinado termo implica e o primeiro o "conjunto das coisas às quais o termo é aplicável" (GOMES, 2009, p.35).

A igualdade entre conceitos é entendida por Frege como sendo determinada pelos objetos de extensão, ou seja, a relação de identidade é uma relação entre objetos. Se dois conceitos coincidem em sua extensão então os conceitos estão na relação de identidade entre objetos. Frege traz como exemplo o conceito de "ângulo reto" e o conceito "ângulo igual ao seu adjacente" que possuem a mesma extensão, mas não tem o mesmo conteúdo. A extensão de um conceito é, portanto, totalmente determinada pelo conceito.

Das discussões apresentadas nesta seção e na seção anterior, sobre a negação do número como propriedade das coisas exterior, a negação de que o número seja algo subjetivo e a negação de que os números sejam conjuntos, Frege utiliza o noção de conceito para estabelecer que o número é, na sua concepção, atribuído a conceitos. Deste modo, ao dizer que "as maravilhas do mundo são sete", estamos dizendo, a partir da definição de Frege, que "sob o conceito *maravilhas do mundo* caem 7 indivíduos" (ALCOFORADO, 2009, p. 21).

Possuindo as noções apresentadas nesta subseção, na próxima será apresentada a construção lógica de número feita por Frege.

3.1.3. O conceito de número em Frege

Nesta seção, pretende-se expor o conceito de número proposto por Frege, acompanhando os passos lógicos assim como feito pelo autor em *Os Fundamentos da Aritmética*.

Com respeito à perspectiva fregeana acerca do conceito de número, uma discussão que surge diz respeito à caracterização do número como um objeto munido de objetividade. Frege parte da noção de que o número convém a conceitos, não sendo nem subjetivo, nem conjuntos ou propriedade das coisas exteriores. Ao dizer "ao conceito F convém o número 0", Frege atenta para o fato de que nesta construção ele coloca o 0 em uma posição que este não pode ser propriedade de um conceito já que é apenas parte do predicado, sendo portanto, independente das demais noções.

Frege ressalta que o número é frequentemente utilizado na linguagem comum como adjetivo, o que não interfere na sua natureza e não deve ser entendido como um problema na sua definição: “como o que importa aqui é apreender o conceito de número tal como é utilizável em ciência, não nos deve incomodar que no uso ordinário da linguagem o número aparece também atributivamente” (FREGE, 1884, §57, p. 246). Como exemplo, Frege traz as seguintes proposições: “Júpiter tem 4 luas” e “O número de luas de Júpiter é 4”. Na primeira, o número quatro aparece atributivamente ao objeto lua. Na segunda, a utilização da palavra “é” não deve ser visto apenas como uma simples cópula, como na proposição “o céu é azul”. Aqui a palavra “é” indica o mesmo que “é igual a” e “é o mesmo que”; dessa forma, a expressão “o número de luas de júpiter” designa o mesmo objeto que a palavra “quatro”.

Além disso, a confusão entre a representação, no sentido de imagem mental ou real, e o próprio número é comum diante da grande aplicabilidade dos números. Em um dado, por exemplo, os quatros pontos em uma de suas faces pode levar a ideia de que “haja algo correspondendo à palavra ‘quatro’; mas isto é uma ilusão” (FREGE, 1884, §58, p.247). Quando se considera a hipótese de que o número é atribuído às coisas, este pode ser atribuído a várias coisas, o que não acontece quando o número é considerado como um atributo de um conceito, já que a um conceito não se pode atribuir mais do que um único número garantindo, assim, a objetividade do mesmo (KENNY apud VILELA, 1996). Diante disso, o autor defende que o número não pode ser representado como um objeto independente, já que não é algo que possa ser perceptível através dos sentidos; do mesmo modo que não é uma propriedade em uma coisa exterior.

Em ambos os tipos de representação, o número 0 seria, obviamente, um problema, diante da dificuldade de se representar 0 coisas ou 0 objetos. Apesar de ser caracterizado por Frege como um objeto, o número não se encontra no mundo sensível, o que é possível pela própria definição de objeto e já que “nem todo objeto está em algum lugar” (FREGE, 1884, §61, p.249). A falta de uma representação para o número não oferece obstáculos para sua utilização. De fato, o problema da representação só surge quando uma palavra é considerada isoladamente, perguntando pelo seu significado. Isso leva à necessidade de recorrer a uma representação de forma que na ausência de uma imagem interna entende-se que não há conteúdo em tal palavra. É diante dessa dificuldade que se deve recordar o princípio do contexto de Frege, que diz que se deve considerar sempre uma proposição completa; os significados das palavras estão atrelados à proposição como um todo. Ou seja, o sentido de cada objeto particular será definido no contexto de uma proposição.

Nesse sentido, a independência do número está atrelada apenas ao fato deste não ser nem um atributo, nem um predicado. Não necessitando buscar sua representação isoladamente. O número deve ser entendido no contexto de uma proposição: "apenas no contexto de uma proposição as palavras significam algo. Importará, portanto, definir o sentido de uma proposição onde ocorra um numeral" (FREGE, 1884, §62, p. 249). O número é, então, objetivo, atribuído a conceitos e deve ser entendido no contexto de uma proposição. É com base nessas pressuposições que Frege constrói seu conceito de número.

As noções de equinumericidade, seguir em uma série, extensão de conceito e conceito são necessárias para a construção do conceito de número em Frege. As duas últimas noções já foram discutidas neste trabalho. As noções de equinumericidade e seguir em uma série serão abordadas a seguir. A equinumericidade é necessária na teoria fregeana, na medida em que possibilitará a comparação, correspondência biunívoca, entre objetos de conjuntos. Nesse sentido, quando houver a possibilidade de "coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro" então, Frege (1884, §68, p.253) dirá que um conceito F é equinumérico a um conceito G.

Frege explica a noção de correspondência biunívoca através de uma situação mais palpável. Imagina-se que há um criado que pretende saber se há a mesma quantidade de pratos e facas sem contá-los. Um procedimento que pode ser feito é colocar cada faca à direita de cada prato, de forma que, assim, o criado saberá se há a mesma quantidade ou mais ou menos facas. Esse processo é feito, segundo Frege, através de correspondência biunívoca e pela relação de posição.

É interessante notar que Frege pretende estabelecer suas noções a partir de conteúdos puramente lógicos. Neste caso, a noção de correspondência biunívoca é utilizada, pois tem como base a noção de relação que pertence à Lógica. Frege busca demonstrar a objetividade da Aritmética que só pode ser alcançada, na visão dele, a partir de noções lógicas e contrariando a ideia de representação, por esse motivo, também a noção de correspondência biunívoca deve aparecer nestes termos.

Assim como "a cai sob o conceito F" representa a forma geral de um conteúdo ajuizável que trata de um objeto, por exemplo, do objeto 2 em "2 cai sob o conceito 'menor que 10'", também "a mantém a relação φ com b" é a forma geral de um conteúdo ajuizável que trata do objeto a e do objeto b, por exemplo, de 4 e 2 em "4 mantém a relação 'é divisível por' com 2".

A ideia de correspondência pode, então, ser reduzida à seguinte:

> Se todo objeto que cai sob o conceito F mantém a relação φ com um objeto que cai sob o conceito G, e se com cada objeto que cai sob o conceito G um objeto que cai sob F mantém a relação φ, [então] os objetos que caem sob F e G são coordenados uns aos outros pela relação φ (FREGE, 1884, §71, p. 256).

A correspondência deve também ser biunívoca e, para isso, segundo Frege, deve satisfazer as seguintes proposições:

> "1. Se d mantém a relação φ com a e se d mantém a relação φ com c, então universalmente, quaisquer que sejam, d, a e c, a é o mesmo que c;
>
> 2. Se d mantém a relação φ com a e se b mantém a relação φ com a, então universalmente, quaisquer que sejam d, b e a, d é o mesmo que b". (FREGE, 1884, §72, p.256).

Dessa forma, a correspondência biunívoca foi completamente reduzida a relações puramente lógicas. Dizer que "o conceito F é equinumérico ao conceito G" é o mesmo que dizer que "há uma relação φ que coordena biunivocamente os objetos que caem sob F aos que caem sob G".

A partir da definição de equinumericidade, Frege define o número através da seguinte proposição: "o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito 'equinumérico ao conceito F'" (FREGE, 1884, §72, p.257). Cabe elucidar que a extensão do conceito "equinumérico ao conceito F" não é o conjunto dos objetos que caem sob F. Esta seria a extensão do conceito F. A extensão do conceito “equinumérico ao F” é a classe dos conceitos que possuem seus objetos equivalentes.

Dizer que n é um número, significa o mesmo que dizer que existe um conceito tal que n cai sob este conceito. A equinumericidade permite definir o número que pertence ao conceito F através da noção de extensão de conceito do conceito “equinumérico ao conceito F”. Dessa forma, “n é um número cardinal” equivale a “há um conceito tal que n é o número que lhe convém”. É assim que existe a possibilidade de determinar quando dois números são iguais através da noção de equinumericidade.

Posteriormente na obra, Frege passa da definição geral de número dada anteriormente para a definição dos números singulares. O 0, para Frege, é o número que convém ao conceito “diferente de si próprio”, já que nada cai sob o conceito “diferente de si próprio”. Aqui, destaca-se em relação à lógica clássica, a centralidade do princípio da identidade $A = A$.

Frege coloca que o incômodo inicial que pode gerar uma definição a partir de uma contradição, “diferente de si próprio”, não tem fundamento com relação às exigências colocadas para a lógica no que diz respeito à delimitação precisa dos conceitos, já que este conceito é capaz de definir o que cai e o que não cai sobre este; no caso, nada.

> Tudo o que, do ponto de vista da lógica e no que concerne ao rigor da demonstração, se pode exigir de um conceito é a sua delimitação precisa, que fique determinado para cada objeto, se cai ou não sob ele. Ora, esta exigência é estritamente satisfeita por conceitos que contêm contradição, como “diferente de si próprio”, pois sabe-se, a respeito de qualquer objeto, que ele não cai sob este conceito. (FREGE, 1884, §74, p.258).

No caso do 0, Frege esclarece sua escolha por tal conceito, dizendo que poderia escolher outros que gerassem uma contradição, ou seja, conceitos sob os quais nada cai. Entretanto, escolheu “diferente de si próprio” para evidenciar a forma lógica de sua demonstração. Nenhum objeto, então, cai sob um conceito se o número que lhe convém é o 0.

Para definir os demais números Frege precisou da noção de seguir em uma série. Frege define a relação que dois membros vizinhos da série natural dos números mantém entre si como: “há um conceito F e um objeto x que cai sob ele tais que o número que convém a F é n e o número que convém ao conceito “cai sob F mas não igual a x" é m" que significa o mesmo que "n segue na série natural dos números imediatamente após m"" (FREGE, 1884, §76, p. 260).

O número 1 é então definido partindo do conceito "igual a 0". Sob este conceito cai o número 0. Assim sendo, sob o conceito "igual a 0 mas não igual a 0" não cai nenhum objeto, das discussões anteriores pode-se concluir que o 0 é o número que convém a este conceito. Frege assinala que diante disto tem-se um objeto 0 que cai sob o conceito "igual a 0", os quais obedecem o seguinte: o número que convém ao conceito "igual a 0" é igual ao número que convém ao conceito "igual a 0" e; o número que convém ao conceito "igual a 0 mas não igual a 0" é o 0. Neste caso, voltando a definição de seguir em uma série, o conceito F seria "igual a 0", o objeto x e o número m[94] seriam o próprio 0. É possível definir o n que resta como o número 1, podendo construir a seguinte proposição: "1 é o número que convém ao conceito 'igual a 0'", ou ainda "1 segue na série natural dos números imediatamente após o 0". Frege observa que em ambas as definições, do número 0 e do 1, a legitimidade objetiva não requer nenhum fato físico, empírico ou psicológico.

Dessa forma, os números em Frege são construídos a partir do zero, ou seja, definindo o conceito ao qual o número zero convém, então os demais números são construídos a partir da existência do zero:

0	Número que convém ao conceito 'diferente de si próprio'
1	Número que convém ao conceito 'igual a 0'
2	Número que convém ao conceito 'igual a 0 ou igual a 1'
3	Número que convém ao conceito 'igual a 0, ou igual a 1 ou igual a 2'
⋮	⋮

Para mostrar a sucessão dos números, isto é, que imediatamente após cada número segue outro número na série natural dos números é necessário que tenhamos

[94] Isso porque m convém ao conceito "cai sob F mas não é igual a x", que agora é "cai sob igual a 0 mas não é igual a 0", sendo, portanto o próprio 0.

o conceito a que este último convenha. Ou seja, é necessário um conceito que garanta que sempre existe um número natural após um dado número natural, ou seja, que o conjunto dos números naturais é infinito[95]. O conceito colocado por Frege é o seguinte: "pertence à série natural dos números que termina em n".

A mesma definição de seguir em uma série apresentada por Frege em *Begriffsschrift* é novamente apresentada pelo autor para demonstrar que após cada número m, segue outro número na série natural dos números. A definição dada por Frege (1884, §79, p.261) diz que "se todo objeto com que x mantém a relação φ cai sob o conceito F, e se em geral, para qualquer d, caso caia sob o conceito F, todo objeto com que d mantém a relação φ cai sob o conceito F, então y cai sob o conceito F, qualquer que seja o conceito F"". O autor ainda acrescenta que esta definição significa o mesmo que "y segue após x na série- φ" e que "x precede y na série- φ".

Além disso, Frege assinala que não há necessidade de sair do primeiro número da série passando de um em um por todos os intermediários para garantir que este último segue em uma série. Ou seja, se numa série b segue após a e c após b, podemos concluir de imediato que c segue após a, mesmo sem tomar conhecimento de b. A noção de seguir em uma série também possibilita, segundo ele, reduzir o modo de inferência de n a $n+1$.

Nas conclusões dos *Fundamentos*, Frege esboça sua tese logicista e a esperança que tem de com esta obra tonar a Aritmética reconhecível como uma parte da lógica:

> Espero ter neste escrito tornado verossímil que as leis da aritmética sejam juízos analíticos, e consequentemente a priori. A aritmética seria, portanto, apenas uma lógica mais desenvolvida, cada proposição aritmética uma lei lógica, embora derivada. As aplicações da aritmética à explicação da natureza seriam elaborações lógicas de fatos observados, calcular seria deduzir. (FREGE, 1884, §87, p.267).

Assim, a Aritmética não é mentalmente empírica, mas uma Lógica mais desenvolvida. É importante notar que nos *Fundamentos*, Frege estabelece que os números podem ser definidos como extensão de conceitos, mas não mostra que tal extensão é um objeto lógico. Por este motivo, Sluga (1999) defende que os

---

[95] A expressão "o conjunto dos números naturais é infinito" e mesmo "número naturais" não aparece em Frege, sendo utilizada aqui apenas com propósitos explicativos.

Fundamentos representam a transição do pensamento de Frege de *Begriffsschrift* até as *Leis Básicas*:

> "o livro não é um trabalho auto-contido. Ele mostra o pensamento de Frege na transição do estágio representado pelo *Begriffsschrift* para aquele representado pelo primeiro volume do *Grundgesetze* [*Leis Básicas*]. Este mostra ele [Frege] na estrada em direção à análise lógica da aritmética, mas ainda não no final daquela estrada"[96] (SLUGA, 1999, p. 102, tradução nossa).

No próximo capítulo será discutido o primeiro volume das *Leis Básicas da Aritmética* de Frege, o final da estrada, a evolução de seus conceitos e a tentativa de conclusão de seu projeto.

[96] "the book is not a self-contained work. It shows Frege's thought in transition from the stage represented by the *Begriffsschrift* to that represented by the first volume of the *Grundgesetze*. It shows him on the road towards the logical analysis of arithmetic, but not yet at the end of that road" (SLUGA, 1999, p. 102)

4 OS PASSOS FINAIS DE FREGE NA BUSCA PELO IDEAL DE FUNDAMENTAÇÃO: a obra *As Leis Básicas da Aritmética*

O primeiro volume das *Leis Básicas da Aritmética* de Frege foi publicado em 1893 e dá continuidade ao trabalho iniciado por Frege em *Begriffsschrift* (1879) e *nos Fundamentos da Aritmética* (1884). Tanto para matemáticos quanto para filósofos e lógicos, a obra representa mais do que um esforço de concretização de um sonho que não foi alcançado, mas, inevitavelmente, corresponde a um profundo avanço para as teorias de cada área, inclusive abrindo caminhos para o desenvolvimento de novas teorias, novos paradigmas, tal como as lógicas não clássicas e a noção de jogos de linguagem de Wittgenstein[97]. O próprio trabalho de Frege pode ser visto como uma mudança de paradigma, já que ele transforma conceitos já estabelecidos a fim de garantir a efetividade de seu projeto logicista, como é o caso da alteração do par aristotélico 'sujeito e predicado' para 'argumento e função', que não é apenas uma mudança terminológica fecunda, mas uma modificação no próprio modo de olhar e de tratar esses elementos.

Furth (1964) argumenta que nos *Fundamentos da Aritmética* as críticas ao empirismo, ao psicologismo ou ao puro formalismo foram letais e a maneira como Frege defende seus argumentos e sua justificativa são grandiosos. Entretanto, o autor afirma que para Frege a justificação proposta nos *Fundamentos* não era suficiente para estabelecer seu ponto de vista e ultrapassar todas as dúvidas que viessem a surgir. Para garantir isso, seu sistema deveria ser construído a partir dos três seguintes passos (FURTH, 1964):

1. Estabelecer um número (de preferência pequeno) de afirmações que, quando seus significados forem explicados, serão indiscutivelmente reconhecidas como expressão das verdades da lógica pura;
2. Estabelecer um número (de preferência pequeno) de princípios que, quando seu modo de uso for elucidado, serão indiscutivelmente reconhecidos como regras de inferência, no sentido de que, quando aplicadas a premissas

[97] Filosofia que encampa de Frege o não mentalismo e a centralidade do contexto (LECLERC, 2008).

verdadeiras, as transformações permitidas por esses princípios não possam resultar em nada além de conclusões logicamente verdadeiras e;

3. Produzir derivações de proposições padrão da Aritmética e da Análise a partir das proposições da lógica (e nenhuma outra proposição), e usando os princípios de inferência (e nenhum outro princípio).

Segundo Furth (1964), para Frege o poder de sua teoria e o ponto mais relevante seria a concretização do item três, ou seja, produzir derivações de proposições matemáticas a partir de proposições da lógica e das regras de inferência, concretizando o logicismo. Entretanto, o autor argumenta que, para a atualidade e para as teorias subsequentes os itens 1 e 2 possuem maior significância em detrimento do item três[98], por alguns motivos. Primeiramente, Furth (1964) afirma que alguns conceitos importantes, como verdade e consequência lógica, já aparecem na construção e no desenvolvimento dos dois primeiros itens. O resultado dessa construção foi um sistema que exibe o cálculo proposicional, a teoria de quantificação de primeira e segunda ordem, além da teoria dos conjuntos. Em segundo lugar, o autor alega que a explicação das bases primitivas de seu sistema, inclusive englobando interpretações semânticas profundamente cuidadosas, resulta na incorporação da filosofia da linguagem. E, por último, apesar do fato de seu projeto logicista ter falhado, diante de uma inconsistência na teoria dos conjuntos de seu sistema, ele ainda é indispensável para derivar proposições matemáticas.

Na próxima seção será discutido o primeiro volume de *As Leis Básicas da Aritmética* de Frege, obra em que Russell identificou as ideias fregeanas que geravam o paradoxo dentro do sistema. Com o intuito de reconstruir o paradoxo, optou-se por discutir a obra com base na sequência de apresentação da mesma. Dessa forma, semelhantemente ao que o próprio autor faz em sua introdução, na primeira subseção discutir-se-á sua convicção na possibilidade de fundamentação da Aritmética, a confiança no sucesso de seu trabalho para atingir este objetivo, a sequência dos assuntos discutidos na obra e as convicções de Frege sobre a natureza da lógica e da verdade.

[98] De fato, Frege inicia suas investigações em lógica não com o intuito de construir algo que posteriormente ficou conhecido como o programa logicista, mas a fim de investigar o conceito de número ordinal através de bases lógicas e matemáticas.

Na segunda subseção, apresentaremos a exposição de *Begriffsschrift* feita por Frege dentro das *Leis Básicas*. Aqui o sistema lógico fregeano aparece de maneira mais robusta, com novas definições e algumas mudanças de posição que serão indicadas no decorrer da exposição e, por isso, faz-se necessário apresentar também essa conceitografia mais madura apresentada pelo autor.

4.1. Exposição de *As Leis Básicas da Aritmética* por Frege

Logo na introdução dada por Frege nas *Leis Básicas*, o próprio autor afirma que já por volta de 1879, ocasião da escrita e publicação da *Begriffsschrift,* ele já tinha em mente a ideia de redutibilidade da Aritmética à Lógica, trazendo-a formalmente, ainda que não de maneira central, para seus trabalhos cinco anos depois, nos *Fundamentos da Aritmética*. Frege almeja a conclusão do projeto logicista nas *Leis Básicas*, cerca de 14 anos após *Begriffsschrift*; um trabalho de uma vida dedicado à preparação e amadurecimento intelectual para concretização do ideal de fundamentação da Aritmética através da Lógica e que resultou no paradoxo descoberto por Russell. É, portanto, nas *Leis Básicas* que ele busca confirmar a visão de número exposta nos *Fundamentos;* o enunciado de um número expressa uma declaração sobre um conceito.

Segundo exposto por Frege, o longo período existente entre a publicação de *Begriffsschrift* e das *Leis Básicas* se deve a dois fatos. O primeiro deles relacionado ao amadurecimento necessário para concretização da fundamentação, bem como a superação de muitos obstáculos epistemológicos do próprio Frege a fim de se libertar de ideias comumente presentes nas obras e artigos sobre lógica e que, segundo ele, o impediam de chegar à natureza real das relações e dos objetos lógicos. O segundo motivo se deve ao fato da recepção indiferente, ou quase nula, que suas obras anteriores tiveram, desmotivando-o a concluir e publicar o seu trabalho final. Apesar das críticas e da pouca atenção dirigidas às suas obras, Frege acreditava que seu trabalho era inovador, representando uma contribuição considerável para o campo da lógica, motivação que o levou a prosseguir com o projeto (FREGE, 1964).

As *Leis Básicas* trazem a construção de um sistema axiomático para a Aritmética, de forma que os teoremas e as demonstrações nas quais esta se baseia são desenvolvidos utilizando a conceitografia. Visando os números naturais, a partir dos quais os outros recorrem, Frege não trata dos números negativos, fracionários, irracionais e complexos; nem as operações de soma e multiplicação. Além disso, segundo Frege, apesar de parecer que o tratamento dos números infinitos (transfinitos ou irracionais) foi excluído, na verdade eles não são necessários para a fundamentação da Aritmética proposta por ele e, de qualquer modo, a derivação de suas proposições é muito mais simples do que a dos números finitos. O desenvolvimento de alguns desses tópicos é sinalizado como componente de um possível segundo volume, a ser publicado mediante a recepção do primeiro. Frege deixa subentendido que tratou dos elementos considerados por ele essenciais para uma primeira exposição das *Leis Básicas*.

Atentando aos elementos mais teóricos, Frege discute na introdução as características e como são construídas as demonstrações e as definições. A demonstração seria uma sequência de fórmulas separadas por uma linha contínua ou por linhas quebradas[99]. Frege adverte que as demonstrações presentes nas *Leis Básicas* não possuem palavras, apenas fórmulas representadas por sinais e que são proposições completas, incluindo as condições necessárias para sua verificação. No sistema construído por Frege, a completude das fórmulas é fundamental para impedir a inclusão de pressuposições no pensamento, garantindo o rigor na condução da demonstração. No caso das demonstrações, estas visam a conclusão do 3° passo indicado por Furth (1964), que seria a produção de derivações das proposições padrão da Aritmética e da Análise. Existem também proposições que não são derivadas de outras, algumas delas constituem as leis básicas e outras são as definições. Estas últimas introduzem apenas notações abreviadas, ou nomenclaturas, mas não criam nenhum conceito.

[99] Semelhantemente como ocorre em *Begriffsschrift*. Entretanto, em *Begriffsschrift* apenas a linha contínua era utilizada, já que o tipo de linha está relacionado ao método de inferência utilizado na demonstração e naquele sistema havia apenas um método de inferência. Nas *Leis Básicas*, Frege introduzirá dois novos métodos de inferência, que terão associados a estes tipos diferentes de linhas, como será visto posteriormente neste trabalho.

Numa demonstração, a passagem de uma fórmula para outra acontece mediante regras de inferência, o que é indicado pelo 2 º passo, de modo que nenhuma transição é realizada se não estiver de acordo com essas regras. O modo como uma inferência é feita, e indicação de quais regras são utilizadas é assinalado por sinais entre as fórmulas. Do mesmo modo, o término de uma cadeia de inferência é indica pelo seguinte sinal: ——•——.

Segundo Frege, é impossível demonstrar tudo em Aritmética e não cabe a ele exigir tal ato. Este fato é explicitado no 1º passo apresentado por Furth (1964), que indica que serão estabelecidos um número possivelmente pequeno de proposições as quais, quando estipulados seus significados, serão reconhecidas como verdades da lógica pura, sem a necessidade de demonstrações por regras de inferência. Entretanto, o ideal do autor é que todas as proposições que não possam ser demonstradas sejam expressamente declaradas como tais, de forma que seja fácil identificar as proposições nas quais a estrutura toda se repousa. A ideia do sistema desenvolvido por ele é que, a partir do momento que se tenha as leis primitivas, haja um esforço para reduzi-las tanto quanto possível, provando todas aquelas que podem ser provadas. A verificação desta exigência só é alcançável porque Frege especifica todos os métodos de inferência empregados, característica que, segundo o próprio Frege (1964), o fez ir além de Euclides na construção do sistema axiomático.

Sobre a teoria apresentada nas *Leis Básicas*, Frege acreditava que dois pontos de sua construção poderiam receber críticas, confirme afirma na introdução da obra. O primeiro deles estaria relacionado ao curso das demonstrações, os métodos que utilizava e passos intermediários e não quanto ao rigor empregado. Além disso, Frege aponta que o axioma que seria comprometido pelo *paradoxo de Russell* pode vir a ser um dos pontos discutíveis de sua teoria: “uma discussão pode surgir, a meu ver, apenas relacionada à minha lei básica que trata do percurso de valores (lei V)”; entretanto, ele acreditava que esta seria “uma lei da lógica pura” (FREGE, 1893, introdução, p.3, tradução nossa). Apesar de apontar para certa fragilidade da lei V, Frege não suspeitava que esta fragilidade conduzisse um paradoxo que comprometeria toda a sua teoria, o que pode ser percebido em sua surpresa expressa em carta enviada a Russell, como será discutido no capítulo seguinte.

Na introdução das *Leis Básicas* o autor reafirma por diversas vezes sua tese logicista: “a aritmética é simplesmente uma lógica mais desenvolvida” (FREGE, 1893, introdução, p.3, tradução nossa). Essa tese só poderia ser confirmada se as transições entre os passos demonstrativos fossem lógicos. Em outras palavras, a raiz da aritmética só poderia ser a lógica se não houver lacunas nas cadeias de inferência e não existir o uso da intuição.

A necessidade de desenvolver as demonstrações sem deixar lacunas é enfatizada em todo o decorrer da discussão. Para Frege, não bastava indicar quais proposições ou regras seriam usadas numa demonstração, mas seria necessário desenvolvê-la por completo. Não basta satisfazer-se de que cada passo é evidentemente correto, sendo suficiente se uma pessoa quiser apenas ser persuadida quanto à verdade de uma proposição. Para Frege, os matemáticos são o tipo de pessoa que se satisfaz com essa persuasão, pois se preocupam apenas com o conteúdo da proposição e com a possibilidade de demonstração.

Segundo Frege, a novidade dos seus fundamentos não se encontra no conteúdo das proposições da Aritmética, mas na maneira com a qual a demonstração é realizada e sobre quais princípios esta repousa. Nesse sentido, o autor não cria novas definições, novos objetos ou novas relações para a aritmética. O que ele faz é buscar um modo de garantir a verdade dessas proposições estabelecendo uma fundamentação sólida para a Aritmética. Dessa forma, uma nova forma de olhar para a essência das proposições aritméticas requer um novo método de tratamento, neste caso, a lógica e a simbologia da conceitografia.

A simbologia utilizada por Frege nas *Leis Básicas* é basicamente aquela presente em *Begriffsschrift*, mas com alguns aprimoramentos, como ele próprio afirma. Por exemplo, todos os símbolos primitivos da *Begriffsschrift* aparecem nas *Leis Básicas*, exceto $\equiv$ que é substituído por $=$ para indicar a igualdade. Frege discute nas *Leis Básicas* que ele convence a si mesmo de que $=$ possui em Aritmética o mesmo significado que ele pretendia simbolizar. Ou seja, ele usa a palavra “igual” para “coincidente a” e “idêntico a”, e o significado do sinal de igualdade ($=$) é usado em Aritmética da mesma maneira. Além disso, Frege adicionou dois sinais, ($\grave{}$) para percurso de valores de uma função e um símbolo para significar o artigo definido da linguagem ordinária “\”. Segundo Frege, as mudanças que surgem são fruto do profundo desenvolvimento de suas visões lógicas.

As definições de percurso de valores, correspondência biunívoca e seguir em uma série permaneceram as mesmas que aparecem na *Begriffsschrift* e nos *Fundamentos*. Segundo Frege, a noção de percurso de valores de uma função é vital para o desenvolvimento teórico nas *Leis Básicas*, pois traz grande flexibilidade à teoria. De fato, o percurso de valores nada mais é do que o caso geral de uma extensão de conceito, noção utilizada por Frege para definir o número.

Frege acredita que os impedimentos para a apreciação de seus trabalhos anteriores foram a utilização de sinais pouco familiares e as inúmeras páginas com nada além de fórmulas com “aparência alienígena” (FREGE, 1893, p.8, introdução, tradução nossa)[100]. Além disso, a ideia de que as coisas que existem só podem ser percebidas pelo sentido, isto é, uma posição empirista como a de J. S. Mill, também era percebida por Frege como contrária à apreciação de seu livro. Ele permanecia com a ideia de que a Matemática nada tinha a ver com o mundo empírico captável através dos sentidos e com o psicologismo: “os objetos da aritmética, isto é, os números, não podem ser percebidos pelos sentidos” (FREGE, 1893, introdução, p.10, tradução nossa).

A apresentação das *Leis Básicas*, que precede a exposição do sistema proposto por Frege, parece transparecer uma insegurança por trás de argumentos confiantes sobre a concretização e consistência do seu trabalho. Ele tenta, logo de início, alertar o leitor para aquilo que encontrará no decorrer do livro, sugere partes que devem ser privilegiadas numa primeira leitura, defende sua obra, ataca outras... uma mescla de percepção de que seu trabalho é grandioso e que utiliza uma linguagem inovadora, uma abordagem atemporal e a necessidade de chamar atenção do leitor a ir além da primeira leitura, tentando convencer o leitor e a si próprio de que há muita contribuição ali.

Na próxima subseção será apresentado o desenvolvimento da teoria nas *Leis Básicas*. A primeira parte do livro até o paradoxo é exibida de maneira mais detalhada.

[100] “unfamiliar signs, pages of nothing but alien-looking formulas” (FREGE, 1893, introdução, p.8).

Posteriormente serão privilegiadas as definições e teoremas necessários para a discussão sobre o paradoxo.

4.1.1. **Exposição de *Begriffsschrift* nas *Leis Básicas***

Após a introdução, Frege apresenta sua conceitografia que, como foi visto, é a ferramenta utilizada pelo autor para representar e provar as afirmações feitas dentro do sistema axiomático construído por ele. A confirmação de que a Aritmética é um ramo da \lógica se daria, conforme Frege, pela derivação das leis mais simples dos números utilizando apenas significados lógicos. A possibilidade da derivação das leis, por sua vez, só seria possível se as demonstrações seguissem um curso diferente do que é comumente realizado em Aritmética, isso porque demandaria um menor número de métodos de inferência e a necessidade de utilização somente desses métodos no desenvolvimento de uma demonstração o que, na visão do autor, corresponderia a uma exigência muito mais delicada.

Nesse sentido, a diferença entre o que Frege propõe e o que já era desenvolvido por matemáticos no ramo da Aritmética se encontra no fato de que o autor acreditava que aqueles que trabalhassem com a teoria dos números não deveriam estar satisfeitos com transições que fossem evidentemente corretas. Cada passo deveria ser rigorosamente justificado tendo como base certas leis primitivas. Para isso, seria necessário dividir os passos lógicos dos quais as transições são compostas. Isso garantiria que nenhuma pressuposição passasse despercebida e, assim, todo axioma requerido estaria explicitado: “de fato, são precisamente as pressuposições feitas tacitamente e sem consciência que obstruem a nossa compreensão sobre a natureza epistemológica de uma lei” (FREGE, 1893, §0, p.29, tradução nossa).

A importância de se compreender bem os conceitos aritméticos e a noção de correspondência é colocada em primeiro plano no desenvolvimento da obra. Mais especificamente, a preocupação principal está em dar uma definição e/ou um tratamento lógico para as noções aritméticas. Sobre isso, o próprio termo correspondência é substituído pelo termo *relação,* o qual já era utilizado em lógica. *Conceito* e *relação* são, então, os pilares fundamentais sobre os quais Frege constrói seu sistema axiomático.

Uma das primeiras discussões que ocorrem nas *Leis Básicas* sobre o conteúdo aritmético concerne ao conceito de função. Frege acredita que, quando é questionado o significado da palavra função como é usada em Matemática, é comum que as pessoas optem pela seguinte denominação: “função de x é uma expressão, formada de x e números específicos pelo uso da notação de soma, produto, potência, diferença e assim por diante” (FREGE, 1893, §1, p.33, tradução nossa)[101]. Isso seria incorreto porque, nesta situação, uma função representaria apenas uma concatenação de sinais e não aquilo que esta designa, não sendo também a denotação de uma expressão. Por exemplo, dada a função

$$\text{“}(2+3x^2)x\text{”}^{102} \tag{1}$$

Para os numerais $"0","1","2","3"$ [103]os valores da função seriam os números $0, 5, 28,\ 87^{104}$, respectivamente. Entretanto, nenhum desses sinais representam a função, isso porque, a essência de uma função não é alterada pelo argumento que recebe. Para Frege, a essência da função repousa naquela parte da expressão que se encontra através e além de “x". Segundo ele, “a essência da função se manifesta por si mesmo”, sendo mais que uma conexão entre os números que são colocados no lugar de x e os números que aparecem como denotação da expressão (FREGE, 1893, §1, p.33, tradução nossa). Essa conexão seria expressa no curso da curva cuja equação em coordenadas retangulares é $y = (2+3x^2)x$.

A função necessita de uma complementação, ou seja, é *insaturada*. Em outras palavras, o papel de “x” seria o de demarcar os lugares para os numerais que completarão a expressão. Na teoria desenvolvida por Frege, ξ é usado no lugar de x, de modo que todo lugar demarcado com ξ em uma mesma expressão deverá ser substituído pelo mesmo sinal, nunca por outros diferentes, assim como é feito em

---

[101] Um definição atual de função pode ser dada como em Guidorizzi (2001): Um função f é um tipo especial de relação $(A, B, a \longmapsto b)$ em que A e B são dois conjuntos e $a \longmapsto b$, uma regra que permite associar a cada a de A um elemento b de B. O único elemento b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$. Dizemos que $f(a)$ é o valor que a função f assume em a, ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a.

[102] Durante toda a obra, Frege utiliza o recurso das “aspas” para indicar a distinção entre os casos em que ele está se referindo ao sinal, daqueles em que está se referindo à sua denotação.

[103] $"x=0","x=1","x=2","x=\ 3"$.

[104] $f(x)=0, f(x)=5, f(x)=28, f(x)=87$.

Matemática. Esses lugares são denominados *lugar-argumento* e os sinais que ocupam esses lugares num caso dado são denominados *argumentos* da função para esse caso.

O sinal retornado pela função quando esta é completa por um argumento é denominado *valor* da função para aquele argumento. Quando preenchemos os lugares-argumento no nome da função com o nome do argumento obtemos então o nome do valor de uma função para este argumento. Por exemplo, "$(2+3.1^2).1$" é o nome do número cinco, composto pelo nome da função "$(2+3\xi^2)\xi$" e o nome do argumento "1".

Assim como em *Begriffsschrift*, nas *Leis Básicas* o argumento continua sendo entendido como algo que não é uma parte da função, serve apenas para completá-la, já que uma função é, por definição, insaturada. Além disso, a essência da função não é alterada dependendo do sinal que é substituído no lugar de ξ.

Uma segunda discussão importante, na verdade, essencial para o desenvolvimento da teoria fregeana, se encontra na noção de valores de verdade, 'denotação e sentido' e 'pensamento e objeto'. No que diz respeito às funções e aos valores que estas podem assumir, Frege defende que o domínio e os valores de uma função não podem permanecer restritos a números. Por exemplo, dadas as seguintes expressões:

"$\xi^2 = 4$" e "$\xi > 2$",

no caso de se substituir ξ no nome da primeira função[105] pelos argumentos $0,\ 1,\ 2$ e 3, não seriam obtidos números como valores e daí segue a necessidade de se considerar que as funções possam assumir valores diferentes de números. As expressões geradas por esta substituição, $0^2 = 4,\ 1^2 = 4,\ 2^2 = 4$ e $3^2 = 4$, são expressões que representam pensamentos, alguns verdadeiros e outros falsos. Nesse sentido, para Frege, quando uma função deste tipo é escrita, esta não está denotando nada além de um valor de verdade, do mesmo modo que escrever 2^2 não designa nada, além de um número. Nesse sentido, as expressões "$2^2 = 4$" e "$3 > 2$" denotam apenas o mesmo valor de verdade, no caso o verdadeiro, assim como, paralelamente, 2^2 denota o número 4.

[105] Em análise matemática essas expressões não seriam consideradas funções. Entretanto, para Frege elas podem ser consideradas funções que assumem como valores o verdadeiro e o falso, como será explicitado posteriormente.

Aqui é importante ressaltar a diferenciação para Frege entre sentido e referência (denotação). Primeiramente, pode ser percebido a partir do que foi exposto que Frege chama de número 4 tanto a denotação de “4” quanto a denotação de “2^2” e chama de verdadeiro a denotação de “3>2”. Nesse sentido, a denotação de “4” e “2^2” é a mesma, mas o sentido desses sinais é entendido por Frege como diferentes. Sentido e denotação são, portanto, coisas diferentes, de forma que é possível ter diferentes sinais (nomes) para uma mesma denotação, ou diferentes sentidos para uma denotação: “um nome expressa um sentido e denota sua denotação”, designando a expressão com o nome daquilo que esta denota (FREGE, 1893, §2, p.35, tradução nossa).

Frege denomina por “pensamento” o sentido de um nome de um valor de verdade. Uma mesma expressão pode ter dois valores: o verdadeiro, para determinados argumentos, e o falso para todos os outros. É o caso de "$\xi^2 = 4$" que designa o verdadeiro para os argumentos 2 e -2 e o falso para os demais argumentos.

Frege entende que o domínio daquilo que é admitido como argumento deve ser estendido a objetos em geral. Os objetos, por sua vez, são opostos ao conceito de função. Enquanto que a função é insaturada, necessita de complemento, os objetos são saturados, são completos por natureza. Por isso, o nome dos objetos não possuem lugares para argumentos, eles são saturados como os próprios objetos. Um objeto é, nesse sentido, tudo aquilo que não é função como, por exemplo, números, valores de verdade e percurso de valores.

Definidos função e objeto, Frege passa a definir outras noções necessárias para o desenvolvimento da teoria, sobretudo no que diz respeito à caracterização dos números. Essas noções são as seguintes: percurso de valores e extensão de um conceito. Percurso de valores seriam os valores que a função assume quando substituída por determinados argumentos. Nesse sentido, dizer que

“a função $\Phi(\xi)$ tem o mesmo percurso de valores que a função $\Psi(\xi)$”,

equivale a dizer que

“as funções $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ tem sempre o mesmo valor para o mesmo argumento”.

Como exemplo, Frege traz as funções $\xi^2 = 4$ e $3\xi^2 = 12$ quando são tomados números como argumentos.

A definição de extensão de um conceito está associada à definição de conceito propriamente dito. Como visto em *Begriffsschrift*, um conceito é uma função que possui como valores apenas valores de verdade. Diante disso, a extensão de um conceito são os valores que um conceito assume para determinados argumentos. Como exemplo, a função

$$(\xi^2 = 4) = (3\xi^2 = 12),$$

tem sempre como valor o verdadeiro. Com base nisso, pode-se dizer que “o conceito raiz quadrada de 4 tem a mesma extensão que o conceito algo cujo quadrado triplicado é 12”.

Frege também tratou o caso de funções de dois argumentos que são definidas por ele como aquelas que necessitam de dois complementos. Desse modo, o valor da função só pode ser obtido após ser completa com dois argumentos, obtendo assim um objeto. No caso de uma dupla insaturação, o autor utiliza a letra grega ζ, além da letra ξ. O exemplo abaixo traz o caso de dupla insaturação:

$$"(\xi + \zeta)^2 + \zeta".$$

Ao substituir ζ por 1 obtemos a função $"(\xi + 1)^2 + 1"$ que ainda é insaturada, porém necessita apenas de um argumento. Uma função com dupla insaturação é indica por $\Phi(\xi, \zeta)$ de modo que os lugares-argumento indicados por ξ estão relacionados, assim como aqueles indicados por ζ, porém os lugares-argumento ξ e ζ não estão relacionados entre si.

No caso de funções do tipo

$$\xi = \zeta \text{ e } \xi > \zeta,$$

estas são chamadas de relações. Neste caso, diz-se que um objeto Γ *está relacionado* com Δ na relação $\Psi(\xi, \zeta)$ se $\Psi(\Gamma, \Delta)$ é verdadeiro. Semelhantemente, diz-se que o objeto Δ *cai sob* o conceito $\Phi(\xi)$ se $\Phi(\Delta)$ é verdadeiro. Em ambos os casos sempre é suposto que $\Psi(\xi, \zeta)$ e $\Phi(\xi)$ tem como valor um valor de verdade.

Introduzidos os principais símbolos e as caracterizações das funções, relações e seus argumentos, o próximo passo se configura na construção de juízos, ou proposições, as quais se pode atribuir um valor de verdade e os modos de representação dessas afirmações, o que será feito na próxima subseção.

4.1.2. Juízo e pensamento

A necessidade de tratar pensamentos[106] e os juízos de maneira distinta, não somente usando os nomes de equações, deve-se ao fato de que para Frege em uma equação não existe uma declaração, apenas a designação de um valor de verdade, sem propriamente dizer de qual valor de verdade se trata.

Por exemplo, dada a seguinte equação

$$"(2+3=5)=(2=2)"$$

se é conhecido que $2=2$ é verdadeiro, não pode ser afirmado que $2+3=5$, ou seja, que a soma de dois com três é cinco. A equação assinala que “$2+3=5$” está denotando a mesma coisa que “$2=2$”. Há, portanto, a necessidade de inserir na linguagem artificial um sinal que indique que determinada afirmação é verdadeira, ou seja, que seja capaz de afirmar algo como verdadeiro. O sinal introduzido por Frege para tal propósito é $\vdash$, no qual o traço vertical é denominado traço do juízo e o traço horizontal, diferentemente do que acontecia em *Begriffsschrift* em que era denominado traço de conteúdo, passa a ser denominado como horizontal. Nesse sentido, ao escrever

$$" \vdash 2^2=4"$$

a equação “$2^2=4$” transforma-se em uma proposição que é afirmada como uma verdade, ou seja, uma proposição verdadeira. Neste caso, é afirmado que o quadrado de 2 é 4. Cabe reiterar que, apesar de Frege não definir sistematicamente as operações ele as usa com o intuito de construir exemplos de maneira mais fácil e acessível ao leitor.

Juízo, entendido como a compreensão da verdade de um pensamento, distingue-se do próprio pensamento, do qual não se tem a certeza quanto a veracidade ou falsidade. Frege também utiliza outro sinal ($—$) para expressar pensmentos, ou seja, para expressar o caso em que não se distingue entre os valores de verdade, ou seja, se a afirmação tem como valor o verdadeiro ou o falso. O sinal é um pouco mais longo que o símbolo para o negativo (-) para que não haja confusões de leitura.

No exemplo, a função

[106] A partir de 1892, Frege deixa de utilizar a expressão “conteúdo ajuizável”, preferindo a palavra pensamento para designar a mesma coisa. Ver Frege (1892a) Sentido e Referência.

$$— \xi$$

é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade, ou, na nomenclatura fregeana, um conceito. Assim, "$— 2^2 = 4$" denota o mesmo que "$2^2 = 4$", no caso, o verdadeiro. Desse modo, $— \Delta$ é verdadeiro se Δ é verdadeiro e é falso se Δ não é verdadeiro; se Δ é um valor de verdade, então $— \Delta$ é o mesmo valor de verdade e consequentemente,

$$\Delta = (— \Delta)$$

é verdadeiro. Por outro lado, se Δ não é um valor de verdade, então $\Delta = (— \Delta)$ é falso. Logo, $— \Phi(\xi)$ é um conceito e a função $— \Psi(\xi, \zeta)$ é uma relação, independente de $\Phi(\xi)$ ser ou não um conceito ou $\Psi(\xi, \zeta)$ uma relação.

Dado o modo de representar um juízo e uma afirmação, Frege apresenta sua simbologia para representar a negação de uma declaração. Assim, o valor da função

$$\top \xi$$

deve ser o falso para todo argumento para o qual o valor da função

$$— \xi$$

é o verdadeiro, sendo verdadeiro para todos os outros argumentos.

Desse modo, $\top \xi$ é um conceito que cai sob todo objeto com exceção do verdadeiro. Daí, segue que "$\top \Delta$" denota o mesmo que "$\top — \Delta$", "$— \top \Delta$" e "$— \top (— \Delta)$".

Em alguns casos, semelhantes aos anteriores, em que há a concatenação de muitos sinais horizontais pode-se realizar um procedimento denominado por Frege como *combinação de horizontais*[107]. Utilizando este procedimento, ambos $\top (— \Delta)$ e$— \top \Delta$ se tornam $\top \Delta$. O sinal $— — \Delta$, por sua vez, se torna apenas $— \Delta$.

Como exemplo, tomando por base as discussões realizadas até este ponto, Frege traz que $\top 2^2 = 5$ é verdadeiro, então é possível escrever,

$$\vdash\!\top 2^2 = 5$$.

Em palavras: $2^2 = 5$ não é verdadeiro ou o quadrado de 2 não é cinco.

[107] Tradução nossa para o termo "amalgamation of horizontals".

O próximo símbolo introduzido por Frege é um símbolo para a identidade. Como abordado anteriormente, Frege abandona o uso do símbolo ≡ para utilizar = para a identidade[108]. Desse modo,

$$\text{“}\Gamma = \Delta\text{”}$$

denota o verdadeiro se Γ é o mesmo que Δ, denotando o falso em todos os outros casos. Nesse sentido, seja a função

$$\xi = \zeta.$$

Tudo que estiver do lado esquerdo do sinal de identidade, como um todo, denota o ξ-argumento da função, exceto quando o uso das aspas não permitirem; à direita encontra-se o ζ- argumento.

Outro conceito importante nas *Leis Básicas,* e que já aparece em *Begriffsschrift* é o conceito de generalidade. Por generalidade de um conceito Frege entende o fato deste denotar o verdadeiro se para todo argumento o valor da função é o verdadeiro, tendo assim a generalidade da veracidade. Caso contrário, situação em que para todo argumento a função denota o falso, tem-se a generalidade da falsidade. Ou seja, "$\Phi(x)$" é entendido como o verdadeiro se o valor da função "$\Phi(\xi)$" é o verdadeiro para todo argumento; caso contrário denota o falso. Nesse sentido, "$\Phi(\xi)$" sempre adquire uma denotação se "ξ" é substituído por um nome que denota um objeto.

A generalidade da identidade diz que "$\Phi(x) = \Psi(x)$" sempre resultará em um nome da verdade, para quaisquer nomes próprios substituídos por x. Isso acontece por que o sinal x indica de uma maneira indeterminada, o que acarreta a possibilidade da generalidade, enquanto que em "$2^2 = 4$" indica apenas a identidade já que cada sinal tem uma denotação determinada.

Frege coloca que o escopo da generalidade, no entanto, não está bem definido. Isto é, se é escrito que

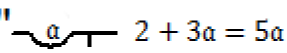
$$\text{"}\top 2 + 3x = 5x\text{"}$$

não é possível, de antemão, saber se esta expressão deve ser tomada como a negação da generalidade ou como a generalidade da negação. Ou seja, o valor da

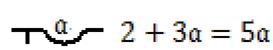
[108] O sinal = aparece nos *Fundamentos da Aritmética* associado à simbologia própria da Matemática, referindo-se a elementos matemáticos. Nas Leis Básicas é a primeira vez que Frege insere o símbolo de igualdade comumente utilizado na Matemática, no interior de sua conceitografia, em substituição ao símbolo de identidade ≡.

função $2 + 3\xi = 5\xi$ não é o verdadeiro para qualquer argumento ou o valor da função $\top 2 + 3\xi = 5\xi$ é o verdadeiro para todo argumento. Assim, $\top 2 + 3x = 5x$ é o verdadeiro para o primeiro caso e o falso para o segundo.

Daí surge a necessidade de expressar de maneira determinada a generalidade da negação tanto quanto a negação da generalidade:

""

representa a generalidade da negação, enquanto que

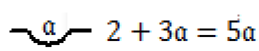
""

representa a negação da generalidade.

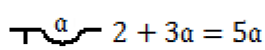
A generalidade por si só é expressa por Frege da seguinte forma:

"".

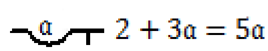
Neste caso, da expressão acima, a generalidade é verdadeira se para todo argumento o valor da função $2 + 3\xi = 5\xi$ é o verdadeiro. Como isso não acontece para este caso[109],



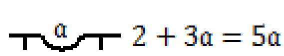
é o falso. E por isso,



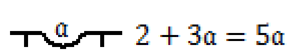
é o verdadeiro. Do mesmo modo, o valor da função



é o falso, pois o valor da função $\top 2 + 3\xi = 5\xi$ não é o verdadeiro para todo argumento; é falso para $\xi = 1$. Com base nisso, pode-se concluir que



é verdadeiro e, por isso, o juízo

""

afirma que *existe pelo menos uma solução para a equação* "$2 + 3x = 5x$".

Desse modo, na lógica de Frege a afirmação da existência de pelo menos um argumento que satisfaça determinada função é traduzida para sua simbologia através da negação da generalidade da negação.

[109] Por exemplo, no caso $\xi = 0$, dentre tantos outros.

Posteriormente nas *Leis Básicas*, Frege insere também uma notação especial para representar o percurso de valores de uma função. Entretanto, antes de apresentar essa notação Frege faz algumas considerações sobre a identidade de funções e o percurso de valores de cada uma destas. No caso de $\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$ ser verdadeiro, então, pela definição de percurso de valores, pode-se dizer que a função $\Phi(\xi)$ tem o mesmo percurso de valores que a função $\Psi(\xi)$, ou seja, é possível transformar a generalidade de uma identidade em uma identidade de percurso de valores e vice e versa. Este fato é posteriormente apresentado por Frege como uma lei da lógica, devendo ser empregada de maneira invariável. Frege (1893) menciona que todo o cálculo lógico de Leibiniz e Boole repousa sobre este fato.

Diante da relevância deste fato, Frege atenta para a necessidade de expressar essa conversão (da generalidade da identidade para a identidade do percurso de valores) através da simbologia de seu sistema. Por exemplo, para

$$" \neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.(\mathfrak{a} - 1) ",$$

Frege escreve

$$"\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon) = \grave{\alpha}(\alpha.(\alpha - 1))"$$

em que "$(\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon)$" é o percurso de valores da função $\xi^2 - \xi$ e $\grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 1)$ é o percurso de valores da função $\xi(\xi - 1)$.

Na próxima subseção, utilizando as ferramentas até aqui apresentadas, serão introduzidas a função $\backslash\xi$ e a condicional em Frege, como aparecem nas *Leis Básicas*.

4.1.3. A função $\backslash\xi$ e a condicional

Do que foi apresentado, similarmente, $\grave{\epsilon}(\epsilon^2 = 4)$ é o percurso de valores da função $\xi^2 = 4$, ou, em palavras, a extensão do conceito raiz quadrada de 4.

Como dito na introdução acima, a partir da introdução das *Leis Básicas*, Frege introduziu também um símbolo para o artigo definido, a função $\backslash\xi$. A função $\backslash\xi$ pode ser definida a partir das duas condições abaixo:

1. Se para o argumento corresponde um objeto Δ tal que o argumento é $\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$, então o valor da função $\backslash\xi$ será o próprio Δ;

2. Se para o argumento não corresponde um objeto Δ tal que o argumento é $\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$, então o valor da função deve ser o próprio argumento.

Desse modo, $\backslash\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon) = \Delta$ é verdadeiro e "$\backslash\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$" denota o objeto que cai sob o conceito $\Phi(\xi)$ se $\Phi(\xi)$ for o conceito tal que apenas um e somente um objeto cai sob; em todos os outros casos "$\backslash\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$" denota o mesmo que "$\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$".

Para ficar mais claro, Frege apresenta os seguintes exemplos:

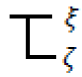
- $2 = \backslash\grave{\epsilon}(\epsilon + 3 = 5)$ é o verdadeiro, pois 2 é o único objeto que cai sob o conceito "*o que acrescentado a 3 resulta em cinco*"; pressupondo uma definição precisa e adequada para o sinal "+".
- $\grave{\epsilon}(\epsilon^2 = 1) = \backslash\grave{\epsilon}(\epsilon^2 = 1)$ é o verdadeiro porque em um campo numérico contendo os inteiros, mais de um único objeto cai sob o conceito "raiz quadrada de 1"[110].
- $\grave{\epsilon}(\top\, \epsilon = \epsilon) = \backslash\grave{\epsilon}(\top\, \epsilon = \epsilon)$ é o verdadeiro porque nenhum objeto cai sob o conceito "que não é idêntico a si mesmo".
- $\grave{\epsilon}(\epsilon + 3) = \backslash\grave{\epsilon}(\epsilon + 3)$ é o verdadeiro porque a função $\xi + 3$ não é um conceito.

É obtido, assim, um substituto para o artigo definido da linguagem comum, o que serve para formar nomes próprios, fora das palavras-conceito. Por exemplo, este permite formar das palavras "*raiz quadrada positiva de* 2", que é um conceito, o nome próprio "*a raiz quadrada positiva de* 2". Há aqui uma preocupação por parte do Frege de que para qualquer argumento, a função $\backslash\xi$ tenha um referente, caso contrário cometer-se-ia um erro lógico. Na verdade, as estipulações do autor sobre a função $\backslash\xi$, são suficientes para que, para qualquer argumento, a mesma sempre tenha uma referência. Ou seja, "$\backslash\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$" sempre tem uma referência, independente se a função $\Phi(\xi)$ seja ou não um conceito, um conceito sob o qual cai nenhum ou mais de um objeto, ou sob o qual cai exatamente um objeto.

O próximo passo de Frege é apresentar a simbologia e a estrutura necessária para construção de proposições complexas. Para isso o autor introduz o traço

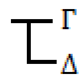
[110] Apesar de nas *Leis Básicas* Frege tratar apenas dos números naturais, ele recorre à existência dos números negativos e, às vezes, dos números racionais para sustentar muitos de seus exemplos. Neste caso específico, assumindo a existência dos números negativos, Frege permite que $\backslash\grave{\epsilon}(\epsilon^2 = 1)$ tenha uma referência.

condicional, a condicional como conjunção, além de utilizar a negação já introduzida. Nesse sentido, para designar subordinação de um conceito sob um conceito, e outras relações importantes, o autor introduz a função de dois argumentos:

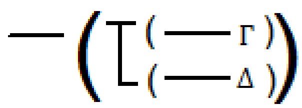
 .

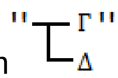
Essa função de dois argumentos é o falso se o verdadeiro é tomado como um ζ-argumento e qualquer outro objeto a não ser o verdadeiro tomado como ξ-argumento; nos outros casos a função assume o valor verdadeiro.

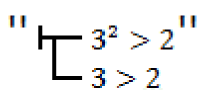
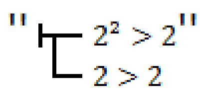
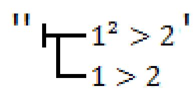
Diante disso, e do que foi discutido anteriormente, o valor dessa função também é especificado por percurso de valores como argumentos. Daí,



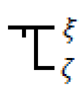
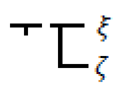
é o mesmo que

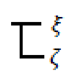
 .

Em  o traço vertical é denominado traço condicional, assim como em *Begriffsschrift*. Utilizando essa simbologia, as seguintes proposições valem:

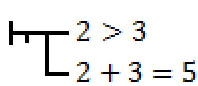
 ,  e  .

A negação pode ser escrita de dois modos:

 ou  .

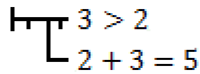
Ambas têm como valor de verdade o verdadeiro se  é falso. Reciprocamente, se as duas primeiras são falsas, então a última é verdadeira. A negação é verdadeira se o consequente é verdadeiro e o subsequente não é o verdadeiro.

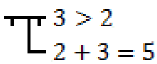
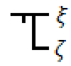
Desse modo,



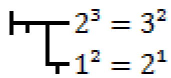
diz que "*2 não é maior que 3* ***e***[111] *a soma de 2 e 3 é 5*", já que o consequente (2 + 3 = 5) deve ser verdadeiro e o subsequente (2 > 3) é falso.

De maneira semelhante, ao escrever



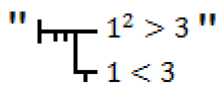
temos, em palavras, "*3 é maior que 2* ***e*** *2 mais 3 é 5*". Esse é um modo para representar a **conjunção** ("e") através da simbologia fregeana. Nesse exemplo,  é o valor de verdade para a função  com o ξ-argumento $\top 3 > 2$ e o ζ-argumento 2 + 3 = 5.

Já em

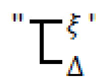
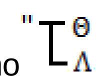


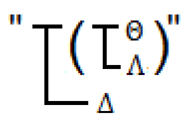
tem-se o caso em que aparece a **negação** de ambas as proposições, ou seja, tem-se "***nem*** *o cubo de 2 é o quadrado de 3,* ***nem*** *o quadrado de 1 é igual a dois*". Ou ainda, "**não** acontece do cubo de 2 ser o quadrado de 3 **e** do quadrado de 1 ser igual a dois".

Por fim, a **disjunção** ("ou" inclusivo) é escrita como no exemplo a seguir



que diz que pelo menos uma das declarações é verdadeiras, ou seja, "*o quadrado de 1 é maior que 3* ***ou*** *1 é menor que 3*".

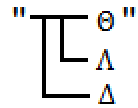
Destaca-se que, quando Frege apresenta o símbolo , qualquer nome próprio pode substituir ξ, inclusive uma nova estrutura semelhante como , originando



.

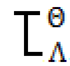
[111] Os negritos aqui inseridos chamam a atenção para a associação da nomenclatura utilizada para os conectivos lógicos da lógica clássica contemporânea relacionando-os com os modos de representação fregeanos.

Esta última pode ser reescrita utilizando a combinação de horizontais vista anteriormente, que resultará em

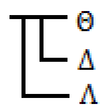


(1).

Do mesmo modo como foi feito para estruturas semelhantes a esta, ela será falsa quando Δ for verdadeiro e 

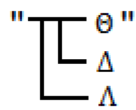
for falso. Utilizando de raciocínio semelhante, 

será falso quando Λ for verdadeiro e Θ for falso. Deste modo, (1) será falso quando Δ e Λ forem verdadeiros e Θ for falso. Deste fato, segue a possibilidade de alterar a posição de Δ e Λ sem que haja mudança no valor de verdade de (1). Neste caso, ter-se-ia:

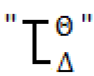


que tem o mesmo valor de verdade de (1).

Na estrutura

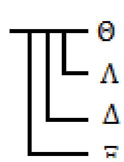


(2).

Frege denominou "— Θ" de componente principal e "— Δ" e "— Λ" de subcomponentes. Entretanto, pode-se olhar para essa mesma estrutura de uma forma diferente, tomando 

como componente principal e apenas "— Λ" como subcomponente. Cabe reforçar, do que já foi discutido, que os subcomponentes são permutáveis entre si. Isso é possível, pois, tomando como exemplo (2), a proposição será o falso apenas quando os subcomponentes forem verdadeiros e o componente principal for falso, o que acarreta a possibilidade de permutabilidade.

O mesmo acontece em

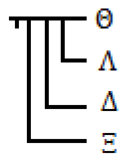


.

Neste caso, tomando como subcomponentes "— Λ", "— Δ" e "— Ξ", pode-se perceber que, para que a proposição seja o falso ambos devem ser verdadeiros enquanto que o componente principal “— Θ” deve ser falso. Este fato indica que “— Λ”, “— Δ” e “— Ξ” são permutáveis dentro da estrutura.

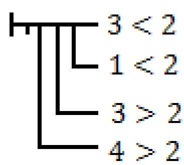
Em *Begriffsschrift*, Frege prova a permutabilidade dos componentes, porém nas *Leis Básicas* o autor assume como já provadas e as utiliza, não reapresentando uma demonstração para este fato.

Similarmente ao que foi discutido,



é verdadeiro se “— Λ”, “— Δ” e “— Ξ” são verdadeiros e “— Θ” é falso.

Como exemplo para estruturas mais complexas, que contém mais de um subcomponente, Frege traz a seguinte estrutura

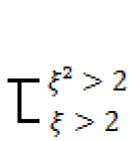


.

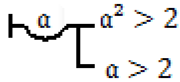
Esta simboliza a seguinte proposição “*3 não é menor que 2* ***e*** *1 é menor que 2* ***e*** *3 é maior que 2* ***e*** *4 é maior que 2*”.

Frege também discute o sinal “ >” no qual, se tivermos “$\Gamma > \Delta$” tal expressão denotará o verdadeiro se Γ e Δ são números reais e Γ é maior do que Δ; denotando o falso em todos os outros casos.

Outro sinal bem definido na lógica fregeana é o sinal Γ^2. Nesse sentido, Γ^2 sempre terá uma denotação se Γ for um objeto. Neste caso, o valor da função

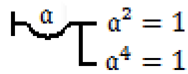


é verdadeira para todo argumento. Assim, podemos escrever



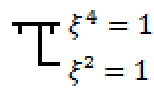
,

Em que α é o argumento da função e/ou relação. Em palavras, esta construção significa: "*se uma coisa é maior do que 2, então seu quadrado também é maior do que 2*". Outro exemplo que indica essa construção é o seguinte:



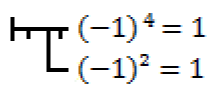
que em palavras significa: "*se o quadrado de algo é igual a 1, então quando elevamos este objeto a quatro também obtemos 1*". Ou ainda, "*toda raiz quadrada de 1 é também uma raiz quarta de 1*"; ou "*todas as raízes quadradas de 1 são raízes quartas de 1*". Neste caso, temos a subordinação de um conceito sobre outro conceito, uma *afirmação universal afirmativa*.

As funções $\xi^4 = 1$ e $\xi^2 = 1$ de um argumento possuem como valor apenas valores de verdade, sendo, portanto, conceitos. O conceito



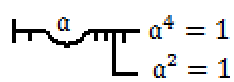
(3).

é composto pelos dois conceitos $\xi^4 = 1$ e $\xi^2 = 1$ como suas marcas características. Sobre o conceito (3) cai, por exemplo, o número -1:

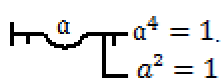


Ou seja, -1 é a raiz quadrada de 1 e é a raiz quarta de 1.

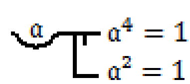
Anteriormente, Frege mostrou que a expressão "existe" da linguagem comum pode ser escrita nos termos de sua simbologia o que aqui é conveniente para escrever que "existe algo que é a raiz quadrada de 1 e a raiz quarta de 1", que ficaria:


;

ou cancelando as duas negações que aparecem imediatamente antes do traço condicional, tem-se a proposição:

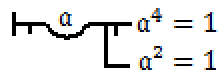


Podemos ainda escrever a seguinte proposição:



Aqui essa proposição representa a afirmação “se algo é raiz quadrada de 1 então este objeto não é a raiz quarta de 1”; ou ainda “nenhuma raiz quadrada de 1 é raiz quarta de 1”. Neste caso, a proposição denota como valor de verdade o falso. Essa proposição representa uma *universal negativa*.

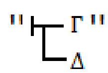
Disso segue que sua negação é verdadeira, sendo entendida como um juízo:

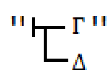
 .

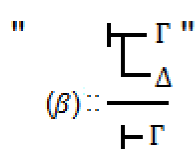
A negação de uma universal negativa nos dá uma proposição *particular afirmativa*, que é o caso da proposição anterior. Em palavras, esta nos diz que “algumas raízes quadradas de 1 são raízes quartas de 1”, ou seja, que existe pelo menos um objeto que satisfaz a propriedade de ser raiz quadrada de 1 e raiz quarta de 1.

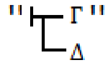
A partir dessas discussões, o próximo passo de Frege é apresentar seus dois métodos de inferência, ou regras de dedução.

4.1.4. Métodos de inferência e consequências nas *Leis Básicas*

O primeiro método de inferência apresentado por Frege é o *modus ponens*, no qual das proposições  e "$\vdash \Delta$" é inferido "$\vdash \Gamma$". Este método de inferência é o único método utilizado explicitamente por Frege em *Begriffsschrift* e reaparece nas *Leis Básicas*.

A fim de representar de maneira sintetizada as inferências realizadas, Frege utiliza índices para cada proposição e uma maneira determinada para exibir os esquemas gerais das inferências. Ou seja, para o primeiro método de inferência poderia ser dado o índice (α) para a proposição  e o índice (β) para a proposição "$\vdash \Delta$". O esquema de inferência seria representado por:



em que (β) representa a proposição "$\vdash \Delta$", como anteriormente estabelecido, e“::” representa a posição que a proposição (β) ocupa na inferência, no caso a segunda posição[112], depois de  . A linha que aparece após “::” indica qual método de inferência está sendo utilizado, já que o sistema apresentado nesta obra contém três métodos de inferência; neste caso a linha contínua indica que o método utilizado é o *modus ponens*, o primeiro método apresentado por Frege.

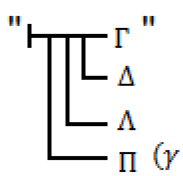
A mesma inferência pode ser escrita da seguinte maneira:

$$"(\alpha): \frac{\vdash \Delta}{\vdash \Gamma}"$$

em que (α) indica a proposição  e “:” indica que ela aparece antes de "$\vdash \Delta$" na cadeia de inferência[113].

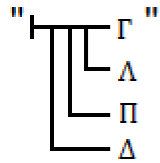
Em *Begriffsschrift*, o primeiro método de inferência é o único utilizado por Frege, e nas *Leis Básicas* o autor indica que poderia continuar o desenvolvimento da teoria apenas com este. Frege afirma que a opção por inserir outros métodos de inferência está ligada ao fato de realizar demonstrações mais sintéticas, isto é, uma forma de evitar demonstrações demasiadamente longas.

Existem casos em que não é possível aplicar o primeiro método de inferência imediatamente. Desse modo, certas manipulações são necessárias para possibilitar a aplicação do método. Por exemplo, considerando como premissas as seguintes proposições:

 e "$\vdash \Delta$ $(\beta$ " [114],

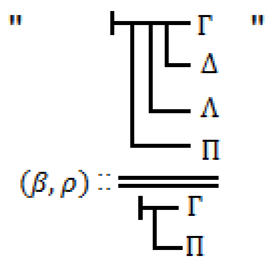
é necessário primeiramente aplicar a permutabilidade entre os subcomponentes de maneira que o subcomponente $—\Delta$ fique por último no esquema de inferência. Depois de realizada essa permutação a proposição (γ), se tornará:

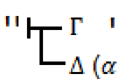
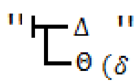
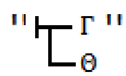
[112] Ou, em linguagem aristotélica, pode-se dizer que a proposição β ocuparia o lugar da premissa menor.
[113] É a premissa maior.
[114] A notação (γ) e (β), ao lado de cada proposição, são os índices dados às mesmas com o objetivo de posteriormente emitir sua escrita completa. Aqui, novamente, Frege opta por construir caminhos que levem à expressar e apresentar raciocínios de maneira sucinta.

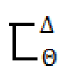
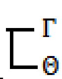
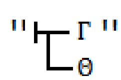


Segundo Frege, numa cadeia de inferências existe a necessidade de se conhecer bem todos os passos de forma que estes sejam bem justificados. Entretanto, ele pontua que, nas demonstrações feitas por ele, irá realizar as permutações direto, sem acrescentar mais um passo. Isso é feito com o mesmo objetivo pelo qual Frege utiliza índices para representar as proposições: para apresentar demonstrações relativamente curtas.

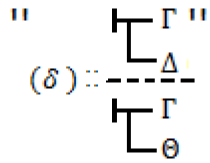
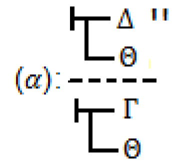
Nos casos em que houver mais de duas proposições, por exemplo, $(\gamma), (\beta)$ e (ρ), em que (ρ) é "$\vdash \Lambda$" e (γ), (β) permanecem representando as proposições já apresentadas aqui, a cadeia de inferências poderá ser representada da seguinte forma:



O segundo método de inferência apresentado por Frege, parte das proposições  e  das quais é inferido . Esta regra é conhecida como a 'lei do silogismo'.

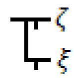
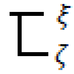
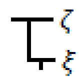
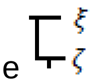
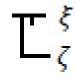
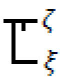
Este método de inferência só pode ser falso no caso de Θ ser verdadeiro e Γ ser falso. Partindo então deste pressuposto, se Θ é verdadeiro então Δ também deve ser verdadeiro. Caso contrário ter-se-ia  falso. Daí, tomando Δ como verdadeiro Γ também deve ser verdadeiro, caso contrário  seria falso. Entretanto, Γ verdadeiro, contradiz a suposição inicial de Θ ser verdadeiro e Γ ser falso. Logo, não é possível que isso aconteça, ou seja, não é possível que Θ seja verdadeiro e Γ seja falso. A única possibilidade,  deve ser falso. Portanto, temos .

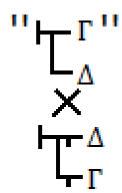
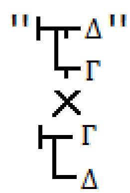
Esse método de inferência pode ser escrito das seguintes maneiras:

 ou  .

No primeiro caso, “::” indica que (δ) aparece após (α) na cadeia de inferência. Já no segundo, “:” indica que (α) aparece antes de (δ) na cadeia de inferência. Como mostra o esquema, para este métido é utilizada a linha pontilhada.

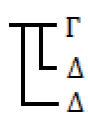
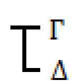
Frege apresenta em seguida, antes de exibir o terceiro método de inferência, alguns casos em que proposições têm o mesmo valor de verdade para os mesmos argumentos e, portanto, podem ser substituídas umas pelas outras em uma inferência.

É o caso, por exemplo, das duplas de funções  e  ;  e  ;  e  que tem os mesmos valores para os mesmos argumentos. A segunda dupla de funções pode ser reduzida a primeira se no lugar de $—\zeta$ colocarmos $\top\zeta$. Frege utiliza a transição de uma proposição desse tipo a outro quando for necessário para concluir uma cadeia de inferência. Essas transições serão indicadas da seguinte forma, utilizando como exemplo o primeiro caso:

 e 

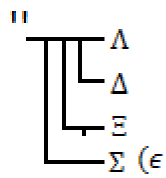
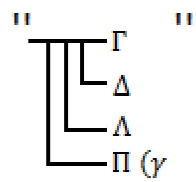
O segundo caso, redutível ao primeiro, pode ser escrito na seguinte regra: “um subsequente pode ser permutável com um componente principal se o valor de verdade de cada um é simultaneamente oposto” (FREGE, 1893, §15, p.60, tradução nossa).

Além disso, quando um subcomponente ocorre mais de uma vez na proposição este precisa ser escrito apenas uma vez, como acontece no caso abaixo:

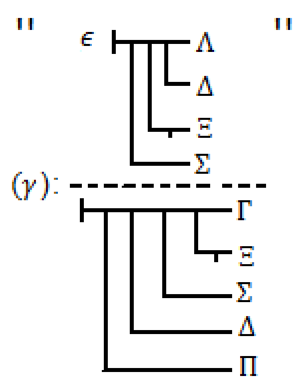
 $\Rightarrow$ 

A primeira proposição pode ser escrita como a segunda, pois ambas tem o mesmo valor de verdade. Esse procedimento é denominado por Frege como *combinação de subcomponentes idênticos*.

Outra lei introduzida por Frege diz respeito à conclusão em uma cadeia de inferências e dos procedimentos que devem ser realizados em situações padrão. Segundo o autor, se a mesma combinação de sinais ocorre em uma proposição como componente principal e em outra como subcomponente, uma proposição deve ser inferida na qual o componente principal da segunda é o componente principal, e todos os subcomponentes das duas, exceto aquele mencionado, são subcomponentes. Além disso, como ocorria anteriormente, aqui subcomponentes que cocorrem nas duas precisam ser escritos uma única vez (FREGE, 1893). Para exemplificar tomemos as seguintes proposições

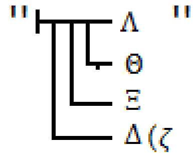
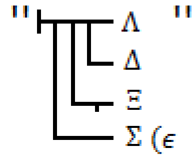

e


com as quais construímos a seguinte cadeia de inferência:

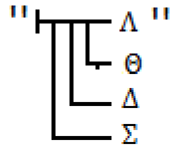


A partir da conclusão e das proposições iniciais pode-se perceber que —Γ que aparece como componente principal da segunda premissa se torna o componente principal da conclusão. Além disso, —Λ que é componente principal na primeira premissa e subcomponente na segunda não aparece na conclusão. Os demais subcomponentes aparecerem uma única vez como subcomponentes da conclusão.

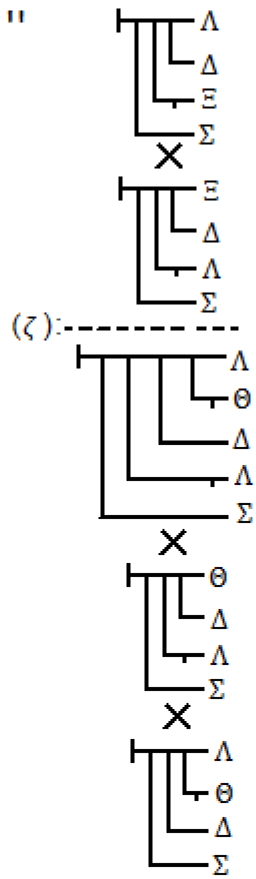
O terceiro método de inferência de Frege parte de proposições do tipos

 e  .

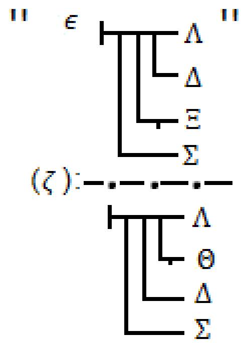
A concusão final é



a qual é alcançada através do seguinte processo:



Na primeira transição feita, ainda referente à proposição (ϵ), é realizada com o objetivo de mudar o componente principal da proposição, utilizando a contrapositiva. As duas últimas transições são feitas com o objetivo de eliminar uma ocorrência de "$\top\Lambda$" através da combinação de subcomponentes idênticos. Essa cadeia de inferências abreviada ficaria:

 .

A linha pontilhada com traços e pontos é utilizada para separar as premissas da conclusão, demarcando a utilização do terceiro método. Esse método é expresso por Frege através das seguintes palavras:

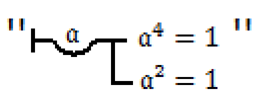
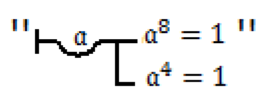
> Se duas proposições tem os mesmos componentes principais enquanto que um subcomponente de uma difere do subcomponente da outra apenas em um traço de negação, então uma proposição deve ser inferida na qual o componente principal comum é o componente principal, e todos os subcomponentes das duas, exceto os dois mencionados, são subcomponentes. Aqui subcomponentes ocorrendo em ambas deve ser escrito uma única vez (combinação de subcomponentes idênticos). (FREGE, 1893, §16, p.65, tradução nossa).

Frege ainda discute como alguns dos silogismos podem ser englobados na sua linguagem. Como exemplo, o autor traz o seguinte silogismo em Barbara[115]:

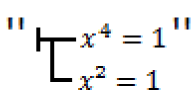
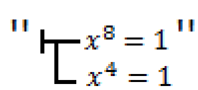
Todas as raízes quadradas de 1 são raízes quartas de 1
Todas as raízes quartas de 1 são raízes oitavas de 1

Todas as raízes quadradas de 1 são raízes oitavas de 1

poderiam ser escritos da seguinte forma:

 e  .

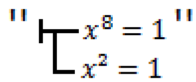
Entretanto, se as premissas forem escritas da maneira acima não será possível aplicar o método de inferência, o que é possível se as premissas forem escritas da seguinte maneira:

 e  .

[115] Um silogismo em BArbArA, é um silogismo da primeira figura, em que as premissas e a conclusão são universais afirmativas (AAA). Ver LIARD (1968).

Frege é sistemático na utilização de letras latinas ou góticas, de forma que temos que ter em mente que ambas não expressam a mesma ideia, apesar das duas apenas indicarem um objeto e não denotá-lo. Uma proposição com letras latinas pode sempre ser transformada em uma proposição com letras góticas.

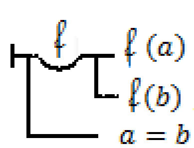
Nesse sentido, após realizada a transformação para letras romanas, a conclusão, utilizando o segundo método de inferência será



Na próxima seção, serão discutidas algumas particularidades da noção de função em Frege, como a expressão da generalidade de funções, funções de primeiro, segundo e terceiro níveis e funções de nível desigual.

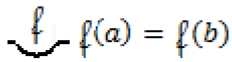
4.1.5. Generalidade de funções, funções de diferentes níveis e a função $\xi \cap \zeta$.

Além da possibilidade de expressar a generalidade para objetos, como em , na simbologia fregeana também é possível expressar a generalidade com respeito a funções. As letras funcionais utilizadas por Frege para distinguir uma função de um objeto são: "f","g","h","F","G" e "H", com o auxílio das letras góticas correspondentes para expressão da generalidade. As outras letras a, b, c, d, x, etc., serão chamadas letras-objeto entre as quais também se encontram as letras gregas minúsculas que ocorram nos lugares de nomes próprios. O escopo das letras latinas compreende tudo que ocorre na proposição a não ser o traço do juízo, já no caso das letras góticas, o escopo destas é demarcado utilizando as concavidades. Dessa forma, torna-se possível construir sinais do tipo:

 [116],

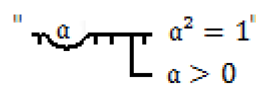
que corresponde a uma lei básica de Frege. Neste caso, para qualquer que seja a função f, se $a = b$, então $f(b)$ implica $f(a)$. Do mesmo modo, seja $\mathfrak{f}$ um nome de um

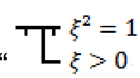
[116] $\forall f((a = b) \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a)))$.

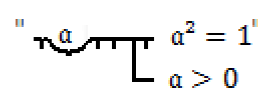
conceito, então [117] indica que os objetos a e b caem sob os mesmos conceitos. Com isso, Frege introduz o cálculo de predicados de segunda ordem, que permite a quantificação de funções, possibilitando construir proposições como: “Toda função f é tal que...” e “Alguma função f é tal que...”.

Ainda sobre funções, nas *Leis Básicas* há quatro tipos de funções (conceitos): funções de primeiro nível, funções de segundo nível, funções de terceiro nível e funções de nível desigual. Como foi visto, uma função de primeiro nível será da forma $X(\xi)$, com ξ demarcando o lugar para um único argumento que deverá ser um objeto. Há ainda funções de primeiro nível de dois argumentos, representadas por $\Psi(\xi,\zeta)$, em que ξ e ζ demarcam os lugares dos argumentos, que, do mesmo modo, deverão ser dois objetos.

A partir dos exemplos abaixo Frege introduz a noção de função de segundo nível. Sejam os sinais:

 ,  e  .

Ambos são obtidos de “”, substituindo o nome “$\Phi(\xi)$” pelos nomes de função “$\xi^2 = 4$”, “$\xi > 0$” e “”. Neste caso, então, apenas nomes de função de um argumento podem ser substituídos em “$\Phi(\xi)$”, não podendo ser substituído por nomes próprios ou nomes de função de dois argumentos. No caso em que o símbolo “$\Phi(\xi)$” é preenchido por uma função de dois argumentos, o ζ-argumento não deverá ser preenchido.

Nos casos acima,  ,  e  são valores da mesma função , para diferentes argumentos, sendo estes mesmos funções de um argumento.

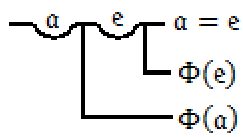
Em síntese, as funções cujos argumentos são objetos, Frege denominou funções de primeiro nível; enquanto que as funções cujos argumentos são funções de primeiro nível, Frege denominou funções de segundo nível. Logo,  é uma

[117] $\forall f\ (f(a) = f(b))$.

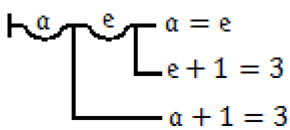
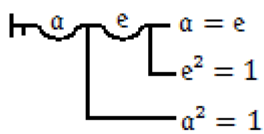
função de segundo nível, em que $\Phi(\,)$ demarca o lugar do argumento. Essa função de segundo nível possui como valores apenas valores de verdade, podendo ser denominada, portanto, conceito de segundo nível.

É importante notar que, uma função nunca pode ocorrer como argumento de outra função do tipo "$\mathrm{X}(\xi)$", mas o valor de uma função para um determinado argumento pode ocorrer como argumento de uma função de primeiro nível. Isso aconteceria, por exemplo, substituindo "ξ" em "$\mathrm{X}(\xi)$" por $\Phi(2)$, resultando em $\mathrm{X}(\Phi(2))$.

Frege traz como exemplo de função de segundo nível a seguinte:



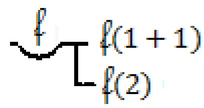
Em que

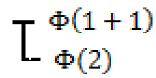
 e .

Frege coloca que o sinal $\Phi(2)$ também pode ser visto como uma função de segundo nível. Esta possuirá como valor um valor de verdade para argumentos do tipo $\xi + \xi = \xi.\xi$ (o verdadeiro) e $\xi + 1 = 4$ (o falso), e um objeto para argumento do tipo $\xi + 1$ (o 3). Já $-\Phi(2)$ seria uma função do segundo nível cujo valor será sempre um valor de verdade. Neste último caso, pode-se dizer que esta função representa uma propriedade do número 2, já que será verdadeira apenas quando o número 2 satisfizer o conceito colocado como argumento. Tem-se, também uma função de segundo nível, que não é um conceito, em $\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$. É importante ressaltar que existem funções de segundo nível que têm como argumento funções de primeiro nível de dois argumentos e funções de segundo nível de dois argumentos (duas funções de primeiro nível).

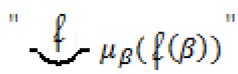
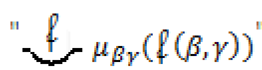
Existem, também, as funções de nível desigual, que tem como um exemplo a função primeira derivada. Tomando como argumento para esta função, a função de primeiro nível ξ^2 obter-se-á outra função de primeiro nível $2.\xi$. Neste caso, só será possível obter um objeto como valor para essa função quando for tomado como argumento um objeto, como o número 5, retornando como valor o número 10. Então, a primeira derivada é uma função de dois argumentos, o primeiro, uma função de primeiro nível de um argumento, e o segundo que deve ser um objeto. Por este motivo, a função primeira derivada é entendida por Frege como uma função de nível desigual de dois argumentos.

Do mesmo modo que  é o valor da função de segundo nível , para o argumento $\xi = \xi$, em

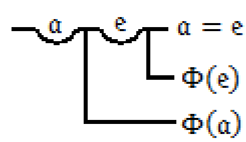


tem-se o valor de uma função de terceiro nível para o argumento , que é uma função de segundo nível cujo argumento é uma função de primeiro nível de um argumento.

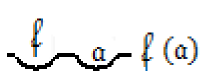
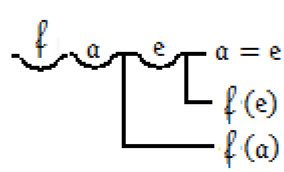
Frege introduz, então duas funções de terceiro nível:

 e .

Os lugares-argumento se tornam reconhecíveis aqui por “μ_β” e “$\mu_{\beta\gamma}$”. Esses dois sinais não fazem parte de *Begriffsschrift*, como aqueles utilizados anteriormente, mas são usados provisoriamente. Como exemplo, Frege coloca que, se tomarmos como argumento para o primeiro nome de função de terceiro nível, as seguintes funções de segundo nível de um argumento:

, $\Phi(2)$ e ,

os valores a serem obtidos, serão, respectivamente:

,  e .

Do mesmo modo, como nas funções de primeiro nível, em que é possível expressar a generalidade, o mesmo acontece com as funções de segundo nível. Frege então representa uma função de segundo nível, cujo argumento é uma função de primeiro nível, da seguinte maneira:

$$\mathcal{M}_\beta(\Phi(\beta)),$$

utilizando a letra funcional latina $\mathcal{M}$, como indicado em uma função de primeiro nível de um argumento por “$f(\xi)$”. A letra β é o argumento da função que ocorre como argumento do todo. Este tipo de notação será utilizado posteriormente para expressar uma variação da lei básica II.

Na simbologia fregeana, uma função de segundo nível pode ser representada, de certo modo, como funções de primeiro nível, em que as funções que aparecem como argumentos da primeira são representadas por seu percurso de valores. Frege também apresenta definições particulares de algumas funções. Dentre estas, devido à importância para este trabalho, será apresentada a função $\xi \cap \zeta$. Essa função permite que o valor de uma função seja expresso apenas pelo argumento e pelo percurso de valor da mesma. Ou seja, permite designar o valor da função $\Phi(\xi)$ para o argumento Δ, $\Phi(\Delta)$, em termos de “Δ” e “$\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$”. Para isso, Frege utiliza a notação “$\Delta \cap \grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$” que deverá significar o mesmo que “$\Phi(\Delta)$”, de forma que o objeto $\Phi(\Delta)$ será o valor da função $\xi \cap \zeta$ para os argumentos Δ e $\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$. Frege define a função $\xi \cap \zeta$ para qualquer objeto tomado como argumento da seguinte maneira:

$$\Vdash \backslash \grave{\alpha}\left(\top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top \begin{array}{l} \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ u = \grave{\epsilon}\mathfrak{g}(\epsilon) \end{array} \right) = a \cap u \qquad \text{(A}$$

Para determinar o valor desta função, Frege distingue dois casos:

1. Se o ζ-argumento é um percurso de valor, então o valor da função $\xi \cap \zeta$ é o valor, para o ξ-argumento como argumento, da função cujo percurso de valor é o ζ-argumento.
2. Se o ζ-argumento não é um percurso de valor, então o valor da função $\xi \cap \zeta$ para qualquer ξ-argumento é $\grave{\epsilon}(\top \epsilon = \epsilon)$.

Utilizando notação atual, e a notação de extensão de conceito fregeana, é possível reescrever a parte de dentro dos parênteses em (A) da seguinte maneira:

$$\exists g\left(\left(u = \grave{\epsilon}g(\epsilon)\right) \wedge g(a)\right).$$

Em palavras: existe um conceito $g(\xi)$ tal que u é a extensão deste conceito e a cai sob este conceito. Dessa forma, a faz parte da extensão u, porque cai sob o conceito cuja extensão é u. Portanto, a é um membro de u se, e somente se, a cai sob o conceito que u é a extensão. Nesse sentido, a função $\xi \cap \zeta$ é um correspondente para a relação de pertinência e é possível escrever:

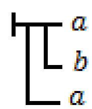
$$a \in u \text{ para } a \cap u.$$

Esta função será fundamental para a compreensão da derivação do *paradoxo de Russell* nas *Leis Básicas* de Frege, realizada na seção 5.2 deste trabalho.

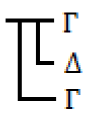
Na próxima seção, serão apresentadas as seis leis básicas da Aritmética e algumas deduções de proposições necessárias para a posterior discussão sobre o paradoxo.

4.1.6. As seis leis básicas para a aritmética e a derivação de proposições

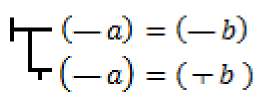
A primeira lei apresentada por Frege também é denominada pelo autor como lei I, que em letras latinas é expressa por:



(I

De fato, se  fosse falso, obrigatoriamente teria subcomponentes $—\Gamma$ e $—\Delta$ verdadeiros e, simultaneamente, $—\Gamma$, enquanto componente principal, falso, o que não é possível. Daí segue a validade da lei.

Em segundo lugar, Frege apresenta a lei IV:



(IV

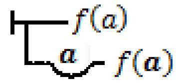
Esta lei diz que algo não pode ter como valor dois valores de verdade opostos, ou seja, não pode ser simultaneamente verdadeiro e falso, equivalendo à lei da não contradição.

De fato, $—\Delta$ e $\top\Delta$ possuem valores de verdade diferentes e opostos. Do mesmo modo, $—\Gamma$ também terá como valor um valor de verdade, que deverá coincidir com o de $—\Delta$ ou com o de $\top\Delta$. Daí segue a veracidade da lei IV de Frege.

A terceira lei apresentada por Frege é denominada por ele como lei VI, que segue da denotação do nome de função $\backslash\xi$, já apresentada neste trabalho:

$$\vdash a = \backslash\grave{\epsilon}(a = \epsilon) \qquad \text{(VI}$$

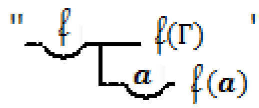
A quarta lei apresentada é a lei IIa. Esta lei indica que o que vale para todos os objetos, vale também para algum objeto particular.



(IIa

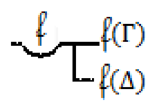
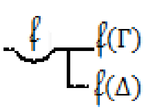
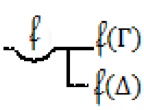
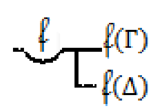
Ou seja, o valor de verdade que se obtém é sempre o verdadeiro, qualquer que seja o nome próprio que seja substituído no argumento. Aqui a letra gótica no subcomponente indica a generalidade sobre o objeto, enquanto que a letra latina no componente principal indica que se trata de um objeto indeterminado em particular.

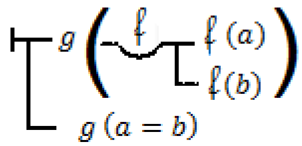
Como Frege pretendia expressar a generalidade também para os nomes de função, ele introduziu novos símbolos para representar a função, como foi visto na seção anterior. Na declaração



,

Frege expressa a generalidade da função “$\mathfrak{f}$”. A declaração afirma que o valor de verdade desta é independente do nome da função que será substituído em “$\mathfrak{f}$”. Assim, o valor de verdade seria o mesmo para qualquer objeto "Γ" que essa declaração possa denotar.

Diante disso, se $\Gamma = \Delta$ é verdadeiro, então  é também verdadeiro. Ou seja, Γ é o mesmo que Δ, então Γ cai sob todo conceito que Δ cai; ou, em outras palavras, toda afirmação que valer para Δ, vale para Γ. Reciprocamente, se $\Gamma = \Delta$ é falso, então nem toda afirmação que vale para Δ também vale para Γ, ou seja,  é falso.Nesse sentido, $\Gamma = \Delta$ tem sempre o mesmo valor de verdade de . Consequentemente, [o valor de verdade]  cai sob todo conceito que [o valor de verdade] $\Gamma = \Delta$ cai sob. Assim,



(III

A última lei apresentada por Frege é a lei V. Anteriormente, Frege discute e retoma neste ponto o fato de que uma identidade de percurso de valores sempre pode ser transformada na generalidade de uma identidade, e reciprocamente. Deste fato, obtém-se a última lei apresentada por Frege:

$$\vdash \left(\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)\right) = \left(\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\right)$$ (V

Posteriormente, Frege apresenta um sumário com as seis leis básicas para a Aritmética, apresentado no livro do seguinte modo:

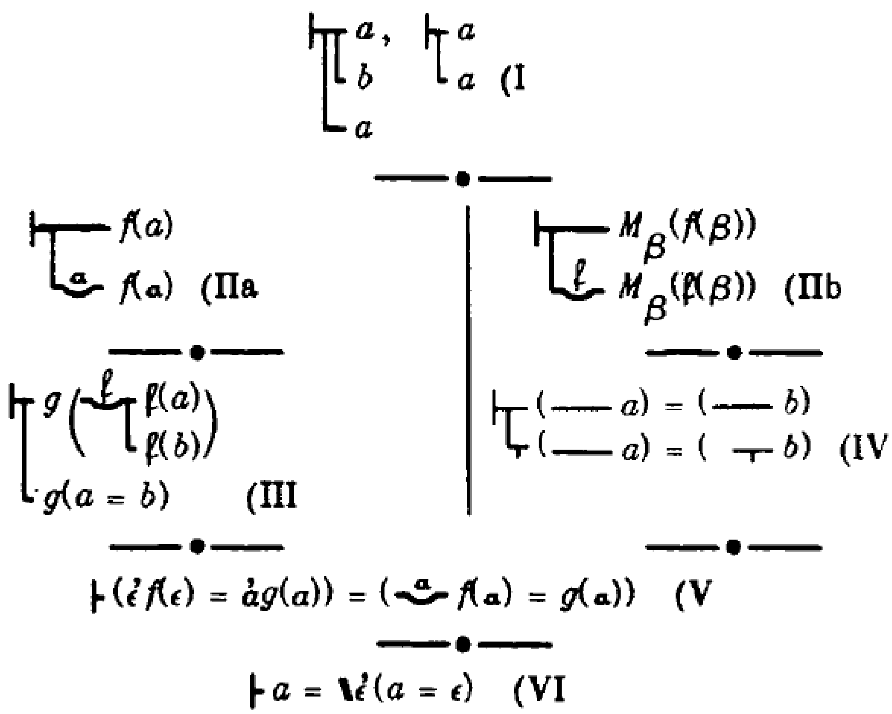
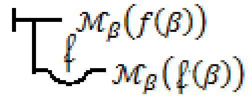


Figura 2 Resumo das leis básicas (FREGE, 1893, §47, p. 105)

A lei IIb,

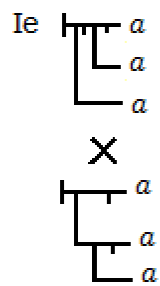


,

que aparece no resumo das leis básicas acima, é uma reformulação da lei básica IIa, que indica que o que vale para todas as funções de primeiro nível, vale também para qualquer função de primeiro nível. Nesse sentido, essa lei é para as funções de segundo nível o que a lei IIa representa para as funções de primeiro nível. Os símbolos "$\mathcal{M}_\beta$" e "$\mathfrak{f}$" na segunda lei corresponde a letra "f" e "a", respectivamente, na primeira.

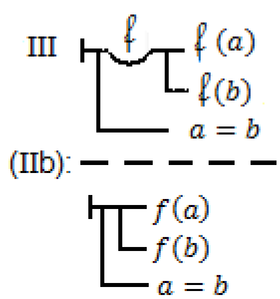
A partir de agora, serão apresentadas algumas das deduções (proposições Ig, IIIa, Va e Vb) realizadas por Frege em §50, §51 e §52 das *Leis Básicas,* e que serão úteis posteriormente para a derivação do *paradoxo de Russell* pelos significados dos símbolos conceitográficos fregeanos. É também um exemplo de como as inferências são realizadas dentro deste sistema.

A derivação da proposição Ig, parte da proposição Ie[118], derivada da lei I, substituindo b por a e combinando os subcomponentes iguais:



(Ig)

A derivação a ser realizada a seguir parte da lei III e da lei IIB, gerando a proposição IIIa:

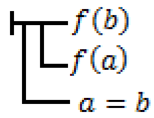


(IIIa)

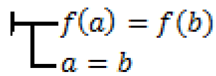
A proposição IIIa pode ser entendida como: Se a coincide com b, então tudo que vale para b também vale para a. Outras duas proposições que serão utilizadas posteriormente, são denominadas por Frege como lei Va e lei Vb, ambas derivadas a

[118] A derivação de tal proposição será apresentada no Apêndice II.

partir da lei V com outras proposições. Para esta inferência serão necessárias as seguintes proposições (IIIc) e (IIIh)[119], que são deduzidas por Frege nas *Leis Básicas*:

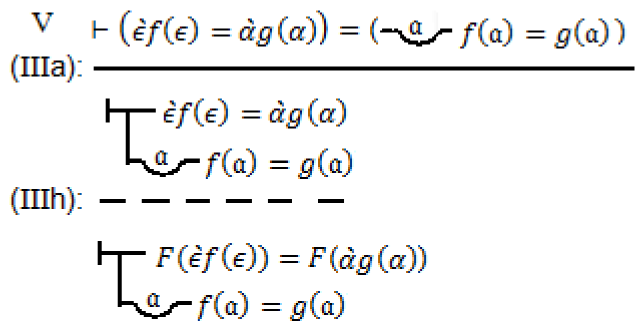


(IIIc)



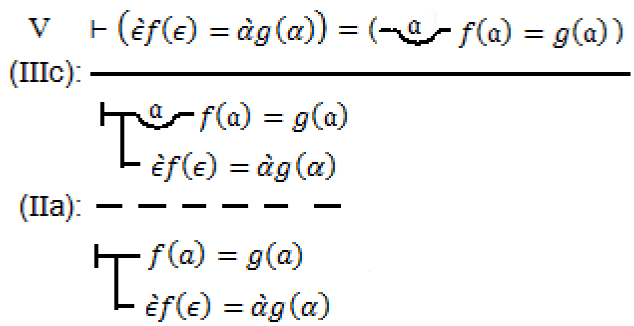
(IIIh)

A partir destas proposições e das leis V e IIa, é possível realizar a derivação de Va e Vb . A apresentação é feita neste trabalho da mesma maneira feita por Frege:



(Va)

E, a derivação da proposição Vb é feita da seguinte maneira:



(Vb)

Na derivação acima, IIa é utilizada com “$f(\xi)$” sendo substituída por "$f(\xi) = g(\xi)$”.

No próximo capítulo, a lei V será discutida de maneira mais profunda por ser exatamente a lei que gera o paradoxo dentro da teoria fregeana. Essas discussões serão pautadas no conteúdo das cartas trocadas entre Russell e Frege, assim como no epílogo do segundo volume das *Leis Básicas*, no qual Frege deriva o paradoxo dentro da própria teoria e propõe alternativas para evitá-lo.

[119] As derivações de tais proposições podem ser encontradas no Apêndice II.

5 A QUINTA LEI BÁSICA E O PARADOXO DE RUSSELL

Até este momento, o que foi discutido neste trabalho diz respeito ao percurso realizado por Frege a partir de *Begriffsschrift* até o primeiro volume das *Leis Básicas da Aritmética*. A ideia inicial foi de preservar o caminho percorrido por Frege, explorando suas principais convicções e conceitos, com o objetivo de melhor compreender o significado que a identificação do *paradoxo de Russell* teve para ele e para a Matemática como um todo.

No capítulo anterior, explorou-se a construção do sistema fregeano nas *Leis Básicas*, englobando desde a fixação dos símbolos primitivos até a apresentação das seis leis básicas, que seriam os axiomas de sua teoria a partir dos quais se deduz toda a Aritmética. Nesta obra, ele ainda define alguns conceitos importantes em Matemática, em particular o conceito de número. O primeiro volume das *Leis Básicas* englobava aspectos da teoria matemática para os números naturais. Frege estendeu sua teoria em um segundo volume, que continha a discussão e a construção conceitográfica dos conceitos de número negativo, racional, irracional e complexo. Este volume estava em processo de impressão quando ele recebeu uma carta do também matemático Bertrand Russell, na qual este comunicava a Frege a existência de uma contradição na teoria desenvolvida pelo autor no primeiro volume.

Neste capítulo, serão discutidos a identificação do paradoxo por Russell, o que caracteriza este paradoxo nas *Leis Básicas* e como essa descoberta chegou a Frege. Serão enfatizados aspectos lógico-matemáticos do paradoxo em dois momentos: 1. A partir das discussões entre Russell e Frege e; 2. A partir das discussões publicadas por este último em um epílogo do volume dois de *As Leis Básicas da Aritmética*.

5.1. A carta de Russell

As correspondências trocadas por Frege e Russell se iniciaram no ano de 1902, sendo que na primeira delas Russell comunicava a Frege a existência de um paradoxo em sua teoria, hoje conhecido como o *paradoxo de Russell*. Antes disso, não há registro de correspondência entre os dois estudiosos.

Segundo Long e White (1980), tradutores para o inglês das correspondências escritas em alemão, Russell e Frege se corresponderam durante dez anos, de 1902 a 1912, de modo que a frequência e a quantidade dessas correspondências foram maiores nos dois primeiros anos deste intervalo. As correspondências centram-se na tentativa de solucionar o problema encontrado nas *Leis Básicas da Aritmética,* tanto por parte de Frege, mas principalmente por parte de Russell.

As correspondências entre Frege e Russell, e de Frege com outros estudiosos, foram reunidas em um livro intitulado *Philosophical and Mathematical Correspondence*[120]*,* traduzido por Long e White (1980), das quais alguns trechos, aqueles que são relevantes paras as discussões deste trabalho, serão aqui apresentados[121].

Na primeira carta, de 16 de junho de 1902, Russell explicita para Frege a admiração que tem pelos trabalhos desenvolvidos por ele e apresenta, em seguida, o paradoxo.

Russell primeiro afirma sua identificação com trabalhos do autor, ter estudado as *Leis Básicas* e estar de acordo com muitos pontos definidos e desenvolvidos por Frege na obra:

> Prezado Colega,
>
> Há um ano e meio tenho conhecimento de suas *Leis Básicas da Aritmética*, entretanto apenas agora consegui encontrar tempo para um estudo cuidadoso que tenho a intenção de dedicar aos seus escritos. Encontro-me em completo acordo com você em todos os pontos principais, especialmente na sua rejeição de qualquer elemento psicológico na lógica e no valor que você atribui a uma conceitografia para os fundamentos da matemática e da lógica formal, que, a propósito, não podem ser distinguidos facilmente. Em muitas questões particulares, eu encontrei discussões, distinções e definições em seus escritos, as quais não são encontradas em outros lógicos. Particularmente sobre as funções (sect. 9 do seu *Begriffsschrift*), fui levado independentemente para os mesmos pontos de vista, mesmo considerando os detalhes. (RUSSELL, 1902, p.130, tradução nossa).[122]

[120] Em português: "Correspondência Filosófica e Matemática".

[121] Apresentar-se-á a nossa tradução, feita do inglês para o português, e, em notas de rodapé, os trechos das cartas em inglês, língua da publicação utilizada.

[122]" Dear Colleague,

I have known your Basic Laws of Arithmetic for a year and a half, but only now have been able to find the time for the thorough study I intend to devote to your writings. I found myself in full accord with you on all main pints, especially in your rejection of any psychological element in logic an in the value you attach to a conceptual notation for the foundations of mathematics and of formal logic, which, incidentally, A seção 9 de *Begriffsschrift* apresenta a discussão da noção de função e também da noção de argumento, englobando função de um ou mais argumentos[123]. É após essa introdução que Russell aborda o fato da descoberta de uma contradição na teoria.

> Tenho encontrado uma dificuldade em apenas um ponto. *Sua afirmação (p.17) de que uma função pode também constituir o elemento indeterminado. Isso é o que eu costumava acreditar, mas agora este aspecto me parece ser duvidoso por causa da seguinte contradição: Seja w o predicado de ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. Pode w predicar ele mesmo?* Para qualquer resposta segue a contradição. Nós devemos então concluir que w não é um predicado. Do mesmo modo, não existe uma classe (como um todo) daquelas classes que, como um todo, não são membros de si mesmas. Disso, *eu concluo que sobre certas circunstâncias um conjunto definível não pode formar o todo*. (RUSSELL, 1902, p.130, tradução nossa, grifos nossos).[124]

A afirmação indicada por Russell, presente em *Begriffsschrift*, é a seguinte: "Já que o sinal Φ ocorre na expressão $\Phi(A)$ e já que podemos imaginar que este pode ser substituído por outros sinais, Ψ ou X, os quais expressariam, então, outras funções do argumento A, *podemos também considerar $\Phi(A)$ como uma função de argumento Φ*"[125] (FREGE, 1879, §9, p. 24, tradução nossa, grifos do original)[126]. Para Russell, esta afirmação possibilitaria tratar o tipo de função cujo argumento seria 'função da função', o que geraria o paradoxo.

Nesse sentido, como colocado por Russell logo em seguida, é possível, a partir dessa afirmação, introduzir o seguinte predicado: Seja w o predicado de ser um

---

can hardly be distinguished. On many question of detail, I find discussions, distinctions and definitions in your writings for which one looks in vain in other logicians. On functions in particular (sect 9 of your Conceptual Notation) I have been led independently to the same views even in details". (RUSSELL, 1902, p.130)

[123] Essas discussões podem ser encontradas na seção 2.2.3 deste trabalho.

[124] "I have encountered a difficulty only on one point. You assert (p.17) that a function could also constitute the indefinite element. This is what I used to believe, but this view now seems to me dubious because of the following contradiction: Let w be the predicate of being a predicate which cannot be predicated of itself. Can w be predicated of itself? From either answer follows its contradictory. We must therefore conclude that w is not a predicate. Likewise, there is no class (as a whole) of those classes which, as wholes, are not members of themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable set does not form a whole" (RUSSELL, 1902, p.130).

[125] "Since the sign Φ occurs in the expression $\Phi(A)$ and since we can imagine that it is replaced by other signs, Ψ or X, which would then express other functions of argument A, *we can also regard $\Phi(A)$ as a function of the argument Φ*". (FREGE, 1879, §9, p.24, grifos do original).

[126] A diferença de páginas da citação aqui apresentada e da indicação de Russell está relacionada com a versão utilizada.

predicado que não pode ser predicado de si mesmo. Este predicado, w, pode predicar a si mesmo? Em caso afirmativo, se w predica a si mesmo, então ele deve possuir a propriedade que o define, a saber, a propriedade de não poder ser um predicado de si mesmo, o que implica que ele não poderá predicar a si mesmo. Por outro lado, se w não predica a si mesmo, ele deve se predicar, pois possui a propriedade que o define. Logo, w pode predicar a si mesmo se, e somente se, não pode predicar a si mesmo; o que gera a contradição.

Wehmeier (2004) afirma, como poderá ser visto na resposta de Frege à Russell, que a versão do paradoxo utilizando predicados não impressionou Frege, já que esta poderia vir a ser solucionada dentro de *Begriffsschrift*, utilizando a estratificação de funções em níveis. Nesse sentido, a versão predicativa do paradoxo não poderia ser derivada dentro das *Leis Básicas*, pois “funções nunca poderiam ser significativamente argumentos de si próprias; predicados nunca poderiam ser significativamente predicados de si próprios” (SLUGA, 1999, p. 164, tradução nossa). Entretanto, como pode ser visto acima, Russell formula também a versão do paradoxo através da noção de classe, de modo que Frege percebeu que essa versão poderia ser reconstruída dentro do seu sistema, comprometendo-o fundamentalmente.

Na carta, Russell ainda diz para Frege que está em processo de escrita de um livro sobre os princípios da matemática (*Principles of Mathematics*[127] - 1903) e que gostaria de discutir profundamente os trabalhos de Frege em seu próprio livro. Ou seja, não só a postura de Russell é amigável, como também ele se identificou com o projeto fregeano de fundamentação.

Segundo o que Russell escreve, ele acredita que o tratamento da lógica feito por Frege é o melhor dentre aqueles conhecidos na época e, por isso, ele se permitiu expressar o seu “profundo respeito” por Frege. Russell lamenta a inexistência de um segundo volume para as *Leis Básicas*, esperando que Frege estivesse escrevendo uma continuação para o primeiro volume; o que estava exatamente acontecendo.

Frege (1902, p.132, tradução nossa) respondeu a carta de Russell em 22 de junho de 1902, com um início sentimental e abalado com a contradição: “Sua descoberta acerca da contradição surpreendeu-me além das palavras e, quase tenho

[127] Em português: Princípios da Matemática.

vontade de dizer, me deixou atônito, porque estremeceu o fundamento sobre o qual eu pretendia construir a aritmética"[128].

Então, o autor continua, indicando que o problema estava na sua lei V e que os desdobramentos lógicos do paradoxo comprometeriam o projeto de fundamentação da aritmética:

> Parece, portanto, que a transformação da generalidade de uma identidade em uma identidade de percurso de valores (seção 9 de minhas Leis Básicas) não é sempre permissível, que minha lei V (seção 20, p.36) é falsa, e que minhas explicações na seção 31 não são suficientes para assegurar um significado para minhas combinações de sinais em todos os casos. Devo refletir um pouco mais sobre o assunto. Isto é mais sério do que o colapso da minha lei V, *parece enfraquecer não só os fundamentos da minha aritmética, mas a única fundamentação da aritmética possível como tal*. E ainda, eu devo pensar, deve ser possível estabelecer condições para a transformação da generalidade de uma identidade em uma identidade de percurso de valores de modo a manter a essência de minhas provas. Sua descoberta é, de qualquer forma, uma descoberta notável, e talvez possa conduzir a um grande avanço na lógica, por mais indesejável que esta pareça ser à primeira vista[129]. (FREGE, 1902, p.132, tradução nossa, grifos nossos).

Na seção 31 das *Leis Básicas*, apontada por Frege no fragmento acima, ele discute a denotação dos sinais de sua conceitografia, assegurando que nomes próprios e nomes de função de primeiro nível sempre têm uma referência. Desse modo, todo percurso de valor, ou toda extensão de conceito, "$\grave{\epsilon}(\phi(\epsilon))$", terá uma referência. O percurso de valor não introduz apenas um novo nome de função, mas simultaneamente retorna para todo nome de uma função de primeiro nível de um argumento, um novo nome próprio (o nome do percurso de valor).

Frege percebe que a contradição identificada por Russell tem como consequência a não validade da lei V. Esse reconhecimento é plausível já que na

---

[128] "Your discovery of the contradiction has surprised me beyond words and, I should almost like to say, left me thunderstruck, because it has rocked the ground on which I meant to build arithmetic". (FREGE, 1902, p. 132)

[129] "It seems accordingly that the transformation of the generality of an identity into an identity of range of values (sect. 9 of my Basic Laws) is not always permissible, that my law V (sect. 20, p.36) is false, and that my explanation in sect. 31 do not suffice to secure a meaning for my combinations of signs in all cases. I must give some further thought to the matter. It is all the more serious as the collapse of my law V seems to undermine not only the foundations of my arithmetic but the only possible foundations of arithmetic as such. And yet, I should think, it must be possible to set up the conditions for the transformation of the generality of an identity into an identity of ranges of values so as to retain the essentials of my proofs. Your discovery is at any rate a very remarkable one, and it may perhaps lead to a great advance in logic, undesirable as it may seem at first sight". (FREGE, 1902, p.132)

derivação do paradoxo a lei V aparece com destaque (WEHMEIER, 2004), como poderá ser visto na seção seguinte. Como foi visto anteriormente, esta lei estabelece a identidade de percursos de valores de duas funções como equivalente à generalidade da identidade:

$$\vdash \left(\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)\right) = \left(\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\right).$$

O paradoxo atinge a noção de percurso de valor de uma função, entendida como algo que é completo em si e que, por isso, pode ser tomado como argumento de uma função. Todo o sistema fregeano é edificado sobre esta noção. O conceito de número em Frege, como foi visto, possui uma definição conjuntista que envolve as noções de extensão de um conceito (classes), cair sob um conceito (pertinência) e correspondência um para um (SANTOS, 2008). Desse modo, ao abalar a noção de percurso de valor e de extensão de um conceito, abala-se também o conceito de número em Frege e todo o seu sistema. Para Frege, uma fundamentação lógica para a Aritmética não poderia surgir sem recorrer a essas noções (FREGE, 1902).

Dessa forma, o choque de Frege ao notar que a descoberta de Russell comprometeria não só o sistema construído por ele, como também qualquer fundamentação lógica para a Aritmética, mostra a dimensão do problema encontrado por Russell. Griffin (2004) e Wehmeier (2004) afirmam que, ao analisar os trabalhos de Frege, Russell havia percebido um problema, sem conseguir avaliar sua real dimensão. É na resposta de Frege que ele percebe que o problema seria mais difícil de solucionar do que ele imaginava (GRIFFIN, 2004).

A última frase de Frege aponta que a identificação do paradoxo poderia impulsionar grandes avanços na lógica. Alguns dos desdobramentos com relação a esses avanços serão discutidos na última seção deste capítulo.

Adiante, na mesma carta, Frege comentou a utilização feita por Russell do termo predicado:

> A propósito, a expressão ‘Um predicado é predicado de si mesmo’ não parece adequada para mim. Um predicado é como uma regra, uma função de primeiro nível que requer um objeto como argumento e que, dessa maneira, não pode ter este mesmo como argumento (sujeito). Dessa forma, eu devo dizer: ‘Um conceito é predicado de sua própria extensão’. Se a função $\Phi(\varepsilon)$ é um conceito, eu designo sua extensão (ou a classe pertinente) por ‘$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$’ (embora agora eu tenha algumas dúvidas sobre a justificação para isto). ‘$\Phi(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$’ ou ‘$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$’é

> então a predicação do conceito $\Phi(\xi)$ de sua própria extensão. (FREGE, 1902, p.132, tradução nossa).[130]

Como visto no capítulo anterior, Frege define o símbolo da função $\xi \cap \zeta$ na seção §34 das *Leis Básicas*, feito neste trabalho na seção 4.1.5. Este corresponde à relação de pertinência, atualmente simbolizada por $\in$. Dessa forma, $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ pode ser entendido como $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \in \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$. Ou seja, a extensão de conceito $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, ou a classe $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, pertence a si própria.

Por fim, Frege conta a Russell que o segundo volume está a caminho e que ele pretende, diante dessa descoberta, acrescentar um epílogo discutindo a questão do paradoxo: o "segundo volume das minhas *Leis Básicas da Aritmética* aparecerá em breve. Eu devo colocar nele um apêndice onde vou justificar sua descoberta. Se eu pudesse apenas encontrar uma maneira correta de olhar para isso![131]" (FREGE, 1902, p 133, tradução nossa, grifos nossos).

A resposta de Russell é escrita em 24 de junho de 1902. Nesta carta, Russell elucida sua visão sobre os pontos da teoria que geraram o paradoxo e do que deveria ser mudado para que o paradoxo não fosse gerado. Para ele, conceitos podem, em geral, ser variados e a contradição ocorre apenas se, em uma função, o argumento é uma função da função, ou seja, se função e argumento não variam independentemente. Para ele, é o que acontece com a expressão $\varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon))$, em que φ é a função e $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ é o argumento. Neste caso, o argumento é uma função de φ, ou seja, φ é a única variável. Segundo Russell (1902, p. 133, tradução nossa), em funções da forma $\varphi\{F(\varphi)\}$, em que F é constante e φ é variável, são permitidos quaisquer valores para φ, "embora [seja] perigoso quando a extensão está em questão"[132], casos em que o paradoxo é gerado. Para Russell, estas não são funções de primeiro nível e possuem argumentos que não são constantes.

[130] "Incidentally, the expression 'A predicate is predicated of itself' does not seem exact to me. A predicate is as a rule a first-level function which requires an object as argument and which cannot therefore have itself as argument (subject). Therefore I would rather say: 'A concept is predicated of its own extension'. If the function $\Phi(\varepsilon)$ is a concept, I designate its extension (or the pertinent class) by '$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' (though I now have some doubts about the justification for this). '$\Phi(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$' or '$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' is then the predication of the concept $\Phi(\varepsilon)$ of its own extension". (FREGE, 1902, p.132).

[131] "The second volume of my *Basic Laws* is to appear shortly. I shall have to give it an appendix where I will do justice to your discovery. If only I could find the right way of looking at it!" (FREGE, 1902, p.133, grifos do original).

[132] "though dangerous where the extension is in question" (RUSSELL, 1902, p. 133)

Em seguida, Russell mostra para Frege como foi levado ao paradoxo a partir da prova de Cantor[133] de que não existe o maior número cardinal:

> Fui levado à contradição da seguinte maneira. Como você, certamente, sabe, Cantor provou que não existe um número maior que todos os outros. Sua prova é a seguinte:
> $$R\ \varepsilon\ 1\ \rightarrow 1.\ \breve{\varrho}\ \supset Cls'\varrho . w = \varrho \cap x\ 3\ (x \sim \varepsilon\ \iota\breve{\varrho}x).$$
> $$\supset_R . w \sim \varepsilon\varrho : \supset . Nc'Cls'\varrho\ \succ Nc'\varrho$$
> (Essa é apenas a parte mais essencial da prova). Agora, existem conceitos cuja extensão abrange tudo; essa extensão deveria, por isso, ter o maior número. Tentei estabelecer uma relação um a um entre todos os objetos e todas as classes; quando eu apliquei a prova de Cantor com minha relação especial, eu descobri que a classe $Cls \cap x\ 3(x \sim \varepsilon x)$ foi deixada para trás, mesmo que todas as classes já tenham sido enumeradas. Estive pensando sobre essa contradição durante um ano; acredito que a única solução é que função e argumento devem ser capaz de variar independentemente. (RUSSELL, 1902, p.133, tradução nossa)[134].

Segundo Long e White (1980), a fórmula utilizada por Russell para se referir à prova de Cantor contém a notação de Peano, diferente da notação atual, podendo ser de difícil compreensão. De acordo com essa notação, ϱ seria o domínio e $\breve{\varrho}$ o contra-domínio de uma relação um para um R; $Cls'\varrho$ é a classe de subclasses de ϱ e $Nc'\varrho$ é o número cardinal de ϱ. O sinal ⊃ é utilizado para inclusão. A prova tem como conclusão o fato de que o número cardinal de uma classe de subclasses de ϱ é maior que o número cardinal de ϱ, indicado por $Nc'Cls'\varrho\ \succ Nc'\varrho$. Como pode ser visto em Grattan-Guinness (1978), o que Russell faz é analisar o argumento diagonal utilizado por Cantor na prova.

Dessa forma, ao tentar estabelecer uma relação um para um R entre todos os objetos e todas as classes, Russell percebeu que a classe w, que contém todos os

---

[133] Embora a cronologia da descoberta do paradoxo, sua origem e relação com Paradoxo de Cantor sejam controversas (Ver Anellis (1991), Griffin (2004) e Grattan-Guinness (1978)), tanto nesta carta, quanto nos *Principles* (RUSSELL, 1903), Russell afirma que foi levado ao paradoxo diante da análise do argumento diagonal utilizado por Cantor para provar seu teorema sobre a existência do maior cardinal.

[134] "I was led to the contradiction in the following way. As you, of course, know, Cantor proved that there is no greatest number. His proof is as follows:
$$R\ \varepsilon\ 1\ \rightarrow 1.\breve{\varrho}\ \supset Cls'\varrho . w = \varrho \cap x\ 3\ (x \sim \varepsilon\ \iota\breve{\varrho}x).$$
$$\supset_R . w \sim \varepsilon\varrho : \supset . Nc'Cls'\varrho\ \succ Nc'\varrho$$
(This is only the most essential part of the proof). Now there are concepts whose extension comprises everything; these should therefore have the greatest number. I tried to set up a one-one relation between all objects and all classes; when I applied Cantor's proof with my special relation I found that the class $Cls \cap x\ 3(x \sim \varepsilon x)$ was left over, even though all classes had already been enumerated. I have already been thinking about this contradiction for a year; I believe the only solution is that function and argument must be able to vary independently" (RUSSELL, 1902, p. 133).

elementos do domínio que não têm a relação R com si mesmos, ficaria de fora dessa correlação. Se w aparece relacionado a um elemento x de ϱ, então, por um lado, a suposição $x \in w$ levaria pela definição de w à $x \notin Rx$ e, pela suposição $w = Rx$, implicaria que $x \notin w$; uma contradição. Semelhantemente, se supormos que $x \notin w$, então $x \notin Rx$ e, através de $w = Rx$ juntamente com a validade universal $x \in \varrho$ e pela definição de w, para $x \in w$; novamente uma contradição[135]. Dessa forma, a classe dos elementos que não estão relacionados com si mesmos ficou de fora da correlação. Russell apresenta tanto esta formulação, utilizando uma relação, quanto a predicativa e a de classes no capítulo 10 dos *Principles* (1903).

Dessa forma, apesar de Russell identificar que o paradoxo poderia ser gerado nas teorias de Frege, mostrando que seus axiomas eram inconsistentes, o mesmo é construído anteriormente, a partir das teorias de Cantor[136].

Nas demais correspondências trocadas pelos matemáticos, no período de 29 de junho de 1902 a 12 de dezembro de 1904[137], Russell e Frege discutem a possibilidade de solucionar o paradoxo. A maioria das tentativas eram propostas por Russell e rejeitadas por Frege. A discussão completa sobre essas propostas fogem do escopo deste trabalho, mas podem ser encontradas em Long e White (1980). Neste trabalho serão discutidas brevemente duas das quais serão apresentadas por Frege no epílogo do volume dois das *Leis Básicas*.

A primeira dessas alternativas de solução do paradoxo diz respeito à caracterização das classes. Para Russell, as classes não poderiam ser tratadas como os demais objetos: "eu acredito que classes não possam ser sempre admitidas como nomes próprios. Uma classe consistindo de mais de um objeto não é, em primeiro lugar, um objeto, mas muitos"[138](RUSSELL, 1902, p. 138, tradução nossa). Sobre a proposta de compreender classe como um tipo diferente de objeto, a saber, objetos impróprios, Frege argumenta:

---

[135] Essa discussão da prova apresentada por Russell pode ser encontrada em Long e White (1980)
[136] Segundo Haddock (2006) e Anellis (1991), Ernst Zermelo também teria identificado o *paradoxo de Russell* nas teorias de Cantor de maneira independente.
[137] Neste período, os matemáticos trocaram 15 correspondências, 11 delas em 1902, 3 em 1903 e 2 em 1904.
[138] "I believe that classes cannot always be admitted as proper names. A class consisting of more than one object is in the first place not *one* object but many". (RUSSELL, 1902, p. 138).

> Eu tenho considerado várias maneiras possíveis de resolver a contradição, e dentre estas, também a que você indicou, a saber, que estamos concebendo percurso de valores e, por isso, também classes como um tipo especial de objeto cujo nome não pode aparecer em todos os lugares de argumentos do primeiro tipo. Uma classe não seria, então, um objeto em sentido completo da palavra, mas – por assim dizer – um objeto impróprio para o qual a lei do terceiro excluído não valeria, porque haveria predicados que não poderiam ser verdadeiramente afirmados nem verdadeiramente negados sobre eles. Números seriam, por isso, objetos impróprios[139]. (FREGE, 1902, p. 145, tradução nossa)

As dificuldades geradas por essa proposta, classes e percursos de valores sendo considerados como objetos impróprios, serão discutidas de maneira mais ampla na próxima seção. Aqui, pode-se afirmar que uma das dificuldades geradas no tratamento das classes como objetos impróprios envolveria criar regras para estabelecer os tipos de argumento que uma função receberia. Ou seja, nem todas as funções poderiam aceitar objetos impróprios como argumentos. Algumas delas aceitariam tanto objetos impróprios quanto próprios, ou até mesmo apenas objetos impróprios. Como estabelecer quais funções receberiam quais tipos de objetos como argumentos? Frege acreditava que este não poderia ser o caminho para livrar a teoria do *paradoxo de Russell*.

Russell vai levar a fundo a ideia de estabelecer tipos para funções, restringindo, dessa forma, a pertinência de percurso de valores a fim de evitar o paradoxo. O resultado, como será visto neste trabalho, será a teoria dos tipos apresentada por Russell nos *Principles* (1903) e, posteriormente, de maneira mais robusta, nos *Principia Mathematica*.(1910).

A segunda proposta, apresentada por Frege a Russell em 20 de outubro de 1902, diz respeito à substituição da lei V e da lei Vb, por outras versões mais atenuadas, que excluem a possibilidade de uma extensão de um conceito cair sob o próprio conceito. As versões das leis serão apresentadas na próxima seção. Sobre esta solução proposta por Frege, em 12 de dezembro de 1902, Russell pondera: “Devo

[139] “I have considered various possible ways of resolving the contradiction, and among this also the one you indicated, namely that we are to conceive of ranges of values and also of classes as a special kind of object whose names cannot appear in all argument places of the first kind. A class would not then be an object in the full sense of the world, but – so to speak – an improper object for which the law of excluded middle did not hold because there would be predicates that could be neither truly affirmed nor truly denied of it. Numbers would then be improper objects” (FREGE, 1902, p.145).

pensar um pouco mais sobre a sua solução para a contradição. Tenho tido muitas demandas ultimamente, e tenho encontrado dificuldades para lidar com questões fundamentais. Mas acho difícil aceitar sua solução, mesmo que esta seja provavelmente correta"[140] (RUSSELL, 1902, p.151, tradução nossa). Como será discutido posteriormente, a solução apresentada por Frege não será suficiente para livrar as *Leis Básicas* de contradições.

Nas demais cartas, os matemáticos discutem mais algumas propostas consideradas por Russell, inclusive uma que constrói a Aritmética sem o auxílio das classes, o que, na visão de Frege, também se mostra insuficiente. A última carta enviada por Russell a Frege não foi encontrada (LONG; WHITE, 1980). Na resposta a esta, Frege recusa um convite de Russell para participar de um congresso de matemática e se mostra já desanimado com relação às discussões e aparições acadêmicas:

> Por um longo período tem pesado na minha consciência que eu não tenha respondido sua carta de 16 de março. Eu aprecio a grande honra pelo convite para fazer parte no Congresso de Matemática e dar uma palestra, eu ainda não consegui convencer-me de aceitar. Eu vejo que existem razões de peso para minha ida à Cambridge, e ainda sinto que existe algo como um obstáculo insuperável. E isso é o que faz ser tão difícil para eu responder sua carta amigável. Por favor, não fique bravo comigo por isso.[141] (FREGE, 1912, p. 170, tradução nossa).

Frege, portanto, permanece num isolamento ainda maior do que aquele vivido por ele antes de saber da existência do paradoxo. Aos poucos, Frege desanima do que ficou conhecido como o programa logicista.

A identificação do paradoxo é um marco histórico para a história da Matemática, da Lógica e da Filosofia. Segundo Hersh (1997), a identificação do *paradoxo de Russell* foi um dos episódios mais dramáticos na história da Filosofia. Para Dummett (1996), trata-se de uma das descobertas conceituais mais profundas de todos os tempos, que

[140] I must give more thought to your solution of the contradiction. There have been many demands on my time recently, and I find it difficult to get on with fundamental questions. But I find it difficult to accept your solution even though it is probably correct" (RUSSELL, 1902, p. 151).

[141] "For a long time now it has been weighing on my conscience that I have not yet replied to your letter of 16 March. I can well appreciate the great honour you did me by asking me to take part in the Mathematical Congress and to give a lecture there, and yet I cannot make up my mind to accept. I see that there are weighty reasons for my going to Cambridge, and yet I feel that there is something like an insuperable obstacle. And this is what makes it so difficult for me to answer your amiable letter. Please do not be angry at me for this" (FREGE, 1912, p. 170).

poderia inclusive ser equiparada à descoberta dos números irracionais. Ainda que o projeto de Frege, no que diz respeito à sua proposta inicial, não tenha obtido sucesso, os avanços lógicos realizados por ele tem valor indiscutível. Especificamente, mesmo com a identificação do paradoxo, a proposta de Frege se manteve fecunda, resultando em diferentes teorias lógicas e matemáticas, o que será abordado na seção 5.3. Portanto, pode-se dizer que o momento de identificação do paradoxo é rodeado em retrospectiva e posteridade por grandes avanços científicos.

As correspondências de Frege e Russell são partes relevantes para as discussões deste momento tão fecundo. Estas indicam o caminho que será percorrido por Russell no seu próprio projeto de fundamentação, exposto nos *Principles of Mathematics* e nos *Principia Mathematica*. Especificamente, o conteúdo dos *Principles* tem a forte marca das discussões contidas nas cartas trocadas entre Frege e Russell. O apêndice A é dedicado a apresentação da teoria fregeana, elucidando questões tais como percurso de valores, valores de verdade, objeto e conceito e sentido e referência (RUSSELL, 1903). Além disso, Russell dedica todo o capítulo 10 dos *Principles* para a discussão do paradoxo e suas possíveis soluções, a maior parte delas contidas nas cartas trocadas com Frege. O apêndice B, no qual Russell apresenta uma teoria dos tipos simples, é indiscutivelmente uma consequência destas discussões, ou seja, uma tentativa de contornar o paradoxo[142].

Frege via na divulgação de seu trabalho por Russell um meio que permitisse que o mesmo fosse mais conhecido do que era: “Eu percebi com satisfação que você devotou um apêndice especial para minhas teorias. Isso contribuirá bastante para que estas se tornem mais amplamente conhecidas e, eu espero, para o progresso da ciência”[143] (FREGE, 1903, p. 156, tradução nossa).

As ideias de Russell e Whitehead expressas nos *Principia Mathematica* também se devem muito ao trabalho encontrado nas *Leis Básicas* e às discussões presentes nas cartas. Frege influenciou de maneira direta o pensamento de Bertrand Russell,

[142] Russell inicia o apêndice B da seguinte forma: “A teoria dos tipos é aqui apresentada timidamente, como uma possível solução para a contradição; mas isso requer, em todas as probabilidades, ser transformada em alguma forma mais robusta antes de poder responder todas as dificuldades” (RUSSELL, 1903, apêndice B, p. 534, tradução nossa).

[143] “I note with satisfaction that you have devoted a special appendix to my theories. This will contribute greatly to making them more widely known and, I hope, to the advancement of science” (FREGE, 1903, p. 156).

deixando um rico legado para a posteridade. É notável a admiração e respeito que Russell manteve por Frege:

> Quando penso em atos de grandeza e de integridade, apercebo-me que nada conheço de comparável à dedicação de Frege à verdade. Encontrava-se ele a um passo de completar a obra de sua vida, a maioria de seus trabalhos fora ignorada em proveito de homens infinitamente menos competentes, seu segundo volume estava prestes a aparecer e, ao ter conhecimento de que seu pressuposto fundamental era errôneo, reagiu com prazer intelectual, reprimindo todo sentimento de decepção pessoal. Era algo quase que sobre-humano, e um indicador daquilo de que os homens são capazes quando se dedicam ao trabalho criador e ao conhecimento, ao invés do rude afã de dominarem e tornarem-se famosos. (RUSSELL apud ALCOFORADO[144], 2009, p. 36).

Na próxima subseção será apresentada a derivação do paradoxo por Frege no epílogo do segundo volume das *Leis Básicas* e sua proposta para a solução do mesmo.

[144] Trata-se de uma carta enviada a Heijenoort.

5.2. A discussão de Frege sobre o *paradoxo de Russell* nas *Leis Básicas* II

Ao receber a carta de Russell comunicando-o sobre o paradoxo, Frege estava prestes a publicar o segundo volume de suas *Leis Básicas*, no qual acrescentou um epílogo para discuti-lo a partir de seu próprio ponto de vista e da linguagem conceitográfica construída por ele. Frege inicia sua discussão reconhecendo humildemente a existência da contradição e tentando propor maneiras de contorná-la. As primeiras frases do autor expressam o grande impacto sofrido por ele no momento em que fica ciente do paradoxo:

> Dificilmente algo mais indesejável pode atingir um escritor científico do que um dos fundamentos do seu edifício ser abalado depois do trabalho estar terminado.
>
> Fui colocado nesta posição por uma carta do Sr. Bertrand Russell quando a impressão deste volume [segundo] estava perto de acabar. É uma questão sobre a minha Lei Básica (V).[145] (FREGE, 1902, epílogo, p.127, tradução nossa).

Frege relembra que, já na introdução do primeiro volume da obra, ele estava preocupado com certa ausência de autoevidência dessa lei e que, se alguma discussão pudesse surgir acerca de seus fundamentos, poderia estar relacionado com a mesma. Segundo ele, se tivesse encontrado alguma lei que pudesse substituir a lei V, teria feito. Entretanto, além de não ter encontrado tal substituto, Frege afirmava que esta lei era primordial para construção de sua fundamentação e não poderia ser simplesmente excluída da teoria. Após a identificação do paradoxo, ele ainda acreditava que não seria possível construir uma fundamentação para a Aritmética ou conceber os números como objetos lógicos sem que seja permitida a transição de um conceito para sua extensão.

Frege constrói o paradoxo a partir da noção de classe e utilizando as denominações utilizadas por ele em sua conceitografia. Segundo Frege, algo pertence a uma classe se cai sob o conceito cuja extensão é essa classe. Ele toma, então, o conceito "classe que não pertence a si mesma" e a sua extensão "classe das classes que não pertencem a si mesmas". Frege denomina esta última como a classe C e

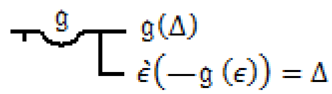
[145] "Hardly anything more unwelcome can befall a scientific writer than one of the foundations of his edifice be shaken after the work is finished.

I have been placed in this position by a letter of Mr. Bertrand Russell just as the printing of this [second] volume was nearing completion. It is a matter of my Basic Law (V)" (FREGE, 1902, appendix, p.127) questiona: Esta pertence a si mesma? São possíveis duas respostas para esta questão:

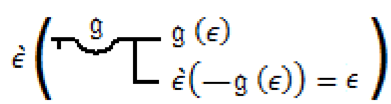
1. Pertence: neste caso, se algo pertence a uma classe tem que cair sob o conceito cuja extensão é essa classe. Então, se C pertence a si mesma, C é uma classe que não pertence a esta mesma.
2. Não pertence: neste caso, esta cai sob o conceito cuja extensão é ela própria e, portanto, pertence a si mesmo.

Das duas respostas anteriores, segue que ambas implicam em uma contradição. Ou seja, a classe pertence a si mesmo se, e somente se, não pertence a si mesmo.

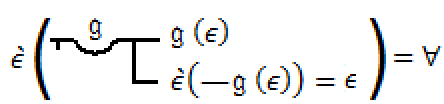
Posteriormente, Frege apresenta a derivação do *paradoxo de Russell* conceitograficamente. Ele utiliza o símbolo Δ para representar uma classe e expressa que Δ é a classe que não pertence a si mesma da seguinte forma:


[146].

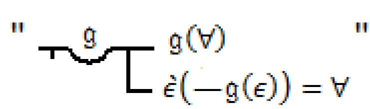
A classe das classes que não pertencem a si mesma seria representado por:


,

que Frege representará pelo símbolo ∀. Ou seja,


.

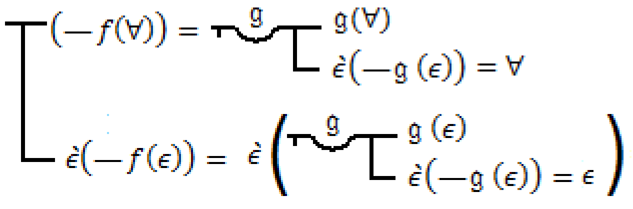
A circunstância de que a classe ∀ não pertence a si mesma será representado por:


.

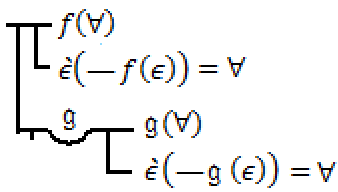
Como neste caso a verdade da proposição aqui exposta é duvidosa, não é colocado o traço de juízo. Utilizando a lei Vb[147], tem-se:

---

[146] $\exists g\ \left(\grave{\epsilon}(-\,g(\epsilon)) = \Delta \wedge \neg g(\Delta)\right)$.

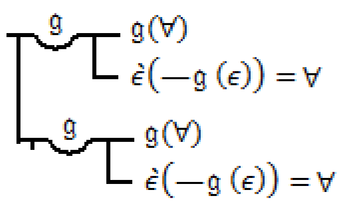


Daí, utilizando (IIIa)[148] e abreviação:



(α

Substituí-se, agora a letra f pela letra gótica $\mathfrak{g}$:

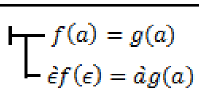


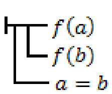
(β

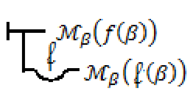
A proposição acima em linguagem comum significa: “se ∀ não pertence a si mesma então ∀ pertence a si mesma”.

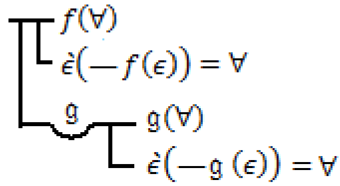
Por outro lado, utilizando IIb[149], infere-se:

---

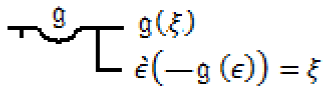
147 

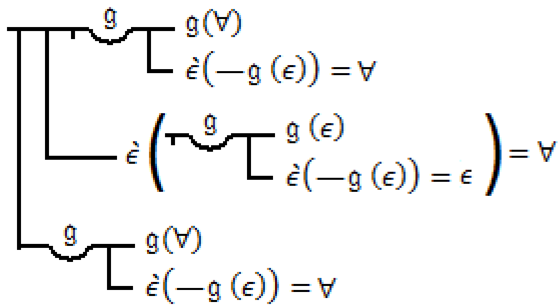
148 

149 



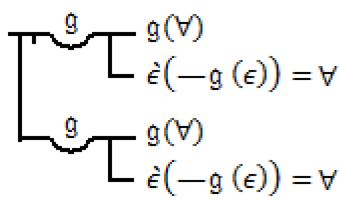
(γ

E se substituir $f(\xi)$ por  , tem-se:



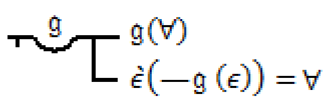
(δ

Abreviando:



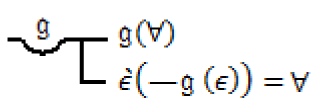
(ϵ

Que é a proposição: “Se ∀ pertence a si mesma, então esta não pertence a si mesma”. Daí, de (ϵ) e por (Ig)[150], tem-se



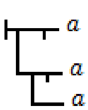
(ζ

E de (ζ) e(β),



(η

---

150 

As proposições (ζ) e (η) se contradizem. Para Frege, o elemento que gera este paradoxo só pode ser a lei Vb que deve, portanto, ser falsa. Segundo Frege, juntamente com a lei Vb, a lei V também desaba, o que não acontece com a lei Va. É possível passar da generalidade de uma identidade para uma identidade de percurso de valores. O problema repousa no processo contrário, isto é, a passagem da identidade de percurso de valores para a generalidade de uma identidade.

É possível reescrever a equivalência do axioma, em notação atual, na forma de duas implicações:

$$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) \rightarrow \forall x(f(x) \leftrightarrow g(x))$$

e

$$\forall x(f(x) \leftrightarrow g(x)) \rightarrow (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha))$$

Como apresentado anteriormente, é a primeira destas duas implicações que acarreta o paradoxo, equivalente a lei Vb.

Como aponta Furth (1964), a geração conceitográfica do paradoxo de Russell a partir da lei V pode não ser imediatamente clara, mesmo para estudiosos envolvidos com as discussões acerca do tema. O paradoxo é imediato a partir da análise de um corolário da lei V, a saber:

$$\vdash f(a) = a \cap \grave{\epsilon}f(\epsilon)^{151}.$$

Esse corolário pode ser escrito, em notação atual, da seguinte maneira:

$$f(a) \leftrightarrow a \in \grave{\epsilon}f(\epsilon)^{152}.$$

Esta diz que um objeto a cai sob um conceito f se, e somente se, este objeto é um membro da extensão deste conceito. Substituir-se-á “$f(\xi)$” por “$\neg(\xi \in \xi)$”, ou seja, $f(\xi)$ é o conceito “algo que não pertence a si mesmo”. Substituir-se-á, ainda, “a” por “$\grave{x}(\neg(x \in x))$”, ou seja, a é a classe das classes que não pertencem a si mesmo. A partir dessas substituições, obtem-se:

$$\neg((\grave{x}(\neg(x \in x)) \in (\grave{x}(\neg(x \in x)))) \leftrightarrow \grave{x}(\neg(x \in x)) \in \grave{x}(\neg(x \in x)).$$

---

[151] A derivação deste corolário, na linguagem conceitográfica fregeana, pode ser encontrada no Apêndice II seção 9.1.4.

[152] Utilizando linguagem atual, é possível derivar este corolário da seguinte maneira: Seja $\grave{\epsilon}f(\epsilon)$ a extensão de conceito $f(\xi)$ e a um objeto. Pela definição (A), dada na seção 4.1.5, $a \in \grave{\epsilon}f(\epsilon) \leftrightarrow \exists g(g(a) \wedge \grave{\epsilon}g(\epsilon) = \grave{\epsilon}f(\epsilon))$. Pela definição da lei V, $\grave{\epsilon}g(\epsilon) = \grave{\epsilon}f(\epsilon) \leftrightarrow \forall z(g(z) \leftrightarrow f(z))$. Daí, $a \in \grave{\epsilon}f(\epsilon) \leftrightarrow \exists g(g(a) \wedge \forall z(g(z) \leftrightarrow f(z)))$. Logo, $a \in \grave{\epsilon}f(\epsilon) \leftrightarrow f(a)$.

Ou seja, a classe das classes que não pertencem a si mesmo, não pertence a si mesma se, e somente se, pertence a si mesma; contradição.

As consequências do paradoxo parecem não ser imediatas, mesmo para Frege, que afirma que tal paradoxo levanta diversas questões:

> É sempre permissível falar da extensão de um conceito, de uma classe? E se não, como reconhecemos os casos excepcionais? Podemos sempre inferir da extensão de um conceito coincidindo com a extensão de um segundo, que todo objeto que cai sob o primeiro também cai sob o segundo?[153] (FREGE, 1902, epílogo, p. 127, tradução nossa).

Segundo Frege, o problema do paradoxo não atinge apenas a sua teoria, mas todas as teorias nas quais foram utilizadas nas demonstrações as noções de extensão de conceito (classes ou conjuntos). Dessa forma, ele afirma que o problema não estaria no método particular utilizado por ele para construir a Aritmética, mas na possibilidade efetiva de construção de uma fundamentação lógica para a mesma.

Segundo Furth (1964), a contradição surge da permanência simultânea das duas teses seguintes:

1. Para todo conceito de primeiro nível $\Phi(\xi)$ existe certo objeto $\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ relacionado ao conceito como sua extensão, cuja condição de identidade é aquela determinada pela lei V:

$$\vdash \left(\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)\right) = \left(-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})\right)$$ [154].

2. Esse objeto ($\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$) é um objeto próprio, significando que este é um argumento admissível para todo e qualquer conceito de primeiro nível.

Abandonar qualquer uma das teses seria abandonar um elemento de grande importância nas considerações de Frege, a saber, os percursos de valores e extensões de conceitos como objetos lógicos. Ou seja, a ideia de abandonar uma das teses parecia enfraquecer a possibilidade de uma análise lógica da Aritmética (SLUGA, 1999). Para contornar a inconsistência, Frege discute, então, as duas possibilidades seguintes: (1) supor que existem casos nos quais nenhuma classe corresponde à

[153] "Is it always permissible to speak of the extension of a concept, of a class? And if not, how do we recognize the exceptional cases? Can we always infer from the extension of one concept coinciding with that of a second, that every object which fall under the first concept also falls under the second?" (FREGE, 1902, apêndix, p.127)

[154] Equivalentemente, para extensão de conceitos a lei V poderia ser enunciada da seguinte forma: a extensão de um conceito f é igual a extensão de um conceito g se, e somente se, os mesmos objetos que caem sob f caem também sob g.

extensão de um conceito e; (2) supor que a lei do terceiro excluído não vale para classes e, portanto, que classes não podem ser tomadas como objetos próprios, mas como outra espécie de objeto.

Primeiramente, Frege discute a segunda dessas possibilidades, o que será feito neste trabalho na mesma ordem. No que diz respeito à segunda possibilidade, deve-se concluir que se a lei do terceiro excluído não vale para classes, então as classes não podem ser objetos em seu sentido completo. De outro modo, a lei do terceiro excluído deveria valer para as mesmas.

Ao considerar que uma classe não é um objeto, a possibilidade que resta é classificá-la como uma função. Entretanto, não há nada insaturado, ou nada predicativo no que diz respeito às classes. Na verdade, o nome de uma classe tem a natureza de um nome próprio, podendo ocorrer como sujeito gramatical, mas não podendo ocorrer em uma proposição de maneira predicativa.

Frege sugere, então, que as classes poderiam ser reconhecidas como objetos impróprios. Essa suposição resultaria na existência de diferentes tipos de função de primeiro nível: algumas poderiam tomar como argumentos objetos impróprios, objetos próprios ou objetos impróprios e próprios[155] simultaneamente. O mesmo ocorreria com os valores que a função assumirá, resultando nesses três tipos[156]. Como estes tipos poderiam ocorrer simultaneamente, haveria nove tipos de percurso de valores, ou nove tipos de classe. Daí, seria necessário traçar distinções lógicas[157] para estes tipos o que acarretaria em uma incalculável multiplicidade de tipos já que, em geral, objetos pertencentes a diferentes tipos podem não ser tomados como argumentos das mesmas funções. Neste caso, como estabelecer as regras que determinarão quais objetos são permitidos como argumentos de quais funções?

Além disso, Frege defende que a justificação de objetos impróprios, por si só, já poderia levantar uma série de dúvidas. Esse tipo de dificuldade é apontado pelo autor como um dos fatores que intimidam a utilização da caracterização das classes como

[155] Este seria o caso, por exemplo, da identidade.
[156] Um função poderia assumir como valores objetos próprios, impróprios ou próprios e impróprios.
[157] No exemplo de Frege (1902, apêndice), dever-se-ia distinguir “as classes de objetos próprios” de “as classes das classes de objetos próprios”. Ou, ainda “as extensões de relações entre objetos próprios” de “as classes de objetos próprios” de “as classes de extensões de relações entre objetos próprios”, as classes de objetos impróprios das classes das classes de objetos impróprios, etc.

objetos impróprios. Dessa forma, cabe tomá-las como objetos próprios aos quais se aplicam a lei do terceiro excluído.

Segundo Furth (1964), apesar de Frege apresentar justificativas para não adotar essa possibilidade, estas não são claras o suficiente. Estas apenas indicam que, ao se optar por tomar classes como objetos impróprios, as discussões caminhariam em direção a uma teoria dos tipos para a extensão. Além disso, fica claro que essa escolha traria uma "vasta complicação para sua teoria e invalidaria a maioria das demonstrações como dadas originalmente" (FURTH, 1964, p. xlv, tradução nossa).

A segunda alternativa dada por Frege seria considerar os nomes das classes (nome de extensão de conceito) como "pseudo-nomes próprios"[158], os quais não teriam uma referência. Estes seriam, portanto, entendidos como partes de símbolos que teriam uma referência apenas como um todo. Como exemplo, o número "2" não poderia ser compreendido, a não ser que consideremos diferentes expressões que contém o sinal "2", mas isto não poderia ser concebido como um composto de "2" e outra parte. Frege não desenvolve detalhadamente essa possibilidade, mas a rejeição da mesma é suportada pela ideia de que esta comprometeria a generalidade das proposições aritméticas, de modo que não ficaria claro quando uma pessoa se referisse a "um número natural de classes ou sobre um número natural de números naturais" (HADDOCK, 2006, p.131, tradução nossa).

Diante disso, Frege entende que o que resta é rever a compreensão das noções de percurso de valor e de extensão de conceito, que devem precisar de uma correção. O autor aponta, então, para a maneira como introduz a noção de percurso de valores, apresentada neste trabalho em 4.1.1, da seguinte forma:

"a função $\Phi(\xi)$ tem o mesmo percurso de valores que a função $\Psi(\xi)$",

equivale a dizer que

"as funções $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ tem sempre o mesmo valor para o mesmo argumento".

A partir dessa afirmação, Frege entende, portanto, que 'classes' (ou conjuntos) são relacionados a uma propriedade. Ou seja, para qualquer propriedade é possível associar uma classe de coisas que possuem esta propriedade. Isso ocorreria até

[158] "Pseudo proper names" (FREGE, 1902, apêndice, p. 129).

mesmo com uma propriedade contraditória, o que geraria o conjunto vazio[159] (ALCOFORADO, 2009). Do mesmo modo, para qualquer classe corresponde uma propriedade de pertinência. Nesse sentido, a lei V pode também ser entendida da seguinte maneira: para qualquer propriedade, especificada apropriadamente, corresponde uma classe. Segundo Hersh (1997, p. 148, tradução nossa), o "*paradoxo de Russell* é catastrófico", pois apresenta uma propriedade legítima a qual nenhuma classe poderia corresponder. Diante disso, a justificativa da função de segundo nível $\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$, indispensável para fundamentação da Aritmética, foi abalada.

A saída encontrada por Frege é estabelecer substitutos para a lei Vb e a lei V, gerando uma versão 'mais fraca' dessas leis que ainda fosse útil para manter a proposta de fundamentação da Aritmética através da Lógica. A lei V', substituta para a lei V, é expressa por Frege da seguinte maneira:

$$\vdash \left(\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)\right) = \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \\ a = \grave{\epsilon}f(\epsilon) \\ a = \grave{\alpha}g(\alpha) \end{array}$$ [160].

A lei V' asserta que os percursos de valores (ou extensão de conceitos) das funções (ou dos conceitos) $f(\xi)$ e $g(\zeta)$ são iguais se, e somente se, para todo argumento "x" diferente de $\grave{\epsilon}f(\epsilon)$ e $\grave{\alpha}g(\alpha)$, $f(x) \leftrightarrow g(x)$. Essa lei implica a Va. Mas a Vb se torna V'b ou V'c, expressas abaixo:

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ a = \grave{\epsilon}f(\epsilon) \\ \grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(a) \end{array}$$ [161] (V'b)

e

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ a = \grave{\alpha}g(\alpha) \\ \grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha) \end{array}$$ [162] (V'c).

Apesar da introdução destas moficicações, é possível mostrar que os novos axiomas de Frege também geram uma contradição. É o que fez o lógico polonês

---

[159] Como a propriedade "distinto de si mesmo" utilizada por Frege nos *Fundamentos* para construção do número zero.

[160] $(\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) \leftrightarrow (\forall a((a \neq \grave{\epsilon}f(\epsilon) \wedge a \neq \grave{\alpha}g(\alpha)) \rightarrow (f(a) \leftrightarrow g(a))))$.

[161] $((\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) \rightarrow (\neg(a = \grave{\epsilon}f(\epsilon))) \rightarrow (f(a) \leftrightarrow g(a))$.

[162] $((\grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) \rightarrow \left(\neg\left(a = \grave{\alpha}g(\alpha)\right)\right)) \rightarrow (f(a) \leftrightarrow g(a))$.

Stanislaw Lesniewski (1927-1934) alguns anos depois da apresentação dos teoremas (HADDOCK, 2006). Frege não chegou a saber deste fato, mas também não pareceu satisfeito com essa alternativa, já que logo desanimou da ideia de reduzir a Aritmética à Lógica.

Após a publicação do segundo volume das *Leis Básicas*, ele não publicara trabalhos significativos sobre a fundamentação da Matemática. No ano de 1918, começou a escrever um tratado sobre lógica filosófica, mas veio a falecer antes de concluí-lo.

No final de sua vida, Frege abandona por completo o programa logicista, chegando a afirmar que talvez toda a Matemática fosse sustentada pela Geometria, e não pela Lógica:

> Por volta de 1924, Frege chegou a conclusão de que 'os paradoxos da teoria de conjuntos destruiu a teoria de conjuntos'. Ele continuou: 'Quanto mais eu penso nisto, mais convencido eu fico de que a aritmética e a geometria cresceram da mesma fundamentação, de fato, de uma geométrica; então toda a matemática é na verdade geometria'. (MUSGRAVE apud HERSH, 1997, p. 150, tradução nossa).

Segundo Alcoforado (2009, p.38), Frege pode ter assumido esta posição por não conseguir encontrar uma alternativa que superasse as dificuldades geradas pelo *paradoxo de Russell*, apelando "para o conhecimeno sintético *a priori*".

Do que foi discutido, o *paradoxo de Russell* pôde ser gerado dentro do sistema de Frege devido à combinação de noções lógicas e da noção de conjunto. Deste modo, algumas tentativas para contornar o paradoxo foram construídas a partir de formulações axiomáticas para a teoria de conjuntos. Além disso, como serão apresentadas na próxima seção, também foram construídas outras teorias que buscavam lidar com a situação dos paradoxos (não só o de Russell), como a teoria dos tipos e as lógicas não clássicas.

5.3. Desdobramentos lógicos e tentativas de superação dos paradoxos

Antes do aparecimento do *paradoxo de Russell*, desde os paradoxos de Zenão, já eram conhecidos uma série de outros paradoxos, semânticos e sintáticos (Griffin, 2004). Os paradoxos consistiam de contradições lógicas e/ou epistemológicas.

As contradições nas teorias matemáticas surgem, em geral, da utilização irrestrita e natural da noção de conjuntos, número cardinal, número ordinal e Aleph (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). Relacionados com o período discutido neste trabalho, mencionado acima como da arimetização da análise, e também com o *paradoxo de Russell*, tem-se os paradoxos de Cantor e de Burali-Forti, ambos sustentados por noções da teoria de conjuntos. Os paradoxos de Cantor e de Burali-Forti serão apresentados a seguir com o propósito de melhor caracterizar o próprio *paradoxo de Russell*.

O que hoje é chamado de teoria de conjuntos tem como marco inicial os trabalhos do matemático Georg Cantor. Cantor não tinha como intenção construir uma teoria de conjuntos, mas investigar os números cardinais, sendo a teoria dos números transfinitos uma de suas maiores realizações[163] (VILELA, 1996). Os primeiros trabalhos de Cantor foram publicados em 1873 e, incialmente, assim como as obras de Frege, foram tratados com desconfiança pela grande maioria dos matemáticos e com certa indiferença pela maior parte dos filósofos (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). Em 1874, Cantor publicou um trabalho, *Denumerabilidade dos conjuntos infinitos*, em que apresentou uma teoria para o infinito, nesta, uma coleção de objetos, mesmo que infinitos em quantidade, é concebida como uma entidade completa. Entre os anos de 1895 e 1897, Cantor publicou vários trabalhos sobre os números transfinitos, os quais abordam os números cardinais e ordinais, resultado de três décadas de pesquisa.

[163] Cantor não tinha como intenção o estudo de conjuntos para, a partir dessas noções, construir uma teoria axiomática de conjuntos como são conhecidas atualmente as teorias de Zermelo e Fraenkel, por exemplo, embora muito do que se tem na atualidade possa ser percebido como um prosseguimento das formulações de Cantor (VILELA, 1996). Ele também não pretendia encontrar uma fundamentação para a Matemática, como foi o foco de Frege. O objetivo de Cantor ao introduzir a noção de conjuntos era apresentar os números transfinitos que, segundo Vilela (1996), foram concebidos com base na constatação de que existiam conjuntos infinitos comparáveis. Essa constatação se deu quando Cantor estudava problemas relacionados com os números reais.

A noção de conjunto, utilizada por Cantor em seu trabalho publicado originalmente em 1895, foi formulada como a seguir: *"Por uma 'variedade' ou 'conjunto' eu entendo geralmente toda multiplicidade que pode ser pensada como uma, isto é, qualquer totalidade de elementos definidos que por meio de uma lei podem ser unidos num todo"* (CANTOR apud VILELA, 2001, p.435). Em outras palavras, um conjunto seria qualquer coleção de objetos m num todo M, definidos e separados de nossa intuição ou pensamento.

Esta noção pode ser entendida como uma coleção de elementos que satisfazem uma propriedade. Ou seja, se φ é uma propriedade, então existe o conjunto $y = \{x|\varphi(x)\}$. Essa noção intuitiva foi o embrião de muitos paradoxos, como o *Paradoxo de Russell*, *o Paradoxo de Cantor* e o *Paradoxo de Burali-Forti* (D'OTTAVIANO, 1990). Apresentar as discussões sobre os *Paradoxos de Cantor* e de *Burali-Forti* é relevante nas considerações históricas do *Paradoxo de Russell*, por causa das conexões que este último possui com os dois primeiros (ANELLIS, 1991).

O paradoxo de Cantor foi identificado em 1899, mas só foi publicado em 1932 (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). Para compreendê-lo melhor, é necessária a noção de número cardinal e algumas definições presentes na teoria de Cantor. Primeiramente, define-se o número cardinal $\bar{\bar{y}}$ de um conjunto y como o conjunto de todos os conjuntos x que são equipotentes[164] a y. Por definição se $\bar{\bar{y}} \leq \bar{\bar{z}}$, então y é equipotente a um subconjunto de z. Diz-se que $\bar{\bar{y}} < \bar{\bar{z}}$, se $\bar{\bar{y}} \leq \bar{\bar{z}}$ e $\bar{\bar{y}} \neq \bar{\bar{z}}$. Partindo dessas noções, Cantor demonstrou o seguinte teorema:

<u>Teorema de Cantor</u>: Se $P(y)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de y, então $\bar{\bar{y}} < \overline{\overline{P(y)}}$.

O paradoxo de Cantor surge da consideração do conjunto universal[165]. Seja U o conjunto universal. $P(U)$ é, então, um subconjunto de U, então $\overline{\overline{P(U)}} \leq \bar{\bar{U}}$. Em

[164] Dizer que x é equipotente a y é equivalente a dizer que existe uma correspondência biunívoca entre x e y.
[165] Conjunto de todos os conjuntos.

contrapartida, pelo teorema de Cantor, $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{P(U)}}$. Portanto, $\overline{\overline{U}} \leq \overline{\overline{P(U)}}$. Utilizando o teorema de Bernstein[166], $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{P(U)}}$, contradizendo o teorema de Cantor[167].

O paradoxo de Burali-Forti, por sua vez, identificado em 1887 pelo italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931), é semelhante ao paradoxo de Cantor, mas para números ordinais. Na verdade, Cantor já havia descoberto sozinho o mesmo paradoxo, mas não o publicou (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). Na publicação do paradoxo, Burali-Forti parte da seguinte afirmação: existe sempre um ordinal maior que um ordinal dado. Entretanto, o número ordinal determinado pelo conjunto de todos os ordinais (On) é o maior ordinal[168].

Segundo Griffin (2004), a comunidade matemática ignorou este paradoxo, mesmo porque, Burali-Forti não o enunciou como um paradoxo. O mesmo ocorreu com o paradoxo de Cantor, que só posteriormente chamou atenção dos matemáticos e filósofos. No caso de Cantor, além de não estabelecê-lo como um paradoxo[169], ele não o publicou imediatamente. Sabe-se, entretanto, que Cantor identificou o paradoxo em 1899[170], pois ele enviou uma carta para Dedekind[171] comunicando sobre o problema.

Tanto Burali-Forti quanto Cantor não conseguiram estabelecer uma solução para estes paradoxos. Inclusive, na época, o paradoxo de Burali-Forti parecia não ser uma ameaça à teoria de Cantor e acreditava-se que as próprias revisões técnicas na região da prova em que o paradoxo foi identificado seriam suficientes para encontrar uma solução para este.

Sobre o *paradoxo de Russell*, como foi visto anteriormente, Russell enviou uma carta comunicando Frege sobre este em 1902. Entretanto, ele mesmo pontua, tanto em uma das cartas trocadas com Frege quanto nos *Principles of Mathematics* (1903), que o paradoxo foi construído anteriormente, a partir da análise feita por ele da prova do teorema de Cantor. Griffin (2004), Grattan-Guinness (1978) e Anellis (1991) apontam

---

[166] O teorema determina que se $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$ e $\overline{\overline{z}} \leq \overline{\overline{y}}$, então $\overline{\overline{y}} = \overline{\overline{z}}$.
[167] Essa formulação pode ser encontrada em Mendelson (1997).
[168] Formulação apresentada por Mendelson (1997).
[169] Ele identificou a existência do que ele chamou de multiplicidades inconsistentes (inconsistent multiplicities). Segundo Cantor, o conjunto de tudo o que é pensável é um conjunto diferente daquele que engloba todos os cardinais (Ver Griffin (2004)).
[170] Na verdade, a data da identificação do paradoxo de Cantor, assim como *o paradoxo de Russell*, como será discutido a seguir, não é bem estabelecida (Griffin, 2004) .
[171] A carta só foi publicada em 1932.

que os debates cronológicos sobre a origem do *Paradoxo de Russell* e a conexão com o paradoxo de Cantor e de Burali-Forti são confusos e contraditórios. Segundo Griffin (2004), as datas para a identificação de cada um dos paradoxos comumente difundidas seriam:

1897 – Paradoxo de Burali-Forti

1899 – Paradoxo de Cantor

1901 – *Paradoxo de Russell*.

Para o autor, a única data que não está correta seria a última, delas. Quanto a isso, Griffin (2004), Coffa, Moore, Garciadiego, citados por ele, Anellis (1991) e Grattan-Guinness (1978) defendem que o paradoxo foi construído por Russell em 1900 e tem origem cantoriana. Entretanto, ainda há discordâncias quanto ao mês[172].

O *paradoxo de Russell* apareceu pela primeira vez em um rascunho da primeira parte dos *Principles* (1901) e, posteriormente, mais elaborado, em 1902 na carta à Frege e em outra para Peano (GRIFFIN, 2004). Segundo Griffin (2004), possivelmente, o *paradoxo de Russell* foi identificado no sistema fregeano em maio ou junho de 1901, mas só foi comunidado a Frege e Peano em junho de 1902.

O *paradoxo de Russell* tem em comum com o paradoxo de Cantor e o paradoxo de Burali-Forte o fato de todos eles terem origem em noções referentes ao que hoje é conhecido como a teoria de conjuntos. Entretanto, o *paradoxo de Russell* repousava nos passos mais elementares da teoria de conjuntos e, como foi visto neste trabalho, abalou a teoria de fundamentação da Matemática e a Lógica. Segundo exposto por Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1984, p. 2, tradução nossa), nunca havia acontecido de um paradoxo surgir num nível tão elementar, “envolvendo de maneira tão forte a maioria das noções fundamentais de duas das mais ‘exatas’ das ciências, a lógica e a matemática”. Segundo Silva (2007, 134), este paradoxo “foi uma das estrelas de uma quase ‘estação de paradoxos’ que se instalou por essa época”, eles “pipocavam por todos os lados e instauraram a chamada ‘crise dos fundamentos’”.

Com a emergência do *paradoxo de Russell*, as reações iniciais dos matemáticos foram diversas. Muitos deles tentaram reabilitar as noções referentes à

[172] Anellis (1991) acredita ter sido em dezembro de 1900, enquanto que Griffin (2004) acredita ter sido em maio do mesmo ano.

teoria de conjuntos, como é o caso de Henri Poincaré (1854 – 1912). Cantor não perdeu a fé na noção de conjuntos, mas não conseguiu contornar o *paradoxo de Russell* (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). Dedekind abandonou a publicação de seus fundamentos para a Aritmética (D'OTTAVIANO, 1990), mas Frege, apesar do impacto sofrido, buscou meios de remover o paradoxo de seu sistema.

Assim como Frege, outros matemáticos se engajaram na tentativa de criar sistemas que evitassem paradoxos na Matemática, como foi o caso, por exemplo, de Ernst Zermelo (1871-1953), Alfred North Whitehead (1861-1949), que desenvolveu os *Principia Mathematica* juntamente com Russell, dentre outros. Dessas tentativas, floreceram novas teorias, de forma que os paradoxos podem ser vistos como peça fundamental para o desenvolvimento da Lógica e da Matemática, assim como para a construção de novos olhares para problemas deste tipo.

Além dos paradoxos sintáticos, há também os paradoxos semânticos[173], que são aqueles que estão relacionados com o uso de conceitos do tipo "denotar" e "verdadeiro", que não estão necessariamente na linguagem matemática padrão (D'OTTAVIANO, 1990). É importante notar que, entre os séculos XIX e XX, alguns matemáticos, como Peano, defendiam que paradoxos semânticos não pertenciam à Matemática, mas à Linguística. Entretanto, os desenvolvimentos mais interessantes na matemática moderna que têm como foco a pesquisa sobre os fundamentos mostram que os paradoxos semânticos serviram como ponto de partida para investigações de impacto imenso e direto sobre a Matemática (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984). É o caso, por exemplo, da demonstração construída por Gödel[174] para seus teoremas da incompletude que parte de um paradoxo semântico (GOLDSTEIN, 2008), (NAGEL; NEWMAN, 1973).

Além disso, não se deve esquecer, a Lógica se desenvolveu vinculada a questões da linguagem, da argumentação, na tentativa de estabelecer critérios precisos de expressão. Em outras palavras, a relação entre sintática e a semântica era

[173] Para paradoxos semânticos ver D'Ottaviano (1990).
[174] Na prova de Gödel, ele parte da construção de uma fórmula G que contém um enunciado metamatemático: "A fórmula G não é demonstrável". A fórmula G é autorreferente e, segundo Nagel e Newman (1973), é construída de maneira análoga ao paradoxo de Richard, um paradoxo semântico.

um pressuposto, com a sintaxe envolvendo a estrutura e a forma da linguagem. A semântica está relacionada com o significado dessas construções.

Tanto os paradoxos sintáticos como os semânticos possuem como característica comum, a autorreferência. Ou seja, em todos os paradoxos a entidade central é definida ou caracterizada com o auxílio de uma totalidade a qual esta pertence. Uma solução possível seria, então, encontrar uma maneira de remover todas as expressões que contêm autorreferência das teorias matemáticas. Entretanto, segundo Fraenkel, Bar-Hillel e Levy (1984), a possibilidade de excluir todos os raciocínios que possuem auto-evidência não seria viável, porque inviabilizaria muitas expressões que contêm autorreferência e que são úteis para a Matemática.

Nesse sentido, a tentativa de encontrar maneiras para contornar os paradoxos voltaram-se para aspectos gerais de uma teoria, constituindo-se como ferramenta para o desenvolvimento, por exemplo, da teoria dos tipos, da teoria dos conjuntos e das lógicas não clássicas. Cada uma dessas teorias contém sistemas que buscavam controlar, de diferentes maneiras, a situação incômoda gerada pelos paradoxos (D’OTTAVIANO, 1990). A teoria dos tipos e a teoria dos conjuntos permaneceram dentro do paradigma da lógica clássica tradicional, enquanto que as lógicas não clássicas, como o próprio nome sugere, questionavam a aceitação dos príncipios lógicos clássicos tradicionais.

Nas próximas subseções, essas teorias serão discutidas brevemente, de modo a compreender algumas das soluções apresentadas para os paradoxos.

5.3.1. Formulações da teoria de conjuntos e a teoria dos tipos

Tanto as formulações para a teoria de conjuntos como a teoria dos tipos de Russell e Whitehead estão baseadas na lógica clássica aristotélica. Ou seja, Estas teorias não abandonam qualquer um dos três princípios da lógica clássica tradicional, construindo manipulações sintáticas para solucionar parcial ou totalmente o problema dos paradoxos.

As teorias de conjuntos são sistemas axiomáticos para a fundamentação da Matemática e que oferecem uma solução parcial para o problema dos paradoxos, já que os elimina apenas da Matemática (D’OTTAVIANO, 1990). Estas apresentam axiomas que têm como propósito a delimitação da noção de conjunto. As teorias de conjuntos, desenvolvidas no início do século XX, foram suficientes para resistir à crise dos paradoxos (D'OTTAVIANO, 2003). As mais conhecidas são a teoria publicada por Zermelo em 1908, e que foi aperfeiçoada por Adolf Fraenkel (1891-1965) e Thoralf Skolem (1887-1963) em 1922, conhecida como Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), e a desenvolvida por John von Neumann (1903 - 1957) em 1920, modificada entre 1937 e 1954 por Paul Bernays (1888-1977) e simplificada por Kurt Gödel em 1940, que ficou conhecida como Teoria de Conjuntos de Neumann-Bernays-Gödel (GBN)[175]. Cada uma dessas teorias possuem axiomas e restrições específicas que permitem eliminar os paradoxos da matemática.

Tanto na teoria de conjuntos ZF como em GBN, existem dois tipos de coleções, as arbitrárias, que seriam as classes, e as especiais, que seriam os conjuntos. Em ZF as noções primitivas são os conjuntos e os elementos, sendo que a noção de classe é introduzida como termo definido. O *paradoxo de Russell* é contornado em ZF a partir da construção do conjunto de Russell da seguinte forma: Dado A, pode-se construir um conjunto $R(A)$ - o conjunto de Russell - tal que $R(A) = \{X \mid X \in A \wedge X \notin X\}$. Esse procedimento é garantido pelo axioma denominado axioma da separação[176]. Dessa forma, $R(A)$ não pode ser elemento de A e $R(A) = A$, se $A = U$, então R coincide com U. Logo, o *paradoxo de Russell* tem como resultado a inexistência de um conjunto A de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

Os paradoxos de Cantor e Burali-Forti também são solucionados dentro de ZF, neste caso, o sistema mostra que não existe o conjunto universal e o conjunto contendo todos os ordinais.

Já a teoria de conjuntos GBN possui como noções primitivas a noção de classe, de conjunto e de elemento. Há, neste sistema, dois tipos de classe, que são os conjuntos e as classes próprias. As classes de Russell, universal e de todos os ordinais são classes próprias e, pelas regras do sistema, não podem pertencer a outras classes. Portanto, os paradoxos não têm significado dentro de GBN.

---

[175] Posteriormente, foram apresentados o Sistema NF de Willard Quine (1908 – 2000) e a Teoria Tarski-Morse-Kelley.

[176] O axioma da separação pode ser enunciado da seguinte maneira: Dado um conjunto X e uma propriedade, existe um conjunto cujos membros são exatamente aqueles membros de X que apresentam essa propriedade.

Sobre os paradoxos semânticos, estes não podem ser formulados dentro dessas teorias, já que envolvem noções que não podem ser expressas dentro do sistema. Apesar da grande aplicabilidade e utilização das teorias de conjuntos ZF e GBN, não é possível demonstrar sua própria consistência (D'OTTAVIANO, 1990).

Por outro lado, a teoria dos tipos ramificada de Russell e Whitehead, apresentada nos *Principia Mathematica* (1910) foi construída para estabelecer uma hierarquia de tipos de coleções e permite a eliminação total dos paradoxos. Para Russell, a definição de uma classe, ou conjunto, em termos de uma totalidade em que esta está contida é o problema[177] que gera os paradoxos (SILVA, 2007). A solução seria separar os conjuntos em partes menores capazes de uma totalidade. A teoria dos tipos é regida pelo seguinte princípio:

> *<u>Princípio do círculo vicioso</u>: qualquer que seja o que envolva todos os objetos de uma coleção, não pode ser uma coleção.*

Dentro da teoria, são definidos funções proposicionais e predicados, estabelecendo uma hierarquia de funções e predicados, os tipos. O estabelecimento dessa hierarquia impossibilita que algum nível da hierarquia contenha funções que se referem ao todo do nível, o que também acontece com os predicados. Parte-se, portanto, de funções e predicados elementares e definem-se os de primeira ordem, os de segunda ordem, e assim por diante. Nesse sentido, as sentenças utilizadas para definir conjuntos precisam ser agregadas em uma hierarquia. Com relação aos níveis, todos os níveis têm pelo menos um membro e a cada objeto é associado um tipo (número inteiro não negativo). Nessa teoria, seja um elemento a que é membro de b, então o tipo de b é maior que o tipo de a.

A teoria dos tipos possibilita a eliminação não só de paradoxos sintáticos, como também de paradoxos semânticos. No caso, por exemplo, do paradoxo conhecido como o paradoxo do mentiroso, a afirmação "eu estou mentindo" seria reinterpretada como "existe uma sentença a qual eu estou afirmando e que é falsa", o que eliminaria o paradoxo (D'OTTAVIANO, 1990). Dessa forma, uma sentença não pode cair dentro de seu próprio escopo, o que aniquila as contradições.

[177] Essas definições ficaram conhecidas como definições impredicativas.

No caso do *paradoxo de Russell*, do *paradoxo de Cantor* e do *paradoxo de Burali-Forti*, ambos precisam do conjunto que engloba uma totalidade, de um conjunto de todos os conjuntos. Especificamente, o *paradoxo de Russell* depende da existência do conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos, ou seja,

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Na teoria dos tipos, questinar sobre a pertinência de R a R não teria significado, já que não faria sentido uma classe satisfazer ou não sua propriedade definidora.

Apesar de a teoria dos tipos não gerar inconsistências, e permitir a derivação de grande parte da matemática, esta não pode deixar de incorporar axiomas que não são considerados lógicos, como o axioma sobre a infinidade dos objetos (SILVA, 2007). Segundo Silva (2007, p. 136), este e outros axiomas tornaram o logicismo de Russell não “mais bem-sucedido que o de Frege”.

Dessa forma, tanto a teoria dos tipos quanto as formulações da teoria dos conjuntos possibilitam eliminar paradoxos parcialmente ou totalmente apoiando-se na lógica clássica aristotélica. Na próxima subseção, serão apresentados aspectos das lógicas não clássicas heterodoxas, no que diz respeito estritamente a como os paradoxos são eliminados ou incorporados ao sistema sem perda de força da teoria.

5.3.2. Os paradoxos e as lógicas não clássicas heterodoxas

Até o começo do século XX aceitava-se apenas uma lógica formal e pura, a lógica aristotélica (D’OTTAVIANO, 1990). Segundo D’Ottaviano (1990), durante cerca de 2000 anos, a lógica não teve grandes modificações, permanecia como um sistema acabado. Com a emergência dos paradoxos, uma das saídas encontradas foi a manutenção da autorreferência em geral, o que resultou em alterações fundamentais na lógica.

As lógicas não clássicas podem ser divididas em dois tipos: as lógicas complementares e as lógicas heterodoxas. Nas lógicas complementares são aceitos os três princípios da lógica clássica aristotélica, a saber, o princípio da identidade, o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído. A diferença entre as lógicas complementares e a lógica clássica repousa no fato de que, usualmente, as primeiras acrescentarem novos operadores que não são funções de verdade, ou seja, operadores intensionais[178] (MORTARI, 2001).

Já as lógicas heterodoxas rescindem alguns dos princípios da lógica clássica. Serão abordadas neste trabalho, as lógicas paracompletas, as paraconsistentes e as polivalentes. No que diz respeito ao problema do paradoxo, as lógicas heterodoxas desenvolvem seu papel de incorporar ou eliminar o paradoxo através da derrogação do princípio da não contradição e do princípio do terceiro excluído. Será mencionado a seguir como que cada uma dessas formulações lógicas contornaram os paradoxos por meio da alteração dos princípios em relação à logica clássica.

Nas lógicas paracompletas, o princípio do terceiro excluído não vale, ou seja, dentro do sistema pode existir uma afirmação A tal que tanto A quanto $\neg A$ sejam falsas. Uma das teorias matemáticas que engloba as lógicas paracompletas é o intuicionismo. O intuicicionismo, uma das correntes filosóficas que sucede a crise dos fundamentos, entende que as verdades e objetos matemáticos só têm sua existência garantida através de métodos específicos para construção ou conhecimento de tais verdades e objetos (DAVIS; HERSH, 1989). Ou seja, não é possível atestar a existência de objetos matemáticos sem que estes sejam efetivamente construídos através de certos métodos.

Nesta corrente, ocorre a recusa da universalidade de algumas leis, tal como o princípio do terceiro excluído. Para o intuicionismo este princípio seria válido para conjuntos finitos e não poderia ser extendido a todos os conjuntos. Como exemplo, no caso do intuicionismo, da proposição $\neg(\forall x\, P(x))$ não é possível obter como conclusão que $\exists x(\neg P(x))$, (D'OTTAVIANO, 1990). Dessa forma, não há a possibilidade de derivar paradoxos dentro do sistema, ou seja, eles não têm significado dentro do intuicionismo.

Sobre as lógicas polivalentes[179], os primeiros sistemas foram criados simultanea e independentemente pelo lógico polonês Jan Lukasiewicz (1878 - 1956) e pelo matemático e lógico Emil Leon Post (1897 – 1954), por volta de 1920. O objetivo da criação deste tipo de lógica era investigar proposições modais e as noções de possibilidade e necessidade que estavam relacionadas com tais proposições.

[178] Operadores temporais, modais, dentre outros (Ver Mortari (2001)).
[179] As lógicas polivalentes são paracompletas.

Lukasiewicz investigou expressões que utilizavam o operador possibilidade $\lozenge$. A expressão "é possível P", escrita nesta lógica como $\lozenge P$, é entendida como uma expressão primitiva do sistema, cujas as propriedades são expressas dentro do mesmo. A viabilidade de interpretar o operador possibilidade através de tabela de verdade estaria condicionada à admissão em sua semântica de mais possibilidades para uma proposição do que apenas V (verdadeiro) e F (falso). Lukasiewicz criou, inicialmente, uma lógica com três valores de verdade ($\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$), que ficou conhecida como sistema L_3. Posteriormente, foram criadas lógicas com n operadores.

A questão do paradoxo dentro das lógicas polivalentes fica condicionada à validade do princípio do terceiro excluído. Como este princípio não vale, certos paradoxos não são deriváveis dentro do sistema.

Em 1948, os primeiros sistemas lógicos paraconsistentes foram criados pelo lógico polonês Stanislaw Jáskowski (1906 - 1965). Apesar disso, o grande fundador das lógicas paraconsistentes foi o matemático e lógico brasileiro Newton da Costa (1929 -), que publicou seus primeiros resultados em 1953.

Em sistemas lógicos paraconsistentes, o princípio da não contradição não é válido em geral. Nas teorias paraconsistentes, que são teorias baseadas em lógicas paraconsistentes, a presença de contradição não gera trivialização. Isso se deve ao fato de que o Princípio "*Ex Falso Sequitur Quodlibet*"[180], $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, da lógica clássica aristotélica, não é válido nas lógicas paraconsistentes *lato sensu*. Isto garante que as teorias paraconsistentes podem ser inconsistentes, porém não triviais. Ou seja, mesmo que haja fórmulas contraditórias dentro do sistema, isto não implica que toda fórmula do sistema seja um teorema; não implica que o sistema seja trivial.

Segundo D'ottaviano (1990), "as teorias paraconsistentes de relevância têm proposições que são "bem comportadas" e outras que são "mal comportadas" e englobam a lógica clássica como um todo". Isto é, sob certo ponto de vista, toda fórmula que é um teorema da lógica clássica aristotélica também o é dentro de sistemas paraconsistentes relevantes.

[180] Também conhecido como Princípio da Explosão.

Nas teorias paraconsistentes, os paradoxos podem ser absorvidos no sistema sem que o sistema perca força lógica, isto é, sem que a teoria torne-se trivial. Nesse sentido, quando os paradoxos são derivados dentro da teoria, estes “podem não constituir problemas para o sistema” (D’OTTAVIANO, 1990).

Do que foi discutido nesta seção, a relevância do estudo dos paradoxos se impõe quase que naturalmente. A presença dos paradoxos teve papel importante na emergência dessa multiplicidade de teorias, resultando em grandes avanços científcos e quebra de paradigmas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi visto, no fim do século XIX e início do século XX, o surgimento das geometrias não euclidianas levantaram dúvidas quanto à fundamentação da Matemática através da Geometria. Alguns matemáticos, como Frege, migraram do ideal geométrico para o ideal aritmético de fundamentação. Dessa forma, se a Aritmética era a base da Matemática, esta própria deveria estar bem fundamentada. Frege buscou construir uma fundamentação para a Aritmética através da Lógica, cujo esforço e dedicação de uma vida acadêmica, mais de 20 anos de trabalho, culminaram na publicação de três obras: *Begriffsschrift* (1879), *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) e *As Leis Básicas da Aritmética* (1893 e 1902).

Em *Begriffsschrift*, Frege apresentou uma linguagem artificial que deveria ter a precisão necessária para expressar e demonstrar as verdades científicas, mantendo assim o ideal da lógica desde seus primórdios. Ele pretendia que esta linguagem fosse eficiente para explicitar as relações aritméticas, eliminando as lacunas dos processos de raciocínio. Até este momento, o objetivo do autor era bem determinado: construir uma linguagem suficientemente precisa e que fosse capaz de livrar a Aritmética das ambiguidades geradas pelo uso da linguagem comum. *Begriffsschrift* é basicamente um livro de lógica e apresenta o primeiro sistema axiomático para a lógica proposicional, a importante análise de proposições através de função e argumento (e não mais de sujeito e predicado), a quantificação, dentre outros marcos, como foi visto no segundo capítulo deste trabalho. A importância desta obra para a Lógica e a Matemática é inegável, assim como afirmam Alcoforado (2009), Sluga (1999), Dummett (1991), Heijenoort (1967), Santos (2008), dentre outros, pois esta caracteriza a instituição de uma Lógica Matemática.

A segunda obra de Frege, *Os Fundamentos da Aritmética*, apresentou pela primeira vez o ideal da redutibilidade da Aritmética à Lógica. Nesta obra, Frege defende que o número é um objeto lógico que pode ser adequadamente construído através de noções puramente lógicas, como a noção de extensão de conceito. Ele tece duras críticas a filósofos e matemáticos que apresentavam uma caracterização para o número pautado em aspectos empíricos e psicológicos. Nesse sentido, as críticas de Frege perpassam as ideias de que o número não é propriedade das coisas exteriores, não é subjetivo e, ainda, que o número não é um conjunto de coisas ou de unidades. Estes argumentos ainda são atuais e importantes de serem retomados numa abordagem a respeito da Filosofia da Matemática.

O último livro, *As Leis Básicas* da Aritmética, uniu o ideal de uma linguagem perfeita, capaz de expressar e demonstrar as verdades aritméticas, presente em *Begriffsschrift*, e o ideal da redutibilidade da Aritmética à Lógica, presente nos *Fundamentos*. Dessa forma, o que Frege faz nesta obra é apresentar um sistema axiomático para a Aritmética; uma fundamentação lógica para a mesma. Como foi visto, antes da publicação do segundo volume desta obra, Russell surpreende Frege com a identificação de um paradoxo em sua teoria.

O *paradoxo de Russell* apresenta seus primeiros indícios na primeira obra de Frege, *Begriffsschrift*, momento em que o autor admite que funções do tipo $\Phi(a)$, podem ser tanto argumentos de a quanto de Φ. Entretanto, a possibilidade de eclosão do paradoxo é contida pela extratificação de funções dentro do sistema, ou seja, as funções possuem argumentos bem determinados e, desse modo, não podem ser argumentos de si mesmas. Entretanto, ao definir posteriormente a noção de percurso de valor (extensão de conceito ou classe), um objeto completo em si e que, por isso, poderia se tornar o argumento de uma função, Frege abre espaço para a emergência do paradoxo. Isso porque, o percurso de valor, depende da função que o determina.

O paradoxo compromete o sistema axiomático construído nas *Leis Básicas*. Um dos axiomas apresentados por Frege dentro da teoria, a lei V, exibe a noção de percurso de valor que, como discutido acima, está pautada na indeterminação de uma função e permite a derivação do paradoxo dentro do sistema. A lei V possibilitou construir a propriedade *classe que não pertence a si mesmo* e o objeto *classe das classes que não pertencem a si mesmo*, gerando uma contradição. Ou seja, esta permitiu exibir uma propriedade legítima a qual nenhum conjunto poderia ser associado. Com o abalo da noção de percurso de valor, todo o sistema de Frege desmoronou, já que as noções essenciais em Matemática, como o conceito de número, estavam pautadas na existência de uma extensão de conceito associada a todo conceito, bem como na sua caracterização dentro do sistema.

O percurso de Frege ao longo da sua vida acadêmica foi marcado pela busca da explicitação de todas as suas noções, definições, axiomas e regras de inferência, numa busca incansável pela verdade e certeza. Ele sempre acreditou que seria possível livrar a Matemática de ambiguidades e contradições. Após a identificação do paradoxo, Frege não conseguiu encontrar uma saída que o satisfizesse para abandonar ou adaptar a noção de percurso de valor, a fim de evitar o paradoxo. Apesar disso, as propostas apresentadas por ele para impedir que o paradoxo fosse gerado anteveem as soluções dadas por outros estudiosos posteriormente, que foram bem aceitas pela academia. Mesmo assim, o que se alcança são formas de evitar os paradoxos, mas não uma linguagem perfeita, a certeza e a verdade absoluta da Matemática.

A primeira proposta apresentada por Frege para impedir o paradoxo centra-se na ideia de eliminar a impredicatividade, tal como foi, posteriormente, exposta por Russell e Whitehead na teoria dos tipos. Essa ideia é a primeira solução discutida por Frege e que parte da proposta de tomar extensões de conceitos como uma espécie de objeto diferente de objetos próprios. A segunda proposta apresentada por Frege, propor axiomas para substituir o axioma V e o Vb, podem ser vistas como a base do axioma da separação, restrição proposta posteriormente por Zermelo nas suas tentativas de formulação da teoria de conjuntos.

Deste modo, a emergência do paradoxo, ainda que devastadora para Frege, possibilitou avanços nas teorias matemáticas, filosóficas e lógicas, deixando um rico legado para a Matemática, a Lógica e a Filosofia. Frege, como dito a Russell, esperava que seus trabalhos contribuíssem para o “progresso científico” (FREGE, 1902), o que de fato foi alcançado, apesar de o matemático não ter vivido o suficiente para assistir o desenvolvimento de novas teorias a partir de seu trabalho e o crescente reconhecimento do mesmo. Atualmente, os trabalhos de Frege têm sido retomados por muitos pesquisadores em Lógica e Filosofia (SILVA, 2007), um reconhecimento de que há valiosas contribuições em seus escritos.

Os trabalhos de Frege foram além do famoso paradoxo. Ele revolucionou a lógica e deu dimensão a contradição identificada por Russell, apontando suas consequências para o sistema construído por ele e para quaisquer sistemas que fossem construídos a partir da lógica clássica aristotélica e da teoria de conjuntos.

Nesse sentido, atestou o comprometimento de qualquer fundamentação para Aritmética que fosse pautada nestes princípios. Com relação a isso, em 1931, Gödel comprova a falência do ideal de fundamentação da Aritmética através de sistemas lógicos clássicos. Ou seja, Frege também foi preciso ao notar que qualquer fundamentação para a Aritmética, utilizando a Lógica, estaria comprometida, não só aquela construída por ele; isto pode ser visto como um dos primeiros abalos a um projeto de fundamentação das teorias matemáticas. Os teoremas de Gödel mostram que existem verdades matemáticas que não podem ser demonstradas, ou seja, não é possível construir um sistema axiomático completo e consistente que englobe toda a Aritmética. Dessa forma, se construirmos um sistema que seja completo, este será inconsistente e, por outro lado, se alcançarmos a consistência, não atingiremos a completude. Nesse sentido, consistência e completude *andam separadas*.

As ideias de Wittgenstein também têm suas raízes nos trabalhos de Frege. Primeiramente, no *Tratactus* (1921), Wittgenstein, influenciado pela obra de Frege e enquanto orientando de Russell em Cambridge, constrói seu próprio estudo da lógica se deparando com a impossibilidade da linguagem ideal. Na obra *Investigações Filosófica* (1953), publicada postumamente, a pergunta filosófica deixa de ser sobre a existência e caracterização de algo (O que é?), passando a ser sobre como as ideias e palavras são utilizadas (Como?). O movimento filosófico conhecido como virada linguística, frequentemente atribuído a Wittgenstein, é marcado pelo caráter anti-idealista e anti-representacional da linguagem.

Diante dos paradoxos, dos teoremas de Gödel e da virada linguística, as palavras de Russell, apresentadas na epígrafe desta dissertação, são bem representativas. Segundo Russell, após uns vinte anos de trabalho em busca da verdade, ele reconhece que não havia mais nada que ele poderia fazer para tornar o conhecimento matemático indubitável.

As diversas dimensões mencionadas no estudo deste paradoxo, para além da perspectiva de Russell, e a cuidadosa reconstrução em suas especificidades matemáticas, permitiu recolocá-lo na produção de Frege. Nesse sentido, recoloca o próprio Frege como precursor de muitos avanços nos campos da Filosofia, da Lógica e da Matemática.

O momento histórico abordado é fecundo e traz contribuições para o campo da Educação e para professor de Matemática em particular, tanto pelo seu conteúdo lógico e matemático, quanto por possibilitar questionamentos quanto a uma visão ingênua de que uma contradição seja sempre infrutífera. Isso porque, trata-se de uma importante mudança na Lógica e na Matemática que tem repercussão nos modos de se conceber a Ciência. A obra de Frege como um todo coloca o educador em contato com questionamentos filosóficos do conhecimento, a fundamentação da Matemática, em especial.

Espera-se que este trabalho possibilite apresentar uma introdução à obra de Frege, a visão do *paradoxo de Russell* em sua fertilidade e as teorias de Frege como mudanças importantes de paradigma para a Matemática, a Lógica e a Filosofia, originando novos desenvolvimentos e novas teorias.

7 BIBLIOGRAFIA

ALCOFORADO, P. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. 2ªed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

ANELLIS, I. The First Russell Paradox. In: **Perspectives on the history of mathematical logic**. . Edição de Thomas Drucker. Boston: Birkhäuser, 1991.

ARTSTEIN, z. **Mathematics and the real world: the remarkable role of evolution in the making of mathematics**. (Tradução para o inglês de Alan Hercberg). New York: Prometheus Books, 2014.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Tradução do inglês para o português de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989. 481p.

DOXIADIS, A. K.; PAPADIMITRIOU, C. H**. Logicomix: uma jornada épica em busca da verdade.** [Logicomix: an epic search for truth]. (Tradução do inglês para o português de Alexandre Boide dos Santos); (Ilustrações de Alecos Papadatos e Annie Di Donna). São Paulo: WMF Martins, 2010.

D'OTTAVIANO; I. M. L. Paradoxos auto-referenciais e as lógicas não clássicas heterodoxas. **Ciência e Cultura**, vol. 42, n. 2, São Paulo, 1990. P. 164-123.

D'OTTAVIANNO; I. M. L; FEITOSA, H. A. **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas**. Disponível em: ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf Acesso em: 25 mar.2015. 2003

DUARTE, A. B. **Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege**. 2009. 351p. Tese (Doutorado em Filosofia). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

DUMMETT, M. **Frege: philosophy of mathematics**. London: Duckworth, 1991. 331p.

______. **Truth and other enigmas**. Massachusetts: Harvard University Press Cambridge. 470p.

______. **The Seas of Language**. New York: Clarendon Press – Oxford, 1996.

EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical Logic**. 2ed. New York: Springer Verlag, 1996.

FRAENKEL, A. A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. **Foundations of Set Theory**. Holanda: Elsevier Science Publishing Company, 1984. 404p.

FREGE, G. Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. In: **Frege and Gödel: two fundamental texts in mathematical logic.** Edição, introdução e tradução do alemão para o inglês de van Heijenoort. Cambridge: Harvard. 1970.

______. Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia. In: ALCOFORADO, P**. Lógica e Filosofia da Linguagem**. 2ªed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009a.

______. Sobre a Finalidade da Conceitografia. In: ALCOFORADO, P**. Lógica e Filosofia da Linguagem**. 2ªed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009c.

______. Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número**.** In: **Pensadores: Pierce e Frege**. Tradução do alemão para o português de Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

______. **The Basic Laws of Arithmetic: exposition of the system**. Traduzido do alemão para o inglês de Montgomery Furth. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1964. 144p.

GOMES, R. R. **A Noção de Função em Frege**. 2009. 85p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

GOLDSTEIN, R. **Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel**. Tradução do inglês para o português de Ivo Korytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GRATTAN-GUINNESS, I. How Bertrand Russell Discovered his Paradox. In: **Historia Mathematica**, vol. 5, issue 2, May 1978, p.127-137.

GRIFFIN, N. The Prehistory of Russell's Paradox. In: **One Hundred Years of Russell's Paradox: mathematics, logic, philosophy**. Edited by Godehard Link. Berlim: Walter de Gruyter, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. V.1.

GUILLEN, M. **Pontes para o Infinito: o lado humano das matemáticas**. Tradução de Jorge da Silva Branco. Portugal: Gradiva, 1983. 205p.

HADDOCK, G. E. R. **A Critical Introdution to the Philosophy of Gottlob Frege**. Puerto Rico: Ashgate, 2006.

HERSH, R. **What is mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997.

HILBERT, D. Problemas Matemáticos. (Tradução do alemão para o português de Sérgio Nobre). **Revista Brasileira de História da Matemática.** Vol. 3, n. 5, p.5-12, 2003.

KLEMENT, K. C. **Gottlob Frege**. Disponível em: www.iep.utm.edu/frege Acesso em:10 fev. 2015.

LAKATOS, E. M. e MARCONI, M. A. **Metodologia Científica**. 2ª Edição. S. Paulo: Ed. Atlas, 1995.

LECLERC, A. Mente e linguagem. **Ciência e Vida**. Filosofia especial. São Paulo: Dibra, ano II, n. 9, p. 40-53. 2008.

LIARD, L. **Lógica.** (Tradução do inglês para o português de Godofredo Rangel). 7ªed. São Paulo: Editora Nacional, 1968.

LONG, P.; WHITE, R. **Philosophical and Mathematical Correspondence**. Tradução do alemão para o inglês de Peter Long e Roger White. United Kingdom: Basil Blackwell – Oxford, 1980. 214p.

LOUZADO, G. L. Frege: lógica e linguagem. **Analytica**. Rio de Janeiro: Vol.3.n.2, 1998.

LUKASIEWICZ, J**. Elements of mathematical logic**. New York: Pergamon, 1963.

MENDELSON, E. **Introduction to Mathematical Logic**. 4ed. London: Chapman e Kall, 1997.

MIGUEL, A.; VILELA, D. S. Práticas escolares de mobilização de cultura matemática. **Caderno Cedes**, Capinas, vol.28, n.74, p. 97-120, jan/abr, 2008.

MORTARI, C. A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora da Unesp: Imprensa Oficial do Estados, 2001.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **Gödel's Proof**. New York: University Press - U.S.A, 1973.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E.F. **Frege's Bibliography**. 2002. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frege.html Acesso em: 10 fev. 2015.

RUSSELL, B. (1903) **Principles of Mathematics**. London: Routledge, 2010. 552p. (Routledge Classics).

RUSSELL,B.; WHITEHEAD, A. N. (1910) **Principia Mathematica**. United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.

SALERNO, J. **On Frege**. Belmont: Wadsworth/ Thompson Learning, 2001. 98p.

SANTOS, L.H.L. A harmonia essencial. In: **A crise da razão**. São Paulo: Companhia das letras, 1996.

______. Frege, vida e obra. In: **Pensadores: Pierce e Frege**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

______. **O Olho e o Microscópio: a gênese e os fundamentos da lógica segundo Frege.** Rio de Janeiro:Trarepa, 2008. 208p.

SCHUBRING, G. The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Profissionalization of Mathematics. In: **Social History of Nineteenth Century Mathematics**. New York: SPRING, 1979.

SLUGA, H. D. **The Arguments of the Philosophers: Gottlob Frege**. London: Routledge, 1999. 203p.

VILELA, D. S. **Análise das Críticas de Frege à Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições.** 1996. 124p. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 1996.

VILELA, D. S. **Dois Empregos da Noção de Conjunto: G. Cantor e Teoria de Conjuntos**. In: VII Reunião da Rede de Intercâmbios para a História e a Epistemologia das Ciências Químicas e Biológicas. Anais./ José Luiz Goldfarb e Márica H. M. Ferraz (orgs.). São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo: Editora da Unesp: Imprensa Oficial do Estado: Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2001.

VILELA, D.; DEUS, K. Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. **Horizontes, dossiê Educação e Cultura**, v.32, n2, jul./dez. 2014.

VILELA, D. S.; DORTA, D.O que é “desenvolver o raciocínio lógico”? Considerações a partir do livro Alice no país das maravilhas. **Estudos Pedagógicos.** Brasília, v.91, n.229, p.634-651, set./dez. 2010.

VILKKO, R. The reception of Frege’s Begriffsschrift. **Historia Mathematica**. n. 25. 1998, p.412-422.

WEHMEIER, K. F. Russell’s Paradox in Consistent Frangments of Frege’s Grundgezetze der Arithmetik. In: **One Hundred Years of Russell’s Paradox: mathematics, logic, philosophy**. Edited by Godehard Link. Berlim: Walter de Gruyter, 2004.

ZALTA, E. N. Gottlob Frege. In: **Stanford Encyclopedia of Philosophy**. 2012. Disponível em: www.plato.stanford.edu/entries/frege Acesso em: 11. Fev. 2015.

8 APÊNDICE I

	Vida e Obra de Frege[181]
1869 -1871	Frege ingressa na Universidade de Jena.
1871-1873	Realiza e apresenta sua dissertação doutoral na Universidade de Göttingen.
1874	Inicia a atividade docente na Universidade de Jena.
1879	*Obra: Begriffsschrift, uma linguagem Formular do Pensamento Puro Modelada sobre a da Aritmética*[182]
1879	*Obra: Aplicações da Conceitografia*[183]
1880 -1881[184]	*Obra: A Lógica Calculatória de Boole e a Conceitografia*[185]
1882	*Obra: Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia*[186]
1882	*Obra: Sobre a Finalidade da Conceitografia*[187]
1884	*Obra: Os Fundamentos da Aritmética. Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número*[188]
1891	*Obra: Função e Conceito*[189]
1892	*Obra: Sobre o Sentido e a Referência*
1892	*Obra: Sobre o Conceito e o Objeto*
1893	*Obra: As Leis Básicas da Aritmética Derivadas Conceitograficamente*[190]

181 Informações retiradas de Alcoforado (2009) e Zalta (2012).
182 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens Halle*.
183 *Anwendungen der Begriffsschrift.*
184 A obra foi escrita logo após *Aplicações da Conceitografia*, mas só foi publicada postumamente, em 1969.
185 *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift.*
186 *Über die wissenchaftlife Berechtigung einer Begriffsschrift*.
187 *Über den Zweck der Begriffsscrift*.
188 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*.
189

1895	*Obra: Elucidações Críticas a Alguns Tópicos de E. Schröder, Lições de Álgebra da Lógica*[191]
1896	*Obra: Sobre a minha Conceitografia e a do Sr. Peano*[192]
1899	*Obra: Sobre os Números do Sr. H. Schubert*[193]
1902	Russell envia carta à Frege comunicando-o sobre o paradoxo.
1902	*Obra: As Leis Básicas da Aritmética* (segundo volume)
1904	*Obra: Que é uma função?*[194]
1904	*Obra: Sobre os Fundamentos da Geometria*
1904	*Obra: Sobre os Fundamentos da Geometria, II*
1904	*Obra: Sobre os Fundamentos da Geometria, I, II, III*
1918	*Obra: Investigações Lógicas*[195][196]
1918	Frege muda-se de Jena para Badkleinen.
1925	Frege falece.

[190] *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*.
[191] Artigo em que rebate a crítica de Schröder de que a lógica deste seria superior à lógica de Frege.
[192] Expõe detalhadamente sua conceitografia e a de Peano, ressaltando como a dele próprio é superior.
[193] Opusculo em que critica um trabalho escrito pelo autor sobre o conceito de número em uma enciclopédia de ciências e matemática.
[194] *Was ist eine Funktion?*
[195] Contém os artigos '*O Pensamento' (Der Gedanke: Eine Logische Utersuchung)* e *'A Negação' (Die Verneinung: Eine Logische Untersuchung),* ambos escritos entre 1918 e 1919 e *'Pensamentos Compostos'(Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge)* e *'Generalidade Lógica' (Logische Allgemeinheit),* ambos escritos entre 1923 e 1925.
[196] Investigações Lógicas é uma publicação póstuma, a qual reuniu os trabalhos que Frege escreveu a fim de compor um amplo tratado de lógica filosófica.

9 APÊNDICE II

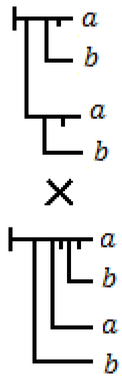
9.1. Derivação de algumas proposições necessárias para derivação da proposição Vb

Serão apresentadas a seguir as derivações das proposições Ie, IIIc e IIIh necessárias para a derivação da lei Vb, necessária para a compreensão da discussão acerca do *paradoxo de Russell* utilizando a simbologia fregeana.

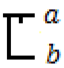
9.1.1. Derivação da proposição Ie

Para derivação da proposição Ie é utilizada a lei I e a regra da transição. Desse modo, tem-se:

I



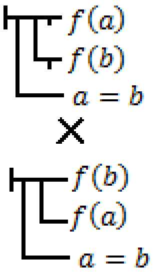
(Ie)

Na derivação acima, em I, a foi substituído por  .

9.1.2. Derivação da proposição IIIc

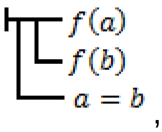
Para a derivação da proposição IIIc será necessária a utilização da proposição IIIa e a transição de proposições, substituição por proposições equivalentes.

IIIa



(IIIc)

Acima, a proposição IIIa aparece um pouco diferente que na sua forma original

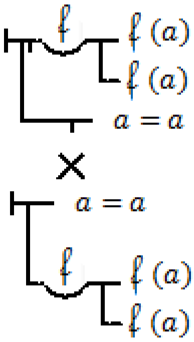


isso porque, no lugar da letra funcional “f” está sendo utilizada a marca de função romana “ $\top f(\xi)$” e as horizontais são combinadas.

9.1.3. Derivação da proposição IIIh

A derivação da proposição IIIh será necessária a utilização das proposições, IIIc e IIIe. Para a derivação da proposição IIIe, por sua vez, será necessária a lei I e a seguinte derivação a partir da lei III:

III

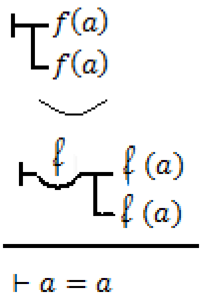


(α)

Na derivação de (α), a lei III é utilizada substituindo a letra funcional “g” pelo nome de função "$\top\xi$” e “b” é substituído por “a”. Utilizando (α) e I, é possível, então derivar IIIe.

I

(α):



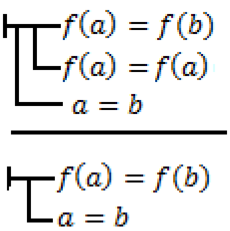
(IIIe)

O sinal  indica que para passar da lei I para a proposição que a segue é feita através da conversão de uma letra latina para uma letra gótica.

Finalmente, utilizando IIIc e IIIe, tem-se:

IIIc

(IIIe)::

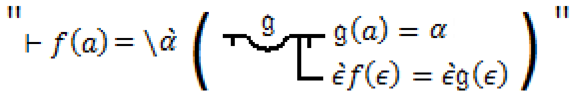


(IIIh)

Nesta derivação, a letra funcional “f” em IIIc foi substituída pela marca de função romana “$f(a) = f(\xi)$”.

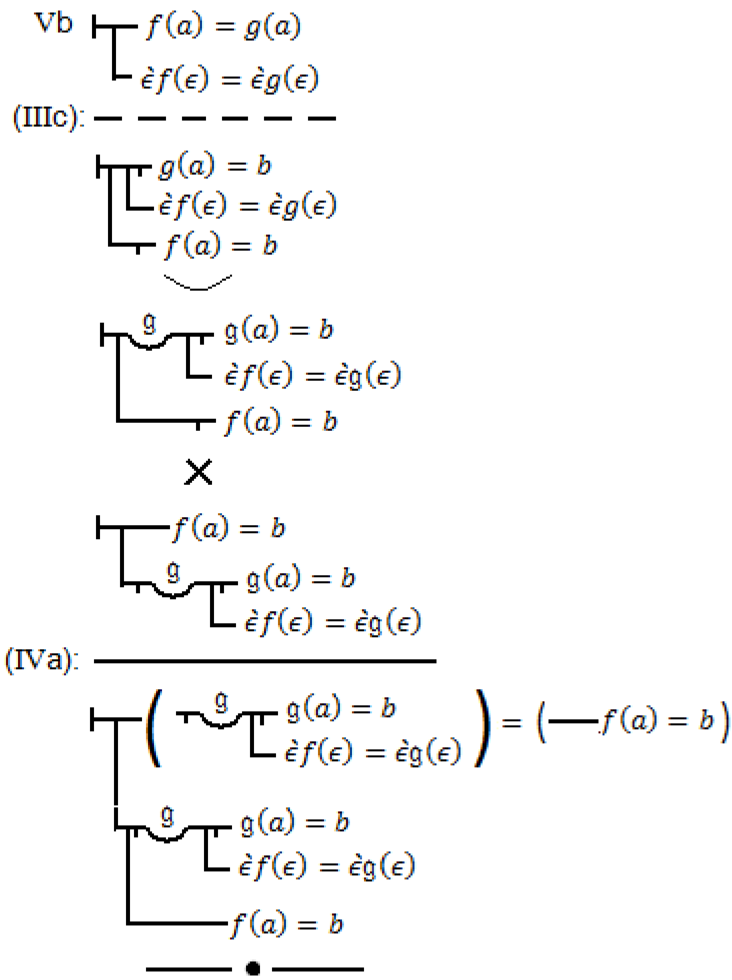
9.1.4. Derivação corolário $\vdash \boldsymbol{f(a) = a \cap \grave{\epsilon} f(\epsilon)}$

A derivação do corolário $\vdash f(a) = a \cap \grave{\epsilon} f(\epsilon)$ parte da definição A, já apresentada neste trabalho. Por esta definição, é suficiente provar que



.

Primeiramente, parte-se da lei Vb, para então derivar a proposição (δ):

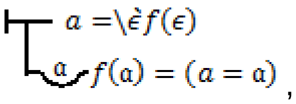


(δ

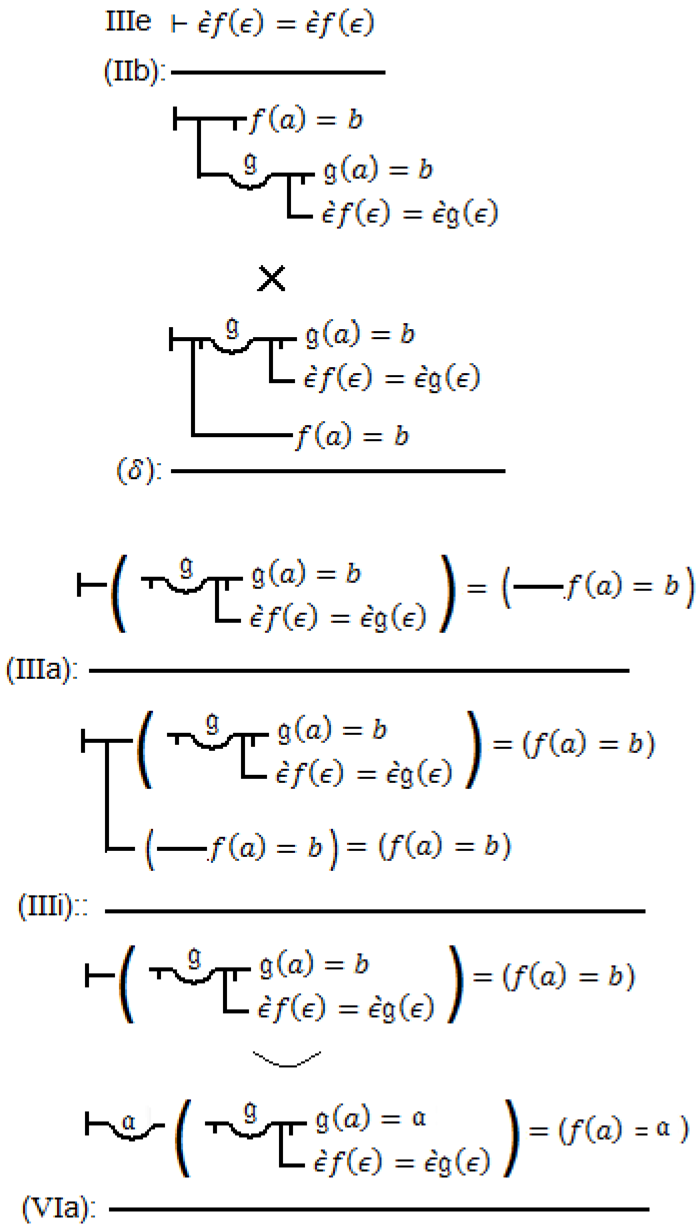
Para a segunda parte da derivação será utilizada a proposição (IIIi)

$$\vdash (-\, a = b) = (a = b)$$

e a proposição (VIa)



derivadas por Frege em § 50 e §52, respectivamente, cujas derivações não foram apresentadas neste trabalho. Partindo da proposição (IIIe), derivada na subseção anterior, e utilizando a proposição (δ) é possível derivar o corolário:



$$\vdash f(a) = \backslash\grave{\alpha}\left(\,\smile^{\mathfrak{g}}\;\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = \alpha\\ \grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\epsilon}\mathfrak{g}(\epsilon)\end{array}\right)$$

(IIIa): ———————————————

$$\vdash\;\begin{array}{l} f(a) = a \cap \grave{\epsilon}f(\epsilon)\\ \backslash\grave{\alpha}\left(\,\smile^{\mathfrak{g}}\;\begin{array}{l}\mathfrak{g}(a) = \alpha\\ \grave{\epsilon}f(\epsilon) = \grave{\epsilon}\mathfrak{g}(\epsilon)\end{array}\right) = a \cap \grave{\epsilon}f(\epsilon)\end{array}$$

(A):: ———————————————

$$\vdash f(a) = a \cap \grave{\epsilon}f(\epsilon)$$ (1

———•———