UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA E METODOLOGIA DAS CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

A MATEMÁTICA DAS *PHILOSOPHISCHE BEMERKUNGEN*: WITTGENSTEIN NO CONTEXTO DA *GRUNDLAGENKRISE*

Anderson Luis Nakano

UFSCar - São Carlos - Brasil
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA E METODOLOGIA DAS CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

A MATEMÁTICA DAS *PHILOSOPHISCHE BEMERKUNGEN*: WITTGENSTEIN NO CONTEXTO DA *GRUNDLAGENKRISE*

Anderson Luis Nakano

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia e Metodologia das Ciências da Universidade Federal de São Carlos, para a obtenção do título de Doutor em Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto

UFSCar - São Carlos - Brasil
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N163m

Nakano, Anderson Luis
A matemática das Philosophische bemerkungen : Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise / Anderson Luis Nakano. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
234 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Filosofia da matemática. 2. Wittgenstein. 3. Crise dos fundamentos da matemática. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Anderson Luis Nakano, realizada em 29/09/2015:

Prof. Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto
UFSCar

Prof. Dr. João Vergílio Gallerani Cuter
USP

Prof. Dr. Luiz Henrique Lopes dos Santos
USP

Prof. Dr. André da Silva Porto
UFG

Prof. Dr. Jean-Philippe Narboux
Bordeaux-III

Ao Altíssimo

Agradecimentos

Gostaria de deixar meu enorme agradecimento àqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para que este trabalho fosse possível. Em primeiro lugar, a meu orientador, o Prof. Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto, que exerceu enorme influência na minha formação e em meu modo de enxergar e dar relevância às questões que me ocuparam durante todos esses anos. Agraceço a meus pais pelo apoio constante. Agradeço a minha querida esposa Alice pela companhia e pelo carinho em todos esses anos. Agradeço ao Prof. Dr. Jean-Philippe Narboux pela acolhida e pelo diálogo durante minha estadia em Bordeaux. Agradeço aos professores e funcionários do DFMC da Universidade Federal de São Carlos. Por fim, agradeço à FAPESP pelos apoios financeiros, tanto no Brasil como no exterior.

Resumo

A tese fornece uma leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein sobre a matemática no início do seu "período intermediário" (mais precisamente, nos "capítulos matemáticos" das *Philosophische Bemerkungen*), situando estes escritos no contexto de duas crises. A primeira, interna ao pensamento do autor, diz respeito a inconsistências referentes àquilo que o *Tractatus* prescrevera como resultado da aplicação da lógica e a análise lógica efetiva de certos domínios do real, o que configurava, aos olhos de Wittgenstein, uma crise nos fundamentos da lógica. Por outro lado, controvérsias acerca dos fundamentos da matemática se acirraram ao longo da década de 1920, e debates entre três escolas que buscavam impor o seu modo não apenas de conceber a matemática, mas também de fazê-la tornavam-se cada vez mais frequentes. Essa crise, que recebera o codinome de *Grundlagenkrise der Mathematik*, constitui um importante pano de fundo histórico-conceitual para estes primeiros escritos de Wittgenstein após seu retorno à filosofia em 1929. Se, no *Tractatus*, Wittgenstein se posiciona apenas em relação ao logicismo de Frege e Russell, nestes escritos ele procura, a seu modo, contrapor seu pensamento em relação às tendências dominantes de sua época: o intuicionismo de Brouwer e Weyl, o formalismo de Hilbert e, por fim, o logicismo renovado de Ramsey. A tese desenvolve, em seu Capítulo conclusivo, uma reflexão sobre a postura de Wittgenstein ante estas três escolas clássicas e ante os problemas por elas enfrentados.
Palavras-chave: Wittgenstein, filosofia da matemática, crise dos fundamentos da matemática.

Abstract

This thesis provides a reading and interpretation of Wittgenstein's writings on mathematics at the beginning of his "middle period" (more precisely, at the "mathematical chapters" of *Philosophische Bemerkungen*), placing these writings in the context of two crises. The first, internal to his thought, consists of inconsistencies regarding what the *Tractatus* prescribed as the result of the application of logic and the effective logical analysis of certain domains of reality, which characterized, in Wittgenstein's view, a crisis in the foundations of logic. On the other hand, controversies about the foundations of mathematics were intensified throughout the 1920s, and debates between three schools who attempted to impose their way not only of conceiving mathematics, but also of doing it, became increasingly frequent. This crisis, also called *Grundlagenkrise der Mathematik*, is an important historical and conceptual background for these early writings immediately after Wittgenstein's return to philosophy in 1929. If in the *Tractatus* Wittgenstein had positioned himself only with regard to Frege's and Russell's logicism, in these writtings he tries in his own way to contrast his thought with the prevailing trends of his time: the intuicionism of Brouwer and Weyl, Hilbert's formalism and, finally, Ramsey's renewed logicism. This thesis develops, in its concluding Chapter, a reflection on Wittgenstein's posture with respect to these three classical schools and with respect to the problems faced by them.
Keywords: Wittgenstein, philosophy of mathematics, fondational crisis of mathematics.

Sumário

Introdução

CONTEXTUALIZAÇÃO DA OBRA

O leitor que se depara com a afirmação de Wittgenstein, escrita poucos dias depois de seu retorno a Cambridge em 1929 e após mais de uma década afastado do trabalho filosófico, de que ele precisaria voltar, *contra a sua vontade*, à aritmética[*], mal pode imaginar a importância que as discussões sobre a aritmética assumiriam ao longo de seus manuscritos. A centralidade deste tema nos manuscritos de 1929 e 1930 contrasta com a brevidade com a qual ele foi considerado no *Tractatus*[†] (menos de três páginas em pouco mais de setenta). Com efeito, pelo menos metade de suas observações nos MS 105 a 108 tem como alvo temas matemáticos.

Destes manuscritos, Wittgenstein selecionou uma coletânea de entradas que deram origem a dois textos datilografados, etiquetados posteriormente como TS 208 e 209. No primeiro deles, a ordem das entradas em relação aos manuscritos foi mantida, enquanto, no segundo, as observações retiradas dos manuscritos foram reestruturadas em uma disposição inteiramente nova. Este último, segundo Rush Rhees[‡], foi entregue como um relatório de aproveitamento, a fim de garantir a continuidade de sua bolsa fornecida pelo Trinity College[§]. Treze anos após a morte de Wittgenstein, este texto foi editado e publicado por Rhees sob o título de *Philosophische Bemerkungen*[¶].

Rush Rhees, em seu trabalho editorial, dividiu o texto em vinte e dois capítulos. No geral, as divisões são bem fundadas e espelham descontinuidades temáticas do

[*]Ludwig **Wittgenstein**: *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 1, Wien/New York: Springer Verlag, 1999 (doravante citado como *WAi*), p. 7. Os *Wiener Ausgabe* trazem a transcrição dos manuscritos de Wittgenstein. Os volumes 1 e 2 correspondem aos manuscritos MS 105 a 108, base para a constituição das *Philosophische Bemerkungen* e, portanto, são de grande relevância para este trabalho. Informações de caráter filológico acerca destes manuscritos podem ser encontrados em *WAi*, pp. vii-xiv.

[†]**Idem**: *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. por Luis Henrique **Lopes dos Santos**, São Paulo: EdUSP, 1993 (doravante citado como *Tractatus*).

[‡]Cf. o *Ammerkung des Herausgebers*, ao fim das *Philosophische Bemerkungen.*

[§]Há, no entanto, controvérsias se o texto entregue para avaliação foi o TS 108 ou o TS 109. Para uma discussão mais detalhada, cf. Josef G. F. **Rothhaupt**: Wittgenstein at Work: Creation, Selection and Composition of 'Remarks', em: Nuno **Venturinha** (ed.): *Wittgenstein After His Nachlass*, Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2010, pp. 51–63 e Alois **Pichler**: *Untersuchungen zu Wittgensteins Nachlaß*, Bergen: Wittgenstein Archives, 1994.

[¶]Ludwig **Wittgenstein**: *Philosophische Bemerkungen*, ed. por Rush **Rhees**, Frankfurt: Suhrkamp, 1964 (doravante citado como *PhBm*).

texto. Os capítulos *X* a *XIX* são dedicados a temas predominantemente matemáticos, e eles constituem o objeto primeiro do presente trabalho, cujo desígnio é duplo: *i)* fornecer uma leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein acerca da filosofia da matemática no início do seu "período intermediário"; *ii)* desenvolver uma reflexão sobre a posição do autor a respeito da crise dos fundamentos da matemática que se instaurou no início do século *XX*. Para isso, procuraremos apresentar e elucidar as reflexões de Wittgenstein sobre a matemática nas *PhBm* de modo a destacar elementos para uma discussão sobre sua posição ante esta crise.

Como princípio metodológico, procuramos utilizar, salvo raras exceções, apenas textos escritos até o final da composição do MS 108. Este princípio visa a evitar o equívoco de projetar concepções posteriores na obra em questão, preservando, assim, o sentido original das passagens. Os manuscritos etiquetados como MS 105 a 108 são certamente a ferramenta mais importante para as finalidades deste estudo. A análise dos manuscritos, é claro, não serve de substituto para a interpretação das *PhBm*. Basta lembrar que a posição que algumas observações dos manuscritos tomam nas *PhBm* é, muitas vezes, mais iluminadora do que sua posição original nos manuscritos; em outras ocasiões, elas adquirem um novo sentido. Por outro lado, o conhecimento dos manuscritos é uma ferramenta auxiliar bastante relevante para o intérprete, sem mencionar que a própria seleção das observações que compõem as *PhBm* (em detrimento de outras) já é muitas vezes significativa. Alguns comentadores chegam a considerar bastante desorientadora uma abordagem direta às *PhBm* sem referência aos manuscritos*. Isso seria talvez um exagero; o que é certo é que os manuscritos fornecem chaves de interpretação bastante valiosas para a compreensão do texto póstumo. O retorno a passagens dos manuscritos, porém, será feito apenas com o intuito de esclarecer o texto das *PhBm*.

A fim de propiciar ao menos uma caricatura do contexto em que os capítulos *X* a *XIX* estão inseridos, procuraremos tornar um pouco mais familiar o cenário em que a obra como um todo foi redigida. As *PhBm* foram escritas no contexto de duas crises. A primeira, interna ao pensamento do autor, diz respeito a inconsistências referentes àquilo que o *Tractatus* prescrevera como resultado da aplicação da lógica e a análise lógica efetiva de certos domínios do real, o que configurava, aos olhos de Wittgenstein, uma crise nos fundamentos da lógica. Uma reformulação profunda do edifício do *Tractatus* deveria ser efetuada, dado o caráter insustentável de algumas de

*Cf. *e.g.*, Denis **Paul**: *Wittgenstein's Progress: 1929-1951*, Bergen: Wittgenstein Archives, 2007, pp. 17-8: "What would be a disastrous starting point for any student is a volume which appeared in 1964 as *Philosophische Bemerkungen* and later in English as *Philosophical Remarks*. (...) What makes *Philosophische Bemerkungen* so difficult to study is that its new order disguises a profound change in his philosophical views which he made about half way through the three and a half manuscript books. (...) In fact, to read *Philosophische Bemerkungen* without its manuscript sources is to cripple any possibility of understanding it".

suas premissas. Por outro lado, controvérsias acerca dos fundamentos da matemática se acirraram ao longo da década de 1920 e debates entre três escolas que buscavam impor o seu modo não apenas de conceber a matemática, mas também de fazê-la tornavam-se cada vez mais frequentes. Essa crise, que recebeu o codinome de *Grundlagenkrise der Mathematik*, é um importante pano de fundo histórico-conceitual para as *PhBm*. Se, no *Tractatus*, Wittgenstein se posiciona apenas em relação ao logicismo de Frege e Russell, nas *PhBm* ele procura, a seu modo, contrapor seu pensamento às tendências dominantes de sua época: o intuicionismo de Brouwer e Weyl, o formalismo de Hilbert e, por fim, o logicismo renovado de Ramsey. Com efeito, os textos de Wittgenstein que marcam seu retorno à atividade filosófica no fim da década de vinte contêm diversas reflexões críticas de temas bastante presentes no debate da época sobre os fundamentos da matemática.

Diante desse duplo impulso a que as reflexões sobre a matemática nas *PhBm* se submetem, pareceu-nos importante caracterizar, em traços largos, cada uma destas duas crises a fim de que os arredores destas reflexões se tornem mais precisos e delimitados. As duas Seções seguintes se encarregam desta tarefa.

O DESMANTELAMENTO DO *TRACTATUS* E A COMPOSIÇÃO DAS *PHILOSOPHISCHE BEMERKUNGEN*

A despeito de sua curta história como "obra clássica" da história da filosofia, o *Tractatus Logico-Philosophicus* tem recebido uma diversa gama de interpretações e tem sido o objeto de inúmeras discussões e debates na literatura. Estas discussões concernem não apenas a certos aforismos de difícil compreensão e exegese, mas também ao próprio estatuto da obra, bem como a seu propósito e à maneira "correta" de lê-la. Passaremos ao largo destas questões ao colocarmos, como ponto de partida, *uma* leitura possível do *Tractatus*. Trata-se da leitura de Luiz Henrique Lopes dos Santos*, que vê, neste livro, uma obra de fundamentação da lógica e do discurso apto à verdade e à falsidade. Segundo esta leitura, a base que sustenta toda – ou quase toda – a argumentação do livro é o estabelecimento da estrutura essencial da proposição. Por meio de uma excursão pela história da filosofia desde os gregos, Lopes dos Santos procura mostrar que a resposta que o *Tractatus* oferece para a questão da estrutura proposicional passa pela atribuição, ao discurso, de três traços essenciais: *i)* a bipolaridade, *ii)* a complexidade e *iii)* a de possuir um sentido plenamente determinado. A extração de todas as consequências destas características resulta no estabelecimento da forma geral da proposição, i.e., da forma mais geral de uma sentença da linguagem.

Como é bem conhecido, o *Tractatus* estrutura a forma geral da proposição a

*Luis Henrique **Lopes dos Santos**: A essência da proposição e a essência do mundo, em: *Tractatus Logico-Philosophicus*, São Paulo: EdUSP, 1993, pp. 11–112.

partir de dois componentes heterogêneos: as proposições elementares e as operações de verdade. A análise lógica da essência da proposição prescrevia a existência necessária de um nível elementar composto de proposições que *i)* são concatenações de nomes (sinais essencialmente simples)[*], *ii)* são logicamente independentes, i.e., de uma proposição elementar não se segue a verdade ou falsidade de nenhuma outra[†] e *iii)* não deixam ao mundo nenhuma "margem de manobra", ou seja, são de tal modo que apenas *um* fato as torna verdadeiras ou falsas. Além disso, o *Tractatus* descreve a forma mais geral de um conectivo proposicional e sustenta que as proposições que estes conectivos geram são sempre funções de verdade de proposições elementares[‡]. Deste modo, toda e qualquer proposição pode ser obtida mediante a aplicação de operações de verdade sobre as proposições elementares. Por conseguinte, toda a construção do espaço lógico – espaço proposicional – é feita por meio de operações de verdade sobre a base deste espaço: as proposições elementares[§].

A reflexão do *Tractatus* sobre a lógica, porém, limitava-se a prescrever estas notas essenciais a toda e qualquer proposição, sem, no entanto, antecipar *quais são* as proposições elementares, *quais nomes* simples elas concatenam. O *Tractatus* passava o bastão desta tarefa para a *aplicação* da lógica: "A *aplicação* da lógica decide a respeito de quais proposições elementares existem. / O que vem com a aplicação, a lógica não pode antecipar. / Isto é claro: a lógica não pode colidir com sua aplicação"[¶]. A função da aplicação da lógica era, então, a de fornecer a forma precisa das proposições elementares e, com isso, teríamos a forma precisa de toda e qualquer proposição da linguagem. Parece claro que esta tarefa deveria ser realizada sobre as proposições de nossa linguagem que, de acordo com o *Tractatus*, estão perfeitamente em ordem e expressam, de modo legítimo, um sentido. O que a nossa linguagem não mostra imediatamente em sua superfície é, precisamente, sua forma lógica, e a tarefa da aplicação da lógica a estas proposições era, então, a de escancarar, na superfície do sinal proposicional, a forma lógica da proposição, a forma lógica do pensamento. Com o resultado da análise última das proposições de nossa linguagem em mãos, seria possível mostrar com clareza, para cada proposição, quais proposições elementares ela afirma serem verdadeiras e quais ela afirma serem falsas; seria possível ver, de modo cristalino, o seu *sentido*.

Passados quase dez anos da publicação do *Tractatus*, Wittgestein volta a Cam-

[*] *Tractatus*, aforismo 4.22.

[†] Ibid., aforismo 5.134.

[‡] Dizer que a proposição é uma função de verdade de proposições elementares é o mesmo que afirmar que o valor de verdade daquela é completamente determinado pelo valor de verdade destas.

[§] No artigo *Operations and Truth-Operations in the Tractatus*, Gallerani Cuter chama a atenção para o fato de que as operações que, no *Tractatus*, não são verofuncionais (como a operação que gera a série aRb, $(\exists x) : aRx \cdot xRb$, $(\exists x, y) : aRx \cdot xRy \cdot yRb, \ldots$) nunca são usadas para *construir* outras proposições, mas apenas para descrever variáveis. Cf. João Vergílio **Gallerani Cuter**: Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*, em: *Philosophical Investigations*, 28.1 (2005), p. 70.

[¶] *Tractatus*, aforismo 4.26.

bridge para se dedicar, segundo escrevera em uma carta para Schlick, a um “estudo do espaço visual”. As páginas iniciais de seus primeiros manuscritos depois deste retorno ao trabalho filosófico trazem reflexões sobre a oposição entre física e fenomenologia, bem como notas acerca de uma investigação da possibilidade de uma descrição fenomenológica do espaço visual, da possibilidade de constituição de uma *linguagem fenomenológica*. No livro *Fenomenologia em Wittgenstein: Tempo, Cor e Figuração*, Ferraz Neto mostra, por meio de uma análise dos aforismos do *Tractatus* sobre a ciência e sobre o solipsismo, que o projeto de uma linguagem fenomenológica não é senão o projeto tractariano de uma análise completa das proposições empíricas. Segundo Ferraz Neto, esse projeto vai sofrer um triplo choque em 1929, relacionado à análise fenomenológica que Wittgenstein fará do espaço, do tempo e das cores. Em seu livro, Ferraz Neto analisa dois destes conflitos entre o que a lógica do *Tractatus* previa e a sua aplicação efetiva ao real. Em primeiro lugar, Ferraz Neto apresenta com riqueza de detalhes a *análise do tempo* e sua importância para o abandono do projeto de uma linguagem fenomenológica; em segundo lugar, o autor examina, a partir do resultado da *análise das cores*, os problemas trazidos por essa análise e as consequências desastrosas que eles projetam sobre o *Tractatus*; por fim, Ferraz Neto avalia, pelo viés dos textos das *PhBm*, o impacto destes dois choques na tentativa de reformulação da teoria tractariana da figuração, teoria que explicava, no *Tractatus*, o funcionamento da linguagem descritiva. O livro de Ferraz Neto deixa de lado a *análise do espaço*, embora mencione que é este problema que põe em xeque a caracterização da aritmética do *Tractatus* e o obriga a reconsiderar toda a matemática de sua primeira obra*.

A leitura de Ferraz Neto, além de desenvolver minuciosamente aspectos centrais para a compreensão da evolução do pensamento de Wittgenstein na passagem do *Tractatus* para as *PhBm*, também oferece ferramentas para analisar aspectos composicionais da obra, importantes para uma correta apreciação de suas intenções e de seus desenvolvimentos teóricos. Os capítulos *VII*, *VIII* e *IX*, p. ex., remetem, sem sombra de dúvidas, respectivamente às análises do tempo, das cores e do espaço, portanto às três colisões anunciadas em seu livro. Com essa observação, não queremos, todavia, traçar demarcações tão rígidas em uma obra que, originalmente, nem possuía estas divisões em capítulos, e certamente outras perspectivas poderiam fornecer um agrupamento diferente de capítulos (o capítulo *VII*, por exemplo, apresenta conexões notáveis com os dois capítulos anteriores em torno do tema do “solipsismo”). Queremos apenas assinalar a pertinência desta tripla colisão e sua integração efetiva aos textos da obra, bem como notar que os “capítulos matemáticos” se encontram imediatamente após o capítulo que discute a análise do espaço (o que, mais uma vez, aponta para a correção

*Cf. Bento Prado de Almeida **Ferraz Neto**: *Fenomenologia em Wittgenstein - tempo, cor e figuração*, Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2003, p. 52.

da "indicação" de Ferraz Neto), capítulo que inclui ainda uma discussão de temas como "generalidade" e "indeterminaçao" e que culmina com uma crítica da projeção de formas lógicas genuínas em normas de apresentação da linguagem ordinária, o que permite ver que Wittgenstein ainda procura manter nesta obra, embora em uma perspectiva distinta da do *Tractatus*, a noção de "análise lógica". Veremos, no decorrer deste trabalho, que estes temas estarão presentes nos capítulos subsequentes – em particular na crítica à teoria do número cardinal de Frege – e que são centrais para o entendimento dos argumentos levantados. Vale notar, desde já, que a reconsideração da matemática força Wittgenstein, antes de mais nada, a posicionar-se em relação à teoria de Frege e, em geral, em relação ao logicismo, o que inclui discussões com Ramsey e, em menor escala, com Russell. As observações de Wittgenstein, porém, tomam rumos surpreendentes e acabam por incluir outros nomes célebres das discussões sobre os fundamentos da matemática à época, sempre porém com o intuito de iluminar, neste novo cenário, a atividade matemática e o papel que esta disciplina desempenha na linguagem, na lógica.

Não é relevante, aqui, trazer para o primeiro plano as divisões internas dos capítulos matemáticos segundo temáticas distintas: teremos a ocasião de fazê-lo no decorrer da exposição destes capítulos; vale a pena ressaltar, entretanto, duas coisas: *i)* estes capítulos finalizam uma espécie de grande "reconsideração" do *Tractatus* à luz das dificuldades anunciadas pelas três colisões que acabamos de mencionar e *ii)* notavelmente, ao contrário do que ocorria no *Tractatus*, a parte dedicada à matemática preenche mais páginas que o restante da obra. As *PhBm* ainda incluem, em seus três últimos capítulos (*XX*, *XXI* e *XXII*), uma retomada das reflexões sobre o espaço visual e das considerações acerca das relações entre física e fenomenologia, o que parece indicar que Wittgenstein retornou, nestes capítulos, à tarefa inicial que ele se propora, uma vez tendo "arrumado a casa". Os capítulos iniciais da obra apresentam o novo cenário, indicando como a noção de "análise lógica" deve ser agora entendida. Esse exercício de repensar a sua primeira obra envolve, como Ferraz Neto assinala em seu livro, uma reconsideração da teoria da figuração e a inclusão de elementos "pragmáticos" em seu interior, o que é indicado pela comparação da proposição com instruções, comandos ou planos, enfim, com noções que envolvem uma *ação*, uma *execução*. É nesse cenário que a noção intencional de "expectativa" ganha centralidade, ainda como *Bild-Auffassung*, e que faz com que Wittgenstein confronte sua concepção desta noção com a de Russell. A anterioridade, nas *PhBm*, destes capítulos iniciais em relação aos textos sobre a matemática camuflam sua posterioridade genética, e seria extremamente rica uma investigação que mostrasse o quanto as reflexões sobre a matemática – cuja atividade também consiste em *ações*, em *operações* – orientam e exercem uma influência decisiva nestes primeiros capítulos das *PhBm*. Limitaremo-nos, no entanto, aos capítulos matemáticos, sem, no entanto, perder de vista essa orientação que, como veremos, funciona virtuosamente nos dois sentidos e decorre do modo próprio pelo qual Wittgenstein pensa e desenvolve suas reflexões, modo este que contrasta com a forma de passá-las para o papel: seus escritos são sempre fragmentos, embora nunca deixem de manter uma perspectiva da totalidade.

AS CONTROVÉRSIAS ACERCA DOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Como assevera Cavaillès, o problema dos fundamentos da matemática ganhou, no início do século vinte, toda sua importância somente com a crise da teoria dos conjuntos*. A descoberta de paradoxos† na teoria dos conjuntos (também conhecida como teoria dos agregados) atraiu a atenção de diversos autores para a fragilidade dos fundamentos da matemática. Além disso, os paradoxos arruinaram o projeto lógico-filosófico de Frege, a saber, o de reduzir a aritmética à lógica (projeto que, posteriormente, ganhou a alcunha de "logicista"). Embora a lógica moderna não se confunda com a teoria dos conjuntos‡, as leis básicas do sistema lógico de Frege continham uma variante desta teoria suficiente para que o seu sistema fosse atingido em cheio pelos paradoxos.

As reações aos paradoxos foram das mais diversas. Por um lado, havia aqueles que condenavam o projeto fundacionalista de construir a matemática com os tijolos da teoria dos conjuntos. Poincaré, por exemplo, associava o surgimento dos paradoxos à aceitação, pela teoria dos conjuntos, do infinito atual (*actuel*)§, o que dava origem a definições não predicativas¶. Por outro lado, houve aqueles que procuraram consertar os problemas da teoria dos conjuntos, erigindo novas teorias munidas de mecanismos para bloquear os paradoxos. As duas mais influentes foram a teoria dos tipos de Russell e o sistema axiomático de Zermelo. Russell, disposto a conduzir o projeto logicista de Frege, construiu a teoria dos tipos a fim de evitar aquilo que os paradoxos tinham de mais característico: a impredicatividade implícita em suas formulações. No entanto, os artifícios que evitavam os paradoxos também amputavam parte considerável dos resultados da matemática. Para solucionar este problema, Russell introduziu, de modo *ad hoc*, certos axiomas não lógicos (*e.g.*, axioma da infinitude, da redutibilidade). Se, de

*Jean **Cavaillès**: *Méthode Axiomatique et Formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris: Hermann et Cie, 1938, p. 5.

†Uma apresentação panorâmica dos paradoxos pode ser encontrada em: Bertrand **Russell**: Mathematical Logic as Based on the Theory of Types, em: *American Journal of Mathematics*, 30.3 (1908), pp. 222–262.

‡Poincaré, no entanto, identifica ambas as disciplinas ao comentar, em sua celebre frase, os paradoxos: "La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie". Henri **Poincaré**: Les Mathématiques et la Logique, em: *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14.3 (1906), p. 316.

§De fato, a teoria dos conjuntos somente tornou-se matematicamente interessante com a inclusão de totalidades infinitas. Cf. José **Ferreirós**: *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Berlin: Birkhäuser, 2007, p. xix.

¶**Poincaré**: Les Mathématiques et la Logique, p. 316.

um lado, estes axiomas recuperavam a capacidade da teoria de provar os importantes teoremas da aritmética e da análise, de outro lado, eles manchavam a bandeira do próprio ideal: o de reduzir a matemática à lógica. Frank Ramsey, na obra *Os fundamentos da matemática*[*], procurou simplificar a teoria de Russell, separando os paradoxos em dois tipos, um dos quais não cabia à teoria resolver. Esta manobra permitiu a Ramsey se livrar do axioma da redutibilidade. A teoria de Ramsey mantinha, no entanto, o axioma da infinitude como um resíduo não lógico ineliminável. Característico da teoria de Ramsey era o tratamento extensional das funções proposicionais. Este tratamento era o resultado: *i*) de uma concepção essencialmente extensional da matemática; ii) do fato de que nem toda classe é a extensão de uma função proposicional tal como concebida intensionalmente por Frege e Russell[†]. Ao invés, então, de intensionalizar as classes (como Frege e Russell), Ramsey decide por extensionalizar as funções proposicionais, aproximando-as da concepção de função (matemática) tal como concebida por Dirichlet e Fourier (isto é, uma correlação arbitrária infinita).

Zermelo, por outro lado, procurou fundamentar os resultados conjuntistas de Cantor[‡] em um grupo de axiomas suficiente para evitar os paradoxos. Um destes axiomas em particular – o axioma da escolha – provocou alvoroço na comunidade de matemáticos da época. Este axioma afirma que, dados certos conjuntos não vazios, existe um conjunto que contém exatamente um membro de cada um daqueles conjuntos, mesmo que eles sejam em número infinito e que não haja nenhuma regra que estabeleça qual membro deve ser escolhido de cada conjunto. Alguns matemáticos, como Borel e Peano, atacaram a adoção do axioma. Em sua defesa, Zermelo argumentou que o axioma era implicitamente usado em diversos resultados anteriores por autores como Dedekind, Cantor, F. Bernstein, entre outros[§], e este fato só podia ser explicado pelo caráter "autoevidente" do axioma[¶]. A agitação no meio matemático ocorrera principalmente após Zermelo provar, com o auxílio do axioma da escolha, o teorema da boa ordenação, um resultado altamente contraintuitivo. O teorema assegura que cada conjunto pode

---

[*] Frank Plumpton **Ramsey**: The Foundations of Mathematics, em: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931, pp. 1–61.

[†] Influenciado pela crítica wittgensteiniana da definição de Russell para a identidade, Ramsey conclui que nem toda classe é definida por uma função material.

[‡] Tradicionalmente, a teoria dos conjuntos é vista como obra de um só criador: Georg Cantor. O motivo deste prestígio é o fato de Cantor ter provado os primeiros resultados transfinitos a partir da teoria dos conjuntos, além de ter formulado seus problemas mais célebres. No entanto, alguns historiadores atentam para outros precursores, principalmente os trabalhos de Riemann, Bolzano e Dedekind. Cf. **Ferreirós**: Labyrinth of Thought, pp. xvi-xxi e Pierre **Dugac**: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris: Vrin, 1976, p. 26.

[§] Para exemplos de uso implícito do axioma da escolha em alguns resultados da época, cf. Gregory H. **Moore**: *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origin, Development, and Influence*, New York: Springer Verlag, 1982, pp. 11-6.

[¶] Ernst **Zermelo**: A new proof of the possibility of a well-ordering, em: Jean **van Heijenoort** (ed.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967, p. 187.

ser bem ordenado, i.e., que cada subconjunto não vazio deste conjunto possui um elemento menor que todos os outros no que tange à relação ordenadora. O teorema parece altamente implausível quando se trata, p. ex., do conjunto dos números reais, além de ter consequências paradoxais como o teorema de Banach-Tarski[*], que afirma ser possível dividir uma esfera sólida em um número finito de pedaços e construir com estes duas esferas do mesmo tamanho da esfera da qual se partiu.

É neste clima intelectual de desconfiança em relação a princípios e teoremas existenciais abstratos na matemática (i.e., que asserem a existência de certo objeto matemático sem, no entanto, estarem aptos a construí-lo) que os trabalhos de Brouwer, fundador do intuicionismo, entram em cena. O intuicionismo de Brouwer é dividido em duas fases, conhecidas por primeiro e segundo ato do intuicionismo[†]. O primeiro ato, cuja origem é sua tese de doutoramento de 1907, caracteriza-se por uma defesa da matemática construtivista e pela rejeição da lei do terceiro excluído. Para Brouwer, a justificação de uma disjunção da forma $p \vee \neg p$ demanda a demonstração de uma das alternativas. Se p é uma proposição existencial, a prova de p requer uma construção do objeto em questão. Em outras palavras, o intuicionista exige um conhecimento *de re*, e nunca meramente *de dicto* de um objeto matemático. O matemático, sabendo que há um objeto que satisfaz uma condição, deve saber quem ele é.

A exigência construtivista, aplicada ao caso dos números reais, implica um resultado inaceitável para Brouwer: se números reais são, segundo os matemáticos modernos, sequências de racionais que obedecem o critério de convergência de Cauchy (ou, de modo abreviado, sequências de Cauchy) e se estas sequências podem apenas ser fornecidas por uma lei de construção desses racionais, então, havendo apenas um número denumerável de leis, há apenas um número denumerável de reais. Por conseguinte, Brouwer recusa, na sua tese, a construção do *continuum* através de sequências de Cauchy, admitindo-o como conceito primitivo[‡]. O segundo ato do intuicionismo ocorre a partir de 1917, quando Brouwer analisa o *continuum* por meio de "sequências de escolha". A ideia central é manipular sequências *in statu nascendi*, i.e., sequências em desenvolvimento, mas nunca totalidades completas. Deste modo, cada ponto do *continuum* é denotado por uma sequência potencialmente infinita de escolhas de dígitos. A contraposição com o *continuum* de Cantor é imediata: não se trata de um conjunto completo e acabado, dado por certa propriedade que todos os elementos do conjunto possuem, mas – para utilizar o termo de Weyl[§] – de um *meio de livre vir a ser* (*Medium*

---

[*]Stefan **Banach**/Alfred **Tarski**: Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, em: *Fundamenta Mathematicae*, 6 (1924), pp. 244–277.

[†]Fernando **Ferreira**: *Grundlagenstreit* e o intuicionismo Brouweriano, em: *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 2008, p. 6.

[‡]Cf. ibid., p. 8.

[§]Hermann **Weyl**: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, em: *Mathematische Zeitschrift*, 10.1-2 (1921), p. 50.

freien Werdens), em que cada elemento se encontra em perpétuo estado de devir e, mais do que isso, de livre devir, de modo que não é possível prever seu desenvolvimento a partir de seu estágio atual.

Na década de vinte, o célebre matemático David Hilbert, um dos editores principais da mais conceituada revista matemática da época, a *Mathematische Annalen*, avançou um programa fundacionalista (conhecido pelo nome de "formalismo") que se contrapunha ao radicalismo dos intuicionistas. Segundo Hilbert, "tirar o princípio do terceiro excluído dos matemáticos seria o mesmo que vetar o uso do telescópio ao astrônomo ou o uso dos punhos ao pugilista"[*]. Para Hilbert, existia uma forma completamente satisfatória de escapar aos paradoxos sem "atraiçoar a matemática"[†]. Essa forma era persuasiva, pois partia de um pressuposto que estava aquém das disputas fundacionalistas[‡]: a existência de uma matemática finitária de conteúdo intuitivo e irrepreensível, baseada no paradigma da aritmética elementar. A equação $|| + ||| = |||||$ e sua prova através da definição recursiva de adição ($x + | \overset{Def.}{=} x|$ e $x + y| \overset{Def.}{=} (x + y)|$)[§] fornecem um exemplo do que Hilbert tinha em mente. Hilbert também incluía nesta matemática finitária, além de enunciados aritméticos básicos, asserções algébricas passíveis de demonstração por indução[¶], como a asserção $|| + x = x + ||$, em que x denota uma sequência *qualquer* de traços verticais.

A partir desta aritmética finitária, Hilbert nota que a negação de uma asserção finitária nem sempre é uma asserção finitária. A equação, p. ex., $x + | = | + x$ é incapaz de ser negada de um ponto de vista finitário, pois sua negação conduz a uma asserção existencial abstrata. Esta última, acentua Hilbert, não é propriamente uma asserção, mas um juízo hipotético[‖] que somente se torna um juízo quando um numeral substitui a variável que ocorre no primeiro[**]. Hilbert acrescenta que este ponto se torna mais claro

[*] David **Hilbert**: The foundations of mathematics, em: Jean **van Heijenoort** (ed.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967, p. 476.

[†] **Idem**: Über das Unendliche, em: *Mathematische Annalen*, 95.1 (1926), p. 170.

[‡] Cf. Robert **Blanché**: *L'axiomatique*, (Initiation philosophique), Paris: PUF, 1955, pp. 64-5:"Si l'on pouvait étudier, selon des méthodes scientifiques strictes, les démonstrations contestées, en faisant abstraction des entités et des opérations mathématiques auxquelles elles renvoient – dont certaines sont dénuées de sens aux yeux de l'intuitionniste, notamment lorsqu'elles font intervenir l'idée d'un infini actuel – pour ne regarder que leurs combinaisons concrètes sur le plan du symbolisme, on transformerait complètement l'aspect du problème, et de manière à donner satisfaction aux deux partis opposés. En changeant d'objet, en transportant l'étude du domaine des êtres mathématiques à celui des signes qui les représentaient, en considérant au lieu de notions que certains jugent confuses ou vides, des symboles offert au regard, on s'installe, sans renoncer à aucune exigence de rigueur formelle, sur un terrain que l'intuitionniste reconnaîtra comme sien".

[§] $|| + ||| = (|| + ||) + | = ((|| + |) + |) + | = (||| + |) + | = |||| + | = |||||$.

[¶] Hilbert contrapunha dois tipos de indução: uma finitária e de uso legítimo e inquestionável, e outra transfinita e cuja legitimidade deveria ser provada por uma prova de consistência do sistema formal. As provas indutivas da matemática finitária fazem uso apenas deste primeiro tipo de indução.

[‖] Exatamente aquilo que Weyl chamou de *Urteilsabstrakt*. Cf. **Weyl**: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, p. 54.

[**] **Hilbert**: Über das Unendliche, p. 173.

quando se percebe que a equação acima não pode ser interpretada como uma conjunção infinita. O matemático não se abstém, então, de concluir que a própria formulação do princípio do terceiro excluído é ameaçada se a matemática for mantida estritamente neste domínio finitário.

Para salvaguardar o princípio do terceiro excluído, Hilbert procura defender a cidadania matemática das "asserções ideais", isto é, das asserções que escapam àquela matemática finitária, satisfatória e de conteúdo intuitivo. Hilbert lembra que a introdução de elementos ideais para manter a validade de algumas leis é um expediente comum na matemática. Basta lembrar a introdução dos "pontos no infinito" na geometria projetiva, que visava a garantir a existência de um ponto de intersecção entre duas retas, ou ainda a teoria dos ideais de Kummer, que visava a manter a unicidade da fatoração em números primos. Essas asserções ideais, segundo Hilbert, podiam ser encaradas de modo meramente sintático como sequências finitas de símbolos de uma linguagem formal. A manipulação dessas asserções, no entanto, deveria ser sempre regulada por métodos formais de dedução, assim como, no jogo de xadrez, a movimentação das peças é regida por regras fixas. A matemática das asserções ideais é, deste modo, encarada simplesmente como um jogo simbólico em que cada sequência de símbolos equivale a uma configuração das peças do jogo. Há apenas uma condição que a introdução dessas asserções ideais deveria satisfazer: ela não poderia acarretar inconsistências no sistema formal. A "inconsistência" a que Hilbert se refere não é propriamente uma inconsistência nas regras segundo as quais os símbolos são manejados, mas a produção da configuração "$0 \neq 0$", i.e., uma asserção falsa do ponto de vista da matemática finitária. Delineia-se o programa de Hilbert: para garantir a coerência de seus resultados, o matemático precisa fornecer provas de consistência dos sistemas formais a partir dos quais estes resultados são obtidos. A análise da consistência de um sistema matemático passava pela construção de uma teoria que tinha, como seu objeto, os símbolos daquele sistema. Esta teoria, que veio a ser denominada por Hilbert de "metamatemática", deveria recorrer, sob pena de uma *petitio principii*, apenas a meios finitários a partir dos quais se provava a consistência do sistema de origem. Somava-se a este programa um sentimento de profundo otimismo com relação à matemática: a hipótese de Hilbert é a de que todo problema matemático pode ser resolvido ou, na ilustre citação, a de que "não há *ignorabimus* na matemática"*.

Este é, em linhas gerais, o cenário da disputa acerca dos fundamentos da matemática na década de vinte. Esta disputa ainda geraria episódios polêmicos, como aquele que Einstein classificara como uma batracomiomaquia: em 1928, na passagem da edição 100 para a edição 101 da *Mathematische Annalen*, Hilbert articulou uma imensa reforma editorial, o que resultou na exclusão de Brouwer da lista de colaboradores

*Ibid., p. 384.

da revista. Em uma carta a Brouwer, o argumento que Hilbert usou para justificar a exclusão foi a "incompatibilidade de opiniões sobre assuntos fundamentais"[*]. A partir deste acontecimento, Hilbert e Brouwer se distanciaram do debate fundacionalista. O primeiro, pela sua saúde debilitada; o último, pelo desgaste gerado por tal episódio.

Em 1931, membros do círculo de Viena organizaram um simpósio em Königsberg sobre os fundamentos da matemática. Rudolf Carnap apresentou a concepção logicista, Arend Heyting, a concepção intuicionista, e Johann von Neumann, a concepção formalista. Houve ainda uma quarta apresentação de Friedrich Waismann com o título "Über das Wesen der Mathematik; Der Standpunkt Wittgensteins". Diferentemente das demais, esta apresentação não foi submetida para publicação[†], talvez por se tratar, segundo as próprias palavras de Waismann, de um esboço em que as ideias ainda estão em processo de desenvolvimento[‡]. Esta "quarta concepção", no entanto, é apenas delineada por Waismann e, na verdade, traçada de um modo curioso: Waismann repete as críticas tractarianas ao logicismo, concentrando-se em atacar a teoria dos agregados com a distinção elaborada no *Tractatus* entre operação e função e visando a abrir caminho para uma concepção não tractariana do número: a concepção do número como uma forma lógica[§]. Na apresentação de Waismann (ou, melhor, no que restou dela[¶]), a concepção formalista aparece apenas de passagem, para receber a crítica *standard* do logicista: a matemática deve cuidar de sua aplicabilidade. Além disso, o intuicionismo sequer é mencionado. Já o logicismo de Russell é o principal ponto de contraste, é o elemento que justifica, pela diferença, falar de uma outra concepção.

Essa assimetria em relação às três vertentes também ocorre nas *PhBm*: os capítulos iniciais acerca da natureza do número e da aritmética são construídos por meio de uma discussão com o *Tractatus* e com as concepções de Frege, Russell e Ramsey, e pouco ou quase nada é mencionado a respeito do formalismo e do intuicionismo. Parece-nos claro, então, que a ordem de exposição dos textos dedicados à matemática

[*] Cf. **Ferreira**: *Grundlagenstreit* e o intuicionismo Brouweriano, pp. 1-3.

[†] Cf. Ray **Monk**: Bourgeois, Bolshevist or Anarchist? The Reception of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, em: Guy **Kahane**/Edward **Kanterian**/Oskari **Kuusela** (eds.): *Wittgenstein and his Interpreters: Essays in Memory of Gordon Baker*, Oxford: Blackwell, 2007, p. 279. O que sobreviveu do texto de Waimann foi publicado posteriormente em Friedrich **Waismann**: *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Rodopi, 1982. A tradução inglesa, utilizada neste trabalho, foi publicada em Stuart **Shanker** (ed.): *Ludwig Wittgenstein: critical assessments*, vol. 3, Bristol: Croom Helm, 1986.

[‡] Friedrich **Waismann**: The Nature of Mathematics: Wittgenstein's Standpoint, em: Stuart **Shanker** (ed.): *Ludwig Wittgenstein: critical assessments*, vol. 3, Bristol: Croom Helm, 1986, p. 60.

[§] Ibid., p. 63.

[¶] O texto de Waismann contém apenas a primeira de quatro partes que ele planejou discutir no simpósio. A primeira parte é destinada a esclarecer a natureza dos números. Em seguida, constam: a noção de infinito, o conceito de conjunto e, por fim, o princípio da indução completa. É possível que Waismann tenha deixado para discutir com mais detalhes a contraposição da concepção de Wittgenstein em relação ao formalismo e ao intuicionismo nas três partes seguintes. O importante, no entanto, é que, na parte dedicada a esclarecer a natureza do número, conceito fundamental da aritmética, mal se nota a presença do intuicionismo e do formalismo.

também deva ser de tal modo que dê prioridade a estas discussões, algo que procuramos seguir neste estudo.

SINOPSE DOS CAPÍTULOS

O primeiro Capítulo é dedicado à descrição de temas importantes vinculados à aritmética do *Tractatus*. A exposição parte, no entanto, de um horizonte mais amplo, a fim de esclarecer e trazer ao primeiro plano a distinção tractariana entre função e operação. A noção de "função", originalmente matemática, é incorporada à lógica por Frege. A análise lógica da proposição em termos do paradigma funcional leva Frege a reconhecer uma dupla camada objetiva para as expressões da linguagem, a saber, o sentido da expressão e sua referência. Um dos resultados fundamentais desta distinção é a possibilidade de um objeto ser dado de diversos modos, de forma que nenhum deles possa ser concebido como uma característica essencial a todo ato de doação do objeto. A análise em termos de função e argumento também leva Frege a conceber valores de verdade como referências de sentenças da linguagem, fazendo desvanecer a distinção entre proposição e nome. A consequência deste movimento é a impossibilidade de se explicar, do ponto de vista puramente lógico, o privilégio do verdadeiro sobre o falso. Diante deste resultado inaceitável, Russell é levado a recuperar a solução aristotélica para o paradoxo do discurso falso, que consiste na aceitação do caráter essencialmente complexo do discurso. Se, por um lado, este passo, levado às suas últimas consequências, eliminava a camada fregiana do "sentido", por outro lado, havia o reconhecimento de que a análise fregiana da proposição não poderia ser deixada inteiramente de lado. Russell foi, então, levado a arquitetar uma teoria que conciliasse o novo aparato lógico-matemático de função e argumento com o princípio da complexidade; uma teoria em que a complexidade da proposição, analisada em termos de função e argumento, refletisse a complexidade da situação apresentada pela sentença. Russell, no entanto, concebia também as constantes lógicas como casos particulares de funções; à luz do princípio da complexidade e da concepção russerliana da função proposicional, esta concepção leva necessariamente a uma reificação das constantes lógicas. O *Tractatus*, por sua vez, separa a noção de *função*, a qual caracteriza o sentido de uma proposição, da noção de *operação*, que é utilizada apenas como modo de apresentação de uma proposição, não caracterizando seu sentido. As constantes lógicas são tratadas como operações de verdade, por conseguinte, como algo que se "faz" com uma proposição e não como algo utilizado para caracterizar uma forma proposicional; o resultado da "ação" de uma operação de verdade sobre uma proposição é, por sua vez, uma outra proposição que é função de verdade da base a que a operação foi aplicada. A noção de operação recupera, em certa medida, a camada fregiana do sentido: a mesma função de verdade pode ser obtida de diversos modos, de maneira que nenhum deles possa ser concebido como uma característica essencial da função de verdade ela própria. Dito de outro modo, a operação não caracteriza o sentido de uma proposição. A noção de cálculo – e a aritmética a ela vinculada – se acomoda no arcabouço conceitual do *Tractatus* nessa distância existente entre uma função de verdade e seu modo de apresentação. O número, definido como o "expoente de uma operação", herda todas as características da noção de operação: o número não caracteriza o sentido proposicional, aparecendo apenas enquanto "modo de apresentação" de uma proposição. O número ocorre na proposição não como uma característica intrínseca a ela, mas pelo fato de ela ser a *enésima* proposição de uma série. Nesse sentido, a aritmética tractariana é fundamentada sobre uma concepção ordinal do número.

O segundo Capítulo é dedicado à aritmética das *PhBm*, que comparece fundamentalmente nos capítulos *X* e *XI* da obra. Nestes capítulos, todo o esforço do autor, segundo a leitura proposta por este trabalho, é voltado para estabelecer uma concepção do conceito de número em que este aparece, ao contrário do que ocorria no *Tractatus*, como característica de uma forma proposicional e, portanto, do sentido de uma proposição. Daí a revogação do privilégio que a concepção *ordinal* de número gozava à época do *Tractatus*; trata-se, agora, de estabelecer uma concepção *cardinal* do número – e da aritmética que a acompanha – que não esteja mais subjugada à concepção ordinal. Para delinear essa mudança na caracterização do número, analisaremos primeiramente a introdução de números reais no seio das proposições elementares. Em geral, essa introdução é feita a partir do "problema das cores", tratado no capítulo *VIII* das *PhBm*. Optamos por seguir outra via, a partir do problema da apresentação do espaço e da divisibilidade infinita, não somente porque os capítulos em que estes temas ocorrem se enquadram no escopo deste estudo, mas principalmente pelo fato de que o paralelo visado entre a aritmética de números reais e naturais é melhor retratado a partir desta via. A passagem pela introdução dos números reais permitirá esclarecer, de modo breve, a crítica de Wittgenstein à teoria intensional das classes de Frege e Russell e o papel de regra sintática que exerce uma equação aritmética. Além disso, o paralelo fornece as ferramentas para elucidar dois níveis distintos da dicotomia intensão/extensão. O primeiro se refere ao uso destes termos pela tradição filosófica desde a lógica de Port-Royal, em que estes termos são usados para distinguir entre a intensão ou compreensão de um conceito e sua extensão. O segundo se refere a uma operação e os resultados sucessivos da aplicação desta operação. O primeiro uso remete a uma teoria das classes; o segundo, a uma teoria do infinito. É bem conhecido que Wittgestein tenha defendido uma concepção intensional do infinito, concepção que será tematizada no terceiro Capítulo; é pouco conhecido, no entanto, que Wittgenstein tenha se interessado por uma teoria extensional das classes. Esse interesse será abordado no decorrer do Capítulo, em que ficará claro que o debate contra o logicismo é um debate contra uma teoria intensional das classes. Neste percurso, será importante fazer um excurso pelos escritos de Ramsey, a fim de compreender as críticas de Wittgenstein a seu projeto logicista e, em geral, a uma lógica extensional. Além do aspecto negativo, o Capítulo procura elucidar positivamente a concepção de Wittgenstein do número cardinal como uma propriedade interna de uma lista, como uma propriedade interna de uma classe *in extenso*. O fim do Capítulo é reservado a uma discussão sobre o tema da *aplicação* da aritmética a partir da compreensão do número e da equação tal como expostos no decorrer do Capítulo.

O terceiro Capítulo se atém à noção de "proposição matemática" e a sua importância para compreender as observações de Wittgenstein sobre a generalidade e a negação na matemática. Mostraremos, em primeiro lugar, que há efetivamente uma aproximação, nas *PhBm*, entre a proposição matemática e a proposição empírica e que alguns raciocínios que eram aplicados, no *Tractatus*, a proposições empíricas passam a ser aplicados para o caso de proposições na matemática. Esta aproximação permite tratar de maneira similar (a certo nível de abstração) o sentido de proposições empíricas e matemáticas, tanto em relação à dimensão da *correção* da proposição – em que o sentido é o método de sua verificação – quanto em relação a sua dimensão *pragmática* – em que o sentido é seu propósito. Essas duas dimensões permitem compreender o duplo papel que a equação exerce: enquanto proposição matemática e enquanto regra sintática. A despeito da identidade do ator (a equação), há uma diferença considerável entre estes dois papéis que é preciso preservar. Não obstante, há certamente um vínculo estreito entre a resposta de uma questão matemática e a regra sintática que dela se tira, vínculo que é feito pela noção de *prova*. Na concepção de Wittgenstein, a prova é uma atividade calculatória e, ao mesmo tempo, uma análise da proposição matemática. O elo entre prova e proposição matemática completamente analisada é fundamental para se entender *i)* o papel sintático da equação e *ii)* o ponto em que a analogia entre proposição matemática e empírica faz água. Argumentaremos que o papel sintático da equação é autônomo e não requer um vínculo com o cálculo lógico de tautologias e contradições. Isso porque a proposição matemática, em sua forma completamente analisada, é, ao mesmo tempo, um esquema descritivo que mostra o sentido de certas descrições e a ausência de sentido de outras pseudodescrições. A regra sintática, por outro lado, tem a função de auxiliar a construção de um símbolo proposicional, nos casos em que o sinal não possui a multiplicidade correta. Algumas observações de Wittgenstein sugerem uma distinção conceitual entre as noções de "prova" e "demonstração". Nossa sugestão é a de que uma demonstração é uma prova feita em um simbolismo com a multiplicidade correta, enquanto há casos em que o caráter demonstrativo não é exibido na superfície da prova. Toda prova, no entanto, deve ser, imediatamente ou de modo mediado, uma demonstração, i.e., se considerarmos o *símbolo*, e não apenas o *sinal*, toda prova constitui uma demonstração. Do caráter essencialmente demonstrativo da prova matemática, extrairemos diversas conclusões, sendo as duas mais importantes: *i)* a de que não pode haver prova de proposições gerais (que dizem algo sobre todos os números) na matemática, o que leva à separação dos sistemas aritmético e algébrico; *ii)* a de que não pode haver um uso essencial do princípio do terceiro excluído em uma prova matemática, já que, neste caso, seria impossível que a prova pudesse ser expressa de modo demonstrativo.

O quarto capítulo procura expor, de maneira sistemática, as observações de Wittgenstein sobre os números reais e o *continuum*. De acordo com o filósofo, um número real não é a *extensão* de uma fração decimal infinita, mas uma *lei*. A fim de melhor compreender a natureza intensional do número real, estabelecemos um paralelo destes números com objetos geométricos exatos, que também são entendidos por Wittgenstein de modo intensional: um círculo exato não é compreendido como um "objeto ideal" do qual a realidade poderia apenas se aproximar, mas como o próprio procedimento ilimitado de aumento da precisão de um círculo inexato. Analogamente, o número irracional também não é um ponto ideal da reta numérica do qual se poderia apenas aproximar por meio de aproximações racionais, mas é o próprio procedimento ilimitado por meio do qual se constroem estas aproximações. A despeito de seu caráter intensional, Wittgenstein exige que o número real cumpra sua função de *metro*: ele deve necessariamente ser comparável aos racionais. Este não é, porém, o único critério adotado para se reconhecer, em uma prescrição para a construção de aproximações racionais, um número real: Wittgenstein exige que estas aproximações sejam produzidas de acordo com uma *lei* e que se possa reconhecer, nestas aproximações racionais, a lei que as produziu. Estas aproximações devem formar, segundo o autor, uma "série evidente". Veremos que este critério visa a eliminar aquilo que o filósofo chama de *experimento aritmético*. Procuraremos esclarecer este conceito por meio de uma distinção entre as noções de *busca* e *construção*. A busca sempre pressupõe um espaço já construído por meio de uma lei; a definição de um número por meio de uma *busca* sucessiva em intervalos regulares será, para Wittgenstein, a *descrição* de um número, e não sua *construção*. Veremos que uma descrição se opõe a uma construção na medida em que uma descrição é sempre uma caracterização de certos números em oposição a outros que não satisfazem a descrição, ao passo que a construção não é de modo algum uma determinação, uma separação guiada por uma nota característica. A construção corresponde, segundo Wittgenstein, à unidade – ao caráter homogêneo – de uma lei, enquanto a busca é uma mescla de dois componentes heterogêneos. Sendo una, a construção é em si mesma inteligível, enquanto a busca, pressupondo uma combinação de dois componentes, precisa de uma criatura (de um homem) para "misturar" estes componentes. O que ocorre, então, com estas regras que envolvem procedimentos de busca é que a possibilidade de aplicá-las (i.e., de computar o resultado) já não é um critério suficiente para que elas sejam objeto de interesse aritmético. Por outro lado, Wittgenstein alega que a aplicabilidade é o critério genuíno de legitimidade na aritmética. Mostraremos que esta tensão é apenas aparente e que resulta de uma ambiguidade do uso do termo "aplicação". Após eliminar esta ambiguidade, voltaremos aos exemplos que Wittgenstein chama de pseudoirracionais para esclarecer seu caráter problemático. Por fim, analisaremos as críticas de Wittgenstein à concepção extensional dos números reais. Estas críticas procuram mostrar que tal concepção torna os números reais obsoletos: entendidos extensionalmente, os números reais não fariam falta alguma para a análise real.

O quinto Capítulo consiste em uma reflexão, fundada nos capítulos precedentes, a respeito da posição de Wittgenstein acerca da crise dos fundamentos da matemática no início do século XX. Trata-se de mostrar que a posição de Wittgenstein não se reduz a um sincretismo das três correntes clássicas da época – logicismo, intuicionismo e formalismo –, mas constitui um pensamento original sobre o saber matemático que vê, na crise que se instaurou na matemática de sua época, um produto de confusões conceituais a serem esclarecidas pelo trabalho filosófico. Wittgenstein, no entanto, reconhece os méritos de cada escola. Do logicismo, Wittgenstein preserva a ideia de que a possibilidade de aplicação é o verdadeiro critério para reconhecer, na matemática, a expressão de um saber, e não um mero jogo com signos. Por outro lado, esta aplicabilidade não é garantida por uma redução da matemática ao cálculo lógico, mas pela própria natureza da matemática. Assim como os intuicionistas, Wittgenstein desconfia da aplicação de leis lógicas na aritmética; as razões para isto, porém, são totalmente distintas dos intuicionistas, afinal, aos olhos de Wittgenstein a existência de questões indecidíveis era consequência apenas da manutenção de compromissos extensionalistas acerca do infinito na matemática. Wittgenstein também critica a ideia de que possa ser de algum interesse, para a matemática, a construção de objetos por meio de "sequências de escolha", fundamentais para a teoria intuicionista do *continuum*. Por fim, Wittgenstein utiliza a metáfora formalista de um jogo com sinais para mostrar que a alternativa entre um discurso sobre os sinais e um discurso sobre aquilo que os sinais designam não se impõe; por outro lado, os conceitos de metamatemática, prova de provabilidade, prova de relevância, consistência etc. são vistos como confusões acerca do estatuto das proposições matemáticas e do espaço lógico em que tais proposições estão necessariamente inseridas.

***

O Apêndice A contém a versão na língua original dos textos traduzidos para o português e citados no decorrer deste texto. A presença do sinal  na nota de rodapé da citação indica a presença de um atalho (na versão digital) para o texto na língua original.

CAPÍTULO 1

Os contornos filosóficos da aritmética do *Tractatus*

> Pra mim é como quando, caminhando numa trilha em uma montanha, avistamos um alpe, embora ainda não estejamos lá; para alcançá-lo, é preciso ainda andar meia hora no bosque, e somente então se chega onde aparentemente já se estava de algum modo, a saber, com o olhar. Assim eu continuo me embrenhando nos domínios da lógica, os quais eu já vi várias vezes de modo preciso, mas não de muito perto.
>
> Ludwig Wittgenstein, *WAii*, 78.

Uma boa parte da literatura dedicada à aritmética do *Tractatus* se ocupa, de modo geral, da tarefa de mostrar detalhes de como ela se desenvolve a partir de uma teoria das operações, além de mencionar semelhanças com o cálculo lambda de Alonzo Church e sua relevância para debates contemporâneos acerca dos fundamentos da matemática[*]. Do ponto de vista do intento deste estudo, importará, sobretudo, analisar o papel vinculado à noção de operação na arquitetônica da obra, que traça uma profunda distinção entre esta noção e a de função proposicional. Ver-se-á que o número, por estar atado à noção de operação, não caracteriza, ao contrário de uma função proposicional, uma forma lógica. Deste modo, compreende-se melhor os arredores filosóficos que envolvem a aritmética do *Tractatus* na medida em que se traz à tona esta distinção. Antes disso, no entanto, será preciso entender como a lógica contemporânea (a partir de Frege) empresta, da matemática, o conceito de função para fazer surgir esta criatura híbrida que se convencionou chamar de função proposicional.

FREGE E O PARADIGMA ARITMÉTICO

Frege é usualmente conhecido como o precursor da filosofia analítica e como o filósofo e matemático que procurou reduzir a aritmética à lógica. O seu primeiro trabalho no

[*]Cf., em particular, o segundo capítulo de Mathieu **Marion**: *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1998 e o primeiro capítulo de Pasquale **Frascolla**: *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, en, London, New York: Routledge, 1994.

campo da lógica, um livreto de pouco mais de oitenta páginas publicado em 1879 com o título de *Conceitografia* (*Begriffsschrift*), tornou-se um clássico da lógica contemporânea. À luz das intenções da obra, a leitura do subtítulo é de causar espanto. O subtítulo qualifica a conceitografia como "uma linguagem de fórmulas do puro pensar modelada à imagem da linguagem matemática"[*]. Ora, que tipo de redução é esta que se espelha na linguagem da disciplina a ser reduzida para depois englobá-la? O que legitima este movimento?

A tarefa de constituir uma linguagem adequada a reproduzir todas as formas válidas de inferência é uma tarefa que nasce juntamente com a lógica. Na qualidade de uma disciplina essencialmente normativa (que visa a separar argumentos válidos de argumentos inválidos), autônoma (que não depende de conhecimentos derivados de outras disciplinas) e universal (que é aplicável a todo o âmbito do raciocínio linguístico), a lógica se vê obrigada a encontrar, na multiplicidade de formas de exposição argumentativa e de produtos do pensar, uma unidade à qual ela reconduz e sistematiza este múltiplo, este diverso. O lógico, não encontrando esta unidade na superfície gramatical da linguagem, postula – como pressuposto essencial à atividade discursiva em sua função apofântica – a existência de uma camada profunda, revestida pelas mais diversas formas de roupagem linguística. Como a lógica aspira a ser uma ferramenta para a ciência, para o reto pensar, ela deve necessariamente despir a linguagem de sua roupagem acidental (que só se encontra atrelada a ela devido a circunstâncias históricas e contingentes) para com isso revelar aquilo que ela possui de essencial e indispensável ao exercício do pensamento.

Este ato de despojar a linguagem de seus acessórios contingentes não implica, para Frege, a perda da autonomia da lógica. No plano da descoberta[†], o lógico pode certamente observar o modo pelo qual o discurso corrente articula seus raciocínios para, então, extrair destes raciocínios aquilo que pertence originalmente à lógica, ou seja, a todo e qualquer pensar. Este processo, no entanto, é mais profícuo se o discurso observado já é um produto elaborado do pensamento. A oficina de trabalho científico, assevera Frege, é o campo de observação próprio da lógica[‡]. Frege vê, no discurso científico, o tipo de discurso que procura constantemente reduzir a distância entre a camada superficial e a forma profunda da linguagem. Com efeito, o cientista, preocupado com o rigor e com a fundamentação de seus resultados, procura sempre erigir um aparato

[*] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen denkens.*

[†] Plano que Lopes dos Santos chamou de "metodológico". Cf. Luis Henrique **Lopes dos Santos**: *O Olho e o Microscópio: A gênese e os fundamentos da lógica segundo Frege*, Rio de Janeiro: Nau, 2008, p. 21.

[‡] Gottlob **Frege**: Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift, em: H. **Hermes**/F. **Kambartel**/ F. **Kaulbach** (eds.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Felix Meiner, 1969, p. 37: "Denn die Fruchtbarkeit ist der Prüfstein der Begriffe, und die wissenschaftliche Arbeitsstätte ist das eigentliche Beobachtungsfeld der Logik".

simbólico que melhor retrate a estrutura de seus raciocínios. Ao lógico, cabe a tarefa de considerar esta estrutura independentemente das singularidades da ciência particular, visando a encontrar aquilo que há de universal e aplicável ao campo do discurso *tout court*. Este elemento universal é, por fim, sistematizado no plano simbólico da lógica.

Dentre as diversas ciências, uma em particular é mais apta a servir de paradigma para a constituição do sistema da lógica: a matemática. Exatamente porque o trabalho matemático é, como salienta Lopes dos Santos, "aquele que mais exige da disposição lógica natural dos sujeitos de conhecimento"[*]. Além deste aspecto, Frege via na matemática uma disciplina de maior generalidade, cuja aplicação se estendia a todas as outras ciências. Quanto maior o grau de generalidade de uma disciplina, mais próxima ela se encontra da lógica, pois a lógica é, *par excellence*, a disciplina do mais alto grau de generalidade. Dentre os diversos domínios que o pensamento matemático tomava para si, é a aritmética, segundo Frege, que alcança o patamar mais alto de generalidade. Enquanto as leis da geometria se restringem àquilo que é "intuível espacialmente", as leis da aritmética governam não apenas o domínio do intuível, mas de todo o pensável[†]. Nesse sentido, as verdades da aritmética governam um domínio mais amplo que o domínio da geometria. Segundo Frege, esse domínio é o de maior generalidade e, portanto, acaba por coincidir com o domínio da lógica. A conclusão é que não se pode estabelecer fronteiras nítidas entre ambas disciplinas. Consideradas de um ponto de vista científico, ambas constituem uma ciência unificada[‡].

Diante deste quadro teórico, o projeto fregiano encontrava, no campo da lógica e da aritmética de sua época, uma dupla incongruência. Por um lado, havia na aritmética uma "linguagem de fórmulas" que utilizava cada vez mais o aparato de função e argumento em suas equações e inequações. Quando precisava emitir um juízo geral do tipo "para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que...", ou, então, "entre 10 e 20, há 4 números primos", precisava recorrer à linguagem comum ou ao aparato da lógica clássica. Em contrapartida, a lógica analisava as proposições em sujeito e predicado, entendendo a sentença como a atribuição de uma propriedade a um substrato. Aos olhos de Frege, esta decomposição era apenas a manifestação de um acidente gramatical e não

[*] **Lopes dos Santos**: O Olho e o Microscópio, p. 206.

[†] Gottlob **Frege**: *Os fundamentos da aritmética*, Coleção Os Pensadores, São Paulo: Editora Abril, 1983, p. 215 (§14). A terminologia usada por Frege denuncia o caráter "neokantiano" do debate. A concepção segundo a qual a aritmética tinha um caráter lógico e, portanto, mais geral que o da geometria não é exclusiva de Frege. Basta lembrar das observações de Otto Liebmann sobre a aritmética (a *Größenlehre*), p. ex., em Otto **Liebmann**: *Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie*, Straßburg: von Karl J. Trübner, 1880: "Während unsere Geometrie nur für solche Intelligenzen, die in derselben Raumform wie wir anschauen, Apodiktizität besitzt, erstreckt sich die Apodiktizität der allgemeinen Größenlehre, sowie der Logik auf alle, wie auch immer gearteten Intelligenzen überhaupt. Der Umfang oder Geltungsbereich der beiden letzteren übertrifft daher den der ersteren; er schließt ihn konzentrisch ein".

[‡] Gottlob **Frege**: *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, trad. por Eike-Henner W. **Kluge**, New Haven e London: Yale University Press, 1971, p. 142.

refletia adequadamente o conteúdo conceitual do juízo, não podendo ter papel algum em uma linguagem de fórmulas destinada à expressão de juízos matemáticos. Para Frege, uma dupla tarefa se impunha para que a coincidência legítima dos domínios da lógica e da aritmética fosse reconhecida também no plano simbólico da fundamentação de ambas as disciplinas. Em primeiro lugar, a criação e sistematização de um simbolismo adequado para expressar asserções gerais e existenciais, bem como as conexões lógicas entre estes juízos. Em segundo lugar, a generalização da análise do juízo em função e argumento para toda a linguagem. É esta segunda tarefa que será o alvo das próximas considerações.

A generalização do conceito de função

A admissão das categorias, originalmente matemáticas, de função e argumento entre as ferramentas daquele que analisa a linguagem só se justifica na medida em que há argumentos a favor de uma maior competência lógica destas ferramentas em detrimento dos utensílios que a linguagem comum já dispunha à época: a análise em termos de sujeito e predicado. A justificativa de Frege para a análise em termos de função e argumento é que ela permite que um mesmo conteúdo conceitual seja analisado de diversos modos, ao passo que, na análise em termos de sujeito e predicado, há apenas uma análise possível. O privilégio desta análise é injustificável do ponto de vista puramente lógico, e isto se torna evidente quando duas formas gramaticais da mesma proposição (ativa e passiva) são analisadas de modo diferente. Isso implica que o modo pelo qual a proposição é apresentada (na forma passiva ou ativa) tem um papel substancial no resultado da análise, fato inaceitável do ponto de vista lógico.

A apresentação de uma proposição e sua vinculação com a análise em sujeito e predicado na linguagem comum têm, para Frege, apenas importância retórica: "O lugar do sujeito na série de palavras tem, para a linguagem, a importância de um lugar *destacado*, no qual se coloca aquilo para o qual se quer dirigir particularmente a atenção do ouvinte. (...) Isto pode ter, por exemplo, a finalidade de indicar uma relação deste juízo com outros e, por meio disto, facilitar a apreensão de todo o nexo por parte do ouvinte"[*]. Todos os fenômenos da linguagem que provêm apenas da interação entre locutor e ouvinte, conclui Frege, "não possuem correspondentes na minha linguagem de fórmulas, pois nela entra em consideração apenas aquilo que, no juízo, tem influência sobre as *consequências* (Folgerungen) *possíveis*"[†].

Por outro lado, a análise da proposição em função e argumento tem exatamente esta virtude de capturar a multiplicidade em que um conteúdo conceitual se deixa

[*]Gottlob **Frege**: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms, 2007, p. 3 (§3).

[†]Ibid., p. 3 (§3).

analisar. A proposição “A lua é feita de queijo” pode tanto ser analisada em termos da função “A lua é feita de ( )” e do argumento “queijo” quanto em termos da função “( ) é feita de queijo” e do argumento “lua”. Ambas as análises possuem os mesmos direitos. Além disso, o aparato de função e argumento permite que uma sentença seja analisada em termos de uma função e de diversos argumentos. Com efeito, a sentença acima, por exemplo, também pode ser decomposta na função “ ( ) é feito de ( )” e nos argumentos “lua” e “queijo”, respectivamente.

Na generalização, feita na *Conceitografia*, do conceito matemático de função a toda a linguagem, um ponto fundamental não é tematizado por Frege. Uma função deve assumir essencialmente um único valor para cada valor de argumento dado. Qual seria o valor assumido por uma função proposicional quando esta é saturada por um objeto? Supostamente aquilo que Frege chamara, à época, de “conteúdo conceitual” do juízo. Isto, no entanto, leva a consequências inaceitáveis: tome, p. ex., a função “x é a Estrela da Tarde”; quando saturada pelo argumento “Estrela da Manhã”, ela deveria assumir o mesmo valor que quando saturada pelo argumento “Estrela da Tarde”, já que se trata, em ambas as ocasiões, do mesmo argumento, a saber, o planeta Vênus. No entanto, o conteúdo conceitual da proposição “A Estrela da Tarde é a Estrela da Tarde” é claramente distinto do conteúdo conceitual da proposição “A Estrela da Manhã é a Estrela da Tarde”. A primeira assere uma identidade, cujo reconhecimento da verdade não necessita de nenhuma observação empírica. A segunda assere um fato astronômico observável, que amplia o conhecimento daquele que a reconhece como verdadeira.

Buscando superar tais dificuldades, Frege estabelece, no artigo *Sobre Sentido e Referência*, uma distinção entre o *sentido* e a *referência* de um sinal (nome, combinação de palavras, letra). Vinculado a este sinal, encontra-se, segundo Frege, além daquilo que pode ser chamado de sua “referência”, também o “sentido” do sinal, que é o modo pelo qual a sua referência é dada[*]. Este modo de ser dado (*Art des Gegebenseins)*[†] não se confunde com uma dimensão subjetiva do sinal, cuja manifestação é distinta para cada pessoa; trata-se de algo objetivo, passível de ser compartilhado pelos usuários do sinal, desde que este último seja usado na mesma função significativa. Frege compara a apresentação da referência através do sentido com o ato de observar a lua através das lentes de um telescópio. Nesta comparação, a lua desempenha o papel de “referência”, enquanto sua imagem projetada na lente do telescópio faz as vezes do “sentido”. Por fim, a imagem retiniana do observador é comparável à dimensão psicológica do sinal. Enquanto esta é subjetiva e singular para cada observador, a imagem projetada na lente

[*]Gottlob **Frege**: Über Sinn und Bedeutung, em: Günther **Patzig** (ed.): *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, Göttingen: Vandenhoeck e Ruprecht, 2008, p. 24.

[†]A expressão “modo de apresentação” também será usada doravante como sinônimo de “modo de ser dado”.

do telescópio, atenta Frege, é objetiva, porquanto pode servir a vários observadores*.

Esta dupla camada objetiva do sinal permite a Frege dar conta de dois aspectos aparentemente contraditórios da asserção de uma identidade do tipo "$a = b$": um vinculado a sua verdade, outro associado a seu caráter informativo e não trivial. Se se mantém apenas o nível da referência, a asserção de um juízo do tipo "$a = b$" ou é trivial ou é falsa. De fato, pois, para poder asserir algo a respeito da referência de um sinal, é preciso conhecer esta referência (do contrário a asserção seria meramente um *flatus vocis*). Ora, se as referências de "a" e "b" são conhecidas, sabe-se de imediato se significam o mesmo ou não. No primeiro caso, a asserção é trivial; no segundo, a asserção é obviamente falsa. O caso é diferente quando se reconhece uma distinção entre a referência de um sinal e o modo pelo qual este sinal apresenta esta referência (seu sentido). Neste caso, a diferença do sentido garante a informatividade do juízo, ao passo que a identidade da referência garante sua verdade.

Valores de verdade como referências de proposições

Uma vez estabelecida a distinção entre sentido e referência, Frege se pergunta pela referência de uma sentença completa. Uma sentença, na qualidade de uma expressão "saturada", designa, no sistema de Frege, um objeto. Qual seria, então, este objeto? Trata-se, diz Frege, de um *valor de verdade*. Frege justifica sua resposta do seguinte modo: a questão da referência das palavras do discurso só se coloca no discurso científico. No caso do discurso poético ou literário, o fim pretendido pelo discurso não passa pela questão de saber se suas palavras se referem a algo. Para este tipo de discurso, é irrelevante saber se um personagem, local ou objeto realmente existe de fato. Basta apenas que as palavras vinculem um *sentido*, e não que possuam uma *referência*. O caso é distinto no discurso científico, cujo valor reside no fato de ele ser *verdadeiro*. Neste caso, a referência das palavras do discurso é bastante significativa: é ela que determinará o valor do discurso. Ora, se a pergunta pela referência só é importante para um discurso que se preocupa com o valor de verdade de suas sentenças, nada mais natural que se considere este próprio valor de verdade como a referência da sentença. Assim como o planeta Vênus é a referência dos nomes "Estrela da Tarde" e "Estrela da Manhã", o valor de verdade "Verdadeiro", de acordo com Frege, é a referência de todas as sentenças verdadeiras, ao passo que o valor de verdade "Falso" é a referência de todas as sentenças falsas.

Com isto, completa-se a incorporação da noção originalmente matemática de função para o restante da linguagem. No caso de sentenças assertivas, a análise em termos de função e argumento origina funções cujo contradomínio é o conjunto formado

*__Frege__: Funktion, Begriff, Bedeutung, p. 27.

pelos valores de verdade. Os "conectivos lógicos" ("e", "ou", etc.) se tornam, na perspectiva fregiana, funções que recebem valores de verdade como argumentos e que resultam em valores de verdade. Um conceito, por sua vez, é simplesmente uma função de um único argumento que resulta em um valor de verdade. A negação é, consequentemente, um conceito, já que é uma função que recebe um valor de verdade como argumento e resulta em outro valor de verdade.

Outra peculiaridade do tratamento matemático-funcional da linguagem no sistema de Frege é o fato de que, assim como no caso das funções matemáticas, nem sempre é possível inferir, a partir do valor da função para certo argumento, qual é esta função e este argumento, a menos que este valor seja apresentado como sendo precisamente o valor daquela função para aquele argumento, o que é absolutamente inessencial, já que se poderia apresentar o mesmo valor de outro modo. Considere, p. ex., a função "x é ateniense". Quando esta função é saturada pelo argumento "Sócrates", ela se torna o nome do "Verdadeiro". É claro que, se o "Verdadeiro" é apresentado pelo sinal "Sócrates é ateniense", é possível "recuperar" a função e o argumento dos quais se partiu. No entanto, é absolutamente inessencial para o "Verdadeiro" que ele seja apresentado precisamente deste modo*, e poder-se-ia muito bem escolher um sinal simples ("V") ou ainda outra sentença verdadeira para apresentá-lo. Mas, ao fazê-lo, já não se pode inferir, a partir deste sinal, a função e o argumento que o engendrou como valor.

Por fim, o modo pelo qual Frege universaliza o conceito de função e argumento faz desvanecer a distinção entre proposição e nome. Por um lado, o nome descreve seu objeto através da camada do sentido. Por outro lado, a proposição nomeia um objeto, um valor de verdade†. Enquanto nome de um objeto, uma expressão verdadeira tem os mesmos direitos de uma expressão falsa: a diferença reside apenas no objeto nomeado. Se há uma preferência pelas expressões verdadeiras da linguagem, essa preferência não se deve ao fato de que as expressões falsas deixam de denominar algo. A teoria de Frege é, nesse sentido, incapaz de explicar, do ponto de vista puramente lógico, o interesse pelo "Verdadeiro" em detrimento do "Falso"; este interesse se torna um *pressuposto* da teoria.

*Segundo Frege, "(...) o modo pelo qual um objeto é dado não deve ser considerado como uma propriedade imutável desse objeto, já que o mesmo objeto pode ser dado de modos distintos". **idem**: *Grundgesetze der Arithmetik V1-2: Begriffsschriftlich Abgeleitet*, Jena: Hermann Pohle, 1983/1903, V I, p. 18 (§10).

†Ou, nas palavras de Lopes dos Santos, "todo nome nomeia descrevendo, toda proposição descreve nomeando". **Lopes dos Santos**: A essência da proposição e a essência do mundo, p. 41.

RUSSELL E A PRIMAZIA DA NOÇÃO DE FUNÇÃO PROPOSICIONAL

Em 1904, Bertrand Russell publica uma série de três artigos sobre a "teoria dos complexos e suposições" do filósofo austríaco Alexius Meinong. Logo na primeira página, Russell menciona a proximidade da teoria de Meinong em relação à de Frege: na teoria de Meinong, o objeto de um pensamento, mesmo quando este objeto não existe, não pode ser um nada. Além disso, ele é algo independente de ser o objeto de um pensamento[*]. Assim como Frege, Meinong também admite haver um correlato objetivo para as descrições falsas. Embora este correlato não seja, como na teoria de Frege, o "Falso", o que importa é que, em ambas as teorias, aquilo que distingue uma descrição verdadeira de uma descrição falsa não é o fato de uma delas deixar de manter uma relação com algo na realidade. A distinção se encontra apenas no objeto descrito ou em uma propriedade ou qualidade que ele possui. Em termos meinongianos, todo objeto descrito por uma proposição ou considerado por um pensamento *subsiste*. Esta subsistência, vale especificar, não consiste em ele ser o objeto descrito por uma proposição ou o objeto de consideração de um pensamento, mas na sua *capacidade* de sê-lo[†]. Alguns deles, além de subsistirem, também *existem*, configuram um *fato*. Ser um fato, porém, não implica nenhuma superioridade ontológica em relação aos objetos de descrições falsas. No terceiro artigo da série, Russell manifesta concordância com esta concepção; ele não se furta, entretanto, à conclusão de que a preferência pelas proposições verdadeiras não pode ser explicada, segundo esta teoria, do ponto de vista lógico, podendo apenas ser fundamentada do ponto de vista ético ou estético. Afinal, "assim como algumas rosas são vermelhas e outras brancas, algumas proposições são verdadeiras e outras falsas"; a preferência pela verdade passa a ser, nesta teoria, "um mero preconceito inexplicável"[‡].

Alguns anos mais tarde, as consequências acima são vistas por Russell como altamente insatisfatórias e passam a ser motivos para a rejeição da teoria[§]. Esta recusa de conceder ao objeto do discurso falso certa densidade ontológica faz com que Russell recupere a solução aristotélica para o paradoxo do falso[¶]. O núcleo desta solução consiste no reconhecimento de uma complexidade essencial ao discurso. A significatividade do discurso é garantida, então, pela simbolização das partes do discurso (nomes), enquanto a verdade ou falsidade do discurso depende da combinação, no plano da realidade, dos objetos simbolizados pelos nomes. Se os objetos se combinam de modo a formar um

[*] Bertrand **Russell**: Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (I.), em: *Mind*, 13.50 (1904), p. 204.

[†] **Idem**: Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (II.), em: *Mind*, 13.51 (1904), p. 344.

[‡] **Idem**: Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (III.), em: *Mind*, 13.52 (1904), p. 523.

[§] Cf., particularmente, **idem**: On the Nature of Truth and Falsehood, em: *Philosophical Essays*, London: Longmans, 1910, p. 176.

[¶] **Lopes dos Santos**: A essência da proposição e a essência do mundo, pp. 46-7.

complexo, a proposição que assere sua existência é verdadeira; caso contrário, ela é falsa. Neste último caso, a proposição continua sendo significativa, mesmo não havendo nada na realidade que se poderia chamar de seu correlato.

A solução acima pressupõe, evidentemente, que as partes do discurso cumpram suas funções designativas. Do contrário, seria impossível separar o discurso falso do discurso sem sentido. Deste modo, de uma sentença que contém uma descrição no lugar de um nome, como em "Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias morreu na miséria", pode-se afirmar ou *i)* que a sentença é significativa apenas no caso da descrição ser verdadeira, ou *ii)* que a sentença é significativa independentemente da verdade ou falsidade da descrição. Neste caso, porém, a sentença também deve asserir o fato de que algo satisfaz a descrição. Em outras palavras, ou a verdade da descrição é uma condição de sentido da sentença, ou é uma condição de verdade.

No artigo *Sobre Sentido e Referência*, Frege apresenta o seguinte argumento para sustentar que a sentença não assere a existência de um objeto satisfazendo a descrição: se a sentença "Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias morreu na miséria" asserisse a existência de algo que satisfaz a descrição, sua negação não seria "Quem descobriu a forma elíptica das órbitas planetárias não morreu na miséria", mas "Não há ninguém que tenha descoberto a forma elíptica das órbitas planetárias ou, se há alguém que o tenha feito, este alguém não morreu na miséria"[*]. No artigo *Sobre o Denotar*, Russell defende precisamente que é esta última sentença que deve ser considerada como a negação lógica da sentença originária, que a negação da sentença tal como ela ocorre na linguagem comum não reflete sua forma lógica profunda. Russell toma como inconteste o fato de que a significatividade da sentença não depende da verdade da descrição[†]. Deste modo, aquilo que, à primeira vista, aparecia como condição de significatividade da proposição se torna, na concepção de Russell, uma condição de verdade. Consequentemente, é a proposição ela própria que garante seu sentido, independentemente da verdade ou da falsidade de qualquer outra proposição. Além disso, a análise russelliana da sentença acima denuncia uma opacidade do modo habitual pela qual ela é expressa. A análise lógica tem, então, a função de fazer aparecer, na superfície da sentença (do sinal proposicional), a verdadeira forma lógica do enunciado.

O resultado da análise russelliana das descrições definidas pode ser sintetizado na ideia de que toda descrição é proposicional e, por conseguinte, o nome não descreve, servindo apenas como um rótulo para algo cuja existência independe de qualquer

[*] Cf. **Frege**: Funktion, Begriff, Bedeutung, p. 36.

[†] Cf. Bertrand **Russell**: On Denoting, em: *Mind*, 14.56 (1906), p. 484: "Now it is plain that such propositions do not become nonsense merely because their hypotheses are false. The King in 'The Tempest' might say, 'If Ferdinand is not drowned, Ferdinand is my only son'. Now 'my only son' is a denoting phrase, which, on the face of it, has a denotation when, and only when, I have exactly one son. But the above statement would nevertheless have remained true if Ferdinand had been in fact drowned".

descrição. De um lado, se a proposição é essencialmente complexa, de outro, o nome é essencialmente simples, isto é, a complexidade de um sinal que funciona como nome não desempenha papel algum na estrutura lógica da sentença que o contém. Este resultado, no entanto, traz problemas para a análise lógica em termos de função e argumento. Na concepção tradicional de função, o valor de uma função para certo argumento não preserva necessariamente a complexidade da função e do argumento. Isto também acontecia na análise fregiana: tome, por exemplo, a função "o centro de gravidade do planeta x"; esta função, quando saturada pelo argumento Saturno, passa a denotar um ponto do espaço, algo supostamente simples. A função e o argumento, entretanto, apresentam este objeto simples por meio de uma expressão complexa[*], exatamente aquilo que deveria ser evitado na concepção de Russell. No caso de funções proposicionais, esta situação sempre ocorria, dada a simplicidade, na teoria de Frege, dos objetos "Verdadeiro" e "Falso". Se, por um lado, este resultado é inaceitável para Russell, por outro lado, havia o reconhecimento de que a análise fregiana da proposição não poderia ser deixada inteiramente de lado. Russell foi, então, levado a arquitetar uma teoria que conciliasse o novo aparato lógico-matemático de função e argumento com o princípio da complexidade. Uma teoria em que o contradomínio da função se confundisse com a função e seu domínio. Uma teoria na qual a complexidade estrutural da análise em termos de função e argumento não fosse apenas, como na teoria de Frege, um modo de apresentação de um objeto simples.

A função matemática como função descritiva

No primeiro volume dos *Principia Mathematica*, Russell[†] introduz a noção de *função proposicional* do seguinte modo: "Seja ϕx uma sentença contendo uma variável x e tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo. Então, ϕx é chamada de "função proposicional"[‡]. Um pouco adiante, Russell esclarece que as funções proposicionais são primitivas e, a partir delas, todas as outras funções são derivadas. Funções como "seno de x", "log x" ou "o pai de x" são derivadas

[*] Como, para Frege, um objeto pode ser denotado por uma expressão descritiva, resulta disso que as referências das partes de uma expressão não são partes da referência da expressão. Na camada do sentido, no entanto, é permitido dizer que os sentidos das partes de uma expressão são partes do sentido da expressão. Cf. Erich H. **Reck**/Steve **Awodey** (eds.): *Frege's Lectures on Logic: Carnap's Student Notes 1910-1914*, based on the German text, edited, with introduction and annotations, by Gottfried Gabriel, Chicago: Open Court, 2004, p. 87.

[†] Os *Principia Mathematica* foram escritos em parceria com Alfred North Whitehead. É comum, no entanto, atribuir a parte da obra que constitui seu alicerce como sendo da responsabilidade de Russell. Cf., p. ex., Peter **Hylton**: Functions, Operations, and Sense in Wittgenstein's *Tractatus*, em: *Propositions, Functions, and Analysis: Selected Essays on Russell's Philosophy*, Oxford: Clarendon Press, 2005, pp. 138–52, p. 139 (nota de rodapé).

[‡] Bertrand **Russell**/Alfred North **Whitehead**: *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge: Cambridge University Press, 1910, p. 15.

a partir de funções proposicionais e são chamadas de *funções descritivas*. Além disso, os conectivos ou constantes* lógicas (que Russell chama de *functions of propositions*) são, de acordo com Russell, casos particulares de funções proposicionais†. O nome "função proposicional" é, na verdade, um tanto quanto capcioso, pois não se trata de uma diferença específica do gênero das "funções". Pelo contrário, são as funções que se caracterizam por serem definidas a partir de funções proposicionais. Qual seria a razão desta inversão conceitual?

Pelos motivos citados na Seção precedente, Russell não pode aceitar a generalização fregiana do conceito de função matemática para o restante da linguagem. Se Russell introduz a função proposicional como noção primitiva é devido a certas características que estas possuem e que não são compartilhadas pelas funções matemáticas em seu uso ordinário. A principal delas é que, na concepção de Russell, o valor de uma função proposicional é uma proposição em que a função e o argumento que a engendraram ocorrem de algum modo essencial, seja como parte constituinte (como no caso do argumento), seja como parte da estrutura da proposição (como no caso da função). No caso do argumento, pode-se muito bem dizer que a proposição o *contém*‡. O caso da função é um tanto quanto distinto, já que Russell nega que ela seja parte constituinte da proposição§. A função proposicional e a proposição mantêm, entretanto, uma semelhança estrutural: a função "x é sábio", quando saturada pelo argumento Platão, engendra a proposição "Platão é sábio", e não uma outra proposição qualquer como, p. ex., "Einstein é um grande homem". Nesse sentido, tanto a função como o argumento marcam presença de algum modo essencial na proposição resultante (o argumento, em particular, como *constituinte* da proposição). No caso de funções matemáticas – assim como elas são usualmente empregadas –, esta característica não está presente: a função $\sqrt{x}$, quando saturada pelo argumento 4, resulta no número 2, mas em que sentido o número quatro estaria contido no número dois? O mesmo ocorre na generalização que Frege estabelece para as funções da linguagem: a função "pai de x", quando saturada pelo argumento Alexandre Magno, resulta no rei Filipe II, mas seria até mesmo cômico dizer que o rei Filipe II contém Alexandre Magno como uma

*Será preferível o uso da expressão "constante lógica" para abarcar, juntamente com conectivos lógicos como "e", "ou" etc., também a negação de uma proposição, a qual não é propriamente um "conectivo".

†Ibid., p. 15.

‡Cf. Peter **Hylton**: Functions and Propositional Functions in *Principia Mathematica*, em: *Propositions, Functions, and Analysis: Selected Essays on Russell's Philosophy*, Oxford: Clarendon Press, 2005, p. 132: "If a propositional function is applied to an object to yield a proposition, then the proposition preserves the relevant complexity. For example, the propositional function $\hat{x}$ *is wise* applied to Socrates yields the proposition that Socrates is wise, which contains Socrates. This is true quite generally: if a proposition is the value of a propositional function for a given argument then the proposition will *contain* that argument".

§Para uma discussão acerca deste aspecto da lógica dos *Principia Mathematica*, Cf. **idem**: *Russell, Idealism, and the Emergence of Analytic Philosophy*, en, Oxford: Clarendon Press, 1993, p. 301.

de suas partes constituintes.

Na nomenclatura de Russell, a função proposicional denota, de modo ambíguo, um de seus valores. É a propriedade que as proposições têm de possuírem partes comuns entre si que é fundamental para a noção de função proposicional, pois esta última nada mais é senão a expressão desta forma comum que é compartilhada por uma classe de proposições. Esta noção, vale acentuar, é primitiva não apenas em relação a outros tipos de funções, mas também em relação a classes ou conjuntos. Nos *Principia Mathematica*, todo enunciado sobre uma classe é, na verdade, um enunciado sobre uma função proposicional, sobre um conceito[*]. Nesse sentido, pode-se dizer que os *Principia Mathematica* implementam uma *concepção intensional das classes*. Funções não proposicionais são definidas, na Seção ***30** dos *Principia Mathematica*, a partir de funções proposicionais. Russell inicia a Seção ***30**, intitulada *Descriptive Functions*, do seguinte modo:

> As funções até então consideradas (...) eram proposicionais, i.e., tinham proposições como seus valores. Mas as funções ordinárias da matemática, tais como x^2, seno de x, log x, não são proposicionais. Funções deste tipo sempre significam "o termo que mantém certa relação com x." Por esta razão, elas podem ser chamadas de funções *descritivas*, pois elas *descrevem* certo termo por intermédio de sua relação com seu argumento. Deste modo, "*sin* $\pi/2$" descreve o número 1.[†]

Em seguida, a forma geral de uma função descritiva é definida como:

$$R\text{‘}y = (\iota x)(xRy) \quad \text{Df.},$$

em que o *definiens* significa "o (único) termo x que mantém a relação R com y". Um pouco adiante, Russell faz questão de assinalar que todas as funções que ocorrem na matemática são instâncias da definição acima[‡]. Considere, por exemplo, a função "seno de x". Ela pode ser tomada como caso particular da definição acima para a relação "$x =$ seno de y". Outro exemplo é a função "sucessor de x", que pode ser obtida a partir da relação "$x = y + 1$". De modo geral, a função matemática sempre é obtida por meio de uma relação que faz uso do sinal de identidade. Assim, funções que aparentemente nomeavam um objeto quando saturadas por um argumento (como ocorria na teoria de Frege) são transformadas, na teoria dos *Principia Mathematica*, em casos particulares de descrições definidas.

[*] **Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, p. 197 (definição ***20.01**).

[†] ibid., p. 245.

[‡] Ibid., p. 245.

Constantes lógicas como casos particulares de funções proposicionais

Na introdução ao primeiro volume dos *Principia Mathematica*, Russell introduz, primeiramente, as constantes lógicas (negação, disjunção, implicação), para depois apresentar a noção de "função proposicional". Esta precedência, no entanto, é apenas um acidente do modo de exposição do texto, já que posteriormente fica claro que tais constantes – chamadas de *funções de proposições* – são apenas casos particulares de funções proposicionais[*]. Russell as introduz do seguinte modo: "Um agregado de proposições, considerado como totalidades não necessariamente determinadas inequivocamente em uma única proposição *mais complexa que seus constituintes*, é uma função *com proposições como argumentos*"[†].

Deste modo, proposições moleculares, como "$p \vee q$", "$p \cdot q$", "$(p \vee \neg p) \cdot q$", etc. são tratadas no mesmo plano que as proposições atômicas, que não fazem uso de conectivo algum, como, p. ex., "aRb". Do mesmo modo que "a" é parte constituinte da proposição "aRb", a proposição "q" é parte constituinte da proposição "$(p \vee \neg p) \cdot q$". Esta última proposição, vale dizer, é mais complexa que "q", pois a contém como parte constituinte, a despeito de uma se seguir da outra e vice-versa. O resultado é ainda mais pitoresco quando a negação é aplicada sucessivamente a certa proposição. A primeira proposição, "$\neg(p)$"[‡], contém a proposição "p" como constituinte. A segunda proposição "$\neg(\neg p)$" contém, por sua vez, a proposição "$\neg p$" como constituinte. Nesse sentido, ela é de longe mais complexa que a proposição "p". O resultado deste modo de conceber as constantes lógicas é o fato de que a equivalência lógica entre duas proposições (o fato de uma se seguir da outra e vice-versa) não é, ao mesmo tempo, o critério de identidade destas proposições. Duas proposições podem muito bem se seguir uma da outra e serem diferentes.

Neste ponto, a comparação com Frege pode ser traçada de modo mais claro. Para Frege, a função e o argumento são apenas modos de apresentação que não necessariamente refletem a complexidade do objeto apresentado. Deste modo, o objeto apresentado pelas proposições "p" e "$\neg\neg p$" é o mesmo, a despeito da complexidade maior da segunda expressão. Para Russell, o "objeto" resultante da "saturação"[§] de uma função proposicional é a própria proposição, que é mais complexa que o argumento e que compartilha com a função certa estrutura. Nesse sentido, as proposições "p" e "$\neg\neg p$" não podem de modo algum ser a mesma proposição, pois uma contém a outra

[*] Ibid., p. 15.

[†] ibid., p. 6 (primeiro grifo nosso).

[‡] Os parênteses aqui são usados para destacar os lugares de argumento.

[§] Russell não usa a terminologia fregiana de entidades saturadas e insaturadas, preferindo falar, ao invés da "saturação" de uma função, da "substituição" da variável que ocorre na função por um termo com significado fixo.

como parte e o todo é sempre maior – neste caso, mais complexo – que a parte.

A ramificação das constantes lógicas

Uma das principais preocupações de Russell ao desenvolver seu sistema de lógica nos *Principia Mathematica* era o de evitar os paradoxos que surgiram no início do século e que tornavam inconsistentes certos sistemas lógicos como, p. ex., o das *Leis Básicas da Aritmética* de Frege. No caso do sistema de Frege, a inconsistência decorria da presença da lei básica V, que fornecia um critério de identidade para percursos de valores de funções a partir do valor que estas funções assumiam para cada argumento[*]. O paradoxo que afligiu o sistema de Frege era, no entanto, apenas um entre diversos paradoxos que foram expostos à luz na época. A fim de evitar todos estes paradoxos de um só golpe, Russell destacou uma característica – já aludida por Poincaré em 1906[†] – comum a todos eles, a saber, a presença de uma circularidade implícita em suas formulações. O perigo de um círculo vicioso surgia, segundo Russell, da suposição de que uma coleção de objetos pudesse conter membros definidos em termos da própria coleção[‡]. O antídoto de Russell para este problema era classificar os termos da teoria em tipos, de modo a evitar a presença de um círculo vicioso. Este antídoto, aplicado ao caso das funções proposicionais, leva ao seguinte resultado:

> Uma função [proposicional] não é uma função bem definida a menos que todos os seus valores já estejam bem definidos. Segue-se disto que nenhuma função pode ter, entre seus valores, algo que pressupõe a função, pois, caso contrário, não poderíamos considerar os objetos denotados de modo ambíguo pela função como definidos antes da função ser definida, ao passo que, inversamente, como acabamos de ver, a função não pode ser definida a não ser que seus valores o sejam. Este é um caso particular, embora talvez seja o mais fundamental, do princípio do círculo vicioso. Uma função é algo que denota, de modo ambíguo, alguma coisa de certa totalidade, a saber, os valores da função; deste modo, esta totalidade não pode conter nenhum membro que envolva a função, já que, do contrário, ela conteria membros envolvendo a totalidade, o que, pelo princípio do círculo vicioso, não é permitido a nenhuma totalidade.[§]

Uma vez exposto o princípio que soluciona os paradoxos, é possível entender a hierarquia de tipos que Russell propõe. Tal hierarquia é resultado imediato de duas consequências do princípio do círculo vicioso. A primeira é que uma função proposicional é de um tipo maior que qualquer um de seus argumentos. Deste modo, ela não admite, como argumento, nenhum termo que seja definido a partir dela própria. A segunda é que

[*] Para uma exposição sucinta e ao mesmo tempo completa da relação entre a lei básica V e a inconsistência do sistema fregiano, Cf. Carlo **Penco**: *Frege*, Collana Pensatori, Roma: Carocci, 2010, pp. 95-99.

[†] **Poincaré**: Les Mathématiques et la Logique.

[‡] **Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, p. 39.

[§] ibid., pp. 41-2 .

uma função proposicional também é de um tipo maior que qualquer objeto que caia no escopo de um quantificador presente na função. Esta segunda consequência do princípio do círculo vicioso é importante, pois é ela que diferencia um teoria dos tipos simples de uma teoria dos tipos ramificada*. Para ilustrar este ponto, considere as seguintes proposições: "Napoleão é corajoso" e "Napoleão tem todas as virtudes de um grande general". A partir delas, é possível formar as seguintes funções proposicionais: "x é corajoso" e "x tem todas as virtudes de um grande general". Ambas as funções recebem, como argumento, o mesmo tipo de objetos: indivíduos. No entanto, elas não podem se encontrar no mesmo nível da hierarquia. A segunda proposição, além de pressupor que a totalidade de argumentos que ela pode receber está bem definida, pressupõe que o mesmo ocorre com a totalidade de propriedades de indivíduos, já que ela quantifica sobre esta totalidade. Se a função proposicional que resulta dela fosse considerada simplesmente como a atribuição de uma propriedade a um indivíduo, a proposição deveria pressupor a função, o que é proibido segundo o princípio do círculo vicioso, pois é a função que deve pressupor a totalidade de seus valores, e não o contrário.

Não apenas funções e indivíduos se dividiam em hierarquias, mas também as proposições, já que estas podiam ser tomadas como argumentos de funções. A consequência disso era o fato de que as constantes lógicas, enquanto funções de proposições, deveriam também se situar na hierarquia de tipos, de acordo com o tipo de seus argumentos. A negação, por exemplo, da proposição "Napoleão é corajoso" não poderia ser a mesma que a negação da proposição "Napoleão tem todas as virtudes de um grande general". Ora, se para cada proposição da hierarquia deveria haver constantes lógicas aplicáveis a ela, essas constantes deveriam ser definidas para cada nível da hierarquia. Consequentemente, deveria haver tantas "negações", "conjunções", "disjunções" etc. quanto proposições de diferentes tipos. É preciso lembrar que não há nada que unifique esses diferentes tipos de proposições para que se torne possível falar de uma unidade das constantes lógicas. As duas alternativas mais comuns de se reunir uma multiplicidade em uma unidade são bloqueadas pela teoria dos tipos. A primeira seria destacar uma propriedade comum, a de "ser uma proposição", ou, então, "ser verdadeira ou falsa". Mas estas propriedades são, por sua vez, funções, que devem receber apenas argumentos de certo tipo. A consequência disto é que o significado das palavras "verdadeiro" e "falso" também é ambíguo: tais palavras significam algo distinto para cada tipo de

*Esta distinção, no entanto, não estava presente nos *Principia Mathematica*, já que esta dupla hierarquia (em relação aos argumentos que uma função pode receber e em relação aos quantificadores que ela contém) era vista por Russell como consequência de um único princípio. É apenas após o influente artigo de Ramsey em 1925, intitulado *The Foundations of Mathematics*, que a ramificação dos tipos passou a ser considerada como uma superposição de uma teoria das "ordens" sobre uma teoria simples dos tipos. Cf. Warren **Goldfarb**: Russell's reasons for ramification, em: C. W. **Savage**/C. A. **Anderson** (eds.): *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1989, p. 24.

proposição à qual elas se aplicam*. A segunda seria por meio de uma série em que cada nível da hierarquia pudesse ser tomado como um membro da série. O fato de Russell utilizar números para caracterizar os níveis da hierarquia dá a falsa impressão de que esta alternativa estivesse disponível. Infelizmente, toda série, nos *Principia Mathematica*, deve ser produzida por uma relação que, por sua vez, é uma função proposicional, e os elementos relacionados também devem ser de um tipo específico. Em suma, é impossível que haja uma progressão na hierarquia de tipos. O dispositivo que Russell utiliza para amenizar estes problemas é o de "ambiguidade sistemática"† das constantes lógicas. Nesse sentido, os *Principia Mathematica* apresentam, na verdade, esquemas de constantes lógicas que devem ser reinterpretados para cada tipo a que elas são aplicadas. Para além do problema lógico de saber se esta solução não introduz, no nível esquemático, os mesmos problemas que a teoria dos tipos propunha evitar‡, o fato é que, na ausência de uma unidade da linguagem ou daquilo que se pode chamar de "proposição", a coincidência das regras de manipulação e derivação dessas constantes se tornava, na teoria dos *Principia Mathematica*, o produto de um acaso.

Na Seção seguinte, veremos como a distinção feita pelo *Tractatus* entre função e operação resolve os problemas que se colocavam para a teoria de Russell.

WITTGENSTEIN E A DISTINÇÃO ENTRE FUNÇÃO E OPERAÇÃO

Wittgenstein começou a se embrenhar nos domínios da lógica sob a tutela de Russell. Em pouco tempo, Russell desenvolveu grande admiração pelo talento filosófico de Wittgenstein, a ponto de considerá-lo seu sucessor para resolver os problemas que seus trabalhos haviam suscitado§. Quando chegou em Cambridge, no ano de 1911, os interesses de Russell estavam voltados para uma teoria por ele chamada de teoria do juízo como relação múltipla. Um esboço bastante sintetizado desta teoria já aparecia no primeiro volume dos *Principia Mathematica*¶, na seção em que são explicadas as noções de *verdadeiro* e *falso*, quando aplicadas a proposições atômicas. A necessidade de uma "teoria do juízo" surgia por motivos bastante análogos aos das descrições definidas. Russell precisava dar conta de juízos ou crenças falsas, sem admitir um correlato destes. A solução de Russell consistia, fundamentalmente, em admitir que a relação de juízo ou crença que ocorre entre um sujeito e um conteúdo proposicional não é, como parece ser, uma relação binária entre o sujeito e tal conteúdo, mas uma relação múltipla entre o sujeito e os elementos do conteúdo proposicional. Essa teoria

*__Russell/Whitehead__: Principia Mathematica, p. 44.

†Ibid., pp. 48-9.

‡Cf. Michael **Potter**: *Wittgenstein's Notes on Logic*, New York: Oxford University Press, 2008, p. 203.

§Ray **Monk**: *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, New York: The Free Press, 1990, pp. 41-2.

¶**Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, p. 46.

foi um dos pontos de partida das reflexões de Wittgenstein que culminaram na teoria da figuração do *Tractatus*. Os meandros pelos quais a teoria tractariana da proposição surge a partir das falhas do projeto russelliano são, no entanto, bastante complicados e impossíveis de serem delineados de modo breve[*]. Este longo percurso será evitado, pois ele desviaria o foco daquilo que se pretende enfatizar. Uma curta passagem pela teoria da proposição do *Tractatus* se faz, entretanto, necessária para elucidar a distinção que Wittgenstein propõe entre as noções de função e operação. Por razão de brevidade, então, a teoria tractariana será considerada a partir de seu resultado, a saber, a ideia de que a proposição é uma *figuração lógica* dos fatos.

A noção tractariana de figuração lógica se erige fundamentalmente sobre três pilares[†]: *i)* a tese de que a figuração é um fato[‡]; *ii)* a tese de que a cada elemento da figuração corresponde um elemento da situação por ela apresentada[§], sendo que esta coordenação entre elementos da figuração e da situação afigurada pertence essencialmente à figuração[¶]; *iii)* a tese de que a figuração e a situação por ela apresentada têm algo em comum – a forma lógica de afiguração[‖] – que garante que o modo em que os elementos da figuração se encontram uns em relação aos outros corresponda a uma possibilidade real de combinação dos elementos da situação afigurada.

A tese de que a figuração é um fato, além de conceder à figuração um estatuto ontológico, enfatiza a ideia de que os elementos da figuração estão articulados de certa maneira, e esta articulação é essencial à figuração. Nesse sentido, um mero aglomerado

[*]Há, na literatura secundária, diversas leituras a respeito desse desenvolvimento da teoria tractariana, bem como dos motivos que fizeram Russell abandonar, em 1913, um manuscrito quase acabado sobre a teoria do juízo como relação múltipla. Além do clássico problema da direção das relações assimétricas, alguns intérpretes acentuam que a teoria do juízo como relação múltipla só poderia evitar proposições sem sentido à custa de outros juízos acerca dos constituintes da relação. Estes juízos estariam, no entanto, em tipos mais altos da hierarquia dos tipos de Russell, o que faria com que a análise de juízos do nível básico da hierarquia dependesse de juízos de níveis mais elevados, fato inaceitável para uma hierarquia de tipos. Outros intérpretes mencionam a importância do problema da unidade proposicional como elemento chave das críticas de Wittgenstein. Se, para evitar a existência de um conteúdo proposicional, Russell precisou despedaçar os componentes do juízo, para então uni-los na relação de juízo, como é que se poderia negar aquele conteúdo proposicional sem distribuir a negação entre as diversas peças em que o conteúdo proposicional se desfez? Mas, neste caso, é fácil perceber que a negação das peças é um contrassenso. Algumas notas de Russell em 1913 apontam para a aceitação de um "fato neutro", que poderia, então, ser afirmado, negado etc. Como é fácil perceber, este fato neutro não está tão distante da objetivação do correlato da proposição falsa que ocorre nas teorias de Frege e Meinong. Neste caso, reinstaura-se o problema da distinção entre verdade e falsidade. Para detalhes destas duas leituras, Cf. Nicholas **Griffin**: Russell's Multiple Relation Theory of Judgment, em: *Philosophical Studies*, 47.2 (1985), pp. 213–47 e Peter W. **Hanks**: How Wittgenstein Defeated Russell's Multiple Relation Theory of Judgment, em: *Synthese*, 154 (2007), pp. 121–46.

[†]Seguiremos, neste ponto, a apresentação da teoria tractariana da figuração de Frascolla em: Pasquale **Frascolla**: *Il Tractatus Logico-Philosophicus di Wittgenstein: Introduzione alla lettura*, Roma: Carocci, 2007.

[‡]*Tractatus*, aforismo 2.141.

[§]Ibid., aforismo 2.13.

[¶]Ibid., aforismo 2.1513.

[‖]Ibid., aforismo 2.2.

de elementos figurativos não é o suficiente para que se tenha uma figuração, assim como um mero aglomerado de objetos não é suficiente para a existência de um fato. É preciso, além disso, que estes elementos constituam uma unidade estrutural, que eles se vinculem uns aos outros em um fato.

A tese de que deve haver uma coordenação entre os elementos da figuração e os objetos da situação afigurada resulta do próprio conceito de figuração: nesta, os elementos figurativos representam ou substituem (*vertreten*) os elementos figurados. Wittgenstein salienta que deve ser possível distinguir na proposição tanto quanto seja possível distinguir na situação que ela apresenta (*darstellen*)[*]. Ambas devem possuir, segundo o termo técnico utilizado, a mesma multiplicidade lógica (matemática)[†]. Com pleno direito, Wittgenstein afirma que essa coordenação é como que "as antenas dos elementos da figuração, com as quais ela toca a realidade"[‡]. À primeira vista, no entanto, as proposições da linguagem corrente não cumprem esse pré-requisito. Afinal, para dizer, por exemplo, que um pobre lenhador árabe esbarrou no tesouro de quarenta ladrões, não é preciso, aparentemente, que a proposição tenha elementos para representar cada um dos ladrões. Esse descompasso, segundo Wittgenstein, surge do fato de que a linguagem possui mecanismos que distorcem seu caráter figurativo. De fato, como afirma Wittgenstein, "os acordos tácitos que permitem o entendimento da linguagem corrente são enormemente complicados"[§]. Deve ser possível, no entanto, recuperar a figuratividade na superfície da linguagem expondo às claras a natureza desses acordos tácitos. Deve ser possível compreender, para além da superfície do *sinal* proposicional, todo um corpo de acordos e de regras sintáticas que o acompanham e o transformam em um *símbolo*, em um elemento indispensável ao pensamento. A tarefa de trazer esta essência figurativa da linguagem para o plano do sinal proposicional (assim como ocorre na escrita hieroglífica) remonta àquilo que o *Tractatus* chama de *análise completa.* Na posse de uma análise completa, essa coordenação de elementos do fato proposicional e da situação afigurada configura um mapeamento biunívoco. Outro ponto importante é o fato de que um *mesmo* fato pode ser usado, enquanto figuração, para apresentar situações inteiramente distintas. Basta que as coordenações entre os elementos da figuração e os elementos da situação apresentada sejam feitas, em cada caso, de modos

[*] O verbo "darstellen" é traduzido por Lopes dos Santos por "representar". Esta opção de tradução será evitada aqui por duas razões: em primeiro lugar, o próprio filósofo contrasta (embora em um horizonte bastante distinto do *Tractatus*) o verbo "repräsentieren" – cognato de "representar" – com o verbo "darstellen", por exemplo em: "Wie gesagt: der Satzzeichen repräsentiert nicht – Es stellt dar". Ludwig **Wittgenstein**: *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 3, Wien/New York: Springer Verlag, 1999 (doravante citado como *WAiii*), p. 88. O verbo "repräsentieren" ocorre aqui como sinônimo de "vertreten", assim como o verbo "representar" é utilizado como sinônimo de "substituir", de "estar no lugar de". Em segundo lugar, o termo "representação", com uma conotação claramente psicológica, é, não raro, utilizado para traduzir o vocábulo alemão "Vorstellung".

[†] *Tractatus*, aforismo 4.04.

[‡] Ibid., aforismo 2.1515.

[§] Ibid., aforismo 4.002.

diferentes. No entanto, em posse da análise completa das proposições da linguagem, pode-se adotar, segundo uma convenção arbitrária, a utilização de um único sinal para se referir a um mesmo objeto. Neste caso, o objeto constitui o *significado* do sinal e o aparecimento deste mesmo sinal em duas proposições distintas tem, como consequência, o fato de elas falarem do mesmo objeto. Na proposição, os elementos figurativos, aos quais foram atribuídos significados, são chamados de *nomes*.

Por fim, a tese de que a figuração e a situação por ela apresentada devem partilhar a mesma forma lógica advém do fato de que as possibilidades de combinação dos elementos da figuração devem expressar, de modo satisfatório, a trama de combinações possíveis dos objetos da situação apresentada. A forma lógica é o que há de comum entre a figuração e a situação, sem a qual um fato não poderia ser figuração de uma situação. É de fundamental importância a distinção entre a *forma* de um fato e sua *forma lógica*. A forma de um fato é determinada pela forma das partes constituintes do fato. Uma das teses importantes do *Tractatus* é a de que o objeto não é simplesmente um conteúdo apto a receber uma forma que lhe é imposta externamente. O objeto é impensável sem a sua forma, sem as suas possibilidades de se vincular em estados de coisas. Um objeto espacial, por exemplo, é essencialmente espacial, e é essencial que ele possa estar vinculado a outros objetos espaciais para constituir um fato espacial. O mesmo ocorre, por exemplo, com uma nota musical: ela é impensável sem o espaço de possibilidades da qual ela faz parte. Caso contrário, pareceria um mero acaso o fato de uma nota musical nunca estar situada, por exemplo, no espaço geométrico juntamente com figuras geométricas. Como diz o *Tractatus*, "se as coisas podem aparecer em estados de coisas, isso já deve estar nelas"[*]. Nesse sentido, um fato que é constituído por objetos espaciais possui uma forma *espacial*, do mesmo modo que um fato que é constituído por objetos temporais possui uma forma *temporal*, e assim por diante. Se, para figurar um fato temporal, uma figuração também tivesse que ser temporal, então uma partitura nunca poderia ser uma figuração de uma música. E, no entanto, ela é, e isto ocorre, pois, embora a partitura e a música não tenham a mesma forma, elas têm a mesma forma lógica, que não considera a forma particular dos elementos da figuração, mas apenas a rede de possibilidades de combinação que os elementos de ambos os fatos possuem de modo intrínseco. A forma lógica de uma figuração, no entanto, pode ser certamente obtida a partir de sua forma; ela não é algo que se acrescenta à forma da proposição, algo como uma "segunda" forma que estaria ao lado da forma original da proposição. Aquilo que caracteriza a forma de uma figuração necessariamente contribui para a caracterização de sua forma lógica e vice-versa. Assim, se um elemento do fato afigurativo não contribui para caracterizar a forma de uma figuração, este elemento necessariamente não tem papel algum na determinação de sua forma lógica.

[*]Ibid., aforismo 2.0121.

A figuração apresenta uma situação que pode ou não acontecer. Esta situação é o *sentido* da figuração. Se esta situação de fato acontece, a proposição é verdadeira. Caso contrário, ela é falsa. Das teses *i)* que a figuração é um fato e *ii)* que a situação deve ter a mesma forma lógica – as mesmas *possibilidades* de combinação – da figuração, o *Tractatus* tirava a conclusão de que a figuração só pode apresentar situações contingentes, i.e., só é possível saber se a figuração é verdadeira ou falsa comparando-a com a realidade. Uma figuração verdadeira *a priori*, segundo o *Tractatus*, não existe*. Eis a tese da bipolaridade essencial da proposição.

A partir desta breve apresentação da teoria da figuração, é possível encontrar, no *Tractatus*, o desfecho de dois movimentos. O primeiro é o afastamento do conceito de função dos domínios da matemática. Na primeira Seção deste Capítulo, apresentou-se a incorporação, feita por Frege, da noção matemática de função para o restante da linguagem. Esta concepção, no entanto, levava a dificuldades para se explicar o privilégio do verdadeiro sobre o falso. A segunda Seção apresentou a inversão conceitual feita por Russell da noção de função. A função proposicional passa a ser primeira em relação à função matemática, que passa a ser, por sua vez, definida a partir de funções proposicionais, com o auxílio de relações que fazem uso do sinal de identidade. Por fim, o *Tractatus* mantém, em boa medida, o tratamento funcional da linguagem dotada de sentido†. A tese da bipolaridade implicará, no entanto, a eliminação do sinal de identidade da linguagem figurativa. Nesse sentido, será impossível derivar, tal como faz Russell, as funções matemáticas a partir de funções proposicionais, em particular a função de sucessor de um número, capaz de descrever o próximo número na série dos números naturais. Assim, se a aritmética se fundamenta a partir da noção de sequência e da relação necessária que um número mantém com seu sucessor, não é na noção de função que ela encontrará seu firmamento.

O segundo é a separação entre o que caracteriza o sentido de uma proposição e o que não caracteriza o sentido de uma proposição. Frege fazia das noções de função e argumento apenas o modo de apresentação de certo objeto. Deste modo, a complexidade da estrutura funcional não refletia necessariamente a complexidade do valor da função para um determinado argumento. Já para Russell, a função e o argumento deveriam encontrar lugar de modo essencial no valor que a função assumia para aquele argumento. A função proposicional russelliana caracteriza o sentido da proposição na medida em que caracteriza sua forma lógica. O argumento da função também caracteriza essencialmente o sentido da proposição, já que este é parte constituinte da própria proposição. Russell também concebia as constantes lógicas como casos particulares de funções proposicionais.

* *Tractatus*, aforismos 2.223-2.225.

† Com diferenças, no entanto, evidentes em relação a Frege e Russell. A principal delas é o fato de que, no *Tractatus*, todo nome é, também, uma função proposicional. Cf. João Vergílio **Gallerani Cuter**: A lógica do *Tractatus*, em: *Manuscrito*, XXV.1 (2002), p. 90.

Nesse sentido, o critério de identidade de duas proposições não era sua equivalência lógica, visto que duas proposições podiam muito bem ser logicamente equivalentes e possuir estruturas bastante diferentes. Se Russell foi levado a essa noção de função proposicional pelo fato de ela manter uma semelhança estrutural com a situação que ela apresenta (tornando assim ociosa a camada fregiana do "sentido"), o resultado obtido parece ser o inverso: se as proposições "p" e "$(q \vee \neg q) \cdot p$" – a segunda sendo mais complexa que a primeira – apresentam a *mesma* situação, então a complexidade da proposição não reflete a complexidade da situação apresentada. A única solução possível é reconhecer que são situações diferentes, o que leva necessariamente a uma reificação das constantes lógicas: são situações diferentes, pois os complexos que as proposições afirmam existir são diferentes. O que o *Tractatus* fará diante deste resultado inadmissível é separar as "funções materiais" – as quais caracterizam uma forma* e mantêm, assim como as funções de Russell, uma complexidade essencial à estrutura da sentença – das "funções de verdade" – que não são propriamente funções (algo essencialmente insaturado ou que denota de modo ambíguo, no vocabulário de Frege e Russell), mas *proposições* que resultam de *operações de verdade* sobre outras proposições†. Mantendo o critério de equivalência lógica como critério de identidade da proposição, o *Tractatus* será levado a reconhecer que as proposições "p", "$(q \vee \neg q) \cdot p$" e "$\neg\neg p$" são, na verdade, a mesma proposição (o mesmo "símbolo") e que, portanto, há, nesses casos, uma complexidade no sinal que não se reflete em uma complexidade proposicional. Essa disparidade entre sinal proposicional e situação apresentada pela proposição, *que ocorre mesmo em uma linguagem completamente analisada*, só pode ser entendida, no cenário do *Tractatus*, através da noção de operação.

A noção de operação recupera, em certa medida, a distinção entre sentido e referência quando aplicada a funções de verdade. Em relação a proposições que não fazem uso de conectivos lógicos, o *Tractatus* mantinha a ideia de que a complexidade do sinal proposicional, quando corretamente analisado, deve ser a mesma que a da situação apresentada e que cada sinal da figuração, uma vez feitas as devidas convenções, caracteriza essencialmente o sentido da proposição. Neste caso, Wittgenstein usa a letra da distinção fregiana apenas para se distanciar da concepção do filósofo alemão: só a proposição tem sentido e só o nome tem referência. Por outro lado, o que há de mais fundamental na distinção fregiana – a ideia de que um objeto pode ser dado de

*Os termos são, aqui, um tanto quanto capciosos: a operação – um expediente *formal* – "não assinala uma forma, mas apenas a diferença das formas" (aforismo 5.241 do *Tractatus*). Aquilo que assinala uma forma é precisamente a "função material".

†Cf. Elizabeth **Anscombe**: *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, New York: Harper & Row, 1959, p. 120: "(...) on Wittgenstein's view we must go further: a truth-function of propositions is not a function *of those propositions*; for it is the result of an *operation*, not a result of completing one expression with another; and a truth-argument is not the argument of a function, but the base on which an operation is performed".

diversos modos e, portanto, nenhum deles deve ser considerado como uma propriedade essencial deste objeto – encontrará abrigo nas funções de verdade. A *mesma* função de verdade poderá ser apresentada de diversos modos como o resultado de certas operações, e nenhum destes modos é essencial à função de verdade, nenhum deles caracteriza o sentido da função de verdade, da proposição. É necessário, no entanto, destacar duas diferenças em relação a Frege: *i)* não se trata de um *objeto* que é apresentado, e sim de uma *função de verdade*; *ii)* não se trata do modo pelo qual um objeto é *dado*, mas do modo pelo qual uma função de verdade é *construída* a partir de certas operações de verdade. Como ficará claro, é nessa distância mínima entre função de verdade e seu modo de apresentação que a noção de cálculo – e a aritmética a ela vinculada – se acomoda no arcabouço conceitual do *Tractatus*.

As constantes lógicas como operações

A pretensão do *Tractatus* é, de acordo com seu Prefácio, traçar um limite, na linguagem, para aquilo que pode ser expresso com sentido. Este limite é traçado na obra por meio da especificação da *forma geral da proposição.* Tudo aquilo que não se enquadra nesta forma[*] geral é desprovido de sentido. A forma geral da proposição é especificada em duas etapas: o aforismo 5 sustentará que a proposição é uma função de verdade de proposições elementares. Para os propósitos desta Seção, é suficiente caracterizar a proposição elementar como sendo aquela na qual não ocorre – ao menos não de modo essencial – nenhuma constante lógica. Uma vez concretizado o vínculo entre proposição e função de verdade de proposições elementares, restará ao aforismo 6 revelar a forma geral da função de verdade, completando, assim, a apresentação da forma geral da proposição. É na ramificação do aforismo 5 que a noção de operação será introduzida e pormenorizada. Não se trata de algo surpreendente, já que o elo entre proposição e função de verdade deve ser feito a partir de um esclarecimento do que é uma função de verdade. Um pouco depois de caracterizar a operação como "o que deve acontecer com uma proposição para que dela se faça outra"[†], Wittgenstein afirma que "as funções de verdade de proposições elementares são resultados de operações que têm as proposições elementares como bases"[‡]. Estas operações são chamadas de *operações de verdade.*

O aforismo 5.2341 caracteriza explicitamente os conectivos lógicos como operações. A negação, em particular, é a operação que inverte o sentido da proposição. A tese da bipolaridade implicava a existência, na proposição, de dois polos, um dos quais era privilegiado pela proposição em detrimento do outro. A negação é exatamente a

[*]Ver-se-á, adiante, que o termo "forma" é usado, neste contexto, de modo bastante distinto de quando usado, por exemplo, para se referir à forma lógica de uma figuração.

[†]*Tractatus*, aforismo 5.23.

[‡]Ibid., aforismo 5.234.

operação que altera este privilégio de um dos polos, passando-o para o outro. Que a negação não seja uma função, isto já se podia deduzir do aforismo 4.0621, em que Wittgenstein chama a atenção para o fato de que a ocorrência da negação em uma proposição não chega a ser uma característica de seu sentido (já que $\neg\neg p = p$). No grupo de aforismos que tratam da noção de operação, essa particularidade de não caracterizar o sentido de uma proposição é generalizada para toda e qualquer operação*. Dizer que uma operação não caracteriza o sentido de uma proposição significa afirmar, como dito anteriormente, que a operação não é essencial para apresentar a situação que a proposição diz ser o caso, que outras operações poderiam fazer a mesma tarefa. Embora uma função de verdade seja essencialmente o resultado de operações de verdade sobre proposições elementares, ela não é essencialmente o resultado de um grupo determinado de operações de verdade que caracterizaria toda e qualquer apresentação da função de verdade em questão.

A negação e, em geral, as operações de verdade podem ser apresentadas por meio de tabelas de verdade. Essas tabelas apresentam a relação formal existente entre os polos de verdade das bases da operação e os polos de verdade do resultado da aplicação da operação. O modo pelo qual elas transformam uma base em seu resultado é o mesmo, e isto configura sua *unidade*. Não é preciso, como Russell, ramificar as constantes lógicas: o *Tractatus* dá conta da unidade da linguagem, i.e., daquilo que todas as proposições têm em comum, sem a necessidade de mencionar uma *propriedade* comum a elas – o que tornaria tal totalidade contingente, acidental –, mas por meio da especificação de um *traço* comum a elas, o qual, sendo uma propriedade essencial da proposição, não é capaz de ser afigurado proposicionalmente. Em posse desta unidade, a aplicação das constantes lógicas é feita de modo uniforme, sem a necessidade de se preocupar com uma hierarquia de ordens de proposições†.

Uma vez realizado o vínculo da proposição e da função de verdade de proposições elementares, resta ao aforismo 6 do *Tractatus* especificar a forma geral da função de verdade: "A forma geral da função de verdade é $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$. Isso é a forma geral da proposição". Isso diz apenas, continua Wittgenstein, que "toda proposição é um resultado da aplicação sucessiva da operação $N(\bar{\xi})$ às proposições elementares". Para compreender a notação apresentada no aforismo 6, é preciso entender primeiramente a

*Ibid., aforismo 5.25.

†Enquanto funções de verdade de proposições elementares, as proposições formam uma única "ordem", independentemente de como esta função de verdade é obtida por meio da aplicação de operações a certas totalidades e de quais variáveis aparentes ocorrem no escopo de quantificadores. Ramsey utilizará este argumento para sustentar que a diferença que Russell traça entre proposições *elementares* (no caso de Russell, trata-se de proposições sem variáveis aparentes) e *não elementares* (i.e., quantificadas) é apenas uma diferença no modo de expressão da proposição, e não algo que a caracteriza essencialmente. Cf. Frank Plumpton **Ramsey**: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931, p. 35. Cf. tb. Peter M. **Sullivan**: The Totality of Facts, em: *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 100, 2000, p. 188.

notação com colchetes – [, ,] –, para, em seguida, entender os símbolos que aparecem nas três posições separadas por vírgulas no interior dos colchetes. O *Tractatus* faz dois usos essencialmente distintos da notação com colchetes. No primeiro uso, o termo que ocupa a segunda posição entre os colchetes é denotado por um sinal sem uma barra sobre ele, e este sinal indica um termo qualquer de uma série formal. Já o termo que ocupa a terceira posição indica a operação por meio da qual se obtém o próximo termo na série a partir do termo arbitrário alocado na segunda posição. Neste uso, a notação com colchetes dá origem a uma *série formal*, e a cada posição desta série corresponde um termo determinado apenas pela base (indicada na primeira posição entre os colchetes) e a operação. No segundo uso, o termo que ocupa a segunda posição entre os colchetes é denotado por um sinal com uma barra sobre ele, indicando que se trata de uma variável cujos valores são tomados ou da própria base, ou de resultados anteriormente obtidos pela aplicação da operação. Consequentemente, os valores gerados pela operação não dependem apenas da base, mas também da descrição da variável, i.e., da determinação de seus valores*. Trata-se, assim como no primeiro caso, da apresentação de uma totalidade determinada. No entanto, este último caso não engendra uma série†.

No caso da forma geral da proposição, trata-se do segundo uso discriminado acima da notação dos colchetes. Na primeira posição, encontra-se uma variável que abrange a totalidade das proposições elementares. Na terceira posição, encontra-se a operação $N(\overline{\xi})$. O resultado desta operação é a negação simultânea de todas as proposições descritas pela variável que ocorre na segunda posição entre colchetes. Por exemplo, se a variável é descrita de modo que os valores proposicionais "Isto é verde" e "Isto é vermelho" sejam selecionados, o resultado da operação será a proposição "Isto não é nem verde nem vermelho". O aforismo 6 do *Tractatus* enuncia simplesmente que toda função de verdade de proposições elementares pode ser obtida por meio da aplicação repetida da operação $N(\overline{\xi})$ a uma totalidade de valores selecionados a partir das proposições elementares e de resultados anteriores de sua aplicação. Nenhuma outra operação é necessária para se *construir*‡ a totalidade de funções de verdade. A tentação aqui é de dizer que as outras operações podem ser *reduzidas* à operação de negação simultânea e isto é em parte correto, em parte incorreto. Tome, por exemplo, as seguintes equivalências:

$$p \supset q = N(N(N(p,p),q),N(N(p,p),q))$$

*O *Tractatus* menciona três maneiras de se determinar os valores de uma variável proposicional: *i)* enumeração direta; *ii)* especificação de uma função material fx; *iii)* especificação de uma série formal. (aforismo 5.501).

†Para uma apresentação bastante didática da diferença entre esses dois usos da notação com colchetes, Cf. **Gallerani Cuter**: Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*.

‡Embora outras operações possam ser necessárias para *descrever* a variável à qual será aplicada a operação de negação simultânea. Cf. ibid., p. 70.

$p \cdot q = N(N(p,p), N(q,q))$
$p \vee q = N(N(p,q), N(p,q))$
$p \equiv q = N(N(p, N(p,q)), N(q, N(p,q)))$

Em cada caso acima, é correto dizer que a sequência de operações à direita do sinal de igualdade produz o mesmo resultado que a operação à esquerda. O que é incorreto dizer é que a operação à esquerda é necessariamente uma *abreviação* da sequência de operações à direita. Evidententemente, nada impede de tomá-las como abreviações. No entanto, elas não *precisam* ser concebidas deste modo; elas sempre podem ser entendidas como sendo, de fato, *uma* operação, cuja aplicação permite transformar, de um só golpe, certas proposições em outras. Isso equivale a dizer que é possível "compor" operações a partir de outras. No *Tractatus*, esta possibilidade de composição de operações é expressa no aforismo 5.3, que assevera que "o resultado de toda operação de verdade com os resultados de operações de verdade com proposições elementares é, por sua vez, o resultado de *uma* operação de verdade com proposições elementares". Nesse sentido, as equivalências acima podem ser concebidas como a definição de operações compostas a partir de outras mais simples, mantendo-se a ideia de que cada uma delas é uma operação *unitária*, e não uma abreviação para uma sequência de operações. Essa concepção provoca certa ambiguidade nas expressões em que ocorrem múltiplas operações. Considere, por exemplo, a expressão "$\neg\neg p$". Esta expressão pode simbolizar: *i)* a dupla aplicação da operação de negação ou *ii)* a composição da operação de negação com ela própria (que seria, na verdade, a operação que não faz nada com a proposição e, nesse sentido, seria o mesmo que a ausência de operação). No primeiro caso, a segunda aplicação da operação de negação cancelaria o efeito da primeira. No segundo caso, a operação simplesmente desapareceria. Essa ambiguidade, entretanto, pode ser facilmente removida segundo uma convenção arbitrária. O que é importante reter é a possibilidade das operações anularem o efeito de outras[*] e de desaparecerem[†], algo que nunca ocorre no caso de uma função material.

A possibilidade de se apresentar a mesma função de verdade de diversos modos é tomada por Wittgenstein como uma evidência para sua ideia fundamental[‡] de que não há "objetos lógicos" ou "constantes lógicas", i.e., que as constantes lógicas não se referem a nada. Pois, segundo as palavras do autor, "são idênticos os resultados de operações de verdade com funções de verdade que sejam todos uma única e mesma função de verdade de proposições elementares"[§]. Com efeito, se as constantes lógicas tivessem um papel essencial na *estrutura* da proposição (como teriam se denotassem

[*] *Tractatus*, aforismo 5.253.
[†] Ibid., aforismo 5.254.
[‡] Ibid., Cf. aforismo 4.0312.
[§] Ibid., aforismo 5.41.

objetos lógicos), necessariamente as proposições "p" e "$(q \vee \neg q) \cdot p$" deveriam figurar situações distintas. E dever-se-ia seguir necessariamente de um fato p uma infinidade de outros: $\neg\neg p$, $\neg\neg\neg\neg p$, e assim por diante*. Aos olhos de Wittgenstein, esse resultado configurava uma *reductio ad absurdum* da ideia de que as constantes lógicas se referem a "objetos lógicos".

A noção de cálculo

Ao fazer das operações de verdade *modos de apresentação* de funções de verdade, o *Tractatus* resolve o problema de como as proposições "p" e "$\neg\neg p$" dizem o mesmo. A distância entre a *aplicação* de uma função de verdade e o seu *resultado* cria, no entanto, um problema notacional: o sinal "$\neg p$" simbolizaria a aplicação de negação a "p" ou o resultado de tal aplicação? Ambas as alternativas são problemáticas: a primeira, pois, neste caso, o que seria simbolizado é a aplicação de uma operação que, enquanto tal, não enuncia nada, apenas seu resultado o faz†. Neste caso, "$\neg p$" não seria um sinal proposicional. A segunda alternativa‡, por sua vez, se presta a confusões, já que uma das mais importantes consequências da concepção wittgensteiniana das constantes lógicas é precisamente o fato de elas não deixarem traço algum nos seus resultados§, pois, caso contrário, elas os caracterizariam de modo essencial. Nesse sentido, ler o sinal "$\neg p$" como sendo o "resultado" da aplicação de negação pode dar a falsa impressão de que tal resultado é essencialmente negativo.

O problema desaparece caso a proposição seja simbolizada juntamente com seus polos de verdade. Neste caso, há uma distinção simbólica entre a base da operação – (VF)(p) –, a aplicação da operação – $\neg$(VF)(p) – e o resultado da operação – (FV)(p). Esta notação é preferível, pois ela mantém separadas a simbolização da aplicação da operação e a simbolização de seu resultado. Em geral, é desejável que uma notação para apresentar o resultado de certas operações possua duas características: *i)* nela não deve haver signos para operações; *ii)* ela deve possuir um sinal distinto para cada resultado possível da aplicação de tais operações. Essas duas características se tornam imediatamente justificadas ao se observar o simbolismo usual da aritmética: seria frustrante para alguém que, esperando pelo resultado de "$2 + 2$", obtivesse como resposta a expressão "$\frac{8+28}{1+2+6}$". A resposta que se espera é obviamente "4", sinal este que já não contém nenhum outro que se refira a uma operação. A segunda característica

* *Tractatus*, aforismo 5.43.

† Ibid., aforismo 5.25.

‡ Tal alternativa é escolhida por Frascolla, ao afirmar que os conectivos lógicos são usados no *Tractatus* para representar linguisticamente o resultado de operações de verdade. Cf. **Frascolla**: Il Tractatus Logico-Philosophicus di Wittgenstein, p. 171.

§ Cf. Jean-Philippe **Narboux**: Négation et totalité dans le *Tractatus* de Wittgenstein, em: *Lire le Tractatus logico-philosophicus de Wittgenstein*, Paris: Vrin, 2009, p. 127.

também é encontrada no sistema decimal da aritmética. Neste sistema, cada resultado possível de uma operação aritmética é simbolizado por um sinal distinto. Sinais distintos implicam resultados distintos. É importante ressaltar que, embora seja conveniente o estabelecimento de uma notação com tais características para se expressar o resultado de um conjunto de operações, esta notação não é fundamental para o uso do simbolismo. Poder-se-ia muito bem trabalhar com sinais para operações juntamente com algumas regras de manipulação, desde que fique claro que a ocorrência da operação não é essencial ao seu resultado. Um exemplo disto é a partitura musical, em que a presença de sinais operacionais como $\flat$, $\natural$, $\sharp$ não torna a notação menos apta a expressar uma música. Claro está, no entanto, que seria possível escolher outro simbolismo em que cada nota musical fosse expressa por um signo distinto, sem a necessidade de se recorrer a tais acidentes notacionais. Em outros casos, porém, é impossível o estabelecimento de uma notação que evite o recurso a operações. No caso dos números reais, por exemplo, não se pode escolher um sinal finito distinto para cada resultado possível de operações com outros números reais. O mesmo acontece com as funções de verdade, no caso de haver uma infinidade de proposições elementares. Nestes casos, é preciso se contentar com a expressão dos resultados por meio de operações, como acontece na pauta musical.

Para melhor compreender o funcionamento das operações de verdade, cada função de verdade será representada por meio de uma coluna da tabela de verdade abaixo, considerando-se o caso em que há apenas duas proposições elementares*.

p	q	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}
V	**V**	V	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	**V**	V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	**F**	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	**F**	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	F

Neste caso, as duas características mencionadas acima são contempladas: a função de verdade não contém nenhum sinal que indica uma operação† e cada uma das 16 funções de verdade é expressa por um sinal distinto. Para simplificar a exposição, a cada função de verdade é associado um sinal "p_i", em que i representa o índice da coluna correspondente à função de verdade.

Neste simbolismo, fica claro que os conectivos lógicos são, na verdade, operações de verdade cuja base e resultado são funções de verdade. Seguem-se alguns exemplos

*Neste caso, as dificuldades acima mencionadas evidentemente desaparecem.

†A própria tabela, porém, é claramente o produto de certas operações. De fato, já que cada função de verdade é o resultado de operações de verdade. É fácil perceber que as tabelas de verdade têm a mesma multiplicidade da forma normal disjuntiva da lógica de Boole. A vantagem da tabela de verdade é que a função de verdade, apresentada na coluna da tabela, não contém rastros simbólicos destas operações.

do uso de conectivos lógicos e seus respectivos resultados:

$\neg p_3 = p_{14}$
$p_8 \supset p_{13} = p_3$
$p_4 \cdot p_7 = p_7$
$p_6 \vee p_{11} = p_1$
$p_2 \equiv p_{10} = p_{13}$

Evidentemente, os termos à direita da equação – *resultados* da aplicação das constantes lógicas – devem ser *calculados*. A condição de possibilidade do cálculo é exatamente o fato de que a simbolização da aplicação de uma operação não pressupõe a simbolização do resultado de tal aplicação. Isto ocorre, por sua vez, devido ao caráter de *ato* da operação, e a consequência inevitável da simbolização "estática" da operação em signos notacionais é o surgimento de uma distância entre o estado anterior à aplicação da operação e o estado posterior a sua aplicação. Quanto mais operações estão expressas em um sinal proposicional, maior é esta distância entre modo de apresentação e proposição apresentada. A atividade que é essencial para compreender o elo entre um "objeto" e seu modo de apresentação e que procura constantemente suprimir este hiato criado pelo simbolismo é precisamente o *cálculo*.

É só no contexto de um cálculo que as proposições da lógica – caracterizadas pelo *Tractatus* como "tautologias"[*] – possuem alguma utilidade. A "teoria da inferência" do *Tractatus* deixa claro que, em uma notação conveniente, é possível reconhecer quando a verdade de uma proposição se segue da verdade de outra apenas pela inspeção de tais proposições. Um exemplo de tal notação é a tabela de verdade acima. Nela, cada linha representa uma combinação dos valores de verdade de proposições elementares. O sentido de uma função de verdade de proposições elementares é completamente determinado quando são determinadas quais destas combinações a tornam verdadeira. Wittgenstein chama estas combinações que verificam uma proposição de *fundamentos de verdade* desta proposição. A verdade de uma proposição se segue da verdade de outra se todos os fundamentos de verdade desta são fundamentos de verdade daquela[†]. Deste modo, se p se segue de q, o sentido de "p" está contido no sentido de "q"[‡]. Agora, se p se segue de q, é possível inferir p de q; deduzir p de q[§].

Assim, na tabela acima, é possível visualizar imediatamente quando uma proposição se segue da outra por meio da comparação de seus fundamentos de verdade (*e.g.*, p_5 se segue de p_8, pois todos os fundamentos de verdade de p_8 são também fundamentos

[*] *Tractatus*, aforismo 6.1.
[†] Ibid., aforismo 5.12.
[‡] Ibid., aforismo 5.122.
[§] Ibid., aforismo 5.132.

de verdade de p_5). A inferência ocorre, então, quando a premissa diz "mais" – ou pelo menos o mesmo – que a conclusão. Deste modo, a inferência se caracteriza por uma diminuição – ou, no máximo, uma identidade – do sentido, i.e., o sentido da conclusão é sempre menor ou igual ao sentido da premissa* (suas condições de verdade são menores ou equivalentes). Como fica claro, a tautologia, que é denotada pela proposição p_1 na tabela acima, não entremeia a inferência.

Se as proposições da lógica têm algum papel no processo de inferência, este papel é desempenhado exatamente quando elas são apresentadas como sendo o resultado da aplicação de certas operações. A propósito, é apenas o modo de apresentação por meio de operações que legitima falar de "tautologias" no plural, pois é apenas ele que introduz uma distinção no modo pelo qual a tautologia – esta, a única – é construída. Dependendo do modo pelo qual certas operações de verdade são aplicadas a certas bases, o resultado é, independente do valor de verdade das bases, verdadeiro. Neste caso, sabe-se que a proposição resultante é uma tautologia, uma "proposição da lógica". É neste momento que é possível reconhecer a utilidade das tautologias para a inferência: "Que as proposições '$p \supset q$', 'p' e 'q', ligadas entre si na forma '$(p \supset q) \cdot (p) :\supset: (q)$', resultem numa tautologia mostra que q se segue de p e $p \supset q$"†. Outro exemplo é o de uma proposição tautológica da forma "$p \equiv q$". Se se trata de uma tautologia, isto mostra que p e q têm o mesmo sentido e que, portanto, pode-se substituir p por q (inferir p de q e vice-versa) *salva veritate* em qualquer outra proposição. Evidentemente, esta regra de substituição é inútil caso p e q expressem o mesmo modo de construção de uma proposição (*e.g.*, "$p \supset q. \equiv .p \supset q$"); ela se torna, no entanto, útil quando a mesma proposição é construída de maneiras distintas (e.g. "$\neg : \neg p. \vee .\neg p :\equiv: q \supset p : \neg q \supset p$").

Deste modo, tautologias revelam, em geral, esquemas de inferência que dependem apenas do modo pelo qual as premissas e as conclusões do argumento são construídas por meio de operações de verdade. O fato de serem tautologias revela certas propriedades estruturais das proposições envolvidas, propriedades que poderiam ser visualizadas ao se calcular o resultado das operações de modo que a apresentação seja traduzida para uma notação conveniente. O reconhecimento de uma tautologia apenas dispensa a tarefa de realizar este cálculo toda vez que se depara com um argumento de certa forma. A constatação de que se trata de um argumento desta forma e de que certa proposição é uma tautologia nos poupa da tarefa de esmiuçar o argumento: reconhecemo-lo válido de imediato.

A noção de cálculo também é fundamental para compreender a diferença entre, de um lado, lógica e matemática e, de outro, as ciências naturais. Um dos pontos centrais

*Em geral, uma inferência possui mais de uma premissa. Este conjunto de premissas pode, entretanto, ser sempre reduzido a uma única premissa cujo sentido é formado pelo produto lógico daquelas proposições que fazem parte do conjunto de premissas.

†Ibid., aforismo 6.1201.

que perpassa toda a obra de Wittgenstein é a ideia – explicitada no aforismo 6.2331 do *Tractatus* – de que o cálculo não é um experimento. No *Tractatus*, isto equivale a dizer que o resultado de uma operação não é causal. Fazer do efeito de uma operação o efeito de uma causa empírica implicaria torná-lo contingente. Implicaria também separar resultado e processo de calcular: o resultado seria algo novo, que se obteve por meio de tais e tais processos vinculados por uma conexão causal. Além disso, equações que expressam o resultado da aplicação de certas operações poderiam ser asseridas com sentido, caso o cálculo fosse um experimento. O que é fundamental na recusa da identificação entre cálculo e experimento é a ideia, expressa pelo aforismo 6.1261, de que, na lógica, processo e resultado são equivalentes. Ao obter conhecimento do processo e das condições das quais se partiu, o resultado é completamente determinado. Isso explica por que o erro, em um cálculo, é bastante distinto do erro em um experimento. Em um experimento, as condições segundo as quais se avalia se um experimento foi conduzido da forma correta ou incorreta são (ou pelo menos deveriam ser) independentes do resultado do experimento. No caso de um cálculo, o resultado serve como *critério* para o erro: se o resultado obtido é outro, isto significa que o processo não foi conduzido de modo adequado. É nesse sentido que se pode afirmar que, no cálculo, há uma relação interna entre processo e resultado, entre os momentos anterior e posterior à aplicação de uma operação.

Não se tratando de um experimento, a conexão entre a aplicação de uma operação e o resultado do cálculo, frequentemente indicado por meio de uma equação, não pode ser asserida proposicionalmente. No caso das proposições da lógica, o fato de elas serem tautologias não pode ser asserido com sentido: cabe ao cálculo *mostrar* que se trata de tautologias. O método propriamente matemático, porém, consiste em trabalhar com equações por meio de substituições. O *Tractatus* não se furta a extrair o corolário de que as proposições da matemática são, por conseguinte, pseudoproposições*.

O número como o expoente de uma operação

O aforismo 6.02 do *Tractatus* contém uma série de regras notacionais que introduzem o número como o expoente de uma operação:

> E *assim* chegamos aos números: defino
>
> $$x = \Omega^{0}\text{'}\, x \text{ Def.}$$
>
> $$\text{e } \Omega\text{'}\ \Omega^{\nu}\text{'}\, x = \Omega^{\nu+1}\text{'}\, x \text{ Def.}$$
>
> Segundo essas regras notacionais, escrevemos, pois, a série
>
> $$x, \Omega\text{'}\, x, \Omega\text{'}\ \Omega\text{'}\, x, \Omega\text{'}\ \Omega\text{'}\ \Omega\text{'}\, x, \ldots,$$

* *Tractatus*, aforismo 6.2.

assim: $\Omega^{0}{}' x, \Omega^{0+1}{}' x, \Omega^{0+1+1}{}' x, \Omega^{0+1+1+1}{}' x, ...$
Portanto, ao invés de "$[x, \xi, \Omega' \xi]$", escrevo:

$$\text{“}[\Omega^{0}{}' x, \Omega^{\nu}{}' x, \Omega^{\nu+1}{}' x]\text{”}.$$

E defino:

$$\begin{aligned}0+1 &= 1 \text{ Def.},\\ 0+1+1 &= 2 \text{ Def.},\\ 0+1+1+1 &= 3 \text{ Def.},\\ &(\text{etc.})\end{aligned}$$

O signo "Ω" é utilizado por Wittgenstein para denotar uma operação qualquer. O aforismo anterior havia apresentado a forma geral da operação por meio da noção de aplicação repetida da operação de negação simultânea. Trata-se de uma definição adequada para abranger a totalidade das operações de verdade, já que o resultado de toda operação de verdade pode ser também obtido por meio de sucessivas aplicações da operação $N(\bar{\xi})$*. O *Tractatus* parecia admitir, no entanto, outras operações que não são operações de verdade. Tome, como exemplo, a série de proposições "aRb", "$(\exists x) : aRx \cdot xRb$", "$(\exists x, y) : aRx \cdot xRy \cdot yRb$" etc. Esta sequência de proposições é, segundo o aforismo 4.1273, uma série formal, cujo termo geral pode ser determinado especificando-se o primeiro termo da série e a operação que gera o termo seguinte. O resultado desta operação, no entanto, não pode ser reproduzido pela sucessiva aplicação da operação $N(\bar{\xi})$. Seria, então, o número, definido como o expoente de uma operação, também aplicável a esses casos? Abrem-se duas possibilidades de interpretação: *i)* ou o signo "Ω" nos aforismos 6.01 e 6.02 é usado do mesmo modo em cada um destes aforismos e, portanto, o número só pode ser aplicado a operações de verdade; *ii)* ou abre-se a possibilidade do número ser aplicado a uma operação qualquer† e, neste caso, deve-se reconhecer que o autor do *Tractatus* foi um tanto quanto infeliz ao usar o mesmo sinal para usos distintos.

Além da série acima mencionada, a série clássica usada pela estratégia adjetivista de definição dos números também se enquadra neste caso: nenhuma operação de verdade pode engendrar a série "$\neg(\exists x)\phi x$", "$(\exists x)\varphi x \cdot \neg(\exists x, y)\varphi y \cdot \varphi y$", "$(\exists x, y)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \neg(\exists x, y, z)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \varphi z$" etc., a qual se poderia abreviar como "$(E0_x)\varphi x$", "$(E0 + 1_x)\varphi x$", "$(E0 + 1 + 1_x)\varphi x$" etc. O *Tractatus*, no entanto, não definirá o número deste modo, já que, para Wittgenstein, a aplicação do número é mais geral. De todo modo, seria bastante surpreendente se o número, tal como definido no *Tractatus*, não contemplasse talvez o caso mais elementar de sua aplicação. Por esse motivo, a segunda alternativa discriminada acima parece mais razoável.

*__Frascolla__: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, p. 2.

†Alternativa adotada por Gallerani Cuter no artigo **Gallerani Cuter**: Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*.

A partir da identificação do número como o expoente de uma operação, é possível extrair algumas consequências. Em primeiro lugar, assim como uma operação, o número não assinala uma forma, mas apenas a diferença de formas. Aqui será importante distinguir dois usos essencialmente distintos que o *Tractatus* faz do termo "forma". Quando se trata da forma lógica ou da forma de uma afiguração, o termo "forma" é usado para denotar a possibilidade que os elementos constituintes de certo fato possuem de se combinarem uns com os outros. Vale lembrar que a forma de uma figuração é completamente determinada pela forma de seus elementos constituintes: estes são, segundo o *Tractatus*, forma e conteúdo. O componente propriamente lógico-formal de uma figuração é ressaltado quando todos os seus elementos constituintes são transformados em variáveis. Quando isto acontece, há uma classe de proposições que, pela comunidade de forma lógica, são agrupadas pela variável proposicional. Evidentemente, também é possível transformar apenas parte da proposição em variável. Neste caso, a parte que não foi transformada em variável é a marca característica comum de uma classe de proposições. Ao se estabelecer uma variável deste modo, uma classe de proposições é selecionada por meio de uma *forma* comum. Por outro lado, o termo "forma" também é usado como parte das expressões "forma geral da proposição", "forma geral do número" etc. Aqui, o termo "forma" não pode ser entendido do mesmo modo. A forma geral da proposição é dada por meio da especificação de uma base e de uma operação. Mas a operação, como já dito, não assinala uma forma, mas apenas a *diferença* de formas. Nesse sentido, sob a forma geral da proposição repousam proposições de formas lógicas inteiramente distintas. Isto, no entanto, não configura, aos olhos de Wittgenstein, uma projeção de formas lógicas completamente distintas em uma única forma, *precisamente porque o termo "forma" é entendido de modo distinto em ambos os casos*. Quando, em seu período intermediário, Wittgenstein acusa Frege e Russell de projetarem, em uma única forma, proposições de forma lógica inteiramente distintas, é porque, neste caso, o termo "forma" é entendido do mesmo modo. Ora, se assim for, então em que sentido se deve entender o termo "forma" em seu segundo uso acima discriminado? Este segundo uso, como se pode perceber, é sempre acompanhado do termo "geral". Tal generalidade, entretanto, não é a generalidade obtida por meio de uma forma comum, não se trata de uma generalidade que uma classe de proposições poderia expressar devido a uma similaridade entre suas formas lógicas. Esta generalidade é caracterizada precisamente pela especificação de um modo comum e unitário de se construir as proposições que caem sob esta generalidade. *Nesse* sentido de "forma", é claro que a operação, juntamente com uma base, assinala uma forma. Quando Wittgenstein afirma que a operação não assinala uma forma, é o primeiro sentido de forma que deve ser entendido. *Neste* sentido, a ideia de que a operação não assinala uma forma pode ser parafraseada do seguinte modo: uma operação não constitui, de modo algum, a marca característica comum de uma classe de proposições.

Deste modo, no caso da "forma lógica", a forma se refere a uma possibilidade de combinação contingente de objetos. No caso da "forma geral", trata-se da possibilidade de uma construção unitária a partir de uma base e uma operação. À unidade de uma forma geral, Wittgenstein dá o nome de *sistema*. Na primeira Seção deste Capítulo, vimos que, ao projeto fregiano de unificação da lógica e da aritmética, impunha-se uma dupla tarefa. De um lado, a generalização do tratamento funcional à totalidade do âmbito do pensamento. De outro lado, a formalização dos instrumentos que a linguagem comum dispunha para expressar juízos gerais a fim de tornar rigoroso o uso matemático desses instrumentos. A primeira tarefa, à luz do movimento feito neste Capítulo, desembocou, no *Tractatus*, no tratamento funcional da proposição dotada de sentido e na incapacidade de se aplicar o mesmo tratamento no caso da matemática. Este resultado, no entanto, bloqueia a via da segunda tarefa fregiana: se na matemática não há função e argumento no mesmo sentido que na linguagem figurativa, também não há uma generalidade – a mesma que tornava interessante a análise em termos de função e argumento – que possa fazer uso deste aparato. A generalidade propriamente matemática só pode ser, portanto, a generalidade de uma *forma geral*, de um *sistema*.

A segunda consequência que é possível extrair do elo interno entre número e operação é o fato de que o número, assim como uma operação, não é uma característica do sentido de uma proposição, mas apenas de seu *modo de apresentação*. Quando se diz: "Há 4 livros sobre a mesa" ou, em uma expressão mais próxima da análise completa desta proposição, "$(\exists x, y, z, w)\varphi x{\cdot}\varphi y{\cdot}\varphi z{\cdot}\varphi w$", o número, enquanto expoente de uma operação, não ocorre de modo essencial na proposição. Seria, evidentemente, possível expressar a mesma proposição como o resultado da aplicação sucessiva da operação que engendra a série "$\neg(\exists x)\phi x$", "$(\exists x)\varphi x \cdot \neg(\exists x, y)\varphi y \cdot \varphi y$", "$(\exists x, y)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \neg(\exists x, y, z)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \varphi z$" etc. Designando esta operação pelo signo "✚", a proposição em questão seria expressa por "$✚^{4}\neg(\exists x)\phi x$". Mas seria perfeitamente possível usar, por exemplo, o número 2 para apresentar a mesma proposição como "$✚^{2}(\exists x, y)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \neg(\exists x, y, z)\varphi y \cdot \varphi y \cdot \varphi z$". Escolhendo-se adequadamente uma operação e uma base, é possível apresentar a *mesma* proposição com a ajuda de qualquer número*. Por conseguinte, o número não é um componente essencial do sentido da proposição.

As duas consequências acima são, na verdade, corolários distintos do mesmo princípio fundamental, a saber, o da distinção entre função e operação. Quando, a partir da mudança na caracterização do número que ocorre no período intermediário

*É precisamente esta característica do modo de apresentação por números, em que a mesma proposição pode ocupar posições distintas em *sistemas* distintos, que interessa a Ferraz Neto quando este, ao procurar explicar a existência de mecânicas *alternativas* e, ao mesmo tempo, *a priori*, avança a hipótese de que a mecânica, no *Tractatus*, seria um modo de "ordenar" proposições em uma série formal. Cf. Bento Prado de Almeida **Ferraz Neto**: O estatuto *a priori* da Mecânica no *Tractatus*, em: *Cadernos de História e Filosofia da Ciência (UNICAMP)*, 17 (2007), pp. 91–108.

do pensamento de Wittgenstein, tais consequências não puderem mais ser extraídas, é evidente que a geografia conceitual, traçada com os contornos desta distinção, deve necessariamente sofrer mudanças. A tarefa do próximo capítulo se desdobra, portanto, em três partes. Em primeiro lugar, é preciso compreender os motivos que levaram Wittgenstein a uma nova caracterização do número. Em segundo lugar, faz-se necessária uma apresentação detalhada desta nova caracterização. Por fim, é importante destacar as consequências desta nova concepção da aritmética.

CAPÍTULO 2

A aritmética das *Philosophische Bemerkungen*

> A atividade matemática é objeto de análise e possui uma essência; porém, tal como um odor ou um som, ela é ela mesma.
>
> Jean Cavaillès, *Mathématiques et formalisme*

A aritmética é o tema central dos capítulos *X* e *XI* das *PhBm*. Antes de esmiuçar alguns tópicos centrais destes capítulos, convém antecipar que eles trazem uma caracterização do número e da aritmética assaz destoante em relação ao *Tractatus*. Vinculado a uma operação, o número tractariano não caracterizava o sentido de uma proposição. Já nas *PhBm*, todo o esforço é voltado para se estabelecer uma concepção do conceito de número em que este aparece como característica de uma forma proposicional e, portanto, do sentido de uma proposição. Veremos, no entanto, que algo de tractariano está presente na nova concepção, a saber, a possibilidade de aplicar o número a diferentes formas proposicionais, e não apenas à forma conceito/objeto, como era o caso das teorias de Frege e Russell.

Para delinear essa mudança na caracterização do número (natural), será preciso partir do fato – amplamente conhecido – de que, em 1929, Wittgenstein reconhece a necessidade de introduzir números (racionais e reais) diretamente na estrutura das proposições elementares[*]. Não é que o número cumpra a função de denotar um objeto no sentido tractariano: a ideia de que não há objetos lógicos é mantida a todo custo. Entretanto, o número, juntamente com um sistema de coordenadas e uma unidade escolhidos arbitrariamente, auxilia na determinação de coordenadas de um espaço (cromático, visual etc.), e as relações internas entre números passam a simbolizar relações internas entre coordenadas deste espaço. Uma vez escolhidos o sistema de coordenadas e o "comprimento" unitário, o número caracteriza o sentido de toda proposição que faz uso deste sistema. Poder-se-ia pensar que a arbitrariedade da escolha

[*] Cf. Ludwig **Wittgenstein**: Some Remarks on Logical Form, em: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 9 (1929) (doravante citado como *SRLF*), p. 165.

do sistema de coordenadas e da unidade reintroduziria a distinção entre uma proposição e seu modo de apresentação: a *mesma* região de um espaço poderia ser apresentada por meio de números distintos – em sistemas de coordenadas ou comprimentos unitários distintos – e, portanto, o número caracterizaria apenas o *modo de apresentação* da proposição, e não o seu sentido. Isto, porém, seria confundir a arbitrariedade que existe entre um signo e aquilo que é por ele denotado com os diversos modos possíveis pelos quais uma proposição é construída. O elo que existe entre um sistema de coordenadas e o espaço por ele apresentado não é o elo interno existente entre um modo de construção e aquilo que é construído. A arbitrariedade da escolha de um sistema de coordenadas é semelhante à arbitrariedade de um sinal que funciona como nome: há diversos sinais que cumpririam a mesma função e, no entanto, a partir da instituição da relação nome/nomeado, o sinal passa a caracterizar essencialmente o sentido de uma proposição que o utiliza para afirmar algo sobre o objeto nomeado.

A hipótese de leitura que será utilizada no decorrer deste Capítulo é a de que a "descoberta" deste papel do número (racional e real), *viz.* como componente da proposição elementar*, provoca também uma mudança na caracterização do número natural, de modo a torná-lo uma característica do sentido proposicional. Daí a revogação do privilégio que a concepção *ordinal* de número gozava à época do *Tractatus*; trata-se, agora, de estabelecer uma concepção *cardinal* do número – e da aritmética a ele vinculada – que não esteja mais subjugada à concepção ordinal.

Os manuscritos de 1929 fornecem alguns elementos que apontam para a correção desta hipótese. Em primeiro lugar, nas páginas 6-7 do *WAi*, há um movimento bastante rápido em que Wittgenstein parte de uma consideração sobre a apresentação de um espaço qualquer – tarefa que envolve presumidamente a aplicação de números *racionais* e *reais* – e decide, por fim, voltar, contra sua vontade, à aritmética de números *naturais*†. Em segundo lugar, há, por volta da página 63 do *WAi*, fortes indicações que sugerem um tratamento uniforme para o conceito de número, que seja pertinente tanto para o número real quanto para o número natural. Nesta página, Wittgenstein observa

*O conceito de "proposição elementar" não passará, é claro, sem alterações. Ele continua, não obstante, "operando" ao longo do texto das *PhBm*, por exemplo no capítulo *IX*, que procura mostrar a existência de "proposições elementares incompletas", ou seja, de proposições que, ainda que elementares, deixam uma margem de manobra para a realidade, o que é algo absolutamente alheio à proposição elementar tractariana. Aquilo que permanece de "elementar" nestas proposições – e que justifica o uso da terminologia – é a ausência de uma *construção lógica* (por meio de operações de verdade) em seu interior. Cf. Ludwig **Wittgenstein**: *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Frankfurt: Suhrkamp, 1984 (doravante citado como *WWK*), pp. 73-4.

†A primeira observação após este retorno "forçado" à aritmética é bastante alusiva: ela começa com uma caracterização estritamente tractariana do número (como um modo de apresentação) para, depois, procurar estabelecer a presença do número na proposição como algo característico da forma proposicional. Cf. *WAi*, p. 7, p. 7: "Die Zahl ist eine Art der Darstellung. Wenn ich sage: auf dem Tisch liegen 4 Bücher so könnte ich dasselbe auch ohne die Hilfe der Zahl 4 ausdrücken etwa mit Hilfe einer anderen Zahl. Die 4 kommt in meine Darstellung dadurch daß ich sie in Form eines Satzes über a, b, c, d ausdrücke".

que, se sua teoria estiver certa de que "objetos da multiplicidade dos números reais aparecem em proposições elementares, então isto aponta para uma concepção mais geral – que a de Frege e de Russell – dos números (...)"[*]. Faz-se necessário notar que a observação acima está envolta em uma discussão sobre a natureza do número *natural* e sobre a teoria fregiana da atribuição numérica como uma asserção sobre um conceito. As concepções do número real de Frege e de Russell não são consideradas em nenhum momento nestes textos. Deste modo, quando Wittgenstein afirma que a ocorrência de objetos da multiplicidade dos números reais em proposições elementares aponta para uma teoria mais geral do *número*, ele parece visar uma teoria aritmética que englobe tanto o número natural quanto o número real. Na continuação da observação, ele assevera: "Eu disse uma vez que o número emerge do conceito de cálculo e nisto há certamente algo [correto][†]". Tal uniformidade do tratamento da aritmética manifesta-se novamente na ideia de que o número *simpliciter* surge do conceito de cálculo.

Também nas *PhBm*, Wittgenstein afirma:

> Os números cardinais (*Anzahlen*) são uma forma dada na realidade (*Wirklichkeit*) por meio de coisas, assim como os números racionais o são por meio de extensões (*Ausdehnungen*) etc. Eu quero dizer, por meio de formas reais. Do mesmo modo, os números complexos são dados por meio de multiplicidades reais. (Os símbolos são certamente reais.)".[‡]

Nesta passagem, não só os números naturais/cardinais e racionais são caracterizados de maneira semelhante, mas também os números complexos, o que indica fortemente uma preocupação em se fundamentar os diversos tipos de número sobre um mesmo firmamento. A passagem acima também auxilia a afastar uma possível objeção à hipótese de que os números naturais e os reais recebem o mesmo tipo de abordagem, a saber, a de que, enquanto os números racionais e os reais comparecem "pessoalmente" em certas proposições, o número natural comparece apenas enquanto uma "forma", isto é, não como um componente proposicional, mas apenas como uma característica da proposição. A título de exemplo, o número real 4.5 apareceria na proposição "Esta cadeira tem 4.5 metros", segundo esta objeção, de um modo direto e aparentemente ineliminável, enquanto o número natural 4, na proposição "Há 4 cavalos no bosque" pode sempre ser substituído por *quatro* sinais distintos que representariam os objetos a serem contados (ao invés de "Há 4 cavalos que ...", poder-se-ia dizer "Há um cavalo x, um y, um z e um w tal que ..."). Após esta substituição, o número 4 não ocorreria mais como um componente da proposição, mas apenas como certa "multiplicidade",

[*] ibid., p. 63.

[†] No original: "Ich sagte damals, daß die Zahl aus dem Begriff des Kalküls hervorgehe und daran ist gewiß etwas". O parágrafo termina inesperadamente, já que a expressão "daran ist gewiß etwas" é seguida usualmente do complemento "Richtiges" ou "Wahres".

[‡] *PhBm*, X−113a.

como uma "característica" da proposição. A objeção falha, no entanto, ao considerar o número real como um componente ineliminável: do mesmo modo que o número cardinal 4 pode ser substituído (ou, segundo a passagem acima, *dado*) por quatro símbolos, o número real 4.5 pode ser substituído/dado por uma extensão que possua efetivamente tal relação com o comprimento unitário. E é assim que ocorre, por exemplo, em mapas feitos em uma escala correta: uma cidade cujo perímetro seja 4.5 vezes maior que o perímetro de outra cidade é apresentada, no mapa, por uma figura cujo perímetro seja quatro vezes e meio maior que o perímetro da figura que representa a segunda cidade. O número 4.5 "desaparece" enquanto componente da proposição[*] e, no entanto, ele comparece enquanto "característica", enquanto "multiplicidade" das relações entre as figuras que servem como elementos da proposição. O que importará para a aplicação do número é, de fato, sempre certa *multiplicidade* do sistema numérico, e não a aparição individual dos elementos do sistema como componentes da proposição.

Na primeira Seção deste capítulo, procuraremos descrever alguns aspectos desta introdução dos números racionais/reais na proposição elementar, a fim de tornar mais clara a discussão – presente nos capítulos *X* e *XI* – da concepção do número natural. Nesta Seção, será importante tecer alguns fios para estabelecer alguns pontos comuns aos dois casos (racionais/reais e naturais), comprovando, deste modo, a utilidade da hipótese de leitura. Não sendo primordiais para o objetivo da Seção, alguns pontos serão tratados de modo bastante breve, com o intuito apenas de fornecer ao leitor o pano de fundo no qual a trama daquilo que é de fato relevante para os fins pretendidos se desdobra.

O NÚMERO NA PROPOSIÇÃO ELEMENTAR

A ideia de que números devem entrar na composição das proposições elementares é geralmente lida pelos comentadores sob a ótica de um pequeno texto escrito por Wittgenstein em 1929 para apresentação em um encontro anual da *Aristotelian Society*, realizado no dia 13 de julho. Nesta data, porém, Wittgenstein optou por discutir temas relacionados ao infinito na matemática, ao invés de apresentar o texto redigido[†]. O texto foi publicado posteriormente nos anais do encontro sob o título de "Algumas considerações sobre a forma lógica" (*SRLF*). Neste texto, Wittgenstein justifica a introdução de números em toda proposição elementar que consiste na atribuição de uma propriedade suscetível de gradação, mostrando a impossibilidade de uma análise em termos de quantificadores. Como é uma característica destas propriedades o fato de que cada grau exclui o outro, o autor é levado a abandonar a tese da independência lógica das

[*] Entendendo-se o mapa enquanto proposição, isto é, enquanto a asserção de que as relações espaciais entre os elementos do mapa também ocorrem entre os elementos da situação "mapeada".

[†] Cf. **Monk**: Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius, p. 273.

proposições elementares, um dos pilares do edifício do *Tractatus*. Nesse sentido, é natural que se estabeleça o vínculo entre, de um lado, a introdução do número na proposição elementar e, de outro, o abandono da tese tractariana da independência lógica entre proposições elementares. Entretanto, a introdução de números na proposição elementar não ocorre *apenas* no contexto da atribuição de qualidades suscetíveis de gradação. Assim, a aceitação de que há consequências lógicas entre proposições elementares é um sintoma imediato da introdução do número *em um contexto específico* no qual o número cumpre a tarefa de fornecer, no contexto de uma proposição, a relação entre o grau unitário da qualidade e o grau asserido pela proposição.

Tanto no início dos manuscritos de 1929/30 como em *SRLF*, o número já havia sido utilizado para desempenhar outro papel, a saber, o de demarcar um lugar em um espaço. Juntamente com um sistema de coordenadas, o número era usado para "descrever" (o motivo das aspas ficará claro adiante) o formato e a posição de manchas no espaço. Em *SRLF*, Wittgenstein pede para o leitor imaginar, diante de nosso campo visual, um sistema de eixos retangulares em uma escala fixada arbitrariamente. Em seguida, afirma: "É claro que podemos descrever o formato e a posição de cada mancha colorida em nosso campo visual por meio de asserções de números cuja significação (*significance*) é relativa ao sistema de coordenadas e à unidade escolhida. Novamente, é claro que esta descrição terá a multiplicidade lógica correta e que uma descrição com uma multiplicidade menor não servirá"[*]. Wittgenstein, então, dá o exemplo de uma proposição que utiliza tal sistema de coordenadas para "descrever" uma mancha e atribuir a esta mancha a cor vermelha. Tal proposição seria expressa pelo símbolo "$[6-9, 3-8]$ Vermelho", em que os números são usados, juntamente com um sistema de coordenadas, para demarcar a área da mancha a qual a propriedade "Vermelho" está sendo atribuída. Na continuação do texto, Wittgenstein procura argumentar que "Vermelho", um termo ainda não analisado, deve conter números quando corretamente analisado, já que se trata da atribuição de certo grau de vermelho à mancha em questão. Números, no entanto, já eram utilizados exatamente para demarcar o lugar ao qual se predica tal propriedade. É importante ressaltar que, embora o Vermelho seja uma qualidade suscetível de gradação que é atribuída ao lugar denotado pelo símbolo "$[6-9, 3-8]$", o inverso não é verdadeiro: o lugar demarcado não é a especificação do grau de uma qualidade que se atribui ao Vermelho. Afinal, que o lugar $[6-9, 3-8]$ seja vermelho não exclui que outro lugar também o seja. Portanto, da utilização de números no contexto da apresentação de um lugar no espaço, não decorre *imediatamente* a existência de consequências lógicas entre proposições elementares[†].

[*] *SRLF*, p. 165.

[†] Cf. **Ferraz Neto**: Fenomenologia em Wittgenstein, p. 108: "(...) a introdução de números nas proposições elementares e o reconhecimento de que há 'proposições elementares' que mantêm relações de consequência lógica entre si são temas conexos, mas com relativa independência. Wittgenstein, ao

Tal conclusão, no entanto, pode parecer precipitada. Afinal, parece perfeitamente possível tratar a descrição de um lugar como um caso particular da atribuição de graus de certas qualidades. Tomemos como exemplo a descrição de um círculo monocromático em um espaço bidimensional. Do mesmo modo que este círculo só pode ter *uma* cor, ele só pode ter *um* valor para o seu raio. De maneira semelhante, supondo-se um sistema de coordenadas retilíneas, seu centro só pode ter *uma* distância relativa a cada um dos eixos do sistema. Tal descrição poderia, então, ser apresentada por meio da atribuição de quatro números relativos a cada uma das coordernadas independentes da descrição. É claro, por outro lado, que toda propriedade suscetível de gradação é atribuída contingentemente a "algo", a certo "objeto" que possuiria (ou não) esta propriedade. Ora, a descrição do círculo não pode ser, como visto anteriormente, uma propriedade do "Vermelho"; ela teria que ser uma propriedade de certo objeto x (uma mancha, um substrato). Este tipo de análise, no entanto, trataria os valores do centro e do raio como propriedades externas de x. Isto é, assim como o vermelho, o centro seria também uma propriedade externa de x, e a atribuição desta propriedade ao objeto poderia ser expressa por uma *proposição* (digamos, x está a 5 centímetros do eixo das abcissas). Wittgenstein, no entanto, parece recusar[*] esta análise, preferindo tratar a especificação das coordenadas espaciais como critério de *identificação* do objeto, portanto, como sendo parte da *preparação* para uma proposição, e não como a expressão de uma *proposição*[†].

Deste modo, há duas maneiras *prima facie* independentes para explicar a introdução do número na proposição elementar, na "base" da linguagem. A primeira é via o problema da atribuição de qualidades suscetíveis de gradação, conhecido e fartamente discutido na literatura secundária sob o rótulo de "problema das cores". A segunda remete ao problema da apresentação do espaço, que é menos explorado pelos comentadores e, no entanto, é – ao menos considerando-se o desenvolvimento do tema nos manuscritos – anterior ao problema das cores. Na composição das *PhBm*, o problema das cores é tratado no capítulo *VIII* da obra. Já o problema da apresentação do espaço ocorre, primeiramente, no capítulo *IX* e, posteriormente, de modo esparso nos "capítulos matemáticos", principalmente nos capítulos *XII* e *XVI*. É essa segunda maneira de explicar a necessidade da ocorrência de números na "base" da linguagem que será o alvo das próximas considerações, não somente em razão dos capítulos em que ela comparece (exceto o capítulo *IX*) estarem contidos no escopo deste estudo, mas principalmente pelo fato de que o paralelo visado entre a aritmética de números reais e

introduzir números na representação 'de base' do espaço visual, não sente esse 'efeito de consequência lógica' de uma proposição sobre outra".

[*]Este tema, que é alvo de considerações dos capítulos *IX* e *XX* das *PhBm*, não será será pormenorizado e detalhado neste trabalho.

[†]Cf. *PhBm*, IX−95 e subsequentes.

naturais é melhor retratado a partir desta via.

A introdução do sinal extensível

No artigo *SRLF*, a necessidade da introdução de números para a apresentação do espaço é tematizada de modo bastante sucinto: números (racionais e reais) são introduzidos para especificar lugares no espaço, porque um simbolismo com uma multiplicidade menor não dá conta da tarefa. Que tarefa é esta? E por que um simbolismo com uma multiplicidade menor não dá conta desta tarefa?

A tarefa é clara: trata-se da “descrição” de manchas monocromáticas no espaço visual. O problema da descrição de manchas visuais e sua relação com a introdução de números para apresentar o espaço podem ser melhor apresentados com o auxílio dos manuscritos de 1929/30. Logo nas primeiras páginas do *WAi*, Wittgenstein começa a investigar a possibilidade de uma descrição fenomenológica do espaço visual. A direção da investigação não segue, via de regra, uma rota precisa, e os temas se diversificam ao longo das páginas dos manuscritos. Não obstante, é possível destacar claramente as entradas que dizem respeito à problemática de “descrição” de manchas no espaço visual. O termo “descrição”, aqui, é um tanto quanto problemático, já que a “descrição” de uma mancha ainda não é uma proposição, mas apenas a preparação para uma proposição. Nesse sentido, o ato de “descrever” uma mancha é similar ao que ocorre no *Tractatus* quando se *nomeia* um objeto. Para evitar confusões conceituais, é preferível utilizar a expressão “especificação de uma mancha” ao invés da “descrição de uma mancha”. A questão, então, é: como especificar uma mancha monocromática no espaço visual?

É claro que a especificação de uma mancha no espaço visual envolve a apresentação do próprio espaço visual, já que o lugar ocupado por uma mancha é sempre uma sub-região do espaço visual. Além disso, a especificação de uma mancha não necessita da *existência* efetiva da mancha (i.e., do fato de que esta região delimitada seja monocromática), mas apenas de sua *possibilidade*, e cabe precisamente à apresentação do espaço demarcar este “domínio das possibilidades” em que a mancha deve estar incluída. Logo na página 15 do *WAi*, Wittgenstein menciona a necessidade de se usar um sinal extensível (*dehnbar*) para apresentar o espaço: “É preciso – ao que me parece – de um sinal extensível para apresentar o espaço. / Talvez um sinal que permita uma interpolação análoga ao sistema decimal / O sinal deve ter a multiplicidade e propriedades do espaço”[*]. A alusão aqui é à propriedade do sistema de “casas decimais” de sempre permitir construir, a partir de dois sinais numéricos, um sinal numérico inteiramente novo que constitua uma “interpolação” daqueles sinais. Deste modo, a partir dos sinais “0” e “1”, é possível construir o sinal “0.5”. Assim, se, em uma coordenada espacial,

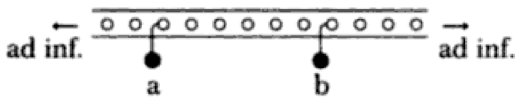
[*] *WAi*, p. 15; *PhBm*, XVI–177c.

uma mancha é especificada pelo intervalo “$\boxed{[0,1]}$”, o próprio sinal – juntamente com as regras de manipulação do sistema numérico – mostra a possibilidade de que haja duas manchas menores e de mesmo tamanho ocupando, naquela coordenada, o mesmo espaço da primeira mancha: “$\boxed{[0,0.5]}$” e “$\boxed{[0.5,1]}$”.

Estas entradas, que compõem o capítulo *XVI* das *PhBm*, são seguidas pela indagação: “Este sinal não é precisamente o sistema decimal com sua POSSIBILIDADE INFINITA de interpolação?”*. Na continuação, há um comentário que procura esmiuçar o que significa esta “possibilidade infinita”. As observações sobre esta temática foram incorporadas ao capítulo *XII* das *PhBm*, capítulo que agrupa diversas observações sobre a temática do infinito. Nessa ocasião, em particular, Wittgenstein observa que

> as regras sobre o sistema de números – digamos, o sistema decimal – compreendem tudo o que é infinito sobre os sinais. *Estas regras* – p. ex., a de que o sinal numérico não se limita à direita e à esquerda – deixam a infinitude expressa. / Poder-se-ia talvez dizer: sim, porém os sinais numéricos são ainda limitados pelo uso do papel e tinta e outras circunstâncias. Muito bem, mas isto não está expresso nas *regras* sobre seus usos e apenas nelas repousam as suas verdadeiras essências.†

A introdução do sinal extensível e a discussão acerca do infinito “intensional” mantêm certa proximidade ao longo dos manuscritos. Além da especificação de manchas no espaço visual, Wittgenstein menciona o uso do sinal extensível para apresentar a relação de distância entre dois objetos no espaço visual. Na página 26 do *WAi*, ele aponta para a possibilidade de descrever a relação espacial entre duas manchas usando números: “ao invés de descrever a relação espacial de duas manchas a e b como ‘aRb’, eu poderia descrevê-la como aNb, onde N é um número, portanto, uma relação e x t e n s í v e l”. A conexão entre o sinal “extensível” e o tema da “possibilidade infinita” fica ainda mais clara quando a “relação extensível” é apresentada, na página 50 do *WAi*, pela seguinte figura:



A relação extensível

Fica clara, também, a referência à “ausência de limites à direita e à esquerda” do sinal extensível, do sinal numérico.

Uma vez estabelecido o elo entre a apresentação do espaço e a introdução do sinal extensível, é preciso voltar as atenções para a segunda questão: por que é preciso de números, de sinais com uma possibilidade infinita? Por que um simbolismo com uma

* *WAi*, p. 16.

† *WAi*, p. 16; *PhBm*, XII–141a.

multiplicidade menor não dá conta desta tarefa? Na página 148 do *WAi*, ao retornar ao problema do infinito, Wittgenstein se pergunta: "Aquele sinal com a possibilidade infinita é realmente necessário? Não estaria tudo bem com a disjunção das menores partes visíveis? Não. Pois, com o sinal para as partes discretas, a continuidade não poderia ser apresentada"[*]. Há, com efeito, um elo entre o problema da apresentação da continuidade de um espaço e a introdução do sinal extensível, do sinal com uma possibilidade infinita. Seguindo estes indícios textuais, a resposta para a nossa segunda questão parece ser: um simbolismo com uma multiplicidade menor não funciona, pois, com tal simbolismo, torna-se impossível apresentar a continuidade do espaço.

Como se sabe, o tema da continuidade do espaço e as discussões acerca do infinito atual estavam presentes na atmosfera intelectual da época, principalmente na defesa dos intuicionistas de uma teoria do *continuum* que não pressupunha o infinito atual. Em relação ao desenvolvimento intelectual de Wittgenstein, discussões sobre a divisibilidade infinita e a possibilidade de um "complexo infinito" já estavam presentes desde os cadernos de 1914-16, anteriores ao *Tractatus*. O *Tractatus*, por sua vez, não se posiciona em relação ao número (finito ou infinito) de objetos que formam a substância do mundo nem em relação ao número (finito ou infinito) de proposições elementares, por se tratar, em ambos os casos, de um assunto que caberia não à lógica, mas sim a sua aplicação resolver; à primeira vista, o único compromisso finitista do *Tractatus* é com o caráter finito da análise lógica de uma proposição, mesmo que ela porventura resulte em uma infinidade de estados de coisas consistindo, cada um destes, em uma concatenação de infinitos objetos[†]. Em todo caso, a análise (a "aplicação da lógica") deve chegar, em um número finito de passos, no nível do *absolutamente*[‡] simples.

No caso da análise do espaço visual, abrem-se aparentemente duas possibilidades[§]: ou pontos seriam objetos e, uma vez que o espaço é infinitamente divisível, a descrição do espaço visual conteria uma infinidade atual de objetos; ou o contínuo é uma construção lógica, feita a partir das "menores partes visíveis" (ideia também compartilhada por Russell no manuscrito de 1913 intitulado *Theory of Knowledge*[¶]). Segundo esta última

---

[*] *WAi*, p. 148. Cf. tb. ibid., p. 104: "Das Kontinuum ist ganz unvorstellbar, mit diskreten Begriffen".

[†] *Tractatus*, aforismo 4.2211.

[‡] O "absolutamente" serve para afastar uma ideia, presente nos cadernos de 1914-16, de que seria possível tratar objetos complexos como simples em proposições para cujo sentido a complexidade de tais objetos não fosse relevante. Embora tais objetos fossem complexos, eles "funcionariam" como simples. Essa relativização do par simples/composto não encontra, de modo algum, lugar no *Tractatus*.

[§] Aqui é pressuposto, é claro, uma interpretação "fenomenológica" da ontologia tractariana. Para uma defesa deste pressuposto, Cf. **Ferraz Neto**: Fenomenologia em Wittgenstein; Cf. tb. Merrill B. **Hintikka**/Jaakko **Hintikka**: *Investigating Wittgenstein*, Blackwell, 1986.

[¶] Cf. Bertrand **Russell**: *Theory of Knowledge: The 1913 Manuscript*, ed. por Elizabeth Ramsden **Eames**/Kenneth **Blackwell**, London e New York: Routledge, 1984, pp. 121-2: "It may be argued that, owing to the infinite divisibility of space and time, any sense-datum which has spatial or temporal extension must consist of an infinite number of parts. If so, these parts are necessarily imperceptible, alternativa, bastaria analisar as proposições que tratam supostamente de uma aparente "continuidade" para constatar que elas, ao fim e ao cabo, repousam sobre elementos discretos. Dito em outros termos, o contínuo seria apenas uma *façon de parler* de uma série de elementos discretos.

Se a primeira alternativa aparece como uma possibilidade para o *Tractatus*, ela é completamente afastada por Wittgenstein em seu período intermediário: as discussões acerca do infinito nas *PhBm* são sempre a favor do caráter *potencial* ou *intensional* do infinito, em oposição a um infinito *atual* ou *extensional.* A segunda alternativa, por outro lado, também se mostra inválida: a conclusão com a qual Wittgenstein se depara em 1929 é que a procura pelos elementos pequenos e visíveis do espaço (dos quais os fatos espaciais seriam compostos) é uma tarefa logicamente impossível[*].

Uma construção no interior da proposição elementar

Os desdobramentos deste episódio de colisão da lógica com sua aplicação podem ser vistos de perto – e melhor elucidados – se acompanharmos sua evolução ao longo das páginas 49 a 54 do *WAi*. Todo o problema pode ser resumido nos seguintes termos: um intervalo espacial $[anb]$, em que o signo entre as duas letras (no caso, "n") representa a distância entre os limites visíveis (denotados pelas letras "a" e "b") de uma mancha[†] que "ocupa" o intervalo, sempre pode ser dividido em dois intervalos $[amc]$ e $[cob]$, desde que valha a equação $n = m + o$. Cada um destes intervalos, por sua vez, também pode ser dividido e assim sucessivamente, *ad infinitum*. Mas o que significa essa subdivisão? E, sobretudo, o que significaria essa possibilidade? Essas questões darão origem, nos

since they must be too small for our senses. It will follow, therefore, that every sense-datum which has spatial or temporal extension must be a complex of an infinite number of constituents with which we are no acquainted. Such an argument, however, involves an unduly naive transference of infinite divisibility from physical space and time to the spaces and time of the senses. In regard to time, we have already seen how physical time can be logically constructed without assuming that a continuous duration actually consists of temporal parts. And in regard to space, it would seem that a similar construction is possible. There seems no reason to assume that, say, a uniform patch of colour occupying a small visual area must be complex; it is quite possible that the infinite divisibility of physical space results from a logical construction out of data which are not infinitely divisible".

[*]Cf. *PhBm*, XII−137. Neste parágrafo, Wittgenstein apresenta uma sequência de tiras horizontais compostas alternadamente de retângulos pretos e brancos, de modo que cada tira consiste em uma "subdivisão" da tira anterior. A última é uma tira cinza, na qual a subdivisão já não é mais visível. O exemplo ilustra, em primeiro lugar, o fato de que se chega efetivamente a um estágio em que a tentativa de subdivisão resulta em uma tira cinza. No entanto, este estágio não fornece os elementos discretos que comporiam o espaço, já que só se vê a tira composta de elementos discretos quando ainda não se chegou ao limite da divisibilidade. Cada tira da figura é certamente composta de manchas retangulares monocromáticas, e os limites entre estas manchas marcam os pontos de descontinuidade da tira. O que Wittgenstein observa é que só é possível ver estes pontos de descontinuidade caso não se tenha ainda atingido o limite da diferenciabilidade. Nesse sentido, é impossível procurar pelos elementos últimos que comporiam supostamente o espaço, já que, por mais que se subdivida o espaço, nenhuma subdivisão se apresenta como sendo a última possível.

[†]Para simplificar a exposição, o exemplo será desenvolvido no caso de *uma* dimensão espacial, embora possa ser estendido para o caso bidimensional.

manuscritos, a duas tentativas, por parte de Wittgenstein, de "reparar" o problema da divisibilidade infinita do espaço. Em cada uma delas, um pilar diferente do edifício do *Tractatus* é abandonado. De fato, vejamos.

Na primeira delas, a decomposição de uma mancha é entendida como uma *análise* em termos de um produto lógico. Assim, tomando "φ" pelo nome de uma cor, a proposição $\varphi[a5b]$ pode ser concebida como um produto lógico das proposições $\varphi[a2c]$ e $\varphi[c3b]$. Essa análise só faz sentido, é claro, se for possível descrever "partes" de uma mancha monocromática (*e.g.*, seu lado esquerdo, um círculo dentro dela etc.). O problema com esse tipo de procedimento é que, a cada passo da análise, a forma e a complexidade da proposição não se alteram, pois o símbolo $[anb]$ tem, evidentemente, a mesma forma e complexidade que cada um dos símbolos $[amc]$ e $[cob]$. A conclusão que Wittgenstein é levado a aceitar, neste caso, é que não existem proposições elementares, já que a análise de uma proposição espacial leva a outras proposições de forma idêntica à primeira[*]. Neste caso, "dois estados de coisas resultariam em um estado de coisas"[†]. Entretanto, o abandono da tese da existência do simples – de objetos simples e de proposições elementares – não seria, no cenário do *Tractatus*, sem consequências. Basta lembrar, de um lado, que o postulado da possibilidade do sinal simples é o postulado do caráter determinado do sentido[‡] e que, de outro lado, a forma geral da proposição está essencialmente vinculada ao espaço lógico das proposições elementares[§]. Nada mais natural, portanto, que se retorne a estas duas amarras ao se prosseguir com a hipótese de não haver proposições elementares. Em um primeiro momento, Wittgenstein se pergunta: "Se algo é falso nos meus fundamentos só poderia ser devido ao fato de que não há essencialmente proposições elementares e que a análise resulta em um s i s t e m a de proposições infinitamente decomponíveis. Este s i s t e m a não satisfaz a exigência da determinação da análise que eu postulei?"[¶]. E um pouco adiante: "Mas qual é, então, a forma geral da proposição?"[‖].

Na segunda tentativa, a decomposição de uma mancha é entendida como uma *possibilidade* de sua divisão efetiva em outras duas manchas monocromáticas de cores distintas, mas não como uma *realidade* que seria descrita por meio de um produto lógico. De acordo com esta concepção, uma proposição que descreve uma mancha, digamos $\varphi[a4b]$, não pode ser concebida como o produto lógico das proposições $\varphi[a2c]$ e $\varphi[c2b]$, já que a "metade" de uma mancha monocromática não existe. O que existe é a possibilidade de que a mancha descrita pela proposição $\varphi[a4b]$ seja dividida em

[*] Cf. *WAi*, p. 52: "Wenn diese Anschauung richtig ist, so gibt es keine Elementarsätze. Die Sätze $\varphi(n-m)$ sind zwar analysierbar, aber nur wieder in Sätze von derselben Form".

[†] Ibid., p. 51.

[‡] *Tractatus*, aforismo 3.23.

[§] Ibid., aforismos 5 e 5.01.

[¶] *WAi*, p. 50.

[‖] Ibid., p. 52.

duas manchas $\eta[a2c]$ e $\zeta[c2b]$. Neste caso, há um sentido em que se pode dizer que a proposição $\varphi[a4b]$ é elementar: ela descreve *um* estado de coisas, e não um fato composto do produto lógico de diversos estados de coisas. O problema com o qual Wittgenstein se depara, neste momento, é que esta proposição não poderia ser, de acordo com o *Tractatus*, elementar. Com efeito, já que, como não é possível descrever parte de uma mancha monocromática, segue-se de uma proposição p do tipo $\varphi[anb]$ uma proposição q que afirma que as manchas adjacentes a ela são de outra cor que não aquela denotada por "φ". Ora, se o sentido de uma proposição são todas as suas condições de verdade, e se aquela proposição *p implica q*, então, segundo o *Tractatus*, ela também *diz q*. Mas, se for assim, então p não pode ser elementar, já que ela contém uma indeterminação (ela pode ser verdadeira de diversas maneiras, bem como falsa de diversas maneiras). Há uma generalidade na proposição, responsável por essa indeterminação. Na página 54 do *WAi*, é possível encontrar, em alíneas que farão parte do capítulo *IX* das *PhBm*, o esboço de uma nova teoria da generalidade que supostamente corrigiria este problema, uma generalidade que entra, como será dito mais tarde, "na teoria das proposições elementares e não na teoria das funções de verdade"[*]. As reflexões a respeito desta teoria, no entanto, são interrompidas em favor de considerações acerca do problema das cores e só retornarão à tona meses mais tarde, a partir da página 111 do *WAii*.

Quando, pressionado pelo problema das cores, Wittgenstein aceita o diagnóstico de que não é possível dar conta do problema da atribuição do grau de uma propriedade suscetível de gradação por meio da adição lógica de "pequenas quantidades" daquela propriedade[†], ele nota que tal situação dá a impressão de que seja possível "uma construção no interior da proposição elementar" e acrescenta: "Ou seja, é como se houvesse uma construção lógica que não recorresse às funções de verdade"[‡]. Logo em seguida, adverte: "Isto eu já quis dizer também com minhas relações que são expressas por meio de números / Mas, agora, além disso, parece que essas construções têm um efeito no fato de uma proposição decorrer logicamente de outra."[§]. Esta "novidade"[¶]

[*] *PhBm*, IX−87d. Vale notar, também, que a teoria da probabilidade, derivada essencialmente, no *Tractatus*, do cálculo com funções de verdade, passa, nas *PhBm*, a estar vinculada à teoria das "proposições elementares incompletas". Cf. ibid., IX−87c.

[†] Para uma discussão detalhada do problema das cores e da impossibilidade da análise lógica de enunciados de propriedades de grau compatível com o *Tractatus*, Cf. João Vergílio **Gallerani Cuter**: As cores e os números, em: *Dois pontos*, 6.1 (2010), pp. 181–193.

[‡] *WAi*, p. 56; *PhBm*, VIII−76c.

[§] *WAi*, p. 56.

[¶] No artigo *The Duality of Wittgenstein's Phenomenological Actuality*, Elizabeth Rigal aponta corretamente para o problema do espaço e da infinita divisibilidade como um dos pontos de tensão entre o *Tractatus* e as *PhBm*. Ao afirmar, no entanto, que "the criticism of the first conception of space and the denial of the independance of elementary propositions have a tight connection with one another", a intérprete corre o risco de perder aquilo que há de "novo" no problema das cores e, mais do que isso, de perder aquilo que é comum a ambos problemas, a saber, o fato de haver construções na lógica que não recorrem a funções de verdade. Cf. Elisabeth **Rigal**: The Duality of Wittgenstein's que decorre do problema das cores – e que será o alvo do capítulo *VIII* das *PhBm* – não é primordial para os propósitos deste estudo. Aquilo que é importante é o fato de que tal construção no "interior" da proposição elementar (que não recorre a funções de verdade) já ocorria no caso das relações expressas por meio de números, tais como relações de distância no espaço visual. A fim de elucidar o significado desta construção, é importante retornar a alguns pontos fundamentais do *Tractatus*.

A delimitação que o *Tractatus* se propõe a fazer para a expressão do pensar é a delimitação própria a um *sistema*. Isto é, não é que o domínio das expressões com sentido seja traçado *de fora* por meio de um conceito; ele é traçado *de dentro* por meio da unidade de uma construção. A base desta construção são as proposições elementares, e a operação de construção é simplesmente a negação simultânea de uma seleção feita no interior de proposições, sejam estas elementares ou previamente construídas. É claro que tal operação não é arbitrária, mas sim legitimada pelo princípio da bipolaridade: como a negação de uma proposição com sentido é, por sua vez, outra proposição com sentido, a construção por meio da operação de negação nunca pode fazer com que seu resultado "saia" do domínio daquilo que é dito – e pensado – com sentido. A operação de negação simultânea permite construir a totalidade das funções de verdade de proposições elementares e, portanto, toda e qualquer proposição da linguagem. O sentido de uma proposição elementar é o estado de coisas possível por ela apresentado; o sentido de uma função de verdade de proposições elementares é função do sentido de tais proposições.

O que ocorre, agora, no caso da divisão da mancha descrita pela proposição $\varphi[anb]$ em duas manchas descritas por $\eta[amc]$ e $\zeta[cob]$, com $n = m + o$, é precisamente a *construção* de uma proposição que não é feita por meio de uma operação de verdade, mas por meio de uma *equação*. É a equação que auxilia no estabelecimento do *sentido* da expressão: se a equação não é obedecida, os sinais deixam de veicular um sentido, deixam de constituir um símbolo. O exemplo é iluminador, pois fornece um sentido geométrico à expressão "interior da proposição elementar", utilizada para caracterizar este tipo de construção. Ele também ajuda a entender o papel gramatical da geometria: a equação, em seu uso geométrico, não descreve a relação de duas manchas reais que comporiam efetivamente a mancha descrita por $\varphi[anb]$*. Ela dá a *possibilidade* da divisão, e não sua *realidade*. E essa possibilidade se refere ao *sentido*, e não à *verdade* de uma proposição.

Este resultado será reencontrado, *mutatis mutandis*, na discussão acerca dos números naturais e será utilizado como crítica a uma teoria intensional das classes. O

Phenomenological Actuality, em: Paul **Henri**/Arild **Utaker** (eds.): *Wittgenstein and Contemporary Theories of Language*, Bergen: Wittgenstein Archives, 1992, p. 65.

*Vale observar que seria precisamente este o caso na primeira tentativa de resolver o problema da divisibilidade infinita.

paralelo é quase imediato quando se considera o parágrafo 102 das *PhBm*, em particular a sua terceira alínea:

> Se digo: se há 4 maçãs na mesa, então há $2+2$ nela, isso significa somente que as 4 maçãs já contêm a possibilidade de serem agrupadas em 2 e 2 e eu não preciso esperar que elas sejam efetivamente agrupadas por um conceito. Essa "*possibilidade*" refere-se ao sentido, não à verdade de uma proposição. $2+2=4$ pode significar "sempre que tenho 4 objetos, existe a possibilidade de agrupá-los em dois e dois".[*]

Resta, no entanto, entender como esta crítica é movida contra uma teoria intensional das classes. Esta discussão será feita mais tarde, juntamente com a discussão das duas alíneas anteriores. Aqui é relevante notar tão somente o paralelo que existe entre a discussão da aplicação geométrica dos números racionais e a aplicação cardinal dos números naturais. É importante ressaltar também o papel da equação enquanto uma *regra sintática*, isto é, enquanto uma regra que auxilia a construção de um símbolo proposicional.

O modo talvez mais simples de elucidar o papel sintático-gramatical de uma equação é por meio da alteração do sistema de apresentação (*Darstellungssystem*) em que as proposições são apresentadas. Se, em uma alteração do sistema de apresentação, a equação "desaparece", isto indica que ela faz parte da *constituição* do sistema de apresentação, e não parte da descrição proposicional. Com efeito, a alteração do sistema deve preservar todo conteúdo descritivo e, portanto, se a equação não comparece em outro sistema de apresentação, isto implica a nulidade de seu conteúdo descritivo[†]. A noção de sistema de apresentação já estava presente, sob o nome de "sistema de sinais" (*Zeichensystem*), no *Tractatus*. Imediatamente antes de introduzir a operação de negação simultânea – e a fim de enfatizar em certa medida o caráter convencional da escolha de tal operação –, Wittgenstein alega que "o número das operações básicas necessárias depende *apenas* de nossa notação"[‡]. E continua: "Importa apenas constituir um sistema de sinais que tenha um determinado número de dimensões – uma determinada multiplicidade matemática"[§]. Isto é, não é que o sistema de Frege ou o de Russell (com duas operações primitivas[¶]) fosse menos expressivo que o do *Tractatus*; eles eram apenas menos perspícuos e filosoficamente mais confusos, já que eles conduziam a certos embaraços em relação ao significado das "leis lógicas" ou das "proposições primitivas". Para Wittgenstein, estava claro que as "leis lógicas" ou "proposições primitivas" nada mais eram que *regras sintáticas* necessárias para "corrigir" a multiplicidade da notação,

[*] Ludwig **Wittgenstein**: *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 2, Wien/New York: Springer Verlag, 1999 (doravante citado como *WAii*), p. 11; *PhBm*, X−102c.

[†] Cf. *WWK*, p. 240:"Daß die Form des Zeichensystems die Syntax vertreten kann, ist wichtig, denn es zeigt uns, daß die Regeln der Syntax nichts beschreiben".

[‡] *Tractatus*, aforismo 5.474.

[§] Ibid., aforismo 5.475.

[¶] A comparação aqui é restrita ao cálculo proposicional.

a fim de que esta pudesse servir de expressão para o pensar. Na notação do *Tractatus*, ao contrário, a verdade das "proposições primitivas" da lógica de Frege e Russell – ou melhor, das proposições que correspondiam àquelas[*] – era *demonstrada*.

Em uma conversa com o Círculo de Viena, datada de janeiro de 1930, Wittgenstein esclarece o fato de que, na constituição de um sistema de apresentação, o sistema notacional e a sintaxe prestam o mesmo serviço e, por isso, "competem" pelos mesmos "graus de liberdade":

> É assim: sintaxe e signos trabalham sempre em direções opostas. O que os signos obtêm é à custa da sintaxe, e o que a sintaxe obtém é à custa dos signos. Eu posso dizer: um sistema de signos com a multiplicidade correta torna a sintaxe supérflua. Porém, eu posso igualmente dizer: a sintaxe torna tal sistema de signos supérfluo. Eu posso certamente também utilizar um sistema de sinais incompleto e acrescentar as regras de sintaxe. Todas estas alternativas alcançam a mesma coisa; são, portanto, precisamente o mesmo sistema de apresentação.[†]

Que a noção de sistema de apresentação[‡] continua operando nas *PhBm*, isto é evidente. A título de exemplo, basta lembrar as observações do parágrafo 221 (cap. XXI) acerca do octaedro das cores. Na quarta alínea deste parágrafo[§], Wittgenstein explica que, para apresentar as relações internas entre as cores, seria possível utilizar outro sistema de apresentação, distinto do octaedro, por exemplo um sistema no qual todas as cores estão organizadas em uma linha reta, tendo o preto e o branco como pontos extremos. Neste caso, no entanto, tal sistema teria que introduzir regras sintáticas que, juntamente com essa notação unidimensional, recuperaria a mesma estrutura – a mesma multiplicidade – do octaedro[¶]. Ainda nesta alínea, ele afirma que a relação entre a apresentação por meio do sistema de sinais unidimensional e por meio do octaedro é inteiramente análoga à relação existente entre a linguagem comum e um modo de

[*] Com efeito, se as "leis lógicas" ou "proposições primitivas" dos sistemas de Frege e Russell são regras sintáticas, elas não podem ser proposições no mesmo sentido que o são aquilo que a elas corresponde no simbolismo do *Tractatus*.

[†] *WWK*, p. 80.

[‡] Wittgenstein utiliza também os termos "modo de apresentação" (*Darstellungsweise*) e "modo de expressão" (*Ausdrucksweise*) para se referir ao modo pelo qual um sistema de apresentação é constituído. Cf. o capítulo *VI* das *PhBm*, em que tais noções são utilizadas no contexto de uma investigação da palavra "eu" na linguagem comum. De modo semelhante ao que ocorre no caso da matemática, a mudança do modo de expressão da linguagem comum para a linguagem do déspota oriental visa a mostrar que proposições como "só eu posso sentir minha dor de dente" são, na verdade, regras sintáticas que incidem sobre o uso da palavra "eu".

[§] *PhBm*, XXI−221d: "Man kann freilich auch alle Farbtöne in einer Linie anordnen etwa mit den Grenzen Schwarz und Weiß wie das geschehen ist aber dann muß man eben durch Regeln gewisse Übergänge ausschließen und endlich muß das Bild auf der Geraden die gleiche Art des Topologischen Zusammenhangs bekommen wie auf dem Oktaeder. Es ist dies ganz analog wie das Verhältnis der gewöhnlichen Sprache zu einer 'logisch geklärten' Ausdrucksweise. Beide sind einander vollkommen äquivalent nur drückt die eine die Regeln der Grammatik schon durch die äußere Erscheinung aus".

[¶] No entanto, se à época do *Tractatus*, importava construir um sistema de sinais com certo número de *dimensões*, na passagem acima das *PhBm* Wittgenstein fala em recuperar certa *estrutura topológica* do octaedro.

expressão "logicamente claro". Trata-se sempre de dois "sistemas de apresentação" distintos que, em relação ao poder expressivo, estão em pé de igualdade. A vantagem de um sistema que possui um conjunto de sinais com a multiplicidade adequada, em oposição a outro que carece de inúmeras regras sintáticas para obter o mesmo resultado, é tão somente o fato de que ele é mais *perspícuo* e, nesse sentido, está menos sujeito a confusões gramaticais.

É possível notar a ocorrência do mesmo fenômeno – da mesma analogia – no caso de uma geometria "sintética" (axiomática), tal como a euclidiana, em comparação com a geometria "analítica". Wittgenstein vê, na geometria analítica, um sistema de sinais que possui uma multiplicidade correta para apresentar relações espaciais: "ao operar com a geometria analítica, tornamo-nos seguros da correta multiplicidade das denotações (*Bezeichnungen*)"[*]. Nesse sentido, é possível traçar, em relação às duas geometrias, a mesma analogia traçada para os outros sistemas de apresentação anteriormente citados. O quadro abaixo apresenta, de modo conciso, a analogia existente entre diversos sistemas de apresentação:

Perspicuidade notacional ↓

Sistemas de apresentação			
cálculo proposicional	*espaço cromático*	*linguagem*	*geometria*
Frege/Russell	reta unidimensional	comum	axiomática
⋮	⋮	⋮	⋮
Tractatus	octaedro das cores	modo de expressão logicamente claro	analítica

Necessidade de regras sintáticas ↑

Os axiomas de geometrias "sintéticas" (como a euclidiana), então, são vistos como regras sintáticas de um sistema de sinais que não possui a multiplicidade correta: "Os axiomas – p. ex. – da geometria euclidiana são regras disfarçadas de uma sintaxe. Isto se torna muito claro se se observa o que, na geometria analítica, corresponde a eles"[†]. Disfarçadas porque se assemelham a proposições, são inclusive chamadas, por diversas vezes, de "proposições primitivas", quando, na verdade, são regras para o uso dos sinais do sistema. Na geometria analítica, os axiomas da geometria euclidiana são *demonstrados* a partir da introdução de noções geométricas em termos de números reais. Isso implica, fundamentalmente, que a utilização correta da notação da geometria analítica torna impossível a "transgressão" do axioma e, portanto, ele é supérfluo nesse sistema. Considere o caso do seguinte axioma: "Dados dois pontos distintos, é possível traçar apenas uma reta que passa por eles". Na geometria analítica, é logicamente

[*] *PhBm*, XVI–177e.

[†] ibid., XVI–178b.

impossível, por meio da utilização correta dos sinais, fornecer duas retas distintas que passam pelo mesmo par de pontos. A regra sintática é, por assim dizer, incorporada na estrutura da notação, na estrutura do sistema de sinais.

Depois desta curta digressão pela noção de "sistema de apresentação", é preciso voltar ao exemplo da divisão de uma mancha monocromática no espaço visual. A divisão de uma mancha descrita pela proposição $\varphi[anb]$ em duas manchas descritas por $\eta[amc]$ e $\zeta[cob]$ possui um sentido se a equação $n = m + o$ é obedecida. Esse papel sintático-gramatical da equação é melhor compreendido quando, em *outro* sistema de apresentação, ele é incorporado na própria notação. A alteração que surge, quase que de modo imediato, no caso da representação de um intervalo espacial, é a seguinte: ao invés de se apresentar a distância entre dois pontos previamente fixados, apresenta-se os próprios pontos por meio de coordenadas espaciais e a distância é dada imediatamente pela subtração destas coordenadas. Neste caso, uma mancha descrita pela proposição $\varphi[\overline{0,4}]$, em que "$[\overline{0,4}]$" designa o intervalo espacial entre as coordenadas 0 e 4, pode ser dividida nas manchas descritas por $\eta[\overline{0,1}]$ e $\zeta[\overline{1,4}]$. A equação, que auxilia a estabelecer o sentido proposicional no sistema de apresentação anterior, é agora integrada ao próprio modo particular de se apresentar a proposição.

Dois níveis distintos da dicotomia intensão/extensão

Na página 18 do *WAi*, logo após observar que a correta multiplicidade das denotações é assegurada ao se operar com a geometria analítica, Wittgenstein começa a se ocupar de uma notação para apresentar intervalos de valores no espaço:

> Se $y = fx$ é a equação de uma curva fechada e y tem dois valores para cada valor de x, então escrevo um número arbitrário no intervalo entre dois valores de y – a saber, $f1x$ e $f2x$ – assim: "$\overline{f1x, f2x}$". Este signo é uma variável. Eu posso analogamente também escrever "$\overline{4,5}$", isto é, o número variável entre 4 e 5. "$[\overline{a,b}]$" deve designar, então, a classe de todos os valores da variável $\overline{a,b}$, portanto o intervalo entre a e b. Este intervalo não é uma classe no sentido de Russell, pois não é dado por meio de uma função e a pertinência ao intervalo não determina consequentemente se certa proposição é verdadeira ou falsa. Se algo é um membro do intervalo, percebe-se pelo seu sinal. Em certo sentido, o intervalo é evidentemente uma "classe *in extenso*", e isto significa: não há nenhuma intensão proposta para uma extensão. Eu poderia nomear o intervalo também como uma classe interna, pois a pertinência ao intervalo é determinada por uma propriedade interna.*

Não é preciso dizer que a noção acima evocada e chamada de "classe *in extenso*" ou "classe interna" é a *mesma* noção tractariana de conceito formal ou pseudoconceito. A mudança de nomenclatura, no entanto, salta aos olhos. No aforismo 4.1272 do *Tractatus*, Wittgenstein deixa claro que conceitos formais são representados por variáveis, não

* *WAi*, p. 18.

por funções ou classes (como acreditavam Frege e Russell). A noção de variável, portanto, contrasta com as noções de classe e de função. Já na observação supracitada, Wittgenstein não mostra nenhum prurido ao chamar a variável que representa o intervalo de uma "classe interna" ou, ainda, de uma "classe *in extenso*". Essa disparidade terminológica é, entretanto, apenas aparente: aquilo que o *Tractatus* critica na noção de classe de Frege e Russell é precisamente o tratamento *intensional* das classes que representavam variáveis. O *Tractatus* faz questão de notar que não é possível tratar, da mesma maneira, conceitos materiais (cuja extensão depende da verdade ou falsidade de certas proposições) e conceitos formais (cuja extensão é dada juntamente com o pseudoconceito). Nesse sentido, quando Wittgenstein sustenta que a "teoria das classes é, na matemática, inteiramente supérflua"[*], ele parece visar uma teoria das classes *in intensio*, uma teoria na qual uma classe é sempre "externa" (determinada por uma função material e, portanto, por uma propriedade externa). Afinal, não se saberia explicar, de outro modo, como a prescindibilidade da teoria das classes na matemática estaria vinculada a "que a generalidade de que precisamos na matemática não é a *casual*"[†].

Em relação a este uso do par "extensão/intensão", é possível caracterizar duas teorias diametralmente opostas. De um lado, uma teoria *intensional* das classes. Segundo esta teoria, toda classe é a extensão de uma função proposicional. A radicalização desta teoria leva à teoria russelliana segundo a qual toda proposição sobre uma classe é uma proposição sobre uma função proposicional. Nesse sentido, classes são apenas um expediente abreviatório utilizado para se falar de propriedades extensionais de funções proposicionais (isto é, de propriedades que dependem apenas da extensão da função proposicional, como, p. ex., o número que convém a certo conceito)[‡]. Ainda segundo esta teoria, uma classe é sempre dada por meio de uma função proposicional, e isto se torna evidente no proprio símbolo para uma classe: "$\hat{z}(\phi z)$". Assim, uma classe sem um conceito que a tenha como classe é uma absurdidade. No lado oposto, encontra-se uma teoria *extensional* das classes. Segundo esta teoria, a classe é autônoma em relação à função proposicional e o fato de que certa classe é dada como sendo a extensão de um conceito não é essencial para a classe, afinal, e se não houvesse tal conceito? É claro que, segundo o ponto de vista intensional, sempre há um conceito. Na teoria oposta, isto nem sempre ocorre. Ainda segundo a teoria extensional, uma classe de objetos discretos é dada por meio de uma lista (o símbolo para uma classe é uma lista)[§].

[*] *Tractatus*, aforismo 6.031.

[†] Ibid., aforismo 6.031.

[‡] Cf. **Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, p. 196-7 (***20**).

[§] Nos *Principles of Mathematics*, Russell alega que o ponto de vista extensional não pode ser totalmente implementado, já que, neste caso, uma classe, fornecida extensionalmente por meio da enumeração de seus membros, nunca pode ser infinita. Mas é precisamente este resultado que é vindicado por Wittgenstein: uma classe é sempre *finita*. O infinito não entra na consideração da teoria

Relembremos: uma função proposicional só pode ser uma propriedade *externa* de seus argumentos. Nesse sentido, uma classe que é dada como sendo a extensão de certa função proposicional é sempre uma "classe externa". Voltemos ao caso do intervalo espacial, denotado por "$[\overline{a,b}]$". Se admitirmos que essa classe é externa, e se adotarmos o ponto de vista intensional, devemos admitir que há uma mancha espacial cuja extensão é a classe acima designada. A pertinência ao intervalo seria determinada, pois, por uma propriedade externa (uma cor). É por isso que Wittgenstein diz que, em certo sentido, o intervalo é evidentemente uma "classe *in extenso*", já que não há nenhuma intensão (função proposicional) proposta para que a classe seja vista como sua extensão.

É preciso, porém, enfatizar o "em certo sentido". Afinal, o sinal que denota o intervalo espacial possui todas as características que convinham, como já visto, para um sinal "extensível", necessário para se apresentar a infinitude *intensional* do espaço. A sua *possibilidade* inexaurível de interpolação fornece, precisamente, a multiplicidade exigida para se apresentar a divisibilidade do espaço. Trata-se, portanto, de um sinal que permite apresentar aquilo que há de infinito na divisão espacial, a saber, o fato de que não há nenhum "menor comprimento divisível". Trata-se, enfim, de um sinal que pode servir como base a uma *lei infinita* e, neste sentido, há algo de *intensional* presente, não no próprio sinal, mas no seu uso de acordo com tal lei. O infinito, no entanto, confina-se nesta *possibilidade* do uso de uma lei, de uma operação. Para Wittgenstein, o infinito extensional é uma quimera. Ora, neste contexto, o par "extensão/intensão" não serve mais para caracterizar uma *teoria das classes*, cuja problemática principal se move em torno do par "função proposicional/extensão". A dicotomia "extensão/intensão" é movida agora com o intuito de caracterizar uma teoria do infinito, cuja problemática circunda o par "lei/resultados da aplicação da lei". Segundo o ponto de vista intensional, é a *lei* que é infinita; já de acordo com o ponto de vista extensional, a lei é um mero modo de apresentação de um conjunto ou agregado infinito que, por si só, é autônomo em relação à lei, podendo ser, inclusive, apresentado por *outra* lei.

Esses dois usos do par "extensão/intensão" não são imediatamente equívocos, o que ajuda a explicar a existência de duas confusões conceituais denunciadas por Wittgenstein. De um lado, uma concepção do infinito via uma teoria intensional das classes, que também é chamada de "teoria dos agregados infinitos"; de outro lado, uma concepção das classes via uma teoria extensional do infinito, cuja expressão mais clara se encontra na tentativa de Ramsey de introduzir "funções em extensão" na lógica. Esta tentativa será amplamente discutida no decorrer deste Capítulo. Já a crítica de Wittgenstein à teoria dos agregados infinitos será objeto de uma Seção do terceiro

das classes, mas apenas na noção de *lei*, o que tem a ver, como ficará claro, com o segundo uso do par "extensão/intensão". Bertrand **Russell**: *The Principles of Mathematics*, 2nd, New York: W. W. Norton & Company, 1938, p. 66.

Capítulo deste estudo.

Comentadores, em geral, enfatizam o apreço de Wittgenstein pelo “intensionalismo” – no que têm razões de sobra. Entretanto, é preciso levar em consideração que este “intensionalismo” se refere sempre ao segundo uso do par “extensão/intensão” acima discriminado. Uma vez que parte de sua crítica ao logicismo se confunde com uma crítica à teoria intensional das classes, é preciso reconhecer que há, em certo sentido, uma posição “extensionalista” de sua parte em relação à matemática. O objetivo da próxima Seção é detalhar o que há precisamente de extensionalista na nova concepção wittgensteiniana da aritmética, bem como expor suas críticas a uma teoria intensional das classes. Por razões de praticidade, toda referência, feita na Seção seguinte, ao par “extensão/intensão” remete ao primeiro uso acima discriminado destes termos.

O NÚMERO COMO PROPRIEDADE INTERNA DE UMA CLASSE *IN EXTENSO*

Para compreender os principais desdobramentos das reflexões de Wittgenstein sobre a aritmética nas *PhBm* (sobretudo nos capítulos *X* e *XI*), é preciso, antes de tudo, atentar-se para o interesse de Wittgenstein em uma teoria extensional das classes. Já no capítulo *IX*, no contexto de uma crítica à generalidade das palavras “conceito” e “objeto” na doutrina fregiana, ele nota que “é particularmente claro que, assim que começamos com a aritmética, não nos importamos mais com funções e objetos. De fato, mesmo quando resolvemos trabalhar somente com extensões, continuamos, o que, no entanto, é muito estranho, a ignorar por completo a forma dos objetos”[*]. Deixando de lado esta “estranheza”, o fato é que ao menos há a possibilidade de se trabalhar, na aritmética, com extensões. Já a parte intensional, a parte que cabe às funções proposicionais e aos objetos que as satisfazem, é afastada completamente do domínio da aritmética: uma vez que começamos a trabalhar com aritmética, não nos importamos mais com funções e objetos. É notável que Wittgenstein fale, neste parágrafo, de uma “resolução” (*Entschließung*), pois dá a impressão de que a decisão de trabalhar apenas com extensões é o resultado de uma tentativa frustrada de trabalhar com funções na aritmética. E, na verdade, trata-se de uma impressão correta, já que Wittgenstein havia trabalhado, ao longo de diversas páginas[†], em uma teoria *frege-russelliana* do número, em uma teoria na qual a atribuição numérica (*Zahlangabe*) é sempre uma sentença sobre um conceito. Nesse sentido, é preciso ler a suposta “clareza” de que a aritmética não se importa com funções e objetos *cum grano salis*. Afinal, não se trata de uma clareza própria ao assunto, mas apenas de uma clareza que é resultado de uma investigação, de

[*] *PhBm*, IX−94a.

[†] Cf., p. ex., *WAi*, pp. 28-30.

um percurso. Uma página após ter trabalhado em uma reconstrução frege-russelliana do conceito de número, Wittgenstein afirma ter um "desejo instintivo de operar apenas com as extensões de conceito e de não reconhecer funções na aritmética"[*]. É esse "desejo instintivo" que adquire, ao longo dos manuscritos, uma fundamentação filosófica relevante.

As evidências ao longo do capítulo *X* que apontam para um interesse em uma teoria extensional das classes são ainda mais fortes. A mudança necessária na caracterização do número, lembremos, reside no fato de que o número deve caracterizar o sentido de uma proposição, e não apenas seu modo de apresentação. É por meio da implementação de uma teoria extensional das classes que esta mudança se concretiza. No parágrafo 105 das *PhBm*, Wittgenstein conclui: "E agora mostra-se claramente – creio eu – a relação entre a concepção extensional das classes e a concepção do número como traço característico de uma estrutura lógica: uma extensão (*Extension*) é uma característica do sentido de uma proposição"[†]. Pressupõe-se, é claro, que o número já esteja "atrelado" de algum modo à noção de "extensão", já que, de outro modo, não seria possível explicar como o fato de uma extensão ser uma característica do sentido proposicional poderia servir de elo entre a concepção extensional das classes e a concepção do número como traço característico de uma estrutura lógica. Esse "atrelamento" é o alvo dos parágrafos iniciais do capítulo *X*.

Na primeira alínea do parágrafo 99, Wittgenstein contrasta duas concepções do número: uma intensional e outra extensional. Com o intuito de facilitar o reconhecimento da estrutura do texto, bem como o acesso a referências futuras, esta alínea será apresentada abaixo no formato de uma tabela.

	***PhBm* X−99a**
Questão	Pode-se perguntar: os números dizem respeito essencialmente a conceitos?
Retorno a outra indagação	Creio que isso remonte à questão se tem sentido falar de um número de objetos que não foram reunidos em um conceito.
Exemplo	Por exemplo, significa algo dizer "a e b e c são três objetos"?
Resposta negativa	Penso que, evidentemente, não.

Continua na próxima página

[*]ibid., p. 31.

[†]*PhBm*, X−105a. Cf. tb. *WAii*, p. 6: "Ich glaube – wie ich schon früher andeuten wollte – wenn man die extensionale Auffassung der Klassen durchführt muß man zu der Auffassung kommen daß die Zahl ein Charakteristikum einer Satzform ist, also zu meiner Auffassung. / Umgekehrt könnte man sagen daß meine Theorie der Anzahlen eine extensionale Klassentheorie beinhaltet".

Continuação da página anterior

	***PhBm* X−99a**
Argumento a favor da concepção extensional	É claro que há uma sensação presente que nos diz: por que falar de conceitos; o número depende certamente apenas da *extensão* (Umfang) do conceito e, assim que esta é determinada, o conceito pode, por assim dizer, se retirar. O conceito é somente um método para determinar uma extensão, mas a extensão é autônoma e, em sua essência, independe do conceito; pois é inteiramente irrelevante que conceito usamos para determinar a extensão. Esse é o argumento a favor da concepção extensional.
Objeção	Contra isto, pode-se primeiramente dizer: se o conceito é realmente apenas um expediente para se obter uma extensão, então não há nenhum lugar para conceitos na aritmética; nesse caso, devemos, então, separar completamente a classe do conceito que por acaso se acha acidentalmente associado a ela.
Contraste com a concepção oposta	No caso oposto, porém, uma extensão independente de um conceito não é mais que uma quimera e é melhor, então, não falar de modo algum dela, mas somente do conceito.[*]

A questão inicial é o divisor de águas entre uma concepção intensional – que a responde positivamente – e uma concepção extensional – que a responde negativamente. No retorno à indagação acerca do sentido da atribuição numérica a objetos que não foram reunidos em um conceito, há *prima facie* uma inversão do sentido da questão inicial: é a concepção intensional que parece reivindicar uma resposta negativa, enquanto cabe, à concepção extensional, respondê-la afirmativamente. Deste modo, ao responder com um "não" a segunda indagação, Wittgenstein parece jogar água no moinho da concepção intensional. Esta conclusão, entretanto, seria precipitada, e por diversas razões: em primeiro lugar, pois, caso a concepção intensional seja de fato aquela vindicada por Wittgenstein, seria preciso que ele aceitasse a conclusão do parágrafo (o contraste com a concepção oposta): neste caso, é melhor não falar de modo algum da extensão, mas somente do conceito. Mas não é o que se observa no decorrer do capítulo: os próprios números serão caracterizados como figurações (*Bilder*) de *extensões* de conceito[†]. Além disso, há diversos exemplos (*e.g.*, os do parágrafo 102) que procuram mostrar, contra a concepção intensional, que nem sempre uma atribuição numérica se refere a um conceito. Finalmente, pois seria incompreensível que, nos manuscritos, uma página após supostamente reconhecer o triunfo da concepção intensional, ele mencione um desejo instintivo de trabalhar somente com extensões e de não reconhecer funções (e, portanto, conceitos) na aritmética. Nesse sentido, interpretar a negativa dada à segunda

[*] *PhBm*, X−99a.

[†] Ibid., X−100a.

indagação como um veredito incontestável a favor da concepção intensional teria como consequência a impossibilidade de se entender não somente a gênese, mas também o conteúdo das discussões acerca da aritmética nas *PhBm*.

É possível interpretar, porém, a recusa de reconhecer um sentido na asserção "a e b e c são três objetos" de outro modo. Dizer de uma extensão que a ela convém certo número é um contrassenso, já que o número é uma propriedade *interna* da extensão[*]. Nesse sentido, dizer "a e b e c são três objetos" é o mesmo que dizer "a e b e c", já que a propriedade interna não "acrescenta" nada ao conteúdo do "objeto". Deste modo, a recusa de reconhecer um sentido em uma asserção do tipo "a e b e c" é bastante compreensível, já que se trata mais de um *nome* (para a extensão) do que de uma *proposição*. Que "a e b e c" não tenha sentido, isto não quer dizer que o número diz respeito essencialmente a um conceito, e não a sua extensão, mas quer dizer apenas que o número é uma propriedade constitutiva – um traço – da extensão e que, portanto, não pode ser descrita por uma proposição. De acordo com esta interpretação, portanto, é preciso recusar que a indagação feita após a questão inicial, que soa quase como uma paráfrase da questão, seja de fato uma *paráfrase*. Isto é, se o que se defende é a compatibilidade entre *i)* afirmar que é um contrassenso dizer "a e b e c são três objetos" e *ii)* negar que o número diz respeito essencialmente a um conceito, então deve-se necessariamente negar que a segunda questão, colocada no parágrafo 99, diz o *mesmo* que a primeira, apenas com outras palavras (e, como sublinhado anteriormente, com um sentido invertido).

Na segunda alínea do parágrafo 100, Wittgenstein observa que seria possível "tratar a extensão de um conceito como um objeto cujo nome certamente também tem sentido (*Sinn*)[†] apenas no contexto de uma proposição. 'a e b e c' não tem certamente nenhum sentido, não é uma proposição. Mas 'a' também não é uma proposição"[‡]. A conjunção adversativa no início da última oração, ao mesmo tempo que parece atenuar a crítica à extensão, tem a função de deslocar o problema da extensão para um objeto singular (o que, na verdade, já se encontra na sugestão, feita no início da alínea, de tratar a extensão como um objeto). Nesse sentido, a sugestão parece ser a de que a questão da "autonomia" da extensão em relação ao conceito possa ser pensada de modo análogo à questão da "autonomia" de um nome em relação a uma sentença da qual ele possivelmente faz parte.

Relembremos como esta questão é discutida no *Tractatus*. De acordo com o

[*] Ibid., XI–119e.

[†] O uso de "*Sinn*" (no lugar de "*Bedeutung*") é obscuro. Tanto no *Tractatus* quanto nas *PhBm*, ao recuperar o 'princípio do contexto' fregiano, Wittgenstein utiliza o termo "*Bedeutung*". Cf. *Tractatus*, aforismo 3.3; *PhBm*, II–14a. O próprio Frege utiliza o termo "*bedeuten*". Cf. **Frege**: Os fundamentos da aritmética, p. 247 (§62).

[‡] *PhBm*, X–100b.

aforismo 3.3, o nome só tem significado (*Bedeutung*) no contexto de uma proposição. Deste modo, para poder cumprir sua função (a de designar um objeto), ele depende de um contexto proposicional. Porém, na medida em que um mesmo nome pode aparecer em diversos contextos proposicionais*, ele não precisa depender de um contexto *específico*, afinal, ele poderia cumprir sua função em *outro* contexto proposicional. Assim, é possível dizer que o nome é autônomo em relação a cada um dos contextos proposicionais dos quais ele pode fazer parte, embora precise estar vinculado a um deles para exercer sua função designativa. No entanto, pode ocorrer que um nome só apareça em um único contexto proposicional. Isto acontece quando o nome designa um objeto que só faz parte de *um* estado-de-coisas possível† *ou* quando este objeto pode fazer parte de diversos estados-de-coisas que compartilham a mesma *forma lógica*. Neste caso, o nome é essencialmente dependente deste contexto proposicional específico.

Salvo engano, Wittgenstein quer chamar a atenção para o fato de que esta mesma situação ocorre em relação ao par extensão/conceito. Assim, podem-se distinguir dois casos. No primeiro, a extensão, enquanto um "objeto", só se vincula, para formar um "estado-de-coisas", a um conceito. Neste caso, haveria uma forma lógica específica que caracterizaria todo uso do nome de uma extensão. Assim, mesmo que o número só dependa da extensão, ele diria respeito essencialmente a um conceito (toda atribuição numérica seria uma asserção sobre um conceito). No segundo, o nome da extensão pode ser utilizado em diversos contextos proposicionais. Assim, se a teoria de Frege faz parecer que a atribuição numérica é uma asserção sobre um conceito, ela só o pode fazer mediante um processo de "amorfização" de estruturas lógicas inteiramente distintas, as quais são agrupadas em um rótulo genérico denominado de "conceito". Mostraremos que é precisamente este caso que será defendido por Wittgenstein ao longo dos capítulos *X* e *XI* das *PhBm*.

Voltemos agora para a primeira alínea do parágrafo 99 das *PhBm*, em particular à objeção ao argumento a favor da concepção extensional. A objeção era a seguinte: "se o conceito é realmente apenas um expediente para se obter uma extensão, então não há nenhum lugar para conceitos na aritmética". Ora, Wittgenstein já havia enfatizado que "assim que começamos com a aritmética, não nos importamos mais com funções"‡. O conceito, enquanto uma função, não tem lugar na aritmética. Nesse sentido, essa objeção parece ir ao encontro da concepção própria que se procura esboçar no quadro das *PhBm*. Por outro lado, essa objeção não parece ir contra a concepção extensional

*No artigo *Como negar um nome*, Gallerani Cuter chama estes diversos contextos proposicionais dos quais um nome pode fazer parte de "seções" de um nome. Nestes termos, a sentença acima diz simplesmente que um nome, no *Tractatus*, pode muito bem ter diversas "seções". Cf. João Vergílio **Gallerani Cuter**: Como negar um nome, em: *Philósophos*, 14.2 (2009), p. 45.

†O que parece ser impossível, no cenário do *Tractatus*, já que não haveria outro fato que pudesse servir como figuração deste estado-de-coisas.

‡*PhBm*, IX−94a; *WAi*, p. 66.

tal como a caracterizamos anteriormente. O fato de não haver nenhum lugar para conceitos na aritmética deve ser visto como um ponto *a favor* da concepção extensional, e não *contra* ela, já que o conceito é o instrumento intensional *par excellence.* Se Wittgenstein afirma que este argumento é contra a concepção extensional, é porque ele tem em mente certa concepção extensional cuja implementação não fora levada às últimas consequências. Uma concepção que, de um lado, reconhece que nem toda extensão é dada por meio de uma função material e, de outro lado, não pode excluir por completo a noção de "conceito" da aritmética. Uma concepção que precisa introduzir conceitos que são apenas "expedientes para se obter uma extensão". Tais expedientes, as chamadas "funções em extensão", funcionariam como "suplentes" de funções materiais, caso estas não "comparecessem" para fornecer uma extensão. Como ficará claro na Seção seguinte, é a teoria de Ramsey que é caracterizada como uma concepção extensional que não é levada a seus últimos termos.

A teoria da identidade de Ramsey e a noção de função em extensão

Ramsey foi certamente o primeiro a mourejar, do ponto de vista técnico, nas consequências da eliminação, feita pelo *Tractatus*, do sinal de identidade enquanto uma função proposicional legítima. O trabalho de Ramsey, neste âmbito, dividiu-se em duas frentes. Na primeira delas, Ramsey dedicou-se ao problema da tradução dos enunciados dos *Principia Mathematica* de Russell para uma linguagem que fazia uso da convenção tractariana de exprimir a identidade por meio de uma identidade do sinal[*]. Na segunda, Ramsey investigou os "efeitos destrutivos" da eliminação da identidade para a aritmética baseada, tal como nos *Principia Mathematica*, em uma teoria intensional das classes. A consequência mais imediata, que soa quase como um corolário da convenção feita pelo *Tractatus*, é o fato de que nenhuma descrição pode garantir que será satisfeita por pelo menos um objeto ou por exatamente um objeto. Por mais que se tente individuar um objeto por meio de uma descrição, nunca há garantias suficientes, a partir da própria descrição, de que é *esse* objeto, e apenas esse, que a satisfaz. Nesse sentido, dois objetos podem ter todas as propriedades em comum e, ainda assim, não serem o *mesmo* objeto. Não é que a definição do sinal "=" de Russell[†] esteja errada: na qualidade de definição de um sinal, ela é irreprochável. No entanto, ela não fornece aquilo que usualmente se chama de "identidade" de um objeto, pois a proposição $a = b$ pode muito bem ser verdadeira e, ainda assim, o objeto a ser distinto do objeto b. No plano da

[*]Cf., em particular, Frank Plumpton **Ramsey**: Identity, em: Maria Carla **Galavotti** (ed.): *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*, Napoli: Bibliopolis, 1991, pp. 155–69.

[†]$(a = b) = (f)fa \equiv fb$ Def.

aritmética cardinal dos *Principia Mathematica*, as consequências eram devastadoras: não há nenhuma garantia de que haja uma função proposicional satisfeita por, digamos, dois objetos (o mesmo vale para três, quatro etc.). Nesse sentido, ao definir o número 2 como a classe de todos os pares, o 3 como a classe de todos os trios etc., não há nenhuma garantia lógica de que estes números sejam distintos, já que ambas as classes podem muito bem ser vazias.

Por outro lado, Ramsey acreditava que a teoria do *Tractatus*, segundo a qual o método propriamente matemático consiste em trabalhar com equações*, encontrava dificuldades insuperáveis. Em face destas dificuldades, Ramsey procurou defender, contra Wittgenstein, que as equações corretas da aritmética podem ser concebidas como tautologias (e as incorretas como contradições). Como a primeira Seção deste capítulo procurou mostrar, Wittgenstein tinha suas próprias razões para se afastar, em 1929, da aritmética do *Tractatus*, em particular no que tange à concepção de *número*. Entretanto, um ponto de continuidade evidente com o *Tractatus* é a defesa da irredutibilidade de equações em termos de tautologias. A passagem pelo trabalho de Ramsey, no entanto, não é em vão, pois cada traço dos passos falsos que Ramsey dá na direção de sua "teoria das tautologias" será utilizado por Wittgenstein como uma crítica à concepção intensional das classes e, consequentemente, como uma crítica ao projeto logicista. Vejamos, primeiramente, as razões que Ramsey tinha para se distanciar do *Tractatus*.

No *Tractatus*, uma equação nunca assume o papel de um argumento de verdade de uma operação lógica. Tomemos, como exemplo, a seguinte proposição: "há mais coisas que são ϕs do que coisas que são ψs". Essa proposição de modo algum poderia ser, segundo o *Tractatus*, analisada do seguinte modo:

$$(\exists m, n) \cdot \hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot (m > n)^{\dagger},$$

pois uma equação é uma pseudoproposição e não pode constituir uma das bases da operação de produto lógico. Essa proposição teria que ser analisada com o auxílio de séries formais, como aponta Gallerani Cuter em seu artigo sobre a lógica do *Tractatus*‡. Neste momento, a crítica de Ramsey, tal como ela pode ser depreendida do artigo *The Foundations of Mathematics* e de alguns de seus manuscritos§, consiste simplesmente no fato de que bastaria "complicar" a equação para que o *Tractatus* já não dispusesse mais de meios para reproduzir a proposição que faz uso da equação. Bastaria, por exemplo, considerar a proposição "o quadrado do número de ϕs é igual ao cubo do

*Cf. *Tractatus*, aforismo 6.2341.

†Sendo "$\hat{x}(\phi x) \in m$" simplesmente uma abreviação para "$(\exists_m x)\phi x \cdot \neg(\exists_{m+1} x)\phi x$".

‡Cf. **Gallerani Cuter**: A lógica do *Tractatus*, pp. 114-118.

§Cf., em particular, os manuscritos rotulados como [002-26-01] e [004-03-01] em: Frank Plumpton **Ramsey**: Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920-1930, ASP. 1983.01, Archives of Scientific Philosophy, Special Collections Department, University of Pittsburgh.

números de ψs mais 2”. Segundo Ramsey, ela deveria ser analisada do seguinte modo:

$$(\exists m, n) \cdot \hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot (m^2 = n^3 + 2)$$

E, neste caso, não haveria nenhuma construção, por meio das ferramentas do *Tractatus*, capaz de fornecer a análise da proposição acima sem que a equação ocorresse como um argumento de verdade e, além disso, dentro do escopo de uma quantificação sobre o domínio de números*. Por outro lado, a “teoria das tautologias”, segundo Ramsey, não teria problema algum com o tipo de análise acima. Segundo esta teoria:

> $m^2 = n^3 + 2$ seria uma tautologia para os valores de m e n que a satisfazem, e uma contradição para todos outros valores. Então,
>
> $$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot m^2 = n^3 + 2$$
>
> seria, para o primeiro conjunto de valores de m, n, simplesmente equivalente a
>
> $$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n$$
>
> sendo ‘$m^2 = n^3 + 2$’ tautológico e, portanto, supérfluo; e seria, para todos os outros valores, autocontraditório. Assim,
>
> $$\text{‘}(\exists m, n) \cdot \hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot m^2 = n^3 + 2\text{’}$$
>
> seria a soma lógica das proposições ‘$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n$’ para todo m, n satisfazendo $m^2 = n^3 + 2$, e de contradições para todos os outros m, n; e é, portanto, a proposição que nós requisitamos, já que, em uma soma lógica, as contradições são supérfluas.†

---

*No livro *Wittgenstein’s Apprenticeship with Russell*, Gregor Landini afirma que a proposição acima poderia ser analisada como: $\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\phi x) \in n \cdot (\hat{x}(\psi x) \in m^2 \equiv_\psi \hat{x}(\psi x) \in n^3 + 2)$. Mas é assaz evidente que tal proposição não é a análise da proposição “o quadrado do número de ϕs é igual ao cubo do números de ψs mais 2”. Gregory **Landini**: *Wittgenstein’s Apprenticeship with Russell*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, p. 186 (além de alterar a notação de Landini para que corresponda à notação utilizada por Ramsey, suprimimos um parênteses sem fechamento. No livro de Landini, a análise é apresentada pela expressão “$({}^{m}\exists x)\varphi x$ & $({}^{n}\exists x)\varphi x$.&. $({}^{m2}\exists x)\psi x \equiv_\psi ({}^{n3+2}\exists x)\psi x)$”). Por outro lado, no livro *Reason’s Nearest Kin*, Michael Potter afirma, em relação ao exemplo de Ramsey, que “The rules which enable us to translate from Russell’s notation into Wittgenstein’s break down in the face of examples such as this because they involve terms for numbers: the problem is that Wittgenstein’s convention cannot be extended to number terms occurring inside the scope of quantifiers”. Mas este diagnóstico geral é falso, pois algumas proposições que contêm números dentro do escopo de quantificadores podem ser analisadas sem problemas em termos tractarianos, como no caso da proposição que faz uso da equação $m > n$ (é fácil mostrar que outras equações também não causam problemas para o *Tractatus*, como, p. ex., $m = 2n$, $m = (n+1)^2$, etc.). O que Ramsey parece ter em mente é que *algumas* equações – e não todas – não podem ser analisadas com o *framework* do *Tractatus*. Michael **Potter**: *Reason’s Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, New York: Oxford University Press, 2000, p. 216.

†**Ramsey**: The Foundations of Mathematics, p. 19. É notável que Ramsey tenha escolhido uma equação que não tem solução para m e n naturais. Assim, a proposição que faz uso dela é uma

Que tautologias e contradições seriam estas que cumpririam o papel de equações e inequações? É bem conhecido o fato de que Ramsey introduz, em sua obra *Os Fundamentos da Matemática*, um sinal para expressar a identidade entre dois objetos, um sinal que não estivesse exposto às mesmas críticas que Wittgenstein fizera à tentativa de Russell de defini-lo a partir do princípio leibniziano de identidade dos indiscerníveis. A despeito disso, Ramsey não poderia tratar as equações como simples *identidades*, já que números não são, *pace* Frege, objetos. Seria preciso que ele traduzisse as equações para o simbolismo da lógica (utilizando, neste processo, a forma mais geral da *aplicação* da equação), o que ia, é claro, ao encontro de sua tentativa de vindicar o projeto logicista. Considere dois exemplos: *i*) a equação $3 + 4 = 7$ e *ii*) a inequação $3 \geq 2$. As tautologias correspondentes seriam dadas por:

i) $\hat{x}(\phi x) \in 3 \cdot \hat{x}(\psi x) \in 4 \cdot \neg(\exists x)\phi x \cdot \psi x \cdot \supset_{\phi\psi} \cdot \hat{x}(\phi x \vee \psi x) \in 7$
ii) $(\exists_3 x)\phi x \supset_\phi (\exists_2 x)\phi x$

Considere, agora, *i*) a equação falsa $3 + 4 = 8$ e *ii*) a inequação falsa $2 \geq 3$. Elas corresponderiam, na tradução proposta, às seguintes proposições:

i) $\hat{x}(\phi x) \in 3 \cdot \hat{x}(\psi x) \in 4 \cdot \neg(\exists x)\phi x \cdot \psi x \cdot \supset_{\phi\psi} \cdot \hat{x}(\phi x \vee \psi x) \in 8$
ii) $(\exists_2 x)\phi x \supset_\phi (\exists_3 x)\phi x$

No entanto, se as variáveis denotadas por "ϕ" e "ψ" percorrem apenas funções materiais, então é evidente que as proposições acima não são contradições, e sim proposições com sentido. Para que a primeira fosse verdadeira, bastaria que o lado esquerdo da implicação material fosse sempre falso, o que ocorre, p. ex., se não há nenhum conceito material sob o qual caem exatamente 3 objetos. O mesmo raciocínio se aplica à segunda proposição: se não há nenhum conceito sob o qual caem dois objetos, a proposição é verdadeira. Mas, ora, se assim for, então, em termos gerais, a equação $a + b = c$ é *compatível* com a equação $a + b = c + 1$, e a inequação $m \geq n$ é *compatível* com a inequação $m < n$. Consequentemente, $m < n$ não pode ser a *negação* de $m \geq n$ e toda tentativa de aplicar a lógica na matemática levaria a resultados indesejados. Mais que isso: falharia também a tentativa de incorporar as equações diretamente como termos de um produto lógico, já que, não sendo contradições, as equações falsas não

contradição, já que é a soma lógica de contradições. Mas, que ela seja uma contradição, isto só pode ser constatado após "resolver" a equação e saber que ela não conduz a nenhuma raiz inteira positiva. Esta discussão parece ecoar no parágrafo 175 das *PhBm*, em que Wittgenstein pergunta se tem sentido dizer: "Ich habe so viele Schuhe als eine Wurzel der Gleichung $x^3 + 2x - 3 = 0$ beträgt". A lição do parágrafo é que não se pode incorporar a equação em uma proposição sem antes saber que ela determina um número cardinal, sob pena de se cair em contrassensos, e não apenas em proposições falsas, como pretende Ramsey.

seriam mais supérfluas em uma soma lógica, como desejava Ramsey.

A conclusão de Ramsey é que não é possível dar conta da matemática via lógica sem funções do tipo $\xi = a \vee \xi = b$. É claro que, se o sinal de identidade é permitido, então para cada extensão (finita) há um conceito correspondente, e as equações falsas acima tornam-se, portanto, contradições. Em outro escrito, Ramsey chama estas funções de "propriedades formais", em contraste com as "propriedades reais" que são dadas por conceitos materiais*. São essas "propriedades formais" que Wittgenstein caracteriza, no parágrafo 99 das *PhBm*, como conceitos que servem apenas como "expedientes para se obter uma extensão". Neste caso, salienta Wittgenstein, não há nenhum lugar para conceitos na aritmética. Mas não para Ramsey, que procurava defender a sua "teoria das tautologias". Segundo esta teoria, era absolutamente imprescindível considerar propriedades formais no mesmo nível de propriedades materiais, sob pena de deixar a verdade das proposições matemáticas – transvestidas em sua tradução lógica – depender de fatos contingentes.

É importante caracterizar este debate sobre a natureza da extensão como um debate entre uma teoria "logicista" e uma teoria "antilogicista". O tratamento da extensão via conceito é essencialmente logicista, e é por isso que a eliminação da identidade põe diversos problemas para o logicismo. Ramsey concordava que nem toda classe era definida por um conceito material, mas isto levava à impossibilidade de tratar a matemática via lógica. É por isso que Ramsey procurará fundamentar de outro modo a noção de conceito formal (com o uso da identidade), a fim de que se dispusesse de um aparato suficiente para prover uma "lógica extensional". Que a matemática fosse essencialmente extensional, na concepção de Ramsey, isto era o resultado do fato de que as relações e conceitos de que a matemática precisava não eram relações e conceitos materiais/reais (*actual*)†. Assim, era preciso "extensionalizar" a lógica para que ela desse conta desta característica constitutiva da matemática. Em certo sentido, Wittgenstein concorda com o diagnóstico de Ramsey: a matemática trabalha com extensões. É o passo que Ramsey dá na tentativa de tratar extensões pela lógica que é condenado‡: a matemática trabalha *somente* com extensões, e é preciso "separar completamente a classe do conceito que se achar acidentalmente associado a ela"§. Não é por acaso que, nos manuscritos, imediatamente antes de chamar a atenção para o fato de que "assim que começamos com a aritmética, não nos importamos mais

*Cf. **Ramsey**: Identity, p. 187.

†Cf. **idem**: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, p. 15. No entanto, Ramsey parece confundir os dois usos, discriminados na Seção anterior, do par "extensão/intensão" quando trata do número real como uma "extensão infinita".

‡Cf. Juliet **Floyd**: Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, em: Stewart **Shapiro** (ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Logic and Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2005, p. 105:"The heart of his unwillingness to follow Ramsey's approach to the foundations of mathematics was that he could not see what made the notion of function-in-extension a *logical* notion".

§*PhBm*, X−99a.

com funções"[*], Wittgenstein se mostra inclinado a tratar "separadamente a aritmética da lógica e apenas indicar em um ponto como a aritmética é aplicada na lógica". E acrescenta: "Eu acho que se deve tratar a aritmética à parte da lógica, isto é, eu acho que não devemos fazer apelo à lógica na aritmética"[†]. O fato é que, se a ideia de uma "função em extensão" não é permitida na lógica, o projeto logicista vai por água abaixo. É por isso que, consequente com seu objetivo, Ramsey procurará dar cidadania a esta noção que parece ter uma *doppia vita* – intensional e extensional. É precisamente a noção de "função em extensão" que aparece, para Ramsey, como uma noção que "completa" o rol de intensões que os conceitos materiais não são capazes de prover, como uma noção que faz as vezes, na lógica, do "meramente possível".

O modo pelo qual Ramsey introduz a noção de "função em extensão" – o único modo, segundo ele, viável – é um abandono da concepção de "função" tal como concebida por Russell nos *Principia Mathematica* e por Wittgenstein no *Tractatus*. E, curiosamente, ela terá uma característica da noção fregiana de função na medida em que a função em extensão e seus argumentos não espelham mais o valor da função. Embora a função, quando saturada por um argumento, não seja mais, como para Frege, um modo de apresentação de um objeto simples, a estrutura da proposição que é analisada em termos de uma função em extensão e seus argumentos deixa de ter qualquer vínculo essencial com a estrutura da proposição que é valor da função para aqueles argumentos. No caso de uma função unária, ela resulta, segundo Ramsey,

> (..) de qualquer relação um-para-muitos em extensão entre proposições e indivíduos; isto é, uma correlação, *praticável ou impraticável*, na qual uma única proposição é associada a cada indivíduo, sendo este o argumento da função, e a proposição seu valor.
>
> Assim ϕ (Sócrates) pode ser Queen Anne está morta,
>
> ϕ (Platão) pode ser Einstein é um grande homem;
>
> $\phi\hat{x}$ sendo simplesmente uma associação arbitrária de proposições ϕx a indivíduos x.
>
> Uma função em extensão será marcada por um sufixo e, portanto, $\phi_e\hat{x}$.[‡]

Ora, como Ramsey adota, em seu sistema de lógica, o Axioma do Infinito[§], tal correlação é sempre "impraticável". Mas isso, segundo Ramsey, pouco importa: embora essa correlação não esteja disponível individualmente, ela sempre estará incluída nas proposições que quantificam sobre a totalidade de funções em extensão. Vê-se, portanto, como Ramsey estava comprometido com uma teoria extensional do infinito na sua teoria das funções em extensão e das classes a elas associadas.

[*] *PhBm*, IX−94a.

[†] *WAi*, p. 66.

[‡] **Ramsey**: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, p. 52 (grifo nosso).

[§] Cf. ibid., p. 61.

A partir da introdução das funções em extensão, a identidade $x = y$ é definida como $(\phi_e) \cdot \phi_e x \equiv \phi_e y$. Esta definição é adequada, segundo Ramsey, pois quando x e y denotam o mesmo indivíduo, o *definiens* se torna uma tautologia, caso contrário ele se torna uma contradição. Em uma nota de rodapé*, Ramsey nota que a proposição $(\phi) \cdot \phi x \equiv \phi y$, por outro lado, também é uma tautologia caso x e y denotem o mesmo, mas não é, no caso oposto, uma contradição, como também acontecia, como vimos, no caso da tradução lógica de expressões aritméticas. Munido das funções em extensão, Ramsey poderia evitar, por conseguinte, este problema e tratar equações corretas como tautologias e equações incorretas como contradições, concretizando assim o seu projeto logicista.

Não é de causar espanto o fato de Wittgenstein condenar† tanto a definição da identidade de Ramsey quanto a própria ideia de função em extensão. A função em extensão abandona duas características centrais da noção de função como concebida pelo *Tractatus*: *i)* uma função em extensão não determina uma forma lógica; *ii)* uma função em extensão não caracteriza o sentido da proposição que é valor da função para um determinado argumento, mas apenas seu "modo de apresentação". Trata-se, *nesse sentido*, de um regresso à noção fregiana de função, combatida por Russell e Wittgenstein, tal como procuramos mostrar no primeiro Capítulo deste estudo. Por conseguinte, não se trata de um mero acaso que as críticas de Wittgenstein contra Frege ressurjam agora em oposição a Ramsey. Com efeito, a noção de "função em extensão" confunde a noção legítima de "função" com um "dicionário" que correlaciona cada objeto com uma proposição. Essa definição disjuntiva e arbitrária de uma função já era criticada, no *Tractatus*, no que diz respeito à definição fregiana da negação‡. O *Tractatus* denunciava essa tentativa alegando que se tratava de uma confusão de um argumento de uma função com o índice de um nome. Essa mesma crítica, agora voltada contra Ramsey§, aparecerá explicitamente anos mais tarde, tanto no *Big Typescript*¶ quanto na *Philosophische Grammatik*‖. Nas *PhBm*, ela comparece, em uma roupagem metafórica e bastante enigmática, na seguinte observação:

A teoria da identidade em Ramsey comete o erro que seria cometido por alguém que

*Cf. ibid., p. 53.

†A primeira crítica à Ramsey ocorre em uma carta de 1927, na qual Wittgenstein aponta para o fato de que a função de Ramsey para a identidade leva a contrassensos, e não apenas a proposições sem sentido (tautologias e contradições). Cf. Ludwig **Wittgenstein**: *Wittgenstein in Cambridge: Letters and Documents 1911-1951*, ed. por Brian **McGuinness**, Malden: Blackwell, 2008, pp. 158-9.

‡Cf. *Tractatus*, aforismos 4.431 e 5.02.

§Ramsey estava ciente disso, como se pode constatar no manuscrito [004-03-01]. Neste manuscrito, imediatamente após discutir a ideia de funções em extensão e explicar a diferença destas funções em relação à teoria de Frege, Ramsey observa que "like him [Frege], this view might be accused of confusing argument to function with index to a name". **Ramsey**: Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920-1930.

¶Ludwig **Wittgenstein**: *The Big Typescript: TS 213*, ed. e trad. por C. Grant **Luckhardt**/ Maximilian A. E. **Aue**, Malden: Blackwell, 2005, p. 389 (§113).

‖**Idem**: *Philosophische Grammatik*, ed. por Rush **Rhees**, Frankfurt: Suhrkamp, 1969, pp. 316-7.

> dissesse ser possível usar um quadro também como um espelho, mesmo que somente para uma única postura. Dizer isso é ignorar que o essencial para um espelho é justamente que dele se pode inferir a postura do corpo que está a sua frente, ao passo que, no caso do quadro, é preciso saber, primeiramente, que as posturas coincidem antes de se poder entender o quadro como uma imagem de espelho.[*]

Na metáfora, o espelho representa a noção legítima de função, enquanto o quadro usado como espelho representa a noção de função em extensão, concebida como um dicionário que correlaciona objetos a proposições. Quando Wittgenstein afirma que o essencial para um espelho é a possibilidade de inferir a postura do corpo que está na sua frente, ele quer dizer que, para uma função, é essencial que, dado um argumento para ela, seja possível inferir o seu valor independentemente de qualquer correlação arbitrária. Se $f(\xi)$ é uma função legítima e a é seu argumento, o sentido de $f(a)$ não é de modo algum determinado pela determinação de Ramsey[†] – ou daquele que traçar efetivamente a correlação arbitrária proposta por Ramsey –, mas é simplesmente determinado pela própria função e pelo próprio argumento[‡]. Já no caso da função em extensão, a fim de que seja possível utilizá-la como uma função legítima, é preciso saber de antemão que a correlação foi feita corretamente, que o valor de $f(\xi)$ para o argumento a é, de fato, $f(a)$.

Mas Ramsey poderia replicar que não é preciso utilizar funções em extensão enquanto funções legítimas, mas apenas como um instrumento para definir a identidade e, com isso, criar as bases para um cálculo lógico de extensões. Mas seria isto possível? Pois vamos supor que as funções em extensão não funcionem de modo análogo a funções legítimas e suponhamos que alguém esteja em dúvida a respeito da identidade entre dois objetos denotados por a e b, isto é, suponhamos que a verdade ou falsidade da proposição "$a = b$" esteja *sub judice*. A definição proposta por Ramsey fornece supostamente um critério segundo o qual se poderia decidir a respeito da verdade ou da falsidade desta proposição. Mas, para isso, seria preciso percorrer a totalidade das funções em extensão

[*] *PhBm*, XI–121d.

[†] Compare com a crítica que o *Tractatus* faz, no aforismo 4.431, da teoria fregiana da negação. É uma característica de um índice o fato de que não é suficiente conhecer o seu "significado" – se é que ele tem algum significado – e o significado do nome que o índice acompanha para conhecer o significado do sinal composto do nome e do índice, assim como acontece com as palavras compostas (p. ex., criado-mudo). É preciso ainda de uma nova determinação arbitrária para conferir-lhe um significado.

[‡] Isso não significa que a função seja uma regra que, segundo uma relação interna, fornece o valor da função para um determinado argumento. Quando Fogelin e Marion interpretam deste modo a metáfora wittgensteiniana do espelho, eles se esquecem que a noção de "função" que está em jogo é a noção de "função material", e não a de "função matemática" (enquanto uma regra, uma operação). É notável que haja uma confusão entre operação e função que perpassa a explicação, por estes autores, da crítica wittgensteiniana à teoria da identidade de Ramsey. Resulta disso outra confusão que está vinculada aos dois usos do par extensão/intensão acima discriminados. Robert J. **Fogelin**: Wittgenstein on Identity, em: *Synthese*, 56.2 (1983), p. 150; **Marion**: Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics, p. 70.

para que essa questão fosse decidida. Deixando de lado o problema do infinito – o que Wittgenstein parece sugerir quando afirma que o problema surgiria mesmo que o quadro fosse usado como espelho apenas para uma única postura –, o problema pode ser colocado nos seguintes termos: como as funções em extensão não se comportam como funções legítimas, não basta que o nome da função e seu argumento sejam dados para saber o valor da função para tal argumento. É preciso ainda de uma correlação arbitrária que vincule o argumento da função a uma proposição qualquer. Mas como traçar esta correlação adequadamente sem saber, *ex hypothesi*, se a é ou não idêntico a b? Afinal, é preciso saber se os valores da função, para os argumentos a e b, podem ser distintos, o que acontece apenas se a não é *idêntico* a b. Deste modo, malogra toda tentativa de definir a identidade por meio de funções definidas arbitrariamente, pois, na definição da função, cumpriria indicar, para cada argumento *distinto*, um único valor para a função e, ao aplicar a definição a um caso particular, surgiria novamente a questão de saber se dois objetos são de fato idênticos ou distintos. E, assim, nos moveríamos em círculo*.

Ora, se a crítica de Wittgenstein tem como alvo o uso de funções e conceitos na aritmética, em benefício de trabalhar "apenas com extensões", isto não pode ser considerado um passo "antiextensionalista". É, sobretudo, um passo "antilogicista", que visa a tratar a aritmética separadamente da lógica, que visa a tratar a extensão independentemente de um conceito que por acaso se ache associado a ela. A caricatura de um Wittgenstein antiextensionalista em relação à teoria das classes† origina-se, fundamentalmente, de dois equívocos: o primeiro, o de não distinguir entre os dois usos feitos do par intensão/extensão; o segundo, o de não atentar para a mudança fundamental na caracterização do número em relação ao *Tractatus*: o número caracteriza o sentido de uma proposição apenas na medida em que ele é uma propriedade interna – um aspecto – de uma extensão, de uma classe *in extenso*.

A pluralidade dos contextos de aplicação do número

Além da crítica ao modo pelo qual Ramsey procura reduzir equações a tautologias, Wittgenstein apresenta uma série de argumentos a fim de convencer o leitor de que a tau-

*Nas *PhBm*, logo abaixo da metáfora do espelho, Wittgenstein menciona o paradoxo do adjetivo "heterológico". No caso deste paradoxo, ocorre o mesmo tipo de circularidade que observamos anteriormente em relação à identidade. A circularidade aparece quando a definição é aplicada a um caso particular, a saber, quando se pergunta se a palavra "heterológico" é heterológica. Para responder a esta questão, é preciso recorrer à definição de heterológico: "Uma palavra é dita heterológica se ela tem a propriedade de não ter a propriedade que ela designa". Mas, ao aplicar a definição à palavra "heterológico", seria preciso saber o que ela designa, e teríamos que aplicar a definição novamente e assim *ad infinitum*.

†Tal como é traçada por Fogelin (Cf. **Fogelin**: Wittgenstein on Identity, p. 149) e Marion (Cf. **Marion**: Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics, p. 61).

tologia não expressa a equação, e que a equação pode ser considerada independentemente da parafernália lógica que a *aplica* a fim de expressar uma tautologia:

> Se se escreve $(\exists|||||)$ etc.$(\exists|||||||)$ etc.$\cdot \supset \cdot(\exists||||||||||||) - - - \mathcal{A}$, então pode-se estar em dúvida sobre como eu obtive o signo numérico no parênteses direito, se eu não souber que ele se originou da adição de ambos os signos numéricos à esquerda. Eu acho que isto torna claro que esta expressão é apenas uma aplicação de $5 + 7 = 12$, mas ela própria não apresenta esta equação.[*]
>
> Pode-se ignorar completamente a constituição especial da proposição $\mathcal{A}$ e atentar somente na relação, na conexão, entre os signos numéricos nela. Isto mostra que esta conexão é obtida independentemente da proposição, isto é, de outras características de sua estrutura que fazem dela uma tautologia.[†]
>
> Nenhuma investigação dos conceitos, apenas a inspeção direta (*direkte Einsicht*) pode nos comunicar que $3+2 = 5$. / Isto é o que faz com que nos rebelemos contra a suposição de que $\mathcal{A}$ pudesse ser a proposição $3+2 = 5$. Pois o que nos faz reconhecer esta expressão como tautologia não pode resultar de uma consideração acerca de conceitos, mas deve ser imediatamente visível.[‡]

Essas considerações podem ser entendidas simplesmente como o resultado do fato de que a aritmética opera com extensões e não se importa com o plano "intensional" (de funções e conceitos). Nos manuscritos, imediatamente após admitir um desejo instintivo de operar apenas com extensões e de não reconhecer funções na aritmética, Wittgenstein afirma que "gostaria de deixar para as próprias operações com números algo a significar"[§]. De acordo com o ponto de vista intensional, as operações com números e, em geral, com classes podem ser definidas a partir de operações com conceitos e as relações internas entre números e entre classes são traduzidas em termos de proposições tautológicas sobre conceitos. Nesse sentido, elas não "significam" algo distinto dessas relações lógicas definidas sobre conceitos. A proposição $\mathcal{A}$, citada por Wittgenstein, seria a tradução da equação $5 + 7 = 12$. A ausência de elementos comuns entre as extensões (a, b) e (c, d, e) seria traduzida por meio da tautologia $fa \cdot fb \cdot \neg(\exists_3 x)fx \cdot gc \cdot gd \cdot ge \cdot \neg(\exists_4 x)gx\cdot \supset_{fg} \cdot\neg(\exists x)fx \cdot gx$. Na sequência dos manuscritos, ao esboçar em linhas bastante gerais uma teoria extensional das classes, Wittgenstein alega que "se duas extensões forem disjuntas, isto se revelará nos seus signos e, para constatar esse fato, não precisaremos voltar aos conceitos, pois nem sabemos se tais conceitos, afinal, existem"[¶]. É claro que, neste caso, a "inexistência" dos conceitos não altera o caráter tautológico da proposição, já que o lado esquerdo da implicação material seria falso e a proposição seria, portanto, sempre verdadeira.

[*] *PhBm*, X−103b.

[†] ibid., X−103d.

[‡] ibid., X−107b.

[§] *WAi*, p. 31.

[¶] ibid., p. 32.

No entanto, as considerações acima continuam pertinentes: os próprios *signos* para as extensões *mostram* que elas são excludentes, independentemente de todo e qualquer aparato lógico que faz, da proposição que *utiliza* este "aspecto" de tais signos, uma tautologia. O exemplo pode ser ainda mais rudimentar: consideremos duas classes unitárias que contêm, respectivamente, os objetos a e b. Se alguém não vê aquilo que se mostra no próprio sinal para as classes, a saber, o fato de que elas não têm nenhum elemento em comum, é inútil aplicar qualquer teorema da lógica para resolver a questão, pois qualquer aplicação das leis lógicas *pressuporia* este reconhecimento imediato que só pode ser obtido por meio de uma inspeção direta nos signos. Fazer este reconhecimento imediato repousar no reconhecimento de que uma expressão é uma tautologia seria recair, segundo Wittgenstein, na mesma circularidade à qual está submetida a teoria da identidade de Ramsey: parte-se do pressuposto de que não se sabe que as classes são excludentes, e, no entanto, ao inspecionar a proposição que serviria como critério para a decisão da questão, percebe-se que ela pressupõe este saber, e ter-se-ia que investigar novamente a mesma proposição e assim *ad infinitum*[*].

Não obstante, mesmo que as tautologias acima não "expressassem" aquilo que as equações da matemática "comunicam", haveria, ainda assim, argumentos para um projeto logicista. Isso porque a lógica se ocupa de proposições e ela deve dar conta da aritmética apenas na medida em que esta é *aplicada* a proposições. Nesse sentido, mesmo que a proposição $\mathcal{A}$ não fosse a tradução legítima da equação $5 + 7 = 12$, mas apenas sua aplicação, se ela fosse a sua *única* aplicação, então a equação não poderia ser vendida separadamente da proposição $\mathcal{A}$. É claro que, se tratada como um mero jogo, a aritmética continuaria existindo independentemente de sua aplicação. Entretanto, a lógica pouco se importa com as atividades que o usuário da linguagem desempenha com os signos, exceto quando eles são utilizados de modo proposicional. É apenas sua *aplicação* a proposições que os transforma em ferramentas para o pensamento, do mesmo modo que é a *aplicação* de um bastão que o transforma em alavanca[†]. Neste caso, seria suficiente, para a lógica, prever a forma mais geral da aplicação do número e, com isso, a forma mais geral da aplicação da equação aritmética, para que a equação fosse, ao fim e ao cabo, identificada, na sua forma aplicada, a uma proposição da lógica, a uma tautologia. O início do parágrafo 106 das *PhBm* é bastante claro em relação a este argumento:

> Agora, se a transição em $\mathcal{A}$ fosse a única aplicação deste esquema aritmético, não se poderia ou não se deveria substituí-lo ou defini-lo pela tautologia? / Isto é, como seria se $\mathcal{A}$ fosse a forma geral da aplicação do esquema aritmético? / Se $\mathcal{A}$ fosse a única – portanto, *essencialmente* a única – aplicação do esquema, então o esquema não poderia

[*] O mesmo ocorre no caso das equações aritméticas, como deixa claro a alínea f do parágrafo 106 das *PhBm*.

[†] Cf. *PhBm*, II−14a.

> por si só significar nada diferente do que, precisamente, a tautologia. / Ou: o próprio esquema deveria ser a tautologia e a tautologia nada além do que o esquema. / Então, também não se poderia mais dizer que $\mathcal{A}$ é uma aplicação do esquema, mas $\mathcal{A}$ seria o esquema, por assim dizer, não apenas a ferramenta, mas a ferramenta com sua alça, sem a qual ela é certamente inútil.[*]

Na continuação do parágrafo, Wittgenstein nega que a transição em $\mathcal{A}$ seja necessária para a aplicação da equação, pois

> (...) nós entendemos e aplicamos as proposições aritméticas perfeitamente bem, sem algo como um complemento a elas. / A isto não pertence, sobretudo, a formação de uma tautologia, como vemos muito bem naquela própria tautologia, pois do contrário deveríamos, para reconhecê-la como tautologia, reconhecer outra como tautologia e assim por diante.[†]

Ora, enquanto recusa do argumento iniciado no começo do parágrafo, é bastante difícil de entender como o raciocínio acima pode funcionar. Em primeiro lugar, o logicista poderia simplesmente contra-argumentar dizendo que a aplicação da equação em proposições da linguagem faz uso tácito da transição em $\mathcal{A}$, e é tarefa da lógica revelar aquilo que há de implícito nas formas de inferência da linguagem ordinária. Em segundo lugar, a alegação de um círculo vicioso pressupõe que a proposição $\mathcal{A}$ seja uma *aplicação* do esquema e, é claro, se o esquema precisasse da proposição $\mathcal{A}$ para ser aplicado, um círculo vicioso seria inevitável: é preciso da alça para usar a ferramenta, mas é preciso usar a ferramenta para construir a alça. Mas isto contraria o que havia sido afirmado imediatamente acima: se a transição em $\mathcal{A}$ fosse a única aplicação deste esquema aritmético, (...) então *não se poderia mais dizer que $\mathcal{A}$ é uma aplicação do esquema*, mas $\mathcal{A}$ seria o próprio esquema. Nesse sentido, se o argumento do parágrafo 106 tem a intenção de ser um *modus tollens* (como parece, à primeira vista), é preciso que o leitor já tenha se convencido de que a consequência é falsa, i.e., de que a aplicação da equação e, em geral, do número, não pressupõe um complemento lógico/intensional. No Capítulo seguinte, procuraremos elucidar como esta aplicação direta das equações aritméticas (i.e., sem que seja preciso de um complemento associado a elas) ocorre. Esta elucidação, no entanto, envolve elementos que são posteriores ao parágrafo em questão, elementos que procuram mostrar que a aritmética é um "tipo de geometria" (cuidando ela própria de sua aplicabilidade). Por outro lado, é possível formular o raciocínio simetricamente oposto com as ferramentas oferecidas no início do capítulo *X*, e que envolve, como veremos, a crítica à generalidade, na teoria fregiana do número, dos conceitos de "conceito" e "objeto". Sua formulação é a seguinte: se, para aplicar o esquema aritmético, a

[*] *PhBm*, X−106a-e.

[†] ibid., X−106f.

tautologia $\mathcal{A}$ fosse necessária, i.e., se ambos não pudessem ser vendidos separadamente, então a tautologia em $\mathcal{A}$ seria – essencialmente – a forma *mais geral* da aplicação do esquema aritmético; a tautologia em $\mathcal{A}$ não é forma mais geral da aplicação do esquema aritmético; portanto, a tautologia $\mathcal{A}$ não é necessária para a aplicação do esquema aritmético. O quadro abaixo apresenta, de modo sucinto, ambos os raciocínios[*]:

$p =$ A tautologia $\mathcal{A}$ é a forma mais geral da aplicação da equação aritmética $q =$ A tautologia $\mathcal{A}$ é necessária para aplicar a equação aritmética
$p \equiv q$ $\neg q$ (pois a aritmética é um tipo de geometria, ...) $\therefore \neg p$
$p \equiv q$ $\neg p$ (pois conceito/objeto é apenas uma norma de apresentação, ...) $\therefore \neg q$

Explicitemos a proposição designada por "$\mathcal{A}$", definida apenas de modo abreviado no parágrafo 103: $(\exists|||||)\varphi \cdot (\exists|||||||)\psi \cdot \neg(\exists x)\varphi x \cdot \psi x \supset_{\varphi\psi} \cdot(\exists||||||||||||)\varphi \vee \psi$. O que é característico nesta proposição é que a atribuição numérica está sempre vinculada a conceitos (denotados pelas letras gregas φ e ψ). É claro que, se o número não diz respeito essencialmente a um conceito, cai por terra a tentativa acima de fornecer a *forma geral* da aplicação do número. Nos manuscritos, logo após concluir que a expressão "$(3)_x\varphi x \cdot (4)_x\psi x \cdot \neg(\exists x)\varphi x \cdot \psi x\cdot \supset_{\varphi\psi} \cdot(3+4)_x\varphi x \vee \psi x$" não é o mesmo que a regra de substituição $3 + 4 = 7$[†], Wittgenstein observa: "Mas a adição de números cardinais aparece de fato somente neste caso? É a sua ú n i c a aplicação? Pois neste caso não teria sentido tratar a adição isolada da sua aplicação lógica. (Aqui, porém, eu penso no fato de que a forma sujeito/predicado não determina nenhuma forma lógica.)"[‡]. O início do raciocínio é o mesmo que procuramos expor acima: se a tautologia fosse a única aplicação da equação, então ambas não poderiam ser vendidas separadamente (e o inverso também vale). O elemento novo que aparece nesta observação é a forma sujeito/predicado. Uma leitura atenta dos manuscritos permite ver claramente que a crítica de Wittgenstein à generalidade, na teoria fregiana, da forma conceito/objeto (o que, para Wittgenstein, é o mesmo que sujeito/predicado) mantém uma relação

[*]Dada a equivalência entre p e q (cf. a tabela acima), é notável que haja, nas *PhBm*, argumentos independentes para sustentar a falsidade de ambas as teses, já que seria suficiente mostrar a falsidade de uma delas. Este fato, no entanto, ajuda a explicar porque a crítica a ambas as teses se sustenta mesmo quando, anos mais tarde, Wittgenstein abandona uma de suas vigas. Como veremos, a crítica à norma de apresentação conceito/objeto só se justifica na presença da noção de "análise lógica", noção da qual Wittgenstein se afasta ao longo dos anos 30.

[†] *WAi*, p. 67. Esta conclusão aparece nas *PhBm* no início do parágrafo 101.

[‡]ibid., p. 68 .

solidária com a crítica à teoria fregiana do número cardinal*. Com efeito, ao se mostrar que a "forma" conceito/objeto não é *uma* forma lógica, mas *muitas*†, mostra-se que a teoria de Frege da atribuição numérica como uma asserção sobre um conceito captura apenas o seu uso na "superfície" da linguagem e não constitui uma análise lógica do conceito de número naquilo que ele possui de essencial. Essa "generalidade" da forma conceito/objeto, que permite que o número seja vinculado essencialmente a um predicado, é apenas uma característica "acidental" da linguagem, e não o resultado essencial de um processo de análise‡. É claro que se poderia falar de conceito e objeto como o resultado de uma análise lógica, como faz, p. ex., o *Tractatus*. Mas, neste caso, a teoria fregiana se torna, aos olhos de Wittgenstein, muito específica, e por duas razões: a primeira é que nem toda atribuição numérica é uma asserção sobre um conceito genuíno; a segunda é que nem toda atribuição numérica envolve uma generalidade ou indeterminação inerente à forma "existem n objetos tais que ..."§.

Nas *PhBm*, são apresentados diversos exemplos para mostrar que a teoria fregiana não pode ser aplicada quando se trata do resultado da análise lógica (e não de uma norma de apresentação da linguagem ordinária). É possível dividir estes exemplos em duas classes (com a excessão de um caso que pertence a ambas e será tratado no final). Os exemplos da primeira classe procuram mostrar que nem toda atribuição numérica é

*Há passagens nos manuscritos em que este vínculo é caracterizado de modo ainda mais forte. Cf., em particular, a observação da página 234 do *WAii* segundo a qual uma crítica da teoria fregiana do número cardinal deve *começar* com uma crítica dos conceitos "conceito" e "objeto".

†Cf. *PhBm*, IX−93b: "Begriff und Gegenstand, das ist aber Prädicat und Subjekt. Und wir haben gerade gesagt, das Subjekt-Prädikat nicht *eine* logische Form ist".

‡Cf. ibid., XI−115e-f: "Man kann natürlich die Subjekt-Prädikat- oder was dasselbe ist die Argument-Funktion-Form als eine Norm der Darstellung auffassen und dann ist es allerdings wichtig und charakteristisch, daß sich in jedem Fall wenn wir Zahlen anwenden die Zahl als Eigenschaft eines Prädikates darstellen läßt. Nur müssen wir uns darüber im klaren sein, daß wir es nun nicht mit Gegenständen und Begriffen zu tun haben, als den Ergebnissen einer Zerlegung, sondern mit Normen, in die wir den Satz gepreßt haben. Und es hat freilich eine Bedeutung daß er sich auf diese Norm hat bringen lassen. Aber das In-eine-Norm-Pressen ist das Gegenteil einer Analyse. Wie man, um den natürlichen Wuchs des Apfelbaums zu studieren nicht den Spalierbaum anschaut, außer um zu sehen, wie sich dieser Baum unter diesem Zwang verhält. / Daß man das Zusammentreffen von Gerichtsverhandlungen mit Mondesfinsternissen zählen kann, sagt allerdings, daß wir einen Begriff der logischen Form haben, aber es zeigt natürlich nicht daß wir im Besitze einer logischen Analyse dieser Vorgänge sind".

§São inúmeras as observações nos manuscritos que apontam para a justeza desta leitura. Cf, em particular, as seguintes observações da página 8 do *WAii*: "Es war immer mein Widerstand gegen die Fregesche Auffassung, daß sie mir zu speziell schien. Und das kommt darauf hinaus, daß nicht jede Zahlangabe die Angabe über eine eigentliche Funktion ist. / 'Es gibt 4 Menschen in diesem Zimmer', 'In meinem Gesichtsfeld sind 4 rote Kreise'. Damit 'x ist ein roter Kreis' Sinn hat muß x schon die logische Form eines Farbflecks im Gesichtsfeld sein. (Und Analoges gilt für den ersten Satz). Es kommt mir vor als sei diese Theorie der Zahl noch ein Überbleibsel der Subjekt-Prädikat Theorie der Sätze, (oder soll ich nur sagen: es hänge sie mit dieser unmittelbar zusammen.) / Ich fühle so: In unserer gewöhnlichen Sprache ist allerdings jede Zahlangabe die Aussage über einen Begriff, d.h. über ein Prädikat, aber ich glaube daß sich mit dieser Prädikatform die verschiedensten logischen Strukturen verkleiden und daß es nur durch ein erkünsteltes Verfahren der Darstellung so scheinen kann, als handle es sich hier um Begriffe".

uma asserção sobre um conceito genuíno. Já os exemplos da segunda classe contestam a ideia de que a asserção numérica deva sempre conter uma generalidade ou uma indeterminação, intrínseca à forma “Existem n coisas tal que ...”. Essa divisão reflete, de maneira bastante precisa, a crítica de Wittgenstein da “generalidade”, na teoria de Frege, das categorias lógicas de “conceito” e “objeto”. É interessante observar que o uso dos exemplos de ambas as classes revela duas críticas completamente independentes, no sentido de que a demonstração da pertinência de cada uma delas não depende da validade da outra. Para que esta independência seja melhor observada, é possível utilizar, como princípio metodológico, a suposição de que o adversário está certo no que diz respeito ao ponto que é atacado pela outra crítica.

Comecemos pelos exemplos da primeira classe. Vamos supor, com o adversário, que a atribuição numérica contenha sempre uma generalidade expressa na forma $(\exists_n x)$.... A tese do adversário é que toda atribuição numérica é da forma $(\exists_n x)\varphi x$. Os exemplos de Wittgenstein procuram mostrar que nem toda atribuição numérica pode ser entendida como um caso particular da forma acima. Primeiramente, ele procura um critério que permita distinguir casos em que o número cardinal pode ser aplicado – como em $(\exists x, y)\varphi x \cdot \varphi y$, que pode ser escrito na forma $(\exists_2 x)\varphi x$ – de casos em que o número cardinal não pode ser aplicado – como em $(\exists x, y)\varphi x \cdot \psi y$. O critério que Wittgenstein oferece nos manuscritos – e que é aplicado na segunda alínea do parágrafo 99 das *PhBm* (cf. *infra*) – é o seguinte: a função proposicional deve tratar de seus argumentos de modo simétrico, i.e., de modo que qualquer permutação entre os argumentos resulte essencialmente na mesma função e, por conseguinte, na mesma proposição:

> Pode-se também dizer: ao invés de “$(\exists xyz...)$...”, eu posso, então, sempre dizer “$(\exists_n x)$..” se a função de x y etc. for tal que eu não deva mencionar nenhum dos objetos especificamente, ou também que eu não deva ordenar primeiramente os objetos na função. Que eu não tenha que os alocar em nenhum lugar. Que eles sejam como pessoas que eu coloco em um quarto e fico satisfeito se eles estiverem lá sem me preocupar com suas posições no quarto. (...) A função deve ser tal que eu não precise designar aos objetos os seus lugares.*
>
> Pode-se também dizer: para começar, depois de “há n coisas” deve sempre seguir “tal que cada...”, e não “tal que x...y...etc”.†
>
> Se coisas forem contadas, então elas poderão ser contadas apenas na generalidade e à parte de suas individualidades. E se, em uma proposição, o discurso for sobre n coisas, então a função a respeito destas n coisas deverá ser simétrica; isto é, estas coisas deverão ocupar, na função, lugares com os mesmos direitos.‡

É fácil observar que este critério é sempre satisfeito quando, em uma soma ou produto lógico, ocorrem todas as permutações de argumentos em relação a uma função

* *WAi*, p. 71.

† ibid., p. 71.

‡ *WAii*, p. 12.

qualquer. É precisamente para garantir o critério de igualdade de direitos dos lugares de argumento de uma função proposicional – chamemo-lo de **CI** – que todas as permutações (logicamente ociosas) são incluídas no exemplo do parágrafo 99*b*. O exemplo é o seguinte: a proposição "$(\exists x, y, z) \cdot aRx \cdot xRy \cdot yRz \cdot zRb \cdot \vee \cdot aRy \cdot yRx \cdot xRz \cdot zRb \cdot \vee \cdot$ etc. " (em que o "etc." é somente uma abreviação para todas as permutações dos lugares de argumento) pode muito bem ser escrita como "$(\exists_3 x) aRxRb$". Nesse sentido, é perfeitamente possível aplicar o número neste caso, uma vez que o critério **CI** é satisfeito. É possível até mesmo construir a série de proposições que se obtém deste modo:

$(\exists_1 x) aRxRb = (\exists x) \cdot aRx \cdot xRb$ Def.
$(\exists_2 x) aRxRb = (\exists x, y) \cdot aRx \cdot xRy \cdot yRb \cdot \vee \cdot aRy \cdot yRx \cdot xRb$ Def.
$(\exists_3 x) aRxRb = (\exists x, y, z) \cdot aRx \cdot xRy \cdot yRz \cdot zRb \cdot \vee \cdot$ etc. (todas as permutações) Def.
$\ldots$

Entretanto, é impossível definir um conceito φ de modo que a série de proposições $(\exists_n x)\varphi x$ seja materialmente equivalente à série de proposições acima. Pois, por um lado, se o conceito φ é definido como

$$\varphi(\xi) = aR\xi \cdot \xi Rb \cdot \vee \cdot (\exists x) aRx \cdot xR\xi \cdot \xi Rb \cdot \vee \cdot aR\xi \cdot \xi Rx \cdot xRb \cdot \cdots \vee \cdot \text{ Def.},$$

a proposição $aRc \cdot cRb \cdot aRd \cdot dRb$ implica $(\exists_2 x)\varphi x$, mas não implica $(\exists_2 x) aRxRb$. Por outro lado, ao se tentar "consertar" de modo *ad hoc* o caso acima por meio de uma cláusula em cada termo da disjunção, digamos,

$$\varphi(\xi) = aR\xi \cdot \xi Rb \cdot \neg(\exists x, y) aRx \cdot xRb \cdot aRy \cdot yRb \cdot \vee \cdot \cdots \text{ Def.},$$

esta tentativa também falha, pois, neste caso, a mesma proposição $aRc \cdot cRb \cdot aRd \cdot dRb$ implica $(\exists_1 x) aRxRb$, mas não implica $(\exists_1 x)\varphi x$. Deste modo, as asserções numéricas acima não podem ser tratadas como asserções sobre um conceito genuíno. Wittgenstein afirma que, neste caso, nós *construímos* (bilden) o conceito "membro entre *a* e *b*" (coisa entre essas paredes). Esse "conceito", no entanto, não é o resultado de uma análise lógica, mas apenas uma norma de apresentação da linguagem comum, na qual toda atribuição numérica se deixa apresentar como uma asserção sobre um "conceito". A linguagem ordinária se apresenta, portanto, como o leito de Procusto do resultado da análise lógica, ao tratar formas lógicas inteiramente distintas pela norma de apresentação conceito/objeto*. Se não se quiser jogar fora o resultado da análise lógica, no caso do

*Não é raro Wittgenstein utilizar o termo "amorfo" para caracterizar estas normas de apresentação da linguagem comum. Este mesmo termo também é utilizado, de modo semelhante, no contexto de uma crítica à definição de Russell da relação de ancestralidade (denotada por R^*) e, em geral, à teoria exemplo "membros entre a e b", será melhor, então, não falar de um conceito. Deste modo, quando se usa o simbolismo "$(\exists_5 x)aRxRb$" para expressar a proposição "Há 5 membros entre a e b", o "x" indica uma classe de objetos *in extenso* (eles não são agrupados na proposição por um conceito), da qual o número cardinal é uma propriedade interna.

Outro exemplo que aparece nos manuscritos é a proposição "Há 5 homens que se amam uns aos outros". Por razões semelhantes ao exemplo anterior, esta proposição também não pode ser colocada na forma $(\exists x, y, z, u, v) \cdot \varphi x \cdot \varphi y \cdot \varphi z \cdot \varphi u \cdot \varphi v$*. Ela é expressa pela seguinte proposição:

$$(\exists x, y, z, u, v) \cdot xRy \cdot xRz \cdot xRu \cdot xRv \cdot yRx \cdot yRz \cdot yRu \cdot yRv \cdot zRx \cdot zRy \cdot zRu \cdot zRv \cdot uRx \cdot uRy \cdot uRz \cdot uRv \cdot vRx \cdot vRy \cdot vRz \cdot vRu,$$

que satisfaz o critério **CI** e pode ser expressa por $(\exists_5 x)xRx$. Vale notar que o *Tractatus* não tinha nenhum problema em aplicar o número aos casos acima, já que estes casos formam uma série formal, e o número se apresentava como o expoente da operação que gera a série formal. Nesse sentido, este aspecto da aritmética tractariana é preservado no período intermediário. O que muda é que o número – agora cardinal – não se vincula mais a uma operação, mas a uma classe *in extenso* que, ao contrário da operação, caracteriza o sentido da proposição.

Voltemos agora a atenção para os exemplos da segunda classe e suponhamos, desta vez, que a atribuição numérica seja sobre um conceito material. A tese do adversário é que toda atribuição de um número a um conceito é uma asserção geral, pois o que se afirma é sempre *quantos* objetos caem sob o conceito, mas não *quais*. Os exemplos de Wittgenstein procuram mostrar que esta tese só é possível mediante um achatamento de diversos objetos lógicos de categorias distintas sob o rótulo de "objeto" e que, se quisermos preservar o resultado da análise lógica e distinguir propriedades formais de propriedades materiais dos objetos, resultará disso que nem sempre a atribuição numérica será indeterminada em relação à questão "*quais?*".

Um dos exemplos fornecidos é o da proposição "Há 3 círculos de tal e tal tamanho e em tal e tal lugar que são vermelhos"†. Esta proposição, de início, não pode ser analisada como "$(\exists x, y, z) \cdot x$ é um círculo $\cdot x$ é vermelho $\cdot$ y é um círculo $\cdot$ etc.", já que "ser um círculo" não é uma propriedade externa de certo "objeto" x, que poderia ser ou não um círculo. O contraste com a cor parece ser evidente, já que o vermelho é uma propriedade externa do círculo. Nesse sentido, certamente a atribuição numérica se refere a um conceito material, a uma propriedade externa dos objetos que caem sob ela.

dos agregados (Cf. *PhBm*, XV−170a-b).

*Cf. *WAi*, p. 71.

† *PhBm*, XI−115c.

Porém, há também certas propriedades internas que delimitam aquilo que, no contexto da proposição acima, pode ser subsumido pelo conceito "vermelho". Deste modo, o conceito não se aplica, como na teoria fregiana, a todos os "objetos" – caso em que a atribuição numérica seria sempre indeterminada –, mas apenas a um tipo de objeto determinado por certas propriedades formais.

Dito de outro modo, o que Wittgenstein critica nas teorias de Frege e Russell é a transformação, em uma generalidade, de propriedades formais em proposições relativas. De acordo com estas teorias, a proposição "Há três círculos que satisfazem a propriedade φ" é analisada do seguinte modo: "Há três coisas (x, y, z) que são círculos e que satisfazem a propriedade φ". A proposição "Eu tenho um número primo de chapéus" é simbolizada pela expressão "$(\exists n) n$ é primo · eu tenho n chapéus". Assim, propriedades formais e materiais são colocadas em pé de igualdade na construção da proposição. Para Wittgenstein, no entanto, tais propriedades formais devem ser entendidas como variáveis que restringem o campo de aplicação do conceito material em questão. Na proposição "Eu tenho um número primo de chapéus", por exemplo, a propriedade formal "primo" não é uma parcela de um produto lógico dentro do escopo do quantificador existencial, a qual contribuiria para a verdade ou falsidade deste produto. Ela é uma restrição da classe de valores que serão considerados na quantificação existencial.

Pode ocorrer que a restrição seja feita de tal modo que a generalidade ou indeterminação desapareça por completo. Na proposição "Eu tenho um número primo de chapéus", há duas dimensões de indeterminação: *quantos* e *quais* chapéus. Bastaria, no entanto, acrescentar uma propriedade formal para que uma destas dimensões desaparecesse: a proposição "Eu tenho um número primo e par de chapéus" já não deixa dúvidas quanto ao número de chapéus. Já nas proposições exemplificadas no parágrafo 115, toda indeterminação desaparece: a proposição "Há 3 círculos de tal e tal tamanho e em tal e tal lugar que são vermelhos" não deixa dúvidas sobre quais são os círculos; na proposição "O segmento AB é dividido em duas (3, 4, etc.) partes iguais", as partes do segmento também são determinadas pelo número de partes divididas. Em todos estes exemplos, a atribuição numérica não se apresenta de modo a conter uma generalidade ou indeterminação.

O caso que reúne tanto a crítica à generalidade do "conceito" quanto a crítica à generalidade do "objeto" é o exemplo da segunda alínea do parágrafo 102, em que a atribuição numérica não se refere a um conceito e, embora ela seja expressa por uma disjunção e, por conseguinte, haja uma indeterminação, esta indeterminação é circunscrita por uma delimitação formal do âmbito das variáveis em questão. O exemplo é bastante explícito em relação à crítica ao ponto de vista intensional: "Só 3 dos objetos a,b,c,d possuem a propriedade φ. Isso pode ser expresso por meio de uma disjunção. Obviamente, este também é um caso em que uma atribuição numérica não se refere a um conceito (embora fosse possível fazer parecer que sim usando o ’=’.)”[*]. A disjunção em questão é expressa por “$\varphi a{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi c{\cdot}\oplus{\cdot}\varphi a{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi d{\cdot}\oplus{\cdot}\varphi a{\cdot}\varphi c{\cdot}\varphi d{\cdot}\oplus{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi c{\cdot}\varphi d$”[†]. A dificuldade da teoria intensional para lidar com este exemplo é que só é possível transformar esta proposição na forma $(\exists_3 x)\psi x$ se houver um conceito que reúna a extensão formada por a,b,c,d. É claro que, com o uso da identidade, a dificuldade desaparece, já que a seguinte definição seria possível: “$\psi(\xi) = \varphi(\xi) \cdot (\xi = a \vee \xi = b \vee \xi = c \vee \xi = d)$ Def.”. Mas, uma vez que se aceita a tese de que todo conceito é uma propriedade material dos objetos que sob ele caem, a existência ou inexistência de uma função material que “coleta” todos os objetos de uma classe depende da *verdade* de uma proposição. Por conseguinte, a existência de um conceito material que fornece a extensão $[a, b, c, d]$, depende da verdade de uma proposição. A alínea seguinte, como vimos anteriormente, procura afastar a ideia de que toda extensão deve ser efetivamente agrupada por um conceito:

> Se digo: se há 4 maçãs sobre a mesa, então há $2 + 2$ sobre ela, isso significa somente que as 4 maçãs já contêm a possibilidade de serem agrupadas em 2 e 2 e eu não preciso esperar que elas sejam efetivamente agrupadas por um conceito. Essa “*possibilidade*” refere-se ao sentido, não à verdade de uma proposição. $2+2 = 4$ pode significar “sempre que tenho 4 objetos, existe a possibilidade de agrupá-los em dois e dois”.[‡]

A recusa em trabalhar com o domínio daquilo que é ou não é o caso, expressa na primeira alínea do parágrafo[§], é deste modo reiterada nas duas alíneas seguintes, em que se trata de constatar que a aplicação do número não requer que cada extensão seja efetivamente agrupada por um conceito[¶].

Número, esquema e aplicação

As duas últimas Seções apresentaram sobretudo as críticas de Wittgenstein a uma teoria intensional das classes, e os aspectos positivos da teoria do número das *PhBm* foram ressaltados a partir do contraste com esta teoria. Será útil, neste momento, fazer um sumário dos resultados positivos obtidos até então:

---

[*] *PhBm*, X−102b.

[†] Nos manuscritos, Wittgenstein escreve *in extenso* a disjunção acima, utilizando, no entanto, o sinal $\vee$ entre as parcelas da disjunção. Mas é claro que o sinal deve simbolizar a disjunção exclusiva das parcelas da disjunção, caso contrário a expressão não diz aquilo que a proposição ““Só 3 dos objetos a,b,c,d possuem a propriedade φ” pretende dizer. A disjunção correta com o operador de disjunção não exclusiva pode ser expressa por “$\varphi a{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi c{\cdot}\neg\varphi d{\cdot}\vee{\cdot}\varphi a{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi d{\cdot}\neg\varphi c{\cdot}\vee{\cdot}\varphi a{\cdot}\varphi c{\cdot}\varphi d{\cdot}\neg\varphi b{\cdot}\vee{\cdot}\varphi b{\cdot}\varphi c{\cdot}\varphi d{\cdot}\neg\varphi a$”.

[‡] *WAii*, p. 11; *PhBm*, X−102c.

[§] Cf. *PhBm*, X−101a: “Ich will sagen die Zahlen können nur definiert werden aus Satzformen, unabhängig davon welche Sätze wahr oder falsch sind”.

[¶] A mesma recusa ocorre, também, na crítica de Wittgenstein à definição da identidade numérica – ao modo de Frege e Russell – por meio da correlação biunívoca. Esta crítica, que aparece nos parágrafos 118 e 119 das *PhBm*, não será tematizada neste estudo.

i) Aquilo que caracteriza uma extensão é a classe, e não o conceito. Este é apenas um "expediente", um "pretexto". (*PhBm*, X−99c)
ii) O símbolo para uma classe é uma lista. (*PhBm*, XI−118b)
iii) A pertinência de um elemento à lista não é determinada por uma proposição, mas por uma propriedade interna.
iv) Uma classe pode ser utilizada em diversos contextos proposicionais, e não apenas naquele que atribui uma propriedade a cada elemento da classe.
v) O número cardinal é uma propriedade interna de uma lista. (*PhBm*, XI−118d)
vi) Uma extensão caracteriza o sentido de uma proposição, e o número, enquanto uma propriedade interna do símbolo para a extensão, é uma marca característica de uma estrutura lógica. (*PhBm*, X−105a)

O número cardinal, enquanto propriedade interna de uma lista, não se confunde com a própria lista. No entanto, para que a aritmética trabalhe com números, é inevitável que estas propriedades internas se manifestem no seu próprio simbolismo, e isto pode ocorrer de dois modos: ou *i)* os números são apresentados por uma notação que contenha listas das quais eles são uma propriedade interna ou *ii)* os números são apresentados por um sistema de sinais que, juntamente com um conjunto de regras sintáticas, tenha, ao fim e ao cabo, a mesma multiplicidade da notação que trabalha diretamente com listas. Aquilo que Frascolla chama de aritmética de traços (*arithmetic of strokes*[*]) é um exemplo da primeira, ao passo que o sistema decimal é um exemplo da segunda.

Como nota Narboux[†], a exemplificação, no plano do sinal, de uma propriedade interna é chamada por Wittgenstein de "esquema" ou "paradigma". Na notação com traços, os numerais são introduzidos na qualidade de esquemas ou representações paradigmáticas de listas, das quais o número é uma propriedade interna. Na notação decimal, regras são introduzidas para recuperar a mesma multiplicidade da notação com traços. Ambos os sistemas alcançam o mesmo objetivo, a saber, o de apresentar o "espaço" dos números. Que dois sistemas apresentem o mesmo "espaço", isto se mostra pelo fato de que eles podem ser *traduzidos* um no outro, *substituídos* um pelo outro sem perda de poder expressivo. De todo modo, é essencial que a aritmética trabalhe com uma notação *particular* que, juntamente com as regras para o uso da notação, possua uma multiplicidade adequada. Ainda que cada notação particular possa ser substituída por outra sem prejuízo para a aritmética, esta não pode se abster de utilizar uma notação particular em benefício de um tratamento geral e que não faz apelo aos modos particulares de apresentação de seus objetos.

[*] **Frascolla**: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, p. 44.
[†] Cf. Jean-Philippe **Narboux**: Aspects de l'arithmétique, em: *Archives de Philosophie*, 3 (2001), p. 583.

A partir do estabelecimento da notação, é possível definir operações que incidem sobre os elementos da notação, de modo que o resultado da operação seja, também, um elemento da notação. A título de exemplo, na aritmética de traços, a soma pode ser apresentada por uma definição indutiva, a saber,

$$\begin{cases} x + | \overset{Def.}{=} x| \\ x + y| \overset{Def.}{=} (x + y)| \end{cases}$$

É importante observar que a definição da operação fornece *ambos* os lados da equação; uma operação não pode ser concebida, ao modo de um experimento, como um processo que é feito e que fornece um resultado de modo independente do processo. Pelo contrário: processo e resultado são, no cálculo, o *mesmo*, e é por isso que é importante, ao se definir uma operação, que se forneça também o seu resultado.

Uma vez provada uma equação da forma $m + o = n$, ela pode ser aplicada, como vimos, como uma regra sintática. Sua aplicação na linguagem depende de contextos em que o número é utilizado (a Seção anterior procurou exemplificar diversos contextos em que isto ocorre). Uma das virtudes da definição de número no período intermediário como uma propriedade interna de uma lista é que ela explica como o número pode também ser aplicado de modo intrassistêmico na aritmética. Como o número é vinculado a uma lista, que constitui o símbolo de uma classe, e como a pertinência à classe é uma propriedade interna de um objeto, há um vínculo do número com listas utilizadas no interior da própria aritmética, como, *e.g.*, as permutações de "a, b, c", as raízes de uma equação de segundo grau etc. Nestes casos, o número é uma marca característica destes conceitos formais (i.e., não se pode alterar o número de coisas que caem sob o conceito sem que, com isso, o próprio conceito se altere).

No *Tractatus*, a relação entre o número de elementos que caem sob um conceito formal e o número enquanto o expoente de uma operação era, no mínimo, nebulosa. Já nas *PhBm*, a relação entre o número enquanto propriedade interna de uma lista e o número de elementos que caem sob um conceito formal é imediata: "Mesmo que eu não possa dizer 'Há 4 cores puras', ainda assim as cores puras e o número 4 estarão, de alguma maneira, ligados entre si, e isso deve se expressar também de algum modo – p. ex., quando digo 'vejo 4 cores nesta superfície: amarelo, azul, vermelho, verde' "*.

O fato de o número ser uma propriedade interna de uma lista, independentemente de haver um conceito material que tenha esta lista como sua extensão, explica a aplicação do número no interior da aritmética. No entanto, isto também valeria para

* *PhBm*, XI–116a.

equações? Equações são aplicadas enquanto parte da sintaxe da linguagem. Wittgenstein chama de sintaxe, em um sentido geral do termo, as "regras que nos dizem em que conexões unicamente uma palavra tem sentido, excluindo assim estruturas sem sentido (*nonsensical*)"[*]. É compreensível que os termos da linguagem possam ser usados de modo a formar estruturas com sentido e estruturas sem sentido. Por outro lado, que na matemática isto também aconteça, está longe de ser evidente. Afinal, o *Tractatus* havia banido as equações da linguagem figurativa e, portanto, da linguagem com sentido. As proposições matemáticas são, segundo o *Tractatus*, pseudoproposições[†] e, portanto, não possuíam sentido algum, não podendo sequer ser negadas.

Nos textos do período intermediário, há notavelmente uma tentativa de acomodar a noção de proposição matemática dotada de sentido, o que deste modo enfraquece, como afirma Frascolla[‡], uma possível continuidade com o *Tractatus*. Quais seriam as razões para se abrigar, na linguagem dotada de sentido, também proposições matemáticas, essas estranhas criaturas que sabem, elas próprias, se são verdadeiras ou falsas?

No Capítulo seguinte, dedicado à noção de "proposição matemática" nas *PhBm*, retornaremos a esta indagação. Desde já, vale notar que a introdução da noção de proposição matemática ao menos abre uma via para explicar a aplicação intrassistêmica de equações enquanto regras de sintaxe no interior da matemática. Afinal, faz sentido perguntar se as duas raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são de tal modo que uma é par e outra é impar, mas não faz sentido perguntar se as duas raízes desta equação são de tal modo que duas são pares e uma é impar. Assim como a equação participa da sintaxe da linguagem ordinária, ela também participa da sintaxe da própria matemática, isto é, do espaço em que questões matemáticas são postas com sentido.

[*] *SRLF*, p. 162.

[†] *Tractatus*, aforismo 6.2.

[‡] Cf. **Frascolla**: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, p. 54: "The analysis of this typically Wittgensteinian theme will show that, in the intermediate phase, the continuity with the Tractatus is actually weakened by the irruption of that notion of mathematical proposition, which had been expressly banished in the early work".

CAPÍTULO 3

A assim chamada “proposição matemática”

> O teste crucial de uma filosofia, para um matemático, é que ela deve dar algum tipo de explicação racional de *proposições* e de *prova*.
>
> Godfrey Harold Hardy, *Mathematical proof*

> Só pode existir dúvida onde exista uma pergunta; uma pergunta, só onde exista uma resposta; e esta, só onde algo *possa* ser *dito*.
>
> Ludwig Wittgenstein, *Tractatus, 6.51*

Ainda nos capítulos *X* e *XI* das *PhBm*, Wittgenstein esboça uma primeira caricatura daquilo que será por ele chamado de “proposição matemática”. As considerações do fim do capítulo *XI* são, no entanto, interrompidas em favor de uma extensa consideração sobre o infinito, tanto na matemática como na linguagem em geral. Munido de uma teoria satisfatória do infinito, ele pode, enfim, voltar no capítulo *XIII* a considerações acerca da proposição matemática e do estatuto das “proposições gerais” na matemática. Mais especificamente, as observações do capítulo *XIII* se movem em torno da temática do “sentido” de tais proposições. Os capítulos *XIV* e *XV* fornecem respectivamente, à luz das considerações dos dois capítulos anteriores, uma teoria da generalidade universal e da quantificação existencial na matemática. A primeira leva a uma interpretação da relação entre aritmética e álgebra. A segunda, a uma teoria intensional das “descrições” de objetos matemáticos, acompanhada de uma virulenta crítica à teoria dos conjuntos. Os três capítulos seguintes tratam da geometria e dos números reais, e serão considerados no próximo Capítulo deste estudo. Por fim, o último capítulo matemático do livro traz elementos para uma caracterização da negação na aritmética. É notável que um capítulo sobre a negação esteja tão distante dos capítulos sobre o sentido da proposição matemática. Do ponto de vista do conteúdo do capítulo, esse distanciamento só parece se justificar pelo fato de o capítulo *XIX* conter observações sobre os números primos e a construção de números irracionais que dependem de assuntos discutidos nos três capítulos anteriores. As observações deste capítulo, no entanto, são importantes para elucidar algumas questões sobre o significado da negação e do falso na matemática e serão tematizadas ainda neste Capítulo.

Como já dito, Wittgenstein se interessou, à época das *PhBm*, em traçar uma aproximação entre as noções de proposição genuína (factual, empírica) e de proposição matemática. É bem verdade que esta aproximação tem limites precisos, e qualquer consideração acerca do estatuto da última deve preservá-los. Entretanto, como afirma Shanker, há inúmeros argumentos nas *PhBm* que se interessam mais pelas similaridades entre essas duas noções do que pelas suas diferenças[*]. Dois exemplos são suficientes para convencer o leitor de que alguns raciocínios, pertencentes ao escopo das proposições genuínas, são utilizados para esclarecer problemas na matemática.

Primeiro exemplo. A principal crítica de Wittgenstein, nas *PhBm*, à teoria dos agregados é a de que ela procura descrever formas lógicas sem apresentá-las, isto é, sem que a proposição reproduza, na estrutura do símbolo, a mesma forma daquilo que ela pretende dizer ser o caso. Esta exigência da teoria da figuração já era utilizada, pelo *Tractatus*, para mostrar que a formulação do paradoxo de Russell é uma impossibilidade lógica, pois é impossível reproduzir, na estrutura do símbolo, a situação de uma função tendo ela própria como seu argumento[†]. Nas *PhBm*, Wittgenstein menciona o paradoxo do mentiroso de Creta para concluir, de modo semelhante, que se trata de um erro fundamental da "filosofia da lógica precedente", que consiste em pensar que uma palavra pode aludir ao seu objeto sem substituí-lo (*vertreten*)[‡]. Aqui, vê-se claramente que Wittgenstein recorre a princípios de sua teoria das proposições genuínas para criticar, no campo da matemática, uma teoria que não os obedece.

Segundo exemplo. No capítulo *XIV* das *PhBm*, Wittgenstein critica a ideia de que a indução matemática seja um sintoma ou indício da validade de uma equação algébrica. A crítica envolve uma comparação com a linguagem que exprime proposições factuais. Para compreender, em linhas gerais, esta comparação, é preciso lembrar que Wittgenstein insiste, à esta época, no fato de que a realidade, descrita pela proposição, é de natureza fenomênica. O fenômeno não é apenas um sintoma de algo diferente (uma

[*] Cf. Stuart **Shanker**: *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*, New York: State University of New York Press, 1987, p. 89.

[†] Cf. *Tractatus*, aforismo 3.333.

[‡] *PhBm*, XV−171h. O conceito de *Vertretung*, que era, no *Tractatus*, o princípio sobre o qual repousa a possibilidade da proposição (aforismo 4.0312), "desaparece", no entanto, da teoria da figuração apresentada nas *PhBm*. Não obstante, é mantida a ideia de que a proposição deve re-produzir a forma lógica daquilo que é sinalizado, e é deste modo que as críticas à teoria dos agregados podem ser lidas de modo coerente com os pressupostos da "figuratividade da proposição", tal como ela se encontra nas *PhBm*. Para uma análise deste desaparecimento do conceito de *Vertretung*, Cf. **Ferraz Neto**: Fenomenologia em Wittgenstein, pp. 101-7.

Ding an sich), que tornaria a proposição verdadeira, mas é ele próprio aquilo que a verifica[*]. E a verificação não é *um* sintoma da verdade, mas *do* sentido da proposição[†]. A comparação é a seguinte: o dado imediato (o fenômeno) está para a proposição da linguagem comum que ele verifica assim como a apreensão da relação aritmética da estrutura (que é propiciada, segundo Wittgenstein, pela prova) está para a equação que ela verifica. Esta apreensão é ela própria a "realidade aritmética" visada pela equação, e não o sinal ou sintoma de algo distinto[‡]. Uma vez traçada a comparação, Wittgenstein apresenta sua crítica:

> Pois é assim (isto é, de modo falso) que usualmente se compreende. É dito que a indução é um sinal de que isto e aquilo valem para todos números. Mas a indução não é um sinal para alguma coisa diferente dela própria. Se houvesse, além da indução, ainda algo para o qual *ela* é apenas um sinal, então este algo deveria ter uma expressão específica que não seria em nada distinta da expressão completa deste algo. / E esta concepção passa para a ideia de que a equação algébrica diz o que nós vemos na indução aritmética. Para isto, ela deveria ter a mesma multiplicidade do que ela descreve.[§]

Teremos a oportunidade de voltar, adiante, a este parágrafo para traçar considerações mais específicas. O que vale notar, desde já, é a ideia de que a proposição matemática deve ter a mesma "multiplicidade" daquilo que ela "descreve", requisito que Wittgenstein pinçou, evidentemente, de sua teoria das proposições genuínas. É claro que este "descrever" não pode ser entendido como no caso das proposições factuais. No entanto, o que importa observar é que há algo que "corresponde", na matemática, àquilo que, na linguagem comum, é o objeto por ela descrito[¶].

Retornemos à questão levantada no fim do último capítulo: que razão Wittgenstein teria para fazer uma aproximação entre proposição genuína e proposição matemática, a ponto de falar de sentido, negação e análise de uma proposição matemática? Ora, constitui certamente uma *razão* a elucidação de questões filosóficas sobre a matemática com as ferramentas provenientes da linguagem descritiva. O que falta, na verdade, é uma *justificação* da pertinência desta aproximação: por que tais ferramentas devem também funcionar no domínio da matemática?

Para o leitor que conhece, mesmo que de modo superficial, os capítulos iniciais das *PhBm*, não provoca tanta surpresa a aproximação entre proposições matemáticas e genuínas ou, na forma interrogativa, entre questões matemáticas e genuínas. O modo como o sentido de uma questão genuína é costurado nos capítulos *II* a *IV* é fundamentalmente *o mesmo* que no caso das questões matemáticas: o sentido de uma

[*] *PhBm*, XXII−225g.
[†] Ibid., XIV−166d.
[‡] Ibid., XIV−166a.
[§] ibid., XIV-166a-b.
[¶] Veremos, adiante, que o "objeto" é, na verdade, *apresentado*, *construído* e não *descrito*.

questão é o método para respondê-la[*], este método envolve sempre uma busca (*Suchen*) sistemática em um espaço[†], esta busca é constituinte de seu resultado ("Diga-me *como* você busca e eu lhe direi *o que* você busca"[‡]) etc. Também a relação entre expectativa – tema de reflexão privilegiado na tentativa de reformular a noção de "figuratividade" nas *PhBm*, segundo a leitura de Ferraz Neto[§] – e seu preenchimento é entendida do mesmo modo que a relação entre cálculo e seu resultado[¶]. É bem verdade que esta aproximação tem limites, como mostrará a comparação do parágrafo 161 das *PhBm* entre uma "expedição matemática" e uma "expedição polar". Também é verdade que a busca, no caso de uma expectativa, não pressupõe a existência daquilo que se busca[‖], ao passo que, no caso da matemática, mal se pode falar em "existência" e "não existência". Mas essas diferenças não são mais traçadas de modo a destituir a proposição matemática de seu sentido. Não é que a proposição genuína realiza uma busca sistemática em um espaço enquanto a proposição matemática não o faz. A distinção entre elas se fundamenta, agora, em uma diferença no método de busca e naquilo que é procurado, e não na presença ou ausência de um sentido.

Destarte, o modo comum de expressar o sentido, tanto da proposição genuína como da matemática, poderia servir de fundamento para que Wittgenstein aproximasse, em alguns aspectos, a proposição matemática da proposição genuína, justificando o uso de resultados obtidos na investigação da segunda noção para elucidar problemas oriundos da primeira. Porém, as reflexões que compõem os capítulos *II* a *IV* das *PhBm* são, quase que na sua totalidade, posteriores às considerações acerca do estatuto da proposição matemática e, em geral, de todo conteúdo matemático da obra. Essa posterioridade, por vezes, aparece como uma questão de princípio: não se pode invadir, alega Wittgenstein, o "terreno da psicologia" com a fortaleza hostil e não conquistada da aritmética nas costas[**]. A mesma posterioridade parece, enfim, sugerir que é a proposição genuína que se aproxima, em certos aspectos, da proposição matemática e não o contrário. O que há talvez de mais notável no modo pelo qual a proposição genuína é pensada – e que a aproxima da proposição matemática – é o fato de que, agora, a maneira pela qual a proposição é verificada (a "busca" em um espaço) passa a ser constitutiva da situação descrita pela proposição (do "objeto" procurado), característica que Wittgenstein encontrava, *mutatis mutandis*, na lógica e na matemática e que estava

[*] *PhBm*, III−27a.

[†] Cf. ibid., IV−43a.

[‡] ibid., III−27b.

[§] Cf. **Ferraz Neto**: Fenomenologia em Wittgenstein, p. 99.

[¶] Cf. Ludwig **Wittgenstein**: *Wittgenstein's Lectures, Cambridge, 1930-1932: From the Notes of John King and Desmond Lee*, ed. por Desmond **Lee**, Rowman & Littlefield Pub Incorporated, 1980, p. 62; cf. tb. **idem**: The Big Typescript, p. 278.

[‖] *PhBm*, III−28a.

[**] *WAii*, p. 24.

contida na ideia de que, nestas disciplinas, há uma equivalência entre "processo" e "resultado". Salvo engano, é essa característica, em parte[*] também presente, nas *PhBm*, no caso das proposições factuais, que permite que o famoso *slogan* segundo o qual "o sentido de uma proposição é o método de sua verificação"[†] seja aplicado, de modo uniforme, a ambos os tipos de proposições.

A proposição genuína também partilha com a proposição matemática uma dimensão pragmática, que é cristalizada na ideia de que "o sentido de uma proposição é seu propósito"[‡]. Embora nesta passagem Wittgenstein esteja se referindo à proposição genuína, a máxima também se aplica à proposição matemática. Se não há proposições matemáticas indecidíveis, é precisamente porque, neste caso, elas deixariam de servir para algo, elas deixariam de ter um propósito (que é o de exercer uma função sintática na linguagem). Como acentua Bouveresse[§], a conexão entre proposição matemática e regra sintática pareceu a Wittgenstein ser a chave para resolver, de um só golpe, uma série de problemas filosóficos que recaíam sobre as proposições matemáticas:

> Uma equação é uma regra sintática. / Isto não explica por que não podemos ter questões na matemática que, em princípio, não podem ser respondidas? Pois se as regras de sintaxe não são inteligíveis, elas não valem para nada. E isto também explica, de modo semelhante, por que um infinito que excede nossas faculdades de compreensão não pode entrar nestas regras. E isto também torna compreensível a tentativa dos formalistas de ver na matemática um jogo com signos.[¶]

Esta passagem fornece informações bastante preciosas para compreender, de um modo geral, a conexão entre diversas peças da arquitetura do pensamento do autor, à época, sobre a matemática. Por ora, importará destacar dois pontos. Em primeiro lugar, nota-se, assim como em algumas passagens dos manuscritos[‖], a presença de um *reducionismo equacional*, segundo o qual a verdade ou falsidade de toda e qualquer proposição matemática se refere, em última instância, à correção ou incorreção de equações. Todo sistema matemático, deste modo, pode ser escrito na forma de um sistema equacional em que proposições matemáticas são obtidas a partir de outras equações e, na base do sistema, encontram-se equações e operações meramente estipuladas por meio de *definições*.

[*] Em parte, pois, no caso das proposições empíricas, embora o "processo" passe a ser constituinte do resultado, o inverso não ocorre.

[†] *Slogan* presente, nas *PhBm*, com algumas modulações. Cf. *PhBm*, XIII−150i:"Jeder Satz ist die Anweisung auf eine Verifikation"; ibid., III−27a:"Der Sinn einer Frage ist die Methode ihrer Beantwortung".

[‡] Ibid., II−15c.

[§] Cf. Jacques **Bouveresse**: *La force de la règle: Wittgenstein et l'invention de la nécessité*, (Collection "Critique"), Paris: Les Éditions de Minuit, 1987, pp. 89-90.

[¶] *PhBm*, XI−121a-b.

[‖] Cf., p. ex., *WAi*, p. 125: "Wahrheit und Falschheit mathematischer Sätze beziehen sich immer auf Richtigkeit und Unrichtigkeit von Gleichungen. / Etwa die Behauptung es gibt nach n keine Primzahl entspricht einer falschen Gleichung".

Em segundo lugar, percebe-se que Wittgenstein, assim como Frege, procura estabelecer um elo entre "sentido" e "aplicabilidade". Tal elo, no entanto, é costurado de dois modos diametralmente opostos: no caso de Frege, é a aplicabilidade que depende do sentido, do fato de que as equações na matemática "expressam um pensamento"[*]; no caso de Wittgenstein, é o sentido que depende da aplicabilidade, i.e., é precisamente porque eu não posso aplicar uma equação cuja correção não pode ser estabelecida que esta equação não tem sentido (não serve para nada). Enquanto, para Frege, uma fórmula da matemática pode ser aplicada somente se ela expressa um sentido, para Wittgenstein ela só expressa um sentido se ela pode ser aplicada.

Embora haja um vínculo inquestionável entre os dois papéis que a equação exerce – enquanto proposição matemática e regra sintática –, é importante não confundir[†] o que é, para cada um destes papéis, a dimensão do sentido e daquilo que a equação "diz". Enquanto uma regra, a equação "diz" que certas ações com os signos podem ser executadas em um contexto proposicional sem que se saia do domínio daquilo que é dito com sentido, ao passo que seu sentido consiste precisamente na sua finalidade, no fato de ela poder ser aplicada. Aquilo que a regra diz pode inclusive ser compreendido de modo descritivo, já que é sempre possível passar de uma regra a um enunciado descritivo correspondente[‡].

Por outro lado, enquanto proposição matemática, a equação também "diz" algo, só que algo diferente. Em certa passagem, Wittgenstein justifica esta propriedade assertórica pela presença de um elemento enunciativo (*aussagende Element*), o sinal de igualdade, ausente no caso de uma tautologia[§]. Em outro momento, ele aproxima o sinal

[*]Segundo Frege, é exatamente pelo fato das sentenças da aritmética expressarem pensamentos que elas podem ser aplicadas. Uma configuração de peças de xadrez, na medida em que não expressa nenhum pensamento, também não pode ser aplicada. Se à configuração inicial das peças do xadrez correspondesse um pensamento, e se às regras de movimentação de tais peças correspondesse a transição de um pensamento a outro, aplicações do xadrez seriam concebíveis. Cf. **Frege**: Grundgesetze der Arithmetik, Vol II, §91.

[†]Tal confusão levaria a aparentes "contradições" nas observações de Wittgenstein, e já houve quem concluísse disso que Wittgenstein se contradiz "em poucas linhas". Cf. Esther **Ramharter**: Wittgenstein on Formulae, em: *Grazer Philosophische Studien*, 89 (2014), p. 85.

[‡]Cf. *WWK*, p. 128: "Regeln sind in gewissen Sinn Aussagen: 'Du darfst das und das tun'. Wo man Regeln hat, kann man immer zu Beschreibungen von derselben Multiplizität übergehen, indem man z. B. beim Schachspiel beschreibt, wie die Menschen spielen. Regeln können daher einander widerstreiten, wenn die entsprechenden Aussagen einander widersprechen". Esta ideia também se encontra nas *PhBm*, na afirmação de que toda prescrição (*Vorschrift*) pode ser concebida como uma descrição e vice-versa (*PhBm*, II−14b). A passagem de uma regra a uma descrição conserva a multiplicidade da regra e, assim como a multiplicidade da descrição é a mesma da situação descrita, a multiplicidade da regra é a mesma das ações que ela governa. Inversamente, a passagem de uma descrição a uma prescrição também conserva a multiplicidade da descrição, o que justifica que tal artifício seja utilizado por Wittgenstein no capítulo *II* das *PhBm* para elucidar a natureza figurativa das proposições. Cf. ibid., II−10a: "Wenn man die Sätze als Vorschriften auffaßt, um Modelle zu bilden, wird ihre Bildhaftigkeit noch deutlicher".

[§]Cf. ibid., XI−120e : "Die Gleichungen der Mathematik kann man, so scheint es mir, nur mit sinnvollen Sätzen vergleichen, nicht mit Tautologien. Denn die Gleichung enthält eben dieses aussagende Element – das Gleichheitszeichen - das nicht dazu bestimmt ist, etwas zu zeigen. Denn was sich zeigt, de identidade da expressão "resultar em". Deste modo, uma equação como $25 \times 25 = 620$ diz, incorretamente, que a aplicação das regras de multiplicação a 25×25 "resulta em" 620. Mas para que este "resultar" tenha um significado, as regras de multiplicação – que são, neste caso, as regras para resolver a equação – devem ser previamente dadas, pois aquilo que a palavra "resulta" designa e, consequentemente, o sentido inteiro da proposição, depende da existência destas regras*. Apenas com referência a estas regras uma decisão a respeito da verdade ou da falsidade da proposição pode ser tomada e, por conseguinte, elas são constitutivas do sentido da proposição.

A simples presença deste conteúdo enunciativo já indica que as proposições matemáticas se assemelham mais a proposições empíricas do que a tautologias. Isso porque, enquanto tautologias são proposições sem sentido (*Sinnlos*) e, portanto, nada dizem, as proposições da matemática *dizem*† algo‡. Este "dizer", no entanto, não pode ser concebido ao modo das proposições empíricas. Sem poder descrever um fato contingente, como as proposições factuais, e sem poder nada dizer, como as tautologias, as proposições matemáticas parecem se encontrar em um "terceiro reino", incompatível com a dicotomia – defendida à época pelos membros do círculo de Viena – entre verdades analíticas e sintéticas. Para Wittgenstein, isto nada mais era do que a manifestação do caráter autônomo do saber matemático, que requer, de início, um conceito autônomo de "verdade", um conceito que não pode ser reduzido nem à verdade lógica de uma tautologia, nem à verdade empírica de um experimento. Se é possível falar de "descrição" e de "verdade" no caso da matemática, é apenas de um modo irredutível ao sentido que tais palavras assumem na linguagem das proposições factuais, na linguagem que afigura a experiência imediata.

Retomemos o raciocínio: as questões da matemática devem poder, em princípio, ser respondidas, pois, caso contrário, nenhuma regra sintática poderia ser delas extraída e, portanto, elas não poderiam ser aplicadas enquanto tais, o que constitui o seu propósito. Disso decorre que, mesmo que o saber matemático seja autônomo, ele não se desvincula completamente da linguagem. Pelo contrário: na medida em que este

---

das zeigt sich ohne das Gleichheitszeichen. Das Gleichheitszeichen entspricht nicht dem '$\cdot \supset \cdot$' in '$p \cdot (p \supset q) \cdot \supset \cdot q$', denn das '$\cdot \supset \cdot$' ist nur *ein* Bestandteil unter anderen, die zur Bildung der Tautologie gehören. Es fällt nicht aus dem Zusammenhang heraus, sondern gehört zum Satz wie das '$\cdot$' oder '$\supset$'. Das '=', aber ist eine Kopula, die allein die Gleichung zu etwas Satzartigem macht. Die Tautologie zeigt etwas, die Gleichung zeigt nichts, sondern weist darauf hin, daß ihre Glieder etwas zeigen".

*Cf. ibid., XIII−150k-m.

†Para esta finalidade, Wittgenstein utiliza alguns verbos aparentados: *sagen* (ibid., XIII−154d); *erzählen* (ibid., XIV−166b); *aussprechen* (ibid., XIII−150f); *behaupten* (ibid., XIII−151j).

‡Cf., p. ex., *WWK*, p. 106: "Es gibt hier übrigens zwei Auffassungen. Russell hatte in den *Principia Mathematica* geglaubt, daß seine logischen Sätze etwas sagen, daß sie etwas beschreiben. Bei dieser Auffassung ist es verständlich, daß main meint, die Tautologie drücke den Sinn der Gleichung $28 + 16 = 44$ aus. Ist man aber einmal zu der andern Auffassung übergegangen, daß die Sätze der Logik Tautologien sind und nichts sagen, so ist es ganz inkonsequent, noch an der Behauptung festzuhalten, die Tautologie drücke aus, daß $28 + 16 = 44$ ist. / In gewissen Sinne gleicht die mathematische Gleichung vielmehr einem empirischen Satz als einer Tautologie".

saber *regula* o uso de sinais da linguagem, este saber tem uma garantia, desde o início, da manutenção de seu contato com ela. Resta, no entanto, compreender de um modo mais exato o vínculo que existe entre a resposta de uma questão matemática e a regra sintática que dela se deriva, vínculo que é feito pela noção de "prova". É esta noção que será o alvo das próximas considerações.

O ELO FORTE ENTRE A PROPOSIÇÃO MATEMÁTICA E SUA PROVA

Nas *PhBm*, Wittgenstein estabelece um vínculo bastante forte entre o sentido de uma proposição matemática e sua prova. Decorre disso que a proposição não tem um sentido independentemente do modo pelo qual ela é provada. A prova é *o* modo pelo qual uma proposição matemática é verificada e a verificação não é apenas *um* indício (*Anzeichen*) de verdade, mas d*o* sentido da proposição[*]. Wittgenstein sugere que a proposição matemática seja entendida como uma indicação (*Hinweis*) de uma prova (*Beweis*)[†]. É como se a proposição matemática indicasse algo, de longe, à distância, enquanto a prova indicasse o mesmo, porém, de perto, em contato com aquilo que é indicado; como se a proposição apontasse para uma escada[‡], e a prova percorresse degrau por degrau da escada.

A noção de "prova", no entanto, parece receber dois tratamentos *prima facie* incompatíveis no decorrer da obra. Em alguns momentos, a noção de prova é submetida a restrições extremamente rígidas, as quais constituiriam o fundamento de uma demonstração cogente e correta. Algumas passagens do fim do capítulo *XIV* são suficientes para ilustrar esta preocupação com a rigidez do conceito de prova na matemática:

> A indução não prova a proposição algébrica, pois apenas uma equação pode provar uma equação.[§]
>
> Uma equação pode apenas ser provada remontando-a a equações.
> As últimas equações neste processo são definições.
> Se uma equação não é redutível a outras equações, então ela é uma definição.
> Uma indução não pode justificar uma equação.[¶]

Este "rigor"[‖] a que o conceito de prova de uma equação é submetido, aliado ao reducionismo equacional já mencionado, forneceria, então, a forma geral da prova

[*] *PhBm*, XIV−166d. Cf. tb. *WWK*, p. 33: "Es gibt in der Mathematik nicht erstens einen Satz, der schon für sich allein Sinn hätte, und dann noch zweitens die Methode, um die Wahrheit oder Falschheit eines Satzes festzustellen, sondern es gibt nur die Methode, und das, was Satz genannt wird, ist nur ein abgekürzter Name für die Methode".

[†] *PhBm*, PhBm XI−122e.

[‡] Cf. ibid., XIII−152n: "*Jeder* rechtmäßige Satz der Mathematik muß, wie der Satz $12 \times 13 = 137$, an sein Problem die Leiter anlegen – die ich dann hinaufsteigen kann, wenn ich will".

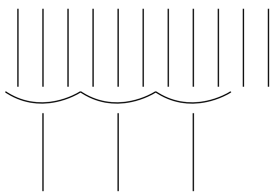
[§] ibid., XIV−167d.

[¶] ibid., XIV−169e.

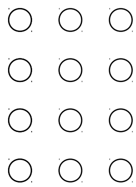
[‖] Nas páginas finais do *WAii*, ao comentar a prova de Euler para a existência de infinitos números primos, Wittgenstein alega que nesta prova há apenas uma conexão "frouxa" (*lose*), que os matemáticos de uma proposição matemática. Toda equação seria correta ou incorreta, em última instância, em virtude de estipulações arbitrárias, chamadas de definições.

Por outro lado, em outros momentos a noção de "prova" parece ser, por assim dizer, "afrouxada", de tal modo que a construção de diagramas ou, ainda, a manipulação das contas de um ábaco passam a ser chamadas também de "provas" de uma proposição matemática. Seguem-se, abaixo, três exemplos de diagramas[*] (presentes, respectivamente, nos parágrafos 111, 117 e 200 das *PhBm*) que constituem a prova da proposição matemática correspondente:

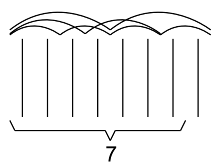
$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$



$4 \times 3 = 12$



7 é um número primo



Qual seria, no entanto, a justificativa para se chamar estes diagramas de "provas"? Em virtude do quê eles provam a proposição matemática correspondente? Uma primeira resposta, que aproximaria o diagrama da prova "rigorosa", seria dizer que o que importa no diagrama não é apenas a figura, mas o modo pelo qual ela é construída a partir de outros elementos do mesmo sistema de cálculo. E este processo de construção é certamente governado por certas regras que, se expressas, assumiriam a forma de equações. Esta resposta faria juz à importância da construção do diagrama, à ideia wittgensteiniana de que, na matemática, "processo" e "resultado" são inseparáveis. E estas observações são inteiramente corretas. Entretanto, elas não respondem a questão colocada. A resposta acima alega tão somente que, do mesmo modo que a equação pode ser obtida a partir das definições, o diagrama pode ser obtido a partir de certas regras de construção. Mas, neste caso, o diagrama não seria a *prova* da proposição matemática correspondente, mas, no máximo, *a proposição matemática escrita em outro simbolismo.* O que é preciso mostrar, porém, é precisamente por que a proposição matemática, escrita em certo simbolismo, pode valer como a sua própria prova. Mais especificamente, o que se trata de mostrar é por que a proposição matemática, quando

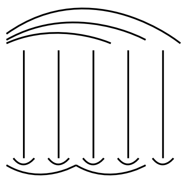
não tem absolutamente nenhum conceito de "rigor" (*Strenge*), que a satisfação do matemático com a prova de Euler reside apenas em uma dimensão *psicológica* da prova, e não em uma característica propriamente *matemática.* Evidencia-se, nestes comentários, mais uma vez a preocupação de Wittgenstein com o rigor de uma prova na matemática. Cf. *WAii*, p. 322.

[*]Por razões óbvias, diagramas espaciais serão privilegiados em detrimento de manipulações temporais, como ocorre, por exemplo, em um ábaco.

escrita em um simbolismo com a multiplicidade adequada, o que ocorre em sua forma *completamente analisada*, é, segundo Wittgenstein[*], a sua própria prova (isso implica a equivalência entre a falsidade de uma equação e a impossibilidade de ela ser expressa em certo simbolismo). Abordaremos esta questão na Seção seguinte.

A prova como proposição matemática completamente analisada

O elo entre prova e proposição matemática completamente analisada é costurado já na página 17 do *WAi*: "Poder-se-ia também dizer: a proposição matemática completamente analisada é sua própria prova. / Ou também: a proposição matemática é apenas a superfície imediatamente visível do corpo total da prova que nela se confina. / A assim chamada proposição matemática é – em contraste com uma proposição genuína – *essencialmente* o último membro de uma demonstração que a torna visivelmente correta ou incorreta"[†]. Nesta ocasião, Wittgenstein se debruçava sobre a questão de como expressar de modo perspícuo a proposição aritmética de que um número é primo. Há, neste contexto, uma passagem, incorporada parcialmente às *PhBm* por Rush Rhees em uma nota de rodapé[‡], que traz novamente a ideia de que o diagrama, ao mesmo tempo que expressa, também prova a proposição matemática:

> Posso, então, por exemplo, escrever o número 5 de modo que se veja claramente que ele é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Algo como:
>
> 
>
> Este aspecto poderia dizer algo como: "5 é um número primo"; ou: "Veja, 5 é um número primo!". / Isto levaria, talvez, à mesma coisa que eu disse anteriormente, a saber, que a proposição matemática propriamente dita é uma prova de uma proposição matemática tal como a chamamos. A proposição matemática propriamente dita é a prova: isto é, a que mostra como as coisas são. / Uma prova é também chamada, com razão, de uma demonstração.[§]

A noção de prova enquanto análise[¶] da proposição aparecerá também, em outras passagens (como, p. ex., em XIII−153a), com o intuito de mostrar que a

[*] Cf. *PhBm*, XIII−162b.

[†] *WAi*, p. 17; *PhBm*, XIII−162b.

[‡] Cf. *PhBm*, p. 184.

[§] *WAi*, p. 16.

[¶] Não é de se surpreender que Wittgenstein chame a prova ora de "análise" (querendo indicar, aparentemente, o processo pelo qual a proposição é provada), ora de "resultado da análise" (a proposição matemática completamente analisada), já que, na matemática, processo e resultado são equivalentes.

proposição matemática contém, nela própria, todas as ferramentas necessárias para prová-la. Do mesmo modo que a análise de uma proposição empírica, no *Tractatus*, mostrava que o seu sentido estava completamente determinado por ela própria, e não por outros fundamentos de verdade que se acrescentariam de fora à proposição, aqui a análise também mostra que aqueles signos usados para expressar a proposição matemática só veiculam um sentido se forem pressupostas definições e regras que a eles se aplicam enquanto constituintes de um cálculo, e que nenhum conhecimento "externo" à proposição é necessário para prová-la.

A insistência no fato de que os diagramas apresentam e, ao mesmo tempo, provam a proposição matemática parece indicar, no entanto, que a equivalência entre a prova de uma proposição e sua análise tem consequências que vão além do fato de que a prova mostra que o sentido da proposição já estava, desde o início, completamente determinado por ela própria; que há outras semelhanças entre as noções de análise completa de uma proposição matemática e de uma proposição empírica a serem observadas. A prova diagramática parece trazer, na superfície do sinal, a verdadeira "forma" da proposição que, quando mediada por definições e outras regras do cálculo, não a exibe de modo imediato. Isto é, assim como no caso da análise completa de uma proposição empírica no *Tractatus*, a análise de uma proposição matemática procura substituir um simbolismo opaco por um simbolismo transparente.

O diagrama, ao contrário da proposição matemática formulada, digamos, no sistema decimal, permite que se reconheça, de imediato, a verdade da proposição. Assim formulada, é claro que a noção de análise de uma proposição matemática se distancia completamente (e é este o ponto em que a analogia entre proposição matemática e empírica faz água) da noção de análise completa de uma proposição empírica. Neste último caso, a análise jamais chega à verdade da proposição. Além disso, a análise de uma proposição matemática, expressa nesses termos, faz também com que ela deixe de ser uma proposição, por deixar de ser a expressão de algo calculável (como os diagramas acima mostram claramente), o que jamais ocorre no caso de uma proposição empírica. No caso da proposição empírica, a análise mantém seu sentido intacto; já a análise de uma proposição matemática substitui o seu sentido pelo seu valor de verdade.

Além deste descompasso entre as noções de análise para os caso da proposição matemática e da proposição empírica, há ainda, como problema para a aproximação entre estas duas noções, o fato de que a noção de análise completa de uma proposição empírica sofre mudanças na passagem do *Tractatus* para as *PhBm*. Como esclarece Ferraz Neto, os primeiros parágrafos das *PhBm* descrevem o abandono do projeto de uma linguagem fenomenológica, vinculando-o a uma alteração da noção tractariana de análise completa de uma proposição. A análise completa de uma proposição, agora, é tão somente a elucidação de sua gramática, ao passo que, para o *Tractatus*, a análise completa de uma proposição remetia à construção de uma linguagem privilegiada*. Esta linguagem, segundo Ferraz Neto, "refletiria na superfície de seus sinais a forma daquilo que ela representa, a forma do mundo"†. Com isto, o intérprete não quer dizer que a forma desta linguagem manteria certa relação interna com a forma do mundo, mas que se trataria essencialmente da *mesma* forma. Parafraseando uma expressão que Wittgenstein utilizará no contexto da aritmética, poder-se-ia dizer: segundo a teoria da figuração do *Tractatus*, a forma não é representada (*vertreten*), mas ela *é*; apenas os objetos são representados. A única diferença é que, na proposição, a forma é dada enquanto estrutura, enquanto concatenação efetiva, ao passo que, na situação afigurada, é apenas a possibilidade da estrutura (que é, precisamente, a sua forma) que está em jogo. A proposição exibe esta possibilidade efetivando, no plano do sinal, aquilo que no plano do significado é apenas uma possibilidade.

A despeito destas dificuldades, parece haver certas semelhanças interessantes entre a noção tractariana de análise e a noção invocada nas *PhBm* para elucidar o conceito de prova que são úteis para entender a relação entre a prova de uma proposição matemática e o papel sintático da equação correspondente. De modo mais específico, a ideia de que a prova é a análise completa da proposição matemática é importante para jogar uma luz na concepção wittgensteiniana segundo a qual *a distinção entre o verdadeiro e o falso, na matemática, corresponde, na aplicação da matemática a proposições empíricas, à distinção entre sentido e contrassenso.* Com relação à alteração do conceito de "análise completa" feita pelas *PhBm*, assumiremos que esta alteração não afeta os casos em que é possível a construção de um simbolismo completamente transparente, o que ocorre, segundo Wittgenstein, mesmo em casos relativamente complexos como a apresentação da noção aritmética de "indivisibilidade"‡.

A aproximação entre estas noções pode ser feita do seguinte modo: uma prova, enquanto análise da proposição matemática, é também uma análise lógica da proposição a que a equação, em seu papel sintático, é aplicada de modo imediato (i.e., sem estar vinculada ao cálculo lógico de tautologias e contradições). Há, assim, uma comunidade entre a forma exibida, na superfície do sinal, pela análise completa da equação e destas proposições. Neste domínio em que o sinal possui a multiplicidade correta, a regra sintática se torna supérflua. Inversamente, a regra sintática é necessária – e acompanha o sinal proposicional, sendo constitutiva do símbolo – quando a proposição não está

*Cf. Bento Prado de Almeida **Ferraz Neto**: Time, Homogeneity and Phenomenology, em: *Beiträge des 28. Internationalen Wittgenstein Symposiums: Zeit und Geschichte*, vol. XIII, Austrian Ludwig Wittgenstein Society, 2005, p. 216.

†**Idem**: O tempo nas *Philosophische Bemerkungen*, em: *Cadernos PET-Filosofia (UFPR*, 4 (2002), p. 81.

‡Segundo Wittgenstein, é possível apresentar a indivisibilidade de modo perspícuo (*augenfällig*), por meio da construção do crivo de Erastótenes. Nesta construção, observa Wittgenstein, é possível *ver* como todos os números divisíveis repousam acima ou abaixo do número considerado (Cf. *PhBm*, XIX−200b).

expressa em uma notação com a multiplicidade correta. É assim que as regras sintáticas governam o domínio do sentido: elas auxiliam a constituir um símbolo. Um conjunto de sinais obtidos por meio da aplicação de uma equação falsa é, neste caso, sintaticamente ilegítimo, pois deixa de constituir um símbolo. Este conjunto de sinais parece ser uma proposição e não o é: é um contrassenso. Isto ocorre, por exemplo, no caso da (pseudo) proposição: "Agrupei estas quatro coisas em duas coisas e três coisas". Isso *parece* ser uma proposição, mas é, na verdade, um contrassenso. Dito de outro modo, assim como uma equação incorreta não possui uma análise completa (pois neste caso ela seria *correta*), uma pseudoproposição que faz uso de uma equação incorreta também não possui, em consequência disto, uma análise completa e, portanto, ela é um contrassenso. Em um simbolismo com a multiplicidade adequada, este perigo é afastado, já que, em tal simbolismo, a equação correta é, por assim dizer, incorporada à estrutura da notação e se torna supérflua, não compondo mais o "corpo" do sinal. E é assim que as construções diagramáticas, feitas em um simbolismo com a multiplicidade correta, provam as equações correspondentes, pois no simbolismo do diagrama não há uma construção que possa ser a expressão de uma equação incorreta. Em um simbolismo adequado, as proposições aritméticas adquirem a propriedade que Wittgenstein havia atribuído ao Axioma do Infinito de Russell*: na medida em que elas são expressas, *isto* já prova que elas são verdadeiras†.

Este uso sintático da equação difere, no entanto, consideravelmente de usos comuns em que utilizamos uma equação aritmética para inferir, de certas proposições assumidas como verdadeiras, outras proposições também verdadeiras. Como exemplo, é possível recorrer à equação $2 + 2 = 4$ para inferir que há exatamente quatro maçãs em minhas mãos direita e esquerda a partir do fato de que há exatamente duas maçãs em minha mão esquerda e exatamente duas em minha mão direita. Para isso, basta que conectemos o cálculo equacional da aritmética com o cálculo lógico de tautologias e contradições e, a partir disso, todo o aparato matemático das equações passa a estar disponível para que realizemos inferências com estes símbolos matemáticos na lógica. Neste caso, o uso de uma equação incorreta não levaria a um contrassenso, mas a uma contradição: se digo que tenho duas maçãs em cada mão e também digo que tenho cinco maçãs em ambas as mãos, então eu me contradigo. Ora, não seria possível reduzir toda aplicação do cálculo aritmético, na linguagem, a este tipo de aplicação? Aparentemente sim, desde que sejamos suficientemente engenhosos ao estabelecer relações entre equações aritméticas e inferências lógicas. É preciso lembrar, porém, que Wittgenstein já considera esta conexão entre o cálculo aritmético e o cálculo lógico de tautologias como uma

*Ibid., X−100f.

†Isso não quer dizer, é claro, que o Axioma do Infinito seja verdadeiro, mas que ele pressupõe aquilo que ele quer asserir e que, portanto, a significatividade de sua asserção já pressuporia a existência de infinitas coisas.

aplicação da aritmética, e, portanto, tal aplicação deve ser entendida – sob pena de um regresso ao infinito – independentemente de um complemento lógico/intensional que pudesse ser acrescentado às equações aritméticas. Além disso, o que Wittgenstein defende é que o estabelecimento destas relações não é de modo algum *necessário* para que a equação exerça o papel sintático de permitir, na linguagem, o uso de certas formas de expressão e de excluir, da linguagem, outras formas de expressão; que a equação, enfim, admite uma aplicação *imediata* na linguagem, sem que seja necessário algum tipo de *preparação* para esta aplicação (como ocorria no *Tractatus* através da forma geral da operação lógica). Como isto ocorre?

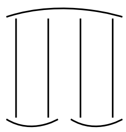
Consideremos, como exemplo, a pseudoproposição "estes 3 círculos foram correlacionados biunivocamente com aquelas 2 cruzes". Aqui, o número 3 é uma propriedade interna da lista de círculos e o número 2 é uma propriedade interna da lista de cruzes. A impossibilidade de correlação biunívoca é, por sua vez, fundada em uma relação interna (a desigualdade numérica) entre as duas listas, e essa impossibilidade é inteiramente análoga à impossibilidade, p. ex., de que uma cor e um som estejam vinculados em um estado-de-coisas*. Do mesmo modo que no caso do par cor/som, isto se mostra pelo fato de que é impossível até mesmo que se constitua um símbolo proposicional apto a descrever tal "situação". Neste caso, a falta de sentido da pseudoproposição acima é consequência da incapacidade exibida por um dos sinais de exercer uma função simbólica; a análise da proposição mostraria, em algum momento, que um dos seus sinais não constitui um símbolo e que, portanto, ela é destituída de qualquer sentido. Não é que a razão tenha entrado em conflito consigo mesma: ela sequer chegou a exprimir algo†.

Retornemos ao exemplo do parágrafo 102, que sugere que a equação $2 + 2 = 4$ seja tratada como uma regra sintática que diz: "sempre que tenho 4 objetos, existe a possibilidade de agrupá-los em dois e dois". Essa possibilidade, segundo Wittgenstein,

*Na página 69 do *WAi*, Wittgenstein menciona a possibilidade de se tratar extensões como "formas de objetos" (*Gegenstandsformen*). Salvo engano, isto remonta a dizer que o modo pelo qual as extensões se "concatenam" (i.e., o modo pelo qual os elementos de uma extensão se correlacionam biunivocamente com os elementos de outra extensão, ou se dividem em duas outras extensões, ou ainda se combinam para formar uma nova extensão etc.) pode ser tratado de maneira análoga ao modo pelo qual os objetos tractarianos se concatenavam, e que esta possibilidade de concatenação é fundada, assim como no *Tractatus*, em propriedades internas dos "objetos" (das extensões).

†Seria possível, naturalmente, entender a mesma pseudoproposição como uma contradição. Suponhamos que a lista de 3 círculos seja $[a_1, a_2, a_3]$ e que a lista de cruzes seja $[b_1, b_2]$. Assim, a pseudoproposição "estes 3 círculos foram correlacionados biunivocamente com aquelas 2 cruzes" poderia ser traduzida na seguinte expressão (supondo que R seja uma relação essencialmente simétrica): $(a_1Rb_1 \oplus a_1Rb_2) \cdot (a_2Rb_1 \oplus a_2Rb_2) \cdot (a_3Rb_1 \oplus a_1Rb_2) \cdot (b_1Ra_1 \oplus b_1Ra_2 \oplus b_1Ra_3) \cdot (b_2Ra_1 \oplus b_2Ra_2 \oplus b_2Ra_3)$. O que Wittgenstein diria, no entanto, é que esta transcrição já pressupõe o reconhecimento imediato de que duas coisas não podem ser correlacionadas biunivocamente com três coisas, e que o mesmo raciocínio que impede que se veja, na tautologia $\mathcal{A}$ (cf. Capítulo anterior), a expressão da equação $5 + 7 = 12$, também impede que se veja, na contradição acima (ou em qualquer outra forma proposicional), a expressão da inequação $2 \neq 3$.

não quer dizer nada mais que uma proposição p como "eu realmente agrupei estes quatro objetos em dois e dois" tem sentido. O papel sintático da equação acima não precisa se vincular de modo algum ao cálculo lógico de tautologias e contradições. O sentido da proposição p não precisa provir do fato de que se mostrou que ela não é nem uma contradição nem uma tautologia. É possível mostrar, por meio da prova diagramática da equação $2 + 2 = 4$, que a proposição p tem um sentido, pois, neste caso, a prova constrói um esquema figurativo que poderia ser utilizado como sinal proposicional[*] para descrever a situação acima:



O esquema atua, neste caso, como uma espécie de "simulação simbólica" da situação descrita por p, e nele fazemos, no plano do simbolismo, as *mesmas coisas* que podem ocorrer no plano do significado[†]: agrupamos quatro coisas em duas e duas e, com isso, o simbolismo apresenta, enquanto estrutura – isto é, enquanto combinação efetiva –, aquilo que no plano do significado é apenas uma possibilidade.

Outro exemplo é a prova de certa possibilidade no jogo de xadrez pela "teoria do xadrez". Essa possibilidade, mais uma vez, não quer dizer nada mais que uma proposição que assere a sua efetividade ou a sua não efetividade tem sentido. Que isto seja o caso, porém, mostra-se pelo fato de que a prova faz, com os símbolos da teoria do xadrez, as mesmas coisas que o jogador faz com as peças do jogo. Em uma conversa com Waismann, datada de dezembro de 1930, Wittgenstein deixa claro que a "prova" de uma possibilidade pode ser feita mediante a construção de uma "réplica" no plano simbólico[‡]:

> Aquilo que é chamado de "teoria do jogo de xadrez" não é uma teoria que descreve algo, e sim um *tipo de geometria*. Naturalmente, ela é novamente um cálculo e não uma

[*] Para uma exposição mais precisa, teríamos que levar em consideração o fato de que há uma indeterminação na proposição acima; a proposição diz que quatro coisas foram divididas em duas e duas, mas não diz *quais* ficaram juntas ou separadas etc., o que poderia ser expresso por uma disjunção de todos os modos de combinar quatro elementos em dois e dois. A complicação do exemplo, longe de invalidá-lo, reforça ainda mais a ideia de que há um saber propriamente matemático que é aplicado antes mesmo de saber se a proposição não é nem uma tautologia, nem uma contradição; o fato de serem 3 os modos de combinar 4 elementos em 2 e 2 (e, portanto, o número de termos da disjunção também ser *três*) só pode ser mostrado por um aspecto *propriamente matemático* presente nas relações internas vigentes entre a extensão composta de quatro elementos e as combinações de elementos de dois em dois.

[†] É claro que este uso do cálculo é apenas possível em decorrência de uma mudança na caracterização do número em relação ao *Tractatus*, tal como delineamos nos dois capítulos anteriores. Pois aqui o número e, em geral, os elementos do cálculo, caracterizam, evidentemente, o sentido da proposição, uma vez que participam de sua *forma lógica*.

[‡] A mesma idéia é encontrada, no parágrafo 100 das *PhBm*, no que diz respeito à noção de "correlação biunívoca": "Im Symbolismus wird tatsächlich zugeordnet, während in der Bedeutung nur von der Möglichkeit der Zuordnung die Rede ist".

> teoria.
> Para tornar isto claro, eu te pergunto: existe, na tua opinião, uma diferença entre as duas proposições seguintes "Eu posso chegar lá em oito movimentos" e "Eu provei, por meio da teoria, que eu posso chegar lá em oito movimentos"? Não! Pois se eu utilizo, na teoria, ao invés do tabuleiro de xadrez com suas figuras, um simbolismo, então a prova de que eu posso chegar lá em oito movimentos consiste certamente no fato de que eu realmente chego lá no simbolismo, que eu agora faço com os signos aquilo que eu faço no tabuleiro com as figuras. Se eu executo os movimentos e provo sua possibilidade – então eu fiz, na prova, o mesmo novamente. Eu executei os movimentos apenas simbolicamente. O que falta é, na verdade, apenas o movimento efetivo; e certamente estamos de acordo sobre o fato de que o deslocamento das peças de madeira sobre o tabuleiro é algo inessencial.*

À luz desta passagem, é possível assinalar três coisas. Em primeiro lugar, a prova de que certa sequência de movimentos no jogo do xadrez é possível e que, portanto, *faz sentido dizer* que um jogador efetivamente realizou os movimentos e "chegou lá" é feita sem que se mostre que tal proposição não é nem uma contradição nem uma tautologia, mas simplesmente pelo fato de que se fez *o mesmo*, com outros sinais. Em segundo lugar, aquilo que a teoria do xadrez prova não é uma regra do xadrez, mas é uma regra sintática da linguagem. A prova dá um sentido à afirmação "Eu cheguei lá em oito movimentos", que é uma proposição da linguagem. Por mais que se adicione "níveis" a um cálculo, a aplicação do cálculo é essencialmente a mesma: a teoria da teoria da teoria do xadrez também estabelece regras sintáticas d*a* linguagem. Por fim, a teoria do xadrez não é um discurso sobre o xadrez. A sua aplicação simplesmente consiste em estabelecer regras para o uso de certos sinais da linguagem. Estas regras ajustam a multiplicidade da linguagem para um determinado fim (a descrição da movimentação efetiva das peças sobre um tabuleiro em uma partida de xadrez). Esta multiplicidade, no entanto, já se encontra presente na prova, e a linguagem apenas repete, desta vez "enlaçando-se" com a realidade, aquilo que a prova apresentara apenas enquanto um "esquema descritivo".

Nesse sentido, ao identificar, de um lado, a prova de uma proposição aritmética e, de outro, sua expressão em um simbolismo completamente analisado, Wittgenstein parece sugerir que, em tal simbolismo, a expressão da proposição aritmética adquire a mesma qualidade de figuras geométricas: é impossível que se desenhe uma figura, no espaço, que desobedeça as "leis da geometria"; do mesmo modo, é impossível, na aritmética dos traços e arcos, entendida como um *tipo de geometria*, construir um esquema que desobedeça as "leis da aritmética". A construção destes diagramas permite-nos pensar, pela comunidade da forma lógica, um fato contingente como existente ou não existente; permite-nos pensar uma possibilidade genuína que pode ser ou não realizada. Por outro lado, as formas de expressão que as equações da aritmética excluem

* *WWK*, pp. 133-4 (grifo nosso).

sequer chegam a ser descrições, sequer chegam a constituir um símbolo proposicional.

Se a proposição matemática completamente analisada é sua prova, e se aquilo que a proposição matemática não analisada diz é precisamente o modo pelo qual ela deve ser verificada, então se segue, como corolário, que o método de prova para o qual a proposição aponta é simultaneamente o método de sua análise. É por isso que, segundo Wittgenstein, não poderia haver duas provas independentes da mesma proposição matemática. Para que isto ocorresse, ela deveria ter duas análises completas independentes, o que implica que ela teria que dizer duas coisas completamente diferentes. Ela teria que ser, deste modo, ambígua, sem um sentido completamente determinado, o que é o mesmo que não ter um sentido.

Ora, se as provas diagramáticas são, como procuramos mostrar, a análise das proposições correspondentes, elas são de fato a prova mais rigorosa que se pode obter de uma proposição matemática*. Como tratar, porém, as provas que provam uma proposição matemática remontando-a a outras equações ou ainda as provas que são efetuadas em uma notação que não possui a multiplicidade correta? Pois é claro que nem toda prova deste tipo apresenta, ao fim e ao cabo, a construção de um diagrama ou o equivalente disto (como ocorre em provas com um ábaco). A título de exemplo, considere a prova da equação $60 \times 55 = 3300$ por meio do cálculo usual, no sistema decimal, em que utilizamos regras de deslocamento de dígitos e da tabuada:

$$
\begin{array}{rr}
 & 60 \\
\times & 55 \\
\hline
 & 300 \\
 & 300 \\
\hline
 & 3300
\end{array}
$$

Esta equação poderia ser utilizada, por exemplo, para construir a proposição "Pedro produziu 55 peças por dia durante 60 dias, acumulando um total de 3300 peças". A prova acima certamente não possui, na superfície do sinal, a mesma estrutura de tal proposição, caso esta venha a ser expressa em sua forma completamente analisada†. Como a regra poderia, então, aplicar-se a tal proposição? Este tópico será abordado na próxima Seção.

*Alguns comentadores chegam a afirmar que a prova diagramática é tomada por Wittgenstein como um *paradigma* para uma prova na matemática. Cf. **Monk**: Bourgeois, Bolshevist or Anarchist? The Reception of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, pp. 287-8.

†Ao menos no que tange à necessidade de se introduzir um sinal distinto para cada peça distinta e para cada dia distinto, sem entrar no mérito da complexidade das próprias peças, dos dias etc.

Prova e demonstração

A última observação do trecho supracitado, referente à página 16 do *WAi*, segundo a qual "uma prova é também chamada, com razão, de uma demonstração" parece sugerir a existência de uma distinção semântica entre as noções de "prova" e "demonstração", sem a qual a observação seria meramente a expressão de uma identidade sem conteúdo. Embora esta distinção não seja utilizada sistematicamente, ela é conveniente para fixar os termos da discussão. Dado o contexto em que a observação está inserida (imediatamente após a construção diagramática da proposição "5 é um número primo"), arriscamos a seguinte caracterização: uma demonstração é uma prova que ocorre em um simbolismo com a multiplicidade correta, tal como ocorre nas provas diagramáticas acima. Uma prova que não é uma demonstração é, por sua vez, simplesmente a prova em uma notação com uma multiplicidade distinta (com o acréscimo de outras regras sintáticas que recuperam a multiplicidade correta) ou a redução de uma equação a outras equações já provadas do mesmo sistema[*]. Este método é utilizado, intuitivamente, quando um cálculo é feito, por exemplo, através de regras tabuladas sem que, para isso, seja preciso voltar às definições recursivas das operações de adição e multiplicação.

A tematização deste tipo de cálculo é feita no parágrafo 110 das *PhBm*, parágrafo que se encontra entre dois parágrafos que procuram tratar da aritmética como um "tipo de geometria"[†]. De acordo com o raciocínio desenvolvido na Seção anterior, a comparação da aritmética com a geometria pode ser entendida nos seguintes termos: do mesmo modo que uma construção geométrica é um esquema simbólico que apresenta, na superfície do sinal, uma forma que será compartilhada por todas as suas aplicações, também as construções aritméticas, tais como aquelas que apresentamos acima, são esquemas simbólicos de suas possíveis aplicações. A conclusão que Wittgenstein tira desta comparação é que a aritmética, assim como a geometria, é sua própria aplicação. Salvo engano, esta tese – bastante enigmática – é simplesmente um corolário extraído da noção de "esquema". É da natureza de um esquema que ele seja apresentado juntamente com uma aplicação imediata dele próprio, dada pelos sinais que o apresentam. O esquema não é a construção *particular* que se efetuou *hic et nunc*, mas aquilo que esta construção tem em comum com todas as construções que compartilham a mesma forma. Este aspecto comum a uma classe de construções, no entanto, só pode ser apresentado por uma destas construções, a qual serve tanto como aplicação do esquema quanto como seu paradigma. Em outras palavras, não importa se o que estamos somando são traços, círculos ou maçãs, o que importa é aquilo que estas construções têm em comum,

[*] Essa distinção é análoga, em muitos aspectos, à diferença, presente no *Tractatus*, entre o reconhecimento de uma tautologia por meio do "método intuitivo" – apresentado no aforismo 6.1203 – e por meio da redução a outras tautologias (a "leis primitivas").

[†] Esta comparação também é feita em relação à "teoria do xadrez", como ilustra a passagem citada anteriormente.

o que não se pode apresentar sem trabalhar com traços, ou círculos, ou maças etc. Para utilizar uma expressão de Waismann, a matemática é a mesma em toda parte[*], e a sua aplicação também é a mesma em toda parte (pois a forma não é representada, mas simplesmente *é*[†]).

Esta propriedade de ser *imediatamente* a sua própria aplicação só ocorre, porém, em um simbolismo com a multiplicidade correta. No sistema decimal, por exemplo, isto não ocorre: assim como o dígito 7 deixa de ser a representação paradigmática de uma classe com sete elementos, a manipulação dos signos no sistema decimal deixa de ser imediatamente um esquema de suas possíveis aplicações. Há, no sistema decimal, uma opacidade notacional que cria um hiato entre o cálculo e suas possíveis aplicações. Wittgenstein, porém, insiste no fato de que *todo cálculo* da matemática (e não apenas os que ocorrem em um simbolismo completamente perspícuo) é uma aplicação de si próprio e apenas enquanto tal tem um sentido[‡]. Eis a importância do parágrafo 110, situado entre os dois parágrafos que reivindicam o caráter autoaplicável da aritmética: neste parágrafo, trata-se de mostrar que, embora os cálculos feitos, p. ex., no sistema decimal não sejam imediatamente uma aplicação de si próprios, eles o são de modo mediado (poder-se-ia dizer: o sistema decimal é um traje que disfarça o caráter essencialmente autoaplicável do cálculo aritmético).

No Capítulo seguinte, veremos que é precisamente esta opacidade notacional que torna possível a ideia de um "experimento aritmético". Vale observar, desde já, que esta ideia é tematizada, no início do parágrafo, juntamente com um cálculo executado de acordo com as regras da tabuada da adição:

$$\underbrace{\underbrace{2+3}_{5}+4}_{9} = \underbrace{\underbrace{2+4}_{6}+3}_{9} = \underbrace{\underbrace{4+3}_{7}+2}_{9}$$

> Gostariam de dizer: "Veja, sempre resulta, de fato, no mesmo". Entendido assim, fizemos um experimento. Aplicamos as regras da tabuada da adição e a partir delas não se vê imediatamente que elas conduzem nos 3 casos ao mesmo resultado. / É como se nos surpreendêssemos com o fato de que os dígitos, desassociados de suas definições, funcionam tão corretamente. Ou melhor: que as regras dos dígitos funcionam tão corretamente (quando elas não são controladas pelas definições).[§]

Como já era claro desde o *Tractatus*, só pode haver surpresas quando se trata de um experimento, mas não na lógica e na matemática, já que, nestas disciplinas, processo

[*] *WWK*, p. 225.

[†] Cf. ibid., pp. 34-5:"Die Mathematik ist ihre eigene Anwendung. Das ist kolossal wichtig. Daraus folgt sehr viel. Wenn ich sage: 3 Pflaumen + 4 Pflaumen = 7 Pflaumen, 3 Menschen + 4 Menschen = 7 Menschen, etc., so habe ich nicht die Zahlen auf verschiedene Gegenstände angewendet, sondern ich habe immer dieselbe Anwendung vor mir. Die Zahlen werden nicht vertreten, sondern *sind*. Vertreten werden nur die Gegenstände".

[‡] *PhBm*, X−109e.

[§] ibid., X−110a.

e resultado são idênticos. Se, neste caso, nos surpreendemos com a identidade do resultado, isto não se deve ao conteúdo propriamente matemático presente, mas a uma peculiaridade do sistema notacional empregado que, pelo fato de não ser completamente transparente, não permite que se veja *imediatamente* que os três casos conduzem ao mesmo resultado.

A continuação do parágrafo procura deixar manifesto que as regras de dígitos no sistema decimal pressupõem as definições, de modo que, mesmo que o cálculo não se efetue em um simbolismo com a multiplicidade correta, sempre é possível traduzi-lo para tal simbolismo:

> Isto tem a ver (estranhamente) com a consistência interna da geometria. Pode-se dizer que as regras dos dígitos sempre pressupõem as definições. Mas em que sentido? O que quer dizer que um signo pressupõe outro que no momento não está lá? Ele pressupõe sua possibilidade; a possibilidade no espaço dos signos (no espaço gramatical).[*]

Consequentemente, toda prova na aritmética, incluindo as que recorrem a atalhos sintáticos ao invés de retornar às definições recursivas das operações sobre os números, é também, de modo imediato ou mediado, uma demonstração. Dito em outros termos, toda prova deve poder ser traduzida para um simbolismo em que ela é uma demonstração; toda prova, assim, tem a mesma *multiplicidade* de uma demonstração. Deste modo, não só os dígitos singulares do sistema decimal são, como elucida Waismann, instruções para a construção de um símbolo figurativo (*bildhaften Symbols*)[†], mas o mesmo ocorre com as equações. Assim como o *Tractatus* resolvia, pela distinção entre sinal e símbolo, o problema de como a linguagem comum, cuja superfície não possui a mesma multiplicidade do mundo, podia figurá-lo, aqui também se resolve, de modo análogo, o problema de como o cálculo no sistema decimal, embora não tenha a multiplicidade correta, pode ser corretamente aplicado.

Demonstração, generalidade e negação

As considerações acima sobre o caráter *demonstrativo* da prova na matemática fornecem as ferramentas necessárias para a problematização de dois tópicos que abordaremos nas próximas duas Seções deste Capítulo. O primeiro deles se refere a questões acerca da

[*] *PhBm*, X−110b.

[†] Cf. *WWK*, p. 225:"Die übliche Art der Darstellung der Zahlen mit Hilfe des Ziffernsystems beruht auf genau demselben Prinzip. Auf den ersten Blick scheint die Zahl 387 kein Bild der Anzahl zu sein, die sie bedeutet. Wir müssen aber beachten, daß zu den Zeichen noch die Regel der Syntax hinzukommen. Die Zeichen 3, 8, 7, sind definiert. Gehen wir auf die Definition zurück, d.h., lösen wir diese Zeichen schrittweise auf, so nehmen sie gerade *die* Multiplicität an, die sie bedeuten; z.B. $3 = 1 + 1 + 1$. Zweitens bildet auch die Stellung der Ziffern etwas ab. Unsere Zahlzeichen enthalten die Möglichkeit der Umwandlung in andere Zeichen, welche unmittelbare Bilder sind. D. h. unsere Zahlzeichen, zusammen mit den Regeln der Syntax, sind Anweisung zur Konstruktion eines bildhaften Symbols".

generalidade e do infinito na matemática; o segundo, a questões que tangenciam o tema da negação na matemática.

Generalidade na matemática. Voltemos, por um momento, para a segunda alínea do parágrafo 166, citado no início deste Capítulo, na qual Wittgenstein afirma que, para que a equação algébrica dissesse aquilo que nós vemos em uma indução da aritmética, ela deveria ter a mesma multiplicidade do que ela "descreve". A "realidade aritmética" que a proposição aritmética "descreve" é, lembremos, a "apreensão da relação aritmética da estrutura", fornecida pela demonstração. Ora, se a prova é, em última instância, uma *demonstração*, e se a equação algébrica diz que certa propriedade vale para *todos os números*, seu símbolo deveria ter, necessariamente, uma multiplicidade infinita, o que pressuporia a existência de um infinito *atual.* Inversamente, a recusa deste tipo de infinito na matemática implica a recusa de uma proposição que fale de "todos os números". Neste caso, é preciso buscar uma forma de expressão para a generalidade que não seja de natureza proposicional, que não envolva um discurso sobre a totalidade dos números. Veremos que é precisamente esta a solução apresentada, nas *PhBm*, para a expressão da generalidade na matemática.

Negação na matemática. Como vimos, a expressão de um conteúdo matemático, em sua forma completamente analisada, já é a sua prova. Este resultado implica a inexistência, neste tipo de simbolismo, de uma distância entre "ser expresso" e "ser verdadeiro". Nesse sentido, o único modo de mostrar, via análise, a incorreção de certa equação é exibindo *outra* construção, *positiva*, que mostre a impossibilidade da construção do diagrama correspondente à equação incorreta. Para que isto seja possível, no entanto, é preciso que estas construções estejam em um mesmo *espaço*, que elas constituam um *sistema.* Pois, caso contrário, não se saberia como demonstrar a falsidade de uma determinação positiva ou a verdade de uma determinação negativa. Assim, não pode haver proposições isoladas na matemática, mas, sempre que há proposições, elas se apresentam como constituintes de um sistema. Do caráter essencialmente demonstrativo de uma prova, Wittgenstein também conclui, como veremos, que a aplicação da lei do terceiro excluído não pode ser de modo algum essencial para uma prova matemática, já que, neste caso, seria impossível que a prova pudesse ser expressa de modo *demonstrativo.* Não é que a lei do terceiro excluído não seja válida: sempre que há *proposições* matemáticas, ela é válida. Ocorre apenas que sua aplicação não pode ser essencial para uma prova matemática.

A DEFESA DE UMA TEORIA INTENSIONAL DO INFINITO

A defesa de uma teoria intensional do infinito é possivelmente o aspecto mais ilustre das considerações de Wittgenstein sobre a matemática nas *PhBm.* Vale relembrar, desde o início, que o adjetivo "intensional" deixa de caracterizar – como na discussão acerca da teoria das classes – a propriedade de uma extensão ser dada intensionalmente por um *conceito*, e passa a caracterizar a propriedade de uma lei que não impõe limites para a sua aplicação sucessiva. Essa ausência de limites de uma lei já é, segundo Wittgenstein, razão suficiente para que não possamos falar, neste caso, de uma totalidade:

> Contudo, parece agora que o quantificador não tem sentido para números. Quero dizer: não se pode dizer "$(n)\varphi n$", precisamente pois "todos os números naturais" não é um conceito delimitado. Mas, então, tampouco se deveria dizer que de uma asserção sobre a essência dos números se segue uma asserção geral. / Mas, nesse caso, parece-me que não se pode, absolutamente, empregar a generalidade – todos etc. – na matemática. Não há "todos os números", simplesmente porque existem infinitos.[*]

Na última observação do capítulo *XI*, Wittgenstein alega que o caráter completamente determinado do sentido de uma proposição matemática está vinculado à exigência de que, se há uma variável na proposição, *todos* os valores da variável devem estar completamente determinados[†]. A insistência, no capítulo *XII*, de que não há, na aritmética, um discurso sobre a *totalidade* dos números tem, por consequência, o fato de que, em uma proposição matemática, não pode ocorrer nenhuma variável que "percorra" tal totalidade. A proposição é finita; é só deste modo que ela pode ter um sentido completamente determinado.

A solução de Wittgenstein para apresentar a generalidade na aritmética é veiculá-la por meio de uma indução (uma lei): "A *generalidade* na aritmética é apresentada por meio de uma indução. A indução é a expressão para a generalidade aritmética"[‡]. Devido ao fato de que uma indução não é uma proposição, ela não *assere* a verdade ou a falsidade de uma generalidade, mas apenas *mostra* a possibilidade de se dar um passo a mais. Em uma conversa com o círculo de Viena, Wittgenstein deixa claro o caráter não assertivo (não proposicional) de uma indução:

> Um enunciado sobre *todos* os números não é apresentado por meio de uma proposição, mas por meio da indução. A indução, todavia, não pode ser negada, tampouco afirmada, pois ela não assere nada. Portanto: onde um enunciado está presente, ele pode ser negado. E onde uma construção não pode ser negada, é porque não há aí nenhum enunciado. O princípio do terceiro excluído certamente não vale – e, na verdade, simplesmente porque não se trata aqui de proposições.[§]

A possibilidade de dar um passo a mais se apresenta, na matemática, como uma possibilidade da *notação*, e sua realização está sujeita a todas as limitações

[*] *PhBm*, XII–126a-b.
[†] Ibid., XI–122g.
[‡] ibid., XII–129c.
[§] *WWK*, p. 82.

materiais a que um cálculo efetivo, digamos, *no papel*, está sujeito. A infinitude da indução, no entanto, não se sujeita a estas limitações, pois ela não se contrapõe à finitude. O infinito, afirma Wittgenstein, "não concorre com o finito. Ele é aquilo que essencialmente não exclui nada finito"[*]. O infinito, diz o autor, é uma flecha e não um comprimento[†]. É a interpretação de um infinito como uma grandeza que leva à confusão entre uma impossibilidade lógica e uma impossibilidade empírica: é dito que uma série infinita poderia ser inspecionada completamente por Deus e que apenas não pode ser inspecionada por meio das limitações humanas (Frege[‡]), quando, na verdade, uma série infinita, vista como uma totalidade que foi efetivamente inspecionada termo a termo, é um contrassenso.

Esta diferença categorial do "infinito" em relação ao "finito" fará Wittgenstein traçar uma distinção entre dois sentidos da palavra "possível". Quando se diz que "é *possível* que este livro esteja sobre a mesa", isto significa que faz sentido dizer que o livro realmente está sobre a mesa, mas quando se diz que "infinitas coisas *podem* se encontrar nesta direção", isto não significa que faz sentido dizer que há efetivamente infinitas coisas que estão nesta direção, mas que faz sentido, para cada número particular, dizer que este número é o número de coisas que estão nesta direção. Isto é, o "possível" no caso finito se refere ao sentido de uma proposição finita; já o "possível" no caso infinito se refere ao sentido de uma série de proposições finitas, mas não ao sentido de uma proposição infinita.

O primeiro tipo de possibilidade, como vimos anteriormente, se deixa mostrar por meio de uma efetividade no plano do simbolismo: a situação possível é *descrita* pela linguagem, e isto mostra a sua possibilidade. Já o segundo tipo de possibilidade não se deixa mostrar de modo análogo, pois isso exigiria a realização de infinitos atos simbólicos independentes. Este tipo de possibilidade deve se mostrar como uma possibilidade da notação:

> O que significa dizer que uma mancha no espaço visual *pode* ser dividida em 3 partes? Pode significar certamente apenas que uma proposição que descreve uma mancha dividida deste modo tem sentido. (...) / Em contrapartida, a divisibilidade infinita – ou melhor *ilimitada* – não significa que há uma proposição que descreve uma linha dividida em infinitas partes, pois esta proposição não existe. Esta possibilidade não é, portanto, indicada por meio de uma efetividade do signo, mas por meio de *outro* tipo de possibilidade do próprio signo.[§]

[*] *PhBm*, XII–138b.

[†] *WAi*, p. 121.

[‡] Cf. **Frege**: Grundgesetze der Arithmetik, V II, p. 129 (§125): "...die Folge braucht, solange sie besteht, nie mehr als jene drei Terme zu enthalten und wäre doch eine unendliche, wenn jene Möglichkeit genügt. Besteht sie? Für einen allgemächtigen Gott, ja; für einen Menschen, nein".

[§] *PhBm*, XII–139c.

É precisamente este tipo de possibilidade infinita, presente no sistema decimal como uma possibilidade de *interpolação* entre dois sinais, que interessou a Wittgenstein (como vimos no Capítulo 2 deste estudo) no momento da apresentação do espaço visual. Aquilo que há de infinito, neste caso, está expresso nas *regras* para a manipulação da notação, e nenhum outro tipo de infinito pode ocorrer na matemática. O infinito é, portanto, *regrado*, obedece às leis do simbolismo e só se apresenta mediante estas leis. Esta teoria do infinito é também chamada de "teoria das prescrições (*Vorschriften*)".

Nas *PhBm*, Wittgenstein combate constantemente uma teoria do infinito que pretende ser mais geral que a teoria das prescrições. Uma teoria que procura *descrever* a infinitude ao invés de *apresentá-la*. Uma teoria extensional do infinito concebida ao modo de uma teoria intensional (descritiva) das classes. Esta teoria é chamada de "teoria dos agregados" ou "teoria dos conjuntos". Para Wittgenstein, esta teoria não se manifestava no trabalho de um ou outro autor, mas era um fenômeno generalizado da prática matemática de sua época: "a matemática está toda infestada de modos de expressão da perniciosa teoria dos conjuntos"[*]. É possível encontrar, no entanto, algumas referências específicas a problemas e a autores que estariam vinculados a esta prática, *e.g.*, *i)* Dirichlet, e sua definição de função[†]; *ii)* Dedekind, e sua definição de conjunto infinito[‡]; *iii)* Cantor, e sua análise do *continuum*[§]; *iv)* Russell, e sua definição da relação de ancestralidade[¶].

Um curto excurso histórico nos permitirá compreender melhor algumas das críticas de Wittgenstein à teoria dos agregados. Procuraremos esclarecer, à luz de certos desenvolvimentos históricos da matemática no século *XIX*, a oposição wittgensteiniana entre "apresentação" (*Darstellung*) e "descrição" (*Beschreibung*). Esta oposição é de fundamental importância para se compreender a crítica apresentada à teoria dos conjuntos. Com efeito, um dos pilares desta crítica é a recusa de que a matemática tenha um conteúdo descritivo, de que ela *descreva* "objetos matemáticos"; ao invés disso, ela deve *apresentá-los*. O termo "apresentação" também é importante, pois ele será utilizado como sinônimo do termo "construção" (*Konstruktion*)[‖]. Como alguns intérpretes afirmam que Wittgenstein defende uma espécie de construtivismo em sua filosofia da matemática deste período, a oposição entre estas duas noções é fundamental para compreender o sentido e o alcance deste construtivismo. Por fim, esta oposição

[*] *PhBm*, XV−173g.

[†] Cf. *WWK*, p. 102: "Mit dem Dirichletschen Funktionbegriff fängt die Mengenlehre an".

[‡] Cf. *PhBm*, XV−171k: "Es ist ja auch die Dedekindsche Definition einer unendlichen Menge eine solche die das Unendliche beschreiben will ohne es *darzustellen*".

[§] Cf. ibid., XV−171i: "Die Frage wäre dann eigentlich: Läßt sich das Kontinuum beschreiben? Wie es Cantor und andere versucht haben".

[¶] Cf. ibid., XV−170b: "So macht es Russell mit R^*, er wickelt den Begriff ein, so daß seine Form verschwindet".

[‖] Como, por exemplo, em *WAi*, p. 111: "Es ist ja nicht so, daß die Beschreibung eine Zahl von außen beschreibt, sondern sie stellt eine Zahl dar, sie konstruiert eine Zahl".

também está vinculada ao que o autor chama de "experimento aritmético"*. Segundo Wittgenstein, a obtenção de um número por meio do resultado de um experimento seria "a *descrição*, não a *apresentação* de um número"†.

Apresentação × descrição: a crítica à teoria dos conjuntos

Há poucas evidências textuais, no *Tractatus*‡, da distinção, bastante operante no período intermediário, entre os conceitos de "apresentação" e "descrição". A título de exemplo, a proposição é caracterizada como sendo a "*descrição* de um estado de coisas"§ e ela também *apresenta* este estado de coisas¶. Há apenas um aforismo em que ambos os termos aparecem em contraste explícito. Na parte do livro reservada ao esclarecimento das "proposições da lógica", Wittgenstein afirma: "As proposições lógicas *descrevem* a armação do mundo, ou melhor, *apresentam-na*. Não 'tratam' de nada"‖. A última sentença parece sugerir que a oposição entre descrição e apresentação pode ser entendida do seguinte modo: disciplinas como a lógica e a matemática, ao contrário das ciências da natureza, não "tratam" de nada e, por este exato motivo, não podem ser propriamente descritivas, já que não haveria nada para descrever, nada que poderia ser chamado de seu objeto de estudo (é por isso que elas devem cuidar de si próprias). Por outro lado, as ciências da natureza tratam de seus respectivos objetos "de fora" e é por isso que são informativas, quando verdadeiras. A função, então, de disciplinas como a lógica e a matemática, segundo o *Tractatus*, seria a de apresentar a "armação do mundo", i.e., as relações de verdade entre proposições com sentido e as relações de substituibilidade mútua entre expressões simbólicas.

Nas *PhBm*, isto continua sendo verdadeiro: a matemática não trata de nada (ao menos não enquanto uma descrição externa de seus objetos): ela é, como diz o autor, uma atividade, e não uma teoria. Ao contrário do *Tractatus*, no entanto, números e, em geral, os elementos do cálculo passam a caracterizar estruturas lógicas, passam a compor, de modo essencial, o sentido da proposição. Os números naturais, alega Wittgenstein, são "uma forma dada na realidade por meio de coisas"**. Enquanto formas, eles não podem ser descritos, mas apenas apresentados††. Os símbolos matemáticos são

*Este vínculo será exposto com detalhes no próximo Capítulo deste trabalho.

†*PhBm*, XVIII−196a (grifo nosso).

‡Embora estejamos utilizando a tradução de Luis Henrique Lopes dos Santos para as citações desta obra, alteramos, a fim de manter a uniformidade do texto, a tradução de "darstellen" para "apresentar" (ao invés de "representar").

§*Tractatus*, aforismo 4.023 (grifo nosso).

¶Cf. p. ex., o aforismo 4.031: "Pode-se dizer sem rodeios: esta proposição apresenta tal e tal situação – ao invés de: esta proposição tem tal e tal sentido". Cf. tb. o aforismo 4.1: "A proposição apresenta a existência e a inexistência dos estados de coisas".

‖*Tractatus*, aforismo 6.124 (grifo nosso).

***PhBm*, X−113a.

††Cf. ibid., XV−171j: "Eine Form kann nicht beschrieben sondern nur dargestellt werden".

certamente reais, efetivos, mas não interessa à matemática descrevê-los, e sim trabalhar com eles, e para isso ela precisa, de acordo com suas regras, *construí-los.* Na aritmética de números naturais, por exemplo, essa construção pode ocorrer em diversos sistemas de apresentação (notação com traços, sistema decimal etc.), com a condição de que todos estes sistemas tenham a mesma multiplicidade, isto é, com a condição de que eles possam ser traduzidos um no outro, substituídos um pelo outro. É importante que nenhum destes sistemas se torne o objeto da consideração do saber matemático, já que, deste modo, ele já não seria apenas uma ferramenta para o cálculo, mas um componente essencial de sua apresentação. Para utilizar uma metáfora wittgensteiniana, ele não seria mais um servo, mas passaria a compor a sociedade*.

O perigo de transformar o modo de apresentação de um sistema no objeto da consideração do saber matemático motivou certos autores do século *XIX* a desconsiderar por completo o modo de expressão de certa classe de objetos matemáticos para caracterizá-los tão somente por meio de certas propriedades, por meio de uma descrição destes objetos. Estes autores passaram a priorizar, desde modo, a introdução de "conceitos" fundamentais na matemática, tornando acessório o ato de fornecer um modo de expressão particular para os "objetos" que "satisfaziam" estes conceitos. Havia, por outro lado, autores que discordavam desta abordagem e que procuravam enfatizar a importância de se fornecer um modo de expressão calculatório para estes objetos.

Esta oposição é bastante nítida quando se considera, por exemplo, a introdução e o estudo de funções de números complexos na Alemanha em meados do século *XIX*. O estudo deste domínio do saber matemático se dividia segundo duas abordagens: a primeira, centrada na universidade de Göttingen, procurava estudar tais funções independentemente de expressões analíticas para elas, procurando descrevê-las por meio de propriedades de modo que elas fossem completamente determinadas por elas; a segunda, centrada na universidade de Berlim, priorizava o estudo da *Darstellbarkeit* destas funções utilizando séries de funções mais simples ou outras expressões analíticas para elas. A primeira priorizava o aspecto conceitual da matemática, a segunda, o aspecto computacional. Matemáticos como Riemann e Dedekind representavam a primeira, ao passo que a segunda era representada por Weierstrass e Kummer, em continuidade com o estilo de Euler. A primeira está intimamente associada à criação da teoria dos conjuntos e à ideia de que conjuntos são primordiais para a fundamentação da matemática†. Caracterizemos, primeiramente, mais de perto esta primeira abordagem.

*Trataremos deste assunto com mais detalhes no Capítulo seguinte.

†Cf. **Ferreirós**: Labyrinth of Thought, p. xx: "The idea that sets constitute the foundation of mathematics emerged very early, and Cantor was by no means the leading exponent of this view. Its strongest proponent as of 1890 was Dedekind, but I shall argue that Riemann was also an important voice advocating this position. Riemann took a significant step in the direction of introducing the language of sets, coupling this with the conception that sets are the basic objects of mathematics. There are good reasons to regard his early contribution as a significant influence on the early set-theoretical

Em sua dissertação inaugural de 1851, Bernhard Riemann procurou fundar uma nova teoria para a análise de funções de variáveis complexas. A teoria buscava caracterizar estas funções por meio de propriedades fundamentais, sem que para isso fosse preciso trabalhar com expressões analíticas destas funções. Segundo Riemann:

> Os métodos anteriores para lidar com essas funções se baseavam sempre em uma expressão da função por meio da qual seu valor, para cada valor de seu argumento, é dado. Mostrou-se, através de nossa investigação, que, em decorrência do caráter geral de uma função de uma grandeza variável complexa, em uma definição deste tipo, uma parte dos dados de determinação (*Bestimmungsstücke*) é uma consequência dos demais, a saber, o montante de dados de determinação que foram reduzidos àqueles indispensáveis à determinação [da função]. Isto simplifica essencialmente o tratamento destas. Por exemplo, para provar a identidade de duas expressões da mesma função, era geralmente necessário transformar uma na outra, isto é, mostrar que ambas coincidem para cada valor da grandeza variável; agora, basta estabelecer a coincidência de tais funções para um montante muito menor de dados.
> Uma teoria destas funções, baseada nos fundamentos aqui estabelecidos, determinaria a configuração da função (i.e., seu valor para cada valor de seus argumentos) independentemente de um modo de determinação através de operações de grandezas, de modo que, para o conceito geral de uma função de uma grandeza variável complexa, são adicionadas apenas as características necessárias para determinar a função, e somente então migra-se para as diversas expressões pelas quais a função pode ser fornecida.[*]

Um importante pano de fundo para este passo inovador de Riemann é a evolução do conceito de função na matemática. De um modo bastante conciso[†], esta evolução ocorreu do seguinte modo: até o início do século *XVIII*, uma função matemática era uma expressão analítica que determinava, para cada valor de seus argumentos, um único valor. Euler, no entanto, já admitia funções determinadas "por partes", as quais ele chamou de descontínuas. A função, então, era contínua quando ela era dada por uma única lei ou expressão analítica. Cauchy, em seu famoso *Cours d'Analyse* de 1821, definiu o termo "continuidade" de modo que esta característica aparecesse como uma propriedade da própria função, independente de expressões analíticas para ela. Matemáticos como Fourier e Dirichlet propuseram que uma função deveria ser entendida simplesmente como uma correlação arbitrária entre dois conjuntos de valores, independentemente desta correlação seguir ou não uma lei comum. Ora, se funções deveriam ser entendidas como correlações arbitrárias independentemente de funções analíticas para expressá-las, elas deveriam ser determinadas pelas suas singularidades, pelas suas propriedades locais e globais que as diferenciassem – exceto talvez por uma constante – de outras funções,

attempts of both Dedekind and Cantor".

[*]Bernhard **Riemann**: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschafilicher Nachlass*, ed. por M. **Noether**/W. **Wirtinger**, New York: Dover, 1953, pp. 38-9.

[†]Voltaremos a tratar, adiante, de mais alguns pontos importantes desta evolução do conceito de função na matemática moderna.

já que nem se sabia se havia ou poderia haver uma expressão analítica para elas[*]. É esse conjunto mínimo de características da função, independentemente da *apresentação* da função por meio de uma lei, que Riemann procurou prover.

A influência de Riemann pode ser facilmente notada no seu colega mais jovem, Richard Dedekind, que via no trabalho de Riemann um modelo metodológico a ser seguido. Em uma carta a R. Lipschitz, datada de 6 de outubro de 1876, Dedekind afirma:

> Meus esforços na teoria dos números são direcionados a basear a investigação não em formas acidentais de apresentação ou expressões, mas em conceitos fundamentais simples e, através disto, – embora esta comparação talvez soe pretensiosa – alcançar neste domínio algo similar ao que Riemann alcançou no domínio da teoria das funções e, nesse sentido, eu não posso suprimir a observação de passagem de que, na minha opinião, os princípios riemannianos não são aplicados de modo consequente na maioria dos autores, p. ex., também nas novas obras sobre funções elípticas; quase sempre a simples teoria vem a malograr devido à interferência desnecessária de formas de apresentação, as quais certamente deveriam ser apenas resultados, não ferramentas da teoria.[†]

Na continuação da carta acima, Dedekind confessa que ele próprio havia outrora introduzido a noção de "campo finito" em conexão com uma forma de apresentação, sendo que esta poderia ser substituída por uma infinitude de outras formas de apresentação. Nesse sentido, a definição já pressupunha que estas substituições deixariam a noção intacta, isto é, que a noção era invariante em relação às diversas formas de apresentação. A definição mais satisfatória seria, então, a fornecida por ele em 1971, segundo a qual "um campo finito é um campo que possui apenas um número finito de divisores" ou, de modo equivalente, "um campo finito é um campo que contém apenas um número finito de números independentes uns dos outros"[‡].

Em suma, para Riemann e Dedekind[§], a matemática deveria ser fundada não por meio de fórmulas algorítmicas para calcular seus objetos, mas por meio de propriedades conceituais que descreviam estes objetos. Com isso, muitos resultados importantes eram extraídos sem trabalhar explicitamente com formas de apresentação, mas tão somente com propriedades características de funções e de conjuntos. Dirichlet menciona, em uma passagem de seu discurso em memória a Jacobi, esta proeminente tendência

[*]Na verdade, Riemann, na sua dissertação inaugural de 1951, afirma que "função arbitrária" e "função dada por certas operações de grandeza (*Grössenoperationen*)" são conceitos congruentes quando se trabalha com funções de uma variável que assume valores reais, o que não será o caso na análise complexa, em que há funções arbitrárias de uma variável complexa que, segundo o autor, não podem ser apresentadas por meio de uma combinação de operações de grandezas.

[†]Richard **Dedekind**: *Gesammelte mathematische Werke*, ed. por R. **Fricke**/E. **Noether**/O. **Ore**, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1930-2, Band iii, pp. 468-9.

[‡]Ibid., Band iii, pp. 469.

[§]Também poderíamos incluir Cauchy, Dirichlet, Jacobi, entre outros.

da “nova análise”, a de colocar “pensamentos no lugar de cálculos”[*]. “Pensamentos”, aqui, devem ser entendidos como a definição e aplicação de “conceitos fundamentais”, que descrevem os objetos da análise, ao invés de apresentá-los, de construí-los com fórmulas. O mesmo *leitmotiv* aparece em Hilbert: “Eu procurei evitar o grande aparato computacional de Kummer, de modo que também aqui o princípio de Riemann fosse implementado, de acordo com o qual provas não devem ser compelidas por cálculos, mas simplesmente por pensamentos”[†].

Abordagem notavelmente distinta era, por outro lado, a de Weierstrass. Na sua teoria sobre funções de variável complexa, a própria noção de “função de variável complexa” envolvia já, em sua definição, uma forma de apresentabilidade. Enquanto Riemann via as equações de Cauchy-Riemann como condições necessárias e suficientes para que uma função possa ser objeto do estudo da análise complexa, Weierstrass definia, como objeto de sua teoria, aquelas funções de variável complexa que eram apresentáveis localmente por séries de potências[‡]. Isto o permitia, com o auxílio de uma técnica conhecida como “extensão analítica”, reconstruir a totalidade da função a partir de sua apresentação local através de séries de potências[§]. Os números reais também eram, na abordagem de Weierstrass, essencialmente vinculados a sua apresentação por meio de séries convergentes. Toda a análise, então, poderia ser estabelecida por meio da apresentação aritmética de seus objetos, isto é, de fórmulas ou expressões analíticas para calculá-los. No caso de séries com infinitos termos, era requerida a prova da convergência da série, de modo que o “infinito” fosse aqui apenas uma *façon de parler*.

Em seu curso de 1886, Weierstrass apresenta, a partir do seu ponto de vista, o desenvolvimento histórico do conceito matemático de função. Neste contexto, alguns matemáticos como Leibniz, Jacob, Euler e Lagrange são tomados como exemplos do uso de “função” como sinônimo de “expressão analítica”. Após os trabalhos de Johann

[*] J. P. G. Lejeune. **Dirichlet**: *Lejeune Dirichlet's Werke*, ed. por L. **Kronecker**/L. **Fuchs**, Berlin: Reimer, 1897, p. 245.

[†] David **Hilbert**: *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, Berlin: von Julius Springer, 1932, p. 67.

[‡] Ambas as teorias pressupunham o estudo de funções *diferenciáveis*. A pergunta pelo objeto da teoria, então, era a pergunta pelas condições que uma grandeza complexa $w = u + vi$ deve satisfazer para ser uma função diferenciável da grandeza complexa $z = x + yi$. Para Riemann, era suficiente que os seguintes pré-requisitos fossem compridos: *i)* as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ devem existir e *ii)* devem satisfazer às equações: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Já para Weierstrass, $w(z)$ deveria poder ser apresentada localmente (em z_0) por meio de uma série de potências, de modo que $w(z) = \sum a_i(z - z_0)^i$. Ambas as definições são, com a exceção de pequenos detalhes, equivalentes, embora este fato não fosse conhecido na época.

[§] Cf. **Ferreirós**: Labyrinth of Thought, p. 36: “In his theory of analytic functions, Weierstrass defined them as those functions which are locally representable by power series. This allowed him to base the theory upon clear arithmetical notions, and to elaborate its first rigorous treatment. A necessary prerequisite was the principle of analytic continuation, which made it possible to ‘reconstruct’ the entire function from its local power-series representation. Weierstrass was able to establish that principle, thus creating a method for generating, from a given local representation or ‘element’, a chain of new ‘analytic elements’ defining the entire function”.

Bernoulli, o conceito de continuidade de uma função se altera, segundo Weierstrass, de modo que tal conceito se torna independente da expressão analítica da função. Ora, se, para os primeiros autores, o termo "função" era um sinônimo de "expressão analítica", esta nova definição de continuidade sequer fazia sentido. Importante para a compreensão da mudança do conceito de "continuidade de uma função" é o problema da corda vibrante. Neste problema, uma corda elástica, tendo suas extremidades fixas, é deformada de modo que sua forma seja descrita por uma função $f(x)$. Procura-se saber, então, qual função $y(x,t)$ apresenta a posição da corda após um tempo t, sendo que a única força agindo sobre a corda era a força elástica, dada pela lei de Hooke. Em 1747, d'Alembert resolveu o problema da corda vibrante por meio de uma equação diferencial (hoje conhecida como "equação da onda"). No entanto, d'Alembert assumia que a função $f(x)$ (o "estado inicial" da corda) era dada por uma expressão analítica. Em 1748, Euler argumentou que a solução era válida mesmo que a forma inicial da corda vibrante fosse dada por uma curva desenhada à mão, sem sequer saber se era possível construir uma expressão analítica para ela[*]. No entanto, mesmo sendo desenhada à mão, ela precisaria, para que o problema continuasse tendo sentido físico, continuar sendo uma única corda, isto é, o desenho precisava, de algum modo, ser "contínuo". É apenas em 1821 então que Cauchy define o termo "continuidade" tal como será utilizado pelos matemáticos posteriores[†]: "a função $f(x)$ se manterá contínua em relação a x entre seus limites dados se, entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função"[‡].

Para Weierstrass, então, levantava-se a questão da relação entre os conceitos de "função contínua" (entendida segundo a definição de Cauchy) e "função dada por uma expressão analítica". O matemático responde categoricamente a esta questão, afirmando que "se pode inferir, da continuidade da função, *que é possível apresentá-la por meio de uma série infinita, cujos membros singulares são funções polinomiais com coeficientes racionais*, isto é, que se pode, afinal, obter uma *expressão aritmética*..."[§]. Weierstrass também considerava possível a apresentação de funções descontínuas limitadas, o que indica, como afirma Laugwitz, que era da vontade de Weierstrass reduzir não somente o conceito de continuidade, mas sobretudo o conceito de função à apresentação *via* expressões aritméticas[¶].

[*]Para uma exposição detalhada deste problema e de sua importância para a evolução do conceito de "função", Cf. Israel **Kleiner**: Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, em: *The College Mathematics Journal*, 20.4 (1989), pp. 282–300; Adolf P. **Youschkevitch**: The concept of function up to the middle of the 19th century, em: *Archive for History of exact sciences*, 16.1 (1976), pp. 37–85.

[†]Embora não com o mesmo rigor da definição moderna que utiliza o conceito de "limite".

[‡]Augustin-Louis **Cauchy**: *Cours d'analyse algébrique*, Paris: Imprimerie Royal, 1921, pp. 34-5.

[§]Karl **Weierstrass**: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionslehre*, Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsanrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus d. Jahren 1870 bis 1880/86, Leibzig: Teubner, 1988, p. 23.

[¶]Cf. Detlef **Laugwitz**: "Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion": Grundlagen

Deste modo, Weierstrass se posiciona na contramão da abordagem de Riemann e Dedekind, para os quais a apresentação de uma função era, até certo ponto, arbitrária. Já para Weierstrass, embora fosse interessante e útil encontrar propriedades de funções sem considerar sua apresentação, "o fim último consiste sempre na apresentação de uma função"*. Isto é, a dedução exclusivamente a partir de conceitos, como desejavam Riemann e Dedekind, por mais interessante e útil que fosse, poderia ser eliminada, uma vez em posse da apresentação da função. Laugwitz, de modo ousado, afirma a este respeito: "se tivessem seguido Weierstrass, a teoria dos conjuntos de Cantor dificilmente seria capaz de se impor como ferramenta da análise"†.

Após esta curta digressão, é possível destacar semelhanças bastante surpreendentes entre a posição de Wittgenstein em relação à teoria dos conjuntos e a posição de Weierstrass, que colocava ênfase na apresentação de expressões calculatórias para uma função matemática. É claro que há certas diferenças que devem ser relevadas no momento da comparação: as funções matemáticas, para Wittgenstein, são, na verdade, *operações* sobre os elementos do cálculo; também aquilo que Weierstrass chama de série infinita não é mais do que uma *lei* para o cálculo de aproximações de uma função. Não obstante, é patente o fato de ambos os autores enfatizarem a ideia de que uma descrição nunca pode substituir a apresentação ou, ainda, a construção efetiva de um objeto matemático por meio de operações calculatórias. É bastante pertinente a tentativa da teoria dos conjuntos de eliminar, dos resultados do cálculo, a intrusão de características do modo de expressão; é também um objetivo do filósofo austríaco denunciar a intromissão do modo de expressão em considerações do cálculo com números (como ficará claro quando considerarmos, no Capítulo seguinte, as críticas de Wittgenstein a pseudo-operações e pseudoirracionais na aritmética). Entretanto, esta eliminação jamais pode ser feita de maneira a desaparecer com o modo de apresentação: este não pode ser abstraído em favor de uma consideração mais geral. Embora cada um dos sistemas numéricos (com traços ou contas de um ábaco, sistema decimal, binário etc.) possa ser substituído um pelo outro, isto não significa que eles possam ser suprimidos em benefício de um tratamento mais geral:

> Se o sistema numérico pertence à essência do número, então o tratamento geral não pode dispensá-lo. / E se, portanto, a notação do sistema numérico espelha a essência do número, então este algo de essencial também deve comparecer na notação geral. Com isto, a notação geral adquire a estrutura dos números. / Se essencialmente eu não posso

der Analysis bei Weierstrass 1886, historische Wurzeln und Parallelen. Em: *Historia Mathematica*, 19 (1992), p. 344: "(...) bemerkenswert ist, daß er [Weierstrass] die Darstellung beschränkter unstetiger Funktionen durch arithmetische Ausdrücke für wünschenswert, ja sogar für möglich hielt. Nicht nur der Begriff der Stetigkeit, sondern der Begriff der Funktion überhaupt sollte nach seinem Wunsch zurückgeführt werden auf die Darstellung als arithmetische Ausdrücke".

***Weierstrass**: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionslehre, p. 176.

†**Laugwitz**: "Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion", p. 345.

> escrever um número sem um sistema de números, então ele deve se mostrar também no tratamento geral do número. / O sistema numérico não é algo inferior – como uma máquina de calcular russa – que tem apenas interesse para a escola primária, enquanto o tratamento superior pode se abster de usá-lo.[*]

Wittgenstein exige, então, que a notação deva *espelhar* a essência do número, e é precisamente isto que não ocorre na teoria dos conjuntos. Ao procurar descrever formas lógicas por meio de predicados, a teoria dos conjuntos deixa de reproduzir tal forma na estrutura do sinal (da notação) para "embrulhá-la" em uma descrição cuja forma em nada se assemelha àquilo que é "descrito". A teoria dos conjuntos acaba, assim, por comprar gatos em sacos[†]. Predicados aritméticos, na concepção de Wittgenstein, são apenas métodos gerais para determinar, por meio de um cálculo, se certo número possui ou não a propriedade em questão. Um predicado aritmético deve "apontar" para um método de cálculo, e este método não poderia ser abstraído em benefício de uma consideração mais geral, na qual essa propriedade fosse objeto de consideração independentemente dos possíveis métodos de determinação do predicado. O conceito de número primo, p. ex., é "a lei geral pela qual testo se um número é primo ou não"[‡]. E a expressão rigorosa para "n é um número primo" é tão somente "dividir n por um número menor – com a exceção de 1 – resulta em um resto". Não pode haver, diz Wittgenstein, "uma expressão diferente para isso (exceto uma análoga), pois não se pode descrever a matemática, só fazê-la. (E isso já aniquila toda 'teoria dos conjuntos')"[§].

A teoria dos conjuntos dá a impressão de que uma lei geral (um "predicado aritmético") é apenas um expediente inessencial para se obter uma extensão, a saber, a totalidade (possivelmente infinita) dos objetos que satisfazem o predicado. Do mesmo modo, quando se fala, na matemática, do ponto mais alto de uma curva, tudo se passa (na teoria dos conjuntos) como se o cálculo deste ponto mediante as ferramentas do cálculo diferencial fosse apenas um método inessencial para a obtenção do ponto, e que o essencial é a sua descrição como o ponto mais alto da curva. O mesmo resultado, diria o conjuntista, poderia ser obtido idealmente se pudéssemos aplicar o critério de comparação a cada um dos infinitos pontos da curva. O cálculo, portanto, seria apenas uma ferramenta acessória que, após ser usada, poderia ser dispensada. O cálculo do ponto mais alto da curva é entendido, assim, como um "substituto" para a comparação "um a um" entre os pontos da curva. Wittgenstein, porém, se rebela diante desta interpretação equivocada do infinito na matemática:

> Não existe nenhum substituto para a passagem de degrau por degrau e o que for equivalente a fazê-lo tem de possuir, por sua vez, a mesma multiplicidade de que é

[*] *PhBm*, XV−171d-g.
[†] Ibid., XV−170a.
[‡] Ibid., XIII−161f.
[§] Ibid., XIII−159b.

> dotado o ato de fazê-lo. (Não há substitutos na lógica.) Tampouco uma seta é um substituto da passagem por todas as etapas rumo ao objetivo determinado.[*]
>
> Se uma teoria amorfa de agregados infinitos é possível, então ela deve apenas descrever e apresentar o que é amorfo nestes agregados. / Ela deveria, então, realmente entender as leis como meros meios inessenciais de apresentação de um agregado e abstrair desta inessencialidade e apenas se atentar para o que é essencial. Mas para o quê? / É possível na lei abstrair da lei e ver a extensão apresentada como o que é essencial? / Ao menos o que é certamente claro é que não há uma dualidade: lei e série infinita que dela se segue; isto é, não há algo na lógica como descrição e realidade.[†]

A lei dá a possibilidade de se dar um passo a mais, mas não a sua realidade, muito menos a realidade de "todos" os (infinitos) passos. Nesse sentido, a teoria dos conjuntos confunde o domínio daquilo que é possível com o domínio daquilo que é efetivo, confunde a possibilidade ilimitada de finitas aplicações da lei com sua aplicação a uma totalidade infinita. É esta imagem extensional do infinito que dá origem, segundo Wittgenstein, à ideia de que há acidentes na matemática, isto é, resultados não governados por leis: "E, se há uma realidade infinita, então também há acidente no infinito. E, portanto, por exemplo, também um número decimal infinito que não é dado por nenhuma lei"[‡]. Inversamente, se não há acidente na aritmética, é porque a ideia de uma realidade infinita é uma ilusão.

A separação entre aritmética e álgebra

A inexistência de uma variável que percorre todos os números torna impossível que as proposições da álgebra sejam concebidas como proposições quantificadas sobre a totalidade dos números naturais. Isso seria certamente pressupor a concepção extensional do infinito. As ressalvas de Wittgenstein em relação à prova de Skolem da lei da associatividade[§] ou, de modo mais geral, em relação a uma "prova indutiva", podem ser entendidas como uma tentativa de manter a todo custo a ideia de que a indução apenas *mostra* a possibilidade de se dar um passo a mais, mas não *realiza* esta série infinita de possibilidades. A conclusão a que Wittgenstein chega nas *PhBm* é que é preciso separar os sistemas aritmético e algébrico, de modo que as proposições sobre números e as proposições sobre caracteres sejam governadas cada uma por suas próprias regras. A regra algébrica da associatividade é vista, então, como uma *definição*, uma regra básica do cálculo com caracteres e, enquanto tal, ela não pode ser negada:

---

[*] ibid., XIII−149b.

[†] ibid., PhBm XVI−180a-b.

[‡] Ibid., XII−143b.

[§] Para uma exposição detalhada dos comentários de Wittgenstein sobre a prova de Skolem, Cf. **Shanker**: Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics, pp. 199-208.

> "$a + (b + c) = (a + b) + c$"...$A(c)$ pode ser entendida como uma regra básica de um sistema. Enquanto tal, só pode ser prescrita mas não *asserida* ou negada (portanto, nada de lei do terceiro excluído).[*]
>
> Naturalmente, eu não posso negar uma definição. Portanto, ela também não tem sentido. Ela é uma regra por meio da qual posso proceder (ou tenho de proceder).[†]
>
> Não posso negar as regras básicas de um sistema.[‡]

Vimos anteriormente que uma indução também não pode ser negada, dado o seu caráter não assertórico. Aqui, Wittgenstein deixa claro que o mesmo ocorre com as regras básicas de um sistema que, enquanto estipulações, nada asserem e, portanto, não podem ser negadas. Evidentemente, outras fórmulas do sistema algébrico como, p. ex., $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, podem ser negadas, já que elas expressam algo calculável de acordo com as regras do sistema algébrico. A negação de tal fórmula, no entanto, não é concebida como a asserção existencial de que ao menos um número natural não obedece à fórmula, mas simplesmente como a asserção de que o cálculo do lado esquerdo da equação fornece algo *diferente* do lado direito da equação, do mesmo modo que a inequação $25 \times 25 = 620$ afirma que o cálculo do lado esquerdo da equação fornece algo *diferente* do lado direito. Nesse sentido, as proposições da álgebra são tão *particulares* – i.e., não gerais – quanto as proposições da aritmética.

A separação dos sistemas algébrico e aritmético põe imediatamente a questão de saber como o sistema algébrico pode ser aplicado enquanto um sistema de regras sintáticas da linguagem. Lembremos que o *sentido* de uma regra (sua finalidade) é, segundo Wittgenstein, ela poder ser aplicada enquanto uma regra sintática. O cálculo aritmético, na medida em que é um "tipo de geometria", não tem nenhum problema de aplicabilidade, pois ele é sua própria aplicação, isto é, ele trabalha imediatamente com uma aplicação de si mesmo. A aritmética governa as regras da descrição de manipulações de classes de objetos com um simbolismo que espelha estas manipulações, isto é, que possui a mesma forma lógica de suas possíveis aplicações. O caso é diferente em relação à álgebra, já que sua aplicação não se justifica pela comunidade de forma lógica do esquema algébrico com suas aplicações. O esquema algébrico, digamos, $a + b = b + a$, pretende ser aplicado a cada par arbitrário de números, mas cada um destes pares determina uma forma *distinta*; cada número é um número *individual*, cada número determina uma estrutura singular e irredutível. Nesse sentido, não basta, para a aplicação das regras algébricas, o fato de elas constituírem um sistema com certa *multiplicidade*, pois sua aplicação não depende apenas de um isomorfismo estrutural.

Para que a álgebra, então, possa ser aplicada à aritmética, suas regras básicas devem corresponder a generalidades aritméticas (induções). A indução é também um

[*] *PhBm*, XIV−163a.

[†] ibid., XIV−163h.

[‡] ibid., XIV−163i.

instrumento destinado a mostrar a aplicabilidade de um sistema em outro: ela faz o papel de uma ponte entre a aritmética e a álgebra e, com isso, as regras da álgebra ganham um *sentido*:

> A indução não prova a proposição algébrica, pois apenas uma equação pode provar uma equação. Mas ela justifica o estabelecimento de equações algébricas do ponto de vista da aplicação à aritmética. / Isto é, elas obtêm através da indução somente seu sentido, não sua verdade.[*]

Wittgenstein emprega, nesta passagem, o par "sentido/verdade" para afirmar que a equação algébrica não é provada pela indução e, portanto, não adquire sua verdade por meio dela; por outro lado, a indução fornece sentido à equação algébrica, enquanto regra: ela torna possível a *aplicação* da álgebra à aritmética. Ainda no mesmo parágrafo, Wittgenstein se serve de outro par, a saber, "signo/designado" para caracterizar a relação entre a proposição algébrica e a indução: esta não se relaciona àquela como a prova ao conteúdo por ela provado, mas como o signo ao conteúdo por ele designado[†]. Isto é, uma regra básica da álgebra, enquanto estipulação, se assemelha mais a um nome do que a uma proposição; entretanto, é apenas por "nomear" algo que ela ganha um "sentido", que ela passa a ter um "conteúdo".

A NEGAÇÃO E O FALSO NA ARITMÉTICA

O vínculo feito por Wittgenstein entre, de um lado, a prova de uma proposição matemática e, de outro lado, sua análise completa nos permite concluir que, em um simbolismo completamente transparente, a mera expressão de um conteúdo matemático, construído por meio da manipulação de elementos do cálculo, já é sua prova, já é sua análise completa. Uma vez que é condição para a existência de uma "proposição" a presença de um hiato entre sentido e verdade, é possível inferir que só pode haver questões e proposições na aritmética quando há uma opacidade no simbolismo, opacidade que se transforma em perspicuidade pela atividade do cálculo que é, também, uma atividade de *análise*. Este conteúdo latente na proposição matemática é, por assim dizer, desvelado pelo processo calculatório. O ato de calcular a solução de uma questão na matemática é, deste modo, também um ato de elucidar o seu simbolismo.

As construções que operam em um simbolismo com a multiplicidade correta são, entretanto, sempre construções *positivas*, e só elas podem ter algum papel na prova de uma proposição matemática. A *ausência* de certa construção jamais pode ter um papel relevante no edifício matemático, já que, neste caso, nada foi *feito*: a ausência de uma prova para p não justifica, evidentemente, a asserção $\neg p$. Deste caráter essencialmente

[*] ibid., XIV−167d-e.

[†] Cf. ibid., XIV−167k.

positivo do saber matemático decorrerá a presença de duas assimetrias: uma, na relação entre afirmação e negação; outra, na relação entre o verdadeiro e o falso na matemática. Estas duas assimetrias, objetos do capítulo XIX das *PhBm*, serão o alvo das duas próximas Seções.

Negação e indeterminação

O início do capítulo XIX introduz o tema da negação na aritmética vinculando o seu interesse à presença de certa *generalidade*. Isto é, enquanto a afirmação na aritmética é interessante em si mesma, a negação só passa a ser interessante em conjunto com uma generalidade. Por outro lado, a continuação do capítulo irá caracterizar a negação como uma *indeterminação*. É importante não confundir, desde já, a generalidade que torna a negação interessante e a indeterminação do conteúdo negativo, já que a identificação de ambas as noções resultaria no caráter "interessante" de toda e qualquer negação (enquanto uma indeterminação, ela carregaria em si mesma uma generalidade). Não é isso que o autor pretende quando diz que a negação é uma indeterminação: toda negação leva de uma proposição a outra proposição, enquanto a generalidade na aritmética, como vimos, mal pode ser expressa por uma construção proposicional.

A propriedade de ser uma indeterminação contrasta a negação na aritmética com aquilo que ela é na lógica:

> Creio que a negação, aqui, não seja o que ela é na lógica, mas uma indeterminação. Pois como reconheço, verifico, o negativo? Por um indeterminado, porém, positivo.[*]
>
> É bastante claro que a negação na aritmética é completamente diferente da negação genuína de proposições.
> E é certamente claro que onde ela essencialmente – a partir de relações lógicas – corresponde a uma disjunção ou à exclusão de uma parte de uma série lógica em favor de outra, ela deve ter um significado totalmente diferente.
> Ela deve, com efeito, ser uma e a mesma que aquelas formas lógicas e, portanto, apenas aparentemente uma negação.
> Se "não igual" significa maior ou menor, então isto não pode ser um acidente, por assim dizer, para o "não".[†]

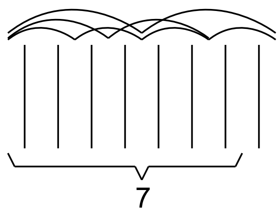
O último bloco de observações acima (XIX−202a), de composição bastante tardia em relação à composição das *PhBm*[‡], corrobora a ideia de que a reformulação da teoria da figuração, nas *PhBm*, preserva uma característica essencial da negação no *Tractatus*, a saber, a de não confundir aquilo que não é o caso com aquilo que *é* o

[*] *PhBm*, XIX−201d.

[†] ibid., XIX−202a.

[‡] Estas observações foram retiradas da página 239 do *WAii*, escritas provavelmente no fim de março de 1930.

caso em seu lugar[*]; característica – também expressa no início do segundo capítulo das *PhBm* – em virtude da qual "a proposição negativa tem a mesma multiplicidade da proposição negada e não [a mesma multiplicidade] *das* proposições que talvez pudessem ser verdadeiras em seu lugar"[†]. O *Tractatus* expressava o mesmo dizendo que, embora as proposições p e $\neg p$ tenham sentidos opostos, a elas corresponde uma e a *mesma* realidade[‡]. Na aritmética, pelo contrário, tudo se passa como se a negação nos enviasse a uma *outra* realidade. No caso de diagramas aritméticos no espaço, esta *outra* realidade é apresentada por recurso ao "alhures":

> É possível, no entanto, apresentar a *in*divisibilidade de modo *perspícuo* (p. ex., no "crivo"). *Vê-se* como todos os números divisíveis repousam acima ou abaixo do número considerado.
>
> 
>
>
> Aqui, a negação na aritmética é apresentada pela negação no espaço, o "alhures".[§]

Evidentemente, para que a negação corresponda a uma disjunção ou à exclusão de uma parte de uma série lógica em benefício de outra, tanto a proposição negativa quanto a proposição negada devem estar em um mesmo *sistema*. É apenas a propriedade de pertencer a um sistema que torna possível a afirmação e a negação de uma proposição na matemática.

Segundo Wittgenstein, negação e disjunção agem como indeterminações supérfluas no caso particular[¶], não sendo importantes para a aritmética, pois a forma determinada torna supérflua a forma indeterminada[‖]. Com efeito, assim como no *Tractatus*, uma indeterminação só pode surgir do fato de que a análise ainda não foi completamente levada a cabo (o que se percebe, no caso da proposição empírica do *Tractatus*, pela existência de um elemento proposicional que designa um complexo[**], no caso da proposição matemática, pela existência de uma expressão não calculada); no caso

[*]Confusão que aparece, nos manuscritos de 1914-1916, como uma dificuldade a ser superada. Cf. Ludwig **Wittgenstein**: *Tagebücher 1914-1916*, Frankfurt: Suhrkamp, 1984, pp. 25/11/1914.

[†]*PhBm*, II−2a.

[‡]*Tractatus*, aforismo 4.0621.

[§]*PhBm*, XIX−200b.

[¶]Ibid., XIX−202e.

[‖]Ibid., XIX−204b.

[**]Cf. *Tractatus*, aforismo 3.24.

singular, basta continuar a análise para que se chegue a uma proposição completamente determinada, a qual torna a proposição indeterminada supérflua. A proposição "26 não é divisível por 5" contém certamente uma indeterminação: ela diz que o resto da divisão de 26 por 5 *não* é 0, sem dizer, no entanto, qual *é* este resto. Uma vez, no entanto, que o cálculo *determina* que o resto é igual a 1, já não há mais uso possível da proposição singular indeterminada – enquanto regra sintática – que não esteja incluído em um uso possível da proposição singular determinada. Ela se torna *obsoleta*, na posse da regra determinada. A forma de expressão "26 maçãs foram divididas igualmente entre 5 pessoas" é certamente excluída da linguagem pela inequação $Resto(26 : 5) \neq 0$, mas também pela equação $Resto(26 : 5) = 1$.

Na presença de uma generalidade (indução), porém, negação e disjunção se tornam essenciais, significativas para a aritmética. Pois, neste caso, elas não são "superadas por uma forma determinada. Ou melhor, na lei geral, elas não são de modo algum indeterminadas"*. Não que negação e disjunção passem a ser, na lei geral, *determinadas*, mas que, na ausência de uma possibilidade de determinação, já não faz mais sentido falar em indeterminação, pois não se teria o "menos determinado" *em oposição ao* "mais determinado". Em que consiste essa significatividade da negação e da disjunção na lei geral?

Tomemos o caso da negação de um predicado aritmético qualquer, denotado por $P(\xi)$ (*e.g.*, $\xi \times 3 = 25$, ξ é um número primo etc.). Suponhamos que se queira mostrar que este predicado não é satisfeito por nenhum número natural. Normalmente, utilizando a terminologia do cálculo de predicados, isto seria *expresso* por uma proposição do tipo $\neg(\exists n)P(n)$. Todavia, entendida como a negação de uma disjunção infinita, esta expressão é um contrassenso. O que se poderia *mostrar*, por indução, é a generalidade, para cada número natural, da negação do predicado em questão. Isso não provaria a proposição $(n)\neg P(n)$, já que, como vimos, a indução não prova a proposição geral, mas ao menos ela serviria para mostrar que uma estipulação algébrica negativa (uma inequação) não entra em conflito com outras leis algébricas que se aplicam à aritmética. É nesse sentido que a negação se torna importante na lei geral: embora não possa haver, na aritmética, a negação de uma generalidade†, pode haver a generalidade de uma negação, e aqui a negação é essencial.

* *PhBm*, XIX–204b.

†Uma discussão bastante similar ocorre no domínio das proposições empíricas. No capítulo *IX* das *PhBm*, Wittgenstein mostrará que o quantificador existencial não permite a generalização de uma negação – $(\exists x)\neg\varphi x$ – o que, transposto para o caso do quantificador universal, corresponde à negação de uma generalização: $\neg(x)\varphi x$. É neste momento que Wittgenstein começa a trabalhar o conceito de "hipótese" (tema do capítulo *XXII*), conceito que será entendido de modo bastante semelhante à indução na matemática. Uma leitura atenta da gênese dos capítulos *IX* e *XXII* a partir dos manuscritos permite ver claramente que a conexão entre a introdução do conceito de hipótese e o "corte de uma das asas" do quantificador existencial surge a partir de uma reflexão sobre a negação e o infinito na aritmética.

No último parágrafo do capítulo *XIX*, Wittgenstein fornece um exemplo em que a disjunção se torna, em conjunto com uma generalidade, significativa. Neste ponto de nosso estudo, porém, o exemplo não pode ser inteiramente elucidado, já que isto requereria um longo excurso sobre as observações de Wittgenstein acerca dos números reais nas *PhBm* (tema do Capítulo seguinte deste estudo). É possível, no entanto, ao menos indicar as peças que cumprem um papel importante neste exemplo, para em seguida voltar à questão acerca do caráter significativo da disjunção.

Na concepção de Wittgenstein, números reais são leis para a construção de aproximações racionais. Uma lei, no entanto, deve se deixar mostrar em suas construções; na lei, não pode haver surpresas que surgem apenas no momento de sua *aplicação*. O exemplo típico de Wittgenstein para o caso de um método geral cujos resultados não obedecem a uma lei é o método para encontrar o próximo número primo. Este método certamente obedece a uma lei, porém os resultados da aplicação do método não aparecem, por assim dizer, como voltas de uma espiral, como níveis singulares da aplicação de uma lei, tal como ocorre, p. ex., com a série $+\frac{1}{1!}$, $-\frac{1}{3!}$, $+\frac{1}{5!}$, etc.[*]: "se eu procuro por números primos no intervalo entre n e $(n!+1)-n$ etc., então esta busca está sujeita a uma lei, ela segue uma lei, mas não o resultado"[†]. Mas, se for assim, então é apenas este intervalo que pode ter um papel fundamental na construção de um número real, e não os números que foram encontrados testando cada número do intervalo para verificar se ele satisfaz ou não certa condição:

> Pode-se construir, com a ajuda dos números primos, um irracional? A resposta é sempre: até onde é possível prever os números primos, sim, e não mais.
> Se é previsível que deva haver um número primo *neste* intervalo, então este intervalo é o previsível e construível e ele pode, por isso, creio eu, ter um papel na construção de um número irracional.[‡]

É nesse sentido, então, que a disjunção (o "intervalo") – uma indeterminação supérflua no caso singular – pode vir a ser, na lei geral, essencial e significativa para a aritmética: enquanto a forma determinada, calculada testando cada elemento do intervalo, não obedece a uma lei, a forma indeterminada obedece e passa a ser, assim, importante para a construção de um elemento do cálculo aritmético. A mesma situação ocorre em cálculos de limites de sequências[§], em que a relação entre o ν dado e o μ que satisfaz a condição de limite é apresentada por um intervalo, digamos, $f(\nu) < \mu < g(\nu)$. Embora nem sempre o valor de μ satisfaça uma lei, o intervalo satisfaz e isto se torna significativo para o cálculo do valor limite.

[*] Cf. ibid., XVIII−190a.

[†] *WAii*, p. 70.

[‡] *PhBm*, XIX−204d.

[§] Dizemos que uma sequência tem um limite L se, dado um número natural ν, for possível construir um número natural μ tal que, para cada número natural $N > \mu$, a distância entre o N-ésimo termo da sequência e o limite L é menor que $(\frac{1}{10})^{\nu}$.

O falso e as provas indiretas

Se a prova de uma proposição matemática é sua análise completa, não pode haver, naturalmente, uma análise completa de uma equação falsa; o que pode haver é uma construção que mostra a sua falsidade, mas não uma construção que seja a expressão completamente analisada da equação incorreta (essa construção seria, por assim dizer, uma construção geométrica que contraria as leis da geometria). Se o falso, enquanto tal, não se manifesta em um simbolismo com a multiplicidade correta, qual seria sua necessidade para a aritmética? Ele só poderia cumprir um papel relevante em uma proposição que não se deixasse provar por meio de uma construção em um simbolismo com a multiplicidade correta, em uma proposição cuja prova não pudesse ser, ao mesmo tempo, uma demonstração. Ora, uma vez que Wittgenstein adere ao caráter essencialmente demonstrativo da prova, ele deve negar necessariamente que equações falsas possam cumprir algum papel que equações verdadeiras não podem cumprir:

> É muito estranho que, para a apresentação da matemática, sejamos obrigados a usar também equações falsas. Pois é a isto que tudo remonta. Se a negação ou a disjunção no sentido usual é necessária na aritmética, então as equações falsas são um componente essencial de sua apresentação.[*]
>
> É claro, para mim, que a aritmética não precisa de equações falsas para sua construção, mas parece-me que se pode muito bem dizer "há um número primo entre 11 e 17", sem se referir a equações falsas.[†]

Se tomarmos como sinônimos os termos "construção" e "apresentação" – o que parece bastante adequado neste caso – a conclusão do *modus tollens* é que negação e disjunção não são necessárias na aritmética *no sentido usual*, o que é, como vimos na Seção precedente, verdadeiro: negação e disjunção têm apenas a *aparência*, na aritmética, de uma negação ou de uma disjunção; são, na verdade, equivalentes a exclusões em um sistema, agindo como indeterminações supérfluas no caso de uma proposição singular. Elas são necessárias na aritmética, como vimos, apenas na presença de uma generalidade, de uma lei; a lei, por sua vez, não é uma proposição, não é algo que poderia ser verdadeiro ou falso.

A partir do caráter prescindível das equações falsas, observa-se na matemática, assim como ocorre na linguagem descritiva, a existência de um privilégio do verdadeiro sobre o falso, privilégio que seria inteiramente solapado caso equações verdadeiras e falsas fossem reduzidas, respectivamente, a tautologias e contradições. Afinal, uma contradição, na lógica, vale tanto quanto uma tautologia: tudo aquilo que uma tautologia mostra, seria possível mostrar também com uma contradição[‡]. Como acentua Lopes

[*] *PhBm*, XIX−200e.

[†] ibid., XIX−203a.

[‡] Cf. *Tractatus*, aforismo 6.1202.

dos Santos, "ambas exibem relações formais entre proposições factuais e, nessa medida, ambas podem ser peças importantes do cálculo lógico – como o demonstram as provas por absurdo"[*]. Se há, na matemática, um privilégio do verdadeiro sobre o falso, da equação correta sobre a incorreta, então, necessariamente, essas noções não podem ser redutíveis, como queria o projeto logicista, a tautologias e contradições.

Negar que o falso possa ter algum papel relevante no edifício matemático implica negar a possibilidade de um uso do princípio do terceiro excluído que seja essencial em uma prova matemática; implica negar que uma afirmação possa ser verificada apenas pela negação de sua negação. É apenas nesse sentido que Wittgenstein encara "com desconfiança a utilização do princípio do terceiro excluído em uma prova matemática"[†], que há algo que "se opõe à aplicação do princípio do terceiro excluído na matemática"[‡]. Comentadores, em geral, têm tido dificuldades para interpretar os comentários de Wittgenstein sobre o princípio do terceiro excluído, já que algumas de suas observações depõem a favor da *validade* do princípio, enquanto outras tecem críticas a sua *aplicação*. Mas não há nada de contraditório nestas observações: o princípio é válido, na medida em que se trata de *proposições* matemáticas. Afirmar que o princípio do terceiro excluído é válido, neste caso, não significa nada além de afirmar que a proposição institui uma questão que recebe como resposta um "sim" ou um "não" tão logo se aplique o método de cálculo para o qual ela aponta. Quando, porém, Wittgenstein diz que algo se opõe à aplicação do princípio do terceiro excluído na matemática, ele quer combater a imagem comum por trás de uma "prova indireta", a saber, a de que tal prova alcança *o mesmo* que a prova direta, mas por um "outro caminho", por uma rota alternativa e completamente independente. Para Wittgenstein, porém, a própria rota é constitutiva do resultado e é por isso que ele propõe que concebamos a proposição matemática como a superfície de um sólido, sendo a prova o "corpo" do sólido[§]: se dois sólidos têm a mesma superfície, mas "corpos" distintos, então não são o mesmo sólido. Não pode haver, portanto, provas independentes de uma mesma proposição matemática:

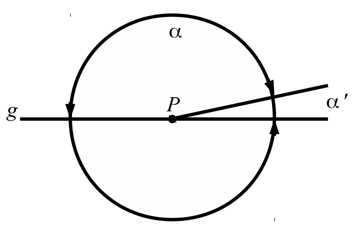
> Provas que provam o mesmo podem ser traduzidas uma para a outra e, nessa medida, são a mesma prova. As únicas provas para as quais isso não vale são as do tipo: "A partir de duas coisas, infiro que ele está em casa: primeiro, seu paletó está pendurado no hall e, além disso, posso ouvi-lo assobiando". Nesse caso, temos duas fontes independentes de conhecimento. Essa prova exige fundamentos que vêm de fora, ao passo que uma prova matemática é uma análise da proposição matemática.[¶]

---

[*] **Lopes dos Santos**: A essência da proposição e a essência do mundo, p. 90.
[†] *WAii*, p. 108.
[‡] *PhBm*, XIX−201a.
[§] Cf. ibid., XIII−162b.
[¶] ibid., XIII−153a.

Além disso, o próprio nome do princípio é capcioso, pois soa como se houvesse um terceiro a ser excluído, como se fosse semelhante a "um sapo é ou marrou ou verde, não há uma terceira opção"[*], ou ainda a "ou ele está em casa ou seu paletó não está pendurado no hall". Nestes casos de "provas" de proposições empíricas, o uso do "terceiro excluído" leva, juntamente com a exclusão de certas possibilidades, a uma proposição que não é equivalente à exclusão destas possibilidades: do fato de que ninguém está assobiando e de que o paletó não se encontra pendurado, deduzo que ele não se encontra em casa. A conclusão, porém, só é válida *acidentalmente* (no caso acidental, p. ex., de ele sempre assobiar ou deixar o casaco pendurado quando se encontra em casa); como já havia sido enfatizado, porém, na matemática isso jamais pode ocorrer: "se 'não igual' significa maior ou menor, então isto não pode ser um acidente, por assim dizer, para o 'não'"[†].

Na matemática, portanto, não há provas "alternativas", pois nunca é irrelevante o modo pelo qual um resultado é alcançado. Assim, toda prova deve se mostrar, quando entendida corretamente, como sendo um caso de prova direta. As *PhBm* não apresentam discussões sobre provas indiretas nas observações sobre a negação. Há, contudo, dois excertos interessantes – um, presente nos manuscritos e outro, nas conversas com Waismann – que trazem esse tema para o primeiro plano e que iluminam a posição de Wittgenstein acerca deste tipo de raciocínio matemático. No primeiro deles, Wittgenstein procura transformar a prova indireta em uma "prova" indutiva:



> Como funciona a prova indireta |p. ex.| na geometria? O que há de mais estranho nela é o esforço para se fazer um desenho *não geométrico* para ela (o análogo exato de uma proposição i-lógica). Mas, naturalmente, isto apenas se origina de uma concepção falsa da prova. É, p. ex., cômico quando se diz "suponha que a reta g tenha, a partir do ponto P, duas continuações". Mas algo assim não precisa de modo algum ser suposto. As provas na geometria, na matemática, não podem, no sentido genuíno, ser indiretas, pois não se pode supor o contrário de uma proposição geométrica, na medida em que se adere a certa geometria. Aquela prova mostra simplesmente que, quanto mais α' se aproxima de 0, mais |e sem limite| as seções curvas α e $\alpha + \alpha'$ se aproximam uma da outra.[‡]

[*] *PhBm*, XIX-201a.
[†] Ibid., XIX−202a.
[‡] *WAii*, p. 146.

É importante ressaltar que, como o próprio Wittgenstein diz, *as provas na matemática não podem ser, no sentido genuíno, indiretas.* A suposição de uma proposição falsa se revelaria, em um simbolismo com a multiplicidade correta (como é o caso da prova diagramática do exemplo acima), impossível de ser feita, já que isso remontaria à tarefa de traçar uma reta com uma bifurcação em certo ponto, ou seja, traçar uma reta que não é uma reta. No segundo excerto, Wittgenstein comenta a tradicional prova "indireta" da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

> A prova indireta tem a forma: $p \cdot q \supset \neg p$. Há, então, duas possibilidades de entendê-la: eu posso ou abandonar "q" (este é o caso usual), ou "p". Exemplo: a prova de que $\sqrt{2}$ é irracional.
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{m}{n} \cdots q \\ (m, n) &= 1 \cdots p \\ (m, n) &\neq 1 \cdots \neg p \end{aligned}$$
>
> É dito, então: *portanto* não há nenhum número racional cujo quadrado seja 2. Na verdade, existe ainda outra possibilidade: abandona-se "p" e, então, a gramática de "$\sqrt{2}$" deve ser alterada. Eu deveria, então, entender pelo sinal "$\sqrt{2}$" não o que entendo agora pelo mesmo sinal.

Em primeiro lugar, o exemplo deixa claro que o raciocínio acima não se dá do seguinte modo: supõe-se que q (uma proposição falsa) seja verdadeira, chega-se a uma contradição e, então, conclui-se que $\neg q$. O que é "suposto" são as regras do sistema aritmético (p), ao qual se acrescenta outra *regra* (q) e, com isso, uma proposição incompatível com o sistema original é provada. Neste caso, há duas possibilidades: *i)* acrescentar a regra oposta ao sistema, mantendo a compatibilidade desta regra com as demais regras do sistema; *ii)* manter a regra que foi acrescentada e abandonar certas regras do sistema original, alterando-se assim a "gramática" dos sinais utilizados.

CAPÍTULO 4

A temática dos números reais

> Na construção da matemática, há dois pontos em aberto que seguem possivelmente sem fundamento: a progressão na série dos números naturais e o *continuum*. Todo o resto, a transição dos números naturais para os negativos e fracionários, bem como a introdução das grandezas imaginárias e hipercomplexas, é uma questão lógico-formal que não contém mais nenhum quebra-cabeça e dificuldade.
>
> Hermann Weyl, *Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*.

Os capítulos *XVI* a *XVIII* das *PhBm* se movem em torno da temática dos números reais. *Grosso modo*, trata-se fundamentalmente de empregar o resultado das discussões anteriores para traçar os contornos de uma concepção correta dos números reais. Em particular, três teses serão reforçadas nas discussões destes capítulos: *i*) a de que as proposições matemáticas são parte da sintaxe dos contextos linguísticos em que elas são aplicadas; *ii*) a de que o infinito acidental – i.e., não vinculado a uma lei – é uma absurdidade; *iii)* a de que toda questão ou proposição matemática é finita. Neste Capítulo, será importante reconstituir, sob certos limites, o conteúdo destes capítulos de modo a observar, nestas teses, os compromissos de Wittgenstein em relação à aplicabilidade da matemática, ao caráter anti-extensional do infinito e à identidade entre sentido e verificabilidade de uma proposição matemática.

NÚMEROS REAIS E APLICAÇÃO GEOMÉTRICA

Geometria é, para Wittgenstein, sinônimo de sintaxe. Seja no âmbito do espaço visual, em que a geometria é "pura e simplesmente gramática"*, seja no âmbito das medidas físicas, em que a geometria é parte de uma teoria, seja ainda no terreno da aritmética, entendida como um "tipo de geometria", o esforço do geômetra é o esforço

** PhBm*, XVI–178e.

de elaboração de uma sintaxe. A sintaxe, por sua vez, é composta de regras para o uso de sinais, visando a constituição de um símbolo proposicional. Entendida corretamente, a geometria não descreve as propriedades de certo espaço, mas prescreve regras para a descrição de objetos neste espaço. Ocorre, no entanto, que o vocabulário usualmente empregado na geometria é manifestamente descritivo. Não é raro encontrar, em livros clássicos de geometria[*], o axioma de incidência: "Entre dois pontos, *há* uma reta que os contém" ou, ainda, o teorema: "A soma dos ângulos internos de um triângulo *é* 180 graus". É por isso que Wittgenstein fala em "regras disfarçadas de uma sintaxe"[†], afinal, elas não parecem ser, à primeira vista, regras sintáticas; para entendê-las corretamente, é preciso, então, tirar-lhes este traje descritivista. Vejamos como isto funcionaria para os exemplos mencionados anteriormente.

O axioma acima, entendido como uma regra sintática, tem o sentido de permitir formas de expressão do tipo "Há uma – e apenas uma – reta entre estes dois pontos" ou, ainda, "Eu tracei uma reta entre estes dois pontos". Neste caso, bem como em casos semelhantes, o que ocorre é que a pseudodescrição geométrica é concebida como uma regra de permissão de certa forma de expressão. No caso do teorema acima, porém, a mesma estratégia não pode ser aplicada. O teorema não tem o sentido de permitir, por exemplo, a forma de expressão "A soma dos ângulos internos deste triângulo é 180 graus". Como concebê-lo, então, como uma regra da sintaxe? A sugestão de Wittgenstein é concebê-lo como uma norma que estabelece a correção ou incorreção de mensurações realizadas a respeito do triângulo em questão:

> Como é o caso da proposição "a soma dos ângulos de um triângulo é 180 graus"? De qualquer modo, ela não parece ser uma proposição da sintaxe. A proposição "ângulos opostos são iguais" significa que se eles não se revelarem iguais na medição, eu declararei que a medição é falsa, e "a soma dos ângulos de um triângulos é 180 graus" significa que, se a soma não se revelar como 180 graus quando medida, suporei que há um erro na medida. Portanto, a proposição é um postulado sobre o modo de descrição dos fatos. Portanto, uma proposição da sintaxe.[‡]

O vocabulário utilizado, em particular com o uso do conceito de "postulado" (cf. *infra*), deixa claro que se trata, neste caso, do espaço físico, e aqui a geometria é a sintaxe das descrições de objetos neste espaço feitas com o auxílio de instrumentos de medida e expedientes semelhantes (fisicalistas). Neste contexto, a geometria não pode ser aplicada sem um complemento a ela; ela não é, por assim dizer, autossuficiente. Aquilo que a completa para que ela possa ser aplicada é uma teoria física. Assim,

[*]Bernays cita, p. ex., a obra de Hilbert sobre os fundamentos da geometria, cujo vocabulário descritivista é posto em contraste com o vocabulário construtivista dos *Elementos* de Euclides. Cf. Paul **Bernays**: Sur le platonisme dans les mathématiques, em: *L'Enseignement mathématique*, 34 (1935), p. 53.

[†]*PhBm*, XVI–178b.

[‡]ibid., XVI–178k.

a geometria é aqui tanto parte essencial como essencialmente parte de uma teoria, de uma hipótese. No vocabulário de Wittgenstein, uma hipótese é uma suposição sobre o modo mais prático (mais simples) de descrição do mundo. E esta suposição é feita mediante a observação da ocorrência de certas regularidades, p. ex., referentes a leituras feitas mediante instrumentos. A parte da hipótese que é construída *a priori* e independentemente de possíveis regularidades empíricas é chamada de *postulado*[*]. Os enunciados da geometria são, no contexto de uma teoria, postulados. É da natureza de um postulado nunca ser refutado por uma experiência; a teoria física é, então, a parte restante da hipótese responsável por ajustar os postulados a observações empíricas.

Wittgenstein explica esta divisão da hipótese em duas partes – geometria e física – por meio da comparação da geometria com o motor de um veículo[†]. A comparação é, aproximadamente, a seguinte: em um veículo, um motor funciona, em um determinado instante, a certa velocidade, e sua função é mover as duas rodas dianteiras do veículo. No entanto, a depender da trajetória a ser realizada, a velocidade de cada roda precisa ser distinta. Em uma curva, por exemplo, a roda mais externa deve ter uma velocidade maior que a roda interna. Se o motor funcionasse apenas para movimentar uma haste conectada a ambas as rodas, isso seria impossível, já que elas deveriam se movimentar na mesma velocidade. Para que as rodas possam girar, cada uma a sua velocidade, há um dispositivo mecânico no veículo chamado de "diferencial". Este dispositivo permite que o motor possa funcionar a certa velocidade independentemente do movimento a ser feito pelo veículo. De modo análogo, a geometria "funciona" independentemente dos fatos espaciais a serem descritos (das medições feitas por instrumentos), e a peça "diferencial" que faz com que estes fatos estejam em harmonia com a geometria é, precisamente, a teoria física. É a teoria física que, mediante uma medição dos ângulos diferente de 180 graus (e postulando-se a geometria euclidiana), obriga a se considerar um erro na medição. É importante perceber, todavia, que não há nenhuma *necessidade* de se postular a geometria euclidiana, em oposição a outra geometria (elíptica, hiperbólica); ambas serviriam ao mesmo propósito, embora uma possa ser mais conveniente que a outra dependendo das regularidades observadas. Seria possível até mesmo postular (como já ocorrera na história da ciência moderna) a correção das medidas feitas com um determinado instrumento (*e.g.*, um metro de ferro) e verificar, então, se os resultados das medições fornecem resultados euclidianos[‡]. Nessa teoria seria até mesmo possível "medir" a curvatura do espaço. É claro, porém, que neste caso a geometria já deixa de ser propriamente sintaxe, já deixa de ser propriamente geometria. Nos casos em que a geometria é utilizada como sintaxe de uma hipótese, ela nunca é objeto medido, mas ela é o metro por meio do qual se avalia a correção de uma medida. Esta medida pode

[*] *WWK*, p. 162.
[†] Cf. *PhBm*, XXII–231a.
[‡] Cf. ibid., XVI–178m.

até ser, em certos casos, a medida correta de acordo com a geometria, mas isso ocorre apenas de modo acidental. Caso ela fosse *essencialmente* a medida correta de certo objeto, ela não seria mais medida, ela seria parte daquilo que se postula, e não daquilo que se observa (ou melhor, daquilo que o instrumento fornece).

Por outro lado, na geometria do espaço visual não há postulados nem geometrias alternativas; a geometria se erige, neste caso, com base nas propriedades lógicas deste espaço, e não em regularidades observadas mediante instrumentos. O espaço visual e o espaço de que trata a física, porém, devem manter algum tipo de vínculo, pois não há fatos físicos *ao lado de* fatos fenomenológicos: a realidade é apenas o fenômeno. Nesse sentido, deve haver algum tipo de correspondência formal entre o espaço fisicalista em que medições são efetuadas e o espaço visual, o palco onde se passa aquilo que efetivamente *vemos*. A pergunta que faz Wittgenstein é, nesse contexto, “em que sentido os resultados de medições podem dizer algo sobre *aquilo* que nós também vemos”[*]? A física clássica postula a existência de círculos, retas, linhas de força etc. todos perfeitamente exatos e em conformidade com a geometria euclidiana, e se a medida não concorda com o resultado teórico calculado, é ela que recebe o ônus do desvio: é a mensuração (a aferição ou o instrumento de medida) que é incorreta, imprecisa, inexata (o análogo exato, no caso aritmético, é a atividade de contagem). É verdade que a hipótese – a teoria física – sempre pode ser abandonada a depender da frequência dos “erros” de mensuração, mas só se abandona uma hipótese diante de uma “recompensa sempre maior”[†], diante de um modo mais simples de apresentação dos fatos, de outra hipótese. Na linguagem do espaço visual, contudo, não se pode abandonar uma gramática em favor de outra; não há, por assim dizer, graus de liberdade que excedem a multiplicidade dos fatos apresentados e que poderiam ser permutados em benefício de uma maior simplicidade. Em outras palavras, a gramática da descrição fenomenológica deve se ajustar ao espaço da visão de modo que não haja nem excesso nem falta. E se um círculo visual não toca sua tangente em apenas um ponto, não se pode, na gramática fenomenológica do espaço visual, falar que são os olhos que produzem o desvio, já que isso seria retornar ao *Redensart* da física. Não pode haver um critério externo para a correção daquilo que se vê: o espaço visual é autônomo, pois critério de si mesmo.

Não é o caso, aqui, de retomar os diversos exemplos visuais que Wittgenstein elenca a fim de mostrar certas propriedades constitutivas do espaço visual que contradizem os conceitos geométricos da geometria euclidiana. O que nos interessa é a consequência, para a geometria *euclidiana*, deste descompasso entre aquilo que a física descreve e o fenômeno imediatamente perceptível no campo da visão. Como argumenta Soutif, este descompasso faz com que seja necessário, para a aplicação da

[*] *PhBm*, XVI–178j.
[†] Ibid., XVI–227a.

geometria euclidiana, a incorporação de todo um vocabulário do "vago", do "impreciso" ao arsenal de termos desta geometria[*]. Se as propriedades do círculo visual contradizem as propriedades do círculo "visto", é porque – diz a física – "nunca vemos um círculo exato". A causa do desacordo é atribuída ao olho, ao instrumento por meio do qual os objetos de que trata a física são "vistos". Mas aqui, ao contrário de uma medição fisicalista, não há mais a "medição exata", a medição que concorda perfeitamente com aquilo que é postulado. Se é possível, por um lado, medir a soma dos ângulos internos de um triângulo e obter exatamente 180 graus, por outro lado é impossível ver um círculo que toca sua tangente em apenas um ponto. Consequentemente, aquilo que se chama de "inexato" não é mais o mesmo que no caso de uma medida, pois o "inexato" não se opõe mais ao "exato". É claro que a algo ele deve se opor, para que tenha um conteúdo. Aquilo a que o "inexato" se opõe, neste caso, é ao "mais exato", ao "menos impreciso". Quando dizemos ao físico que o círculo visual toca a tangente em uma curva que é do tamanho de certo arco do círculo, ele nos pede para que vejamos o mesmo círculo com um instrumento mais fino, mais preciso (um microscópio). O tamanho deste arco, então, diminui, e o físico afirma: "se o instrumento fosse mais preciso, o arco seria ainda menor e assim por diante". A "imprecisão" do círculo visual aparece como logicamente capaz de uma redução ilimitada:

> Parece-me essencial à aplicação da geometria euclidiana que nós falemos de um círculo *inexato*, de uma esfera *inexata* etc. E também que esta inexatidão deva ser logicamente capaz de uma redução ilimitada. E, portanto, para se entender a aplicação da geometria euclidiana, deve-se saber o que a palavra "*inexato*" quer dizer. – Pois nada nos é dado além do resultado de nossa medição e o conceito de inexatidão. Estes dois juntos devem corresponder à geometria euclidiana.[†]

Mas seria, então, o círculo exato um objeto ideal que existe apenas no "mundo da física", mas não enquanto fenômeno imediatamente perceptível? Descreveria, então, a geometria as propriedades destes objetos que, efetivamente, não existem, e dos quais a realidade fenomênica (ou a realidade *tout court*) poderia apenas se aproximar?

[*]Cf. Ludovic **Soutif**: *Wittgenstein et le problème de l'espace visuel: Phénomenologie, géométrie, grammaire*, Paris: Vrin, 2011, p. 229: "Lorsque Wittgenstein affirme que les points et les lignes dans le champ visuel prennent une signification différente de celle qu'ils ont ordinairement dans la géométrie physique, il s'appuie en fait implicitement sur un certain nombre d'exemples de supposés 'faits' perceptifs déviants du genre de ceux couramment invoqués par les sophistes et les sceptiques pour souligner le déphasage de la géométrie euclidienne abstraite avec son application. Et il souligne ce faisant aussi la nécessité d'utiliser au sein même de la géométrie euclidienne tout un vocabulaire du vague pour compenser ce déphasage. Si la géométrie euclidienne doit pouvoir être appliquée non seulement à la description des relations entre les corps rigides de l'espace physique mais à l'expérience visuelle en tant qu'elle se caractérise par une certaine indétermination ou un certain flou, alors il est effectivement essentiel à son application que nous utilisions, outre les concepts de la géométrie euclidienne, un certain nombre de concepts qui marquent au sein du langage utilisé la différence de multiplicité logique qui caractérise la géométrie de l'espace visuel".

[†]*PhBm*, XX−215a.

Wittgenstein qualifica estas formas de expressão como desencaminhadoras e recomenda que se considere estes "objetos" não como ideais que seriam descritos pela geometria e dos quais se poderia apenas aproximar indefinidamente ao se aumentar a precisão dos instrumentos, mas como sendo *os próprios procedimentos de aproximação ilimitada*:

> Há, é claro, um método para produzir uma régua reta. Este método envolve um ideal, quer dizer, um procedimento de aproximação com *possibilidade* ilimitada, pois precisamente este procedimento *é* o ideal. / Ou melhor, somente quando há um procedimento de aproximação com possibilidade ilimitada, a geometria deste procedimento pode (não deve) ser a euclidiana.[*]
>
> Naturalmente não significa nada dizer que o círculo é apenas um ideal do qual a realidade poderia apenas se aproximar. Esta é uma comparação desencaminhadora. Pois é possível apenas se aproximar de algo que está presente; (...) Mas pode ser também que nós chamemos a própria possibilidade infinita de círculo. Ocorre com o círculo, então, o mesmo que ocorre com um número irracional.[†]

Explicitemos a comparação do círculo com um número irracional: do mesmo modo que o círculo não é uma figura geométrica ideal da qual se poderia apenas aproximar, mas é o procedimento ilimitado de aumento da precisão de um círculo inexato, o número irracional também não é um ponto ideal da reta numérica do qual se poderia apenas aproximar por meio de aproximações racionais, mas é o próprio procedimento ilimitado por meio do qual se constrói estas aproximações. O número real é, deste modo, uma lei, uma série formal, um sistema. Na verdade, não se trata apenas de uma comparação: tanto a defasagem do círculo inexato em relação ao círculo "exato" quanto este aumento de precisão devem ser capazes de encontrar, na linguagem da física, uma expressão numérica, exata, rigorosa. Pois, de outro modo, não seria possível dizer em que sentido preciso um círculo é "menos inexato" que o outro; esta "menor exatidão" deve ser consequência, p. ex., de uma medida da razão circunferência/diâmetro mais distante de π. Na notação da geometria analítica, isto é imediatamente claro, já que este descompasso se traduziria em uma diferença em termos de coordenadas numéricas. O que ocorre, então, é que o número real fornece, em sua aplicação geométrica, este critério de exatidão, de precisão.

Este modo radicalmente intensional de se conceber os números irracionais levanta, de imediato, duas dificuldades: *i)* se o número irracional, digamos, $\sqrt{2}$ é o próprio procedimento pelo qual eu engendro aproximações racionais, então $\sqrt{2}$ é um sinal ambíguo, já que há diversos procedimentos que produzem aproximações racionais cujos quadrados se aproximam ilimitadamente de 2 (*e.g.*, $[1.4, 1.41, 1.412, ...]$ e $[1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, ...]$); *ii)* em que sentido as aproximações racionais são, de fato, *aproximações*? Elas se aproximam de quê?

[*] *PhBm*, XVI−178l.

[†] ibid., XX−215a.

Para a primeira dificuldade, a resposta é que, apesar destes inúmeros procedimentos de aproximação serem distintos uns dos outros, eles são traduzíveis entre si; são, portanto, *o mesmo símbolo em diferentes notações*. Isto significa que, se há dois sistemas que engendram aproximações racionais de um mesmo número irracional, deve ser possível dizer onde (i.e., entre quais níveis) a enésima aproximação do primeiro sistema se encontra no segundo sistema e vice-versa*; caso contrário, estes sistemas simbolizam dois números irracionais distintos. A generalidade desta regra de tradução só pode ser fornecida por uma indução. Isso indica que uma equação entre números reais não pertence à aritmética, mas à álgebra, e que tal indução não prova (Cf. o Capítulo anterior) a equação, mas mostra a aplicabilidade desta equação algébrica à aritmética.

Para a segunda dificuldade, a resposta de Wittgenstein parece ser, à primeira vista, muito específica para ser aplicada, em geral, a cada número irracional. Wittgenstein toma o exemplo do número irracional $\sqrt{2}$. Neste caso, a distância de um valor aproximado x ao valor do qual ele se aproxima é calculada mediante uma manipulação aritmética: calcula-se a distância de x^2 a 2. Assim, poder-se-ia muito bem dizer: "$\sqrt{2}$" significa o método de aproximação de um x^2 a 2, já que há um valor (um "ponto da reta numérica") do qual se aproximar†. O problema é que esta explicação não pode ser estendida (ao menos não de modo trivial) para outros números irracionais como π ou 0.101001000.... Wittgenstein, no entanto, exige apenas que estas leis "funcionem", por assim dizer, como valores, como pontos, de modo que seja possível colocar-lhes as mesmas questões que seriam colocadas caso elas fossem, de fato, valores como, p.ex., 2. É suficiente que eu possa compará-las com as aproximações racionais do mesmo modo que eu comparo um x^2 a 2, bem como possa fornecer uma ordem de magnitude da distância entre a lei e uma aproximação racional do mesmo modo que se pode fazê-lo no caso de x^2 e 2. Afinal, é apenas isso que será exigido no momento da *aplicação* do número real, no momento em que ele é o metro que determina, de modo preciso, a *precisão* de uma medida racional, no momento em que ele fornece, de modo exato, o quão inexato é certo "círculo", o quão inexata é certa figura real. A Seção seguinte é destinada a considerações acerca deste critério de comparabilidade do número irracional com os racionais.

*Cf. *WAii*, p. 60: "Freilich die verschiedenen Stufenleitern müssen ineinander übersetzbar sein. D.h. ich muß sagen können wo die n^{te} Stufe des einen Systems im anderen liegt".

†*PhBm*, XVII−183j; *PhBm*, XVII−185b. Cf. tb. **Wittgenstein**: Wittgenstein's Lectures, Cambridge, 1930-1932, p. 114: "We say we get nearer to $\sqrt{2}$ by adding further figures after the decimal point: 1.1412 - - -. This suggests that there is something we can get nearer to. But the analogy is a false one. What we give is a rule of accuracy: the more figures we add to 1.1412 - - - the closer will the square of the resultant figure be to 2".

O critério da comparabilidade

O número real, assevera Wittgenstein, deve medir*. Esta exigência, que é extraída do modo pelo qual o número real é aplicado, desdobra-se em dois critérios que um número real legítimo deve satisfazer:

i) **Critério da comparabilidade absoluta**: deve ser possível determinar se o número real é maior, igual ou menor que um número racional arbitrário. (*PhBm*, XVIII−191b)
ii)**Critério da comparabilidade relativa**: deve ser possível determinar limites dentro dos quais se encontra a distância entre o número real e um número racional arbitrário. (*PhBm*, XVIII−199d)

Precisemos cada um dos critérios. Dado um número real α que engendra aproximações racionais $[\alpha_1, \alpha_2, ...]$ e um número racional arbitrário $\frac{a}{b}$, o critério da comparabilidade absoluta exige que as proposições matemáticas "$\alpha > \frac{a}{b}$", "$\alpha = \frac{a}{b}$" e "$\alpha < \frac{a}{b}$" tenham *sentido*; já o critério da comparabilidade relativa exige que seja possível encontrar números racionais positivos q_1 e q_2, tais que $q_1 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < q_2$.

Na posse de ambos os critérios, uma questão que se coloca é se o método de produzir aproximações racionais de um número real por meio de sua expansão no sistema decimal pode satisfazê-los. Com relação ao primeiro critério, a expansão decimal é um método de comparação válido apenas se for determinado, de antemão, quantas casas decimais são necessárias para se tomar uma decisão a respeito da comparação†. Não se pode dizer "calcule a expansão decimal até que, em algum momento, se obtenha uma decisão a respeito da comparação", já que "em algum momento" não significa absolutamente nada‡. Essa determinação do número de casas decimais seria, em geral, possível? Tomemos primeiramente o caso mais simples, em que o número racional $\frac{a}{b}$ a ser comparado com o número real não é uma dízima periódica. Seja n o número de casas decimais deste número§. Seria suficiente computar $n + 1$ casas decimais do número real para se tomar uma decisão? Suponha que o número racional seja 0.3375 e as $n + 1$ casas calculadas sejam 0.33750 ou 0.33749. Isso levaria a uma decisão? De modo algum, ao menos que se saiba de antemão que o número real em questão não é um número racional. Já no caso em que o número racional a ser comparado é periódico na base decimal, a determinação do número de casas a serem calculadas é, em geral, impossível; seria possível, em certos casos, alterar a base numérica para uma base em

* *PhBm*, XVIII−a.

† Cf. ibid., XVIII−195f.

‡ Ibid., XVIII−193a.

§ Valor que é possível computar de antemão. Com efeito, o número de casas decimais de um número racional não periódico $\frac{a}{b}$ na base decimal é igual à maior potência dos componentes primos de b. Ex: $\frac{27}{80} = \frac{27}{2^4 \times 5^1}$; portanto, o número de casas decimais de $\frac{27}{80}$ é 4.

que o número racional é não periódico, retornando-se deste modo ao caso anterior. Em todo caso, quando não se sabe de antemão que o número real não é um número racional, a expansão decimal não constitui uma ferramenta para a comparação deste número com os racionais.

No que diz respeito ao segundo critério, a expansão decimal, em geral, não fornece limites para a distância entre o número real e um número racional arbitrário, na medida em que não é possível determinar, p. ex., quantos noves ou quantos zeros podem se seguir a partir de uma determinada casa decimal[*]. De fato, pois, se não é possível determinar o número máximo de noves que ocorre porventura após 1.414 na expansão decimal de $\sqrt{2}$ (e computar a expansão até que não apareça um 9 não é uma opção), não é possível fornecer uma distância que seja menor que a diferença entre $\sqrt{2}$ e 1.415. A expansão decimal não satisfaz, portanto, o critério da comparabilidade relativa, exceto em casos bastante particulares em que se conhece uma lei da ocorrência dos dígitos do sistema decimal na expansão decimal, como ocorre, p. ex., com o número 0.101001000.... Neste caso em particular, os dois critérios acima são satisfeitos.

As considerações acima valem, é claro, não apenas para a expansão decimal, mas para toda uma família de aproximações por meio da expansão do número real em certa base. Isso não significa, porém, que todo sistema de aproximações racionais tem os mesmos defeitos da expansão decimal ou de uma expansão em outra base qualquer. A título de exemplo, considere a representação de números reais por meio de frações continuadas simples, i.e., por leis da forma $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$, sendo cada a_i um número inteiro positivo. É possível provar (Cf. Apêndice B) que a expansão nesta notação satisfaz a ambos os critérios de comparabilidade (isso tem a ver fundamentalmente com o fato de que a representação de cada número racional em frações continuadas simples é finita). E este fato é importante para mostrar que o critério da comparabilidade (absoluta e relativa) não é o único critério para que se reconheça, em uma prescrição para a formação de aproximações racionais, um número real legítimo. Com efeito, no decorrer dos capítulos *XVI* a *XVIII*, Wittgenstein introduz uma série de prescrições que serão qualificadas como "pseudoirracionais". São elas:

- $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$, que é a prescrição para gerar frações decimais $\underset{1}{\overset{5\to3}{\sqrt{2}}}$, $\underset{2}{\overset{5\to3}{\sqrt{2}}}$, $\underset{3}{\overset{5\to3}{\sqrt{2}}}$, ..., especificada do seguinte modo: $\underset{n}{\overset{5\to3}{\sqrt{2}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^{i-1}}$, em que $a_i =$

[*]Ibid., XVIII−199e.

$\begin{cases} i\text{-ésima casa decimal de } \sqrt{2}, \text{ caso ela seja } \neq 5 \\ 3, \text{ caso contrário} \end{cases}$

- $\overset{7\to 3}{\pi}$, que é a prescrição para gerar frações decimais $\overset{7\to 3}{\underset{1}{\pi}}$, $\overset{7\to 3}{\underset{2}{\pi}}$, $\overset{7\to 3}{\underset{3}{\pi}}$, ..., especificada do seguinte modo: $\overset{7\to 3}{\underset{n}{\pi}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^{i-1}}$, em que $a_i = \begin{cases} i\text{-ésima casa decimal de } \pi, \text{ caso ela seja } \neq 7 \\ 3, \text{ caso contrário} \end{cases}$

- P, que é a prescrição para gerar frações decimais $\underset{1}{P}$, $\underset{2}{P}$, $\underset{3}{P}$, ..., especificada do seguinte modo: $\underset{n}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$, em que $a_i = \begin{cases} 1, \text{ se } i \text{ é primo} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

- F, que é a prescrição para gerar frações decimais $\underset{1}{F}$, $\underset{2}{F}$, $\underset{3}{F}$, ..., especificada do seguinte modo: $\underset{n}{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$, em que $a_i = \begin{cases} 1, \text{ se } \exists x, y, z \in \mathbb{N},\ 0 < x, y, z \leq 100, \text{ tal que } x^i + y^i = z^i \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Por razões semelhantes, nenhum destes números satisfaz o critério da comparabilidade com os racionais*. Este resultado, no entanto, depende de características particulares do sistema decimal e de modo algum pode ser generalizado. Caso estas prescrições não fossem prescrições para gerar frações decimais, mas para produzir frações continuadas simples, todas elas obedeceriam o critério da comparabilidade. Isso indica que a motivação para introduzir estes pseudonúmeros não é apenas a de exemplificar ou explorar este critério, que estes pseudonúmeros têm a função de destacar outra característica essencial ao número real. De fato, vejamos.

Todos estes exemplos ilustram aquilo que Wittgenstein chama, no início do capítulo *XVIII* das *PhBm*, de experimento aritmético. Um experimento aritmético é, por assim dizer, a mistura de uma lei e de uma "descrição". Há uma lei e, portanto, uma regularidade, mas as construções regulares da lei são selecionadas por uma "descrição" (*e.g.*, a ocorrência do dígito 7 na expansão de π), por uma "propriedade" (*e.g.*, ser um número primo). O resultado desta seleção, por sua vez, não obedece a uma lei. Wittgenstein procura mostrar que estes resultados não são de interesse aritmético, que apenas o que é claramente regular (i.e., regido por uma lei) pode ser de interesse aritmético†. Esta exigência de regularidade resultará no critério segundo o qual os valores aproximados que a lei de um número real produz devem formar uma "série

*Contrariamente ao que afirma Frascolla em **Frascolla**: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, p. 89.

†Cf. *WAii*, p. 69: "Das arithmetische Experiment kann nichts arithmetisch Interessantes sein. Es muß immer die Nebensache einer Hauptsache sein. Das Unwesentliche an einem Wesentlichen. / Was in der Arithmetik, nicht offenbar gesetzmäßig ist, ist uninteressant".

evidente" (*offenbare Reihe*). Voltaremos nossa atenção a este critério na Seção seguinte; por ora, é relevante assinalar que, em diversas passagens dos manuscritos, Wittgenstein manifesta a intenção de juntar ambos os critérios* (o da comparabilidade e o da série evidente), de mostrar que há uma relação entre eles. Ora, se há uma tentativa de juntá-los, de relacioná-los, é precisamente porque eles foram introduzidos de forma independente. Inversamente, se a introdução de "experimentos aritméticos" já tivesse vinculada desde o princípio ao critério da comparabilidade, esta tentativa posterior de uni-los não teria nem pé nem cabeça.

Como vimos anteriormente para o caso das frações continuadas simples, ambos os critérios não são extensionalmente inclusivos, já que é possível definir, por meio de um experimento aritmético, uma prescrição comparável com os racionais. Para que ambos fossem unificados em um único critério, o critério da comparabilidade teria que ser necessariamente modificado, de modo a exigir também a comparabilidade com outros números reais, e não apenas com os números racionais. Wittgenstein chega a esta formulação mais forte do critério da comparabilidade nos manuscritos†, mas prefere manter a versão mais fraca nas *PhBm*. No lugar da exigência categórica da comparabilidade entre dois números reais, permanece nas *PhBm* apenas um questionamento: como é possível haver dois *números* que são incomparáveis um com o outro? Isso não contradiz a representação unitária da reta numérica?‡ Qual seria o motivo deste acautelamento?

Se o número real é a lei, é a indução segundo a qual são engendrados valores aproximados, então uma equação ou inequação entre números reais deve necessariamente remeter, no caso geral, a uma indução que relaciona estes valores engendrados por cada uma das leis. Esta indução se relacionaria com a proposição que compara os números reais assim como a "prova indutiva" se relaciona com a proposição algébrica correspondente. Porém, como vimos no Capítulo anterior, a indução não prova a equação algébrica: a equação algébrica é uma *estipulação* e, enquanto tal, não possui um *sentido*. Do mesmo modo, a equação ou inequação que compara dois números reais não possui, *mutatis mutandis*, um sentido e, portanto, o critério de comparabilidade não pode ser estendido para os números reais. Há, deste modo, uma tensão entre a tese da separação dos sistemas aritmético e algébrico e a representação unitária de pontos, racionais e reais, sobre uma mesma reta numérica, tensão que transparece nas *PhBm*

---

*Cf. ibid., p. 69: "F ist keine Zahl, einerseits, weil sie an sich uninteressant ist, andererseits, weil sie sich nicht mit den Zahlen vergleichen läßt, aber beides muß Eines sein". Cf. tb. ibid., p. 64: "Wie ist es aber dann mit der Zahl $P = 0.1110101000$ etc. Angenommen einer behauptete sie würde periodisch und es hätte auch an irgendeiner Stelle den Anschein, dann müßte ich die angenommene Zahl unmittelbar im Gesetz probieren können, wie ich unmittelbar durch Multiplikation sehen kann, ob $1.41\dot{4}$ die $\sqrt{2}$ ist. Das ist aber doch nicht möglich. / Hängt das damit zusammen daß P – wie ich gesagt habe – das Ergebnis eines arithmetischen Experiments ist? Ich glaube schon, sehe aber nicht, wie".

†Cf. ibid., p. 39: "Ich glaube: alle reellen Zahlen müssen miteinander vergleichbar sein".

‡*PhBm*, XVII–187g.

no decorrer destes capítulos.

O critério da série evidente

O critério segundo o qual os valores aproximados devem formar uma "série evidente" aparece, no início do capítulo *XVIII*, vinculado a uma tentativa de eliminar aquilo que Wittgenstein chama de "experimento aritmético"* ou, ainda, em algumas passagens dos manuscritos, de "mecanismo aritmético"†:

> Aqui nós continuamos nos opondo contra o que se poderia chamar de "experimento aritmético". O que emerge é certamente determinado por meio do que é dado, mas eu não consigo reconhecer *como* ele é, com isso, determinado. (De modo similar, *e.g.*, à ocorrência de 7 em π). Os números primos também emergem do método para procurá-los, como o resultado de um experimento. Na verdade, eu posso me convencer de que 7 é um número primo, mas eu não vejo a conexão entre ele e a condição que ele satisfaz.– Eu apenas o encontrei e não o engendrei. Eu o procuro, mas não o engendro. Vejo, certamente, uma lei na prescrição que me ensina a encontrar os números primos, mas não nos números que daí resultam. Portanto, não é como no caso de $+\frac{1}{1!}$, $-\frac{1}{3!}$, $+\frac{1}{5!}$, etc., onde vejo uma lei *nos números*.
>
> Eu devo poder escrever um pedaço da série, de modo que se *reconheça* a lei. Isto é, nisto que está escrito não deve ocorrer nenhuma *descrição*, ao invés disso tudo deve ser apresentado.
>
> Os valores aproximados devem, eles próprios, formar uma série *evidente*. Isto é, os valores aproximados devem, eles próprios, se mover em uma lei.‡

Além da oposição (a qual já tivemos a oportunidade de comentar no Capítulo anterior) entre as noções de "descrição" e "apresentação", ocorre aqui outra oposição entre duas noções com o auxílio das quais Wittgenstein procura elucidar o critério da série evidente: "busca" e "construção". Toda a dificuldade, aqui, é precisar em que consiste a diferença entre uma série do tipo $+\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, +\frac{1}{5!}, ...$ e a série dos números primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$, pois a primeira série, apresentada com os fatoriais já computados, também não parece formar uma série evidente: $+\frac{1}{1}, -\frac{1}{6}, +\frac{1}{120}, -\frac{1}{5040}, ...$ Por outro lado, se é possível fazer aparecer a regularidade por meio de um modo particular de escrever a série, pelo uso de certa notação, então por que seria ilegítimo dizer que os números primos formam a seguinte série evidente: $\not\mathrm{p}\!\!\rightarrow 1, \not\mathrm{p}\!\!\rightarrow 2, \not\mathrm{p}\!\!\rightarrow 3$, (em que $\not\mathrm{p}\!\!\rightarrow i$ denota o i-ésimo número primo)? Seria $\not\mathrm{p}\!\!\rightarrow$ uma operação aritmética com os mesmos direitos que qualquer outra operação, p. ex., a operação $+2$ que gera, a partir da base 2, os números pares? Wittgenstein coloca a mesma questão ao leitor:

*É importante observar que o "experimento aritmético" não é *stricto sensu* um "experimento", i.e., a relação entre aquilo que é dado e o resultado que emerge não é causal, sendo, portanto, o resultado completamente determinado pela base e pela operação.

†Cf. *WAii*, p. 31.

‡*PhBm*, XVIII–190a.

> $\rlap{p}\rightarrow 4$ deve significar: “o quarto número primo”. $\rlap{p}\rightarrow 4$ pode ser concebido como uma operação aritmética com a base 4? De modo que, portanto, $\rlap{p}\rightarrow 4 = 5$ seja uma equação aritmética como $4^2 = 16$? Ou é de tal modo que se pode, com relação a $\rlap{p}\rightarrow 4$, “apenas buscar, mas não construir”?*

O contraste entre as noções de “busca” e “construção” também aparece na alínea imediatamente anterior, mas desta vez vinculado às prescrições caracterizadas como “pseudoirracionais”. Nestes casos, alega Wittgenstein, pode-se explicar, de modo recursivo (i.e., por uma indução), a prescrição da *busca* dos números, mas não seu resultado. Não se pode *construir* o resultado†.

O que é essencial na distinção entre as noções de “busca” e “construção” é o fato de que uma busca ocorre em um determinado espaço já construído por uma lei (um espaço é, rigorosamente, a “realização de uma lei”‡). O resultado de uma busca é sempre composto por um ou mais elementos de um espaço *em oposição* a outros elementos deste espaço, e esta separação é guiada por uma nota característica. Já uma construção nunca é a determinação de certos elementos em oposição a outros: os pontos de um espaço construído por uma lei formam um espaço em si mesmo *completo*. Nestes termos, pode-se entender, p. ex., o espaço dos números pares como o resultado de uma construção, a saber, como a realização da lei $[||, \xi, \xi||]$. O espaço construído por esta lei é *completo*: neste espaço, não se fala de números ímpares ou, de um modo geral, de números naturais. Nesse sentido, os números pares, assim construídos, não são números pares por oposição a números ímpares, não são elementos destacados de um conjunto do qual eles fariam parte. Por outro lado, os números primos só são números primos por oposição aos números não primos (o conceito de “negação” é fundamental para a ideia de número primo§). Dado um número primo n, eu realizo uma “busca” no intervalo

---

*ibid., XVIII−194d.

†ibid., XVIII−194c. Por ignorarem completamente esta distinção entre “busca” e “construção”, alguns comentadores (Cf. Mathieu **Marion**: Wittgenstein and Finitism, em: *Synthese*, 105.1 (1995), p. 167; **idem**: Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics, p. 198; **Frascolla**: Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics, p. 79) associam a noção wittgensteiniana de lei ou de operação à noção clássica de função recursiva primitiva. O problema, como aponta Redecker e Lampert, é que a sequência dos números primos, p. ex., pode ser apresentada por uma função recursiva primitiva, mas Wittgenstein não vincula esta sequência a uma lei, a uma construção, e sim a uma busca sucessiva em intervalos regulares. Cf. C. **Redecker**: *Wittgensteins Philosophie der Mathematik: Eine Neubewertung im Ausgang von der Kritik an Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen*, (Logos (Frankfurt)), Frankfurt: De Gruyter, 2006, p. 190:“Die meisten der von Wittgenstein als reelle Zahlen abgelehnten ‘arithmetischen Experimente’ durch primitiv rekursive Funktionen dargestelt werden können. Beispielsweise ist die Folge der Primzahlen primitiv rekursiv”. Cf. tb. Timm **Lampert**: Wittgenstein on Pseudo-Irrationals, Diagonal-Numbers and Decidability, em: Michal **Pelis** (ed.): *Logica Yearbook 2008*, London: College Publications, 2009, pp. 108-9.

‡Cf. *PhBm*, XVI−177a.

§E é por isso, evidentemente, que o conceito de “número primo” é um dos tópicos trabalhados no capítulo *XIX* das *PhBm*, capítulo que tematiza a “negação” na aritmética.

entre n e $n! - 1$[*] e "encontro" o próximo número primo como sendo um entre os diversos números deste intervalo. Não é possível, aqui, "saltar" para o próximo número primo sem testar a condição em questão para os elementos deste intervalo.

Se eu não posso construir o próximo número primo, mas apenas buscá-lo, não há *ex confesso* uma lei que produza o espaço dos números primos: eles não chegam a formar um *sistema*. Em outras palavras, o "espaço" dos números primos é, na verdade, *essencialmente* um "subespaço" imerso em um espaço maior. Há, certamente, uma lei segundo a qual eu realizo esta busca, mas o resultado é um subproduto irregular da lei. Para utilizar uma metáfora do autor, tudo se passa como se andássemos em uma rua a passos regulares e, a cada passo, lançássemos uma moeda e fizéssemos uma marca no chão a depender do resultado do lance. Haveria, certamente, uma lei nos passos regulares, mas não nestas marcas[†]. O filósofo trai o próprio modo de pensar quando diz, para um exemplo similar, que se trataria *de uma lei que nós não conhecemos*[‡]. Afinal, é ele próprio que diz, com todas as letras, que "uma lei que eu não conheço não é uma lei"[§], que "só aquilo que eu vejo é uma lei, não aquilo que eu *descrevo*"[¶].

A busca – o "experimento aritmético" – é, portanto, uma mistura heterogênea, composta de uma lei e de uma "descrição". Não haveria nenhum problema caso esta descrição pudesse ser substituída por uma lei, pois neste caso seria restaurada, por assim dizer, a *unidade* do composto: a mistura de duas leis é uma lei. Tomemos, p. ex., o caso do número racional $\frac{1}{7}$. Suponha que quiséssemos alterar este número segundo uma descrição, a saber, a ocorrência do dígito 5 em sua expansão decimal; neste caso, gostaríamos de substituí-lo pelo dígito 3. Como o número racional $\frac{1}{7}$ é uma dízima periódica no sistema decimal, ele pode ser apresentado neste sistema pela seguinte lei: $0.\dot{1}4285\dot{7}$. Uma vez escrito nesta notação, a lei da ocorrência do dígito 5 na expansão decimal de $\frac{1}{7}$ é *reconhecida*, é *simbolizada*, não sendo mais preciso realizar uma busca pelos elementos que satisfazem a descrição. O número resultante é simplesmente $0.\dot{1}4283\dot{7}$, *uma* lei. Ocorre o oposto com $\overset{5\to 3}{\sqrt{2}}$ e $\overset{7\to 3}{\pi}$, já que a descrição nestes casos não pode ser substituída por uma lei. Estes pseudoirracionais pressupõem que haja uma conexão entre as leis de $\sqrt{2}$ e π e as regras dos dígitos do sistema decimal, uma conexão que não é simbolizada. Para usar uma imagem wittgensteiniana, estes pseudonúmeros são como dois lugares iluminados entre os quais se pressupõe que haja um corredor escuro, uma conexão subterrânea. Eles não são, como no caso de $\overset{5\to 3}{\frac{1}{7}}$, *um* lugar composto de duas salas interligadas por um corredor iluminado, mas sim *dois* lugares disjuntos,

[*] Este é o intervalo que Wittgenstein apresenta na página 108 do *WAii*. É possível provar que o limite superior do intervalo é, na verdade, bem menor que $n! - 1$.

[†] *PhBm*, XVII–189f.

[‡] Ibid., XVII–189d.

[§] ibid., XIII–151d.

[¶] ibid., XVII–189k.

desconexos. Há apenas conexões parciais que são construídas por aquele que desenvolve efetivamente a expansão decimal do pseudonúmero:

> É como se fosse preciso de um homem para desenvolver a regra $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$. Algo como: a regra, para que a aritmética se ocupe dela, deve entender *a si própria*. A regra $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$ não faz isso, ela é composta de dois componentes heterogêneos. O homem que a *aplica* combina estes componentes um com o outro.[*]

Evidentemente, esta *aplicação* permanece finita, é apenas uma parte finita da expansão que é calculada. Nesse sentido, a mistura permanece heterogênea não importa o quanto se misture, não importa o quanto se desenvolva a expansão segundo a regra. A opacidade notacional que está contida na prescrição $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$ é algo essencial ao símbolo, e não um mero acidente do sinal.

O problema da existência de "regras heterogêneas" não é apenas um problema que se coloca na aritmética de números reais, mas também pode ser reproduzido na aritmética de números naturais. Wittgenstein fornece o exemplo de uma pseudo-operação aritmética que teria os mesmos problemas dos pseudoirracionais mencionados acima:

- $\overset{7\to3}{\times}$, que é uma regra aplicada a dois números naturais, e cujo resultado é o mesmo que a operação usual de multiplicação exceto pela substituição do dígito 7 pelo dígito 3 no resultado, de modo que, p. ex., $11 \overset{7\to3}{\times} 7 = 33$.

O que ocorre, então, com estas regras é que a possibilidade de aplicá-las (i.e., de computar o resultado) já não é um critério suficiente para que elas sejam objeto de interesse aritmético. A possibilidade de aplicar a lei, alega Wittgenstein, também existe para a lei de gerar dígitos a partir do lançamento de uma moeda[†]. É, portanto, de causar espanto ao leitor o fato de Wittgenstein afirmar, imediatamente após ter introduzido o exemplo acima, que a aplicabilidade é o critério genuíno de legitimidade na aritmética:

> É claro que se eu pudesse aplicar $\overset{7\to3}{\times}$, toda dúvida sobre a legitimidade desapareceria. Pois a possibilidade de aplicação é o critério genuíno para a realidade aritmética.[‡]

Notável é o tempo verbal da expressão condicional "se eu pudesse aplicar", pois em certo sentido é claro que eu posso aplicar a regra $\overset{7\to3}{\times}$. Dados dois números naturais, eu efetuo o cálculo e computo o resultado da regra. Isso não seria uma *aplicação* da

[*] ibid., XVII−183f (grifo nosso).
[†] Ibid., XVII−184a.
[‡] ibid., XVII−186f.

regra? Na verdade, a contradição é apenas aparente. O que está em jogo aqui é a ambiguidade do termo "aplicação". Uma coisa é aplicar uma regra de manipulação sobre o *sinal* numérico e computar o resultado da regra; outra coisa é aplicar uma regra de manipulação sobre o *símbolo* numérico, de modo que seja essencial à regra que ela possa ser traduzida em todos os sistemas numéricos de mesma multiplicidade, em particular na aritmética que trabalha com listas (de traços, marcas etc.) das quais o número é uma propriedade interna, na aritmética em que o cálculo fornece, de modo imediato, um paradigma de sua aplicação. Na aritmética de traços, estes dois significados do termo "aplicação" estão sobrepostos, de maneira que, como procuramos elucidar no Capítulo anterior, o ato de calcular o resultado já é um paradigma de sua aplicação, e os sinais particulares com os quais se calcula já são uma aplicação imediata do cálculo. Quando se trabalha no sistema decimal, esta notação funciona como um traje que disfarça o caráter essencialmente autoaplicável do cálculo aritmético, criando uma distinção entre estes dois significados do termo "aplicação": aplicar a regra da adição no sistema decimal já não espelha mais, de modo translúcido, a forma lógica das possíveis aplicações da operação de adição. Isto não causa problema algum para a aplicabilidade do cálculo realizado no sistema decimal, já que as operações aritméticas realizadas neste sistema podem ser traduzidas para uma notação em que se trabalha imediatamente com traços, com listas. Neste caso, ocorre que o *símbolo* possui a multiplicidade adequada, mesmo que isto não transpareça no plano do *sinal*.

O que acontece, então, quando uma operação é definida de tal modo que seu resultado depende essencialmente do sistema decimal para ser calculado, como no caso de $\overset{7\rightarrow 3}{\times}$? Neste caso, cria-se um hiato intransponível entre estes dois significados do termo "aplicação", já que esta operação não pode mais ser executada na aritmética de traços. Neste caso, o sistema decimal deixa de ser, como diz Wittgenstein, um mero servo que pode ser substituído por outro sem que se altere, com isso, a sociedade, mas passa a ser parte da sociedade e, com isso, ela é alterada. O sinal 3 deixa de ter a mesma multiplicidade do sinal |||, ele deixa de ser um numeral, mas passa a ser outra coisa e, com isso, deixa de ter interesse para a aritmética*. O sistema decimal deixa de ser um mero *modo de apresentação* daquilo que está sendo considerado e passa a ser objeto de consideração. Wittgenstein diz que, com isso, o sistema decimal deixa de ser até mesmo um modo de apresentação, deixa de ser até mesmo um sistema notacional, pois ele não pode exercer estas duas funções simultaneamente: não pode servir e sentar-se à mesa ao mesmo tempo. Vejamos este ponto mais de perto. O mesmo número pode ser representado em diversas notações posicionais, cuja diferença de uma para outra consiste na *base* empregada. O número *cem*, por exemplo, pode ser escrito como 1100100 (na base binária), como 144 (na base octal), como 100 (na base decimal) e assim por diante.

*Cf. *PhBm*, XVII–188.

Suponhamos que se pretenda colocar lado a lado esses diferentes sistemas em um sistema maior que inclui operações de conversão de um sistema para outro. Neste caso, deve-se simbolizar, de algum modo, a notação empregada para expressar certo número, o que é comumente feito por meio de um símbolo subscrito à direita do numeral: 1100100_2, 144_8, 100_{10}. É importante notar, entretanto, que, neste caso, a própria base numérica está escrita em certa notação e que 100_{10} representa o número *cem* apenas se eu já sei que o sistema usado para representar a base é o sistema decimal (100_{10} representaria o número *quatro* se a base está expressa na notação binária). Pode parecer, então, que o sistema decimal é, neste caso, ao mesmo tempo objeto de consideração e sistema notacional (ao mesmo tempo servo e convidado), mas isto não passa de uma ilusão: são sistemas distintos o sistema decimal usado para escrever números e o sistema decimal usado para escrever bases numéricas, o que se mostra pela possibilidade de se alterar o sistema em que se escreve a base numérica, sem que com isso o sistema decimal seja retirado da consideração.

A conclusão a que se chega é que tanto a pseudo-operação aritmética $\overset{7\to3}{\times}$ quanto os pseudoirracionais $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$ e $\overset{7\to3}{\pi}$ tomam o sistema decimal por objeto da consideração (e não apenas números naturais e racionais) e, com isso, a possibilidade de aplicá-los (de computar o resultado) já não é mais suficiente para que eles estejam em ordem, para que eles possam ser aplicados enquanto regras sintáticas da linguagem (ou de uma teoria física). Ao invés de auxiliarem a constituição de um símbolo proposicional, a aplicação destas regras afeta apenas o sinal, altera a linguagem apenas de modo externo, acidental:

> Exatamente dessa maneira $\overset{7\to3}{\pi}$ faz do sistema decimal seu objeto (ou deveria fazê-lo se estivesse correto), e por esta razão já não é mais suficiente que se possa aplicar a regra para a formação da extensão. Pois esta aplicação já não é mais o critério para que a regra esteja em ordem, pois ela não é a expressão da lei aritmética, mas altera apenas de modo externo a linguagem.[*]

Essas considerações não se aplicam, naturalmente, para o caso dos números primos (que é um predicado aritmético que independe da base numérica adotada), tampouco para o número que chamamos anteriormente de P. Wittgenstein, porém, também nega que estes "experimentos aritméticos" possam ser *aplicados*, que estes resultados irregulares, não construídos por uma lei, possam ser de alguma utilidade:

> Poderiam os resultados dos cálculos de um engenheiro ser tais que, digamos, fosse essencial que certas peças de uma máquina tivessem comprimentos correspondentes à série dos números primos? Não.[†]

[*] ibid., XVII–188e.

[†] ibid., XIX–203g.

Resta, portanto, a tarefa de explicar essa impossibilidade da aplicação dos números primos sem tomar, como vilão, o sistema decimal. O exemplo de Wittgenstein é um tanto quanto obscuro, já que uma máquina sempre contém uma *lista* de peças, e não uma *série* de peças, sendo, portanto, incompreensível como esta lista finita de peças corresponderia à série sem fim de números primos. Esse é talvez o motivo de o exemplo ter sido ligeiramente alterado em obras posteriores. A versão modificada é a seguinte: "Poderiam os resultados dos cálculos de um engenheiro ser tais que a espessura da parte de uma máquina devesse aumentar, em proporção a cargas regularmente maiores, em conformidade com a série dos números primos?"[*]. Trata-se, mais uma vez, de um uso fisicalista de uma série numérica, uso que só faz sentido no interior de uma hipótese. Outro exemplo (para retornar à temática dos números reais) seria o seguinte: Poderiam os resultados dos cálculos de um engenheiro ser tais que uma peça de uma máquina devesse medir P', uma prescrição para gerar frações continuadas simples com o dígito 2 na posição i, se i for primo, e com o dígito 1 nos demais casos? E por que não, uma vez que P' é comparável com os racionais? Novamente, parece-nos que este critério de "previsibilidade" dos resultados de uma lei só pode ser justificado com recurso à aplicação geométrica que se faz da lei no interior de uma hipótese. Agora, porém, o que nos interessa não é o caráter de *metro* do número ou da série numérica, mas o seu caráter de *lei*, de *regularidade*. Afinal, uma hipótese não é apenas, na concepção de Wittgenstein, um modo simples e unitário de descrever os fatos, mas também uma *lei* para a construção de proposições que descrevem fatos futuros, uma *lei* que produz expectativas[†]. Assim, ao negar que a série dos números primos formam uma *lei*, Wittgenstein também estaria negando, a nosso ver, que ela possa ser aplicada, no contexto de uma hipótese.

Todo o argumento repousa, consequentemente, na ideia de que a mistura de uma lei e de uma descrição (como ocorre no caso dos números primos) não é uma lei, nem mesmo uma lei "infinitamente complicada", uma lei que apenas Deus teria acesso completo, enquanto nós, em decorrência de nossa finitude, teríamos apenas acesso parcial, limitado. É essa concepção errônea do infinito que Wittgenstein se empenha em combater:

> Uma "lei infinitamente complicada" quer dizer nenhuma lei. Como se poderia saber que é infinitamente complicada? Somente devido a existirem, por assim dizer, infinitos valores aproximados para esta lei. Mas isso não implica que eles realmente se *aproximam* de um alvo? Ou é possível chamar as infinitas descrições de intervalos da série dos números primos de tais valores aproximados da lei? Não, já que nenhuma descrição de um segmento finito nos aproxima mais do alvo de uma descrição completa. Como, então, se distinguiria uma lei infinitamente complicada neste sentido da total ausência

[*] **Wittgenstein**: The Big Typescript, p. 503; **idem**: Philosophische Grammatik, p. 482.
[†] Cf *PhBm*, XXII−228.

de lei?[*]

A lei diria, no máximo, – conclui Wittgenstein – que “tudo é como é”.

A COMPLETUDE DOS NÚMEROS REAIS

A Seção anterior procurou elucidar como Wittgenstein fundamenta os números reais enquanto *prescrições* que *i)* são comparáveis com os números racionais e *ii)* produzem aproximações racionais que formam uma série evidente, o que dota a prescrição do caráter de *lei*. São apresentadas, portanto, exigências de cunho normativo para capturar as notas características daquilo que é chamado de “número real”. Em uma passagem dos manuscritos, Wittgenstein utiliza a seguinte metáfora para comentar sua estratégia: “É como se se quisesse enfiar a linha na agulha e algumas fibras sempre fossem para o lado e se tentasse sempre de novo, até finalmente tudo entrar no vão e se pudesse fazer passar a linha”[†]. O autor faz questão de frisar, no entanto, que ele não está procurando “estipular” arbitrariamente o que deve ser designado como “número real”, mas que está procurando caracterizar precisamente aquilo que se quer dizer usualmente por número real[‡].

Estas notas características pareceram, aos olhos de certos comentadores, tão restritivas, que deixariam de fora não apenas os pseudoirracionais, mas até mesmo números reais legítimos como $\sqrt{2}$. Redecker, p. ex., comenta que os valores aproximados de $\sqrt{2}$, no sistema decimal, jamais formam uma “série evidente” e que, nesse quesito, $\sqrt{2}$ se compara aos pseudoirracionais que Wittgenstein elenca[§]. Redecker parece se esquecer, porém, de que a expansão decimal de $\sqrt{2}$ não é o único modo de produzir valores cujos quadrados se aproximam de 2. Na representação por meio de frações continuadas simples, os valores aproximados de $\sqrt{2}$ formam uma série evidente, a saber,

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}.$$

[*]ibid., XII–125e.

[†] *WAii*, p. 64.

[‡]Cf. *PhBm*, XVIII–191e.

[§]Cf. **Redecker**: Wittgensteins Philosophie der Mathematik, p. 212: “Allerdings kann Wittgenstein auch vor dem Hintergrund der PB diese Ansicht nur schwerlich unterstellt werden, denn die Bedingung, das Gesetz der Folge müsse sich an den Gliedern der Folge ablesen lassen, ist nicht nur vage, sondern ganz offensichtlich auch viel zu stark. Beispielsweise weist die Folge rationaler Zahlen, die $\sqrt{2}$ approximiert, kein solches Gesetz auf, das man ohne Kenntnis des Verfahrens zur Approximation von $\sqrt{2}$ der Abfolge der einzelnen Glieder ablesen könnte. In dieser Hinsicht unterscheidet sich $\sqrt{2}$ nicht von der Folge der Primzahlen, bzw. von dem Dezimal- oder Dualbruch P, der an der n-ten Nachkommastelle eine 1 hat, wenn n eine Primzahl ist, und eine 0 in allen anderen Fällen. Da die wenigsten reellen Zahlen durch einen solchen inneren Zusammenhang der Glieder entsprechender Entwicklungen ausgezeichnet sind, erscheint diese Lösung wenig erfolgversprechend”.

Wittgenstein chama a série evidente de valores aproximados que a lei engendra de "expansão genuína" do número real. Nestes termos, os pseudoirracionais podem ser caracterizados como aqueles que não possuem uma expansão genuína*; inversamente, são legítimos os números reais que possuem uma expansão genuína, uma expansão que deixa transparecer a lei, a indução, a essência do número real.

Ora, limitar os números reais ao modo de Wittgenstein não resultaria, de acordo com a concepção usual, em um *continuum* reduzido? A reta numérica não acabaria por deixar lacunas entre os pontos? Mas qual seria, neste caso, o metro de comparação para chamar este contínuo de *reduzido*, para chamar esta reta de *descontínua*? Certamente a concepção *extensional* (conjuntista) dos números reais enquanto extensões infinitas, enquanto frações decimais infinitas ou ainda, segundo a definição proposta por Dedekind, enquanto pares de conjuntos infinitos de números racionais separados por uma propriedade, por um "corte", pois é apenas com o vocabulário desta concepção que se pode formular a exigência da completude tal como ela é apresentada pelos autores que procuraram implementá-la (*e.g.*, a exigência de que um conjunto não vazio que tem um majorante tenha também um supremo)†. Consequentemente, é natural que a crítica do ponto de vista extensional dos números reais apareça, nas *PhBm* (XVII−181), como uma consequência de uma reflexão sobre a completude dos números reais: ao se contestar a ideia de que os números gerados por leis precisam ser completados pela adição de números irregulares (não gerados por leis), retira-se a motivação por detrás deste tipo de concepção. A próxima Seção é destinada a considerações acerca desta crítica.

*O sistema usado no desenvolvimento da expansão genuína pode até mesmo ser o sistema decimal, desde que este não se transforme em objeto da consideração. Alguns comentadores (Cf., p. ex., Victor **Rodych**: Wittgenstein on Irrationals and Algorithmic Decidability, em: *Synthese*, 118.2 (1999), p. 289) interpretaram de modo equivocado as notas críticas de Wittgenstein sobre o sistema decimal e consideraram o número real legítimo $\sum_{n=1}^{n=n} \frac{1}{10^{\frac{n}{2}(n+1)}} = 0.101001000...$, cuja expansão genuína ocorre no sistema decimal, como pseudoirracional.

†Embora a concepção de Brouwer do *continuum* (concepção sobre a qual discorreremos no Capítulo 5) não seja propriamente conjuntista, ela também será atacada com os mesmos argumentos. Isso é um indício de que Wittgenstein enxergava, em alguns argumentos de Brouwer, resquícios da concepção extensional do infinito. Cf., p. ex., *PhBm*, XV−174g. Com efeito, como nota Engelmann, "indecidibilidade implica extensionalismo", e se nos lembrarmos de que Brouwer utiliza sua teoria do *continuum* (com a introdução de "sequências de escolha") para produzir problemas matematicamente indecidíveis, torna-se compreensível que Wittgenstein tenha colocado ambas as concepções sob o alvo das mesmas críticas. Cf. M. L. **Engelmann**: The Multiple Complete Systems conception as Fil Conducteur of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, em: *32nd International Wittgenstein Symposium*, 2009, p. 111.

A crítica ao ponto de vista extensional

Antes de ir às observações, presentes no parágrafo 181 das *PhBm*, sobre o ponto de vista extensional dos números reais, é preciso traçar algumas considerações acerca da estratégia argumentativa do texto. Como fica claro ao se ler o parágrafo, trata-se de uma crítica *interna* ao ponto de vista extensional, o que implica uma aceitação hipotética do infinito atual. Não poderia haver terreno mais desfavorável para o certame, afinal, o próprio Wittgenstein confessa que "se há uma realidade infinita, então também há acidente no infinito. E, portanto, por exemplo, também um número decimal infinito que não é dado por nenhuma lei"[*]. Nesse sentido, Wittgenstein parece afirmar com todas as letras que a "existência" do infinito atual refutaria a própria concepção dos números reais que ele procura elaborar no decorrer da obra. O objetivo do parágrafo 181 não é – creio – alterar este diagnóstico, mas mostrar que, no cenário proposto, estes números irregulares não seriam de modo algum um acréscimo necessário ao conjunto de números regulares e que, portanto, eles não são um complemento essencial à teoria, complemento que garantiria, ao conjunto dos números reais, a condição de "completude" e que tornaria, por contraposição, o conjunto dos números regulares "incompleto". O resultado líquido da crítica é, na verdade, ainda mais forte: não apenas são supérfluos estes "números irregulares", mas a concepção extensional torna obsoletos até mesmo os números irracionais legítimos, como é o caso de π. Com efeito, é precisamente π o número citado no início do parágrafo em questão:

> A questão seria: qual é o critério para que os números irracionais sejam *completos*?
>
> Olhemos para um número irracional: ele corre ao longo de uma série de aproximações racionais. Quando ele deixa esta série para trás? Nunca. Mas, então, a série também nunca chega a um fim.
> Suponha que nós tivéssemos a totalidade dos números irracionais com a exceção de um. Como sentiríamos sua ausência? E – se fosse para ele ser adicionado – como ele preencheria a lacuna? – Suponha que fosse π. Se um número irracional fosse dado através da totalidade de suas aproximações, então haveria até *qualquer* ponto arbitrário uma série coincidindo com aquela de π. É verdade que para cada uma destas séries há um ponto de separação. Mas este ponto pode repousar arbitrariamente longe "lá fora". De modo que, para cada série que concorda com π, eu posso achar uma que concorda com ele ainda mais. E, então, se tenho a totalidade dos números irracionais com a exceção de π, e então insiro π, eu não posso citar um ponto em que π é agora realmente necessário. Em *cada* ponto ele tem um acompanhante concordando com ele a partir do início.[†]

A bem da verdade, o texto não é dos mais transparentes. Por um lado, é claro que não podemos citar um ponto em que π é necessário se, pelo termo "ponto", entende-se "ponto racional que coincide com π quantas casas se queira" (como é que π,

[*] *PhBm*, XII–143b.

[†] ibid., XVII–181a-b.

um número *irracional*, teria sua ausência sentida em um ponto *racional*?). Por outro lado, como isso provaria que sua ausência não é sentida? Se alguém pergunta pela medida da circunferência de diâmetro unitário e não temos π, como lhe daríamos uma resposta? Até onde posso compreender*, o argumento utilizado ao longo do parágrafo 181 é fundamentalmente o seguinte: se o número real é uma extensão, um conjunto de valores aproximados, então ele é dado uma vez que são dados seus valores aproximados (assim como as permutações de uma lista são dadas juntamente com a lista). Todas as propriedades da extensão podem ser derivadas uma vez que se conhece os elementos que compõem a extensão: ela não introduz uma propriedade nova que seria irredutível a um conjunto de propriedades de seus elementos. A extensão teria, nesse sentido, apenas a finalidade prática de tornar o modo de escrita mais cômodo, e sua serventia seria a mesma que uma abreviação. Retirado este modo de escrita mais cômodo, ele faria falta apenas ao preguiçoso. Do mesmo modo, se o número real é uma extensão na qual os elementos são números racionais, ao ser retirada do conjunto de todos os números reais, que falta ela poderia fazer? Todo uso da extensão poderia ser recuperado por meio de uma referência direta aos elementos, aos números racionais. Sua falta seria, no máximo, sentida pelo labor de se ter que escrever, *por extenso*, cada valor aproximado.

O argumento se torna mais claro quando apresentado com o auxílio da definição dedekindiana dos números reais como "cortes" no espaço dos racionais, definição que Wittgenstein faz alusão em diversas considerações, inclusive na continuação do parágrafo 181†. Segundo Dedekind, um número real é (determinado por) uma partição dos números racionais em dois conjuntos A e B tais que, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$, tem-se que $a < b$‡. O número real, portanto, é definido pelo conjunto de valores racionais que são menores que ele, bem como pelo conjunto de valores racionais que são maiores do que ele. Como estes conjuntos são dados extensionalmente uma vez que seus elementos são dados, os números reais, na condição de pares de conjuntos de racionais, são dados juntamente com os racionais antes mesmo de eles serem "introduzidos" enquanto elementos do conjunto dos números reais, de modo que sua ausência não faz a menor diferença. O que faria falta, talvez, é o método ou a propriedade que determina os elementos de cada conjunto – algo, portanto, *intensional* –, mas não a entidade extensional que não é nada mais que um agregado de elementos que já estavam presentes desde o início. Extensionalmente, o número real não nos faz falta:

> Dever-se-ia responder a questão acima assim: "se π fosse uma extensão, nós nunca

*Apoio-me, em parte, na análise do parágrafo em questão proposta por Redecker em **Redecker**: Wittgensteins Philosophie der Mathematik, pp. 155-9.

†Cf. *PhBm*, 181f: "...und wird mir ein *Schnitt* gegeben" (grifo nosso). No parágrafo anterior, Wittgenstein faz menção, novamente, à teoria de Richard Dedekind ao falar de "valores aproximados deste corte".

‡Richard **Dedekind**: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1872, pp. 19-21.

> sentiríamos sua falta". Isto é, nós nunca poderíamos observar uma lacuna. Se alguém perguntasse a nós "mas você tem então uma fração decimal infinita com m na r-ésima casa e n na s-ésima casa etc.?", poderíamos sempre servi-lo com um número.[*]

O ponto de vista extensional torna, por conseguinte, os números reais *obsoletos*. Aos olhos de Wittgenstein, isto mostra claramente "que o número irracional não é a extensão de uma fração decimal infinita, mas uma lei"[†]. Em que sentido o caráter obsoleto dos números reais (consequência do ponto de vista extensional) é suficiente para refutar esta concepção? Parece-me que aqui está sendo aplicada uma máxima que acompanha o filósofo austríaco desde o início dos cadernos de 1914-16[‡] e que pode ser sintetizada no seguinte raciocínio: "na lógica (na matemática), se algo é *possível*, então é também *necessário*, e se algo não é realmente *necessário*, então é também *impossível*". Esta máxima está vinculada ao fato de que não pode haver nada de supérfluo na lógica e na matemática, nada que não seja fundamental. No Capítulo seguinte, teremos a ocasião de observar, em um argumento do capítulo *X* das *PhBm* contra o logicismo, outra aplicação desta máxima. Aqui, vale notar que, ao tornar os números reais supérfluos, a concepção extensional também acaba por torná-los (segundo a máxima) impossíveis: o que sobra são apenas os racionais. É por isso que Wittgenstein prescreve: "O número deve medir em si e para si. Parece-me como se fosse sua função. Se ele não o faz, mas deixa para os números racionais fazê-lo, não precisamos dele[§]". E poderia ter acrescentado: se a análise real se deixa completar sem a introdução de números reais, então ela *deve ser completada* sem a sua introdução.

Por fim, uma possível objeção que se levanta para o raciocínio acima é que, se ele estivesse correto, ele também tornaria os números racionais (concebidos extensionalmente como pares de números naturais) supérfluos, e restariam apenas os números naturais. Parece-me que, de um ponto de vista tractariano, esta objeção não seria problemática, podendo até mesmo servir de razão para que o *Tractatus* não tenha introduzido os números racionais, mas apenas os números naturais. Ocorre, no entanto, que Wittgenstein percebe, em seu retorno à filosofia em 1929, que este minimalismo aritmético não funciona, pois os números naturais – para utilizar uma expressão de Gallerani Cuter[¶] – são ótimos para contar, mas péssimos para medir. Evidentemente, o mesmo raciocínio jamais poderia se colocar para os números racionais e reais, já que eles desempenham rigorosamente *a mesma função*: medir.

[*] *PhBm*, XVII–181e.

[†] ibid., XVII–181c.

[‡] Penso, aqui, na seguinte observação, datada de 04/09/1914: "Wenn sich die Logik ohne die Beantwortung gewisser Fragen abschließen läßt, dann *muß sie ohne* sie abgeschlossen werden". **Wittgenstein**: Tagebücher 1914-1916, p. 91.

[§] *PhBm*, XVIII–191a.

[¶] João Vergílio **Gallerani Cuter**: Um precursor dos jogos de linguagem, em: *Analytica*, 9.2 (2005), p. 117.

CAPÍTULO 5

Wittgenstein e as três escolas clássicas

> Que isso foi o que sempre me invocou, o senhor sabe: eu careço de que o bom seja bom e o ruim ruim, que dum lado esteja o preto e do outro o branco, que o feio fique bem apartado do bonito e a alegria longe da tristeza! Quero os todos pastos demarcados... Como é que posso com este mundo? Este mundo é muito misturado.
>
> João Guimarães Rosa, *Grande Sertão: Veredas*.

Dissemos, na introdução deste trabalho, que as *PhBm* foram escritas no contexto de duas crises. A primeira, interna ao pensamento de Wittgenstein, era fruto de problemas incontornáveis que se manifestavam no momento da "aplicação da lógica", no momento de revelar aquilo que a lógica não podia prescrever, a saber, a forma lógica dos objetos simples e das proposições elementares. No livro *Fenomenologia em Wittgenstein*, Ferraz Neto menciona três domínios em que a lógica "colidiria" com sua aplicação: a análise do espaço, do tempo e das cores. O livro de Ferraz Neto trata com detalhes a análise do tempo e os "efeitos destrutivos" da análise das cores para o *Tractatus*. Também menciona, ainda que de passagem, o vínculo entre a análise do espaço e a reconsideração da matemática.

Nos dois primeiros Capítulos deste estudo, procuramos contrastar a aritmética tal como concebida pelo *Tractatus* e a aritmética das *PhBm*. Ao seguir, ao menos parcialmente, as pistas de Ferraz Neto, pudemos constatar que problemas com o infinito vinculados à apresentação do espaço levam Wittgenstein a reconhecer a necessidade da introdução, na linguagem, de um sinal extensível, de um sinal com uma possibilidade infinita de interpolação, i.e., de um sinal denso com a multiplicidade dos racionais. Isso provoca uma alteração no estatuto da aritmética que, como procuramos expor nos Capítulos 2 e 3, culmina, em primeiro lugar, no desenvolvimento de uma teoria cardinal do número (natural), baseada em uma concepção extensional das classes e, em segundo lugar, na incorporação das regras matemáticas à sintaxe da linguagem.

Tivemos a oportunidade de distinguir dois usos da dicotomia intensão/extensão para mostrar que esta abordagem extensional em relação às classes não entra em conflito com sua concepção intensional do infinito, concepção que é levada às suas últimas consequências e que resulta, como mostramos nos Capítulos 3 e 4, na separação entre os sistemas aritmético e algébrico e em uma teoria intensional dos números reais. O nosso percurso, portanto, acaba por se conformar ao diagnóstico de Ramsey, quando este diz, em uma carta a Moore (a propósito do desenvolvimento das reflexões de Wittgenstein em 1929), que "Wittgenstein começou com certas questões na análise das proposições que o conduziram agora a problemas sobre o infinito e que repousam na origem das controvérsias atuais sobre os fundamentos da matemática"[*].

Tais "controvérsias" fazem parte da segunda das crises de que havíamos falado anteriormente. Neste Capítulo conclusivo, propomos considerar em que medida as reflexões de Wittgenstein sobre a matemática nas *PhBm* tocam o solo desta crise. Esta consideração será feita individualmente para cada uma das três correntes dominantes da época: o logicismo (de Frege, Russell e Ramsey), o intuicionismo (de Brouwer e Weyl) e o formalismo (de Hilbert). Vale ressaltar, desde já, que traçar as relações entre a concepção de Wittgenstein e estas três escolas não é tarefa das mais simples mesmo quando nos limitamos ao *Tractatus*, e já houve intérpretes que procuraram aproximar a concepção tractariana da matemática de cada uma das três escolas: do logicismo[†], do intuicionismo[‡] e do formalismo[§]. Não pretendemos – e nem conseguiríamos – exaurir o conteúdo do debate de Wittgenstein com estes autores; será possível, no entanto, constatar que o caminho percorrido na tentativa de compreender as ideias de Wittgenstein sobre a matemática nas *PhBm* nos propiciou o acesso a um ponto de vista privilegiado que permite a apreciação, tanto no geral quanto no detalhe, da postura de Wittgenstein em face da crise que se instaurou na matemática de seu tempo. Procuraremos mostrar que a "posição" de Wittgenstein não se reduz a um sincretismo destas três escolas clássicas, mas constitui um pensamento original sobre a matemática, que vê, nesta crise, um produto de confusões conceituais a serem esclarecidas pelo trabalho *filosófico*. O seu fim, portanto, não ocorre devido ao surgimento de uma "quarta alternativa" que se impunha às demais, tampouco ao fracasso de todas as alternativas com a exceção de

[*]George Edward **Moore**: Wittgenstein's Lectures in 1930-33, em: *Mind*, 63.249 (1954), p. 3.

[†]Cf. **Frascolla**: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, p. 37: "the philosophy of arithmetic of the *Tractatus* can be aptly described as a kind of logicism". Cf. tb. **Gallerani Cuter**: Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*, p. 74: "This is the Tractarian version of logicism: arithmetical equations are part of the deductive methods of logic".

[‡]Cf. Mathieu **Marion**: Wittgenstein and Brouwer, em: *Synthese*, 137 (2003), p. 110: In the *Tractatus*, operating with signs obviously requires an agent, and to this agent the propositions are also 'phenomenological' entities. I contend that this conception of phenomenological acts which underlies the conception of logic and mathematics in the *Tractatus* brings Wittgenstein very close to Brouwer.

[§]Cf. Victor **Rodych**: Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability, and Application, em: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 38.2 (1997), pp. 195–225.

uma, mas devido ao reconhecimento de que os próprios problemas enfrentados carecem de sentido.

WITTGENSTEIN E O LOGICISMO

Nos diálogos de Wittgenstein, nas *PhBm* e nos respectivos manuscritos, com os três grandes expoentes do logicismo (Frege, Russell e Ramsey), algo se deixa notar pela ausência: o termo "logicismo" não ocorre uma vez sequer, nem vinculado a um destes três nomes, tampouco isoladamente. Esta ausência é, contudo, justificável: por um lado, o termo, hoje tão corriqueiro, não era unanimidade* à época; por outro lado, não fazia parte do estilo do filósofo austríaco o uso metonímico do termo "logicismo" para se referir à doutrina de filósofos tão próximos, com os quais ele teve a oportunidade de conversar diretamente. O emprego dos termos referentes às outras duas escolas – cujo uso era mais difundido à época – também é raro: o termo "formalismo" ocorre uma única vez (*PhBm*, XI−121b), enquanto o termo "intuicionismo" é encontrado duas vezes, e apenas nos manuscritos (*WAi*, pp. 101 e 125).

Ainda que Wittgenstein não tenha se referido explicitamente a uma doutrina logicista nestes textos, é possível mostrar que suas reflexões tocam o núcleo do programa logicista, bem como procuram retirar a motivação por trás deste programa. O *slogan* do logicismo, em uma formulação bastante geral, é "[Parte da] matemática é [redutível à] lógica". A ideia de uma redução traz consigo a ideia de um fundamento: sendo a matemática (ou parte dela) redutível à lógica, o fundamento da verdade das proposições matemáticas (ou de parte delas) é a lógica. A negação desta tese seria, portanto, a de que o fundamento da verdade destas proposições matemáticas não é a lógica (e sim, p. ex., uma intuição pura, ou, então, um reino matemático intangível e independente da lógica etc.). Como vimos no primeiro Capítulo deste estudo, a justificativa de Frege para a plausibilidade desta redução (para o caso da aritmética) provinha da extensão do campo de aplicação da aritmética, que não se reduzia a objetos intuíveis ou a objetos ideais, mas abarcava todo tipo de objeto, seja ele físico ou etéreo. Sendo a aritmética aplicável a todo e qualquer domínio, a negação das leis aritméticas levaria, assim como no caso de uma lei lógica, à impossibilidade de um pensar, de um raciocinar (independentemente do domínio sobre o qual este pensamento se debruça). A aritmética deveria, assim, juntar-se à lógica enquanto "ciência primeira": não primeira *enquanto* universal, mas primeira e, *por consequência*, universal. As leis aritméticas, assim como as leis lógicas, constituem o quadro formal de todo o discurso, de todo o pensamento, e devem ser, por isso, anteriores a todo discurso, a todo pensamento. Mas, uma vez que é da natureza de uma "ciência primeira" ser única, singular, de duas coisas uma: ou as leis lógicas

*Ramsey, em seu influente artigo de 1925 *The Foundations of Mathematics*, preferiu usar a expressão "escola lógica", enquanto Carnap adotava, em geral, o termo "logística".

seriam leis aritméticas, e a aritmética seria consequentemente a ciência protológica do discurso, ou as leis aritméticas nada seriam senão consequências sofisticadas de leis lógicas básicas, sendo a lógica, portanto, o fundamento da aritmética. A segunda alternativa se apresenta como consequência de uma constatação trivial: a aritmética investiga *proposições* e se interessa pelo seu *valor de verdade*. Na medida em que a lógica é a ciência do "ser verdadeiro", a aritmética deve pressupô-la, jamais fundamentá-la. Soma-se a isso o fato de que a aritmética aparentemente *aplica* os modos de inferência lógicos para deduzir seus teoremas, sendo ilegítima, portanto, a pretensão de justificá-los a partir do cálculo aritmético.

Wittgenstein concorda com as premissas do argumento. Em primeiro lugar, Wittgenstein subscreve a ideia de que não é possível colocar limites para a aplicação da aritmética: "O que depõe contra demarcar o domínio de aplicação [da aritmética] é o sentimento de que podemos entender a aritmética sem ter em vista tal domínio"[*]. Em segundo lugar, Wittgenstein também concorda com a ideia de que a aritmética é anterior ao discurso, e que este apenas se constitui em harmonia com as leis aritméticas. Não obstante esta dupla concordância, Wittgenstein recusa a conclusão do argumento: a aritmética não é redutível à lógica, a verdade das proposições aritméticas não é deduzível a partir de leis lógicas básicas, a lógica não é o fundamento da aritmética. Essa formulação, entretanto, precisa ser qualificada, afinal, em certo sentido, a matemática – logo, a aritmética – *é* lógica e, portanto, a ideia de redução sequer entraria na pauta da discussão.

Não são poucas as vezes em que Wittgenstein trata ambas as disciplinas – lógica e matemática – como uma unidade para a qual são válidos diversos raciocínios. Se não há, na *matemática*, uma dualidade entre lei e série infinita que dela se segue, é porque não há, *na lógica*, descrição e efetividade[†]. Da hipótese de que Deus pudesse saber algo, *na matemática* (*e.g.*, a distribuição dos números primos), que nós não pudéssemos saber, decorreria – o que, aos olhos de Wittgenstein, é um absurdo – a existência de algo, *na lógica*, que nós não poderíamos saber, mas que poderia ser conhecido[‡]. O método para se encontrar a solução de um problema matemático, na ausência do qual este problema não teria sentido, é um método *lógico*[§]. Mesmo o número, talvez o conceito mais fundamental da *matemática*, é de responsabilidade da *lógica*[¶]; o conceito formal $[1, \xi, \xi + 1]$ é um conceito *lógico*[‖]. Em todos estes casos, a unidade entre lógica e

[*] *PhBm*, X−109j.

[†] Cf. ibid., XVI−180b. Cf. tb. *WAii*, p. 27: "(...) in der Logik gibt es nicht Beschreibung und Gegenstand. Ist π' gleich π dann ist es wesentlich gleich π und dann muß die Andeutung die in ihm liegt, es könne von π verschieden sein unsinnig sein".

[‡] Cf. *PhBm*, XV−174d.

[§] Cf. ibid., XIII−149f.

[¶] Cf. ibid., XII−126c.

[‖] Cf. ibid., XII−125b.

matemática se justifica pelo fato de ambas as disciplinas concorrerem para estabelecer – em uma acepção bastante ampla – as condições de possibilidade do sentido proposicional, do discurso apto à verdade e à falsidade.

Ora, se matemática é, nesse sentido, também lógica, em que sentido a aritmética não é redutível à lógica? A resposta para esta questão se deixa entrever na insistência de Wittgenstein em separar as noções de "equação verdadeira" e "tautologia"[*]. Tautologias são proposições da lógica calculadas por meio do cálculo com operações de verdade. O que Wittgenstein recusa é a redutibilidade do cálculo aritmético ao cálculo com operações de verdade. Isso significa, como afirma Gallerani Cuter, que a aritmética "não precisa (e tampouco poderia) encontrar seu fundamento fora dela – na lógica das funções de verdade, por exemplo. A aritmética deve cuidar de si mesma, como tudo aquilo que pertence ao domínio da lógica"[†]. A aritmética pertence ao domínio da lógica; a verdade das proposições da aritmética não é justificada pelo cálculo com operações de verdade.

Mas qual é a motivação do logicista para esta redução? A aplicabilidade universal da aritmética. Contudo, esta característica serve, de início, apenas como razão heurística para creditar à aritmética um fundamento lógico. A legitimidade desta aplicabilidade geral deve, na verdade, ser *justificada*, e esta justificação toma a forma, no projeto logicista, de uma redução da aritmética ao cálculo lógico, pois da aplicabilidade universal da lógica não se duvida. Inversamente, se porventura a aritmética não fosse redutível à lógica, a verdade das proposições aritméticas deveria repousar sobre outro tipo de fundamento – não lógico –, o que limitaria a aplicação da aritmética a domínios de onde provém este fundamento, tal como ocorre, de acordo com Frege, com as proposições geométricas (cuja verdade depende de nossa intuição do espaço, sendo, portanto, aplicáveis apenas ao espaço).

O raciocínio acima, no entanto, repousa sobre pressupostos que Wittgenstein contesta. Em primeiro lugar, o de que haveria na lógica, bem como na matemática, verdades fundadas e verdades fundantes. Já no *Tractatus*, Wittgenstein faz questão de notar que "Todas as proposições da lógica têm os mesmos direitos. Não há, entre elas, o que seja essencialmente lei básica ou proposição derivada. Toda tautologia mostra, ela própria, que é uma tautologia"[‡]. No aforismo seguinte, Wittgenstein critica Frege por

[*]A despeito desta insistência, alguns membros do círculo de Viena, bem como o matemático G. H. Hardy, atribuíam a tese de que as proposições matemáticas são tautologias a Wittgenstein. Wolfe conta a história de que, em uma conferência dada por Hardy no ano de 1940 em Cambridge, este atribuiu a Wittgenstein a tese acima para, em seguida, discordar dela. Wittgenstein, que estava na platéia, apontou para si próprio e interpelou, incrédulo: "Quem, eu?". Mays **Wolfe**: Recollections of Wittgenstein, em: K. T. **Fann** (ed.): *Ludwig Wittgenstein: The Man and his Philosophy*, New Jersey: Humanities Press, 1967, p. 82.

[†]João Vergílio **Gallerani Cuter**: Le programme philosophique sous-jacent aux Remarques philosophiques, em: *Philosophiques*, 39.1 (2012), p. 73.

[‡]*Tractatus*, aforismo 6.127.

ter recorrido ao grau de evidência como critério para adotar suas “leis lógicas básicas”. E, em maio de 1930, em uma observação bastante próxima, o raciocínio é estendido para a matemática:

> A lógica e a matemática não repousam sobre axiomas; tampouco um grupo repousa sobre os elementos e operações que o definem. Nisto repousa o erro de considerar a autoevidência das leis básicas como um critério de correção na lógica.
> Um fundamento que não repousa sobre nada é um mau fundamento.*

Isso não impede que Wittgenstein procure explicar o papel dos axiomas nos sistemas axiomáticos modernos. De modo algum, entretanto, eles seriam “proposições” cuja verdade fundamentaria as proposições delas derivadas. Na álgebra, por exemplo, Wittgenstein fala de “regras básicas” (*Grundregeln*) e proposições derivadas. Mas estas regras básicas são *definições*, por meio das quais se pode proceder em um cálculo. Enquanto definições, estas regras básicas não carecem de fundamento: são estipulações arbitrárias. Também as equações que o cálculo prova não carecem de fundamento: elas valem *incondicionalmente*. A derivação a partir de certas premissas ou de equações verdadeiras já provadas é completamente inessencial para se provar uma proposição matemática. O essencial é que ela tenha uma análise completa, uma prova que seja construída com o auxílio das definições. E não se pode dizer que as definições constituem o *fundamento* da equação provada, pois as definições não são propriamente *condições de verdade* da equação (uma condição de verdade é verdadeira ou falsa, uma definição não é nem verdadeira nem falsa), mas *condições de sentido* da equação, da proposição matemática. Em outras palavras, não é o caso da equação ser falsa na ausência da definição: faltar-lhe-ia um sentido.

Deste modo, não apenas a lógica não é o fundamento da aritmética, mas também cada proposição da lógica não se funda sobre outra proposição da lógica, e o mesmo vale, *mutatis mutandis*, para a aritmética. Não há uma hierarquia na lógica e na matemática de acordo com a qual certas proposições se seguem de outras mais básicas, mais fundamentais (no sentido estrito em que se pode dizer que a verdade de uma proposição se segue logicamente da verdade de outra). Diferentemente dos edifícios científicos, em que há proposições de base e proposições que delas se seguem, na lógica e na matemática não há níveis: todas as proposições verdadeiras se encontram no mesmo nível com os mesmos direitos. São todas logicamente independentes umas das outras.

O segundo pressuposto que Wittgenstein contesta é a ideia de que o predicado “ser verdadeiro” é aplicado com o mesmo sentido no caso das proposições da lógica e no caso das proposições matemáticas. Embora a verdade de uma tautologia não seja algo que dependa de como o mundo é, já que isso pode ser decidido mediante a mera

* *WAii*, p. 260.

inspeção do símbolo por meio da qual ela é expressa, o cálculo que é responsável por essa decisão trabalha com proposições empíricas, para as quais “ser verdadeiro” é “dizer como o mundo é”. Diferentemente do cálculo lógico com funções de verdade, o cálculo matemático não trabalha diretamente com a verdade ou a falsidade de proposições empíricas, mas apenas com formas proposicionais, e os elementos do cálculo não são definidos a partir dos contextos proposicionais dos quais eles fazem parte, mas apenas a partir da forma que eles assumem quando aplicados a estes contextos proposicionais: “Quero dizer: os números só podem ser definidos a partir de *formas* proposicionais, independentemente da questão de quais proposições são verdadeiras ou falsas”[*].

Assim, o “ser verdadeiro” de uma tautologia não se confunde com o “ser verdadeiro” de uma equação. O primeiro corresponde simplesmente a mostrar que as operações de verdade resultaram na dissolução do sentido proposicional: a tautologia deixa de fazer um recorte no espaço lógico, deixa de ser uma decisão a respeito de como as coisas são. Já o “ser verdadeiro” de uma equação corresponde a construir uma estrutura através da análise completa desta equação; não há, aqui, dissolução do sentido proposicional, já que não se fala de proposições factuais em nenhuma etapa desta análise.

Na Seção seguinte, procuraremos tecer algumas considerações sobre esta irredutibilidade de equações a tautologias para, na Seção subsequente, voltar à questão da aplicabilidade universal da aritmética, desta vez não para lançar um olhar crítico no modo pelo qual Frege conduziu esta questão, mas para esclarecer a posição de Wittgenstein acerca dela.

Equações e tautologias

O projeto de redução de parte da matemática à lógica estava vinculado, nas doutrinas de Frege e Russell, a certo ideal de cientificidade em que uma teoria se apresentava, como afirma Lopes dos Santos, “sob a forma de um sistema de verdades articuladas por demonstrações lógicas em torno de um núcleo de indemonstráveis, que o conteria inteiramente como em germe, resumindo em si a totalidade dos fundamentos últimos da teoria”[†]. Neste núcleo, encontrar-se-iam apenas leis lógicas que pudessem ser imediatamente reconhecidas enquanto tais. Por outro lado, as proposições derivadas, ainda que não fossem imediatamente evidentes, eram reconhecidas como verdadeiras em virtude de serem consequências lógicas das leis básicas. Assim como a folha de uma árvore recebe a seiva proveniente da raiz por meio de tecidos condutores, estas proposições recebem seu valor de verdade destas leis fundamentais por meio de uma cadeia de inferências. Neste viés, as proposições da matemática (ou parte delas) são

[*] *PhBm*, X−102a.

[†] **Lopes dos Santos**: O Olho e o Microscópio, p. 14.

entendidas como meras consequências complexas de leis simples, de leis que manifestam o caráter lógico do pensar. Como colocara Russell, a matemática é a lógica em seu estado maduro, enquanto a lógica é a matemática em sua juventude*.

Sob esta perspectiva, o projeto logicista prescrevia as seguintes tarefas: *i)* definir os objetos do domínio matemático em questão em termos puramente lógicos; *ii)* demonstrar que as proposições primitivas deste domínio matemático podiam ser derivadas a partir da lógica e das definições destes objetos e *iii)* provar que os modos de inferência que a matemática utiliza para demonstrar seus teoremas são os mesmos que os modos de inferência da lógica. A terceira tarefa concentra seus esforços na tentativa de mostrar que o princípio de indução é um modo de inferência lógico, já que todos os outros modos de inferência de que a matemática se serve parecem ser retirados da lógica. Para mostrar que aquilo que o princípio de indução prova é uma *consequência lógica* de suas premissas, Frege introduz a noção de propriedade hereditária e, com isso, a noção de se seguir em uma série. Todo este aparato, no entanto, serve apenas para justificar a redução também da álgebra (entendida como a disciplina responsável por demonstrar a validade de asserções gerais sobre o domínio dos números naturais) à lógica, uma vez pressuposta a redutibilidade da aritmética de equações singulares. Para esta última tarefa, o ponto crucial é a definição puramente lógica do conceito de número. Nos *Fundamentos da Aritmética*, Frege conduz o leitor à aceitação de três peças chaves para sua definição do conceito de número: *i)* a de que o uso de um número em uma sentença assertiva atribui este número a um conceito; *ii)* a de que o número deve ser definido a partir do contexto proposicional em que ele é empregado e *iii)* a de que o número é um *objeto*, denotado na linguagem por um substantivo. A partir destas três peças, Frege define o número que convém a um conceito F como a extensão do conceito "equinumérico ao conceito F"† para, em seguida, definir cada número particular em função de um conceito a que este número convém. O número 0 é definido como o número que convém ao conceito $\xi \neq \xi$, o número 1 é definido como o número que convém ao conceito $\xi = 0$ e assim por diante.

Como se sabe, extensões de conceito – casos particulares de percursos de valores de uma função, de *classes*‡ – conduzem o sistema de Frege a uma contradição, descoberta

*Cf. Bertrand **Russell**: *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2ª ed., London: George Allen e Unwin, 1920, p. 194.

†**Frege**: Os fundamentos da aritmética, p. 250 (§68).

‡Na teoria de Frege, o termo "classe" é uma abreviação para o termo "percurso de valores de uma função". Cf. **idem**: Grundgesetze der Arithmetik, V II, p. 159 (§161). No caso da definição do conceito de número, a função em questão é unária (i.e., um conceito). Mas uma classe pode ser também o percurso de valores de uma função de mais de um argumento. No vocabulário dos *Principia Mathematica* de Russell, porém, o termo "classe" se refere propriamente a funções proposicionais unárias, o termo "relação" a funções proposicionais binárias etc. Cf. **Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, pp. 26-7.

por Russell. Segundo o próprio testemunho de Russell*, esta contradição o leva (com certo atraso) a sua "*no class theory*", isto é, à teoria na qual classes são apenas uma *façon de parler* de propriedades extensionais de funções proposicionais (unárias). Uma das características de uma classe, segundo a teoria de Russell, é que todos os seus termos satisfazem uma função proposicional. Quando a classe é dada extensionalmente por meio de uma lista, esta função é construída – no caso finito – com o auxílio da relação de identidade (*e.g.*, se a lista é $[a, b]$, a função $f(\xi)$ correspondente é $\xi = a \vee \xi = b$). A teoria do número cardinal, desenvolvida nos *Principia Mathematica*, é produto desta decisão de Russell acerca das classes: os números são classes e, consequentemente, são propriedades extensionais de funções proposicionais, de conceitos.

Influenciado pelo *Tractatus*, Ramsey se opõe a Russell e considera defeituosa sua teoria da identidade, bem como o seu uso para a construção de funções proposicionais. Ramsey também rejeita – seguindo o *Tractatus* – a concepção frege-russelliana de lógica, segundo a qual as proposições da lógica têm conteúdo, e concebe – com o *Tractatus* – as proposições da lógica como tautologias que, enquanto tais, nada dizem. Ramsey se afasta, entretanto, do *Tractatus* ao procurar reivindicar o caráter tautológico das equações matemáticas verdadeiras, bem como o caráter contraditório das equações matemáticas falsas. Como vimos no Capítulo 2, o projeto logicista de Ramsey envolvia basicamente duas tarefas: *i)* a tradução das equações da aritmética para o simbolismo da lógica, utilizando, para este fim, a suposta forma mais geral da aplicação da equação e *ii)* a elaboração de uma teoria da identidade cogente, sem a qual o projeto encontrava dificuldades insuperáveis.

Diante deste panorâma, que resultados alcançaram os Capítulos 2 e 3 de nosso estudo? A análise de algumas passagens das *PhBm* ofereceu ferramentas para a caracterização de três pontos de desacordo de Wittgenstein com estes autores. De fato, vejamos.

Em primeiro lugar, a teoria da identidade de Ramsey é ilegítima, pois a tautologia que é construída "sob demanda" para desempenhar a função que o sinal de identidade não pode cumprir (o *Tractatus* prescrevia a impossibilidade até mesmo de se *formular* pseudoproposições como $a = b$ em uma notação correta) pressupõe, para que se reconheça seu caráter tautológico, aquilo para o qual ela supostamente serviria de critério: a identidade entre a e b. A lição que se tira dessa tentativa frustrada de Ramsey é que a

*Cf. Bertrand **Russell**: Some Explanations in Reply to Mr. Bradley, em: *Mind*, 19.75 (1910), p. 376: "I have, however, since that time [of my *Principles*] discovered that it is possible to give an interpretation to all propositions which verbally employ classes, without assuming that there really are such things as classes at all. Apart from other contradictions, the fact that a class, if there is such a thing, must be both one and many constitutes a difficulty. That it is meaningless (as Mr. Bradley contends) to regard a class as being or not being a member of itself, must be assumed for the avoidance of a more mathematical contradiction; but I cannot see that this could be meaningless if there were such things as classes".

identidade ou não identidade entre objetos, ou entre variáveis etc., é algo que deve ser *visto* na própria inspeção dos símbolos em questão, e nenhuma investigação por meio de um cálculo com operações de verdade poderia nos revelar este *aspecto* do simbolismo; pelo contrário, este cálculo o pressupõe. Analogamente, quando se diz, na aritmética, que duas coisas e *outras* duas coisas resultam em quatro coisas, o fundamental é que a identidade e a alteridade destes itens são algo a ser *visto* nos próprios símbolos*, e não algo a ser *comunicado* pelo caráter tautológico de certa expressão.

Em segundo lugar, o esquema aritmético, digamos, $|| + || = ||||$, não se confunde com a tautologia correspondente no simbolismo da lógica; ambas se confundiriam apenas se a tautologia fosse essencialmente a única aplicação do esquema. Como o número cardinal não é essencialmente vinculado a um conceito, mas a uma classe (entendida extensionalmente), a forma proposicional $(E_n x)\varphi x$† não é a expressão da forma mais geral do uso do número cardinal em uma proposição: ele também se aplica, p. ex., à forma $(E_n x)xRx = (Ex_1, ..., x_n) \cdot x_1 R x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} R x_n$, e, neste caso, o número não é atribuído a um conceito, a uma função proposicional unária. Por definir o número a partir de um contexto proposicional *específico* em que ele é empregado, Russell precisa, nos *Principia Mathematica*, multiplicar as aritméticas: a parte III da obra apresenta a aritmética dos "cardinais" (vinculados a um conceito), enquanto a parte IV apresenta a aritmética das "relações" (vinculados a uma relação). Para explicitar este ponto, consideremos as seguintes definições referentes a relações Φ e Ψ quaisquer:

$x \in F(\Phi) = (\exists y)x\Phi y \vee y\Phi x$ Def.
$x(\Phi \vee \Psi)y = x\Phi y \vee x\Psi y \vee (x \in F(\Phi) \cdot y \in F(\Psi))$ Def.

As tautologias referentes às duas aritméticas de Russell podem, então, ser escritas como:

$(E_2 x)\varphi x \cdot (E_2 x)\psi x \cdot \neg(\exists x)(\varphi x \cdot \psi x) \supset_{\varphi\psi} (E_4 x)\varphi x \vee \psi x$
$(E_2 x)x\Phi x \cdot (E_2 x)x\Psi x \cdot \neg(\exists x)(x \in F(\Phi) \cdot x \in F(\Psi)) \supset_{\Phi\Psi} (E_4 x)x(\Phi \vee \Psi)x$

O que ocorre na construção das tautologias acima é que as partes referentes às expressões "$\neg(\exists x)\varphi x \cdot \psi x$" (no primeiro caso) e "$\neg(\exists x)x \in F(\Phi) \cdot x \in F(\Psi)$" (no segundo) são *ajustadas* para que a expressão completa seja uma tautologia quando

*Neste aspecto, Wittgenstein se aproxima de Hilbert. Cp. David **Hilbert**: Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, em: *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), pp. 162-3:"Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzierem läßt".

†Nesta Seção, o sinal "$(E_n x)$..." será usado como sinônimo de "$(\exists_n x) ... \cdot \neg(\exists_{n+1} x)$...".

os números utilizados correspondem a uma equação aritmética verdadeira (em ambos os casos, $2 + 2 = 4$). Sem este ajuste, as expressões deixam de ser tautológicas e, no entanto, $2 + 2$ não deixa de ser 4. Que a expressão resulte em uma tautologia, observa Wittgenstein, “é em si e por si inessencial. Eu posso aplicar a equação aritmética tanto a proposições com sentido quanto a tautologias”[*]. Ambas as expressões são apenas *aplicações* distintas da *mesma* equação, e não a tradução lógica de equações pertencentes a duas aritméticas distintas. Se a aplicação da equação resulta em uma tautologia *naqueles casos*, isto não é devido a uma propriedade notável das equações de sempre resultarem em tautologias quando aplicadas, mas a certo ajuste que foi feito no momento da construção da expressão tautológica. Não há, por assim dizer, um vínculo interno entre equações e tautologias, mas tão somente uma harmonia preestabelecida.

Em terceiro lugar, o elo entre o cálculo aritmético e o cálculo com operações de verdade, feito por meio de definições, não é necessário para que o cálculo aritmético seja *aplicado* enquanto um conjunto de regras sintáticas da linguagem, isto é, enquanto um conjunto de regras que dizem em que contextos o uso dos numerais leva a proposições significativas. Isso porque estas regras sintáticas correspondem, no cálculo, a proposições matemáticas cuja prova consiste em sua análise completa. Assim, a regra sintática serve à construção de um símbolo, pois dota o sinal de certa multiplicidade. E não há nada que impeça que este símbolo seja *diretamente* projetado, proposicionalmente, em uma situação possível do mundo.

Uma vez estabelecidos estes três pontos, como se colocaria a questão da aplicabilidade universal da aritmética? Um modo possível de recolocar a questão seria o seguinte: a construção de uma prova é certamente particular; os traços no papel são corpos no espaço, com certa extensão, e se submetem a propriedades formais do espaço. Como poderiam, então, ser aplicados a coisas que não são espaciais (*e.g.*, dias da semana)? Como a regra sintática poderia ser universalmente aplicável, se o que ela faz é apenas permitir a substituição de uma construção espacial por outra igualmente espacial? Na geometria, quando se prova algo de um triângulo por meio de uma figura triangular, a validade desta prova se estende para um triângulo qualquer, mas não para outros tipos de figuras de formas completamente distintas. E por que razão a validade de uma prova na aritmética, por meio de traços e arcos, se estenderia para coisas que não são nem traços nem arcos? O que faz, da aritmética, um tipo *mais geral* de geometria[†]? Na Seção seguinte, procuraremos tratar mais de perto esta questão, bem como enfatizar a importância do tema da aplicabilidade para as relações entre o pensamento de Wittgenstein e o projeto logicista.

[*] *WWK*, p. 35.

[†] Cf. *PhBm*, X–109h.

Aplicabilidade

A clareza com a qual o logicismo desfaz o mistério de como a aritmética é aplicável, i.e., de como os sinais do cálculo aritmético ocorrem não apenas no interior do próprio cálculo, mas também em proposições *of everyday life*[*], é apresentada geralmente como uma das vantagens do logicismo em relação às outras escolas. É bastante compreensível, pois, que os autores do logicismo tenham colocado tanta ênfase neste tema. Frege, por exemplo, argumentava – contra o formalismo de Thomae e Heine – que é a aplicabilidade da aritmética que faz com que ela seja não apenas um jogo, como o xadrez, mas que a eleva ao estatuto de *ciência*[†]. Diferentemente de um jogo, e assim como toda ciência, a aritmética tem a *verdade* como meta[‡]. Mas a pergunta pela verdade ou falsidade se coloca propriamente, alega Frege, em relação a um *pensamento*. Consequentemente, o objetivo da ciência é descrever, dentre os pensamentos, aqueles que são verdadeiros. Com a identidade estabelecida por Frege, em sua obra de maturidade, entre fatos e pensamentos verdadeiros[§], chega-se à formulação clássica segundo a qual *a meta de uma ciência é descrever fatos*. Sendo uma ciência, a aritmética descreve fatos e, assim, é aplicável; fosse a aritmética um mero jogo com sinais, ela não se interessaria pela descrição de fatos, tampouco seria aplicável. Se há, então, alguma legitimidade em falar em uma "realidade aritmética", é precisamente devido ao estatuto de *ciência* que a aritmética possui e que mantém estrito vínculo com o fato de ela ser aplicável.

É notável que possamos encontrar uma formulação bastante semelhante desta ideia nas *PhBm*. No parágrafo 186, pertencente ao capítulo *XVII*, Wittgenstein afirma com todas as letras que a aplicabilidade é o critério genuíno para a *realidade aritmética*. E, em um dos extensos comentários, nos manuscritos, sobre a prova indutiva de Skolem da lei da associatividade, Wittgenstein observa que esta prova é, na verdade, uma prova de existência (*Existenzbeweis*). Ao fazer uso de um conceito chave para o debate sobre os fundamentos da matemática à época (sobretudo para as desavenças entre intuicionismo e formalismo) para lhe dar uma significação completamente nova, Wittgenstein manifesta concordância com a máxima logicista segundo a qual *ser* ou *existir*, na matemática, equivale a *ser aplicável*. O termo "prova de existência", usado classicamente para designar a prova da existência de um objeto matemático sem que se forneça sua construção, cairia melhor para aquilo que se chama de "prova indutiva" na matemática. Pois uma "prova de existência", alega Wittgenstein, "é a prova de que eu posso aplicar um sistema"[¶]. E, como vimos anteriormente, a prova indutiva não prova a proposição

[*] **Ramsey**: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, p. 2.

[†] **Frege**: Grundgesetze der Arithmetik, V II, p. 100 (§91).

[‡] **Idem**: Der Gedanke - eine logische Untersuchung, em: *Logische Untersuchungen*, Göttingen: Vanderhoeck & Ruprecht, 2003, p. 35.

[§] Ibid., pp. 57-8.

[¶] *WAii*, p. 184:"Jener ||Skolemsche|| Beweis durch Rekursion ist eigentlich ein Existenzbeweis.

algébrica, mas mostra a sua *aplicabilidade* à aritmética.

As semelhanças, no entanto, residem apenas na superfície imediatamente visível desta formulação das relações entre existência e aplicabilidade. Com efeito, aquilo que Wittgenstein chama de “realidade aritmética” é completamente diferente daquilo que este termo significaria para Frege. Também aquilo que Wittgenstein chama de aplicabilidade da aritmética não se confunde com aquilo que Frege chama de aplicação, a saber, a inferência lógica de uma generalidade para um caso particular. Wittgenstein vê o logicismo – e, neste ponto, podemos colocar também o *Tractatus* – como uma desventurada tentativa de fornecer a *forma mais geral da aplicação* da aritmética, como uma tentativa que se revela desnecessária, logo, impossível:

> Trata-se sempre da questão sobre se e como é possível apresentar a forma mais geral da aplicação da aritmética. E, aqui, o que é curioso é precisamente que, em certo sentido, isto parece não ser necessário. E se isto não é realmente necessário, então é também impossível.
>
> Parece, em particular, que a forma geral de sua aplicação deve ser apresentada pelo fato de que *nada* é asserido a seu respeito. (E se isto é uma apresentação possível, então é também a correta.)[*]

Porém, se a generalidade da aplicação da aritmética não provém da especificação de sua forma mais geral, de onde ela poderia provir? A resposta a esta questão parece estar naquilo que Wittgenstein via como uma “estranheza” ao se trabalhar, na aritmética, *apenas* com extensões, a saber, o fato de que, com isso, acabamos por “ignorar por completo a forma dos objetos”[†]. Esta desconsideração da forma dos objetos não é certamente um ato psicológico de abstração, mas um ato lógico que consiste em prescrever a multiplicidade de um símbolo, a despeito da forma do simbolismo que é empregado. Na aritmética de traços e arcos, feita, digamos, *no papel*, os sinais são certamente corpos espaciais, com um determinado tamanho, dimensão, e as relações entre os sinais obedecem às propriedades formais do espaço: um sinal não pode, p. ex., estar ao mesmo tempo à direita e à esquerda de outro sinal, e se o sinal “a” se encontra à esquerda do sinal “b”, que, por sua vez, se encontra à esquerda do sinal “c”, então não é possível que o sinal “a” se encontre à direita de “c” etc. Mas estas propriedades não precisam ser constitutivas dos símbolos, e isso é indicado no simbolismo pela presença de certas regras. Quando uma lista é representada pelo sinal “$[a, b, c]$”, esta representação introduz uma ordenação de seus elementos que não é essencial à lista, e se esta lista fosse representada pelo sinal “$[b, a, c]$”, diríamos que se trata da *mesma* lista. Nesse sentido, deve-se entender o símbolo para a lista, nesta notação (espacial), como sendo a especificação por extenso de seus elementos *modulo* todas as assimetrias que as

Existenzbeweis ist der Beweis, daß ich ein System anwenden kann”.

[*] *PhBm*, X−110c-d.

[†] Ibid., IX−94a.

propriedades formais do espaço introduzem (do mesmo modo que devemos entender as proposições "Abel é irmão de Caim" e "Caim é irmão de Abel" como duas expressões distintas da *mesma* proposição). De modo similar, a prova da equação $2 + 2 = 4$ é certamente feita por meio de uma construção particular, com sinais de determinada forma (traços, arcos), mas esta forma é inessencial ao símbolo, e dever-se-ia entender a prova como aquilo que há de comum em todas as construções que serviriam ao mesmo propósito.

A generalidade da aplicação aritmética provém, então, fundamentalmente da distinção feita pelo *Tractatus* entre a *forma* de um fato e sua *forma lógica*: aquilo que é necessário para a aplicação não é uma identidade entre *formas*, mas entre *formas lógicas*, e o fato de o cálculo ser feito com traços ou com as contas de um ábaco não traz problema algum para a aplicabilidade desta construção a coisas que não são traços nem contas. Por mais distintos que sejam os elementos do cálculo e os elementos da situação a que eles são aplicados, esta diferença não impede nem limita a aplicação: "Por mais diferentes que sejam traços e julgamentos judiciais, ainda se podem apresentar julgamentos judiciais através de traços em um calendário. E é possível contar estes ao invés daqueles"[*].

A conclusão que se depreende desse modo de conceber a aplicabilidade universal da aritmética é que, na aritmética, não há fórmula geral e aplicações particulares, mas a aritmética e suas aplicações são, no essencial, a mesma coisa (a mesma forma lógica). Esta conclusão, formulada primorosamente por Waismann[†] em um texto de 1930 intitulado "O que é um número", não deixa dúvidas de que, para Wittgenstein, não há como dissociar a aritmética pura de suas possíveis aplicações:

> Formas não têm nada que ver com generalidade. Uma forma não é nem geral nem particular.
> As proposições da aritmética não são leis *gerais* que são aplicadas a casos concretos. Se eu digo: "2 ameixas + 2 ameixas são 4 ameixas" e "2 cadeiras + 2 cadeiras são 4 cadeiras", eu não apliquei a proposição $2 + 2 = 4$ a casos distintos, mas eu tenho diante de mim sempre a *mesma* aplicação.
> *A matemática é a mesma em toda parte.* Para a matemática, não há nenhum "problema da aplicação".[‡]

WITTGENSTEIN E O INTUICIONISMO

Ao contrário das discussões com o logicismo, que aparecem bem demarcadas e ocupam quase que a totalidade dos capítulos *X* e *XI*, as observações acerca de temas intuicionistas se encontram esparsas em diversos capítulos das *PhBm*. Os nomes de Brouwer e Weyl são

[*] *PhBm*, X−112a.

[†] Com o auxílio de notas tomadas em conversas com Wittgenstein.

[‡] *WWK*, p. 225.

mencionados três vezes, ao passo que o termo "intuicionismo" só ocorre nos manuscritos, em duas ocasiões. Antes de detalhar as observações de Wittgenstein sobre estes autores, convém expor, em linhas gerais, as bases do programa intuicionista.

O intuicionismo funda a matemática na intuição temporal, i.e., na apreensão imediata da sucessão, no tempo, de vivências distintas. A existência de geometrias não euclidianas faz com que Brouwer reconsidere a tese de Kant segundo a qual a geometria se funda na intuição do espaço (euclidiano). Por outro lado, Brouwer adere à tese kantiana de que a aritmética é fundada na intuição do tempo e, portanto, suas verdades são incapazes de demonstração analítica. Porém, ao contrário de Kant, Brouwer funda também a geometria nesta intuição *a priori*, já que "desde Descartes, nós aprendemos a reduzir todas as geometrias à aritmética por meio do cálculo com coordenadas"[*].

Esta dimensão intuitiva da matemática é, segundo Brouwer, a fonte do *conhecimento matemático*, conhecimento este que não é obtido pelo caráter verdadeiro de uma proposição, mas por uma construção introspectiva que independe da existência de uma formulação linguística. Brouwer chega até mesmo a afirmar que é possível conceber uma verdade matemática que não pode jamais ser fixada em um sistema de fórmulas e alega que o sentimento de "verdade matemática" que acompanha a construção mental é o único critério de "verdade" na matemática[†]. O critério de "falsidade" na matemática, por sua vez, não é a ausência desta construção, mas a prova da absurdidade da construção correspondente[‡].

Como observa Cassou-Noguès, a possibilidade de uma realização temporal não é apenas o fundamento das operações matemáticas, mas a origem dos limites que a matemática intuicionista impõe para a noção de "prova", limites que conduzem Brouwer a rejeitar parte da matemática clássica[§]. Aos olhos do intuicionista, o que é problemático em certos raciocínios da matemática clássica é o uso – em domínios infinitos – das leis lógicas para derivar, de modo puramente mecânico, asserções linguísticas a partir de outras asserções linguísticas. Em domínios finitos, i.e., em domínios que envolvem o cálculo da presença de certa propriedade (que é calculável em um número finito de passos) para uma lista finita de objetos matemáticos, as leis lógicas são inofensivas,

[*] L. E. J. **Brouwer**: *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. por A. **Heyting**, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 128.

[†] Cf. ibid., p. 452. Por motivos bastante óbvios, a concepção do papel da linguagem e dos signos linguísticos em Brouwer é diametralmente oposta à de Wittgenstein. Não iremos, todavia, insistir nesta divergência entre ambos os autores. Gostaríamos apenas de lembrar que este pessimismo em relação à linguagem era uma posição bastante comum à época, sobretudo na Viena *fin-de-siècle*.

[‡] Resta, porém, a questão de saber no que consiste, para Brouwer, esta "absurdidade" ou "impossibilidade da construção". Para uma discussão breve desta dificuldade, Cf. Walter P. **Van Stigt**: Brouwer's Intuitionist Programme, em: Paolo **Mancosu** (ed.): *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's*, New York: Oxford University Press, 1998, pp. 1–22.

[§] Cf. Pierre **Cassou-Noguès**: Le temps, l'espace et la démonstration. De Kant à Gentzen, en passant par Brouwer, Hilbert et Frege, em: *Philosophia Scientiæ*, 9.2 (2005), p. 213.

pois nestes casos toda prova (toda construção) das premissas do raciocínio lógico pode ser transformada em uma prova (em uma construção) da conclusão do raciocínio. A investigação de domínios (potencialmente) infinitos, porém, leva Brouwer ao resultado de que uma lei lógica, em particular, não é um instrumento confiável de derivações de construções matemáticas. Esta lei é o Princípio do Terceiro Excluído.

Em diversos escritos, Brouwer procura convencer o leitor de que este princípio deve ser recusado, pois, em geral, "nenhuma realidade matemática corresponde à afirmação deste princípio e a conclusões derivadas por seu intermédio"[*]. Para este fim, Brouwer faz uso de contraexemplos[†] que dependem essencialmente de problemas matemáticos não resolvidos (*e.g.*, a conjectura de Goldbach). Um destes contraexemplos é o "número pendular", uma regra *convergente* para a construção de números racionais, do qual não se pode asserir nem que ele é igual a 0 (pois isso remontaria a provar o problema matemático não resolvido) nem que ele é diferente de 0 (pois isso remontaria a provar a falsidade do problema em questão). Este número, conclui Brouwer, "não é nem igual a 0 nem diferente de 0, o que contradiz o Princípio do Terceiro Excluído"[‡]. Assim como o "atual rei da França" não é nem calvo nem cabeludo, o "número pendular" de Brouwer não é nem igual a 0 nem distinto de 0: *tertium datur*.

Por essa razão, Brouwer identifica o Princípio do Terceiro Excluído com o princípio da resolubilidade de todo problema matemático[§]. Sendo incerto se questões como "Há um dígito que ocorre mais frequentemente que os outros na expansão decimal de π?" ou "Há na expansão decimal de π a ocorrência de infinitos pares consecutivos de dígitos idênticos?"[¶] podem ser resolvidas, também é incerto se o uso do Princípio do Terceiro Excluído leva a resultados corretos quando aplicado e, ainda que as questões acima sejam porventura resolvidas, é sempre possível formular outra questão da qual a resolubilidade é passível de dúvida.

Mas como é que a atividade matemática, cujo fundamento é a intuição temporal

---

[*] L. E. J. **Brouwer**: Mathematik, Wissenschaft und Sprache, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 425.

[†] Hoje chamados de contraexemplos *fracos* (*weak counterexamples*), em oposição a contraexemplos *fortes* (*strong counterexamples*). Os contraexemplos que nos interessam são os primeiros, pois são eles que serão mencionados por Wittgenstein nas discussões com Brouwer. Além disso, o primeiro contraexemplo forte é apresentado por Brouwer apenas em 1949, já longe do auge das discussões sobre os fundamentos da matemática. Cf. Dirk van **Dalen**: Intuitionistic Logic, em: Dov M. **Gabbay**/F. **Guenthner** (eds.): *Handbook of Philosophical Logic*, 2ª ed., vol. 5, Dordrecht: Kluwer-Academic Publishers, 2002, p. 99.

[‡] **Brouwer**: Mathematik, Wissenschaft und Sprache, p. 425.

[§] **Idem**: Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 410.

[¶] Os exemplos são de Brouwer. Cf. **idem**: The Unreliability of the Logical Principles, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 110.

finita, pode lidar com domínios infinitos na matemática? Para o intuicionista do primeiro ato, é o raciocínio por indução completa que nos permite alcançar o infinito com considerações finitas:

> A ferramenta que nos auxilia a lidar com sistemas infinitos em um processo finito é a indução completa; ela nos permite controlar a sequência infinita dos números naturais por meio da observação de propriedades, i.e., ajustes (*imbeddings*) que valem para qualquer número natural, em particular também contradições, i.e., ajustes impossíveis que valem para qualquer número natural.[*]

Em uma nota de rodapé associada a este excerto, Brouwer atribui a Poincaré o mérito de ter reconhecido a indução completa como o "raciocínio matemático *par excellence*". Poincaré entendia o raciocínio por indução completa como uma "condensação", em uma única fórmula, de uma sequência infinita de silogismos. Esta sequência que nunca encontraria um fim é reduzida, diz Poincaré, "a uma frase de algumas linhas"[†]. Porém, mesmo com este mecanismo miraculoso que nos permite percorrer uma maratona infinita com poucos passos, ainda assim este processo *regrado* de apresentação do infinito é, para Brouwer, limitado quando a tarefa consiste na elaboração de uma teoria do *continuum*. O raciocínio de Brouwer é o seguinte: na concepção intensional, o infinito é apenas atingível por uma regra (a regra indutiva); como os números reais têm, em cada sistema, uma expansão infinita, este infinito poderia apenas ser dado por meio de uma regra de construção das aproximações racionais que convergem para o número real em questão; ora, a totalidade destas regras é denumerável, e mesmo que possamos – pelo raciocínio de Cantor – construir uma regra que não esteja na totalidade inicial, a adição desta regra ao conjunto não faz com que este conjunto deixe de ser denumerável. O segundo ato do intuicionismo – cujo objetivo é fundamentar uma teoria intuicionista do *continuum* – introduz, então, outra forma para lidar de modo intensional com o infinito além de regras de produção de um próximo termo: as sequências de escolha. Uma sequência de escolha é uma entidade matemática que não é pré-determinada por uma regra, mas por uma sucessão de escolhas livres, podendo, neste estado de desenvolvimento livre, adquirir propriedades que ela não possuia antes destes atos de escolha[‡]. Com esta ferramenta, Brouwer procura mostrar, então, que a introdução des elementos "inacabados" (*unfertige*) é necessária e suficiente para dar conta da multiplicidade do *continuum pleno*, não denumerável[§].

---

[*] ibid., pp. 109-10.

[†] Henri **Poincaré**: *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flamarion, 1917, p. 20.

[‡] Cf. L. E. J. **Brouwer**: The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 552.

[§] Cf. **idem**: Die Struktur des Kontinuums, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 433:"Um in der intuitionistischen Theorie das den unitar beschrankten rationalen

Uma vez expostas, em traços largos, mas suficientemente abrangentes, as bases do programa intuicionista, é possível passar para as observações de Wittgenstein que procuram dialogar com estes autores. Veremos que as divergências de Wittgenstein com os intuicionistas residem em temas que circundam a noção de "infinito" e seu papel na matemática. Na Seção seguinte, mostraremos os motivos de Wittgenstein para recusar uma "matemática do infinito", para recusar que a indução completa seja uma ferramenta para lidar, de modo finito, com sistemas infinitos. Procuraremos mostrar, então, como Wittgenstein procura tratar as "proposições gerais" na matemática levando até as últimas consequências a separação entre os sistemas algébrico e aritmético. Na Seção subsequente, exporemos as reservas feitas por Wittgenstein à noção de sequências de escolha, reservas que estão diretamente relacionadas a sua própria teoria dos números reais.

Infinito, Generalidade, Decidibilidade

A matemática, diz Weyl, é a ciência do infinito*. A posição de Weyl e, em geral, dos intuicionistas a respeito do infinito na matemática é que a introdução de considerações sobre o infinito – a introdução de proposições gerais – nos obriga a revisar não apenas o estatuto de algumas leis que valem para o caso finito e, no entanto, deixam de valer para o caso infinito, mas o próprio conceito de *prova*. Para proposições gerais que percorrem domínios finitos, a investigação da ocorrência de certa propriedade (decidível) para todos os elementos deste domínio ou para alguns destes elementos pode ser feita pela inspeção individual de cada elemento. Assim, as condições de verdade – o sentido – do enunciado geral é simplesmente função de verdade dos enunciados particulares. Provamos o enunciado geral em função das provas dos enunciados particulares. Esta formulação, porém, deixa de valer quando as proposições gerais percorrem domínios infinitos (como, *e.g.*, os números naturais). Com efeito, a investigação do valor de verdade da proposição geral já não pode ser feita pela inspeção individual de cada um dos infinitos elementos de que trata a proposição. Nesse sentido, já não podemos provar o enunciado geral em função da totalidade de provas dos enunciados particulares. O que ocorre, então, é que o próprio conceito de prova e, portanto, de verdade de um enunciado deste tipo se altera: para as proposições gerais, deixamos de nos preocupar com suas – infinitas – condições de verdade, para nos preocupar apenas com suas condições de assertabilidade, i.e., as condições sem as quais a asserção do enunciado geral carece de

Zahlen (bzw. endlichen Dezimalbriichen) überlagerte *volle Einheitskontinuum* zu erhalten, ist es notwendig, neben den 'fertigen Elementen' des reduzierten Kontinuums 'unfertige Elemente' einzufiihren, indem wir neben den konvergenten *Fundamentalreihen* unitar beschrankter rationaler Zahlen auch (durch freie Wahl erzeugte) konvergente *Folgen* derartiger rationaler Zahlen zulassen. Um von diesem vollen Einheitskontinuum die fertige überabzahlbare Vielfachheit zum Ausdruck zu bringen, (...)".

*Hermann **Weyl**: Die Heutige Erkenntnislage in der Mathematik, em: *Symposium*, 1 (1925), p. 1.

justificação.

Como vimos anteriormente, a indução é, então, vista como uma ferramenta de *justificação* das proposições gerais (universais) na aritmética. Poincaré chega a dizer que, com o raciocínio indutivo, a matemática pode – assim como as outras ciências – proceder do particular ao geral[*]. Na contramão desta concepção, a ideia fundamental de Wittgenstein nas *PhBm* é que *não há provas de enunciados gerais na aritmética*, o que implica – dado o elo forte entre o sentido de um enunciado matemático e sua prova (Cf. o Capítulo 3 deste trabalho) – que não há *enunciados gerais* na matemática. As equações algébricas e aritméticas são igualmente particulares e são regidas, cada uma, por suas próprias regras, ou seja, as regras para o cálculo com caracteres têm regras que independem das regras aritméticas. A indução não prova uma proposição (uma regra) do cálculo algébrico[†], mas apenas mostra a aplicabilidade desta regra ao cálculo aritmético.

Em uma passagem dos manuscritos, Wittgenstein chega até mesmo a elevar sua concepção das equações e sua explicação dos enunciados gerais na aritmética ao estatuto de um *Grundgedanke*: "Eu não posso me elevar sobre equações por meio de equações, eu não posso obter nada além de equações. Este é um de meus *Grundgedanken* que é imensamente difícil de se compreender plenamente"[‡]. Do que Wittgenstein parece não abrir mão de modo algum em sua explicação é da *tese composicionalista do sentido de proposições complexas (moleculares)*. Se o enunciado algébrico é entendido como uma proposição que enuncia algo a respeito de *todos* os números naturais, então o sentido deste enunciado deve ser, necessariamente, função do sentido de cada um dos infinitos enunciados particulares, e se um enunciado deste tipo é permitido na matemática, então nada depõe contra a existência de enunciados cuja verdade não se pode decidir por meio de um cálculo finito. Mas esta é, precisamente, a (falsa) concepção extensional do infinito, concepção da qual ele procura se desvencilhar:

> A falsa concepção de variável é em grande medida a culpada por nossa dificuldade, isto é, a concepção como se ela r e p r e s e n t a s s e números (a concepção extensional), ao passo que ela não representa nada, mas ela é o que é. Se ela representasse números, então seria apenas preciso que $5^3 + 7^3 = 9^3$ tivesse sentido e o sentido das proposições gerais sobre a forma $x^n + y^n = z^n$ se seguiria disso. Mas como a variável é autônoma, então a proposição que a contém somente terá sentido se ela for controlável por seus próprios princípios, assim como $5^3 + 7^3 = 9^3$ pelos seus.[§]
>
> Porque não se deve dizer que a proposição algébrica diz precisamente o que é provado

[*] **Poincaré**: La Science et l'Hypothèse, p. 25.

[†] Tampouco a descoberta de um número que satisfaz um predicado aritmético $\mathcal{F}$ prova que $(\exists n)\mathcal{F}n$. Cf. *PhBm*, XIII−150g:"Das Wichtige ist, daß ich auch dann, wenn mir $3^2 + 4^2 = 5^2$ gegeben ist, *nicht* sagen darf: '$(\exists x, y, z, n) \cdot x^n + y^n = z^n$', denn extensiv heißt es nichts und intensional ist es dadurch nicht bewiesen. Sondern ich darf dann eben nur die erste Gleichung aussprechen".

[‡] *WAii*, p. 82.

[§] *WAi*, p. 171.

> por meio da indução? Pois esta asserção conduz a incompreensibilidades lógicas cuja resolução apenas a separação das proposições ariméticas e das algébricas fornece.*

Wittgenstein fala, então, que o modo usual (extensional) pelo qual se entende as relações entre aritmética e álgebra leva a *incompreensibilidades lógicas*. Que incompreensibilidades lógicas seriam estas? Vejamos a explicação de Weyl – a qual Wittgenstein certamente tem em vista em suas observações – para o sentido das proposições gerais, em particular para uma asserção existencial do tipo $(\exists n)\mathcal{F}n$:

> Não é um exame dos números individuais, mas o exame da *essência do número* que pode me fornecer juízos gerais sobre números. Apenas a descoberta *ulterior* de certo número com a propriedade $\mathcal{F}$ pode fornecer uma justificação para a resposta *sim*, e – como não posso examinar todos os números – apenas a percepção de que repousa na *essência* do número ter a propriedade $\neg\mathcal{F}$ pode fornecer uma justificação para a resposta *não*; nem mesmo a Deus está disponível uma razão diferente para efetuar a decisão. *Mas ambas as possibilidades não se opõem mais uma à outra como asserção e negação*; nem a negação de uma nem da outra fornece algum sentido compreensível.†

Por que razão Weyl alega que estas duas possibilidades não possuem uma negação compreensível? Ora, se a justificação para uma asserção geral é da forma "repousa na essência do número que ...", então a negação desta justificação é simplesmente "não repousa na essência do número que ... ". Mas é inconcebível que haja na aritmética justificações que recorrem a "propriedades acidentais" do número (i.e., propriedades que não repousam em sua essência). Se um número possui certa propriedade, então esta propriedade é parte de sua essência.

As objeções que Wittgenstein faz a este modo de conceber o estatuto de asserções gerais na matemática são as seguintes: em primeiro lugar, uma asserção não pode ser entendida se sua negação não é compreensível. Neste caso, ela não tem o estatuto lógico de uma asserção, de um juízo. Weyl concorda com esta conclusão e propõe chamar, na sequência de seu texto, juízos existenciais de "juízos abstratos" (*Urteilsabstrakt*) e juízos universais de "instruções para juízos" (*Anweisung für Urteile*). Weyl insiste em dizer, porém, que há *justificações* para estas construções gerais. Mas poderia haver propriamente *justificação* para algo que não se opõe a nada (para algo cuja negação não é nem mesmo compreensível)? Em segundo lugar, mesmo que se suponha, então, que as "asserções" $(\exists n)\mathcal{F}n$ e $(n)\neg\mathcal{F}n$ sejam opostas – em algum sentido diferente de "asserção" e sua "negação" –, seria a justificação de cada uma delas sua *prova*? Poderia a prova na matemática ser concebida de tal modo que houvesse uma prova para o "sim" e *outra* para o "não"? Se a *mesma* prova não decide pelo "sim" ou pelo "não" de uma asserção, então a asserção necessariamente diz *mais* do que aquilo que a prova prova (a prova não

* *WAii*, p. 59.

† **Weyl**: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, p. 54.

seria, neste caso, uma mera análise da asserção). A prova na matemática seria, então, semelhante a "provas" de proposições empíricas (provas por indícios, por sintomas). O que é característico de uma prova por indícios é precisamente o fato de haver uma prova para o "sim" e outra para o "não". P. ex., conclui-se, da presença de pólvora em uma das mãos, que ele é o assassino, mas a ausência deste indício não justifica – sozinha – a conclusão oposta. Do mesmo modo, a indução seria um indício de que a propriedade $\mathcal{F}$ vale para todos os números, mas a ausência deste indício não justificaria – sozinha – a asserção contrária. A analogia faz água, porém, no momento em que se percebe que, no caso da proposição empírica, é possível ao menos descrever completamente a situação que está sendo "provada", ao passo que, na matemática, nem mesmo é possível descrever a situação de uma propriedade sendo satisfeita por todos os números, a menos que se adote a (falsa) concepção extensional do infinito. No caso de proposições empíricas, nós entendemos o sentido daquilo que está sendo "provado" independentemente da "prova", ao passo que, no caso da proposição matemática geral, entendida intensionalmente, é apenas a indução que lhe daria um sentido. E se entendermos a indução como a *prova* da asserção geral, portanto, como aquilo que lhe fornece, ao mesmo tempo, "sentido" e "verdade", não estaremos utilizando o termo "asserção" no sentido estrito que este termo recebe na lógica. Pois é essencial a uma asserção – o mesmo vale de um *problema*, de uma *questão*, de uma *proposição* – que ela tenha um sentido independentemente de seu valor de verdade. Assim, se a indução prova o enunciado geral, então não há propriamente um "problema" associado a este enunciado. Wittgenstein rejeita, porém, essa conclusão:

> Minha explicação não deve eliminar a existência de problemas matemáticos. Isto é, não é de tal modo que uma proposição matemática só tem sentido quando ela (ou seu contrário) tiver sido provada. (Neste caso, seu contrário nunca teria um sentido (Weyl).)[*]
>
> Voltamos à pergunta: em que sentido podemos *asserir* uma proposição matemática? Não significaria nada dizer que só posso asseri-la se ela for correta. – Não, para poder asseri-la, tenho de fazê-lo em referência a seu sentido, não a sua verdade. Como eu já disse, parece-me claro que posso asserir uma proposição geral tanto ou tão pouco quanto a equação $3 \times 3 = 9$ ou $3 \times 3 = 11$.[†]

A explicação de Wittgenstein a respeito do sentido das proposições algébricas as coloca no mesmo nível de proposições aritméticas elementares. Em ambos os casos, o sentido destas proposições se refere apenas ao método de prova usado para a demonstração de sua correção ou incorreção, e este método não faz referência em nenhum ponto de sua execução a uma infinidade, ainda que potencial. Ora, se era neste infinito que Brouwer buscava justificar a existência de proposições indecidíveis

[*] *PhBm*, XIII–148d.

[†] ibid., XIII–150a.

e, portanto, a não validade do Princípio do Terceiro Excluído, então é possível dizer precisamente o ponto em que ele se equivoca: estas construções sinuosas, usadas como contraexemplos ao princípio, não instituem *questões* matemáticas, tampouco *proposições* matemáticas:

> Brouwer está certo quando ele diz que as propriedades do seu número pendular são incompatíveis com a lei do terceiro excluído. Mas, com isso, nenhuma peculiaridade de proposições acerca de agregados infinitos é revelada. Ao invés disso, isto é baseado no fato que a lógica pressupõe que não pode ser impossível a priori – portanto, logicamente – dizer se uma proposição é verdadeira ou falsa. Pois, se a questão da verdade ou falsidade de uma proposição é indecidível a priori, a consequência é que a proposição perde o seu sentido e, como decorrência de tal fato, as proposições da lógica perdem sua validade para ela.[*]
>
> Não preciso dizer que, onde o princípio do terceiro excluído não vale, nenhuma outra proposição da lógica vale, pois, nesse caso, não estamos trabalhando com proposições da matemática. (Contra Weyl e Brouwer.)[†]

Wittgenstein não contesta, portanto, a validade do terceiro excluído para as proposições matemáticas[‡], tampouco contesta a existência de proposições no cálculo algébrico. Resulta disso que, embora as regras básicas do sistema algébrico não sejam passíveis de *prova*, as regras que delas se seguem são prováveis do mesmo modo que uma equação elementar da aritmética é provável a partir da definição de adição, multiplicação etc. É preciso recusar, portanto, a interpretação de Marion[§] do texto de Wittgenstein segundo a qual as leis lógicas não valeriam para "fórmulas com variáveis livres" (equações algébricas); o correto a dizer é que elas valem onde há proposições, onde há um sentido proposicional, onde há uma questão cuja resposta seja um "sim" ou um "não" (e há certamente isso na álgebra).

Para concluir, vale a pena fazer uma curta exposição (sem a pretensão de esgotar o assunto) de como Wittgenstein trataria as construções que são usualmente expressas com quantificadores na aritmética (chamadas habitualmente de proposições aritméticas gerais). Para esse fim, consideremos a coluna à esquerda do quadro abaixo. Ela representa as quatro construções referentes às quatro combinações possíveis de negação e generalidade de um predicado aritmético $\mathcal{F}n$. A coluna à direita representa estas mesmas construções, porém em sua forma equacional, consequência da ideia de que a verdade ou falsidade de um predicado matemático sempre se refere à validade ou não validade de uma equação (para simplificar a exposição, consideramos que a verdade do predicado $\mathcal{F}n$ é provada pela validade de uma equação).

[*] *PhBm*, XV–173e.

[†] ibid., XIII–151g.

[‡] Embora conteste, como vimos no Capítulo 3, certa interpretação de sua aplicação em provas indiretas.

[§] Mathieu **Marion**: Jogando o bebê junto com a água do banho: Wittgenstein, Goodstein e o cálculo equacional, em: *DoisPontos*, 6.1 (2012), p. 226.

	Forma predicativa	Forma equacional
1.	$(n)\mathcal{F}n$	$(n)fn = gn$
2.	$(n)\neg\mathcal{F}n$	$(n)fn \neq gn$
3.	$(\exists n)\neg\mathcal{F}n$	$(\exists n)fn \neq gn$
4.	$(\exists n)\mathcal{F}n$	$(\exists n)fn = gn$

Vejamos, então, cada um destes casos.

Para o primeiro caso, há duas possibilidades: *i)* ou a equação é uma *estipulação* (como, p. ex., $a + 1 = 1 + a$), e sua aplicabilidade à aritmética é estabelecida por uma "prova" indutiva sobre uma equação aritmética; *ii)* ou ela é uma *proposição algébrica* (como, p. ex., $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$), e o que ela assere é que a aplicação das regras do cálculo algébrico ao lado esquerdo da equação fornece o lado direito da equação. Uma vez provada a aplicabilidade das estipulações algébricas à aritmética, estas proposições algébricas derivadas são também aplicáveis sem a necessidade de induções que correspondam a elas e, para este caso, os caracteres são entendidos como *constantes gerais*.

O segundo caso admite, de modo similar, duas possibilidades: *i)* ou a inequação é uma *estipulação* (como, p. ex., $a \neq a + 1$), podendo corresponder, na aritmética, a uma indução; *ii)* ou é uma *proposição algébrica* (como, p. ex., $a^2 + a + 1 \neq 0$), e o que ela assere é que a aplicação das regras do cálculo algébrico à equação correspondente conduz a um ponto de parada, i.e., a um ponto em que não é mais possível prosseguir com o cálculo (p. ex., $a^2 = -1$). Se fosse fornecida a "prova" de aplicabilidade das estipulações algébricas à aritmética, esta inequação mostraria a impossibilidade de se provar, na aritmética, uma fórmula correspondente à equação (no nosso exemplo, $(\ )^2 + (\ ) + 1 = 0$), com um numeral qualquer ocupando a posição vazia da fórmula.

No terceiro e quarto casos, os caracteres são entendidos como *incógnitas*. No terceiro caso, a inequação é uma *proposição algébrica* que é verdadeira nos seguintes casos: *i)* a equação correspondente tem raízes, mas não se chega, como no primeiro caso, a uma identidade entre o lado esquerdo e o lado direito da equação, *ii)* a equação correspondente conduz a um ponto de parada do cálculo. No quarto caso, a equação é uma *proposição algébrica*, que diz que um dos seguintes casos ocorre: *i)* ou a equação tem raízes; *ii)* ou se chega a uma identidade entre o lado esquerdo e o lado direito da equação.

Nos casos em que é preciso encontrar a(s) raiz(es) da equação, a proposição algébrica tem apenas sentido caso haja um *método* para encontrá-la(s) (e percorrer a série numérica testando a equação para cada número natural não é um método). O cálculo algébrico e suas questões permanecem, assim, no domínio daquilo que é decidível, o que coincide, para Wittgenstein, com o domínio daquilo que é, na matemática, *pensável*.

Sequências de escolha

A teoria intuicionista dos números reais procura colocar ênfase em duas características essenciais ao *continuum*, a saber, *i)* a de não ser composto de partes discretas e *ii)* a de não permitir uma enumeração exaustiva de suas partes*. Estas características, associadas à tese de que o *continuum* é composto de pontos, obriga Brouwer a reformular a própria noção de "ponto". Com efeito, se um ponto é entendido como uma entidade matemática discreta e completamente determinada, o *continuum* não pode ser uma coleção de pontos. Para fazer valer esta tese, Brouwer concebe a noção de "ponto" da seguinte forma:

> Para nós, um ponto e, portanto, também os pontos de um conjunto são sempre algo em devir (*etwas Werdendes*) e frequentemente algo permanentemente indeterminado, em oposição à concepção clássica de acordo com a qual um ponto é tanto determinado quanto acabado (*fertig*).†

(Brouwer chama de "indeterminado" um ponto cujo desenvolvimento não é determinado por uma lei. Estes pontos são necessários para representar o *continuum*, segundo Brouwer, pois a totalidade de leis é denumerável, enquanto a totalidade de pontos do *continuum* é não denumerável).

Wittgenstein discute, por vezes, a teoria intuicionista dos números reais através do exemplo de um número real cuja expansão binária seria fornecida por sucessivos atos de se lançar uma moeda, além de uma convenção sobre qual lado da moeda corresponderia ao dígito 0. E recusa veementemente a ideia de que este processo determinaria um *número*‡. O processo, alega Wittgenstein "deve prever infinitamente, do contrário ele não determina um número. Não pode haver um 'eu ainda não sei', pois não há nenhum *ainda* no infinito"§. Vimos, no Capítulo 4, que a concepção de Wittgenstein dos números reais os caracteriza como *leis* que engendram aproximações racionais e que são comparáveis com os racionais. A exigência da comparabilidade é aquilo que há de correto na concepção dos números reais como cortes de Dedekind: um número real deve dividir os racionais em duas classes; é a condição *sine qua non* para se chamar uma construção aritmética de *número*. E as sequências de escolha não satisfazem esta exigência, pois não é possível determinar, de antemão, quantas escolhas devem ser feitas para se efetuar a comparação (e, portanto, a questão "essa sequência de escolha é maior que o número racional q?" não tem sentido).

*Cf. Mark van **Atten**: *Brouwer meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences*, Paris: Springer Verlag, 2007, p. 86.

†L. E. J. **Brouwer**: *Intuitionismus*, ed. por Dirk van **Dalen**, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1992, p. 71.

‡Cf. *PhBm*, XVI–179i.

§ibid., XVIII–191g.

Embora nada deponha contra a reformulação de Brouwer da noção de “ponto”, um número real não tem nada que ver com essa nova noção. Pelo contrário, o número real corresponde mais a um ponto no sentido clássico que a um ponto brouweriano. Com efeito, dado um ponto em uma reta, é possível determinar se outro ponto se encontra a sua esquerda e a sua direita; também é possível fornecer um segmento que é menor que o segmento composto de dois pontos. Com as sequências de escolha de Brouwer, tudo se passa como se elas fossem números a respeito dos quais eu ainda não sei (e posso nunca vir a saber) se eles são maiores, menores ou iguais a um número racional dado[*]. O que se deve dizer, todavia, é que essas construções não são números, não podendo jamais introduzir questões indecidíveis na matemática.

Além disso, a noção de “escolha” parece introduzir “propriedades acidentais” na matemática, sendo o número concebido como um “substrato” com propriedades externas determinadas pelas escolhas do matemático, no tempo, a respeito de seu desenvolvimento (algo similar à improvisação musical sobre uma melodia). Isso, porém, é completamente alheio à concepção wittgensteiniana da matemática como sintaxe, pois todas as regras sintáticas devem estar, em certo sentido, determinadas no momento da *constituição* da sintaxe, e toda escolha posterior de novas regras que se acrescentariam às antigas instituiria uma nova sintaxe. No caso das sequências de escolha, o que ocorreria na melhor das hipóteses é que cada escolha determinaria um novo número, e não o número antigo com uma propriedade acidental nova. Uma construção matemática não pode adquirir, no tempo e de modo contingente, uma propriedade que ela antes não possuía, pois uma construção matemática é uma *forma*, e as regras que para ela valem a *determinam completamente*, de modo que a adição de uma regra altera a forma, altera o conceito formal:

> O edifício de regras deve ser *completo*, se quisermos, afinal, trabalhar com um conceito. – *Não se pode fazer nenhuma descoberta na sintaxe.* – Pois somente o grupo de regras *determina* o sentido de nossos signos, e toda alteração (por exemplo, complementação) das regras significa uma alteração do sentido.
> Assim como não podemos alterar as notas características de um conceito sem alterar *o próprio conceito.* (Frege)[†]

Por fim, como vimos no Capítulo 4, Wittgenstein questiona a ideia de que, ao nos restringirmos aos números reais cujas aproximações racionais são dadas por leis, isso levaria a um *continuum* incompleto, reduzido. Não se pode dizer, observa Wittgenstein, que “as frações decimais desenvolvidas de acordo com uma lei ainda precisam ser

[*] Cf *WWK*, p. 73:“Gibt es nun Gebilde, die sich mit den rationalen Zahlen nicht mehr vergleichen lassen, so haben wir kein Recht, sie zu den rationalen Zahlen einzuordnen. Sie liegen dann eben gar nicht auf den Zahlenlinien. (Bei Brouwer sieht es so aus, daß das wohl reelle Zahlen sind, von welchen wir bloß nicht *wissen*, ob sie größer oder kleiner oder gleich einer andern rationalen Zahl sind”.

[†] *PhBm*, XIII–154g.

completadas por um conjunto infinito de frações decimais infinitas irregulares que seriam 'varridas sob o tapete' se nos *restringimos àquelas geradas por uma lei.* Onde há tal fração infinita irregularmente gerada? E como perceberíamos que ela estava faltando? Onde está a lacuna que teria de ser preenchida?"[*]. Não há lacuna, pois um ponto pode apenas ser dado matematicamente de dois modos: *i*) ou por uma lei aritmética; *ii)* ou por uma construção geométrica e, nesse caso, haveria – por meio do cálculo geométrico com coordenadas numéricas – uma transcrição aritmética dessa construção, a qual nos forneceria uma lei aritmética correspondente a este ponto[†]. Assim, é ilusório dizer que a totalidade de pontos do *continuum* não corresponde à totalidade de leis aritméticas pelo fato de esta última não ser "*não denumerável*"; o que se deve dizer é que não há, aqui, nenhuma *totalidade* que seria formada por pontos do *continuum*, por números reais, que o *continuum* não é, de modo algum, uma coleção de pontos.

WITTGENSTEIN E O FORMALISMO

Na única menção que as *PhBm* fazem aos "formalistas", estes são associados à concepção que procura ver, na matemática, um jogo com signos[‡]. Quando se fala, porém, de uma escola formalista de fundamentação da matemática à época da *Grundlagenkrise*, é o nome de Hilbert que aparece não apenas como seu fundador, mas como aquele que mais procurou defender seus métodos e princípios, colocando-os como única solução possível para a crise que se instaurou na matemática de seu tempo. Hilbert, todavia, nunca associou sua concepção da matemática a um mero "jogo com signos"[§], tampouco a chamou de "formalista". A associação deste termo a Hilbert é, originalmente, da responsabilidade de Brouwer que, ao opor o programa de Hilbert ao seu próprio programa intuicionista, intitula-o "formalismo"[¶].

Wittgenstein, um leitor assíduo de Frege, vinculava a concepção formalista – que compara a matemática a um jogo – às teorias de Thomae e Heine, teorias cujo escrutínio e crítica ocuparam boa parte do segundo volume (destinado a um exame dos números irracionais) das *Leis básicas da aritmética* de Frege. As concepções de Thomae e Heine – admite Frege – têm lá suas diferenças: enquanto Heine afirmava que os

[*] *PhBm*, XVII–181e.

[†] Cf. ibid., XVI–180d.

[‡] Cf. ibid., XI–121b.

[§] Cf. Michael **Detlefsen**: Hilbert's Formalism, em: *Revue Internationale de Philosophie*, 47.186 (1993), p. 299: "(...)it is this deeply motivated radical abstraction from meaning which, in all probability, is responsible for one of the worst misconceptions of Hilbert's formalism; namely, that according to which it says that mathematics is a 'game' played with symbols. This at one time was, and may, I fear, still be, a common misconception of Hilbert's position. It even found its way into the thinking of so astute and well-positioned an interpreter as Weyl".

[¶] Hourya **Sinaceur**: Différents aspects du formalisme, em: Frédéric **Nev**/Denis **Vernant** (eds.): *Le formalisme enquestion: le tournant desannées 1930*, Paris: Vrin, 1998, p. 131.

números eram os próprios signos tangíveis com os quais a aritmética trabalha, Thomae considerava os signos como meros "sinais externos" para o comportamento das "peças", comportamento regido (assim como no jogo de xadrez) por regras estipuladas. Frege, porém, incluía ambas as concepções em uma mesma formulação: "a aritmética formal trata de signos". O próprio modo de expressão de Thomae é também responsável por este nivelamento feito por Frege de ambas as teorias: Thomae declara que o matemático atribui às figuras aritméticas certas *propriedades* que determinam seu comportamento no jogo[*]; além disso, em sua teoria dos números irracionais, concebidos como sequências de racionais, Thomae atribui a propriedade de ser infinita à sequência, e não à regra de construção do próximo termo[†]. Estes deslizes do modo de expressão de Thomae permitem a Frege tomar ambas as concepções como praticamente idênticas e também contribuem para a apreciação negativa da teoria dos números irracionais dos formalistas. A aritmética formal – seguindo o raciocínio de Frege – trata de signos, mas é preciso de infinitos signos para se expressar um número real. Ora, os signos se esgotam em algum momento, e o que resta é um amontoado finito de figuras que não dá conta de expressar *um* número real sequer. O caráter tangível, efetivo, dos sinais, apresentado inicialmente como virtude da concepção formalista (pois já não se duvidaria mais da *existência* dos objetos da matemática), era – paradoxalmente – aquilo que tornava a existência dos números reais impossível.

A diferença da recepção dos argumentos de Frege contra os formalistas marca profundamente a diferença das posições de Wittgenstein e Hilbert. Wittgenstein, ao contrário de Frege, distingue claramente a concepção da aritmética como um jogo da concepção que coloca, como objeto da aritmética, os próprios signos. A primeira contém aquilo que há de correto no formalismo, a saber, a ideia de que a atividade calculatória na matemática é inteiramente análoga a um jogo, como o xadrez, sem que isso implique uma consideração *sobre* as figuras do jogo, ou ainda uma *descrição* destas figuras[‡]. Embora seja possível entender, em certo sentido, as equações da matemática, que são regras sobre a manipulação de signos, como proposições que tratam de signos[§], elas não *precisam* ser, alerta Wittgenstein, entendidas deste modo, afinal, "elas são ferramentas

[*]**Frege**: Grundgesetze der Arithmetik, V II, p. 97 (§88).

[†]Ibid., V II, p. 220 (§125).

[‡]Cf. *WWK*, p. 105: "Da ist also das Richtige am Formalismus. *Frege* hat sich mit Recht gegen die Auffassung gewendet, daß die Zahlen der Arithmetik die Zeichen sind. (...) Nur hat er nicht das andere gesehen, was am Formalismus berechtigt ist, daß die Symbole der Mathematik nicht die Zeichen sind, aber doch keine Bedeutung haben. Für Frege stand die Alternative so: Entweder wir haben es mit den Tintenstrichen auf dem Papier zu tun, oder diese Tintenstriche sind Zeichen *von etwas*, und das, was sie vertreten, ist ihre Bedeutung. Daß diese Alternative nicht richtig ist, zeigt gerade das Schachspiel: Hier haben wir es nicht mit den Holzfiguren zu tun, und dennoch vertreten die Figuren nichts, sie haben in Freges Sinn keine Bedeutung".

[§]Cf. *WAi*, p. 78:"Es ist klar, wenn ich $2 + 2 = 4$ auch so schreiben darf: "'2+2' kann durch '4' ersetzt werden" dann habe ich $2 + 2 = 4$ dadurch mit einem Satz verglichen und darum gibt es nun Analoga zu sämtlichen Anwendungen der Logik auf diesen Satz".

da linguagem, ferramentas de outro tipo que as proposições da linguagem”[*]. Além disso, se Frege tem razão em atacar as teorias de Thomae e Heine dos números irracionais, é apenas porque estes autores não foram capazes de implementar por completo a concepção intensional do infinito, a única possível para Wittgenstein. Como se procurou mostrar no Capítulo 4 deste trabalho, Wittgenstein atribui – diferentemente de Thomae – a propriedade da infinitude à lei, à regra, e não à sequência de aproximações produzidas segundo a regra. Esta sequência de aproximações é sempre finita, mas é apenas na regra de produção da sequência que reside a infinitude, é apenas nela que reside a ausência de limites para a produção de um novo termo da sequência.

E quanto a Hilbert? Ao contrário de Wittgenstein, o matemático alemão se move na direção da concepção de Heine, ao compreender as próprias figuras palpáveis como o objeto da teoria dos números[†]: “os objetos da teoria dos números são para mim – em oposição direta a Frege e Dedekind – os próprios signos”[‡]. Objetos dados imediatamente na intuição sensível (*e.g.*, |, ||, ||| etc.) e anteriores a todo e qualquer raciocínio formam para Hilbert um domínio sobre o qual é possível formular, com o auxílio de definições e outros sinais ($=$, $>$, $<$ etc.), asserções verdadeiras e falsas. Tal compreensão “conteudística” (*inhaltliche*) da aritmética, aliada a uma crítica à suposição do infinito atual, conduz Hilbert a aceitar, sob certo aspecto, as críticas de Frege à teoria formalista dos irracionais. Esta aritmética cujos objetos são dados na experiência imediata encontra, então, seus limites:

> Certamente podemos fazer progressos consideráveis na teoria dos números usando este tipo de tratamento intuitivo, o qual foi caracterizado e aplicado. Mas é certo que a totalidade da matemática não se deixa conceber deste modo. No momento em que passamos para a aritmética superior e para a álgebra, p. ex., quando queremos fazer asserções sobre infinitos números ou funções, o procedimento intuitivo entra em colapso. Pois não podemos escrever ou introduzir abreviações para infinitos números; se não considerarmos estas dificuldades, cairemos nos mesmos absurdos que FREGE corretamente repreende em suas notas críticas sobre as definições convencionais dos números irracionais.[§]

A restrição a este tipo de consideração intuitiva e concreta, além de excluir a álgebra e a teoria dos números irracionais, também ameaça a validade de leis lógicas básicas, em particular o famigerado Princípio do Terceiro Excluído (*tertium non datur*). Como veremos com mais detalhes na Seção seguinte, isso ocorre, segundo Hilbert, pois

[*] *PhBm*, XI–121c.

[†] Para considerações pertinentes sobre este ponto, Cf. Felix **Mühlhölzer**: Ein Netz von Normen: Wittgenstein und die Mathematik, em: Matthias **Kroß**/Jens **Kertscher** (eds.): *Wittgenstein und der Formalismus*, Berlin: Parerga, 2008, p. 138. Cf. tb. **Frascolla**: Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics, p. 51.

[‡] **Hilbert**: Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, p. 163.

[§] ibid., pp. 164-5.

a negação de uma proposição deste domínio restrito cai fora do domínio, i.e., o domínio das asserções "intuitivas" e "conteudísticas" – também chamada por Hilbert de asserções "finitárias" – não é fechado sob a operação de negação.

Como escapar, então, da fatalidade à qual sucumbia a teoria formalista dos números irracionais? Devemos aceitar, como fazem Cantor e Frege, o infinito atual, sob a ameaça de perdermos não apenas os números reais, mas também aqueles princípios lógicos usados desde os primórdios do pensamento? De forma alguma, alega Hilbert. Basta que *fundamentemos*, no plano *finito*, os raciocínios que fazem apelo ao infinito*. A estratégia de Hilbert repousa em um método usado por diversos matemáticos e conhecido como o "método dos ideais", ou o "método genético". Este método consiste em introduzir elementos ideais em certo domínio de modo a simplificar as leis que valem para este domínio, ou ainda tornar válidas certas leis que anteriormente eram inválidas para o domínio restrito. Um exemplo da aplicação deste método é a introdução, na geometria projetiva, de "pontos ideais", considerados como "pontos de contato" entre duas retas paralelas. Outro exemplo é a introdução de números complexos ou algébricos para fazer valer a lei segundo a qual um polinômio com coeficientes inteiros sempre tem raízes. Na teoria de Hilbert, o análogo é a introdução de "asserções ideais", ao lado das asserções finitárias, com o objetivo de fazer valer as leis lógicas usuais, bem como dotar o domínio das asserções – finitárias e ideais – da propriedade de fechamento sob a operação de negação.

O programa formalista de Hilbert repousa, portanto, na distinção entre uma matemática conteudística, finitária e uma matemática formal, obtida por meio da introdução de elementos ideais. A introdução destes elementos é feita implicitamente com o auxílio de axiomas e de regras de derivação de asserções a partir destes axiomas. A única condição que a introdução destes elementos deve satisfazer é a seguinte: ela não deve inserir uma contradição no seio do sistema. Uma vez feita a demonstração da não contraditoriedade do sistema axiomático, estaria provado que é possível trabalhar com o infinito na matemática (ou com os elementos ideais introduzidos) de um modo inteiramente preciso e incontestável e, além disso, sem lhe conferir realidade ontológica alguma†. Com isso, inferências com séries infinitas – p. ex., a série dos números

*Cf. David **Hilbert**: Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie, em: *Mathematische Annalen*, 104 (1931), p. 488: "Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhander, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig. Die bedingungslose Anwendung des Tertium non datur und der Negation können wir aber nicht entbehren, da sonst der lückenlose und einheitliche Aufbau unserer Wissenchaft unmöglich wäre. Das Operieren mit dem Unendlichen muß also durch das Endliche gesichert werden, und das geschieht eben durch meine Beweistheorie.".

†Cf. Pierre **Cassou-Noguès**: *Hilbert*, Collection Figures du Savoir, Paris: Les Belles Lettres, 2001, p. 14: "Le programme de Hilbert est de justifier les raisonnements qui supposent um infini actuel au moyen d'autres raisonnements appartenant à la théorie de la démonstration et n'utilisant qu'un infinit potentiel. Cela permettrait de conduire des raisonnements transfinis, sans reconnaître l'existence en acte de l'infini. Les raisonnements transfinis seraient justifiés, non par l'existence en acte de l'infini, mais par des raisonnements seconds, qui possèdent une évidence immédiate. L'infini est donc considéré

naturais – poderiam ser realizadas *como se* elas formassem, assim como listas finitas, uma totalidade completa e acabada*. Não haveria mais dúvida possível quanto à validade do Princípio do Terceiro Excluído. Não seria preciso cometer a heresia de privar, como faz Brouwer, os matemáticos de uma de suas ferramentas mais antigas e poderosas.

A prova, portanto, de consistência de um sistema formal (axiomático) é, segundo Hilbert, aquilo que é necessário e suficiente para justificar o uso do infinito e, consequentemente, do *tertium non datur* na matemática. Tal prova deveria demonstrar que o sistema axiomático que fundamenta as asserções tanto finitárias quanto ideais não produz a prova de uma proposição *falsa* do domínio restrito às asserções finitárias (i.e., que a introdução das asserções ideais acarreta uma *extensão conservativa* da aritmética finitária). Caso a introdução dos elementos ideais torne possível provar uma proposição falsa do domínio finitário, isso levará à prova de toda e qualquer proposição aritmética falsa; em consequência disso, pode-se eleger apenas *uma* proposição falsa como representante da totalidade de proposições falsas: se qualquer outra proposição falsa for provada, há um procedimento para produzir a prova *desta* proposição; inversamente, se *esta* proposição falsa não puder ser provada, nenhuma outra poderá sê-lo.

Estando a meta do programa definida com clareza cristalina, resta, então, a Hilbert pensar nos meios de que se poderia dispor para alcançá-la. Hilbert enfrenta o problema da consistência do seguinte modo: em um sistema formal, uma prova é uma sequência finita e ordenada de fórmulas que produz, ao fim do procedimento, uma figura, um objeto concreto. A prova da consistência de um sistema axiomático deve, portanto, demonstrar que nenhuma figura de prova que o sistema produz segundo suas regras contém, em sua fórmula final, a figura “$0 \neq 0$”. Esta prova, porém, deve conter apenas raciocínios que possam ser assegurados *no domínio finitário*, caso contrário, restaria ainda a dúvida sobre a consistência do sistema que produziu tal prova. O domínio deste cálculo finitário são os sinais que compõem as figuras de prova do sistema formal de que se quer provar a consistência. Hilbert chama este cálculo de *metamatemática*. A *metamatemática*, como toda matemática *finitária*, raciocina e produz asserções verdadeiras sobre signos dados imediatamente na intuição sensível. Estes signos, porém, não são apenas, como na aritmética finitária, sequências de traços, mas são os elementos usados em provas de um sistema formal, do sistema que é o *objeto* da metamatemática.

O projeto de Hilbert se erige, pois, sobre as noções de “consistência” e de “metamatemática”. Na Seção seguinte, argumentaremos, com base na obra de Wittgenstein,

comme une fiction, ou un phénomène bien fondé, que l’on peut faire intervener dans un raisonnement, sans lui accorder de réalité ontologique”.

*Cf. Paul **Bernays**: Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen, em: *Mathematische Annalen*, 90 (1923), p. 163:“Daß die Vorstellung der Zahlenreihe als eines abgeschlossenen Inbegriffs beim mathematischen Schließen ohne Gefahr eines Widerspruchs angewandt werden kann, das wird gerade erst durch die Betrachtungen der Hilbertschen Beweistheorie gezeigt”.

que o caminho que conduziu Hilbert à necessidade de uma prova de consistência é ilusório e que esta ilusão é produzida por uma confusão sobre a negação e sobre as relações entre aritmética e álgebra. Na Seção subsequente, analisaremos as reservas feitas por Wittgenstein à noção de "metamatemática".

Consistência

Há inúmeras perspectivas sob as quais se pode apresentar as críticas de Wittgenstein em relação ao suposto problema da consistência da aritmética ou de um sistema formal qualquer. Uma delas consiste em colocar em primeiro plano as notas do autor sobre a legitimidade da questão "Este sistema é consistente?"*. Outro viés, vinculado ao anterior, consiste em explorar a pergunta se aquilo que é usualmente chamado de "prova de consistência" seria de fato a *prova* de certa asserção matemática ou se é, na verdade (como indica Wittgenstein em uma conversa com Waismann†), uma indução que *mostra* algo, mas não *prova* a verdade de uma asserção. Outra possibilidade é o exame da relação entre o problema da consistência e o problema da suposta existência de provas alternativas de um mesmo enunciado matemático, algo que – como vimos no Capítulo 3 – não ocorre na matemática segundo a concepção de Wittgenstein‡.

A maneira pela qual procuraremos abordar, nesta Seção, o problema da consistência sob a luz do texto de Wittgenstein é, porém, distinta das elencadas no parágrafo anterior. Procuraremos ir à gênese do problema e investigar, na aritmética finitária de Hilbert, o ponto em que ele considera o tratamento "intuitivo" insuficiente e que o compele a adotar outra abordagem, conduzindo-o finalmente ao problema da consistência. Mostraremos, em seguida, que este "ponto limite" é ilusório, e não nos obriga a introduzir elementos externos ao sistema para "completá-lo", tampouco para fazer valer as leis lógicas sobre suas asserções.

Já foi notado por comentadores§ algumas similaridades – bem como diferenças nítidas – entre a aritmética finitária de Hilbert e a "aritmética de traços" que Wittgenstein utiliza, principalmente em passagens de cunho antilogicista. Um ponto comum importante a ressaltar é que, em ambos os casos, os autores alegam que não há preo-

*O que é peculiar nesta questão é que ela fornece, supostamente, um critério para se aceitar uma resposta para a questão, embora não forneça nem o caminho para a resposta nem a certeza se tal resposta pode ser encontrada, o que vai contra a compreensão do que é, para Wittgenstein, uma questão genuína.

†Cf. *WWK*, pp. 134-5.

‡Em linhas gerais, este exame exploraria o seguinte raciocínio: se são *duas* provas completamente independentes, então são *dois* enunciados. Ora, uma contradição $p \cdot \neg p$ só pode surgir no cálculo quando há uma prova para p e outra prova completamente independente para $\neg p$. Mas, neste caso, uma asserção já não é mais a negação da outra e, portanto, não há propriamente uma *contradição.*

§Cf. **Frascolla**: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, pp. 50-1 e Mathieu **Marion**: Wittgenstein on Surveyability of Proofs, em: Oskari **Kuusela**/Marie **McGinn** (eds.): *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, Oxford: Oxford University Press, 2011, p. 143.

cupações neste domínio com "contradições" e, portanto, com a consistência do sistema. Para Hilbert, "nesta teoria dos números assim conduzida, não há axiomas e, portanto, contradições não são de modo algum possíveis"[*]. Talvez nessa formulação já seja possível encontrar desacordo de Wittgenstein com Hilbert, pois os axiomas não introduzem, segundo Wittgenstein, nenhuma dificuldade adicional que as definições, já presentes na aritmética finitária de Hilbert, não tivessem introduzido. Em relação à consistência dos axiomas, Wittgenstein observa:

> Parece-me que a ideia da consistência dos axiomas da matemática, que tem tanto assombrado a cabeça dos matemáticos, baseia-se em um mal-entendido.
>
> Isso está ligado ao fato de que os axiomas matemáticos não são tomados pelo que eles são, a saber, por proposições da sintaxe.[†]

Salvo engano, Wittgenstein está se referindo, nesta passagem, à ideia de que os axiomas são utilizados, assim como as definições, simplesmente para dotar uma notação de certa multiplicidade matemática, e se há uma contradição nas regras, na sintaxe, as regras deixam de funcionar como regras, e a sintaxe deixa de ser sintaxe (pois uma conexão de sinais seria tanto permitida quanto proibida). Portanto, na medida em que o sistema *regra*, ele é consistente. Para além dessa divergência, porém, sobre o estatuto dos axiomas, ambos veem nesta "aritmética de pauzinhos" uma aritmética livre da ameaça de contradições. No excerto citado anteriormente, Hilbert alega que o procedimento intuitivo colapsa "quando queremos fazer asserções sobre infinitos números ou funções". Mas se é nesse ponto que o procedimento colapsa, então poder-se-ia dizer que não há colapso algum, pois não se pode querer algo impossível. Todavia, isso talvez não passe de um comentário infortunado, e é importante averiguar, na abordagem de Hilbert da aritmética "conteudística", qual é o ponto em que aparecem as dificuldades, qual é o ponto em que o Princípio do Terceiro Excluído deixa de valer e que nos obriga a introduzir asserções ideais para "simplificar a lógica".

Segundo o vocabulário de Hilbert, são considerados *não problemáticos* os enunciados da aritmética finitária que obedecem as leis da lógica clássica, e *problemáticos* os que não as obedecem[‡]. No artigo *Sobre o Infinito*, Hilbert fornece dois exemplos de enunciados problemáticos. O primeiro exemplo é a asserção "Há um número primo entre $\mathfrak{p}+1$ e $\mathfrak{p}!+1$"[§] que pode ser expresso como "$(\exists n)\cdot n>\mathfrak{p}+1\cdot n<\mathfrak{p}!+1\cdot n$ é primo". Ora, segundo as leis lógicas costumeiras, esta proposição implica a proposição "$(\exists n)\cdot n>\mathfrak{p}+1\cdot n$ é primo". Esta proposição, porém, não é obviamente uma asserção

[*] **Hilbert**: Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, p. 164.

[†] *PhBm*, XIII−160a-b.

[‡] **Hilbert**: Über das Unendliche, p. 176.

[§] Hilbert usa letras góticas para expressar generalizações finitárias, provadas por meio de um procedimento recursivo "contentual", procedimento que não se confunde com o princípio de indução completa, que não é parte dos raciocínios permitidos na aritmética finitária.

finitária, pois não indica um limite finito para o domínio de busca pela existência de um número primo. O que ocorre então, neste caso, é que não podemos aplicar uma regra lógica básica sem sairmos do domínio finitário. O segundo exemplo de Hilbert é a proposição finitária $\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$, a qual não possui uma negação no domínio finitário, pois não restringe o domínio da busca por um contraexemplo.

Qual é a posição de Wittgenstein a respeito destes dois exemplos? No primeiro caso, Wittgenstein concorda que a proposição “Há um número primo entre $\mathfrak{p}+1$ e $\mathfrak{p}!+1$” não implica a pseudoproposição “Há um número primo maior que $\mathfrak{p}+1$”. De modo geral, a ideia de que, na matemática, uma asserção existencial possa ser deduzida de uma equação particular é recusada: “(...) se me for dada a equação $3^2 + 4^2 = 5^2$, *não* me será permitido dizer: ‘$(\exists x, y, z, n) \cdot x^n + y^n = z^n$’, pois entendido extensionalmente isto não significa nada, e entendido intensionalmente ela não é com isso provada. Não, nesse caso me é permitido exprimir somente a primeira equação”[*]. Isso, porém, não significa que as leis lógicas não valem para esta proposição, mas apenas que o modo de expressão usual, com o auxílio de quantificadores, é enganoso, pois pode nos levar a pensar que a busca por um número em um intervalo $[a, b]$ que satisfaça certo predicado aritmético consiste no produto lógico de duas buscas nos intervalos $[a, +\infty)$ e $[1, b]$. Assim, o que é preciso fazer é simplesmente abandonar o modo usual de expressão em benefício de uma notação mais perspícua, de uma notação que não introduza estas confusões no modo de expressão matemático. No segundo caso, Wittgenstein também concorda que a construção $\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$ não pode ser negada. Contudo, isso de modo algum contraria as leis lógicas: ela não pode ser negada simplesmente porque, como vimos anteriormente, ela não é uma proposição, mas uma estipulação, uma regra básica do sistema algébrico.

Nesse sentido, não são os exemplos de Hilbert que são problemáticos, e sim a sua compreensão da generalidade na aritmética e, consequentemente, das relações entre aritmética e álgebra. O sistema aritmético – bem como o algébrico – é completo e fechado sob suas operações, e as proposições deste sistema não violam lei lógica alguma. O caminho que conduziu Hilbert ao problema da consistência dos axiomas é, por conseguinte, ilusório, e deve ser dissolvido pela mera análise dos conceitos matemáticos em questão, não podendo ser resolvido – como pretendia Hilbert – por um metacálculo. Wittgenstein, por sua vez, estava certo ao alçar sua compreensão dos “enunciados gerais” na aritmética ao *status* de uma “ideia fundamental”: ela explica como Hilbert e Brouwer se enganaram pelas mesmas razões no que tange à validade das leis lógicas às proposições aritméticas.

[*] *PhBm*, XIII–150g.

Metamatemática

A metamatemática de Hilbert, diz Wittgenstein para membros do círculo de Viena, "deve se revelar como sendo matemática disfarçada"*. Dias antes, o filósofo já havia encerrado uma conversa dizendo que "o que Hilbert faz é matemática, e não metamatemática. É novamente um cálculo, tão bom quanto qualquer outro"†. Talvez esta formulação não fosse tão inaceitável para Hilbert, afinal, metamatemática é matemática e, ainda por cima, das melhores, pois finitária, livre de contradições. O prefixo "meta" serve apenas para deixar claro que, neste cálculo conteudístico, os objetos do cálculo não são mais, como na matemática usual, grandezas numéricas ou figuras geométricas, mas os sinais do corpo de prova de um sistema formal.

Ora, é precisamente a concepção da matemática como um discurso sobre os signos que frequentemente incomoda Wittgenstein e o conduz a tecer comentários negativos sobre a possibilidade e a função de uma hierarquia de disciplinas que se constituiriam umas sobre as outras, sendo o nível superior responsável por investigar o modo de expressão do nível inferior. O raciocínio de Wittgenstein é fundamentalmente o seguinte: se é verdade que as proposições matemáticas constituem um discurso – verdadeiro ou falso – sobre um domínio de sinais, e se é verdade que os teoremas matemáticos provam possibilidades ou impossibilidades acerca de configurações destes sinais (o que constitui o objetivo da metamatemática de Hilbert), o que ocorreria é a *descrição proposicional de uma possibilidade ou impossibilidade*, o que é absolutamente inaceitável. Não é à toa que, nas *PhBm*, as reservas contra a ideia de uma "metamatemática" estão envoltas por comentários a respeito de "provas de relevância" e "provas de provabilidade", i.e., de provas que provam a decidibilidade de uma questão e, portanto, dão a ela um sentido. Wittgenstein se opõe veementemente a chamar este tipo de construção de "prova", pois aquilo que ela estabelece não é a verdade de uma proposição matemática. Com efeito, caso ela provasse a verdade de uma proposição matemática, o *sentido* de uma proposição dependeria da *verdade* de outra proposição, o que está fora de questão (mesmo no domínio das proposições matemáticas). Mas, mesmo que se chame porventura esta construção de "prova", o que Wittgenstein faz notar, em primeiro lugar, é que estas "provas" devem repousar sob princípios inteiramente distintos dos princípios que regulam a prova da verdade ou da falsidade da questão ela própria, caso contrário teríamos um regresso ao infinito:

> A ideia de uma hierarquia não significa que a mera formulação do problema teria já de ser precedida por uma prova, a saber, a prova de que a pergunta tem sentido? Mas, então, eu digo que a prova de sentido tem de ser de natureza radicalmente distinta de uma prova da verdade de uma proposição; caso contrário, essa prova pressuporia uma

* *WWK*, p. 136.
†Ibid., p. 136.

> outra e chegaríamos a um regresso ao infinito.[*]
>
> O que é uma prova de provabilidade? Ela é diferente da prova da proposição.
> E a prova de provabilidade é talvez a prova de que a proposição tem sentido? Mas, então, esta prova deveria repousar em princípios *inteiramente distintos* daqueles da prova da proposição. Não pode haver uma hierarquia de provas!
>
> Por outro lado, não pode haver em nenhum sentido essencial uma metamatemática. Tudo deve ser de um tipo (ou, consequentemente, de nenhum tipo).[†]

Por outro lado, na concepção da matemática conteudística de Hilbert, tudo se passa como se os princípios fossem os mesmos a cada nível da hierarquia, sendo distinto apenas o *objeto* da consideração. A aritmética finitária dispõe de uma coleção de objetos e investiga, segundo princípios finitistas, suas propriedades combinatórias e operatórias. A metamatemática, por sua vez, dispõe de *outra* coleção de objetos e investiga, segundo os mesmos princípios, suas propriedades combinatórias e operatórias. E não haveria nenhuma razão de parar por aqui. À metamatemática, por sua vez, poderiam ser introduzidos elementos ideais para "simplificar" certas leis que possuem exceções quando aplicadas apenas a figuras de prova, e o acréscimo destes elementos ideais formaria um sistema axiomático cujas possibilidades e impossibilidades combinatórias e operatórias poderiam ser estudadas por uma metametamatemática e assim por diante.

Wittgenstein, contrariamente a Hilbert, procura tratar as proposições matemáticas como "regras de signos", e não como proposições que "tratam" de signos. Estas regras, é certo, têm a ver com possibilidades: a equação $2 + 2 = 4$ pode querer dizer "sempre que tenho 4 objetos, há a possibilidade de combiná-los dois a dois". Mas a equação não *descreve* esta possibilidade, ela apenas fornece, à linguagem (quando esta se vale dos sinais 2, +, e 4), a multiplicidade necessária para expressar uma proposição que, por sua vez, descreve um fato possível e, com isso, *mostra* esta possibilidade. Essa concepção faz com que os cálculos matemáticos estejam todos em um mesmo nível, pois, em todo caso, eles são aplicados como regras sintáticas d*a* linguagem, não importa o nível em que eles estejam na hierarquia dos cálculos. A álgebra, como vimos, certamente pode ser entendida como um cálculo que investiga, em certo sentido, possibilidades e impossibilidades aritméticas, mas isso não faz dela uma meta-aritmética: essas regras algébricas continuam sendo aplicadas como regras sintáticas d*a* linguagem. Diz Wittgenstein:

> A proposição algébrica é uma equação igual às outras, como $2 \times 2 = 4$, ela é apenas aplicada diferentemente. Sua relação com a aritmética é diferente. Ela concerne à substituibilidade de outras partes do discurso.[‡]
>
> O sistema de cálculo com caracteres é um novo cálculo; mas sua relação com o cálculo

[*] *PhBm*, XIII–149c.

[†] ibid., XIII–153b-c.

[‡] ibid., XIV–167b.

> usual com números não é a de um metacálculo em relação a um cálculo. *O cálculo com caracteres não é uma teoria.* Isto é o essencial. A "teoria" do jogo de xadrez é comparável – na medida em que ela investiga a impossibilidade de certas configurações – à algebra em sua relação com a teoria dos números.[*]

Quando Wittgenstein diz que o cálculo não é uma teoria, o que ele quer dizer fundamentalmente é que o cálculo não *descreve* nada, não é *sobre* nada. E o que é surpreendente é que, aqui, no momento em que as proposições matemáticas mais se encontram opostas às proposições genuínas, é também o momento em que se pode ver, com clareza, um traço das reflexões de Wittgenstein sobre a matemática de que havíamos falado no Capítulo 3, a saber, a aplicação de raciocínios pertencentes originalmente ao escopo das proposições genuínas para esclarecer problemas filosóficos sobre as proposições matemáticas. Com efeito, o espaço no interior do qual se pode formular perguntas e asserções sobre a verdade ou falsidade de proposições matemáticas é, em diversos raciocínios das *PhBm*, comparado ao "espaço lógico" do *Tractatus*, cuja estrutura não poderia depender da realização de possibilidades de um suposto nível superior. Este ponto é exposto de modo claro e translúcido por Lopes dos Santos na seguinte passagem:

> Se, diante de uma proposição, indagamos por suas condições de sentido e aparentemente encontramos como resposta condições passíveis de representação proposicional, isso é sinal de que essas condições não são condições de sentido, mas condições de verdade, que remetem a condições de sentido mais primitivas. Mas, se a proposição tem sentido, em algum momento dessa análise regressiva devem ser alcançadas suas condições últimas de sentido. As condições últimas de sentido das proposições definem o conjunto total das possibilidades cuja realização ou não-realização uma representação proposicional qualquer representa, elas definem o que Wittgenstein chama de *espaço lógico*. O mundo, como o conjunto das possibilidades efetivamente realizadas, consiste, pois, numa circunscrição interna desse espaço, circunscrição que podemos descrever por meio de proposições. No entanto, o próprio espaço não pode ser descrito por proposições: se o fosse, ele consistiria na realização de certas possibilidades em detrimento de outras, seria não um espaço de possibilidades, mas uma circunscrição no interior de um espaço mais abrangente. Por definição, o espaço lógico é um espaço total, sem exterior.[†]

A conclusão também vale para os "espaços lógicos matemáticos": eles são espaços totais, sem exterior. Não pode haver, portanto, uma pergunta por uma possibilidade *sobre* um sistema. Uma pergunta só pode ser feita no interior de um sistema. E se uma asserção é sobre uma possibilidade no interior de um sistema, é porque este sistema é uma circunscrição de um sistema maior, mais abrangente, sistema este que dá sentido à asserção:

> Não posso traçar os limites de meu mundo, mas posso traçar limites no interior de meu mundo. Não posso perguntar se a proposição p pertence ao sistema S, mas

[*] *WWK*, p. 136.

[†] Luis Henrique **Lopes dos Santos**: A harmonia essencial, em: Adauto **Novaes** (ed.): *A crise da razão*, São Paulo: Companhia das Letras, 1993, p. 448.

> posso perguntar se ela pertence à parte s de S. Desse modo, posso determinar o lugar da trissecção de um ângulo dentro do sistema maior, mas não posso, dentro do sistema euclidiano, perguntar se ele é solúvel. Em que *linguagem* eu deveria perguntar isso? Na euclidiana? Mas tampouco posso perguntar na linguagem euclidiana sobre a possibilidade de bisseccionar um ângulo dentro do sistema euclidiano. Pois, nessa linguagem, isso levaria a perguntar pela possibilidade *simpliciter*, e esta pergunta é sempre um contrassenso.[*]

O que ocorre, então, é que o problema clássico da tripartição de um ângulo, para Wittgenstein, nunca pode ser formulado matematicamente no sistema euclidiano e, quando ele foi "resolvido", é precisamente porque ele já estava incluído em um sistema maior (e, portanto, ele não era, no sentido estrito, o *mesmo problema*), e a pergunta pela possibilidade se transformara não em uma condição de sentido de uma proposição, mas em mais uma de suas condições de verdade (e, consequentemente, não se trata mais de uma pergunta pela possibilidade). Isso reforça o diagnóstico que o próprio Wittgenstein havia feito sobre sua concepção, o de que, a despeito de ela não eliminar por completo a existência de problemas matemáticos, ela pode fazer com que certos "problemas aparentes" percam o caráter de problema – a questão sobre sim ou não[†]. Estes problemas aparentes, *e..g*, "é possível trisseccionar um ângulo no sistema euclidiano?" só podem ser formulados na "linguagem verbal", na *Wortsprache*, o que leva a uma incompreensão da *forma lógica*[‡].

Destarte, estes "problemas difíceis" da matemática – que tratam de possibilidades e impossibilidades acerca de um sistema – não são "problemas" no sentido logicamente adequado desta palavra, a saber, uma tarefa que possui um sentido claro e, portanto, indica o caminho para sua realização. Estes "problemas", alude Wittgenstein, são como no conto de Wilhelm Busch em que o fidalgo ordena ao ferreiro que lhe traga um gaiolouvo[§]. No mesmo conto, o fidalgo já havia ordenado ao ferreiro que lhe construísse um castelo em apenas uma noite, e sob pena de morte caso fracassasse. Nas duas ocasiões, o ferreiro resmunga entristecido: "Não posso, não consigo". Mas o que o escritor quer ressaltar, e o que Wittgenstein percebe bem, é que esta queixa repetida do ferreiro não significa de modo algum a mesma coisa nas duas ocasiões. Na primeira, a tarefa é clara, e o ferreiro apenas não dispunha de recursos necessários para realizá-la. Na segunda, todavia, ele mal compreendera a tarefa e, por isso, sua realização não

[*] *PhBm*, XIII−152i.

[†] Ibid., XIII−148d.

[‡] Ibid., XIII−159e.

[§] O termo usado por Busch no conto é "Himphamp". Wittgenstein utiliza a palavra "Klamauk" (transcrita incorretamente no texto datilografado como "Klamank") que pode significar, no alemão coloquial, diversas coisas, como, p. ex., "bagunça" e "barulho". Wittgenstein utiliza este termo confessadamente como uma "palavra que não quer dizer nada". Cf. Ludwig **Wittgenstein**: *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939: From the Notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies*, ed. por Cora **Diamond**, Hassocks: The Harvester Press, 1976, p. 206.

era nem mesmo concebível: ele mal sabia "por onde começar". Do mesmo modo, ordenar a um aluno que dispõe apenas do aparato da trigonometria elementar que ele forneça a expansão em série de Taylor de uma função trigonométrica qualquer, é dar-lhe uma tarefa que, para ele, não faz o menor sentido, e se ele responde com "Não posso, não consigo", isso não quer dizer que se trata da negação de uma possibilidade real, como seria se a ele fosse ordenado resolver, em tempo limitado, um grande número de problemas. Um sistema matemático, que origina questões genuínas na matemática, é, por assim dizer – atesta Wittgenstein –, um mundo*; o espaço lógico que este sistema encerra é completo, sem lacunas e seus "limites" são também limites para a própria *expressão* de um problema nele resolvível, ou melhor, de um problema *tout court*.

* *PhBm*, XIII–152e.

Apêndice A

Neste apêndice, encontra-se a transcrição dos excertos, traduzidos por nós e utilizados na tese, em suas línguas originais.

↰ **Frege**: Begriffsschrift und andere Aufsätze, p. 3 (§3). Die Stelle des Subjects in der Wortreihe hat für die Sprache die Bedeutung einer *ausgezeichneten* Stelle, an die man dasjenige bringt, worauf man die Aufmerksamkeit des Hörers besonders hinlenken will. (...) Dies kann beispielsweise den Zweck haben, eine Beziehung dieses Urtheils zu andern anzudeuten, und dadurch dem Hörer die Auffassung des ganzen Zusammenhanges zu erleichtern. Alle Erscheinungen nun in der Sprache, die nur aus der Wechselwirkung des Sprechenden und des Hörenden hervorgehen, indem der Sprechende z. B. auf die Erwartungen des Hörenden Rücksicht nimmt und diese schon vor dem Aussprechen eines Satzes auf die richtige Fährte zu bringen sucht, haben in meiner Formelsprache nichts Entsprechendes, weil im Urtheile hier nur das in Betracht kommt, was auf die *möglichen Folgerungen* Einfluss hat.

↰ **Russell/Whitehead**: Principia Mathematica, p. 245. The functions hitherto considered (...) have been propositional, *i.e.* have had propositions for their values. But the ordinary functions of mathematics, such as x^2, sin x, log x, are not propositional. Functions of this kind always mean "the term having such and such a relation to x." For this reason they may be called *descriptive* functions, because they *describe* a certain term by means of its relation to their argument. Thus "$sin\ \pi/2$" describes the number 1.

↰ Ibid., p. 6. An aggregation of propositions, considered as wholes not necessarily unambiguously determined, into a single proposition more complex than its constituents, is a function *with propositions as arguments.*

↰ Ibid., pp. 41-2. That is to say, a [propositional] function is not a well-defined function unless all its values are already well-defined. It follows from this that no function can have among its values anything which presupposes the function, for if it had, we could not regard the objects ambigously denoted by the function as definite until the function was definite, while conversely, as we have just seen, the function cannot be definite until its values are definite. This is a particular case, but perhaps the most fundamental case, of the vicious-circle principle. A function is what ambigously denotes some one of a certain totality, namely the values of the function; hence this totality cannot contain any members which involve the function, since, if it did, it would contain members involving the totality, which, by the vicious-circle principle, no totality can do.

↰ *WAi*, p. 63. Wenn meine Theorie richtig ist daß Gegenstände von der Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen in Elementarsätzen vorkommen, so weist das auf eine allgemeinere

Auffassung der Zahlen hin – als die Freges und Russells – wie ich sie selbst schon hatte. Ich sagte damals, daß die Zahl aus dem Begriff des Kalküls hervorgehe und daran ist gewiß etwas.

↰ *PhBm*, X–113a. Die Anzahlen sind eine in der Wirklichkeit durch die Dinge gegebene Form, so wie die Rationalzahlen durch Ausdehnungen etc. Ich meine, durch wirkliche Formen. So sind die Komplexen Zahlen durch wirkliche Mannigfaltigkeiten gegeben. (Die Symbole sind ja wirklich.)

↰ *WAi*, p. 16; *PhBm*, XII–141a. Die Regeln über das Zahlensystem – etwa das Dezimalsystem – enthalten alles, was an den Zahlen unendlich ist. Daß *diese Regeln* z.B. die Zahlzeichen nach rechts und links nicht beschränken, *darin* liegt die Unendlichkeit ausgedrückt. / Man könnte vielleicht sagen: Ja, aber die Zahlzeichen sind doch durch den Gebrauch von Papier und Schreibmaterial und andere Umstände beschränkt. Wohl, aber das ist nicht in den *Regeln* über ihren Gebrauch ausgedrückt, und nur in diesen liegt ihr eigentliches Wesen ausgesprochen.

↰ *WAi*, p. 16. Ist nicht das Dezimalsystem mit seiner unendlichen Möglichkeit der Interpolation eben dieses Zeichen?

↰ *WAi*, p. 15; *PhBm*, XVI–177c. Man braucht – so kommt es mir vor –, um den Raum darzustellen, gleichsam ein dehnbares Zeichen.
[Vielleicht] ein Zeichen, das eine Interpolation erlaubt, analog dem Dezimalsystem.
Das Zeichen muß die Mannigfaltigkeit und Eigenschaften des Raumes haben.

↰ *WAi*, p. 148. Nun könnte man aber fragen: Ist jenes Zeichen mit der unendlichen Möglichkeit wirklich notwendig? Ginge es nicht mit der Disjunktion der kleinst-sichtbaren Teile? Nein. Denn mit den Zeichen für die diskreten Teile wäre die Kontinuität nicht darzustellen.

↰ Ibid., p. 50. Wenn etwas in meinen Fundamenten falsch ist so könnte es nur so sein daß es Elementarsätze wesentlich überhaupt nicht gibt und daß die Analyse ein S y s t e m von ins Unendliche zerlegbaren Sätzen ergibt. Genügt dieses S y s t e m nicht der Forderung der Bestimmtheit der Analyse welche ich stelle?

↰ *WAi*, p. 56; *PhBm*, VIII–76c. Das läßt es erscheinen, als könnte innerhalb des Elementarsatzes eine Konstruktion möglich sein. D.h., als gäbe es eine logische Konstruktion, die nicht mit Hilfe der Wahrheitsfunktionen arbeitet.

↰ *WAi*, p. 56. Das habe ich ja auch mit meinen Relationen die durch Zahlen ausgedrückt werden sagen wollen. / Nun aber scheint es außerdem, daß diese Konstruktionen eine Wirkung auf das logische Folgen eines Satzes aus einem anderen haben!

↰ *WAii*, p. 11; *PhBm*, X–102c. Wenn ich sage: Wenn 4 Äpfel auf dem Tisch liegen, so liegen $2+2$ Äpfel auf ihm, so heißt das nur, daß mit den 4 Äpfeln schon die Möglichkeit gegeben ist, sie zu 2 und 2 zusammenzufassen, und ich brauche nicht auf die wirkliche Zusammenfassung durch einen Begriff zu warten. Diese "*Möglichkeit*" bezieht sich auf den Sinn, nicht auf die Wahrheit eines Satzes. $2 + 2 = 4$ kann heißen “wo immer ich 4 Gegenstände habe, besteht die Möglichkeit, sie zu 2 und 2 zusammenzufassen”.

↰ *WWK*, p. 80. Es ist so: Syntax un Zeichen arbeiten immer gegeneinander. Was die Zeichen leisten, geht auf Kosten der Syntax, und was die Syntax leistet, geht auf Kosten der Zeichen. Ich kann sagen: Ein Zeichensystem von richtiger Mannigfaltigkeit macht die Syntax überflüssig. Ich kann aber ebensogut sagen: Die Syntax macht ein solches Zeichensystem überflüssig. Ich kann ja auch ein unvollkommenes Zeichensystem verwenden und die Regeln der Syntax hinzufügen. Beide zusammen leisten genau dasselbe, ⟨ es ⟩ ist also genau das gleiche Darstellungsystem.

↰ *PhBm*, XVI−178b. Die Axiome – z.B. – der Euklidischen Geometrie sind verkappte Regeln einer Syntax. Das wird sehr klar, wenn man zusieht, was ihnen in der analytischen Geometrie entspricht.

↰ *WAi*, p. 18. Wenn $y = fx$ die Gleichung irgend einer geschlossenen Kurve ist und y hat zwei Werte für jeden Wert von x so schreibe ich eine beliebige Zahl im Intervall zwischen zwei Werten von y – nämlich $f1x$ und $f2x$ – so: “$\overline{f1x, f2x}$”. Dieses Zeichen ist eine Variable. Ich kann analog auch schreiben ”$\overline{4, 5}$”, d.i. die variable Zahl zwischen 4 und 5. “$[\overline{a, b}]$” soll dann die Klasse aller Werte der Variablen $\overline{a, b}$ bezeichnen also das Intervall zwischen a und b. Dieses Intervall ist keine Klasse im Sinne Russells, denn es ist nicht durch eine Funktion gegeben und die Zugehörigkeit zum Intervall bestimmt sich nicht danach ob ein gewisser Satz wahr oder falsch ist. Ob etwas ein Glied des Intervalls ist läßt sich vielmehr aus dem Zeichen dieses Etwas erkennen. In gewissem Sinne ist das Intervall also tatsächlich eine “Klasse in extenso”, nämlich keine Intension die sich für eine Extension ausgibt. Ich könnte das Intervall auch eine interne Klasse nennen weil die Zugehörigkeit zum Intervall durch die internen Eigenschaften bestimmt wird.

↰ *PhBm*, IX−94a. Es ist nämlich klar, daß, wenn man einmal mit der Arithmetik angefangen hat, man sich nicht mehr um Funktionen und Gegenstände kümmert. Ja, auch wenn man sich entschlossen hat, nur mit Extensionen zu arbeiten, bleibt noch das Sonderbare, daß man auch auf die Form von Gegenständen keinerlei Rücksicht nimmt.

↰ *WAi*, p. 31. Ich habe einen instinktiven Wunsch nur mit den Begriffsumfängen zu operieren und von den Funktionen keine Notiz in der Arithmetik zu nehmen.

↰ *PhBm*, X−105a. Und jetzt zeigt sich auch – glaube ich – klar, die Beziehung zwischen der extensiven Auffassung der Klassen und der Auffassung der Zahl als Merkmal einer logischen Struktur: Eine Extension ist eine Charakteristik des Sinnes eines Satzes.

↰ Ibid., X−99a. Man kann fragen, hat denn die Zahl wesentlich etwas mit einem Begriff zu tun? Ich glaube, das kommt darauf hinaus zu fragen, ob es einen Sinn hat, von einer Anzahl von Gegenständen zu reden, die nicht unter einen Begriff gebracht sind. Heißt es z.B. etwas, zu sagen: “a und b und c sind 3 Gegenstände”? Ich glaube offenbar nein. Es ist allerdings ein Gefühl vorhanden, das uns sagt: Wozu von Begriffen reden; die Zahl hängt ja nur vom *Umfang* des Begriffes ab, und wenn der einmal bestimmt ist, so kann der Begriff sozusagen abtreten. Der Begriff ist nur eine Methode, um einen bestimmten Umfang zu bestimmen, der Umfang aber ist selbständig und in seinem Wesen unabhängig vom Begriff; denn es kommt ja auch nicht darauf an, durch welchen Begriff wir den Umfang bestimmt haben. Das ist das Argument für die extensionale Auffassung. Dagegen kann man zuerst sagen: Wenn der Begriff wirklich nur ein Hilfsmittel ist, um zum Umfang zu gelangen, dann hat der Begriff in der Arithmetik nichts zu suchen; dann muß man eben die Klasse gänzlich von dem zufällig mit ihr verknüpften Begriff scheiden; im umgekehrten Fall aber ist der vom Begriff unabhängige Umfang nur eine Chimäre, und dann ist es besser, von ihm überhaupt nicht zu reden, sondern nur vom Begriff.

↰ *PhBm*, X−100b. Man könnte nun den Begriffsumfang wie einen Gegenstand betrachten, dessen Name ja auch nur im Satzzusammenhang Sinn hat. "a und b und c" hat allerdings keinen Sinn, das ist kein Satz. Aber "a" ist ja auch kein Satz.

↰ **Ramsey**: The Foundations of Mathematics, p. 19. (...) $m^2 = n^3 + 2$ would be a tautology for the values of m and n which satisfy it, and a contradiction for all others. So

$$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot m^2 = n^3 + 2$$

would for the first set of values of m, n be equivalent to

$$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n$$

simply, '$m^2 = n^3 + 2$' being tautologous, and therefore superfluous; and for all other values it would be self-contradictory. So that

$$\text{`}(\exists m, n) \cdot \hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n \cdot m^2 = n^3 + 2\text{'}$$

would be the logical sum of the propositions '$\hat{x}(\phi x) \in m \cdot \hat{x}(\psi x) \in n$' for all m, n satisfying $m^2 = n^3 + 2$, and of contradictions for all other m, n; and is therefore the proposition we require, since in a logical sum the contradictions are superfluous.

↰ *WAi*, p. 66. Ich möchte gleichsam die Arithmetik gesondert von der Logik behandeln und nur an einem Punkt andeuten wie die Arithmetik in der Logik anzuwenden ist. / Ich glaube man muß die Arithmetik abseits von der Logik betreiben d.h. ich glaube wir dürfen uns nicht in der Arithmetik auf die Logik berufen.

↰ **Ramsey**: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, p. 52. Such a function of one individual results from any one-many relation in extension between propositions and individuals; that is to say, a correlation, practicable or impracticable, which to every individual associates a unique proposition, the individual being the argument to the function, the proposition its value.

Thus ϕ (Sócrates) may be Queen Anne is dead,
ϕ (Platão) may be Einstein is a great man ;
$\phi\hat{x}$ being simply an arbitrary association of propositions ϕx to individuals x.
A function in extension will be marked by a suffix e thus $\phi_e\hat{x}$.

↰ *PhBm*, XI−121d. Die Theorie der Identität bei Ramsey] machen den Fehler, den man machen würde, wenn man sagte, ein gemaltes Bild könne man auch als Spiegel benutzen, wenn auch nur für eine einzige Stellung, wo dann übersehen wird, daß das Wesentliche beim Spiegel gerade das ist, daß man aus ihm auf der Stellung des Körpers vor dem Spiegel schließen kann, während man im Fall des gemalten Bildes erst wissen muß, daß die Stellungen übereinstimmen, ehe man das Bild als Spiegelbild auffassen kann.

↰ Ibid., X−103b. Wenn man schreibt $(\exists|||||)$ etc.$(\exists|||||||)$ etc.$\cdot \supset \cdot(\exists||||||||||||) - - - \mathcal{A}$. so kann man im Zweifel sein, wie ich denn das Zahlzeichen in der rechten Klammer erhalten habe, wenn ich nicht weiß, daß es durch Addition der beiden linken Zahlzeichen entstanden ist. Ich glaube, das macht klar, daß dieser Ausdruck nur eine Anwendung von $5 + 7 = 12$, aber nicht diese Gleichung selbst darstellt.

↰ Ibid., X−103d. Man kann ganz von der speziellen Beschaffenheit des Satzes $\mathcal{A}$ absehen und bloß auf das Verhältnis, die Beziehung, der Zahlzeichen in ihm achten. Das zeigt, daß diese Beziehung unabhängig von diesem Satz besteht. Nämlich von den anderen Zügen seiner Struktur, die ihn zur Tautologie machen.

↰ Ibid., X−107b. Keine Untersuchung der Begriffe, nur die direkte Einsicht kann vermitteln, daß $3 + 2 = 5$. / Das ist es, was sich in uns auflehnt gegen die Annahme, daß $\mathcal{A}$ der Satz $3 + 4 = 7$ sein könnte. Denn das, wodurch wir diesen Ausdruck als Tautologie erkennen, kann sich selbst nicht aus einer Betrachtung von Begriffen ergeben, sondern muß unmittelbar sichtbar sein.

↰ *WAi*, p. 31. Ich möchte es den Operationen mit den Zahlen dann selbst überlassen etwas zu bedeuten.

↰ Ibid., p. 31. Wenn nun z.B. zwei Umfänge ganz außerhalb einander liegen so zeigt sich das in ihren Zeichen und wir brauchen ja dürfen zu dieser Konstatierung nicht auf die Begriffe zurückgehen da wir eben nicht wissen ob es solche Begriffe überhaupt gibt.

↰ *PhBm*, X−106a-e. Wenn nun der Übergang in $\mathcal{A}$ die einzige Anwendung dieses arithmetischen Schemas wäre, könnte oder müßte man es da nicht eben durch die Tautologie ersetzen oder definieren? / D.h.: Wie wäre es, wenn $\mathcal{A}$ die allgemeinste Form der Anwendung des arithmetischen Schemas wäre? / Wäre $\mathcal{A}$ die einzige – also *wesentlich* die einzige – Anwendung des Schemas, dann könnte das Schema ganz von selbst nichts anderes bedeuten, als eben die Tautologie. / Oder: dann müßte das Schema selbst die Tautologie sein, und die Tautologie nichts anderes als das Schema. / Dann könnte man auch nicht mehr sagen, $\mathcal{A}$ sei eine Anwendung des Schemas, sondern $\mathcal{A}$ wäre das Schema, nur gleichsam nicht das Werkzeug allein, sondern das Werkzeug mit seinem Griff, ohne den es ja doch nicht zu brauchen ist.

↰ Ibid., X−106f. Das was $\mathcal{A}$ außer dem Schema enthält, darf dann nur das sein, was zur Applikation des arithmetischen Schemas notwendig ist. Notwendig ist aber gar nichts, denn wir verstehen und wenden die arithmetischen Sätze sehr wohl an, ohne irgendeinen Zusatz zu ihnen. / Dazu gehört aber vor allem nicht die Bildung einer

Tautologie, wie wir in jener Tautologie selbst sehr gut sehen, denn sonst müßten wir, um sie als Tautologie zu erkennen, wieder eine andere als Tautologie erkennen und so fort.

↰ *WAi*, p. 68. Kommt nun aber die Addition von Kardinalzahlen wirklich nur in diesem einen Fall vor? Ist das ihre e i n z i g e Anwendung? Denn in diesem Falle hätte es keinen Sinn die Addition abgesondert von ihrer logischen Anwendung zu behandeln. (Hier denke ich allerdings daran daß die Subjekt-Prädikat-Form keine logische Form bestimmt.)

↰ Ibid., p. 71. Man kann auch so sagen: statt "($\exists xyz$...)..." kann ich immer dann sagen "($\exists_n x$).." wenn die Funktion von x y etc. so ist daß ich keinen der Gegenstände eigens erwähnen muß, oder auch daß ich die Gegenstände nicht erst in die Funktion einordnen muß. Daß ich ihnen keine Plätze anweisen muß. Daß sie wie Leute sind die ich in ein Zimmer schicke und zufrieden bin wenn sie darin sind ohne mich um ihre Plätze im Zimmer zu bekümmern. (...) Die Funktion muß so sein daß ich den Gegenständen in ihr nicht ihre Plätze anzuweisen brauche.

↰ Ibid., p. 71. Man kann auch so sagen: Auf den Anfang "Es gibt n Dinge" muß immer folgen "so daß jedes..." und nicht "so daß x... y... etc.".

↰ *WAii*, p. 12. Wenn Dinge gezählt werden, so können sie es nur in der Allgemeinheit und abgesehen von ihrer Individualität. Und wenn in einem Satz von n Dingen die Rede ist, so muß die Funktion in Bezug auf diese n Dinge symmetrisch sein; d.h. sie müssen in ihr alle gleichberechtigte Plätze einnehmen.

↰ *PhBm*, X−102b. Von den Dingen a, b, c, d haben nur 3 die Eigenschaft φ. Das kann durch die Disjunktion ausgedrückt werden. Offenbar auch ein Fall, wo eine Zahlangabe sich nicht auf einen Begriff bezieht (obwohl man es mittels des "=" auch so erscheinen lassen kann).

↰ Ibid., XI−116a. Wenn ich nun nicht sagen kann, "es gibt 4 reine Farben", so sind die reinen Farben und die Zahl 4 doch irgendwie mit einander verbunden, und das muß sich auch irgendwie ausdrücken, z. B. wenn ich sage, "auf dieser Fläche sehe ich 4 Farben: gelb, blau, rot, grün".

↰ *SRLF*, p. 162. By syntax in this general sense of the word I mean the rules which tell us in which connections only a word gives sense, thus excluding nonsensical structures.

↰ *PhBm*, XIV-166a-b. Denn so (nämlich falsch) wird es gewöhnlich aufgefaßt. Man sagt, die Induktion ist ein Zeichen, daß das und das für alle Zahlen gilt. Aber die Induktion ist kein Zeichen für irgend etwas Anderes als sich selbst. Gäbe es außer der Induktion noch etwas, wofür *sie* nur ein Zeichen ist, so müßte dieses Etwas einen spezifischen Ausdruck haben, der nichts anderes wäre als der vollständige Ausdruck dieses Etwas. / Und diese Auffassung geht dann weiter dahin, daß die algebraische Gleichung das erzählt was wir in der arithmetischen Induktion sehen. Dazu müßte sie dieselbe Mannigfaltigkeit haben wie das, was sie beschreibt.

↰ Ibid., III−27b. Sage mir, *wie* du suchst, und ich werde dir sagen, *was* du suchst.

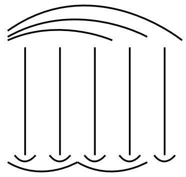
↰ Ibid., XI−121a-b. Eine Gleichung ist eine syntaktische Regel. / Erklärt das nicht, daß wir in der Mathematik nicht prinzipiell unbeantwortbare Fragen haben können? Denn wenn die Regeln der Syntax nicht verständlich sind, dann taugen sie nichts. Und ebenso erklärt es, daß nicht eine Unendlichkeit in diese Regeln eingehen kann, die unser Fassungsvermögen übersteigt. Und es macht auch die Versuche der Formalisten begreiflich, die in der Mathematik ein Spiel mit Zeichen sehen.

↰ Ibid., XIV−167d. Die Induktion beweist den algebraischen Satz nicht, weil nur eine Gleichung eine Gleichung beweisen kann.

↰ Ibid., XIV−169e. Eine Gleichung läßt sich nur beweisen, indem man sie auf Gleichungen zurückführt.
Die letzten Gleichungen in diesem Prozeß sind Definitionen.
Ist eine Gleichung nicht auf andere Gleichungen zurückführbar, so ist sie eine Definition.
Eine Induktion kann eine Gleichung nicht rechtfertigen.

↰ *WWK*, pp. 133-4. Das, was man die "Theorie des Schachspiels" nennt, ist nicht eine Theorie, die etwas beschreibt, sondern sie ist eine Art Geometrie. Sie ist natürlich wieder ein Kalkül und nicht eine Theorie.
Um das klar zu machen, frace ich Sie: Besteht Ihrer Meinung nach ein Unterschied zwischen den zwei folgenden Sätzen: "Ich kann in acht Zügen dorthin kommen" und: "Ich habe mittels der Theorie bewiesen, daß ich in acht Zügen dorthin kommen kann"? Nein! Denn wenn ich in der Theorie statt des Schachbrettes mit seinen Figuren einen Symbolismus verwende, so besteht ja der Nachweis, daß ich in acht Zügen dorthin kommen kann, darin, daß ich im Symbolismus wirklich dorthin komme, daß ich also nun mit Zeichen das tue, was ich aufdem Schachbrett mit den Figuren tue. Wenn ich die Züge ausführe und wenn ich ihre Möglichkeit beweise – so habe ich im Beweis noch einmal dasselbe gemacht. Ich habe die Züge eben nun symbolisch ausgeführt. Was fehlt, ist tatsächlich nur die wirkliche Bewegung; und darüber sind wir uns ja einig, daß die Verschiebung der Holzklötzchen auf dem Brett etwas Unwesentliches ist.

↰ *WAi*, p. 16. So kann ich Ḃ. die Zahl 5 ‖ so ‖ hinschreiben daß man deutlich sieht daß sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist: Etwa so:



Dieser Aspect könnte etwa sagen "5 ist eine Primzahl"; oder: "Seht, 5 ist eine Primzahl!". / Das käme vielleicht auf dasselbe hinaus, was ich schon früher einmal gesagt habe, nämlich, daß der eigentliche mathematische Satz ein Beweis eines sogenannten mathematischen Satzes ist. Der eigentliche mathematische Satz ist der

Beweis: d.h. dasjenige was zeigt wie es sich verhält. / Ein Beweis heißt mit Recht auch eine Demonstration.

↰ *PhBm*, X−110a.

$$\underbrace{\underbrace{2+3}_{5}+4}_{9} = \underbrace{\underbrace{2+4}_{6}+3}_{9} = \underbrace{\underbrace{4+3}_{7}+2}_{9}$$

"Siehst Du, es kommt tatsächlich immer dasselbe heraus" möchte man sagen. So aufgefaßt, haben wir ein Experiment gemacht. Wir haben die Regeln des Eins-und-Eins angewendet und denen sieht man es nicht unmittelbar an, daß sie in den 3 Fällen zum gleichen Resultat führen. / Man wundert sich gleichsam, daß die Ziffern, losgelöst von ihren Definitionen so richtig funktionieren. Oder vielmehr: daß die Ziffernregeln so richtig arbeiten (wenn sie nicht von den Definitionen kontrolliert werden).

↰ Ibid., X−110b. Das hängt (seltsamer Weise) mit der innern Widerspruchslosigkeit der Geometrie zusammen.
Man kann nämlich sagen, daß die Ziffernregeln die Definitionen immer voraussetzen. Aber in welchem Sinne? Was heißt es, daß ein Zeichen ein anderes voraussetzt, was eigentlich gar nicht da ist? Es setzt seine Möglichkeit voraus; die Möglichkeit im Zeichenraum (im grammatischen Raum).

↰ Ibid., XIII−162b. Man könnte das auch so sagen: Der völlig analysierte mathematische Satz ist sein eigener Beweis. / Oder auch so: der mathematische Satz ist nur die sofort sichtbare Oberfläche des ganzen Beweiskörpers, den sie vorne begrenzt. / Der sogenannte mathematische Satz ist – im Gegensatz zu einem eigentlichen Satz – *wesentlich* das letzte Glied einer Demonstration, die ihn als richtig oder unrichtig sichtbar macht.

↰ Ibid., XII−126a-b. Es scheint jetzt doch, daß die Allgemeinheitsbezeichnung für Zahlen keinen Sinn hat. Ich meine: Man kann nicht sagen "$(n)\varphi n$" weil eben "alle natürlichen Zahlen" kein begrenzter Begriff ist. Dann darf man aber auch nicht sagen, daß aus einer Aussage über das Wesen der Zahl eine allgemeine Aussage folgt. / Dann aber scheint es mir, als könne man die Allgemeinheit – alle etc. – in der Mathematik überhaupt nicht verwenden. Alle Zahlen gibt es nicht, eben weil unendlich viele da sind.

↰ Ibid., XII−129c. Die *Allgemeinheit* in der Arithmetik wird durch die Induktion dargestellt. Die Induktion ist der Ausdruck für die arithmetische Allgemeinheit.

↰ *WWK*, p. 82. Die Aussage für *alle* Zahlen wird nicht durch einen Satz dargestellt, sondern durch die Induktion. Diese kann man allerdings nicht verneinen, aber auch nicht bejahen, denn sie behauptet nichts. Also: Wo eine Aussage vorliegt, ist sie verneinbar. Und wo ein Gebilde nicht verneinbar ist, da ist auch keine Aussage da. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt allerdings nicht – und zwar einfach deshalb, weil es sich hier nicht um Sätze handelt.

↰ *PhBm*, XII−139c. Was besagt es, daß ein Fleck im Gesichtsraum in 3 Teile geteilt werden *kann*? Es kann doch nur heißen, daß ein Satz, welcher einen derart geteilten Fleck beschreibt, Sinn hat. (...) / Dagegen bedeutet die unendliche – oder besser *unbegrenzte* – Teilbarkeit nicht, daß es einen Satz gibt, der eine in unendlich viele Teile geteilte Strecke beschreibt, denn diesen Satz gibt es nicht. Diese Möglichkeit wird also nicht durch eine Wirklichkeit der Zeichen angezeigt, sondern durch eine Möglichkeit *anderer* Art der Zeichen selbst.

↰ **Riemann**: Gesammelte mathematische Werke und wissenschafilicher Nachlass, pp. 38-9. Die bisherigen Methoden, diese Functionen zu behandeln, legten stets als Definition einen Ausdruck der Function zu Grunde, wodurch ihr Werth für jeden Werth ihres Arguments gegeben wurde; durch unsere Untersuchung ist gezeigt, dass, in Folge des allgemeinen Charakters einer Function einer veränderlichen complexen Grösse, in einer Definition dieser Art ein Theil der Bestimmungsstücke eine Folge der übrigen ist, und zwar ist der Umfang der Bestimmungsstücke auf die zur Bestimmung nothwendigen zurückgeführt worden. Dies vereinfacht die Behandlung derselben wesentlich. Um z. B. die Gleichheit zweier Ausdrücke derselben Function zu beweisen, müsste man sonst den einen in den andern transformiren, d. h. zeigen, dass beide für jeden Werth der veränderlichen Grösse übereinstimmten; jetzt genügt der Nachweis ihrer Uebereinstimmung in einem weit geringern Umfange.
Eine Theorie dieser Functionen auf den hier gelieferten Grundlagen würde die Gestaltung der Function (d. h. ihren Werth für jeden Werth ihres Arguments) unabhängig von einer Bestimmungsweise derselben durch Grössenoperationen festlegen, indem zu dem allgemeinen Begriffe einer Function einer veränderlichen complexen Grösse nur die zur Bestimmung der Function nothwendigen Merkmale hinzugefügt würden, und dann erst zu den verschiedenen Ausdrücken deren die Function fähig ist übergehen.

↰ **Dedekind**: Gesammelte mathematische Werke, Band iii, pp. 468-9. Mein Streben in der Zahlentheorie geht dahin, die Forschung nicht auf zufällige Darstellungsformen oder Ausdrücke sondern auf einfache Grundbegriffe zu stützen und hierdurch – wenn diese Vergleichung auch vielleicht anmaßend klingen mag – auf diesem Gebiete etwas Ähnliches zu erreichen, wie Riemann auf dem Gebiete der Functionentheorie, wobei ich die beiläufige Bemerkung nicht unterdrücken kann, daß die Riemannschen Principien von den meisten Schriftstellern, z. B. auch in den neuesten Werken über elliptische Functionen, nach meiner Ansicht nicht in consequenter Weise zur Anwendung gebracht werden; fast immer wird die einfache Theorie verunziert durch unnöthige Einmischung der Darstellungsformen, welche doch eigentlich nur Resultat, nicht Hülfsmittel der Theorie sein sollten.

↰ **Hilbert**: Gesammelte Abhandlungen, p. 67. Ich habe versucht, den großen rechnerischen Apparat von Kummer zu vermeiden, damit auch hier der Grundsatz von Riemann verwirklicht würde, demzufolge man die Beweise nicht durch Rechnung, sondern lediglich durch Gedanken zwingen soll.

↰ **Cauchy**: Cours d'analyse algébrique, pp. 34-5. La fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre ses limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

↰ *PhBm*, XV−171d-g. Wenn das Zahlensystem zum Wesen der Zahl gehört, dann kann es die allgemeine Betrachtung nicht ausschalten. / Und wenn also die Notation des Zahlensystems das Wesen der Zahl spiegelt, so muß dieses Wesentliche auch in die allgemeine Notation eingehen. Damit erhält die allgemeine Notation die Struktur der Zahlen. / Wenn ich wesentlich keine Zahl hinschreiben kann ohne ein Zahlensystem, so muß sich das in der allgemeinen Behandlung der Zahl wieder zeigen. / Das Zahlensystem ist nicht etwas Minderwertiges – wie eine russische Rechenmaschine – das nur für Volksschüler Interesse hat, während die höhere allgemeine Betrachtung davon absehen kann.

↰ Ibid., XIII−149b. Es gibt keinen Ersatz für das Durchlaufen jeder Stufe, und was dem äquivalent ist, muß wieder dieselbe Mannigfaltigkeit haben. (In der Logik gibt es kein Surrogat.) Es ist auch ein Pfeil kein Surrogat des Durchschreitens aller Stufen bis zum bestimmten Ziel.

↰ Ibid., XVI−180a. Wenn eine amorphe Theorie der unendlichen Aggregate möglich ist, so muß sie nur das Amorphe an diesen Aggregaten beschreiben und darstellen. / Sie müßte dann wirklich die Gesetze als bloße unwesentliche Mittel der Darstellung eines Aggregats auffassen. Und von diesem Unwesentlichen abstrahieren und nur auf das Wesentliche schauen. Aber worauf? / Ist es möglich, im Gesetz vom Gesetz zu abstrahieren und die Extension als Wesentliches dargestellt zu sehen? / Soviel ist allerdings klar, daß es nicht die Dualität: Gesetz und unendliche Reihe die ihm folgt, gibt. d.h. nicht etwas in der Logik wie Beschreibung und Wirklichkeit.

↰ Ibid., XIV−163a. “$a+(b+c)=(a+b)+c$”...$A(c)$ kann als Grundregel eines Systems aufgefaßt werden. Als solche kann man es nur vorschreiben aber nicht *behaupten*, oder verneinen (also kein Gesetz des ausgeschlossenen Dritten).

↰ Ibid., XIV−163h. Eine Definition kann ich natürlich nicht verneinen. Sie hat daher auch keinen Sinn. Sie ist eine Regel, nach der ich vorgehen kann (oder vorzugehen habe).

↰ Ibid., XIV−163i. Die Grundregeln eines Systems kann ich nicht negieren.

↰ Ibid., XIV−167d-e. Die Induktion beweist den algebraischen Satz nicht, weil nur eine Gleichung eine Gleichung beweisen kann. Aber sie rechtfertigt die Aufstellung der algebraischen Gleichungen vom Standpunkte der Anwendung auf die Arithmetik. / D.h., sie erhalten durch die Induktion erst ihren Sinn, nicht ihre Wahrheit.

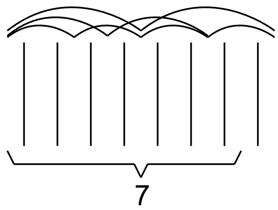
↰ Ibid., XIX−201d. Ich glaube, die Negation ist hier nicht, was sie in der Logik ist, sondern eine Unbestimmtheit. Denn wie erkenne, verifiziere ich das Negative? Durch ein Unbestimmtes aber Positives.

↰ Ibid., XIX−202a. Es ist ganz klar, daß die Negation in der Arithmetik gänzlich verschieden ist von der eigentlichen Negation von Sätzen.
Und es ist ja klar, daß dort, wo sie wesentlich – aus den logischen Verhältnissen heraus

– einer Disjunktion entspricht oder einer Ausschließung eines Teils einer logischen Reihe zugunsten eines anderen – daß sie dort eine ganz andere Bedeutung haben muß.
Sie muß ja Eins sein mit jenen logischen Formen und also nur scheinbar eine Negation. Wenn "nicht-gleich" größer oder kleiner bedeutet, so kann das für das "nicht" nicht, sozusagen, ein Zufall sein.

↰ Ibid., II−2a. (...) der negative Satz die Mannigfaltigkeit des verneinten Satzes hat und nicht *der* Sätze, die etwa an dessen Statt wahr sein können.

↰ Ibid., XIX−200b. Man kann aber die *Un*teilbarkeit *augenfällig* darstellen (z.B. im "Sieb"). Man *sieht* wie alle teilbaren Zahlen ober- oder unterhalb der betrachteten Zahl liegen.



Die Negation in der Arithmetik wird hier durch die Negation im Raum, das "wo anders", dargestellt.

↰ *WAii*, p. 70. Wenn ich nach den Primzahlen in den Zwischenräumen n, $(n! + 1) - n$, etc. suche, so ist dies Suchen einem Gesetz unterworfen, es folgt einem Gesetz, aber nicht das Resultat.

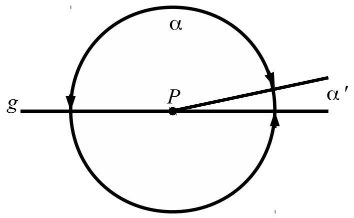
↰ *PhBm*, XIX−204d. Kann man mit Hilfe der Primzahlen eine Irrationalzahl konstruieren? Die Antwort ist immer: Soweit man die Primzahlen voraussehen kann, ja, und weiter nicht.
Wenn es voraussehbar ist, daß in *diesem* Intervall eine Primzahl stehen muß, dann ist dieses Intervall das Voraussehbare und Konstruierbare, und es kann daher, glaube ich, in der Konstruktion einer Irrationalzahl eine Rolle spielen.

↰ Ibid., XIX−200e. Es ist sehr seltsam, daß man zur Darstellung der Mathematik auch falsche Gleichungen sollte gebrauchen müssen. Denn darauf läuft das alles hinaus. Ist die Negation oder Disjunktion im gewöhnlichen Sinne in der Arithmetik notwendig, dann sind falsche Gleichungen ein wesentlicher Bestandteil ihrer Darstellung.

↰ Ibid., XIX−203a. Es ist mir klar, daß die Arithmetik nicht falsche Gleichungen zu ihrem Aufbau braucht, aber es scheint mir daß man wohl sagen kann "zwischen 11 und 17 liegt eine Primzahl", ohne sich dabei auf falsche Gleichungen zu beziehen.

↰ Ibid., XIII−153a. Beweise die dasselbe beweisen, sind in einander übersetzbar und insofern derselbe Beweis. Das gilt nur für solche Beweise nicht wie etwa: "Daß er zuhause ist sehe ich aus zwei Tatsachen; erstens hängt sein Rock im Vorzimmer und zweitens höre ich ihn pfeifen.” Hier haben wir zwei unabhängige Quellen der Erkenntnis. Der Beweis bedarf eben von außen kommender Gründe, während ein Beweis der Mathematik die Analyse des mathematischen Satzes ist.

↰ *WAii*, p. 146.



Wie funktioniert der indirekte Beweis |z.B.| in der Geometrie. Das Seltsamste an ihm ist daß man sich manchmal bemüht für ihn eine u n g e o m e t r i s c h e Zeichnung zu machen (das exakte Analogon zu einem un-logischen Satz). Aber natürlich rührt das nur von einer falschen Auffassung/Deutung/ des Beweises her. Es ist z.B. komisch wenn man sagt “angenommen die Gerade g hatte vom Punkt P an zwei Fortsetzungen”. Aber so etwas braucht man ja gar nicht annehmen. Die Beweise in der Geometrie, in der Mathematik, können im eigentlichen Sinn nicht indirekt sein weil man nicht das Gegenteil von einem geometrischen Satz annehmen kann solange man nämlich an einer bestimmten Geometrie festhält. Jener Beweis zeigt einfach daß die Bogenstücke α und $\alpha+\alpha'$ sich einander umsomehr und ohne Grenze nähern je mehr sich α' der 0 nähert.

↰ *PhBm*, XVI−178k. Wie ist es mit dem Satz “die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad”? Dem sieht man es jedenfalls nicht an, daß er ein Satz der Syntax ist.
Der Satz “Gegenwinkel sind gleich”, heißt, ich werde, wenn sie sich bei der Messung nicht als gleich erweisen, die Messung für falsch erklären; und “die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad”, heißt, ich werde, wenn sie sich bei einer Messung nicht als 180 Grad erweist, einen Messungsfehler annehmen. Der Satz ist also ein Postulat über die Art und Weise der Beschreibung der Tatsachen. Also ein Satz der Syntax.

↰ Ibid., XVI−178l. Es gibt offenbar eine Methode, ein gerades Lineal anzufertigen. Diese Methode schließt ein Ideal ein, ich meine, ein Näherungsverfahren mit unbegrenzter *Möglichkeit*, denn eben dieses Verfahren *ist* das Ideal.
Oder vielmehr: Nur, wenn es ein Näherungsverfahren mit unbegrenzter Möglichkeit ist, kann (nicht muß) die Geometrie dieses Verfahrens die Euclidische sein.

↰ Ibid., XX−215a. Das heißt natürlich nichts, zu sagen, der Kreis sei nur ein Ideal, dem sich die Wirklichkeiten nur nähern könnten. Das ist ein irreführendes Gleichnis. Denn nähern kann man sich nur einer Sache die vorhanden ist; (...) Es kann aber auch so sein, daß wir eine unendliche Möglichkeit selbst den Kreis nennen. Es verhält sich dann mit dem Kreis wie mit einer irrationalen Zahl.

↰ Ibid., XVIII−190a. Es tritt uns hier immer wieder etwas entgegen, was man “arithmetisches Experiment” nennen könnte. Was herauskommt, ist zwar durch das

Gegebene bestimmt, aber ich kann nicht erkennen *wie* es dadurch bestimmt ist. (Ähnlich, wie es z.B. mit dem Auftreten der 7 in π geht.) So kommen auch die Primzahlen bei der Methode sie zu suchen heraus, als Resultate eines Experiments. Ich kann mich zwar davon überzeugen, daß 7 eine Primzahl ist, aber ich sehe den Zusammenhang nicht zwischen ihr und der Bedingung, der sie entspricht – Ich habe sie nur gefunden und nicht erzeugt.
Ich suche sie, aber ich erzeuge sie nicht. Ich sehe wohl ein Gesetz in der Vorschrift, die mich lehrt die Primzahlen zu finden, aber nicht in den Zahlen, die dabei herauskommen. Es ist also nicht wie in $+\frac{1}{1!}$, $-\frac{1}{3!}$, $+\frac{1}{5!}$, etc., wo ich ein Gesetz *in den Zahlen* sehe. / Ich muß ein Stück der Reihe anschreiben können, so daß man das Gesetz *erkennt.*
D.h., In diesem Angeschriebenen darf keine *Beschreibung* vorkommen, sondern alles muß dargestellt sein. / Die Näherungswerte müssen selbst eine *offenbare* Reihe bilden. D.h., die Näherungswerte selbst müssen sich in einem Gesetz bewegen.

↰ Ibid., XVIII−194d. $p\!\!\!\!\rightarrow 4$ soll bedeuten: “Die vierte Primzahl”. Kann $p\!\!\!\!\rightarrow 4$ als arithmetische Operation aufgefaßt werden mit der Basis 4? So daß also $p\!\!\!\!\rightarrow 4 = 5$ eine arithmetische Gleichung ist, wie $4^2 = 16$? Oder ist es so, daß man $p\!\!\!\!\rightarrow 4$ “nur suchen, aber nicht aufbauen” kann?

↰ Ibid., XIII−151d. Ein Gesetz, das ich nicht kenne, ist kein Gesetz.

↰ Ibid., XVII−189k. Nur was ich sehe, ist ein Gesetz; nicht was ich *beschreibe.*

↰ Ibid., XVII−183f. Es ist, als ob man zur Durchführung der Regel $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$ einen Menschen brauchte. Quasi: Die Regel, um eine arithmetische Angelegenheit zu sein, muß *sich selbst* verstehen. Die Regel $\overset{5\to3}{\sqrt{2}}$ tut das nicht, sie ist aus zwei heterogenen Bestandteilen zusammengesetzt. Der Mensch, der sie anwendet, vereinigt diese Bestandteile miteinander.

↰ Ibid., XVII−186f. Es ist klar, daß, wenn ich $\overset{7\to3}{\times}$ anwenden könnte, alle Zweifel über die Berechtigung behoben wären. Denn die Möglichkeit der Anwendung ist das eigentliche Kriterium für die arithmetische Wirklichkeit.

↰ Ibid., XVII−188e. Genau so macht $\overset{7\to3}{\pi}$ das Dezimalsystem zu seinem Gegenstand (oder müßte es machen, wenn es richtig wäre), daher genügt jetzt nicht mehr, daß man die Regel bei der Bildung der Extension anwenden kann. Denn diese Anwendung ist jetzt nicht mehr das Kriterium dafür, daß die Regel in Ordnung ist, denn sie ist gar nicht der Ausdruck des arithmetischen Gesetzes, sondern ändert nur äußerlich an der Sprache.

↰ Ibid., XIX−203g. Könnte es bei den Berechnungen eines Ingenieurs herauskommen, daß, sagen wir, gewisse Maschinenteile wesentlich die Länge haben müssen, die der Reihe der Primzahlen entsprechen? Nein.

↰ **Wittgenstein**: The Big Typescript; **idem**: Philosophische Grammatik, p. 482.. Könnten die Berechnungen eines Ingenieurs ergeben, daß die Stärken eines Maschinenteils bei gleichmäßig wachsender Belastung in der Reihe der Primzahlen fortschreiten müssen?

↰ *PhBm*, XII−125e. Ein “unendlich kompliziertes Gesetz” heißt kein Gesetz. Wie könnte man wissen, daß es unendlich kompliziert ist? Nur so, indem es gleichsam unendlich viele Näherungswerte zu diesem Gesetz gäbe. Aber bedingt das nicht, daß sie sich wirklich einem Ziel *nähern*? Oder kann man die unendlich vielen Beschreibungen von Strecken der Primzahlenreihe solche Näherungswerte des Gesetzes nennen? Nein, denn keine Beschreibung einer endlichen Strecke bringt uns dem Ziele einer Gesamtbeschreibung näher.
Wie unterscheidet sich denn ein unendlich kompliziertes Gesetz in diesem Sinne von gar keinem Gesetz? Das Gesetz würde dann höchstens lauten “es ist alles, wie es ist”.

↰ *WAii*, p. 64. Es ist, wie wenn man eine Nadel einfädeln wollte und einige Fasern gehen immer daneben und man versucht immer von Neuem, bis endlich Alles durch das Öhr geht und man den Faden durchziehen kann.

↰ *PhBm*, XII−143b. Und wenn es eine unendliche Realität gibt, dann gibt es auch den Zufall im Unendlichen. Also z.B. auch die unendliche Dezimalzahl, die durch kein Gesetz gegeben ist.

↰ Ibid., XII−181a-b. Die Frage wäre: welches Kriterium gibt es dafür, daß die irrationalen Zahlen *komplett* sind? / Sehen wir uns eine irrationale Zahl an: sie läuft entlang einer Reihe rationaler Näherungswerte. Wann verläßt sie diese Reihe? Niemals. Aber sie kommt allerdings auch niemals zu einem Ende.
Angenommen, wir hätten die Gesamtheit aller irrationalen Zahlen mit Ausnahme einer einzigen. Wie würde uns diese eine abgehen? Und wie würde sie nun – wenn sie dazukäme – die Lücke füllen? – Angenommen es wäre π. Wenn die irrationale Zahl durch die Gesamtheit ihrer Näherungswerte gegeben ist, so gäbe es bis zu *jedem* beliebigen Punkt eine Reihe, die mit der von π übereinstimmt. Allerdings kommt für jede solche Reihe ein Punkt der Trennung. Aber dieser Punkt kann beliebig weit “draußen” liegen. So daß ich zu jeder Reihe, die π begleitet, eine finden kann, die es weiter begleitet. Wenn ich also die Gesamtheit aller irrationalen Zahlen habe außer π und nun π einsetze, so kann ich keinen Punkt angeben, an dem π nun wirklich nötig wird, es hat an *jedem* Punkt einen Begleiter, der es von Anfang an begleitet.

↰ Ibid., XVII−181e. Auf die obige Frage müßte man antworten: “π, wenn es eine Extension wäre, würde uns niemals abgehen”. D.h., wir könnten niemals eine Lücke bemerken. Wenn man uns fragen würde, “aber hast Du auch einen unendlichen Dezimalbruch – der m an der r-ten Stelle hat und n an der s-ten etc.?” so könnten wir ihm immer dienen.

↰ Ibid., XVII−181e. Man kann also nicht sagen, daß die gesetzmäßig fortschreitenden unendlichen Dezimalbrüche noch ergänzungsbedürftig sind durch eine unendliche Menge ungeordneter unendlicher Dezimalbrüche, die “unter den Tisch fielen”, wenn wir uns auf die *gesetzmäßig erzeugten beschränken* würden. Wo ist so ein ungesetzmäßig erzeugter unendlicher Bruch? Und wie können wir ihn vermissen? Wo ist die Lücke, die er auszufüllen hätte?

↰ Ibid., XII−181c. Das zeigt klar daß die irrationale Zahl nicht die Extension eines unendlichen Dezimalbruchs sondern ein Gesetz ist.

↰ Ibid., XII−191a. Die Zahl muß an und für sich messen.
Das scheint mir quasi ihr Amt.
Tut sie das nicht, überläßt sie das den rationalen Zahlen, so brauchen wir sie nicht.

↰ Ibid., XVI−178j. Die Frage ist die, in welchem Sinne die Resultate von Messungen uns etwas über *dasjenige* sagen können, was wir auch sehen.

↰ Ibid., XX−215a. Es scheint mir der Applikation der euklidischen Geometrie wesentlich, daß wir von einem *ungenauen* Kreis, von einer *ungenauen* Kugel etc. sprechen. Und auch, daß diese Ungenauigkeit einer Verkleinerung logisch unbegrenzt fähig sein muß. Um also die Anwendung der euklidischen Geometrie zu verstehen, muß man wissen, was das Wort "*ungenau*" heißt. – Denn etwas anderes ist uns nicht gegeben als das Resultat unserer Messung und der Begriff der Ungenauigkeit. Diese beiden zusammen müssen der euklidischen Geometrie entsprechen.

↰ Ibid., X−109j. Gegen die Abgrenzung des Anwendungsgebietes spricht nämlich das Gefühl, daß wir die Arithmetik verstehen können, ohne ein solches Gebiet im Auge zu haben.

↰ *WAii*, p. 260. Die Logik |und die Mathematik| ruht nicht auf Axiomen; sowenig eine Gruppe auf den sie definierenden Elementen und Operationen beruht. Hierin liegt der Fehler das Einleuchten die selfevidenz /Evidenz/ der Grundgesetze als ein Kriterium der Richtigkeit in der Logik zu betrachten.
Ein Fundament das auf nichts steht ist ein schlechtes Fundament.

↰ *PhBm*, X−102a. Ich will sagen, die Zahlen können nur definiert werden aus Satz*formen*, unabhängig davon, welche Sätze wahr oder falsch sind.

↰ *WWK*, p. 35. Daß eine Tautologie herauskommt, ist an und für sich unwesentlich. Ich kann eben die arithmetische Gleichung sowohl auf sinnvolle Sätze wie auf Tautologien anwenden.

↰ *PhBm*, X−110c. Es handelt sich immer darum, ob und wie es möglich ist, die allgemeinste Form der Anwendung der Arithmetik darzustellen. Und hier ist eben das Seltsame, daß das in gewissem Sinne nicht nötig zu sein scheint. Und wenn es wirklich nicht nötig ist, dann ist es auch unmöglich.
Es scheint nämlich die allgemeine Form ihrer Anwendung dadurch dargestellt zu sein, daß *nichts* über sie ausgesagt wird. (Und ist das eine mögliche Darstellung, so ist es auch die richtige.)

↰ Ibid., X−112a. So verschieden Striche und Gerichtsverhandlungen sind, so kann man doch Gerichtsverhandlungen durch Striche in einem Kalender darstellen. Und kann die einen statt den anderen zählen.

↰ *WWK*, p. 225. Formen haben nichts mit Allgemeinheit zu tun. Eine Form ist weder allgemein noch speziell.
Die Sätze der Arithmetik sind nicht die *allgemeinen* Gesetze, die auf konkrete Fälle angewendet werden. Wenn ich sage: "2 Pfläumen + 2 Pfläumen sind 4 Pfläumen" und "2 Stühle + 2 Stühle sind 4 Stühle" so habe ich nicht den Satz $2 + 2 = 4$ auf verschiedene Fälle angewendet, sondern ich habe immer *dieselbe* Anwendung vor mir. *Das Mathematische ist überall dasselbe.* Für die Mathematik gibt es kein "Anwendungsproblem".

↰ **Brouwer**: The Unreliability of the Logical Principles, pp. 109-10. The tool by which we cope with infinite systems in a finite process is complete induction; it enables us to command the infinite sequence of the natural numbers by observing properties, i.e. imbeddings, which hold for any natural number, in particular also contradictions, i.e. impossible imbeddings, holding for any natural number. However, the fact that from the systems occurring in a problem a new system can be derived to which complete induction can be applied by means of an invariant over a denumerably infinite sequence, thus solving the problem, appears only a posteriori, after the construction of such a system has succeeded. For the totality of the systems which can be derived from the problem, is *denumerably unfinished*, consequently it cannot be methodically examined for the existence or non-existence of a system which solves the problem.

↰ *WAii*, p. 82. Durch Gleichungen kann ich mich nicht über Gleichungen erheben, ich kann nicht aus Gleichungen herauskommen. Das ist einer meiner Grundgedanken, der ungemein schwer ganz zu erfassen ist.

↰ *WAi*, p. 171. An unserer Schwierigkeit ist größtenteils die falsche Auffassung der Variablen schuld, nämlich die Auffassung als v e r t r ä t e sie Zahlen (die extensive Auffassung), während sie nichts vertritt sondern ist was sie ist. Verträte sie Zahlen dann brauchte allerdings nur $5^3 + 7^3 = 9^3$ Sinn haben und der Sinn der allgemeinen Sätze über die Form $x^n + y^n = z^n$ folgte daraus. Aber da die Variable autonom ist, so hat der Satz mit ihr erst dann Sinn, wenn er nach seinen eigenen Prinzipien kontrollierbar ist wie $5^3 + 7^3 = 9^3$ nach den seinen.

↰ *WAii*, p. 59. Warum soll man nicht doch sagen, daß der algebraische Satz eben das sagt, was durch die Induktion bewiesen ist? Weil diese Behauptung zu logischen Unbegreiflichkeiten führt deren Auflösung nur die Trennung des algebraischen vom arithmetischen gibt.

↰ **Weyl**: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, p. 54. Nicht das Hinblicken auf die einzelnen Zahlen, sondern nur das Hinblick auf das *Wesen Zahl* kann mir allgemeine Urteile über Zahlen liefern. Nur die *geschehene* Auffindung einer bestimmten Zahl mit der Eigenschaft $\mathcal{F}$ kann einen Rechtsgrund abgeben für die Antwort ja, und – da ich nicht alle Zahlen durchprüfen kann – nur die Einsicht, daß es im *Wesen* der Zahl liegt, die Eigenschaft $\neg\mathcal{F}$ zu haben, einen Rechtsgrund für die Antwort nein; selbst Gott steht kein anderer Entscheidungsgrund offen. *Aber diese beiden Möglichkeiten stehen sich nicht mehr wie Behauptung und Negation ge-*

genüber; weder die Negation der einen noch der andern gibt einen in sich faßbaren Sinn.

↰ *PhBm*, XIII−148d. Meine Erklärung darf nicht das mathematische Problem aus der Welt schaffen. D.h., es ist nicht so, daß ein mathematischer Satz erst dann gewiß einen Sinn hat, wenn er (oder sein Gegenteil) bewiesen worden ist. (In diesem Falle hätte nämlich sein Gegenteil nie Sinn (Weyl).)

↰ Ibid., XIII−150a. Die Frage taucht wieder auf: Inwiefern kann man einen mathematischen Satz *behaupten*? Das hieße nämlich nichts, daß ich ihn nur dann behaupten kann, wenn er richtig ist. – Sondern behaupten können, muß ich auf den Sinn hin, nicht auf die Wahrheit hin. Es scheint mir, wie schon gesagt, klar zu sein, daß ich den allgemeinen Satz so sehr oder so wenig behaupten kann wie die Gleichung $3 \times 3 = 9$ oder auch $3 \times 3 = 11$.

↰ Ibid., XV−173e. Brouwer hat Recht, wenn er sagt, daß die Eigenschaften seiner Pendelzahl sich nicht mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten vertragen. Nur ist damit keine Besonderheit der Sätze von den unendlichen Aggregaten aufgedeckt. Dem liegt vielmehr zugrunde, daß die Logik zur Voraussetzung hat, daß es nicht a priori – also logisch – unmöglich sein darf, zu erkennen, ob ein Satz wahr oder falsch ist. Ist nämlich die Frage nach der Wahr- oder Falschheit eines Satzes a priori unentscheidbar, dann verliert der Satz dadurch seinen Sinn und eben dadurch verlieren für ihn die Sätze der Logik ihre Geltung.

↰ Ibid., XIII−151g. Ich brauche kaum zu sagen, daß dort, wo der Satz des ausgeschlossenen Dritten nicht gilt, auch kein anderer Satz der Logik gilt, weil wir es dort nicht mit Sätzen der Mathematik zu tun haben. (Dagegen Weyl und Brouwer.)

↰ **Brouwer**: Intuitionismus, p. 71. Bei uns sind ein Punkt und daher auch die Punkte einer Menge immer etwas Werdendes und manchmal etwas dauerhaft Unbestimmtes, im Gegensatz zur klassischen Auffassung, wo der Punkt sowohl als bestimmt, wie als fertig gilt.

↰ *PhBm*, XVIII−191g. Der Prozeß muß unendlich vorausschauen, sonst bestimmt er keine Zahl. Es darf kein 'ich weiß es noch nicht' geben, denn es gibt kein *noch* im Unendlichen.

↰ Ibid., XIII−154g. Das Gebäude der Regeln muß *vollständig* sein, wenn wir überhaupt mit einem Begriff arbeiten wollen. – Man kann keine Entdeckungen in der Syntax machen. – Denn erst diese Gruppe von Regeln *bestimmt* den Sinn unserer Zeichen, und jede Änderung (z.B. Ergänzung) der Regeln bedeutet eine Änderung des Sinnes.
Ebenso wie man die Merkmale eines Begriffes nicht ändern kann ohne *ihn* zu ändern. (Frege)

↰ **Hilbert**: Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, pp. 164-5. Sicherlich könner wir durch diese anschauliche inhaltliche Art der Behandlung, wie wir sie geschildert und angewandt haben, in der Zahlentheorie noch erheblich weiter vorwärtskommen. Aber freilich läßt sich nicht die ganze Mathematik auf solche Art erfassen. Schon beim Übertritt zum Standpunkt der höheren Arithmetik und Algebra,

z. B. wenn wir Behauptungen über unenlichviele Zahlen oder Funktionen gewinnen wollen, versagt jenes inhaltliche Verfahren. Denn für unendlichviele Zahlen können wir nicht Zahlzeichen hinschreiben oder Abkürzungen einführen; wir würden, sobald wir diese Schwierigkeit nicht bedenken, zu denjenigen Ungereimtheiten gelangen, die FREGE in seinen kritischen Ausführungen über die hergebrachten Definitionen der Irrationalzahl mit Recht rügt.

↰ *PhBm*, XIII−160a-b. Es scheint mir, daß die Idee der Widerspruchsfreiheit in den Axiomen der Mathematik, die jetzt so viel in den Köpfen der Mathematiker herumspukt, auf einem Mißverständnis beruht.
Das hängt damit zusammen, daß die Mathematiker die Axiome nicht für das ansehen, was sie sind, nämlich für Sätze der Syntax.

↰ Ibid., XIII−150g. Das Wichtige ist, daß ich auch dann, wenn mir $3^2 + 4^2 = 5^2$ gegeben ist, *nicht* sagen darf "$(\exists x, y, z, n) \cdot x^n + y^n = z^n$", denn extensiv heißt es nichts und intensional ist es dadurch nicht bewiesen. Sondern ich darf dann eben nur die erste Gleichung aussprechen.

↰ Ibid., XI−121c. Zeichenregeln, z. B. Definitionen, kann man zwar als Sätze, die von Zeichen handeln, auffassen, aber man *muß* sie gar nicht als Sätze auffassen. Sie sind Hilfsmittel der Sprache. Hilfsmittel anderer Art als die Sätze der Sprache.

↰ Ibid., XIII−149c. Würde nicht der Gedanke einer Hierarchie besagen, daß der bloßen Fragestellung schon ein Beweis vorhergehen muß, nämlich ein Beweis des Sinnes? Dann aber, sage ich, muß der Beweis des Sinnes radikal verschiedener Natur vom Beweis der Wahrheit sein, sonst setzt dieser Beweis wieder einen voraus und wir kommen in einen endlosen Regreß.

↰ Ibid., XIII−153b. Was ist ein Beweis der Beweisbarkeit? Er ist ein anderer als der Beweis des Satzes.
Und ist etwa der Beweis der Beweisbarkeit der Beweis, daß der Satz Sinn hat? Dann aber müßte dieser Beweis auf *ganz anderen* Prinzipien beruhen, als der Beweis des Satzes. Es kann keine Hierarchie der Beweise geben!
Andererseits kann es in keinen wesentlichen Sinne eine Metamathematik geben. Alles muß in einer Type (oder also in keiner Type) liegen.

↰ Ibid., XIV−167b. Der algebraische Satz ist so gut eine Gleichung wie $2 \times 2 = 4$, sie wird nur anders angewendet. Ihre Beziehung zur Arithmetik ist anders. Sie handelt von der Ersetzbarkeit anderer Redeteile.

↰ *WWK*, p. 136. Das System der Buchstabenrechnung ist ein neuer Kalkül; aber er verhält sich zum gewöhnlichen Zahlenrechnen nicht so wie ein Metakalkül zu einem Kalkül. *Die Buchstabenrechnung ist keine Theorie.* Das ist das Wesentliche. Die "Theorie" des Schachspiels gleicht – sofern sie die Unmöglichkeit gewisser Stellung untersucht – der Algebra in ihnem Verhältnis zum Zahlenrechnen.

↰ *PhBm*, XIII−15i. Die Grenzen meiner Welt kann ich nicht ziehen, wohl aber

Grenzen innerhalb meiner Welt. Ich kann nicht fragen, ob der Satz p zum System S gehört, wohl aber ob er zum Teil s von S gehört. Ich kann also dem Problem der Dreiteilung des Winkels im großen System seinen Platz bestimmen, aber nicht im Euklidischen System danach fragen, ob es lösbar ist. In welcher *Sprache* sollte ich denn danach fragen? In der euklidischen? Und ebensowenig kann ich in der Euklidischen Sprache nach der Möglichkeit der Zweiteilung des Winkels im Euklidischen System fragen. Denn das würde in dieser Sprache auf eine Frage nach der Möglichkeit schlechtweg hinauslaufen, und diese Frage ist immer Unsinn.

Apêndice B

Problema:

Seja dada uma lei para a construção de aproximações racionais de um número real α na forma de frações continuadas simples, digamos, $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$, em que a_i é um número inteiro positivo. Pede-se que

i) compare-a com um racional $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros;
ii) encontre limites racionais para a distância entre α e $\frac{a}{b}$, i.e., encontre constantes racionais q_1 e q_2 maiores que zero tais que $q_1 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < q_2$.

Solução:

i) o número racional $\frac{a}{b}$ pode ser escrito na forma de uma fração continuada simples *finita* $[b_0; b_1, b_2, ..., b_m]$ por meio do algoritmo de Euclides, que requer no máximo n_b passos, sendo n_b um número que depende de b*. Em posse do número racional na forma $[b_0; b_1, b_2, ..., b_m]$, basta seguir o procedimento de comparação de frações continuadas simples a seguir:

[Algoritmo] Considere $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ e $y = [b_0; b_1, b_2, b_3, ...]$. Se k é o menor índice para o qual $a_k \neq b_k$, então $x < y$ se $(-1)^k(a_k - b_k) < 0$; $y < x$ caso contrário. Se não há um tal k mas o número de casas de x e y são diferentes, digamos, $x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ e $y = [b_0; b_1, ..., b_n, b_{n+1}, ...]$ com $a_i = b_i$ para $0 \leq i \leq n$, então $x < y$ se n é par e $y < x$ caso contrário.

ii) considere as seguintes definições recursivas: $[p_0 \overset{Def.}{=} a_0; p_{r+1} \overset{Def.}{=} a_{r+1}p_r + p_{r-1}]$ e $[q_0 \overset{Def.}{=} 1; q_{r+1} \overset{Def.}{=} a_{r+1}q_r + q_{r-1}]$. Pela definição das frações continuadas, $\frac{p_r}{q_r}$ é a r-ésima aproximação racional do número real $\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...]$, i.e., $\frac{p_r}{q_r} = [a_0, a_1, ..., a_r]$.

*Cf. Gabriel **Lamé**: Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers, em: *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 19.18 (1844), pp. 867–870.

Sabemos que a qualidade desta aproximação é: $\frac{1}{2q_r q_{r+1}} < \left|\alpha - \frac{p_r}{q_r}\right| < \frac{1}{q_r q_{r+1}}$*.

Chamemos de "aproximação à esquerda" do número real α uma aproximação racional que é menor que α, e de "aproximação à direita" uma aproximação racional que é maior que α. De acordo com o algoritmo de comparação de frações continuadas simples, a aproximação $\frac{p_r}{q_r}$ é uma aproximação à esquerda se r é par, e à direita caso contrário.

O problema de encontrar limites racionais para a distância entre α e $\frac{a}{b}$ se resume, então, ao problema de encontrar uma aproximação racional à direita de α e menor ou igual que $\frac{a}{b}$ ou uma aproximação racional à esquerda e maior ou igual que $\frac{a}{b}$. Em ambos casos, denotando uma tal aproximação por $\frac{p_r}{q_r}$, as constantes racionais q_1 e q_2 desejadas seriam dadas por $q_1 = \frac{1}{2q_r q_{r+1}} + \left|\frac{p_r}{q_r} - \frac{a}{b}\right|$ e $q_2 = \frac{1}{q_r q_{r+1}} + \left|\frac{p_r}{q_r} - \frac{a}{b}\right|$.

Comparemos, então, o número racional $\frac{a}{b}$ na forma $[b_0; b_1, ..., b_m]$ com $[a_0; a_1, ..., a_m]$. Se ambos números forem iguais, o problema está resolvido, pois $\frac{a}{b}$ é também uma aproximação racional de α. Neste caso, $q_1 = \frac{1}{2q_r q_{r+1}}$ e $q_2 = \frac{1}{q_r q_{r+1}}$. Caso contrário, seja $k \leq m$ o primeiro índice para o qual $a_k \neq b_k$. Há quatro casos possíveis:

a) k é impar e $[a_0; a_1, ..., a_m]$ é menor que $[b_0; b_1, ..., b_m]$;
b) k é impar e $[a_0; a_1, ..., a_m]$ é maior que $[b_0; b_1, ..., b_m]$;
c) k é par e $[a_0; a_1, ..., a_m]$ é menor que $[b_0; b_1, ..., b_m]$;
d) k é par e $[a_0; a_1, ..., a_m]$ é maior que $[b_0; b_1, ..., b_m]$.

No caso *a)*, temos uma aproximação à direita de α e menor que $\frac{a}{b}$; No caso *b)*, temos uma aproximação à direita de α e maior que $\frac{a}{b}$. Entretanto, a aproximação $[a_0; a_1, ..., a_m, a_{m+1}]$ é uma aproximação à esquerda de α e maior que $\frac{a}{b}$. No caso *c)*, temos uma aproximação à esquerda de α e menor que $\frac{a}{b}$. Entretanto, a aproximação $[a_0; a_1, ..., a_m, a_{m+1}]$ é uma aproximação à direita de α e menor que $\frac{a}{b}$. No caso *d)*, temos uma aproximação à esquerda de α e maior que $\frac{a}{b}$.

*C.D. **Olds**: *Continued Fractions*, (New mathematical library), New York: Random Hause, 1963, p. 73.

Referências

Anscombe, Elizabeth: *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, New York: Harper & Row, 1959.

Atten, Mark van: *Brouwer meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences*, Paris: Springer Verlag, 2007.

Banach, Stefan e Alfred **Tarski**: Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, em: *Fundamenta Mathematicae*, 6 (1924), pp. 244–277.

Bernays, Paul: Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen, em: *Mathematische Annalen*, 90 (1923), pp. 159–63.

— Sur le platonisme dans les mathématiques, em: *L'Enseignement mathématique*, 34 (1935), pp. 52–69.

Blanché, Robert: *L'axiomatique*, (Initiation philosophique), Paris: PUF, 1955.

Bouveresse, Jacques: *La force de la règle: Wittgenstein et l'invention de la nécessité*, (Collection "Critique"), Paris: Les Éditions de Minuit, 1987.

Brouwer, L. E. J.: Die Struktur des Kontinuums, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 429–440.

— *Intuitionismus*, ed. por Dirk van **Dalen**, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1992.

— Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 409–414.

— *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. por A. **Heyting**, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.

— Mathematik, Wissenschaft und Sprache, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 417–428.

— The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 551–554.

Brouwer, L. E. J.: The Unreliability of the Logical Principles, em: A. **Heyting** (ed.): *L. E. J. Brouwer - Collected Works: 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, vol. I, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 107–111.

Cassou-Noguès, Pierre: *Hilbert*, Collection Figures du Savoir, Paris: Les Belles Lettres, 2001.

— Le temps, l'espace et la démonstration. De Kant à Gentzen, en passant par Brouwer, Hilbert et Frege, em: *Philosophia Scientiæ*, 9.2 (2005), pp. 205–223.

Cauchy, Augustin-Louis: *Cours d'analyse algébrique*, Paris: Imprimerie Royal, 1921.

Cavaillès, Jean: *Méthode Axiomatique et Formalisme: Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris: Hermann et Cie, 1938.

Dalen, Dirk van: Intuitionistic Logic, em: Dov M. **Gabbay** e F. **Guenthner** (eds.): *Handbook of Philosophical Logic*, 2ª ed., vol. 5, Dordrecht: Kluwer-Academic Publishers, 2002, pp. 1–114.

Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, ed. por R. **Fricke**, E. **Noether** e O. **Ore**, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1930-2.

— *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1872.

Detlefsen, Michael: Hilbert's Formalism, em: *Revue Internationale de Philosophie*, 47.186 (1993), pp. 285–304.

Dirichlet, J. P. G. Lejeune.: *Lejeune Dirichlet's Werke*, ed. por L. **Kronecker** e L. **Fuchs**, Berlin: Reimer, 1897.

Dugac, Pierre: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris: Vrin, 1976.

Engelmann, M. L.: The Multiple Complete Systems conception as Fil Conducteur of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, em: *32nd International Wittgenstein Symposium*, 2009, pp. 111–3.

Ferraz Neto, Bento Prado de Almeida: *Fenomenologia em Wittgenstein - tempo, cor e figuração*, Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2003.

— O estatuto *a priori* da Mecânica no *Tractatus*, em: *Cadernos de História e Filosofia da Ciência (UNICAMP)*, 17 (2007), pp. 91–108.

— O tempo nas *Philosophische Bemerkungen*, em: *Cadernos PET-Filosofia (UFPR*, 4 (2002), pp. 81–98.

— Time, Homogeneity and Phenomenology, em: *Beiträge des 28. Internationalen Wittgenstein Symposiums: Zeit und Geschichte*, vol. XIII, Austrian Ludwig Wittgenstein Society, 2005, pp. 216–7.

Ferreira, Fernando: *Grundlagenstreit* e o intuicionismo Brouweriano, em: *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 2008, pp. 1–17.

Ferreirós, José: *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Berlin: Birkhäuser, 2007.

Floyd, Juliet: Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, em: Stewart **Shapiro** (ed.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Logic and Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2005, pp. 75–128.

Fogelin, Robert J.: Wittgenstein on Identity, em: *Synthese*, 56.2 (1983), pp. 141–54.

Frascolla, Pasquale: *Il Tractatus Logico-Philosophicus di Wittgenstein: Introduzione alla lettura*, Roma: Carocci, 2007.

— *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, en, London, New York: Routledge, 1994.

Frege, Gottlob: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms, 2007.

— Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift, em: H. **Hermes**, F. **Kambartel** e F. **Kaulbach** (eds.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Felix Meiner, 1969, pp. 9–52.

— Der Gedanke - eine logische Untersuchung, em: *Logische Untersuchungen*, Göttingen: Vanderhoeck & Ruprecht, 2003, pp. 35–62.

— *Grundgesetze der Arithmetik V1-2: Begriffsschriftlich Abgeleitet*, Jena: Hermann Pohle, 1983/1903.

— *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, trad. por Eike-Henner W. **Kluge**, New Haven e London: Yale University Press, 1971.

— *Os fundamentos da aritmética*, Coleção Os Pensadores, São Paulo: Editora Abril, 1983.

— Über Sinn und Bedeutung, em: Günther **Patzig** (ed.): *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, Göttingen: Vandenhoeck e Ruprecht, 2008, pp. 23–46.

Gallerani Cuter, João Vergílio: A lógica do *Tractatus*, em: *Manuscrito*, XXV.1 (2002), pp. 87–120.

— As cores e os números, em: *Dois pontos*, 6.1 (2010), pp. 181–193.

— Como negar um nome, em: *Philósophos*, 14.2 (2009), pp. 33–62.

— Le programme philosophique sous-jacent aux Remarques philosophiques, em: *Philosophiques*, 39.1 (2012), pp. 57–74.

— Operations and Truth-Operations in the *Tractatus*, em: *Philosophical Investigations*, 28.1 (2005), 63–75.

— Um precursor dos jogos de linguagem, em: *Analytica*, 9.2 (2005), pp. 115–136.

Goldfarb, Warren: Russell's reasons for ramification, em: C. W. **Savage** e C. A. **Anderson** (eds.): *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1989, pp. 24–40.

Griffin, Nicholas: Russell's Multiple Relation Theory of Judgment, em: *Philosophical Studies*, 47.2 (1985), pp. 213–47.

Hanks, Peter W.: How Wittgenstein Defeated Russell's Multiple Relation Theory of Judgment, em: *Synthese*, 154 (2007), pp. 121–46.

Hilbert, David: Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie, em: *Mathematische Annalen*, 104 (1931), pp. 485–94.

— *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, Berlin: von Julius Springer, 1932.

— Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, em: *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), pp. 155–77.

— The foundations of mathematics, em: Jean **van Heijenoort** (ed.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967, pp. 464–79.

— Über das Unendliche, em: *Mathematische Annalen*, 95.1 (1926), pp. 161–190.

Hintikka, Merrill B. e Jaakko **Hintikka**: *Investigating Wittgenstein*, Blackwell, 1986.

Hylton, Peter: Functions and Propositional Functions in *Principia Mathematica*, em: *Propositions, Functions, and Analysis: Selected Essays on Russell's Philosophy*, Oxford: Clarendon Press, 2005, pp. 122–37.

— Functions, Operations, and Sense in Wittgenstein's *Tractatus*, em: *Propositions, Functions, and Analysis: Selected Essays on Russell's Philosophy*, Oxford: Clarendon Press, 2005, pp. 138–52.

— *Russell, Idealism, and the Emergence of Analytic Philosophy*, en, Oxford: Clarendon Press, 1993.

Kleiner, Israel: Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, em: *The College Mathematics Journal*, 20.4 (1989), pp. 282–300.

Lampert, Timm: Wittgenstein on Pseudo-Irrationals, Diagonal-Numbers and Decidability, em: Michal **Pelis** (ed.): *Logica Yearbook 2008*, London: College Publications, 2009, pp. 95–110.

Lamé, Gabriel: Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers, em: *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 19.18 (1844), pp. 867–870.

Landini, Gregory: *Wittgenstein's Apprenticeship with Russell*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

Laugwitz, Detlef: "Das letzte Ziel ist immer die Darstellung einer Funktion": Grundlagen der Analysis bei Weierstrass 1886, historische Wurzeln und Parallelen. Em: *Historia Mathematica*, 19 (1992), pp. 341–55.

Liebmann, Otto: *Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie*, Straßburg: von Karl J. Trübner, 1880.

Lopes dos Santos, Luis Henrique: A essência da proposição e a essência do mundo, em: *Tractatus Logico-Philosophicus*, São Paulo: EdUSP, 1993, pp. 11–112.

— A harmonia essencial, em: Adauto **Novaes** (ed.): *A crise da razão*, São Paulo: Companhia das Letras, 1993, pp. 437–55.

— *O Olho e o Microscópio: A gênese e os fundamentos da lógica segundo Frege*, Rio de Janeiro: Nau, 2008.

Marion, Mathieu: Jogando o bebê junto com a água do banho: Wittgenstein, Goodstein e o cálculo equacional, em: *DoisPontos*, 6.1 (2012), pp. 195–246.

— Wittgenstein and Brouwer, em: *Synthese*, 137 (2003), pp. 103–27.

— Wittgenstein and Finitism, em: *Synthese*, 105.1 (1995), pp. 141–176.

— *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1998.

— Wittgenstein on Surveyability of Proofs, em: Oskari **Kuusela** e Marie **McGinn** (eds.): *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, Oxford: Oxford University Press, 2011, pp. 138–61.

Monk, Ray: Bourgeois, Bolshevist or Anarchist? The Reception of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, em: Guy **Kahane**, Edward **Kanterian** e Oskari **Kuusela** (eds.): *Wittgenstein and his Interpreters: Essays in Memory of Gordon Baker*, Oxford: Blackwell, 2007, pp. 269–94.

— *Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius*, New York: The Free Press, 1990.

Moore, George Edward: Wittgenstein's Lectures in 1930-33, em: *Mind*, 63.249 (1954), pp. 1–15.

Moore, Gregory H.: *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origin, Development, and Influence*, New York: Springer Verlag, 1982.

Mühlhölzer, Felix: Ein Netz von Normen: Wittgenstein und die Mathematik, em: Matthias **Kroß** e Jens **Kertscher** (eds.): *Wittgenstein und der Formalismus*, Berlin: Parerga, 2008, pp. 107–48.

Narboux, Jean-Philippe: Aspects de l'arithmétique, em: *Archives de Philosophie*, 3 (2001), pp. 569–591.

— Négation et totalité dans le *Tractatus* de Wittgenstein, em: *Lire le Tractatus logico-philosophicus de Wittgenstein*, Paris: Vrin, 2009, pp. 121–69.

Olds, C.D.: *Continued Fractions*, (New mathematical library), New York: Random Hause, 1963.

Paul, Denis: *Wittgenstein's Progress: 1929-1951*, Bergen: Wittgenstein Archives, 2007.

Penco, Carlo: *Frege*, Collana Pensatori, Roma: Carocci, 2010.

Pichler, Alois: *Untersuchungen zu Wittgensteins Nachlaß*, Bergen: Wittgenstein Archives, 1994.

Poincaré, Henri: *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flamarion, 1917.

— Les Mathématiques et la Logique, em: *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14.3 (1906), pp. 294–317.

Potter, Michael: *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, New York: Oxford University Press, 2000.

Potter, Michael: *Wittgenstein's Notes on Logic*, New York: Oxford University Press, 2008.

Ramharter, Esther: Wittgenstein on Formulae, em: *Grazer Philosophische Studien*, 89 (2014), pp. 79–91.

Ramsey, Frank Plumpton: Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920-1930, ASP. 1983.01, Archives of Scientific Philosophy, Special Collections Department, University of Pittsburgh.

— Identity, em: Maria Carla **Galavotti** (ed.): *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*, Napoli: Bibliopolis, 1991, pp. 155–69.

— The Foundations of Mathematics, em: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931, pp. 1–61.

— *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931.

Reck, Erich H. e Steve **Awodey** (eds.): *Frege's Lectures on Logic: Carnap's Student Notes 1910-1914*, based on the German text, edited, with introduction and annotations, by Gottfried Gabriel, Chicago: Open Court, 2004.

Redecker, C.: *Wittgensteins Philosophie der Mathematik: Eine Neubewertung im Ausgang von der Kritik an Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen*, (Logos (Frankfurt)), Frankfurt: De Gruyter, 2006.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschafilicher Nachlass*, ed. por M. **Noether** e W. **Wirtinger**, New York: Dover, 1953.

Rigal, Elisabeth: The Duality of Wittgenstein's Phenomenological Actuality, em: Paul **Henri** e Arild **Utaker** (eds.): *Wittgenstein and Contemporary Theories of Language*, Bergen: Wittgenstein Archives, 1992, pp. 62–83.

Rodych, Victor: Wittgenstein on Irrationals and Algorithmic Decidability, em: *Synthese*, 118.2 (1999), pp. 279–304.

— Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability, and Application, em: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 38.2 (1997), pp. 195–225.

Rothhaupt, Josef G. F.: Wittgenstein at Work: Creation, Selection and Composition of 'Remarks', em: Nuno **Venturinha** (ed.): *Wittgenstein After His Nachlass*, Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2010, pp. 51–63.

Russell, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2ª ed., London: George Allen e Unwin, 1920.

— Mathematical Logic as Based on the Theory of Types, em: *American Journal of Mathematics*, 30.3 (1908), pp. 222–262.

— Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (I.) Em: *Mind*, 13.50 (1904), pp. 204–19.

— Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (II.) Em: *Mind*, 13.51 (1904), pp. 336–54.

— Meinong's Theory of Complexes and Assumptions (III.) Em: *Mind*, 13.52 (1904), pp. 509–524.

— On Denoting, em: *Mind*, 14.56 (1906), pp. 479–493.

— On the Nature of Truth and Falsehood, em: *Philosophical Essays*, London: Longmans, 1910, pp. 170–85.

— Some Explanations in Reply to Mr. Bradley, em: *Mind*, 19.75 (1910), pp. 373–378.

— *The Principles of Mathematics*, 2nd, New York: W. W. Norton & Company, 1938.

— *Theory of Knowledge: The 1913 Manuscript*, ed. por Elizabeth Ramsden **Eames** e Kenneth **Blackwell**, London e New York: Routledge, 1984.

Russell, Bertrand e Alfred North **Whitehead**: *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

Shanker, Stuart (ed.): *Ludwig Wittgenstein: critical assessments*, vol. 3, Bristol: Croom Helm, 1986.

— *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*, New York: State University of New York Press, 1987.

Sinaceur, Hourya: Différents aspects du formalisme, em: Frédéric **Nev** e Denis **Vernant** (eds.): *Le formalisme enquestion: le tournant desannées 1930*, Paris: Vrin, 1998, pp. 129–146.

Soutif, Ludovic: *Wittgenstein et le problème de l'espace visuel: Phénomenologie, géométrie, grammaire*, Paris: Vrin, 2011.

Sullivan, Peter M.: The Totality of Facts, em: *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 100, 2000, pp. 175–92.

Van Stigt, Walter P.: Brouwer's Intuitionist Programme, em: Paolo **Mancosu** (ed.): *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's*, New York: Oxford University Press, 1998, pp. 1–22.

Waismann, Friedrich: *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Rodopi, 1982.

— The Nature of Mathematics: Wittgenstein's Standpoint, em: Stuart **Shanker** (ed.): *Ludwig Wittgenstein: critical assessments*, vol. 3, Bristol: Croom Helm, 1986, pp. 60–7.

Weierstrass, Karl: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionslehre*, Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsanrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus d. Jahren 1870 bis 1880/86, Leibzig: Teubner, 1988.

Weyl, Hermann: Die Heutige Erkenntnislage in der Mathematik, em: *Symposium*, 1 (1925), pp. 1–32.

Weyl, Hermann: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, em: *Mathematische Zeitschrift*, 10.1-2 (1921), pp. 39–79.

Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Bemerkungen*, ed. por Rush **Rhees**, Frankfurt: Suhrkamp, 1964.

— *Philosophische Grammatik*, ed. por Rush **Rhees**, Frankfurt: Suhrkamp, 1969.

— Some Remarks on Logical Form, em: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 9 (1929), pp. 162–71.

— *Tagebücher 1914-1916*, Frankfurt: Suhrkamp, 1984.

— *The Big Typescript: TS 213*, ed. e trad. por C. Grant **Luckhardt** e Maximilian A. E. **Aue**, Malden: Blackwell, 2005.

— *Tractatus Logico-Philosophicus*, trad. por Luis Henrique **Lopes dos Santos**, São Paulo: EdUSP, 1993.

— *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 1, Wien/New York: Springer Verlag, 1999.

— *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 2, Wien/New York: Springer Verlag, 1999.

— *Wiener Ausgabe; Studien Texte*, ed. por Michael **Nedo**, vol. 3, Wien/New York: Springer Verlag, 1999.

— *Wittgenstein in Cambridge: Letters and Documents 1911-1951*, ed. por Brian **McGuinness**, Malden: Blackwell, 2008.

— *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Frankfurt: Suhrkamp, 1984.

— *Wittgenstein's Lectures, Cambridge, 1930-1932: From the Notes of John King and Desmond Lee*, ed. por Desmond **Lee**, Rowman & Littlefield Pub Incorporated, 1980.

— *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939: From the Notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies*, ed. por Cora **Diamond**, Hassocks: The Harvester Press, 1976.

Wolfe, Mays: Recollections of Wittgenstein, em: K. T. **Fann** (ed.): *Ludwig Wittgenstein: The Man and his Philosophy*, New Jersey: Humanities Press, 1967, pp. 79–88.

Youschkevitch, Adolf P.: The concept of function up to the middle of the 19th century, em: *Archive for History of exact sciences*, 16.1 (1976), pp. 37–85.

Zermelo, Ernst: A new proof of the possibility of a well-ordering, em: Jean **van Heijenoort** (ed.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967, pp. 183–98.