UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para problemas quasilineares

Moisés Aparecido do Nascimento

São Carlos - SP
Dezembro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Moisés Aparecido do Nascimento
Orientador: Prof Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para problemas quasilineares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

São Carlos - SP
Dezembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nascimento, Moisés Aparecido do
N244rt Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para problemas quasilineares / Moisés Aparecido do Nascimento. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
65 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Grau de Leray-Schauder. 2. Estimativas a priori. 3. P-Laplaciano. 4. Problemas de Neumann. 5. Problemas de Dirichlet. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Moises Aparecido do Nascimento, realizada em 04/12/2015:

Francisco O.V. de Paiva
Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Edgard Almeida Pimentel
UFSCar

Prof. Dr. Olivaine Santana de Queiroz
UNICAMP

Prof. Dr. Eugenio Tommaso Massa
USP

À minha Avó Maria, minha esposa Naiara, meus filhos Livia Maria, Ana Vitória e Moisés Junior, aos meus pais, Sônia e Mozes.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela sabedoria, paz e saúde que me tem dado. A minha família que sempre me apoiou, em especial á minha avó Maria pelos conselhos durante a vida toda. Ao professor Dr. Francisco Odair(orientador) pela dedicação durante esse período da minha vida. Finalmente, à CAPES-REUNI pelo suporte financeiro nos dois primeiros anos de doutorado.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos resultados do tipo Ambrosseti-Prodi para problemas quasilineares envolvendo o operador p-Laplaciano. Consideramos o caso escalar e um problema com sistemas de equações. Para os casos escalares, trabalhamos com as condições de Neumann e Dirichlet, já para o problema envolvendo sistema, consideramos a condição de Dirichlet. Para obter tais resultados usamos a teoria do grau de Leray-Schauder e estimativas a priori.

Palavras Chave: grau de Leray-Schauder, estimativas a priori, p-Laplaciano, problemas de Neumann, problemas de Dirichlet, sistemas quasilineares.

ABSTRACT

We present results of Ambrosseti-Prodi type to quasilinear problems involving the p-Laplace operator. We consider the scalar case and a a problem with systems of equations. In the scalar case, we work with the conditions of Neumann and Dirichlet. In the problem involving system, we consider the condition of Dirichlet. In order to get the results we use the theory of Leray-Schauder degree and a priori estimates.

Key Words: Leray-Schauder Degree, a priori estimates, p-Laplacian, Neumann problems, Dirichlet problems, quasilinear systems.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho, é o estudo de problemas do tipo Ambrosetti-Prodi envolvendo o operador p-Laplaciano. Apresentaremos resultados para o caso escalar e para sistemas, no caso escalar consideramos condições de Neumann e Dirichlet na fronteira, já para o caso de sistemas a condição de fronteira será de Dirichlet.

O estudo de problemas do tipo Ambrosseti-Prodi foi iniciado com o trabalho pioneiro de A. Ambrosetti e G. Prodi, que em [2] consideraram o seguinte problema semilinear:

$$(P_D)\begin{cases} -\Delta u = f(u) + v(x) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo as condições:

(I) $f''(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$,

(II) $0 < \lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_2$.

Utilizando teoremas de inversão para aplicações diferenciáveis com singularidades em espaços de Banach, eles provam a existência de uma variedade Γ conexa e fechada, de classe C^1 em $C^{0,\alpha}(\Omega)$ que divide o espaço em duas componentes conexas A_0 e A_1 de modo que o problema (P_D) tem exatamente uma solução, nenhuma solução ou exatamente duas soluções, respectivamente se v for considerado em Γ, A_0 e A_1. A condição (II) significa que a não-linearidade f cruza o primeiro auto-valor λ_1 do problema,

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad em \;\; \Omega \\ u = 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

quando s varia de $-\infty$ á $+\infty$.

Uma representação cartesiana de Γ foi introduzida por Berger e Podolak em [8], onde os autores consideraram a seguinte decomposição de v: $v(x) = t\phi(x) + h(x)$, sendo $\phi(x)$ a primeira autofunção positiva de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ e $h(x) \in \{span(\phi)\}^\perp$. Assim o problema (P_D) pode ser reescrito como

$$(P_{Dt})\begin{cases} -\Delta u = f(u) + t\phi(x) + h(x) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Usando o método de redução de Liapunov-Schmidt, eles mostraram precisamente o mesmo resultado que Ambrosetti e Prodi, apresentado da seguinte maneira: Existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que, (P_D) tem exatamente zero, uma ou duas soluções se $t > t_1$, $t = t_1$ ou $t < t_1$, respectivamente.

Kazdan e Warner em [23] consideraram funções f mais gerais, enfraquecendo dessa forma as hipóteses(e as conclusões) de Berger-Podolak, supondo que f satisfaz a condição

$$(1) \qquad -\infty \le \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \le \infty.$$

Em [23], os autores constroem uma apropriada supersolução e provam que existe t_1 tal que o problema (P_{Dt}), possui pelo menos uma solução se $t < t_1$ e não possui solução se $t > t_1$. Dancer [13] estende os resultados de [23] para operadores diferenciais na forma divergente. Além disso, limitando o crescimento de f para $t \ge 0$ (tal crescimento pode ser superlinear) o autor obtém estimativas a priori para as soluções, donde segue existência de pelo menos duas soluções para $t < t_1$ e uma solução para $t = t_1$.

Em [21], Hess enfraquece as hipóteses sobre ϕ: Supondo ϕsuave, $\phi \ge 0$ and $\phi \ne 0$. Como consequência, a construção da supersolução feita em [23] não é mais possível. Em [21], uma primeira solução para $t << -1$ é encontrada com argumentos distintos dos que estavam sendo considerados até então, e a teoria do grau. Em [7], Berestycki e Lions consideraram um problema similar com f podendo ser superlinear e com condição de Neumann na fronteira.

Em [24], Koizumi e Schmidt consideraram o seguinte problema para o operador p-Laplaciano, $p > 1$,

$$(P_p)\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + t\phi + h \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde, $\phi, h \in C(\overline{\Omega})$ com $\phi \geq 0$ e $f \in C^1$ satisfazendo

$$\alpha = \lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} < \lambda_1 < \beta = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t},$$

em que λ_1 é o menor autovalor do problema

$$(P_a)\begin{cases} -\Delta_p u - \lambda|u|^{p-2}u = 0 \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A primeira solução é obtida comparando (P_p) com o problema limite

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \alpha|u^+|^{p-1} - \beta|u^-|^{p-1} + h \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Em [24], os autores provam que existe $t(h) << -1$ tal que para todo $t \leq t(h)$ o problema (P_p) tem uma solução negativa. Em seguida, supondo $\phi > 0$ in $\overline{\Omega}$, eles mostram que existem t_1, t_2, $t_1 \leq t_2$ tal que (P_p) tem pelo menos uma solução para $t \leq t_2$, não possui solução se $t > t_2$ e possui pelo menos duas soluções se $t < t_1$. Por fim, os autores mostram multiplicidade de soluções quando $\phi \geq 0$, usando argumentos de limite.

Arcoya e Ruiz, em [4], supõem que f é contínua e satisfaz

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = \lambda' < \infty$$

e que para todo $M > 0$, existe $\xi > 0$ tal que

$$f(s) + \xi|s|^{p-2}s \text{ é não decrescente em } \; s \in [-M, M].$$

Os autores obtem, entre outros resultados, que $t_1 = t_2$ quando $p > 2$ e ϕ satisfaz: $\phi > 0$ em Ω e $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0$ em $\partial\Omega$. As principais técnicas utilizadas foram sub-supersolução, príncipios de comparação e teoria do grau. Miotto, em [29], e Arias e Cuesta, em [5], usando "blow-up" e as técnicas desenvolvidas em [4], estudaram uma versão superlinear do problema (P_p).

O problema para o p-Laplaciano com condição de Neumann foi considerado por De Paiva e Montenegro [16]. Mais precisamente, em [16], os autores consideram o seguinte problema

$$(P_{Nt}) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + t \ \ ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

com $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo condições como em [4]. Os autores provam que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que (P_{Nt}) não tem soluções se $t > t_0$, e (P_{Nt}) tem pelo menos uma solução minimal se $t < t_0$. Se em adição f for localmente Lipschitz contínua em s uniformemente q.t.p $x \in \Omega$, então existe $t_1 \leq t_0$ tal que para $t < t_1$ o problema (P_{Nt}) tem pelo menos duas soluções distintas. Além disso, a igualdade $t_1 = t_0$ ocorre se $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Agora apresentaremos nossos resultados. No Capítulo 1, estudamos o seguinte problema de Neumann:

$$(P_t) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) \ \ ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) \not\equiv 0$ e $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Caratheodory satisfazendo as seguintes condições:

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < 0 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Supomos também que $\forall M > 0$, $\exists \lambda > 0$ tal que,

$$g(x,u) = f(x,u) + \lambda|u|^{p-2}u \quad \text{é não decrescente } \forall u \in [-M, M],$$

e a seguinte condição de crescimento

$$|f(x,s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}); \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Provamos o seguinte resultado do tipo Ambrosetti-Prodi: existem $t_1 \leq t_0 \in \mathbb{R}$, tais que

(i) Se $t < t_1$, então (P_t) possui pelo menos duas soluções.

(ii) Se $t \leq t_0$, então o problema possui (P_t) pelo menos uma solução.

(ii) Se $t > t_0$, então o problema (P_t) não possui solução.

Não conhecemos até o momento um resultado neste sentido, isto é, envolvendo o operador p-Laplaciano, com condição de Neumann na fronteira e $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$. O que torna este resultado relevante é o fato da não existência de supersolução para o problema (P_t), sendo assim, não podemos provar a existência da primeira solução tal como foi feito nos trabalhos de De Paiva-Montenegro [16]. Em tal trabalho, para garantir a existência de supersolução os autores precisaram da hipótese $\phi \equiv 1$. Em um certo sentido, nosso resultado estende o resultado de Berestycki-Lions [7] para o p-Laplaciano.

No Capítulo 2 consideramos o problema (P_p) com $\phi(x) \geq 0$ em $\bar{\Omega}$, $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Obtemos os mesmos resultados do Capítulo 1, entretanto alguns resultados auxiliares precisaram de demonstrações diferentes das que foram feitas no problema de Neumann. Nossos resultados também podem ser comparados aos obtidos por Koizumi-Schmidt [24] e por Arcoya-Ruiz em [4]. Mas as técnicas utilizadas nestes trabalhos não podem ser aplicadas na nossa situação. Nossos resultados completam os obtidos por estes autores.

No que concerne problemas do tipo Ambrosseti-Prodi envolvendo sistemas de equações com o operador Laplaciano, podemos citar por exemplo [11], [14], [30] e [15]. De Figueiredo e Sirakov, em [14], estudam com auxilio da teoria de soluções de viscosidade, um problema do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores uniformemente elíticos na forma não-divergente e com coeficientes não suaves. Resultados similares envolvendo o operador p-Laplaciano foram obtidos por Miotto em [28]. De fato, o principal resultado em [28] é uma versão para sistema de [4, Teorema 3.6].

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do seguinte problema

$$(S_t)\begin{cases} -\Delta_p u_1 = f_1(x,u_1,u_2) + t_1\phi_1 + h_1, & ; x \in \Omega \\ -\Delta_p u_2 = f_2(x,u_1,u_2) + t_2\phi_2 + h_2, & ; x \in \Omega \\ \qquad u_1 = u_2 = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado, $\phi_i, h_i \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi_i \geq 0$, $i = 1,2$, $t = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ é um parâmetro e $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, são funções contínuas satisfazendo um certo conjunto de hipóteses como em [28]. O principal resultado obtido é uma generalização do Capítulo 2 para sistemas. Para obter o resultado, adaptamos as técnicas do Capítulo 2 juntamente com as utilizadas em [14] e [28].

PRELIMINARES

0.1 Princípios de comparação e do Máximo

Os resultados que enunciaremos aqui serão usados no decorrer deste trabalho. Começaremos enunciando um princípio de comparação devido a [20] e outro devido a [31] e em seguida, dois príncipios do máximo bem conhecidos para o caso escalar. Para a demonstração da primeira proposição, podemos citar por exemplo ([17], Teorema 5). Para a segunda proposição ver ([32], Teorema 5).

Lema 0.1. *Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ funções não negativas satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^{p-1} \leq -\Delta_p v + v^{p-1} & ; em \ \ \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq |\nabla v|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial \nu} & ; sobre \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Então, $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.

Lema 0.2. *Sejam $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ funções satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2}u \leq -\Delta_p v + \lambda |v|^{p-1}v & ; em \ \ \Omega \\ u \leq v & ; sobre \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

com $\lambda > 0$. Então, $u \leq v$ em Ω.

Proposição 0.3. *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a|u|^{p-1}u + g(x) & ; x \in \Omega \\ u = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Para $g \in L^{p'}(\Omega)$, o princípio do máximo ocorre para esse problema se, e somente se, $a < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$.

O seguinte resultado é conhecido como Princípio do Máximo de Vázquez.

Proposição 0.4. *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ com $u \geq 0$ q.t.p em Ω e $\Delta_p u \leq \vartheta(u)$ q.t.p em Ω, sendo $\vartheta : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ contínua, não decrescente, $\vartheta(0) = 0$ e ainda ou $\vartheta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou $\vartheta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e a seguinte relação ocorre*

$$\int_0^1 (\vartheta(s)s)^{-\frac{1}{p}}\, ds = \infty.$$

Então se u não é identicamente nula sobre Ω, temos que u é positiva em todo Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da esfera interior e $u(x_0) = 0$ então $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ onde ν é um vetor normal exterior a x_0.

0.2 Estimativas a Priori

Para provar a limitação da parte negativa de uma eventual solução de (P_{Dt}), foi usado o seguinte resultado devido a Ladyzhenskaya e Ural'tseva, para mais detalhes sobre a demonstração veja por exemplo ([25], Lema 5.1).

Lema 0.5. ([*25*], Lema 5.1) *Seja $u(x)$ uma função mensurável em Ω. Suponha que exista $k_0 > 0$ tal que para todo $k \geq k_0 > 0$,*

$$\int_{A_k} (u - k)\, dx \leq \gamma k^{\alpha} (m(A_k))^{1+\epsilon} \tag{2}$$

onde $A_k = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$, $m(A_k)$ é a medida de A_k, γ, ϵ,α são constantes tais que $\epsilon > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1 + \epsilon$. Nestas condições, existe $C = C\Big(\gamma, \alpha, \epsilon, k_0, \|u\|_{L^1(A_{k_0})}\Big)$ tal que $\|u\|_{L^\infty} \leq C$.

0.3 Alguns resultados de Regularidade

Os próximos resultados podem ser encontrados em [4]

Lema 0.6. *O operador p-Laplaciano definido por;*

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \tag{3}$$

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx \tag{4}$$

é limitado e contínuo. Além disso, $-\Delta_p$ é bijetivo e seu inverso, denotado por $\mathcal{K}$, é também limitado e contínuo.

Lema 0.7. *Sejam $f_n, f \in L_\infty(\Omega)$ com $\|f_n\|_{L^\infty} < C$ para alguma constante $C > 0$ e tal que $f_n \to f$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Considere $u_n = \mathcal{K}(f_n)$, $u = \mathcal{K}(f)$, então $u_n \to u$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 \leq \beta < \alpha$. Em particular, o operador $\mathcal{K} : L^\infty(\Omega) \to C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ é contínuo e compacto.*

O próximos lemas são combinações de um resultado de Ladyzhenskaya e Ural'tseva ([25], `Teorema`7.1) e estimativas C^1 de [31]

Lema 0.8. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução do seguinte problema:*

$$(P_g)\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde g é uma função de Caratheodory satisfazendo $sgn[u].g(x,u) \leq M(1+|u|^q)$ para algum $1 < q < \frac{Np}{N-p}$. Então, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$, e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(M)$. Em particular, o operador $\mathcal{K} : L^\infty(\Omega) \to C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é limitado, isto é, $\|\mathcal{K}(f)\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|f\|_{L^\infty})$, para toda $f \in L^\infty(\Omega)$.

Lema 0.9. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uma solução do seguinte problema:*

$$(P_g)\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) \quad ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde g é uma função de Caratheodory satisfazendo $sgn[u].g(x,u) \leq M(1+|u|^q)$ para algum $1 < q < \frac{Np}{N-p}$. Então, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$, e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(M)$. Em particular, o operador $\mathcal{K} : L^\infty(\Omega) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é limitado, isto é, $\|\mathcal{K}(g)\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|g\|_{L^\infty})$, para toda $g \in L^\infty(\Omega)$.

0.4 O Operador $\mathcal{H}$

Os próximos lemas foram motivados pelos resultados em [21] e [22]. A demonstração segue as mesmas idéias de ([22], `Proposição` (a)), para o p-Laplaciano.

Lema 0.10. *O problema*

$$(P_*) \begin{cases} -\Delta_p u + c|u|^{p-2}u = g(x) & ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução em $W^{1,p}(\Omega)$, para toda $g \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, o operador $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ dado por $\mathcal{H}(g) = u$ se, e somente se, u é solução de (P_*), é estritamente crescente e compacto. Se $S \subset L^\infty(\Omega)$ é $L^\infty(\Omega)$-limitado na topologia de $L^p(\Omega)$ induzida pelo imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, então o operador $\mathcal{H}_S : S \to C^1(\overline{\Omega}) : g \to \mathcal{H}(g)$ é contínuo.

Demonstração. Note que, pelo fato de $c > 0$ podemos encontrar constantes $M_1 < 0$ e $M_2 > 0$ tal que as funções $\phi_1(x) = M_1$ e $\phi_2(x) = M_2$, são sub e supersoluções estritas do problema (P_*). Seja $A = [\phi_1, \phi_2]$ conjunto das funções $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ tais que $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$. Suponha que $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfaz

$$-\Delta_p u + c|u|^{p-2}u \geq -\Delta_p v + c|v|^{p-2}v \quad ; x \in \Omega, \quad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad ; x \in \partial\Omega$$

Usando o Lema 0.1 de ([20], `Lema` 3.1)imediatamente concluimos que uma solução de (P_*) é única e que o operador solução, caso exista, é estritamente crescente. Seja $A_R = A \cap B_R$, onde B_R é a bola de raio R em $C^1(\overline{\Omega})$. Pelo fato de $\phi_1(x) = M_1$ e $\phi_2(x) = M_2$ serem sub e supersoluções estritas, uma solução u de (P_*) está no interior de A. Logo para R suficientemente grande obtemos que

$$\deg(I - P, A_R, 0) = 1,$$

onde $P : A_R \to C^1(\overline{\Omega})$ é definido por $Pu = \mathcal{K}(g - c|u|^{p-2}u)$ e $\mathcal{K}$ é o operador dado no Lema 0.9. Portanto, o problema (P_*) é unicamente resoluvel para cada $g \in L^\infty(\Omega)$ e o operador solução $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to W^{1,p}(\overline{\Omega})$ é estritamente crescente. Seja $\{g_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ e $w_n = \mathcal{H}g_n$, logo

$$-\Delta_p w_n + c|w_n|^{p-2}w_n = g_n.$$

Pelo Lema 0.9 $w_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\|w_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} < C$. Como a imersão $C^{1,\alpha} \hookrightarrow C^{1,\beta}$, $0 \leq \beta < \alpha$ é compacta, passando a uma subsequência se necessário, $\mathcal{H}g_n \to w$ fortemente em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, portanto $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ é compacto. Seja $S \subset L^\infty(\Omega)$ é $L^\infty(\Omega)$-limitado na topologia de $L^p(\Omega)$ induzida pelo imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Suponha que $H_S : S \to C^1(\overline{\Omega})$ não seja contínuo, então existe uma sequência $(g_n) \subset S$ convergindo em L^p para alguma $g \in S$ e tal que $\|\mathcal{H}g_n - \mathcal{H}g\|_{C^1(\overline{\Omega})} \geq \delta$ para um $\delta > 0$ conveniente. Desde que $(\mathcal{H}g_n)$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$, e $C^{1,\alpha} \hookrightarrow C^{1,\beta}$, $0 \leq \beta < \alpha$ é compacto, passando a uma subsequência se necessário, $\mathcal{H}g_n \to u$ fortemente em $C^1(\overline{\Omega})$. Passando ao limite em

$$-\Delta_p \mathcal{H}g_n + c|\mathcal{H}g_n|^{p-2}\mathcal{H}g_n = g_n(x) \quad ; x \in \Omega \quad |\nabla \mathcal{H}g_n|^{p-2}\frac{\partial \mathcal{H}g_n}{\partial \nu} = 0 \quad ; x \in \partial\Omega$$

concluimos que u satisfaz

$$-\Delta_p u + c|u|^{p-2}u = g(x) \quad ; x \in \Omega \quad |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad ; x \in \partial\Omega$$

e pela unicidade das soluções, segue que $u = \mathcal{H}g$. O que gera uma contradição com o fato de que $0 < \delta \leq \liminf \|\mathcal{H}g_n - \mathcal{H}g\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 0$. $\square$

O próximo lema é um análogo ao lema anterior, feito com condição de Dirichlet.

Lema 0.11. *O problema*

$$(P^*) \begin{cases} -\Delta_p u + c|u|^{p-2}u = g(x) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$,*para toda* $g \in L^\infty(\Omega)$. *Além disso, o operador* $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ *é estritamente crescente e compacto. Se* $S \subset L^\infty(\Omega)$ *é* $L^\infty(\Omega)$-*limitado na topologia de* $L^p(\Omega)$ *induzida pelo imersão* $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *então o operador* $\mathcal{H}_S : S \to C_0^1(\overline{\Omega}) : g \to \mathcal{H}(g)$ *é contínuo.*

Demonstração. Note que, pelo fato de $c > 0$ podemos encontrar constantes $M_1 < 0$ e $M_2 > 0$ tal que as funções $\phi_1(x) = M_1$ e $\phi_2(x) = M_2$, são sub e supersoluções estritas do problema (P^*). Seja $A = [\phi_1, \phi_2]$ conjunto das funções $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$, tais que $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$. Suponha que $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c|u|^{p-2}u \geq -\Delta_p v + c|v|^{p-2}v \quad ; x \in \Omega \\ u \geq v \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Usando o Lema 0.2 de [31], concluimos que uma solução de (P^*) é única e que o operador solução, caso exista, é estritamente crescente. Seja $A_R = A \cap B_R$, onde B_R é a bola de raio R em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Pelo fato de $\phi_1(x) = M_1$ e $\phi_2(x) = M_2$ serem sub e supersoluções estritas, uma solução u de (P^*) está no interior de A. Logo para R suficientemente grande devemos ter

$$\deg(I - P, A_R, 0) = 1,$$

onde $P : A_R \to C^1(\overline{\Omega})$ é definido por $Pu = \mathcal{K}(g - c|u|^{p-2}u)$ e $\mathcal{K}$ é o operador dado no Lema 0.8. Portanto, o problema (P^*) é unicamente resoluvel para cada $g \in L^\infty(\Omega)$ e o operador solução $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ é estritamente crescente. Seja $\{g_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ e $w_n = \mathcal{H}g_n$, logo

$$-\Delta_p w_n + c|w_n|^{p-2}w_n = g_n.$$

Pelo lema 0.8 $w_n \in C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com $\|w_n\|_{C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} < C$. Como a imersão $C_0^{1,\alpha} \hookrightarrow C_0^{1,\beta}$, $0 \leq \beta < \alpha$ é compacta, passando a uma subsequência se necessário, $\mathcal{H}g_n \to w$ em $C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, portanto $\mathcal{H} : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ é compacto. Seja $S \subset L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$-limitado na topologia de $L^p(\Omega)$ induzida pelo imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $\{g_n\} \subset S$ tal que $g_n \to g$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$, então pelo lema 0.6 temos que $\mathcal{H}g_n \to \mathcal{H}g$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e passando a uma subsequência se necessário, temos que $\mathcal{H}g_n \to \mathcal{H}g$ em $C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e isso conclui a continuidade de $\mathcal{H}$. $\square$

CAPÍTULO 1

PROBLEMAS COM CONDIÇÃO DE NEUMANN

1.1 Resultados Príncipais

Nesta seção, apresentaremos nossos resultados de existência e multiplicidade de soluções.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Caratheodory satisfazendo as seguintes condições:

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < 0 \tag{1.1}$$

e

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} > 0 \tag{1.2}$$

uniformemente em $x \in \Omega$. No que segue, $t \in \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$. Considere o seguinte problema,

$$(P_t) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) & ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) \not\equiv 0$ e $\phi, h \in L^{\infty}(\Omega)$. Suponhamos também que $\forall M > 0$, $\exists \lambda > 0$ tal que,

$$g(x,u) = f(x,u) + \lambda |u|^{p-2}u \tag{1.3}$$

é não decrescente $\forall u \in [-M, M]$.

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições (1.1), (1.2) e (1.3) estejam satisfeitas e que existe uma constante c tal que,*

$$|f(x,s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}); \quad \forall s \leq 0 \tag{1.4}$$

e uniformemente em $x \in \Omega$ *. Então, existe* $t_0 \in \mathbb{R}$*, tal que*

(i) *Se* $t < t_0$*, então* (P_t) *possui pelo menos uma solução.*

(ii) *Se* $t > t_0$*, então o problema* (P_t) *não tem solução.*

Restringindo a condição (1.4) para $s \to +\infty$ obtemos o seguinte resultado relativo a multiplicidade.

Teorema 1.2. *Supondo as condições (1.1), (1.2) e (1.3) e que existe uma contante c tal que,*

$$|f(x,s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}); \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

e uniformemente em $x \in \Omega$*. Então existe* $t_1 \in \mathbb{R}$ *com* $t_1 \leq t_0$*, tal que*

(i) *Se* $t = t_0$*, então* (P_t) *possui pelo menos uma solução.*

(ii) *Se* $t < t_1$*, então o problema* (P_t) *possui pelo menos duas soluções distintas.*

1.2 Primeira Solução

Nesta seção usaremos a teoria do grau de Leray e Schauder para garantir a existência de solução para o problema (P_t).

Note que resolver o problema (P_t) é equivalente a mostrar a existência de uma solução para a equação

$$u = \mathcal{H}\left(f(x,u) + c|u|^{p-2}u + t\phi + h\right) \tag{1.6}$$

onde, $\mathcal{H}$ é o operador dado no Lema 0.10.

Mostraremos que a equação (1.6) tem uma solução para algum $t \in \mathbb{R}$ e para isso, precisaremos dos próximos lemas, que foram motivados pelos resultados em ([21], `Lemas 1 e 2`).

Lema 1.3. *Para cada $R_1 > 0$ dado, existe um número real $T = T(R_1)$ tal que*

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \tag{1.7}$$

para toda $v \in C^1(\overline{\Omega})$ com $\|v^+\| = R_1$, $\forall \tau \in [0,1]$, $\forall t \leq T$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existam sequências $\{v_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ com $\|v_n^+\| = R_1$, $\{\tau_n\} \subset [0,1]$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $t_n \to -\infty$, tal que

$$v_n = \mathcal{H}\left(\tau_n\left(f(x,v_n) + c|v_n|^{p-2}v_n + t_n\phi + h\right)\right) \tag{1.8}$$

usando a hipótese (1.4) obtemos,

$$\begin{aligned}
f(x,s) + c|s|^{p-2}s &\leq c|s|^{p-2}s + |f(x,s)| && (1.9)\\
&\leq c|s|^{p-2}s + c + c|s|^{p-1} && (1.10)\\
&= c && (1.11)\\
&\leq f(x,0) + 2c && (1.12)
\end{aligned}$$

para $s \leq 0$. Assim, para a sequência v_n temos

$$\begin{aligned}
\tau_n\left(f(x,v_n) + c|v_n|^{p-2}v_n + t_n\phi + h\right) &\leq \tau_n\left(f(x,v_n^+) + c|v_n^+|^{p-2}v_n^+ + 2c + t_n\phi + h\right)\\
&\leq \tau_n(M + t_n\phi + h) \leq M + t_n\phi + h.
\end{aligned}$$

onde, $M = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}, v_n^+\in[0,R_1]} \left[f(x,v_n^+) + c|v_n^+|^{p-2}v_n^+ + 2c\right]$. Segue que

$$v_n \leq \mathcal{H}(M + t_n\phi + h)$$

Seja $w_n = \mathcal{H}((M + t_n\phi + h))$, ou seja w_n satisfaz

$$-\Delta_p w_n + c|w_n|^{p-2}w_n = (M + t_n\phi + h)$$

Defina s_n tal que $t_n = |s_n|^{p-2}s_n$, assim

$$-\Delta_p(\frac{w_n}{s_n}) + c|\frac{w_n}{s_n}|^{p-2}(\frac{w_n}{s_n}) = (\frac{M}{t_n} + \phi + \frac{h}{t_n})$$

Logo, $(\frac{M}{t_n} + \phi + \frac{h}{t_n}) \to \phi$, quando $t_n \to -\infty$. Pelo Lema 0.10 temos que $\mathcal{H}$ é fortemente crescente e contínuo quando restrito a um conjunto $S \subset L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$-limitado, segue que

$$\frac{w_n}{s_n} \to \mathcal{H}(\phi) > 0.$$

de onde segue que $w_n < 0$. Logo $v_n^+ = 0$, contradizendo o fato de que $\|v_n^+\| = R_1$. $\square$

Lema 1.4. *Seja $t \in \mathbb{R}$ fixo. Então existe $R_2 > 0$ tal que*

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \tag{1.13}$$

para toda $v \in C^1(\overline{\Omega})$ com $\|v^-\| = R_2$, $\forall \tau \in [0,1]$.

Demonstração. A idéia é obtermos estimativas a priori para eventuais soluções da equação

$$v_\tau = \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v_\tau) + c|v_\tau|^{p-2}v_\tau + t\phi + h\right)\right) \quad \tau \in [0,1].$$

segue das hipóteses (1.1) e (1.2) que existem $\epsilon > 0$ e $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,s) \geq -\epsilon|s|^{p-2}s + c_1 \ \ \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

logo,

$$\begin{aligned} -\Delta_p v_\tau + c|v_\tau|^{p-2}v_\tau &= \tau\left(f(x,v_\tau) + c|v_\tau|^{p-2}v_\tau + t\phi + h\right) \\ &\geq \tau\left(c|v_\tau|^{p-2}v_\tau - \epsilon|v_\tau|^{p-2}v_\tau + c_1 + t\phi + h\right) \\ &= \tau\left((c-\epsilon)|v_\tau|^{p-2}v_\tau + c_1 + t\phi + h\right) \end{aligned}$$

Por outro lado, seja w_τ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w_\tau + (c - \tau(c-\epsilon))|w_\tau|^{p-2}w_\tau = \tau(c_1 + t\phi + h) \ \ ; x \in \Omega \\ |\nabla w_\tau|^{p-2}\dfrac{\partial w_\tau}{\partial \nu} = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Note que $\tau(c-\epsilon) < c$, logo o conjunto $(w_\tau)_{\tau\in[0,1]}$ é limitado em $C^1(\overline{\Omega})$, isto é, existe c_2 tal que $\|w_\tau\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq c_2$. Segue do princípio de comparação fraco Lema 0.1, que $v_\tau \geq w_\tau \geq -c_2$. Tomemos então $R_2 = c_2 + 1$ e o resultado segue. $\square$

Mostraremos agora que a equação (1.6) tem uma solução para algum t usando o grau de Leray-Shauder. Dado $R_1 > 0$, fixemos $t \leq T(R_1)$ com $T(R_1)$ dado pelo Lema 1.3 e considere $R_2 > 0$ garantido no Lema 1.4. Considere o conjunto

$$\Lambda = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}) : \left\|v^+\right\| < R_1 \,, \left\|v^-\right\| < R_2\right\}$$

Note que Λ é um conjunto aberto em $C^1(\overline{\Omega})$ contendo 0. Pelos Lemas 1.3 e 1.4 temos que

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \quad \forall v \in \partial\Lambda,$$

Logo, pela invariância homotópica do grau de Leray-Schauder segue que

$$\deg\left(I - \mathcal{H}\left(\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right), \Lambda, 0\right) = \deg\left(I, \Lambda, 0\right) = 1.$$

de onde segue que existe $v \in \Lambda$ tal que

$$v = \mathcal{H}\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)$$

e portanto, o problema (P_t) possui uma solução para $t \leq T(R_1)$.

1.3 Demonstração do Teorema 1.1

Nesta seção seguiremos as idéias de De Paiva e Montenegro em [16] para garantirmos a existência de subsolução para o problema (P_t). Em seguida, mostraremos o bem conhecido método de sub-supersolução. Usando estes resultados, mostraremos que se o problema (P_t) tem solução para algum t então para todo $s \leq t$ também tem solução e em seguida faremos a demonstração do Teorema 1.1. Começaremos com o seguinte resultado:

Lema 1.5. *O problema (P_t) possui subsolução para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p z \leq f(x,z) + t\phi(x) + h(x) \quad ; x \in \Omega \\ z \leq 0 \quad ; x \in \overline{\Omega} \\ |\nabla z|^{p-2}\dfrac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Mostraremos que existe uma constante z_t negativa satisfazendo o problema acima. De fato, usando a hipótese (1.1) segue que existem constantes $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tais que $f(x,s) \geq -\epsilon|s|^{p-2}s - C$, $s < 0$. Defina

$$z_t = -\left(\frac{|t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty + C}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \tag{1.14}$$

segue que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x,z_t) + t\phi + h \geq -\epsilon|z_t|^{p-2}z_t - C + t\phi + h &= \epsilon\left(\frac{|t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty + C}{\epsilon}\right) - C + t\phi + h \\ &\geq |t|\,\|\phi\|_\infty + t\phi + \|h\|_\infty + h \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De onde segue que z_t é subsolução de (P_t). Além disso, como $f(x,k)+t\phi+h \geq -\epsilon|k|^{p-2}k - C + t\phi + h \geq -\epsilon|z_t|^{p-2}z_t - C + t\phi + h$ é fácil ver que toda constante $k < z_t$ é subsolução estrita de (P_t). $\square$

O próximo Teorema é conhecido como Método de sub e supersolução.

Teorema 1.6. *Sejam z_t,$\overline{w} \in C^1(\overline{\Omega})$ sub e supersolução de (P_t) respectivamente tais que $z_t \leq \overline{w}$ em Ω. Então existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_t) tal que $z_t \leq u \leq \overline{w}$ em Ω e $|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Defina os operadores $N_t : C^1(\overline{\Omega}) \to L^\infty(\Omega)$ por

$$N_t(v) = f(x,v) + \lambda|v|^{p-2}v + t\phi + h \ \ , \ \ v \in C^1(\overline{\Omega})$$

e $T : L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ por $T(v) = w$ se, e somente se, w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w + \lambda|w|^{p-2}w = v \ \ ; x \in \Omega \\ |\nabla w|^{p-2}\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Defina também $\widetilde{\mathcal{K}_t} : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ por $\widetilde{\mathcal{K}_t} = T \circ N_t$.
Note que u é um ponto fixo de $\widetilde{\mathcal{K}_t}$ se, e somente se, u é uma solução de (P_t). Mostremos que $\widetilde{\mathcal{K}_t}$ é compacto. Com efeito, como $\widetilde{\mathcal{K}_t} = T \circ N_t$ e N_t é contínua, basta mostrar que T é compacto. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ e $w_n = T(u_n)$, logo

$$-\Delta_p w_n + \lambda|w_n|^{p-2}w_n = u_n.$$

Pelo Lema 0.9 $w_n \in C^1(\overline{\Omega})$ com $\|w_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} < C$. Obtemos pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ que, a menos de subsequência, $w_n \to w$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, portanto T

é compacto.

Agora, defina

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : z_t(x) \leq u(x) \leq \overline{w} \right\}.$$

Note que $\mathcal{A}$ é fechado e convexo. Pela hipótese (1.3) e pelo princípio de comparação temos que $\widetilde{\mathcal{K}_t}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, e pelo Lema 0.9 $\widetilde{\mathcal{K}_t}(\mathcal{A})$ é limitado. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ponto fixo de $\widetilde{\mathcal{K}_t}$, ou seja, existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_t) tal que $z_t(x) \leq u(x) \leq \overline{w}$ em Ω. $\square$

O próximo resultado nos diz que, o conjunto dos t para os quais o problema (P_t) tem solução é um intervalo não degenerado.

Lema 1.7. *Se o problema (P_t) tem solução para algum $t \in \mathbb{R}$, então (P_t) tem solução para todo $s \leq t$.*

Demonstração. Seja u_t uma solução de (P_t). Para todo $s \leq t$ temos que u_t é supersolução do problema (P_t) correspondente a s, pois

$$-\Delta_p u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) \geq f(x,u) + s\phi(x) + h(x).$$

Por outro lado, segue do Lema 1.5 que existe uma subsolução $z_s < u_t$. Logo, pelo Teorema 1.6 existe uma solução u_s de (P_t) para todo $s \leq t$. $\square$

1.3.1 Não existência de solução para t suficientemente grande

O lema que apresentaremos agora mostra que o problema (P_t) não possui solução para t grande o suficiente.

Lema 1.8. *O problema (P_t) não possui solução para $t > 0$ suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos por que (P_t) possui solução u_t para algum t. Segue das hipóteses (1.1) e (1.2) que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$f(x,s) \geq \epsilon |s|^{p-1} - C. \tag{1.15}$$

Usando $\varphi \equiv 1$ como função teste em (P_t) temos

$$\begin{aligned}
0 = \int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t \cdot \nabla\varphi \, dx &= \int_\Omega f(x,u_t)\, dx + \int_\Omega t\phi \, dx + \int_\Omega h(x)\, dx \\
&\geq \int_\Omega (\epsilon|u_t|^{p-1} - C)\, dx + \int_\Omega t\phi\, dx + \int_\Omega h(x)\, dx \\
&= \epsilon \int_\Omega |u_t|^{p-1}\, dx - C|\Omega| + t\int_\Omega \phi\, dx + \int_\Omega h(x)\, dx
\end{aligned}$$

logo,

$$\epsilon \int_\Omega |u_t|^{p-1}\, dx + t\int_\Omega \phi\, dx + \int_\Omega h(x)\, dx \leq C|\Omega|.$$

Portanto

$$t\int_\Omega \phi\, dx + \int_\Omega h(x)\, dx \leq C|\Omega|.$$

Assim t é limitado, o que prova o lema. $\square$

1.3.2 Conclusão da Demonstração do Teorema 1.1

Prova de (i)

Considere o seguinte conjunto,

$$\mathcal{S} = \{t : (P_t) \texttt{ tem pelo menos uma solução}\}.$$

pelo que foi feito na seção (1.2) temos que $\mathcal{S}$ é não vazio. Além disso, segue dos Lemas 1.7 e 1.8 que $\mathcal{S}$ é limitado superiormente logo, podemos definir $t_0 = \sup_{\mathcal{S}} t$. Além disso, note que se $t \in \mathcal{S}$ então $(-\infty, t] \subset \mathcal{S}$. Logo, que para cada $t < t_0$, o problema (P_t) possui pelo menos uma solução.

Prova de (ii)

Segue do Lema 1.8 e da definição de supremo que para todo $t > t_0$, (P_t) não tem solução.

1.4 Estimativa a priori

Para obtermos a segunda solução via teoria do grau, precisamos de estimativas a priori para eventuais soluções de (P_t). Nesta seção, obtemos estimativas a priori para as partes negativa e positiva de uma eventual de (P_t). Em seguida, obtemos uma estimativa na norma L^∞ e por fim estimativa na norma C^1.

Lema 1.9. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca de (P_t). Se t pertence a um intervalo limitado então, existe $M = M(t) > 0$ tal que $\|u^-\|_\infty \le M$.*

Demonstração. Seja u uma solução de (P_t). Considerando a função $\varphi = max(u^- - k, 0) \in W^{1,p}(\Omega)$, com $k > 0$ fixo como função teste obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega (f(x,u) + t\phi + h)\,\varphi$$

Definindo $\Omega_k = \{x \in \Omega : u^- > k\}$, como $\nabla u^- = \nabla(u^- - k) = -\nabla u$ em Ω_k, temos que

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p = -\int_{\Omega_k} \big(f(x,-u^-) + t\phi + h\big)\,\varphi$$

Como f satisfaz a hipótese (1.1) temos que existem constantes $\epsilon > 0$ e $C_1 > 0$ tal que $f(x,u) \ge -\epsilon|u|^{p-2}u - C_1$, para todo $u < 0$. Então,

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p = -\int_{\Omega_k} \big(f(x,-u^-) + t\phi + h\big)\,\varphi \tag{1.16}$$

$$\le \int_{\Omega_k} \big(\epsilon(u^-)^{p-1} + C_1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\big)(u^- - k) \tag{1.17}$$

$$= \int_{\Omega_k} \epsilon(u^-)^{p-1}(u^- - k) + (C_1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)\int_{\Omega_k}(u^- - k) \tag{1.18}$$

$$\le \int_{\Omega_k} C_2\left((u^- - k)^p + k^{p-1}(u^- - k)\right) \tag{1.19}$$

$$+ (C_1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)\int_{\Omega_k}(u^- - k) \tag{1.20}$$

$$= C_2\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p + \big(C_2k^{p-1} + C_1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\big)\int_{\Omega_k}(u^- - k). \tag{1.21}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Holder e imersão de Sobolev segue que

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p \leq |\Omega_k|^{\frac{p}{n}}\left(\int_{\Omega_k}(u^- - k)^{\frac{np}{(n-p)}}\right)^{\frac{(n-p)}{n}} \tag{1.22}$$

$$\leq |\Omega_k|^{\frac{p}{n}} C_3\left(\int_{\Omega_k}|\nabla(u^- - k)|^p + \int_{\Omega_k}(u^- - k)^p\right), \tag{1.23}$$

de (1.16) e (1.22) segue que

(1.24)

$$\left(|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3\right)\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p \leq C_3\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p + C_4\left(k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right)\int_{\Omega_k}(u^- - k)$$

logo,

$$\left(|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3\right)\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p \leq C_4\left(k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right)\int_{\Omega_k}(u^- - k).$$

Usando o mesmo racíocinio na demonstração do Lema 1.8, obtemos que

$$|\Omega_k| = \int_{u^->k} \leq \int_{\Omega_k}\frac{(u^-)}{k^{p-1}} \leq C_5 k^{1-p}. \tag{1.25}$$

logo, a medida $|\Omega_k| \to 0$ quando $k \to +\infty$, de onde segue que existe uma constante k_0 não dependente de u tal que $|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3 > 0$, para todo $k \geq k_0$. Segue da desiguldade de Holder e de (1.24),

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k) \leq |\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_6|\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\frac{k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3}\int_{\Omega_k}(u^- - k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\left(\int_{\Omega_k}(u^- - k)^{\frac{(p-1)}{p}}\right) \leq C_6|\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\frac{k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3}\right)^{\frac{1}{p}}$$

como consequência,

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k) \leq C_7|\Omega_k|\left(\frac{k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$
$$= C_7|\Omega_k|^{1+(\frac{p}{n(p-1)})}\left(\frac{k^{p-1} + 1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty}{1 - |\Omega_k|^{\frac{p}{n}} C_3}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Podemos assumir que $1-|\Omega_k|^{\frac{p}{n}}C_3 \geq \frac{1}{2}$ para $k \geq k_0$ e então

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k}(u^- - k) &\leq C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}\left(k^{p-1}+1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty\right)^{p-1}\\
&= C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k\left(1+\frac{1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{k^{p-1}}\right)^{p-1}\\
&\leq C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k\left(1+\frac{1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{k_0^{p-1}}\right)^{p-1}\\
&\leq C_9|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 0.5 concluimos que $\|u^-\|_\infty$ é limitada por uma constante que depende apenas de t,k_0,ϵ,p,n e $\|u^-\|_{L^1(\Omega_{k_0})}$. Vamos melhorar essa estimativa, obtendo uma limitação para $\|u^-\|_{L^1(\Omega_{k_0})}$. De fato, usando $-u^-$ como função teste e a desigualdade $f(x,u) \geq -\epsilon|u|^{p-2}u - C_1$ para $u<0$ temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega |\nabla u^-|^p\\
&= \int_\Omega -f(x,-u^-)u^- - t\int_\Omega \phi u^- - \int_\Omega hu^-\\
&\leq -\epsilon\int_\Omega (u^-)^p + C_1\int_\Omega u^- - t\int_\Omega \phi u^- - \int_\Omega hu^-
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u^-|^p + \epsilon\int_\Omega (u^-)^p &\leq (C_1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty)\int_\Omega u^-\\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega (u^-)^p + (C_1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty)
\end{aligned}$$

de onde segue que $\|u^-\|_{W^{1,p}}$ é limitada. Logo,

$$\int_{\Omega_{k_0}}|u^-| \leq \int_\Omega |u^-| \leq C'\left(\int_{\Omega_{k_0}}|u^-|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (C_1+|t|\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty)$$

portanto, a norma $\|u^-\|_{L^\infty}$ é limitada por uma constante que depende apenas de t,ϵ,p e n. □

Lema 1.10. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca de (P_t). Se t pertence a um intervalo limitado então, existe $C = C(t) > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq C$.*

Demonstração. Em virtude do Lema 1.9 basta mostrarmos que $\|u^+\|_\infty$ é limitada por uma constante que depende apenas de t,ϵ,p e n. Seguindo o mesmo raciocínio do lema anterior podemos mostrar que $\|u^+\|_\infty$ é limitada por uma constante que depende apenas de t,k_1,ϵ,p,n e $\|u^+\|_{L^1(A_{k_1})}$, onde $A_k = \{x \in \Omega : u^+ > k\}$. Vamos obter agora uma estimativa para $\|u^+\|_{L^1(A_{k_1})}$. Para isso, é suficiente mostar que $\|u^+\|_{L^p}$ é limitada. De fato, suponhamos por absurdo que existam a,$b \in \mathbb{R}$ tal que $\left\|u_{t_n}^+\right\|_{L^p} \to \infty$ com $t_n \in [a, b]$. Defina $w_n = \dfrac{u_{t_n}^+}{\left\|u_{t_n}^+\right\|_{L^p}}$. Note que w_n é limitado em $W^{1,p}$, pois usando u_{t_n} como função teste e a hipótese (1.5) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_{t_n}|^p &= \int_\Omega f(x, u_{t_n})u_{t_n} + t\int_\Omega \phi u_{t_n} + \int_\Omega h u_{t_n} \\
&\leq c\int_\Omega |u_{t_n}|^p\,dx + c\left(1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right)\int_\Omega |u_{t_n}| \\
&\leq c'\left(1 + |t|\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right)\int_\Omega |u_{t_n}|^p
\end{aligned}$$

de onde segue que w_n é limitado em $W^{1,p}$. Logo, podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}$, $w_n \to w$ em L^p e $w_n \to w$ q.t.p $x \in \Omega$. Tome $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \cdot \nabla\varphi &= \int_\Omega \frac{f(x, u_{t_n})}{\left\|u_{t_n}^+\right\|}\varphi + t_n\int_\Omega \phi\frac{\varphi}{\left\|u_{t_n}^+\right\|} + \int_\Omega h\frac{\varphi}{\left\|u_{t_n}^+\right\|} \\
&\geq \epsilon\int_\Omega |w_n|^{p-1}\varphi + o(n)
\end{aligned}$$

fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla\varphi \geq \epsilon\int_\Omega w^{p-1}\varphi$$

tomando $\varphi \equiv 1$, segue que $\epsilon\displaystyle\int_\Omega w^{p-1}\,dx \leq 0$, o que gera uma contradição com o fato de que $w \geq 0$ e $w \not\equiv 0$. $\square$

Lema 1.11. *Seja u uma solução fraca de (P_t). Se t pertence a um intervalo limitado, existe $\overline{R} > 0$ tal que a norma $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \overline{R}$.*

Demonstração. Segue dos Lemas 1.9 e 1.10 que se u é uma solução de (P_t) então $\|u^-\|_\infty \leq M$, $\|u\|_\infty \leq C$ e

$$-\Delta_p u = f(x, u) + t\phi + h$$

como $u \in [-M, C]$, temos $|f(x,u)| \leq R_1$ para $(x,u) \in \overline{\Omega} \times [-M, C]$ e então segue que $l(x,u) = f(x,u) + t\phi + h$ é uma função de Caratheodory que satisfaz,

$$|l(x,u)| \leq R_1 + \widetilde{R}\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty = R_2$$

Assim pelo Lema 0.9 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $0 \leq \alpha < 1$ e $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \overline{R\,(R_2)}$. $\square$

1.5 Demonstração do Teorema 1.2

Primeiramente, mostraremos que o o problema (P_t) tem uma solução para $t = t_0$. De fato, da definição de supremo existe $\{t_n\} \subset \mathcal{S}$ tal que $t_n \to t_0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\{t_n\}$ é crescente. Como $t_n \in \mathcal{S}$, existe u_n solução de (P_{t_n}), isto é, para todo $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \psi \, dx = \int_\Omega (f(x,u_n) + t_n\phi + h)\, \psi \, dx \tag{1.26}$$

Temos pelos Lemas 1.10 e 1.11 que $u_n \in [-M, R]$, logo $|f(x,u_n)| \leq K$ e

$$|f(x,u_n) + t_n\phi + h| \leq K + \overline{R}\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty \leq \overline{M},$$

logo, pelo Lema 0.9 segue que $\{u_n\}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e portanto possui uma subsequência convergente $u_{n_k} \to u^*$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \leq \beta < \alpha$. Assim, tomando o limite quando $n_k \to \infty$ em (1.26) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^*|^{p-2} \nabla u^* \cdot \nabla \psi \, dx = \int_\Omega (f(x,u^*) + t_0\phi + h)\, \psi \, dx$$

isto é, u^* é solução de (P_{t_0}). Por outro lado, já mostramos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (P_s) não possui solução para todo $s > t_0$. Fixemos $t < T(R_1)$ com $T(R_1)$ dado pelo Lema 1.3 e seja $t_1 = T(R_1)$, pela definição de t_0 temos que $t_1 \leq t_0$. Segue do Lema 1.11 que para todo $s \in [t, t_0]$ existe $\overline{R} > 0$ grande o suficiente tal que $\|u_s\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \overline{R}$ e $\Lambda \subset B_{\overline{R}}$, onde Λ é definido na Seção (1.2). Note que u é solução de (P_s) se e somente se u é ponto fixo do operador compacto $\mathcal{H}_s v = u$, onde u é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = f(x,v) + \lambda |v|^{p-2} v + s\phi + h, & ; x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Consideremos a seguinte homotopia admissivel,

$$H : [t, t_0 + 1] \times B_{\overline{R}} \to C^1_N(\overline{\Omega}), \quad H(s, u) = \mathcal{H}_s u.$$

então,

$$\deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}}, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_{t_0+1}, B_{\overline{R}}, 0) = 0.$$

pois, pela definição de t_0, $\mathcal{H}_{t_0+1}$ não possui ponto fixo. Usando agora a propriedade da excisão do grau de Leray-Schauder, segue que

$$\deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}} - \Lambda, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}}, 0) - \deg(I - \mathcal{H}_s, \Lambda, 0) = -1,$$

Portanto, o problema (P_s) possui outra solução que não pertence a Λ. Logo, exite $t_1 \leq t_0$ tal que para todo $t < t_1$ o problema (P_t) possui pelo menos duas soluções distintas, e isso conclui nossa demonstração.

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS COM CONDIÇÃO DE DIRICHLET

2.1 Resultados Príncipais

Nesta seção, apresentamos nossos resultados com condição de Dirichlet na fronteira. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Caratheodory satisfazendo as seguintes condições,

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = \alpha < \lambda_1, \tag{2.1}$$

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = \beta > \lambda_1, \tag{2.2}$$

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \limsup_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = \lambda' < \infty, \tag{2.3}$$

uniformemente em $x \in \Omega$ e tal que λ_1 é o menor autovalor do problema,

$$(P_a) \begin{cases} -\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2}u = 0 \ \ ; x \in \Omega \\ u = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Além disso, vamos assumir que para todo $M > 0$, existe $\xi > 0$ tal que

$$f(x,u) + \xi|u|^{p-2}u \text{ é não decrescente em } u \text{ sobre } [-M,M]. \tag{2.4}$$

Considere o seguinte problema,

$$(P_{Dt}) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) & ; x \in \Omega \\ u = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\phi(x) \geq 0$ em $\bar{\Omega}$, $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$.

Teorema 2.1. *Suponhamos que as condições (2.1), (2.2) e (2.4) estejam satisfeitas e que existe uma contante c tal que,*

$$|f(x,s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}); \quad \forall s \leq 0. \tag{2.5}$$

e uniformemente em $x \in \Omega$. Então, existem t_0 tal que

(i) *Se $t < t_0$, então (P_{Dt}) possui pelo menos uma solução.*

(ii) *Se $t > t_0$, então o problema (P_{Dt}) não possui solução.*

Teorema 2.2. *Suponha que as hipóteses (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) estam satisfeitas. Então, existe t_1, com $t_1 \leq t_0$ tal que*

(i) *Se $t = t_0$, então (P_{Dt}) possui pelo menos uma solução.*

(ii) *Se $t < t_1$ o problema (P_{Dt}) tem pelo menos duas soluções distintas.*

2.2 Primeira Solução

Note que resolver o problema (P_{Dt}) é equivalente a mostrar a existência de uma solução para a equação

$$u = \mathcal{H}\left(f(x,u) + c|u|^{p-2}u + t\phi + h\right) \tag{2.6}$$

onde $\mathcal{H}$ é dado no Lema 0.11.

Mostraremos que a equação (2.6) tem uma solução para algum $t \in \mathbb{R}$ e para isso, precisaremos dos próximos resultados que foram motivados por [21]. A demonstração do próximo lema segue de perto a demonstração feita no Lema 1.3, já para o lema subsequente a demonstração é ligeiramente diferente do que foi feito no Lema 1.4.

Lema 2.3. *Para cada $R_1 > 0$ dado, existe um número real $T = T(R_1)$ tal que*

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \tag{2.7}$$

para toda $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|v^+\| = R_1$, $\forall \tau \in [0,1]$, $\forall t \leq T$.

Demonstração. Suponha por absurdo que exitam sequências $\{v_n\} \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|v_n^+\| = R_1$, $\{\tau_n\} \subset [0,1]$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $t_n \to -\infty$, tal que

$$v_n = \mathcal{H}\left(\tau_n\left(f(x,v_n) + c|v_n|^{p-2}v_n + t_n\phi + h\right)\right) \tag{2.8}$$

usando a hipótese (2.5) obtemos,

$$\begin{aligned}
f(x,s) + c|s|^{p-2}s &\leq c|s|^{p-2}s + |f(x,s)| && (2.9)\\
&\leq c|s|^{p-2}s + c + c|s|^{p-1} && (2.10)\\
&= c && (2.11)\\
&\leq f(x,0) + 2c && (2.12)
\end{aligned}$$

para $s \leq 0$. Assim, para a sequência v_n temos

$$\begin{aligned}
\tau_n\left(f(x,v_n) + c|v_n|^{p-2}v_n + t_n\phi + h\right) &\leq \tau_n\left(f(x,v_n^+) + c|v_n^+|^{p-2}v_n^+ + 2c + t_n\phi + h\right)\\
&\leq \tau_n(M + t_n\phi + h) \leq M + t_n\phi + h.
\end{aligned}$$

onde, $M = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}, v_n^+\in[0,R_1]} \left[f(x,v_n^+) + c|v_n^+|^{p-2}v_n^+ + 2c\right]$. Segue que

$$v_n \leq \mathcal{H}(M + t_n\phi + h)$$

Seja $w_n = \mathcal{H}(M + t_n\phi + h)$, ou seja w_n satisfaz

$$-\Delta_p w_n + c|w_n|^{p-2}w_n = (M + t_n\phi + h)$$

Defina s_n tal que $t_n = |s_n|^{p-2}s_n$, assim

$$-\Delta_p\left(\frac{w_n}{s_n}\right) + c\left|\frac{w_n}{s_n}\right|^{p-2}\left(\frac{w_n}{s_n}\right) = \left(\frac{M}{t_n} + \phi + \frac{h}{t_n}\right)$$

Logo, $(\frac{M}{t_n} + \phi + \frac{h}{t_n}) \to \phi$, quando $t_n \to -\infty$. Pelo Lema 0.11 temos que $\mathcal{H}$ é fortemente crescente e contínuo quando restrito a um conjunto $S \subset L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$-limitado, segue que

$$\frac{w_n}{s_n} \to \mathcal{H}(\phi) > 0.$$

de onde segue que $w_n < 0$. Logo $v_n^+ = 0$, contradizendo o fato de que $\|v_n^+\| = R_1$. $\square$

Enunciarmos um análogo para o caso de Dirichlet do Lema 1.4, e cuja demonstração é uma consequência direta do teorema que vem a seguir. Note que os argumentos usados aqui são diferentes do que foi feito no caso de Neumann.

Lema 2.4. *Seja $t \in \mathbb{R}$ fixo. Então existe $R_2 > 0$ tal que*

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \tag{2.13}$$

para toda $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|v^-\| = R_2$, $\forall \tau \in [0,1]$.

Argumentando como na Seção 1.4 provaremos a limitação da parte negativa de uma eventual solução da equação (2.6). Obtendo assim, o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Seja $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$ fixo. Existe $M = M(t) > 0$ tal que se $u \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ é uma solução da equação (2.13) para algum $\tau \in [0,1]$, então $\|u^-\|_\infty \leq M$.*

Demonstração. Seja u uma solução da equação (2.13), isto é

$$-\Delta_p u + c|u|^{p-2}u = \tau\left(f(x,u) + c|u|^{p-2}u + t\phi + h\right)$$

Considerando a função $\varphi = max(u^- - k, 0) \in W^{1,p}(\Omega)$, com $k > 0$ fixo como função teste na equação acima temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + c\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi = \tau\left(\int_\Omega \left(f(x,u) + c|u|^{p-2}u + t\phi + h\right)\varphi\right)$$

Definindo $\Omega_k = \{x \in \Omega : u^- > k\}$, como $\nabla u^- = \nabla(u^- - k) = -\nabla u$ em Ω_k, temos que

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p + c\int_{\Omega_k} |u^-|^{p-2}u^-\varphi = -\tau\int_{\Omega_k} \left(f(x,-u^-) + t\phi + h\right)\varphi + \tau c\int_{\Omega_k} |u^-|^{p-2}u^-\varphi$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p \leq -\tau\int_{\Omega_k} \left(f(x,-u^-) + t\phi + h\right)\varphi$$

Como f satisfaz (2.1), para todo $\epsilon \in (0, \lambda_1 - \alpha)$, existe $C_1 > 0$ grande o suficiente tal que

$$f(x,u) \geq (\alpha + \epsilon)|u|^{p-1} - C_1 \tag{2.14}$$

para $u < 0$. Então,

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p \leq -\tau \int_{\Omega_k} \big(f(x, -u^-) + t\phi + h\big)\,\varphi \tag{2.15}$$

$$\leq \int_{\Omega_k} \big(-\tau(\alpha+\epsilon)(u^-)^{p-1} + C_1 - \tau t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\big)\,(u^- - k) \tag{2.16}$$

$$= \int_{\Omega_k} -\tau(\alpha+\epsilon)(u^-)^{p-1}(u^- - k) + (C_1 - \tau t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty) \int_{\Omega_k} (u^- - k) \tag{2.17}$$

$$\leq \int_{\Omega_k} C_2\,\big((u^- - k)^p + k^{p-1}(u^- - k)\big) \tag{2.18}$$

$$+ (C_1 - \tau t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty) \int_{\Omega_k} (u^- - k) \tag{2.19}$$

$$= C_2 \int_{\Omega_k} (u^- - k)^p + \big(C_2 k^{p-1} + C_1 - \tau t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\big) \int_{\Omega_k} (u^- - k). \tag{2.20}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Holder e imersão de Sobolev segue que

$$\int_{\Omega_k} (u^- - k)^p \leq |\Omega_k|^{\frac{p}{n}} \left(\int_{\Omega_k} (u^- - k)^{\frac{np}{(n-p)}}\right)^{\frac{(n-p)}{n}} \tag{2.21}$$

$$\leq |\Omega_k|^{\frac{p}{n}} C_3 \left(\int_{\Omega_k} |\nabla(u^- - k)|^p + \int_{\Omega_k} (u^- - k)^p\right), \tag{2.22}$$

de (2.15) e (2.21) segue que

$$\left(|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3\right) \int_{\Omega_k} (u^- - k)^p \leq C_3 \int_{\Omega_k} (u^- - k)^p + C_4\left(k^{p-1} + 1 - t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right) \int_{\Omega_k} (u^- - k) \tag{2.23}$$

logo,

$$\left(|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3\right) \int_{\Omega_k} (u^- - k)^p \leq C_4\left(k^{p-1} + 1 - t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty\right) \int_{\Omega_k} (u^- - k).$$

Usando o mesmo racíocinio no Lema 1.9, obtemos que

$$|\Omega_k| = \int_{u^- > k} \leq \int_{\Omega_k} \frac{(u^-)}{k^{p-1}} \leq C_5 k^{1-p}. \tag{2.24}$$

logo, a medida $|\Omega_k| \to 0$ quando $k \to +\infty$, de onde segue que existe uma constante k_0 não dependente de u tal que $|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}} - C_3 > 0$, para todo $k \geq k_0$. Segue da desiguldade de Holder e de (2.23),

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k) \leq |\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\int_{\Omega_k}(u^- - k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_6|\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\frac{k^{p-1}+1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}}-C_3}\int_{\Omega_k}(u^- - k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\left(\int_{\Omega_k}(u^- - k)^{\frac{(p-1)}{p}}\right) \leq C_6|\Omega_k|^{\frac{(p-1)}{p}}\left(\frac{k^{p-1}+1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}}-C_3}\right)^{\frac{1}{p}}$$

como consequência,

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k) \leq C_7|\Omega_k|\left(\frac{k^{p-1}+1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{|\Omega_k|^{-\frac{p}{n}}-C_3}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$
$$= C_7|\Omega_k|^{1+(\frac{p}{n(p-1)})}\left(\frac{k^{p-1}+1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{1-|\Omega_k|^{\frac{p}{n}}C_3}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Podemos assumir que $1-|\Omega_k|^{\frac{p}{n}}C_3 \geq \frac{1}{2}$ para $k \geq k_0$ e então

$$\int_{\Omega_k}(u^- - k) \leq C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}\left(k^{p-1}+1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty\right)^{p-1}$$
$$= C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k\left(1+\frac{1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{k^{p-1}}\right)^{p-1}$$
$$\leq C_8|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k\left(1+\frac{1-t\,\|\phi\|_\infty+\|h\|_\infty}{k_0^{p-1}}\right)^{p-1}$$
$$\leq C_9|\Omega_k|^{1+(\frac{p(p-1)}{n})}k.$$

Agora, aplicando o Lema 0.5 concluimos que $\|u^-\|_\infty$ é limitada por uma constante que depende apenas de t, k_0,ϵ,p,n e $\|u^-\|_{L^1(\Omega_{k_0})}$. Vamos melhorar essa estimativa, obtendo uma limitação para $\|u^-\|_{L^1(\Omega_{k_0})}$. De fato, usando $-u^-$ como função teste e a desigualdade $f(x,u) \geq (\alpha+\epsilon)|u|^{p-2}u - C_1$ para $u<0$ temos

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u^-|^p$$
$$= \int_\Omega -f(x,-u^-)u^- - t\int_\Omega \phi u^- - \int_\Omega hu^-$$
$$\leq -(\alpha+\epsilon)\int_\Omega (u^-)^p + C_1\int_\Omega u^- - t\int_\Omega \phi u^- - \int_\Omega hu^-$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u^-|^p + (\alpha+\epsilon)\int_\Omega (u^-)^p &\leq (C_1 - t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)\int_\Omega u^- \\ &\leq \frac{\alpha+\epsilon}{2}\int_\Omega (u^-)^p + (C_1 - t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)\end{aligned}$$

de onde segue que $\|u^-\|_{W^{1,p}}$ é limitada. Logo,

$$\int_{\Omega_{k_0}} |u^-| \leq \int_\Omega |u^-| \leq C' \left(\int_{\Omega_{k_0}} |u^-|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (C_1 - t\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty)$$

portanto, a norma $\|u^-\|_{L^\infty}$ é limitada por uma constante que depende apenas de t,ϵ,p e n. $\square$

Mostraremos agora que a equação (2.6) tem uma solução para algum t usando o grau de Leray-Shauder. Dado $R_1 > 0$, fixemos $t \leq T(R_1)$ com $T(R_1)$ dado pelo Lema 2.3 e considere $R_2 > 0$ garantido no Lema 2.4. Considere o conjunto

$$\Lambda = \left\{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \left\|v^+\right\| < R_1\,, \left\|v^-\right\| < R_2\right\}$$

Note que Λ é um conjunto aberto em $C_0^1(\overline{\Omega})$ contendo 0. Pelos Lemas 2.3 e 2.4 temos que

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right) \quad \forall v \in \partial\Lambda,$$

Logo, pela invariância homotópica do grau de Leray-Schauder segue que

$$\deg\left(I - \mathcal{H}\left(\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)\right), \Lambda, 0\right) = \deg(I, \Lambda, 0) = 1.$$

de onde segue que existe $v \in \Lambda$ tal que

$$v = \mathcal{H}\left(f(x,v) + c|v|^{p-2}v + t\phi + h\right)$$

e portanto, o problema (P_{Dt}) possui pelo menos uma solução.

2.3 Demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2

Nesta seção seguiremos as idéias de Arcoya-Ruiz [4] para garantirmos a existência de subsolução para o problema (P_{Dt}). Em seguida mostraremos que se o problema (P_{Dt})

tem solução para algum t, então (P_{Ds}) tem solução para todo $s \leq t$. Além disso, obtemos estimativas a priori para eventuais soluções e por fim, faremos a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2. Começaremos com o seguinte resultado que garante a existência de subsolução para (P_{Dt}) para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.6. *Para cada $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$, existe $\underline{u} \in C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $\underline{u} << w$ e*

$$-\Delta_p(\underline{u}) \leq f(x, \underline{u}) + t\phi + h \;\; \texttt{em} \;\; \Omega \tag{2.25}$$

Demonstração. Sejam $w \in C_0^1(\overline{\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$ fixos, mas arbitrários. Por (2.1) temos que para $\epsilon \in (0, \lambda_1 - \alpha)$, existe constante $C > 0$ tal que

$$f(x, u) \geq (\alpha + \epsilon)|u|^{p-2}u - C,$$

para todo $u < 0$. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de

$$-\Delta_p u = (\alpha + \epsilon)|u|^{p-2}u - C + t\phi + h \;\; \texttt{em} \;\; \Omega, \;\; u = 0 \;\; \texttt{sobre} \;\; \partial\Omega$$

onde, sem perda de generalidade, tomamos C grande o suficiente para obter $-C + t\phi + h < 0$. Além disso, podemos tomar C grande tal que $u << w$. De fato, seja $\{C_n\}$ uma sequência tal que $C_n \to \infty$ (sem perda de generalidade assumimos que $C_n > 1$) e $\{u_n\}$ uma sequência de soluções de

$$-\Delta_p u_n = (\alpha + \epsilon)|u_n|^{p-2}u_n - C_n + t\phi + h \;\; \texttt{em} \;\; \Omega, \;\; u_n = 0 \;\; \texttt{sobre} \;\; \partial\Omega \tag{2.26}$$

Logo, se $v_n = \dfrac{u_n}{(C_n)^{\frac{1}{p-1}}}$, então temos que v_n é solução de

$$-\Delta_p v_n = (\alpha + \epsilon)|v_n|^{p-2}v_n - 1 + \frac{t\phi + h}{C_n} \;\; \texttt{em} \;\; \Omega, \;\; v_n = 0 \;\; \texttt{sobre} \;\; \partial\Omega$$

Pelo Lema 0.8 obtemos $v_n \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$, $\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M$. Assim, pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \leq \beta < \alpha$ temos que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Segue do Lema 0.7 que v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p(v) = (\alpha + \epsilon)|v|^{p-2}v - 1 \;\; ; x \in \Omega \\ v = 0 \;\; ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo, Teorema 0.3, e Princípio do Máximo de Vázquez, Teorema 0.4, obtemos $v << 0$. Notemos que $v_n = \dfrac{u_n}{(C_n)^{\frac{1}{p-1}}} \to v << 0$, logo $u_n < 0$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial \nu} < 0$ e ainda $\dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}, u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como $u_n, w \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ temos que para n grande o suficiente, $u_n << w$. Seja n_0 tal que $u_{n_0} << w$ e $C_{n_0} \geq C$. Então, definindo $\underline{u} = u_{n_0}$, como u_{n_0} é solução de (2.26) temos,

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &= (\alpha + \epsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C_{n_0} + t\phi + h \\ &\leq (\alpha + \epsilon)|\underline{u}|^{p-2}\underline{u} - C + t\phi + h \\ &\leq f(x, \underline{u}) + t\phi + h \end{aligned}$$

isto é, $\underline{u}$ é subsolução de (P_{Dt}). $\square$

O proximo teorema é o Método da sub e supersolução.

Teorema 2.7. *Sejam $\underline{u}$, $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ sub e supersolução de (P_{Dt}) respectivamente tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, com $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_{Dt}) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Defina os operadores $N_t : C_0^1(\overline{\Omega}) \to L^\infty(\Omega)$ por

$$N_t(v) = f(x, v) + \xi|v|^{p-2}v + t\phi + h \quad , \quad v \in C_0^1(\overline{\Omega})$$

e $T : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ por $T(v) = w$ se, e somente se, w é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w + \xi|w|^{p-2}w = v \quad ; x \in \Omega \\ \qquad w = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Defina também $\widetilde{\mathcal{K}_t} : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ por $\widetilde{\mathcal{K}_t} = T \circ N_t$.
Note que u é um ponto fixo de $\widetilde{\mathcal{K}_t}$ se, e somente se, u é uma solução de (P_{Dt}). Mostremos que $\widetilde{\mathcal{K}_t}$ é compacto. Com efeito, como $\widetilde{\mathcal{K}_t} = T \circ N_t$ e N_t é contínua, basta mostrar que T é compacto. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega)$ e $w_n = T(u_n)$, logo

$$-\Delta_p w_n + \xi|w_n|^{p-2}w_n = u_n.$$

Pelo Lema 0.8 $w_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|w_n\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < C$. Obtemos pela imersão compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ que, a menos de subsequência, $w_n \to w$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, portanto T é compacto.

Agora, defina

$$\mathcal{A} = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}\right\}.$$

Note que $\mathcal{A}$ é fechado e convexo. Pela hipótese (2.4) e pelo princípio de comparação fraco Lema 0.2, temos que $\widetilde{\mathcal{K}_t}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ e pelo Lema 0.8 $\widetilde{\mathcal{K}_t}(\mathcal{A})$ é limitado. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder B.4 existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ponto fixo de $\widetilde{\mathcal{K}_t}$, ou seja, existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ solução de (P_{Dt}) tal que $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}$ em Ω. □

Usando os resultados anteriores, mostramos o seguinte resultado:

Lema 2.8. *Se o problema (P_{Dt}) tem solução para algum $t \in \mathbb{R}$, então (P_{Dt}) tem solução para todo $s \leq t$.*

Demonstração. Seja u_t uma solução de (P_{Dt}). Para todo $s \leq t$ temos que u_t é supersolução do problema (P_{Dt}) correspondente a s, pois

$$-\Delta_p u = f(x,u) + t\phi(x) + h(x) \geq f(x,u) + s\phi(x) + h(x).$$

Por outro lado, segue do Lema 2.6 que existe uma subsolução $\underline{u} < u_t$. Logo, pelo Teorema 2.7 existe uma solução u_s de (P_{Ds}) para todo $s \leq t$. □

2.3.1 Estimativa a-priori

Para obtermos a segunda solução usando a teoria do grau, precisamos obter estimativas a priori para eventuais soluções de (P_{Dt}). Os próximos resultados foram motivados por [4]. A demonstração da seguinte proposição pode ser feita substituíndo-se $t \geq -C_0$ por $-C_0$ na prova do Lema 2.5.

Proposição 2.9. *Seja $C_0 \in \mathbb{R}$ fixo. Existe $M = M(C_0) > 0$ tal que se $u \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ é uma solução de (P_{Dt}) para $t \geq -C_0$, então $\|u^-\|_\infty \leq M$.*

Uma consequência do resultado precedente é o seguinte resultado a respeito da norma $L^\infty(\Omega)$ de u.

Lema 2.10. *Para todo $\overline{t}_0 \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que o problema (P_{Dt}) não possui solução com norma $\|u\| \geq R$ para $t \geq \overline{t}_0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\{u_n\}$ é uma sequência de soluções de (P_{Dt_n}) com $0 < \|u_n\| \to +\infty$ onde $\{t_n\}$ é uma sequência de reais tal que $\overline{t}_0 < t_n$. Defina

$w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, segue que

$$-\Delta_p(w_n) = \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} + \frac{t_n}{\|u_n\|^{p-1}}\phi + \frac{h}{\|u_n\|^{p-1}} \;, x \in \Omega \tag{2.27}$$

usando as hipóteses (2.2) e (2.3), podemos garantir a existência de constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para $\epsilon \in (0, \beta - \lambda_1)$

$$(\beta - \epsilon)|u_n(x)|^{p-1} - C_1 \leq f(x, u_n(x)) \leq (\lambda' + \epsilon)|u_n(x)|^{p-1} + C_2, \;\; x \in \Omega. \tag{2.28}$$

Então,

$$(\beta - \epsilon)|w_n(x)|^{p-1} - \frac{C_1}{\|u_n\|^{p-1}} \leq \frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|^{p-1}} \leq (\lambda' + \epsilon)|w_n(x)|^{p-1} + \frac{C_2}{\|u_n\|^{p-1}}, \tag{2.29}$$

para todo $x \in \Omega$, pela Proposição 2.9 segue que a sequência $\left\{\dfrac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|^{p-1}}\right\}$ é limitada em $L^{p'}(\Omega)$ e portanto, é limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Pelo Lema 0.6 temos que $-\Delta_p(w_n)$ é limitado em $W^{-1,p'}(\Omega)$, e como $\dfrac{h(x)}{\|u_n\|^{p-1}}$ tende a zero, segue que é limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Logo, a sequência $\dfrac{t_n}{\|u_n\|^{p-1}}$ é limitada e passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que converge apara algum $\rho \geq 0$. Por outro lado, temos que o operador $\mathcal{K} : L^{p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ é contínuo e compacto, de onde segue que a sequência,

$$w_n = \mathcal{K}\left[\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|^{p-1}} + \frac{t_n}{\|u_n\|^{p-1}}\phi + \frac{h}{\|u_n\|^{p-1}}\right] \tag{2.30}$$

possui uma subsequência fortemente convergente para algum w, com $\|w\| = 1$, em $W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$. Consequentemente, usando $\psi \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega}), \psi \geq 0$ como função teste em (2.27) e a desigualdade (2.29),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n \cdot \nabla\psi \, dx &= \int_\Omega \frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|^{p-1}}\psi \, dx + \int_\Omega \frac{t_n}{\|u_n\|^{p-1}}\phi\psi \, dx + \int_\Omega \frac{h}{\|u_n\|^{p-1}}\psi \, dx \\ &\geq (\beta - \epsilon)\int_\Omega \|w_n\|^{p-1}\psi - \int_\Omega \frac{C_1}{\|u_n\|}\psi + \int_\Omega \frac{t_n}{\|u_n\|^{p-1}}\phi\psi \, dx \\ &+ \int_\Omega \frac{h}{\|u_n\|^{p-1}}\psi \, dx\end{aligned}$$

e passando ao limite para $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla\psi \, dx \geq (\beta - \epsilon)\int_\Omega \|w\|^{p-2} w\psi + \int_\Omega \phi\rho\psi \, dx$$

para toda $\psi \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega}), \psi \geq 0$. Assim, temos que $w \geq 0$, $w \not\equiv 0$ e satisfaz no sentido fraco,

$$\begin{cases} -\Delta_p w \geq (\lambda - \epsilon) \|w\|^{p-2} w + \rho\phi \ , x \in \Omega \\ w = 0 \ , x \in \partial\Omega \end{cases}$$

segue do principio do máximo de Vázquez (Teorema 0.4) que $w > 0$. Considere ϕ_1 a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1, pela Identidade de Picone A.1 tem-se que

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{\phi_1^p}{w^{p-1}} \right) |\nabla w|^{p-2} \nabla w \, dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi_1|^p = \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^p \, dx$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\phi_1^p}{w^{p-1}} \right) \left((\beta - \epsilon) \|w\|^{p-1} + \rho\phi \right) dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{\phi_1^p}{w^{p-1}} \right) (-\Delta_p w) \, dx \\ &\leq \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^p \, dx \end{aligned}$$

logo,

$$(\beta - \epsilon) \int_\Omega \phi_1^p \, dx + \int_\Omega \frac{\rho\phi\phi_1^p}{w^{p-1}} \, dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^p \, dx$$

como, ϵ foi escolhido de forma que $\beta - \epsilon > \lambda_1$, temos uma contradição e portanto segue o resultado. □

Note que, como consequência do lema anterior temos que o problema (P_{Dt}) não possui solução para t grande.

Lema 2.11. *O problema (P_{Dt}) não possui solução para t suficientemente grande*

Demonstração. De fato, considere $\bar{t}_0 = 0$ e seja $R > 0$ dado pelo Lema 2.10, se u é solução de (P_{Dt}) para $t > 0$ grande o suficiente, então $\|u\| \leq R$, e por argumentos de regularidade garantidos no Lema 0.8, segue que $\|u\|_{C^1}$ é limitada independentemente de t. Por outro lado, u resolve em $W^{-1,p'}(\Omega)$ a equação

$$-\Delta_p u = f(x,u) + t\phi + h$$

onde os termos $-\Delta_p u, f(x,u)$ são limitados em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Consequentemente, obtemos que o conjunto dos valores t para os quais o problema (P_{Dt}) tem solução é limitado superiormente. Isto é, existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que o problema (P_{Dt}) não tem solução para $t > \bar{t}$. □

2.3.2 Conclusão da Demonstração do Teorema 2.1

Prova de (i)

Considere o seguinte conjunto,

$$\mathcal{S} = \{t : (P_{Dt}) \texttt{ tem pelo menos uma solução}\}.$$

pelo que foi feito na Seção 2.2 temos que $\mathcal{S}$ é não vazio. Além disso, segue do Lema 2.11 que $\mathcal{S}$ é limitado superiormente. Portanto, podemos definir $t_0 = \sup_{\mathcal{S}} t$. Além disso, usando (2.8) segue que, se $t \in \mathcal{S}$ então $(-\infty, t] \subset \mathcal{S}$ e isso conclui o item (i).

Prova de (ii)

Segue do Lema 2.4 e da definição de supremo que para todo $t > t_0$, (P_{Dt}) não possui solução.

2.3.3 Demonstração do Teorema 2.2

Prova de (i)

Seja t_0 definido no Teorema 2.1, da definição de supremo existe $\{t_n\} \subset \mathcal{S}$ tal que $t_n \to t_0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\{t_n\}$ é crescente. Como $t_n \in \mathcal{S}$, existe u_n solução de (P_{Dt_n}), isto é, para todo $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega (f(x,u_n) + t_n\phi + h)\,\psi\, dx \tag{2.31}$$

Temos pelos Lemas 2.5 e 2.10 que $u_n \in [-M, R]$, logo $|f(x,u_n)| \leq K$ e

$$|f(x,u_n) + t_n\phi + h| \leq K + \overline{R}\,\|\phi\|_\infty + \|h\|_\infty \leq \overline{M},$$

logo, pelo Lema 0.8 segue que $\{u_n\}$ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e portanto, possui uma subsequência convergente $u_{n_k} \to u^*$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \leq \beta < \alpha$. Assim, tomando o limite quando $n_k \to \infty$ em (2.31) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^*|^{p-2}\nabla u^* \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega (f(x,u^*) + t_0\phi + h)\,\psi\, dx$$

isto é, u^* é solução de (P_{t_0}) e isto conclui o item(i).

Prova de (ii)

Já mostramos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (P_{Ds}) não possui solução para todo $s > t_0$. Fixemos $t < T(R_1)$ com $T(R_1)$ dado pelo Lema 2.3 e seja $t_1 = T(R_1)$, pela definição de t_0 temos que $t_1 \leq t_0$. Segue do Lema 2.10 que para todo $s \in [t, t_0]$ existe $\overline{R} > 0$ grande o suficiente tal que $\|u_s\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \overline{R}$ e $\Lambda \subset B_{\overline{R}}$, onde Λ é definido na demonstração da primeira solução, ver Seção 2.2. Note que u é solução de (P_{Ds}) se e somente se u é ponto fixo do operador compacto $\mathcal{H}_s v = u$, onde u é uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u = f(x,v) + \lambda|v|^{p-2}v + s\phi + h, & ; x \in \Omega \\ u = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Consideremos a seguinte homotopia admissivel,

$$H : [t, t_0 + 1] \times B_{\overline{R}} \to C_0^1(\overline{\Omega}), \quad H(s,u) = \mathcal{H}_s u.$$

então,

$$\deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}}, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_{t_0+1}, B_{\overline{R}}, 0) = 0.$$

pois, pela definição de t_0, $\mathcal{H}_{t_0+1}$ não possui ponto fixo. Usando agora a propriedade da excisão do grau de Leray-Schauder, segue que

$$\deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}} - \Lambda, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_s, B_{\overline{R}}, 0) - \deg(I - \mathcal{K}_s, \Lambda, 0) = -1,$$

Portanto, o problema (P_{Ds}) possui outra solução que não pertence a Λ. Logo, exite $t_1 \leq t_0$ tal que para todo $t < t_1$ o problema (P_{Dt}) possui pelo menos duas soluções distintas.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS COM CONDIÇÃO DE DIRICHLET

3.1 Apresentação do Problema

Consideremos o seguinte sistema

$$(S_t)\begin{cases} -\Delta_p u_1 = f_1(x,u_1,u_2) + t_1\phi_1 + h_1, & ; x \in \Omega \\ -\Delta_p u_2 = f_2(x,u_1,u_2) + t_2\phi_2 + h_2, & ; x \in \Omega \\ \qquad u_1 = u_2 = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave limitado, $\phi_i, h_i \in L^\infty(\Omega)$, com $\phi_i \geq 0$, $\phi_i \not\equiv 0$, $i = 1,2$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ é um parâmetro e $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ são funções contínuas satisfazendo as seguintes condições,

(I) $|f_i(x, s_1, s_2)| \leq C\,(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) \quad i = 1,2$

(II) existe $\sigma > 0$ tal que $f_i(x, s_1, s_2) + \sigma |s_i|^{p-2} s_i$ é não decrescente, para todo $(x, s_j) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $i \neq j$, $i = 1,2$.

(III) $f_i(x, 0, 0) = 0$ e f_i é quase-monótona para todo $(x, s_i) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, isto é, para cada $i \neq j$, $i = 1,2$, $f_i(x, s_i, s_j)$ é não decrescente em s_j.

(IV) Existem matrizes limitadas e cooperativas, isto é, $(a_{ij}, c_{ij} \geq 0)$ para $i \neq j$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

satisfazendo $a_{11} + a_{12} \leq 0$, $a_{21} + a_{22} \leq 0$, $c_{11}, c_{22} < 0$ tal que,

$$\lambda_1 (\Delta_p + A_1) > 0, \lambda_1 (\Delta_p + A_2) < 0,$$

onde

$$\lambda_1 (\Delta_p + A_i) = \sup \mathcal{E}(A_i),$$

$$\mathcal{E}(A_i) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \exists \varphi \in \left(W_0^{1,p}(\Omega) \right)^2 : \varphi > 0, \Delta_p \varphi + (A_i + \lambda I) \Psi_p(\varphi) \leq 0 \right\},$$

com $\Psi_p(s) = (\psi_p(s_1), \psi_p(s_2))^T$ e $\psi_p(s_i) = |s_i|^{p-2} s_i$. Além disso, existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq A_1 \Psi_p(s) - b_1 \overline{e}\ , \forall s \leq 0$$

e

$$f(x,s) \geq A_2 \Psi_p(s) - b_2 \overline{e}\ , \forall s \geq 0$$

para $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $\overline{e} = (1,1)^T$.

(V) Para cada sequência $\{s_n\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\|s_n^-\|$ é limitado e $\|s_n^+\| \to \infty$ quando $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \inf \frac{f(x, s_n) - f(x, s_n^+)}{\|s_n^+\|^{p-1}} \geq 0.$$

Nossos resultados principais neste capítulo são os seguintes,

Teorema 3.1. *Suponha que as hipóteses (I)-(IV) estejam satisfeitas. Existe $T \in \mathbb{R}$ tal que o sistema (S_t) tem pelo menos uma solução fraca para $t \leq Te$, onde $e = (1,1)$.*

Teorema 3.2. *Suponha que as hipóteses (I)-(V) ocorrem. Então existem curvas Lipschitzianas Υ^* e Υ_* que dividem $\mathbb{R}^2$ em três conjuntos disjuntos $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ e $\mathcal{O}$ tais que o problema (S_t):*

i) *possui pelo menos uma solução para $t \in \Upsilon^* \cup \Upsilon_* \cup \mathcal{O}$,*

ii) *não possui solução para $t \in \mathcal{N}$,*

iii) *possui pelo menos duas soluções distintas para $t \in \mathcal{M}$.*

3.2 Preliminares

Enunciaremos alguns resultados a respeito de sistemas envolvendo o operador p-Laplaciano e que serão úteis neste capítulo. O seguinte teorema é um resultado de regularidade, cuja demonstração pode ser encontrada em ([18], `Teorema` B).

Teorema 3.3. *Suponha que* $(u,v) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$ *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g_1(x,u,v) & ; x \in \Omega \\ -\Delta_p v = g_2(x,u,v) & ; x \in \Omega \\ u = v = 0 & ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde g_1, g_2 *são funções Caratheodory tais que*

$$\max\{|g_1(x,s,t)|, |g_2(x,s,t)|\} \leq C\left(1 + |s|^{\sigma_1} + |t|^{\sigma_2}\right)$$

para $1 < \sigma_i \leq p-1$, $i = 1,2$ *e* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, *então* $(u,v) \in \left(C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$, $0 < \alpha < 1$. *Além disso, se*

$$\max\{|g_1(x,s,t)|, |g_2(x,s,t)|\} \leq C$$

então $\|(u,v)\|_{\left(C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2} < M(C)$.

3.2.1 Princípio do Máximo para Sistemas

Os próximos resultados trazem uma relação entre a hipótese (IV) do Teorema 3.2 com o problema de autovalor. Começamos com a definição de M-matriz não singular.

Definição 3.4. *Para* $1 \leq k \leq N$ *denotamos por* B_k *a matriz obtida tirando as* $(N-k)$ *linhas e colunas da matriz* B. *Dizemos que* $B = (b_{ij})$ *é uma* M*-matriz não singular se* $b_{ij} \leq 0$ *para* $i \neq j$, $b_{ii} > 0$ *e* $\det B_k > 0$ *para* $1 \leq k \leq N$.

Sejam λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$, φ_1 a autofunção positiva e de norma unitária associada a λ_1. Seja $I = (\delta_{ij})$ a matriz identidade e $A = (a_{ij})$ uma matriz arbitrária, definimos

$$\mu_{1,A} = \sup \mathcal{F}(A)$$

onde $\mathcal{F}(A) = \{\mu \in \mathbb{R} : \det((\lambda_1 - \lambda)I - A) \neq 0 \ \forall \lambda < \mu\}$.

O próximo resultado trás uma relação entre a matriz de um sistema com a propriedade das soluções deste sistema, e sua demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema 3.5. *Suponha que $p \in (1, \infty)$, Ω seja um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é de classe $C^{2,\alpha}$ para algum $\alpha < p-1$. Suponha também que os coeficientes a_{ij}, $1 \leq i, j \leq N$ são constantes satisfazendo $a_{ii} < 0$ e $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Psi_p(u_j) + \Lambda\Psi_p(u_i) \quad ; x \in \Omega \\ u_i = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma uma solução positiva limitada Φ_1 associada com um autovalor $\Lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\Lambda = \mu_{1,A}$. Neste caso temos que Φ_1 é única a menos de um múltiplo escalar positivo, $\Phi_1^i = c_i^{\frac{1}{p-1}}\varphi_1$, onde $c = (c_1, ..., c_N) \in int(\mathbb{R}^N_+)$ satisfaz $((\lambda_1 - \mu_{1,A})I - A)\, c^T = 0$.

Teorema 3.6. ([*17*], `teorema` 8) *Suponha que $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$ e $g_i \in L^{p'}(\Omega)$. Então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_{ij}|u_j|^{p-2}u_j + g_i \quad ; x \in \Omega \\ u_i = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

satisfaz o Princípio do Máximo se, e somente se, $(\lambda_1 I - A)$ é uma M-matriz não singular.

Seguindo o mesmo racíocinio em ([1], `Teorema` 2.8) pôde-se provar o seguinte resultado.

Teorema 3.7. ([*1*], `teorema` 2.8) *Sejam $f_1, f_2 \geq 0$, não triviais e $\alpha a + \beta d \geq \lambda_1$, para $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Se $b, c \geq 0$, então o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \geq a|u_1|^{p-2}u_1 + b|u_2|^{p-2}u_2 + f_1 \quad ; x \in \Omega \\ -\Delta_p u_2 \geq c|u_1|^{p-2}u_1 + d|u_2|^{p-2}u_2 + f_2 \quad ; x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

não tem solução positiva.

Observação 3.8. *Note que, pelo Teorema 3.5, $\mu_{1,A} \leq \lambda_1(\Delta_p + A)$ para $A = (a_{ij})$, $a_{ii} < 0$ e $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$. Logo, devemos ter $\mathcal{E}(A), \mathcal{F}(A) \neq \emptyset$, e sendo $\mathcal{E}(A), \mathcal{F}(A)$ intervalos limitados superiormente, segue que $\lambda_1(\Delta_p + A)$ está bem definido. Assim, com as hipóteses sobre A_1 e A_2 temos que $\lambda_1(\Delta_p + A_i)$, $i = 1, 2$ estão bem definidos.*

Precisaremos do próximo reultado para provarmos uma estimativa a priori para parte negativa de uma eventual solução do sistema (S_t). A demonstração pode ser encontrada com os detalhes em [29].

Teorema 3.9. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $f \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\right)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma solução de*

$$\Delta_p u \leq g(x, u, v) \ \ em\Omega.$$

Se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ são tais que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $u \geq \varphi$ em uma vizinhança de x_0, então

$$\Delta_p \varphi(x_0) \leq g(x_0, u(x_0), v(x_0)).$$

3.2.2 O Operador $\mathcal{H}$ na forma matricial

O próximo resultado foi motivado pelos casos escalares. A demonstração segue as idéias do Teorema 7 e Teorema 9 em [17]. Usaremos este resultado para garantir a existência da primeira solução para o sistema (S_t).

Lema 3.10. *Seja $C > 0$ dado em (I), então o sistema*

$$(S_*)\begin{cases} -\Delta_p u_1 + C|u_1|^{p-2}u_1 = g_1(x) \ \ ; x \in \Omega \\ -\Delta_p u_2 + C|u_2|^{p-2}u_2 = g_2(x) \ \ ; x \in \Omega \\ \qquad u_1 = u_2 = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução $u = (u_1, u_2) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$, para toda $G = (g_1, g_2) \in (L^\infty(\Omega))^2$. Além disso, o operador $\mathcal{H} : (L^\infty(\Omega))^2 \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ definido por

$$\mathcal{H}(g_1, g_2) = (\mathcal{H}_1(g_1), \mathcal{H}_2(g_2))$$

onde $\mathcal{H}_i : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\Omega)$, dado por $\mathcal{H}_i(g_i) = u_i$ se e só se u_i é solução de

$$-\Delta_p u_i + C|u_i|^{p-2}u_i = g_i(x)$$

é estritamente crescente e compacto. Se $S \subset (L^\infty(\Omega))^2$ é limitado na topologia de $(L^p(\Omega))^2$ induzida pelo imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, então o operador $\mathcal{H}_S : S \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2 : g \to \mathcal{H}(g)$ é contínuo.

Demonstração. Note que podemos escrever o sistema (S_*) na forma matricial,

$$(S_G)\begin{cases} -\Delta_p u = A\Psi_p u + G(x) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

com $A = (a_{ij})$, $a_{ii} = -C$ e $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\Psi_p u = \left(|u_1|^{p-2}u_1, |u_2|^{p-2}u_2\right)^T$ e $G(x) = \left(g_1(x), g_2(x)\right)^T$. Temos que a matriz $\lambda_1 I - A$ é uma M-matriz não singular logo, o Passo 1 do Teorema 9 em [17] garante a existência de sub-supersolução para (S_G).

(Existência) Seja $\overline{A} = [\phi_1, \phi_2]$ um conjunto de funções φ em $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$, tais que, $\phi_1 \leq \varphi \leq \phi_2$, onde ϕ_1, ϕ_2 são as sub supersolução estritas de (S_G) respectivamente. Considere $A_R = \overline{A} \cap B_R$, onde B_R é a bola de raio R em $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$. Pelo fato de $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ serem sub e super soluções estritas, uma solução u de (S_*) está no interior de $\overline{A}$. Logo para R suficientemente grande obtemos que

$$\deg\left(I - P, A_R, 0\right) = 1,$$

onde $P : A_R \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ é definido por $Pu = K\left(G + A\Psi_p u\right)$ onde, $K : \left(L_\infty(\Omega)\right)^2 \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ é dado por $KG = u$ se e somente se $u = (u_1, u_2)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = G(x) \quad ; x \in \Omega \\ u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(Unicidade) Sejam u e v soluções de (S_G), isto é

$$\begin{cases} -\Delta_p u = A\Psi_p u + G(x) \\ -\Delta_p v = A\Psi_p v + G(x) \\ u = v = 0 \end{cases}$$

temos que

$$\int_\Omega \left[\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}}\right][u^p - v^p] = \int_\Omega A\left[\frac{\Psi_p u}{u^{p-1}} - \frac{\Psi_p v}{v^{p-1}}\right][u^p - v^p] \leq 0$$

Por outro lado, pelo Teorema 7 em [17] devemos ter

$$\int_\Omega \left[\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} + \frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}}\right][u^p - v^p] > 0$$

se $u, v > 0$, $u \neq kv$. Logo, concluimos que $u = kv$ e substituindo em (S_G) vemos que $k = 1$.

Portanto, o problema (S_*) é unicamente resoluvel para cada $G = (g_1, g_2) \in (L_\infty(\Omega))^2$ e o operador solução $\mathcal{H} : (L_\infty(\Omega))^2 \to \left(W_0^{1,p}(\overline{\Omega})\right)^2$ é estritamente crescente.

(Contínuidade) Seja $\{g^n\}$ uma sequência limitada em $(L_\infty(\Omega))^2$ e $w^n = \mathcal{H}g^n$, logo

$$-\Delta_p w^n = A\Psi_p w^n + g^n(x) \quad ; x \in \Omega$$

Pelo Lema 3.3 $w^n \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ com $\|w^n\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2} < M(C)$. Como a imersão $\left(C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2 \hookrightarrow \left(C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\right)^2$ é compacta para $0 \leq \beta < \alpha$, passando a uma subsequência se necessário, $\mathcal{H}g^n \to w$ em $\left(C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\right)^2$ logo, $\mathcal{H} : (L_\infty(\Omega))^2 \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ é compacto. Seja $S \subset (L^\infty(\Omega))^2$ é $(L^\infty(\Omega))^2$-limitado na topologia de $(L^p(\Omega))^2$ induzida pelo imersão $(L^\infty(\Omega))^2 \hookrightarrow (L^p(\Omega))^2$. Suponha que $\mathcal{H}_S : S \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ não seja contínua, então existe uma sequência $(g^n) \subset S$ convergindo em $(L^p(\Omega))^2$ para alguma $g \in S$ e tal que $\|\mathcal{H}g^n - \mathcal{H}g\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2} \geq \delta$ para um $\delta > 0$ conveniente. Desde que $(\mathcal{H}g^n)$ é limitada em $\left(W_0^{1,p}(\overline{\Omega})\right)^2$, passando a uma subsequência se necessário, $\mathcal{H}g^n \to u$ fortemente em $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$. Passando ao limite em

$$-\Delta_p \mathcal{H}g^n = A\Psi_p(\mathcal{H}g^n) + g^n(x) \quad ; x \in \Omega \quad \mathcal{H}g^n = 0 \quad ; x \in \partial\Omega$$

concluimos que u satisfaz a equação matricial

$$-\Delta_p u = A\Psi_p u + g(x) \quad ; x \in \Omega \quad u = 0 \quad ; x \in \partial\Omega$$

e pela unicidade das soluções, segue que $u = \mathcal{H}g$. O que gera uma contradição com o fato de que $0 < \delta \leq \liminf \|\mathcal{H}g^n - \mathcal{H}g\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2} = 0$.

□

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção mostraremos que o sistema (S_t) admite pelo menos uma solução, para isso, faremos uso da teoria do grau de Leray-Schauder. Note que resolver o problema (S_t) é equivalente a mostrar a existência de uma solução para o seguinte sistema de equações

$$
(S') \begin{cases} u_1 = \mathcal{H}_1\left(f_1(x,u_1,u_2) + C|u_1|^{p-2}u_1 + t_1\phi_1 + h_1\right) \\ u_2 = \mathcal{H}_2\left(f_2(x,u_1,u_2) + C|u_2|^{p-2}u_2 + t_2\phi_2 + h_2\right) \end{cases}
$$

onde $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ são dados no Lema 3.10. Além disso, note que o sistema (S') pode ser escrito na forma matricial

$$
u = \mathcal{H}\Big(f(x,u_1,u_2) + \widetilde{\Psi}_p(u) + t\phi + h\Big) \tag{3.1}
$$

onde $u = (u_1, u_2)$, $f(x,u) = (f_1(x,u_1,u_2), f_2(x,u_1,u_2))$,

$$
\widetilde{\Psi}_p(u) := \Big(C|u_1|^{p-2}u_1, C|u_2|^{p-2}u_2\Big)
$$

sendo, $t\phi = (t_1\phi_1, t_2\phi_2)$, $h = (h_1, h_2)$.

3.3.1 Observações sobre Soluções de Viscosidade

A proposta para esta subseção, é enunciar um resultado sobre solução de viscosidade, o qual será usado para obter uma limitação para parte negativa de uma eventual solução de (S_t), detalhes sobre a demonstração e um aprofundamento sobre teoria de soluções de viscosidade pode ser encontrado em [14] , veja também [29]. Começaremos com algumas definições.

Definição 3.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $G : S(N) \times \mathbb{R}^N - \{0\} \to \mathbb{R}$ operador contínuo e g uma função contínua definida sobre $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.*

i) $u \in C(\Omega)$ é uma subsolução de viscosidade de

$$
G\left(D^2u, Du\right) = g(x,u)
$$

se para cada $x_0 \in \Omega$, uma das seguintes condições é satisfeita:

- *ou existe uma bola aberta $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, $\delta > 0$, sobre a qual u é constante, $u = c$ e $g(x,u) \leq 0$, $\forall x \in B_\delta(x_0)$.*
- *ou para toda $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi \geq u$ em uma vizinhança de x_0 e $D\varphi(x_0) \neq 0$, temos*

$$
G\left(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)\right) \geq g(x_0, u(x_0)).
$$

ii) $u \in C(\Omega)$ *é uma supersolução de viscosidade de*

$$G\left(D^2u, Du\right) = g(x,u)$$

se para cada $x_0 \in \Omega$, *uma das seguintes condições é satisfeita:*

- *ou existe uma bola aberta* $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, $\delta > 0$, *sobre a qual* u *é constante,* $u = c$ *e* $g(x,u) \geq 0$, $\forall x \in B_\delta(x_0)$.
- *ou para toda* $\varphi \in C^2(\Omega)$ *tal que* $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi \leq u$ *em uma vizinhança de* x_0 *e* $D\varphi(x_0) \neq 0$, *temos*

$$G\left(D^2\varphi(x_0), D\varphi(x_0)\right) \leq g(x_0, u(x_0)).$$

iii) $u \in C(\Omega)$ *é uma solução de viscosidade se é ao mesmo tempo sub e supersolução de viscosidade.*

Para o caso de sistema, temos a seguinte definição de soluções de viscosidade:

Definição 3.12. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto,* $G : S(N) \times \mathbb{R}^N - \{0\} \to \mathbb{R}$ *operador contínuo e* g *uma função contínua definida sobre* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$. *Dizemos que* $u = (u_1, ..., u_m) \in C\left(\Omega, \mathbb{R}^m\right)$ *é uma solução de viscosidade do sistema*

$$\begin{cases} G_i\left(D^2u_i, Du_i\right) = g_i(x,u) \ \ em \ \ \Omega \\ \qquad\qquad i = 1, ..., m \end{cases}$$

se para cada $i \in \{1, ..., m\}$, u_i *é solução de viscosidade da equação*

$$G_i\left(D^2u_i, Du_i\right) = g_i(x,u)$$

O próximo teorema será útil para obtermos estimativas a priori para a parte negativa de uma eventual solução de (S_t), a demonstração pode ser encontrada em [29].

Teorema 3.13. *Seja* $u \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ *uma supersolução de viscosidade do sistema*

$$\begin{cases} \Delta_p u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\psi_p(u_j) = f_i(x) \quad ; x \in \Omega \\ \qquad\qquad i = 1, ..., m \end{cases}$$

onde $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$*, com* $f_i \in L^N(\Omega) \cap C(\Omega)$ *e* $A = (a_{ij}) \in S(m)$ *satisfaz* $a_{ij} \geq 0$ *para todo* $i \neq j$ *e* $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 0$ *para todo* $i = 1, ..., m$*. Então*

$$-\inf_{\Omega} \{min\{u_1, ..., u_m\}\} \leq \sup_{\partial\Omega} \left\{max\left\{(u_1)^-, ..., (u_m)^-\right\}\right\} + Cdiam(\Omega) \left\| \widetilde{f} \right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$$

sendo $\widetilde{f} = max\left\{f_1^+, ..., f_m^+\right\}$.

3.3.2 Resultados Auxiliares

Mostraremos que a equação matricial (3.1) tem pelo menos uma solução para algum t e para isso, precisaremos dos próximos resultados que são adaptações para o caso matricial dos resultados em ([21], `Lemas 1 e 2`).

Lema 3.14. *Para cada* $R_1 > 0$ *dado, existe um número real* $T = T(R_1)$ *tal que*

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x, v) + \widetilde{\Psi}_p(v) + t\phi + h\right)\right) \tag{3.2}$$

para toda $v \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ *com* $\|v^+\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2} = R_1$*,* $\forall \tau \in [0, 1]$*,* $\forall t \leq Te$*, onde* $e = (1, 1)$*.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exitam sequências $\{v^n\} \subset \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ com

$$\left\|(v^n)^+\right\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2} = R_1,$$

$\{\tau_n\} \subset [0, 1]$ e $\{t^n\} \subset \mathbb{R}^2$, $t_i^n \to -\infty$, $i = 1, 2$, tal que

$$v^n = \mathcal{H}\left(\tau_n\left(f(x, v^n) + \widetilde{\Psi}_p(v^n) + t^n\phi + h\right)\right) \tag{3.3}$$

usando a hipótese (I) obtemos,

$$\begin{aligned} f_i(x, s_1, s_2) + C|s_i|^{p-2}s_i &\leq C|s_i|^{p-2}s_i + |f_i(x, s_1, s_2)| \\ &\leq C|s_i|^{p-2}s_i + C + C|s_1|^{p-1} + C|s_2|^{p-1} \\ &= C + C|s_i|^{p-1} \end{aligned}$$

para $s_i \leq 0$. Assim, para a sequência v^n temos

$$\tau_n\left(f(x,v^n)+\widetilde{\Psi}_p(v^n)+t^n\phi+h\right)\leq \tau_n\left(f(x,(v^n)^+)+\widetilde{\Psi}_p(v^n)^+ +C+C|(v_i^n)^+|^{p-1}+t^n\phi+h\right)$$
$$\leq \tau_n(M+t^n\phi+h)\leq M+t^n\phi+h.$$

onde, $M=(M_1,M_2)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega},(v^n)^+\in[0,R_1]^2}\left[f(x,(v^n)^+)+\widetilde{\Psi}_p((v^n)^+)+C+C|(v_i^n)^+|^{p-1}\right]$. Segue que

$$v^n \leq \mathcal{H}(M+t^n\phi+h)$$

Seja $w^n=\mathcal{H}(M+t^n\phi+h)$, ou seja w^n satisfaz

$$-\Delta_p w^n+\widetilde{\Psi}_p(w^n)=(M+t^n\phi+h)$$

Defina $s^n=(s_1^n,s_2^n)$ tal que $t^n=(|s_1^n|^{p-2}s_1^n,|s_2^n|^{p-2}s_2^n)$, assim

$$\begin{cases} -\Delta_p(\frac{w_1^n}{s_1^n})+C|\frac{w_1^n}{s_1^n}|^{p-2}(\frac{w_1^n}{s_1^n})=(\frac{M_1}{t_1^n}+\phi_1+\frac{h_1}{t_1^n}) \\ -\Delta_p(\frac{w_2^n}{s_2^n})+C|\frac{w_2^n}{s_2^n}|^{p-2}(\frac{w_2^n}{s_2^n})=(\frac{M_2}{t_2^n}+\phi_2+\frac{h_2}{t_2^n}) \end{cases}$$

Logo, $\left(\frac{M}{t^n}+\phi+\frac{h}{t^n}\right):=\left(\frac{M_1}{t_1^n}+\phi_1+\frac{h_1}{t_1^n},\frac{M_2}{t_2^n}+\phi_2+\frac{h_2}{t_2^n}\right)\to\phi$, quando $t_i^n\to-\infty$. Pelo Lema 3.10 temos que $\mathcal{H}$ é fortemente crescente e contínuo, logo

$$\frac{w^n}{s^n}\to\mathcal{H}(\phi_1,\phi_2)>0.$$

de onde segue que $w^n<0$. Logo $(v^n)^+=0$, contradizendo o fato de que $\|(v^n)^+\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2}=R_1$. $\square$

O seguinte corolário é uma consequência imediata do teorema que vem em seguida, e cuja demostração será feita adaptando as idéias de [28].

Corolário 3.15. *Seja $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, $t_i<0$, $i=1,2$ fixo. Então existe $R_2>0$ tal que*

$$v\neq\mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v)+\widetilde{\Psi}_p(v)+t\phi+h\right)\right) \tag{3.4}$$

para toda $v\in\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ com $\|v^-\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2}=R_2$, $\forall\tau\in[0,1]$.

Teorema 3.16. *Seja $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, $t_i<0$, $i=1,2$ fixo. Se $u\in\left(W_0^{1,p}(\overline{\Omega})\right)^2$ é uma solução da equação (3.1), então existe $M>0$ tal que $\|u^-\|_{(L^\infty(\Omega))^2}\leq M$.*

Demonstração. Seja (u_1, u_2) uma solução da equação (3.1), temos que

$$\Delta_p u_i + f_i(x, u_1, u_2) = -t_i\phi_i - h_i \leq -t_i \|\phi_i\|_\infty + \|h_i\|_\infty \leq m_{t_i}$$

onde $m_{t_i} = max_i \{-t_i \|\phi_i\|_\infty + \|h_i\|_\infty\}$, $i = 1, 2$. Usando o fato de que f_i é quase-monótona, temos que

$$f_1(x, u_1, -u_2^-) \leq f_1(x, u_1, u_2) \ \ e \ \ f_2(x, -u_1^-, u_2) \leq f_2(x, u_1, u_2),$$

logo

$$(S_{m_{t_i}}) \begin{cases} \Delta_p u_1 \leq m_{t_i} - f_1(x, u_1, -u_2^-) & em \ \ \Omega \\ \Delta_p u_2 \leq m_{t_i} - f_2(x, -u_1^-, u_2) & em \ \ \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Mostraremos que (u_1, u_2) é supersolução de viscosidade de $(S_{m_{t_i}})$. Seja $x_0 \in \Omega$ qualquer. Se $u_1 = k$ constante em uma vizinhança $B_\delta(x_0)$ de x_0, segue que $m_{t_i} - f_1(x, k, -u_2^-) \geq \Delta_p u_1 = 0$ em $B_\delta(x_0)$. Se u_1 não é constante em uma vizinhança de x_0, considere $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) = u_1(x_0)$, $\varphi \leq u_1$ em uma vizinhança de x_0. Então pelo Teorema 3.9 segue que

$$\Delta_p\varphi(x_0) \leq m_{t_i} - f_1(x_0, u_1(x_0), -u_2^-(x_0)).$$

Fazendo demonstração análoga para u_2 obtemos que (u_1, u_2) é supersolução de viscosidade de $(S_{m_{t_i}})$. Além disso, como $-u_i^- \leq 0$, $i = 1, 2$ e $f_i(x, 0, 0) = 0$, segue que

$$m_{t_i} - f_1(x, 0, -u_2^-) \geq 0 \ , \ m_{t_i} - f_2(x, -u_1^-, 0) \geq 0$$

logo, $(0, 0)$ é supersolução de viscosidade de $(S_{m_{t_i}})$. Como o infímo de duas supersoluções de viscosidade é supersolução de viscosidade, temos que $w = min\{(0, 0), (u_1, u_2)\} = (-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de $(S_{m_{t_i}})$.

Agora provaremos que $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_p u_1 + a_{11}\psi_p(u_1) + a_{12}\psi_p(u_2) = m_{t_i} + b_1 & em \ \ \Omega \\ \Delta_p u_2 + a_{21}\psi_p(u_1) + a_{22}\psi_p(u_2) = m_{t_i} + b_1 & em \ \ \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

De fato, seja $x_0 \in \Omega$ arbitrário. Se $-u_1^- = k$ constante em $B_\delta(x_0)$, temos pela hipótese (IV) e pelo fato de que $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de $(S_{m_{t_i}})$ que

$$m_{t_i} + b_1 - a_{11}\psi_p(k) - a_{12}\psi_p(-u_2^-) \geq m_{t_i} - f_1(x, -u_1^-, -u_2^-) \geq 0 \ \ em \ \ B_\delta(x_0).$$

Suponhamos que $-u_1^-$ não é constante em uma vizinhança de x_0, considere $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $D\varphi(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) = -u_1^-(x_0)$, $\varphi \leq -u_1^-$ em uma vizinhança de x_0. Como $(-u_1^-, -u_2^-)$ é supersolução de $(S_{m_{t_i}})$ e pela hipótese (IV) segue que

$$\Delta_p\varphi(x_0) \leq m_{t_i} - f_1(x_0, -u_1^-(x_0), -u_2^-(x_0)) \leq m_{t_i} + b_1 - a_{11}\psi_p(k) - a_{12}\psi_p(-u_2^-)$$

Precedendo de forma análoga para a segunda equação obtemos a afirmação.

Dessa forma, pelo Teorema 3.13 temos que

$$-\inf_{\Omega}\left\{min\left\{-u_1^-, -u_2^-\right\}\right\} \leq \sup_{\partial\Omega}\left\{max\left\{(-u_1^-)^-, (-u_2^-)^-\right\}\right\} + Cdiam(\Omega)\left\|m_{t_i} + b_1\right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$$

Como (u_1, u_2) é solução do sistema (S_t) temos que $u_1 = u_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned} -\inf_{\Omega}\left\{min\left\{-u_1^-, -u_2^-\right\}\right\} &= -\inf_{\Omega}\left\{-max\left\{u_1^-, u_2^-\right\}\right\} \\ &= \sup_{\Omega}\left\{max\left\{u_1^-, u_2^-\right\}\right\} = \left\|u^-\right\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \end{aligned}$$

Portanto $\|u^-\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \leq M$. $\square$

3.3.3 Conclusão da Demonstração do Teorema 3.1

Dado $R_1 > 0$, fixemos $t \leq T(R_1)e$ com $T(R_1)$ dado pelo Lema 3.14 e considere $R_2 > 0$ garantido no Corolário 3.15. Considere o conjunto

$$\Lambda = \left\{v \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})^2\right) : \left\|v^+\right\|_{(C_0^1(\overline{\Omega}))^2} < R_1\,, \left\|v^-\right\|_{(C_0^1(\overline{\Omega}))^2} < R_2\right\}$$

Note que Λ é um conjunto aberto em $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ contendo 0. Pelo Lema 3.14 e Corolário 3.15 temos que

$$v \neq \mathcal{H}\left(\tau\left(f(x,v) + \widetilde{\Psi}_p(v) + t\phi + h\right)\right) \quad \forall v \in \partial\Lambda,$$

Logo, pela invariância homotópica do grau de Leray-Schauder segue que

$$\deg\left(I - \mathcal{H}\left(f(x,v) + \widetilde{\Psi}_p(v) + t\phi + h\right), \Lambda, 0\right) = \deg\left(I, \Lambda, 0\right) = 1.$$

de onde segue que existe $v \in \Lambda$ tal que

$$v = \mathcal{H}\left(f(x,v) + \widetilde{\Psi}_p(v) + t\phi + h\right)$$

e portanto, existe $t = (t_1, t_2) \leq T(R_1)e$ tal que o sitema (S_t) possui pelo menos uma solução.

3.4 Existência de subsolução para (S_t)

Nesta seção, começamos com um resultado a respeito da existência de subsolução para o sitema (S_t) e cuja demonstração pode ser seguida também em [29]. Em seguida, faremos para o caso de sistema o método da sub-supersolução.

Proposição 3.17. *Para todo $w = (w_1, w_2) \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, existe $\underline{u} = (\underline{u_1}, \underline{u_2}) \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ subsolução de (S_t) tal que $\underline{u} << w$.*

Demonstração. Sejam $w \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ fixos, mas arbitrários. Seja $u \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ solução de

$$-\Delta_p u = A_1 \Psi_p(u) - d_1 e + t\phi + h, \ \textit{em} \ \Omega \ \ u = 0 \ \textit{sobre} \ \partial\Omega.$$

onde sem perda de generalidade tomamos $d_1 > 0$ grande o suficiente para $-d_1 + t_i\phi_i + h_i < 0$, $i = 1, 2$. Note que, desde que $-d_1 + t_i\phi_i + h_i \in L^{p'}(\Omega)$, A_1 é uma matriz cooperativa e $\lambda_1 I - A_1$ é uma M-matriz não singular, a existência de tal solução é garantida pelo Teorema 3 de [9]. Além disso, podemos tomar d_1 grande o suficiente para que $u << w$. De fato, seja $\{d_1^n\}$ sequência tal que $d_1^n \to \infty$(sem perda de generalidade assuma que $d_1^n > 1$) e $\{u^n\}$ uma sequência de soluções de

$$-\Delta_p u^n = A_1 \Psi_p(u^n) - d_1^n \overline{e} + t\phi + h, \ \textit{em} \ \Omega \ \ u^n = 0 \ \textit{sobre} \ \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Logo, se $v^n = \dfrac{u^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} = \left(\dfrac{u_1^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}}, \dfrac{u_2^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} \right)$, então v^n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_1^n = a_{11}\psi_p(v_1^n) + a_{12}\psi_p(v_2^n) - 1 + \dfrac{t_1\phi_1 + h_1}{d_1^n} & ; x \in \Omega \\ -\Delta_p v_2^n = a_{21}\psi_p(v_1^n) + a_{22}\psi_p(v_2^n) - 1 + \dfrac{t_2\phi_2 + h_2}{d_1^n} & ; x \in \Omega \\ v_1^n = v_2^n = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Agora, note que

$$\left| \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(v_j^n) - 1 + \frac{t_i\phi_i + h_i}{d_1^n} \right| \le M_i \left(|v_1^n|^{p-1} + |v_2^n|^{p-1} + 1 \right) \ \ \textit{para} \ \ i = 1, 2,$$

com $M_i = M_i(a_{i1}, a_{i2}, t_i, \phi_i, h_i)$. Pelo Teorema 3.3 temos que $(v_1^n, v_2^n) \in \left(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$ para algum $0 < \alpha < 1$, e $\|(v_1^n, v_2^n)\|_{\left(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2} \le M(M_1, M_2)$. Logo, pela imersão compacta

$\left(C^{1,\beta}(\overline{\Omega})\right)^2 \hookrightarrow \left(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$, $0 \leq \beta < \alpha$ temos que, a menos de subsequência, $(v_1^n, v_2^n) \to (v_1, v_2)$ em $\left(C^{1,\beta}(\overline{\Omega})\right)^2$. Pelo Lema 0.7 segue que $(v_1^n, v_2^n) \to (v_1, v_2)$, a qual é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_1 = a_{11}\psi_p(v_1) + a_{12}\psi_p(v_2) - 1 \ \ ; x \in \Omega \\ -\Delta_p v_2 = a_{21}\psi_p(v_1) + a_{22}\psi_p(v_2) - 1 \ \ ; x \in \Omega \\ \qquad v_1 = v_2 = 0 \ \ ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo 3.6 segue que $v_i \leq 0$, $i = 1, 2$. Considerando cada equação separadamente e sabendo que $a_{ij} > 0$ para $i \neq j$, obtemos, aplicando o Princípio do Máximo de Vázquez com $\beta(s) = -a_{ii}\psi_p(s)$ para a i-ésima equação, $i = 1, 2$, que $v << 0$. Como $v^n = \dfrac{u^n}{(d_1^n)^{\frac{1}{p-1}}} \to v << 0$, temos que $u_i^n < 0$, $\dfrac{\partial u_i^n}{\partial \nu} < 0$ e ainda $\dfrac{\partial u_i^n}{\partial \nu} < 0$, $\dfrac{\partial u_i^n}{\partial \nu} \to -\infty$ quando $n \to \infty$.

Sendo $w_i, u_i^n \in C_0^1(\overline{\Omega})$, temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_1^{n_1} < w_1$ e $\dfrac{\partial u_1^{n_1}}{\partial \nu} < \dfrac{\partial w_1}{\partial \nu}$. Analogamente existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $u_2^{n_2} < w_2$ e $\dfrac{\partial u_2^{n_2}}{\partial \nu} < \dfrac{\partial w_2}{\partial \nu}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e tal que $d_1^{n_0} > b_1$, onde b_1 é dado pela hipótese (IV). Então, como $(u_1^{n_0}, u_2^{n_0})$ é solução de (3.5) temos para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_i^{n_0} &= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(u_j^{n_0}) - b_1^{n_0} + t_i\phi_i + h_i \\ &\leq \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\psi_p(u_j^{n_0}) - b_1 + t_i\phi_i + h_i \\ &\leq f_i(x, u^{n_0}) + t_i\phi_i + h_i \end{aligned}$$

isto é $\underline{u} = (u_1^{n_0}, u_2^{n_0})$ é subsolução de (S_t) que satisfaz $\underline{u} << w$. $\square$

O próximo resultado é o método de sub e supersolução para sistemas.

Teorema 3.18. *Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ sub e supersolução de (S_t) respectivamente tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, com $\underline{u} \leq 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Então existe $u \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ solução de (S_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Consideremos os operadores

$$N_t : \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2 \to (L^\infty(\Omega))^2 \ \ e \ \ T : (L^\infty(\Omega))^2 \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$$

definidos para cada $i = 1, 2$, por

$$N_t(v) = (N_1(v), N_2(v)), \quad onde \ \ N_i(v) = f_i(x, v) + \sigma|v_i|^{p-2}v_i + t_i\phi_i + h_i$$

e $T(v) = (T_1(v), T_2(v)) = (w_1, w_2)$ se, e somente se, (w_1, w_2) é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 + \sigma|w_1|^{p-2}w_1 = v_1 \quad ; x \in \Omega \\ -\Delta_p w_2 + \sigma|w_2|^{p-2}w_2 = v_2 \quad ; x \in \Omega \\ \qquad w_1 = w_2 = 0 \quad ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Definimos também $Q_t : \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2 \to \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ por $Q_t = T \circ N_t$.Temos que u e ponto fixo de Q_t se, e somente se, u é uma solução de (S_t), utilizando o Teorema 3.3 temos que Q_t é compacto. Considerando

$$\mathcal{B} = \left\{ u \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2 : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \right\},$$

temos que $\mathcal{B}$ é um conjunto fechado e convexo. Ainda, por princípio de comparação, (II) e (III) temos que $Q_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, e pelo Teorema 3.3 $Q_t(\mathcal{B})$ é limitado. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder existe $u \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ o qual é ponto fixo de Q_t, ou seja, existe $u \in \left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ solução de (S_t) tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω. $\square$

3.5 Estimativas a Priori

A seguinte proposição pode ser obtida diretamente do Teorema 3.16 tomando-se $t = -C_0 e$.

Proposição 3.19. *Seja $C_0 \in \mathbb{R}$ fixo. Existe $M = M(C_0) > 0$ tal que se u é uma solução de (S_t) para $t \geq -C_0 e$, então $\|u^-\|_\infty \leq M$.*

Uma consequência da Proposição 3.19 é o seguinte resultado a respeito da norma $(L^\infty(\Omega))^2$ de u.

Teorema 3.20. *Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que o problema (S_t) não possui solução u com norma $\|u\| \geq R$ para $t \geq t_0 e$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\{u^n\}$ é uma sequência de soluções de (S_{t^n}) com $0 < \|u^n\| \to +\infty$ onde $\{t^n\}$ é uma sequência tal que $t^n \geq t_0 e$. Defina $w^n = (w_1^n, w_2^n) = \left(\frac{u_1^n}{\|u^n\|}, \frac{u_2^n}{\|u^n\|}\right)$, segue que

$$-\Delta_p(w_i^n) = \frac{f_i(x, u^n)}{\|u^n\|^{p-1}} + \frac{t_i^n}{\|u^n\|^{p-1}}\phi_i + \frac{h_i}{\|u^n\|^{p-1}} \quad , i = 1, 2. \tag{3.6}$$

Pelo Teorema 3.16 temos que $\|(u^n)^-\| \leq M$, logo $\|u^n\| = \|(u^n)^+\|$ para n suficientemente grande. Como f_i é quase-monótona e pelas hipóteses (V) e (IV) temos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f_1(x, u_1^n, u_2^n) \geq f_1(x, u_1^n, -M) - C_1 &\geq f_1(x, (u_1^n)^+, 0) - o(1) \left\|(u^n)^+\right\|^{p-1} - C_1 \\ &\geq c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1) \left\|u^n\right\|^{p-1} - C_1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} f_2(x, u_1^n, u_2^n) \geq f_2(x, -M, u_2^n) - C_1 &\geq f_2(x, 0, (u_2^n)^+) - o(1) \left\|(u^n)^+\right\|^{p-1} - C_1 \\ &\geq c_{12}|(u_2^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1) \left\|u^n\right\|^{p-1} - C_1 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a hipótese (I) temos que existe constante $C_2 > 0$ tal que,

$$f_i(x, u_1^n, u_2^n) \leq C\left(1 + |u_1^n|^{p-1} + |u_2^n|^{p-1}\right) + C_2$$

Logo, obtemos

$$c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1) \left\|u^n\right\|^{p-1} - C_1 \leq f_1(x, u_1^n, u_2^n) \leq C\left(1 + |u_1^n|^{p-1} + |u_2^n|^{p-1}\right) + C_2$$

e,

$$c_{12}|(u_2^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1) \left\|u^n\right\|^{p-1} - C_1 \leq f_2(x, u_1^n, u_2^n) \leq C\left(1 + |u_1^n|^{p-1} + |u_2^n|^{p-1}\right) + C_2$$

Então,

(3.7)

$$C_{11}|w_1^n|^{p-1} - \frac{b_2}{\|u^n\|^{p-1}} - o(1) - \frac{C_1}{\|u^n\|^{p-1}} \leq \frac{f_1(x, u_1^n, u_2^n)}{\|u^n\|^{p-1}} \leq C\left(1 + |w_1^n|^{p-1} + |w_2^n|^{p-1}\right) + \frac{C_2}{\|u^n\|^{p-1}}$$

e,

(3.8)

$$C_{12}|w_2^n|^{p-1} - \frac{b_2}{\|u^n\|^{p-1}} - o(1) - \frac{C_1}{\|u^n\|^{p-1}} \leq \frac{f_2(x,u_1^n,u_2^n)}{\|u^n\|^{p-1}} \leq C\left(1 + |w_1^n|^{p-1} + |w_2^n|^{p-1}\right) + \frac{C_2}{\|u^n\|^{p-1}}$$

logo, segue que a sequência $\left\{\dfrac{f_i(x,u_1^n,u_2^n)}{\|u^n\|^{p-1}}\right\}$ é limitada em $L^{p'}(\Omega)$ e portanto, é limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Pelo Lema 0.6 temos que $-\Delta_p(w_i^n)$ é limitado em $W^{-1,p'}(\Omega)$, e como $\dfrac{h_i(x)}{\|u^n\|^{p-1}}$ tende a zero, segue que é limitada em $W^{-1,p'}(\Omega)$. Logo, a sequência $\dfrac{t_i^n}{\|u^n\|^{p-1}}$ é limitada e passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que converge apara algum $\rho_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Por outro lado, temos que o operador $\mathcal{K} : L^{p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$ é contínuo e compacto, de onde segue que a sequência,

$$w_i^n = \mathcal{K}\left[\frac{f_i(x,u_1^n,u_2^n)}{\|u^n\|^{p-1}} + \frac{t_i^n}{\|u^n\|^{p-1}}\phi_i + \frac{h_i}{\|u^n\|^{p-1}}\right] \tag{3.9}$$

possui uma subsequência fortemente convergente para algum w_i, com $\|w_i\| = 1$, em $W_0^{1,p}(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$. Consequentemente, usando $\psi \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega}), \psi \geq 0$ como função teste em 3.6 e as hipóteses (V) e (IV), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_1^n|^{p-2}\nabla w_1^n \nabla\psi &= \int_\Omega \frac{f_1(x,u_1^n,u_2^n)}{\|u^n\|^{p-1}}\psi + \int_\Omega \frac{t_1^n}{\|u^n\|^{p-1}}\phi_1\psi + \int_\Omega \frac{h_1}{\|u^n\|^{p-1}}\psi \\
&\geq \int_\Omega \left(\frac{c_{11}|(u_1^n)^+|^{p-1} + c_{12}|(u_2^n)^+|^{p-1} - b_2 - o(1)\,\|(u^n)^+\|^{p-1}}{\|u^n\|^{p-1}}\right) \\
&+ \int_\Omega \frac{t_1^n}{\|u^n\|^{p-1}}\phi_1\psi + \int_\Omega \frac{h_1}{\|u^n\|^{p-1}}\psi
\end{aligned}$$

e passando ao limite para $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega |\nabla w_1|^{p-2}\nabla w_1 \nabla\psi \geq \int_\Omega \left(c_{11}|w_1^+|^{p-2}w_1^+ + c_{12}|w_2^+|^{p-2}w_2^+\right)\psi + \int_\Omega \phi_1\rho_1\psi$$

Fazendo o mesmo raciocínio para w_2^n, obtemos que (w_1, w_2) é solução de

$$\begin{cases}
-\Delta_p w_1 \geq c_{11}|w_1^+|^{p-2}w_1^+ + c_{12}|w_2^+|^{p-2}w_2^+ + \rho_1\phi_1 & ; x \in \Omega \\
-\Delta_p w_2 \geq c_{21}|w_1^+|^{p-2}w_1^+ + c_{22}|w_2^+|^{p-2}w_2^+ + \rho_2\phi_2 & ; x \in \Omega \\
w_1 = w_2 = 0 \quad ; x \in \partial\Omega
\end{cases}$$

Mostremos que $w_i \geq 0$, para $i = 1, 2$. De fato, suponha que existe $x_i \in \Omega$ tal que $w_i(x_i) < 0$. Como $w_i \in C^1(\overline{\Omega})$, considere $\widetilde{\Omega}_i = w_i^{-1}((-\infty, 0))$ e $\Omega_i \subset \widetilde{\Omega}_i$ a componente conexa que contém x_i. Assim, para $i \neq j$ temos que

$$\begin{cases} -\Delta_p w_i \geq c_{ij}|w_j^+|^{p-2}w_j^+ + \rho_i\phi_i \;\; ; x \in \Omega_i \\ w_i = 0 \;\; ; x \in \partial\Omega_i \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo temos que $w_i \geq 0$ em Ω_i, o que é uma contradição com a definição de Ω_i. Assim, não existe $x_i \in \Omega$ tal que $w_i(x_i) < 0$ e portanto $v_i \geq 0$, para $i = 1, 2$. Como $w_i \geq 0$, segue da hipótese (IV) e princípio do máximo de Vázquez que $w_i > 0$, para $i = 1, 2$. Por outro lado, pelas definições de $\mathcal{E}(A_2)$ e $\lambda_1(\Delta_p + A_2)$ temos que $0 \in \mathcal{E}(A_2)$ e assim $0 \leq \lambda_1(\Delta_p + A_2)$, o que contradiz a hipótese (IV). $\square$

Devido ao Teorema 3.20 obtemos as seguinte estimativa a priori na norma $\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ de uma eventual solução de (S_t).

Teorema 3.21. *Dado $t^0 \in \mathbb{R}^2$, existem $\widetilde{R}, \overline{R} > 0$ tais que para todo $t^0 \leq t \leq \overline{R}e$, se u é uma solução de (S_t)então $\|u\|_{\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2} \leq \widetilde{R}$.*

Demonstração. Dado $t^0 \in \mathbb{R}^2$, defina $C_0 = \max\{(t_1^0)^-, (t_2^0)^-\} \geq 0$. Segue do Teorema 3.20 que para todo $t \geq C_0 e$, se u é uma solução de (S_t) então $\|u\| \leq R$. Por outro lado, como u é solução de (S_t) temos

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 = f_1(x, u_1, u_2) + t_1\phi_1 + h_1, \;\; ; x \in \Omega \\ -\Delta_p u_2 = f_2(x, u_1, u_2) + t_2\phi_2 + h_2, \;\; ; x \in \Omega \\ u_1 = u_2 = 0 \;\; ; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

como $(u_1, u_2) \in [-M, R]^2$ com M garantido no Teorema 3.16, $|f_i(x, u_1, u_2)| \leq R_i$ para $(x, u_1, u_2) \in \overline{\Omega} \times [-M, R] \times [-M, R]$, $i = 1, 2$ e então temos que $d_i(x, u_1, u_2) = f_i(x, u_1, u_2) + t_i\phi_i + h_i$ é uma função de Caratheodory que satisfaz

$$|d_i(x, u_1, u_2)| \leq R_i + \overline{R}\,\|\phi_i\|_\infty + \|h_i\|_\infty \leq C_2.$$

Pelo Teorema 3.3, $u \in \left(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$ para $0 < \alpha < 1$ e $\|u\|_{\left(C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2} \leq \widetilde{M}(C_2)$. Portanto existe $\widetilde{R} > 0$ tal que $\|u\|_{\left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2} \leq \widetilde{R}$. $\square$

Com o auxilio dos resultados anteriores, provamos o seguinte resultado:

Lema 3.22. *Existe $\overline{R} > 0$ tal que o problema (S_t) não possui solução para $t > \overline{R}e$.*

Demonstração. De fato, considere $t^0 = (0,0)$, e seja $R > 0$ dado pela Teorema 3.20, se u é solução de (S_t) para $t > t^0 e$ grande o suficiente, então $\|u\| \leq R$, e por argumentos de regularidade garantidos no Lema 0.8, segue que $\|u\|_{(C^1)^2}$ é limitada. Por outro lado, u resolve em $\left(W^{-1,p'}(\Omega)\right)^2$ a equação vetorial,

$$-\Delta_p u = f(x,u) + t\phi + h$$

onde os termos $-\Delta_p u, f(x,u)$ são limitados em $\left(W^{-1,p'}(\Omega)\right)^2$. Consequentemente, obtemos que o conjunto dos parâmetros t para os quais o problema (S_t) tem solução é limitado. Isto é, existe $\overline{R} \in \mathbb{R}$ tal que o problema (S_t) não tem solução para $t > \overline{R}e$. $\square$

3.6 Demonstração do Teorema 3.2

Nesta seção, utilizando a teoria do grau de Leray-Schauder junto com o que já foi feito em seções anteriores, demonstramos o Teorema 3.2. Denotemos

$$\mathcal{Y} = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1, y_2) = \lambda(t_1, t_2), t_1 \neq t_2 \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

onde (t_1, t_2) é o vetor para o qual o sistema (S_t) tem solução(ver subseção 3.3.3).

Para cada $y \in \mathcal{Y}$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{R} : (S_{y+se}) \ \texttt{tem ao menos uma solução}\}$$

Notemos que, pela que foi feito na Seção 3.3 temos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, e pelo Lema 3.22, $\mathcal{S}$ é limitado superiormente. Além disso, segue da Proposição 3.17 e do Teorema 3.18 que, se $t \in \mathcal{S}$ então $s \in \mathcal{S}$ para todo $s \leq t$. Defina, para $y \in \mathcal{Y}$,

$$\upsilon^*(y) = \sup \mathcal{S}.$$

Afirmamos que a aplicação $y \mapsto \upsilon^*(y)$ é Lipschitziana.

De fato, dados $y, z \in \mathcal{Y}$ com $y \neq z$, consideremos $\Upsilon^*(y) = y + \upsilon^*(y)e$ e $\Upsilon^*(z) = z + \upsilon^*(z)e$. Mostremos que $\Upsilon^*(y) \not< \Upsilon^*(z)$ e $\Upsilon^*(z) \not< \Upsilon^*(y)$. Suponhamos por absurdo que $\Upsilon^*(y) < \Upsilon^*(z)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $y + \upsilon^*(y)e + \epsilon e < z + \upsilon^*(z)e$, isto é

$$y + \upsilon^*(y)e + \frac{\epsilon}{2}e < z + \upsilon^*(z)e - \frac{\epsilon}{2}e \tag{3.10}$$

Como $z + \upsilon^*(z)e - \frac{\epsilon}{2}e < \Upsilon^*(z)$, $(S_{z+\upsilon^*(z)e-\frac{\epsilon}{2}e})$ possui solução, e por (3.10), $(S_{y+\upsilon^*(y)e+\frac{\epsilon}{2}e})$ tem solução, o que contradiz a definição de $\upsilon^*(y)$. Da mesma forma provamos que $\Upsilon^*(z) \not< \Upsilon^*(y)$.

Assim, existem $i, j \in \{1, 2\}$ tais que

$$y_i + \upsilon^*(y) \geq z_i + \upsilon^*(z) \text{ e } y_j + \upsilon^*(y) \leq z_j + \upsilon^*(z)$$

Então

$$\upsilon^*(z) - \upsilon^*(y) \leq y_i - z_i \leq |y - z|$$

e

$$\upsilon^*(y) - \upsilon^*(z) \leq z_j - y_j \leq |y - z|$$

Portanto, $|\upsilon^*(y) - \upsilon^*(z)| \leq |y - z|$ como queriamos. Defina

$$\Upsilon^* = \{y + \upsilon^*(y)e : y \in \mathcal{Y}\}.$$

Temos que Υ^* é uma curva Lipschitziana que divide $\mathbb{R}^2$ em duas componentes

$$\mathcal{L} = \{y + se : s < \upsilon^*(y), y \in \mathcal{Y}\} \text{ e } \mathcal{N} = \{y + se : s > \upsilon^*(y), y \in \mathcal{Y}\}.$$

Prova de i) Segue da definição de $\mathcal{S}$ e υ^* que se $t \in \mathcal{L}$, então (S_t) tem pelo menos uma solução. Agora, se $t \in \Upsilon^*$, $t = y^* + \upsilon^*(y^*)e$, para algum $y^* \in \mathcal{Y}$. Pela definição de $\upsilon^*(y^*)$ existe $\{t^n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t^n \to \upsilon^*(y^*)$ e $(S_{y^*+t^n e})$ tem solução u^n. Sem perda de generalidade, suponhamos que t^n é crescente. Como u^n é solução de $(S_{y^*+t^n e})$, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_i^n|^{p-2} \nabla u_i^n \nabla \varphi = \int_\Omega (f_i(x, u_1^n, u_2^n) + (y_i^* + t^n)\phi_i + h_i)\varphi, \quad i = 1, 2. \tag{3.11}$$

Pela hipótese (I), Teorema 3.21 e Lema 3.22, com $t^0 = y^* + t^1 e$ (t^1 é o primeiro elemento da sequência), temos, para $i = 1, 2$,

$$
\begin{aligned}
|f_i(x,u_1^n,u_2^n)+(y_i^*+t^n)\,\phi_i+h_i| &\leq C\left(1+|u_1^n|^{p-1}+|u_2^n|^{p-1}\right)+|y_i^*+t^n|\,\|\phi_i\|_\infty+\|h_i\|_\infty\\
&\leq C\left(1+\widetilde{R}^{p-1}\right)+\left(\overline{R}+|t^0|\right)\|\phi_i\|_\infty+\|h_i\|_\infty\leq \widetilde{M}.
\end{aligned}
$$

Logo pelo Teorema 3.3 segue que $\{u^n\}$ é limitada em $\left(C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})\right)^2$ e assim possui uma subsequência convergente $u^{n_k}\to u^*$ em $\left(C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\right)^2$, $0\leq\beta<\alpha$. Dessa forma, tomando o limite quando $n_k\to\infty$ em (3.11) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_i^*|^{p-2}\nabla u_i^*\nabla\varphi=\int_\Omega \left(f_i(x,u_1^*,u_2^*)+t_i\phi_i+h_i\right)\varphi,\ \ i=1,2.$$

isto é, u^* é solução de (S_t). Portanto (S_t) tem solução para $t\in\Upsilon^*$.

Prova de ii) Mostremos que para todo $t\in\mathcal{N}$, o problema (S_t) não tem solução. De fato, se $t\in\mathcal{N}$, existem $y\in\mathcal{Y}$ e $s>\upsilon^*(y)$ tais que $t_i=y_i+s$. Como $s>\upsilon^*(y)$, segue que $(S_t)=(S_{y+se})$ não tem solução pela definição de $\upsilon^*(y)$.

Prova de iii) Fixemos $s<T(R_1)$ com $T(R_1)$ dado no Lema 3.14 e seja $\upsilon_*=T(R_1)$, pela definição de $\upsilon^*(y)$ tem-se que $\upsilon_*\leq\upsilon^*(y)$. Defina

$$\Upsilon_*=\{y+\upsilon_*e: y\in\mathcal{Y}\}.$$

Temos que Υ_* divide $\mathcal{L}$ em dois conjuntos

$$\mathcal{M}=\{y+se: s<\upsilon_*, y\in\mathcal{Y}\},\ \ \mathcal{O}=\{y+se:\upsilon_*<s<\upsilon^*(y), y\in\mathcal{Y}\}$$

Pelo Teorema 3.21, existe $\overline{R}>0$ grande o suficiente tal que se u_{t^0} é solução de (S_{t^0}), com $t^0=y^0+te$ e $t\in[s,\upsilon^*+1]$ então $\|u_{t^0}\|_{\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2}<\overline{R}$. Além disso, podemos tomar $\overline{R}>0$ grande de forma que $\Lambda\subset B_{\overline{R}}$, sendo $B_{\overline{R}}$ a bola em $\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2$ e Λ o conjunto definido na Seção 3.3. Note que u_{t^0} é solução de (S_{t^0}) se e somente se u_{t^0} é ponto fixo do operador compacto $\mathcal{H}_{t^0}v=u$, onde u é uma solução do sistema matricial

$$\begin{cases}-\Delta_p u+\widetilde{\Psi}_p(u)=f(x,v)+\widetilde{\Psi}_p(v)+t^0\phi+h, & ;x\in\Omega\\ u=0 & ;x\in\partial\Omega\end{cases}$$

Consideremos a seguinte homotopia admissivel,

$$H:[s,\upsilon^*+1]\times B_{\overline{R}}\to\left(C_0^1(\overline{\Omega})\right)^2,\ \ H(t,u)=\mathcal{H}_{(y^0+te)}u.$$

então,

$$\deg(I - \mathcal{H}_{(y^0+te)}, B_{\overline{R}}, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_{(y^0+(\upsilon^*+1)e)}, B_{\overline{R}}, 0) = 0.$$

pois, pela definição de υ^*, $\mathcal{H}_{(y^0+(\upsilon^*+1)e)}$ não possui ponto fixo. Usando agora a propriedade da excisão do grau de Leray-Schauder, segue que

$$\deg(I - \mathcal{H}_{(y^0+te)}, B_{\overline{R}} - \Lambda, 0) = \deg(I - \mathcal{H}_{(y^0+te)}, B_{\overline{R}}, 0) - \deg(I - \mathcal{H}_{(y^0+te)}, \Lambda, 0) = -1,$$

Portanto, o problema (S_{t^0}) possui outra solução que não pertence a Λ. Logo, se $t^0 \in \mathcal{M}$ o problema (S_{t^0}) possui pelo menos duas soluções distintas.

APÊNDICE A

IDENTIDADE DE PICONE

O Seguinte resultado é conhecido como identidade de Picone para $p > 1$. Para maiores detalhes sobre a demonstração veja [1].

Teorema A.1 ([1],Teorema 1.1)**.** *Sejam $v > 0$, $u \geq 0$ diferenciáveis. Defina*

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v \tag{A.1}$$

e,

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \tag{A.2}$$

Nestas condições, $L(u,v) = R(u,v)$.Além disso, $L(u,v) \geq 0$, e $L(u,v) = 0$ q.t.p em Ω se e somente se $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ q.t.p em Ω.

Demonstração. Note que basta desenvolver $\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)$ para ver que $L(u,v) = R(u,v)$. O resto da demonstração segue da desigualdade de Minkowski $\alpha\beta \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$ com $\alpha = |\nabla u|$ e $(\frac{u|\nabla v|}{v})^{p-1}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.Mais especificamente, temos

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p \\ &\quad + p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\left[|\nabla v||\nabla u| - \nabla v\nabla u\right]. \end{aligned}$$

Suponhamos que $L(u,v)(x_0) = 0$, e $u(x_0) \neq 0$, então devemos ter $|\nabla v||\nabla u| = \nabla v \nabla u$ e $|\nabla u| = (\frac{u}{v})|\nabla v|$, isto é, $\nabla u = (\frac{u}{v})\nabla v$ ou $\nabla(\frac{u}{v})(x_0) = 0$. Consideremos agora $S = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, então segue que $\nabla u = 0$ q.t.p $x \in S$, e $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ q.t.p $x \in S$, portanto concluimos que $\nabla(\frac{u}{v}) = 0$ q.t.p $x \in \Omega$ e como consequência $u = kv$ para alguma constante k. $\square$

APÊNDICE B

GRAU DE LERAY-SCHAUDER

Apresentaremos aqui alguns resultados e propriedades do Grau de Leray-Schauder. Começaremos com a sua definição. Para maiores detalhes veja por exemplo [6].

Definição B.1. *Sejam Ω um aberto limitado, $\mathcal{B}$ espaço de Banach tal que $\Omega \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{K} : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ aplicação contínua.*

(i) Dizemos que $\mathcal{K}$ é compacto se $\mathcal{K}(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto, isto é, $\overline{\mathcal{K}(\overline{\Omega})}$ é compacto.

(ii) Dizemos que $\Phi = I - \mathcal{K} : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ é uma perturbação compacta da identidade quando $\mathcal{K}$ é compacto.

Lema B.2. *Sejam $\mathcal{K} : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ um operador compacto, $\Phi = I - \mathcal{K}$ uma perturbação compacta da identidade e $b \in \mathcal{B} - \Phi(\partial\Omega)$. Então,*

(i) Φ é uma aplicação fechada, isto é, a imagem por Φ de um fechado é fechado.

(ii) Φ é uma aplicação própria, isto é, a imagem inversa por Φ de um compacto é compacto.

(iii) Seja $r = \operatorname{dist}(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$. Existe uma aplicação $\mathcal{K}_r : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ de posto finito tal que $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_r\| \leq \frac{r}{2}$.

Definição B.3. *Seja* $r = \mathrm{dist}\,(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$*, tomemos* $\Phi_r = I - \mathcal{K}_r$*, onde* $\mathcal{K}_r : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ *de posto finito tal que* $\|\Phi - \Phi_r\| = \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_r\| \leq \frac{r}{2}$*. Note que* $\mathrm{dist}\,(b, \Phi_r(\partial\Omega)) \geq \frac{r}{2} > 0$*. Definimos,*

$$\deg(I - \mathcal{K}, \Omega, b) := \deg(I - \mathcal{K}_r, \Omega, b)\,.$$

Daremos agora algumas propriedades do grau de Leray-Schauder.

(G1)[Continuidade do Grau] Sejam $\Phi = I - \mathcal{K} : \overline{\Omega} \to \mathcal{B}$ uma perturbação compacta, existe uma vizinhança U de $\mathcal{K}$ no espaço dos operadores compactos $K(\Omega, \mathcal{B})$ tal que para todo $S \in U$ temos,

$$b \notin (I - S)(\partial\Omega)\, e \, \deg(I - S, \Omega, b) = \deg(I - \mathcal{K}, \Omega, b)\,.$$

(G2)[Invariância por Homotopia] Seja $H \in C\left(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathcal{B}\right)$ dada por

$$H(x,t) = x - \mathcal{K}(x,t),$$

onde $\mathcal{K} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathcal{B}$ é compacto. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ então $\deg(H(.,t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0,1]$.

(G3)[Normalização] Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathcal{B}$, isto é, $I(x) = x$, então

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & ; b \in \Omega \\ 0 & ; b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

(G4) Se $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$, então $\deg(\Phi, \Omega, b) = 0$.

(G5)[Existência de Solução] Se $\deg(\Phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Phi(x_0) = b$.

(G6)[Excisão] Seja K um fechado contido em $\overline{\Omega}$ tal que $b \in \Phi(K)$. Então,

$$\deg(\Phi, \Omega, b) = \deg(\Phi, \Omega - K, b)\,.$$

O Seguinte resultado é uma generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer para espaços de dimensão infinita. Para maiores detalhes sobre a demonstração veja por exemplo [12]

Teorema B.4. *Sejam B um espaço de Banach e $K \subset B$ convexo e compacto. Se $F : K \to K$ é uma aplicação continua então F admite ponto fixo.*

Demonstração. Sendo K compacto, para todo $\epsilon > 0$ podemos cobrir K com $N(\epsilon)$ boloas abertas $B_\epsilon(x_k)$, $k = 1, ..., N = N(\epsilon)$. Denote por K_ϵ a envoltória convexa de x_k e considere a aplicação $I_\epsilon : K \to K_\epsilon$ dada por

$$I_\epsilon(x) = \frac{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - B_\epsilon(x_i)x_i)}{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - \ B_\epsilon(x_i))}$$

temos que I_ϵ está bem definida e é contínua, além disso para todo $x \in K$

$$\begin{aligned} |I_\epsilon(x) - x| \quad &= \left| \frac{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - B_\epsilon(x_i)(x_i - x))}{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - \ B_\epsilon(x_i))} \right| \\ &\leq \frac{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - B_\epsilon(x_i))|x_i - x|}{\sum_i \mathrm{dist}\,(x, K - \ B_\epsilon(x_i))} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Defina a aplicação $F_\epsilon = I_\epsilon \circ F$. Temos que $F_\epsilon : K_\epsilon \to: K_\epsilon$ tem ponto fixo x_ϵ. Passando a uma subsequência se necessário podemos assumir que $x_\epsilon \to x_0$, logo

$$|F_\epsilon(x_\epsilon) - x_\epsilon| = |F_\epsilon(x_\epsilon) - I_\epsilon\,(F(x_\epsilon))| \leq \epsilon.$$

sendo F contínua, fazendo $\epsilon \to 0$ temos que x_0 é ponto fixo de F. $\square$

Como consequência do teorema anterior temos

Corolário B.5. *Sejam B um espaço de Banach e $K \subset B$ convexo e fechado. Se $F : K \to K$ é uma aplicação continua tal que $F(K)$ é pré-compacto, então F admite ponto fixo.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior ao seguinte conjunto convexo-compacto $\widetilde{K}=$ Fecho da envoltória convexa de $F(K)$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] Allegratto, W.; Huang Xi,Y. *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications., v.32, n.7, p. 819-830, 1998.

[2] Ambrosetti, A.; Prodi, G. *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Ann.Mat.Pura Appl, v.4, n.93, p. 231-246, 1972.

[3] Amann, H.; Hess, P. *A multiplicity result for class of elliptic boundary value problems.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, v.84(A), p.145-151, 1975.

[4] Arcoya, D.; Ruiz, D. *The Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplacian operator.* Comm. Part.Diff.Eqns, v.31, p.849-865, 2006.

[5] Arias, M.; Cuesta, M., *A one side superlinear Ambrosetti-Prodi problem for the Dirichlet p-laplacia*, J. Math. Anal. Appl, v.367, p.499-507, 2010.

[6] Berestycki, H. *Methodes topologiques et problems aux limites non lineaires.* (Tese de Doutorado), Soutenue, These de Docteur, França, 1975.

[7] Berestycki, H.; Lions, P. *Sharp existence results for a class of semilinear elliptic problems* Bol.Soc.Bras.Mat, v.12, n.1, p.9-20, 1981.

[8] Berger, M.S.; Podolak, E. *On the solution of a nonlinear Dirichlet problem* Indiana Univ.Math.J, v.24, p. 837-846, 1975.

[9] Boccardo, L.; Fleckinger, J.; De Thelin, F. *Existence of solution for some nonlinear cooperative systems*. Diff. and Int. Eqns, Vol. 7, p.689-698, 1994.

[10] Bony, J.M. *Principe du maximum dans les espace de Sobolev* C.R. Acad. Sci. Paris Ser, v.265(A), p. 333-336, 1967.

[11] Chang, K.C. *Ambrosetti-Prodi type results in elliptic systems*. Nonlinear Anal, v. 51, n.4, p.553-566, 2002.

[12] Chipot, M. *Elliptic Equations: An Introductory Course*. Birkhäuser Advanced Texts, 2009.

[13] Dancer, E. B. *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*. J. Math. Pures Appl, n.57, p. 351-366, 1978.

[14] De Figueiredo, D.G.; Sirakov, B. *On the Ambrosetti-Prodi problem for non-variational elliptic systems*. J. Differential Equations, v.240, p.357-374, 1994.

[15] De Morais Filho, D.C. *An Ambrosseti-Prodi-type problem for an elliptic system of equations via monotone iteration method and Leray-Schauder degree theory* Abstr.Appl. Anal. v.1, n.2, p.137-152, 1996.

[16] De Paiva, F.O.; Montenegro ,M. *An Ambrosetti-Prodi-Type Result for a QuasilinearNeumann Problem*. Procedings of the Edinburgh Mathematical Society, v.55, p.771-780, 2012.

[17] Fleckinger, J.; Hernandez, J.; De Thelin, F. *On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems*. Diff. and Int. Eqns, v.8, p.69-85, 1995.

[18] Fleckinger, J.; Manásevich, R.F.; De Thelin, F. *Global Bifurcation from the first eigenvalue for sistem of p-Laplacians*. Math. Nachrichten, v. 182, p. 217-241, 1997.

[19] Fleckinger, J.; Takac, P. *Uniqueness of positive solutions for nonlinear cooperative systems with p-Laplacian*. Indiana Univ. Math. J, v.43, n.4, p.227-253,1994.

[20] Giacomoni, J.; Prashanth S.; Sreenadh, K. *Multiple positive solutions for N-Laplace equation with nonlinear Neumann boundary conditions*. Differential and Integral Equation, v. 23, n. 3, p.201-222, 2010.

[21] Hess,P. *On a Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem of the Ambrosetti-Prodi Type*. Boll. Un. Mat. Ital, v.17, p.187-192, 1980.

[22] Hofer, H. *Existence and multiplicity result for a class of second order elliptic equation.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, v. 88, p.83-92, 1981.

[23] Kazdan, J.L.; Warner, F.W. *Remarks on some quasilinear elliptic equations* Comm. Pure. Appl.Math, vol. 28, p. 567-597, 1975.

[24] Koizumi, E.; Schmitt, K. *Ambrosetti-Prodi-Type problems for quasilinear elliptic equations*. Diff. and Int. Eqns 18, (2005), 241-262.

[25] Ladyzhenskaya, O.A.; Ural'tseva, N.N. *Linear and quasilinear eliptic equations* New York: Academic Press, 1968.

[26] LE, V.K.; Schmitt, K. *Some general concepts of sub and supersolutions for non-linear elliptic problems* topolog. Meth. Nonlin. Analysis, v.28, p.87-103, 2006.

[27] Mawhin, J. *Ambrosetti-Prodi-type results in nonlinear boundary value problems* Lecture Notes in Mathematics, v. 1285, p.290-313, 1987.

[28] Miotto, J. T. *Superlinear Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplacian operator.* Math.Nachr, p. 1-18, 2015 .

[29] Miotto, J. T. *On the Ambrosetti-Prodi problem for a system involving p-Laplacian operator*. Nonlinear Differential Equation and Applications, n. 17, p. 337-353, 2010.

[30] Miotto, J. T. *Estimativas ABP e problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para operadores diferenciais não lineares*. 74p. Tese (Doutorado em Matemática),Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

[31] Tolksdorf. *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points* Comm. Part.Diff.Eqns., v. 8, p.773-817, 1983.

[32] Vázquez, J.L. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations* Appl.Math.Optim, v.12, p. 191-202, 1984.