UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TALITA SECORUN DOS SANTOS

ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO DE GEOMETRIAS NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA: UNIDADE ENTRE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

SÃO CARLOS
2015

TALITA SECORUN DOS SANTOS

ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO DE GEOMETRIAS NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA: UNIDADE ENTRE ENSINO E APRENDIZAGEM NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Universidade de São Carlos, como exigência parcial à obtenção do título de doutora em Educação.
Área de concentração: Educação.

Linha de pesquisa: Educação em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa

SÃO CARLOS

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

S237ao

Santos, Talita Secorun dos.
Atividade orientadora de ensino de geometrias na perspectiva lógico-histórica: unidade entre ensino e aprendizagem na formação inicial de professores de matemática / Talita Secorun dos Santos. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
195 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Professores - formação inicial. 2. Leont'ev, Aleksei Nikolaevich, 1903-. 3. Geometrias não euclidianas. 4. Teoria da atividade. 5. Matemática - História I. Título.

CDD: 370.71 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Educação e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Educação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Talita Secorun dos Santos, realizada em 23/07/2015:

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa
UFSCar

Profa. Dra. Carmen Lucia Brancaglion Passos
UFSCar

Profa. Dra. Regina Célia Grando
UFSCar

Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito
UNESP

Profa. Dra. Vanessa Dias Moretti
UNIFESP

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Benedicto e Irene

Ao meu marido Luciano

Ao meu filho João Bento

Por serem meus grandes amores.

AGRADECIMENTOS

Ao término da escrita da tese, chega o momento de lembrarmos com carinho das etapas vencidas, dos amigos, das lágrimas derramadas, dos sorrisos escancarados, das dificuldades, das vitórias e das lutas. Gostaria de expressar sinceros agradecimentos a todos que direta ou indiretamente fizeram parte desses quatro anos de doutoramento. Agradeço primeiramente a **Deus** por ter me dado a vida e a vontade de lutar e batalhar pelos meus objetivos. Agradeço de forma especial:

ao meu marido **Luciano.** Luciano, eu não teria palavras para agradecer tudo o que você fez por mim. Você me incentivou e me apoiou a fazer o doutorado, mesmo sabendo que tínhamos um filho pequeno e que isso implicaria em momentos de ausência, de saudade e de tristeza. Você ouviu diversas vezes eu explicar a minha pesquisa, fez críticas, corrigiu meus textos e me acompanhou em diversas viagens para São Carlos. Você é um pai maravilhoso e um marido apaixonado. Eu te amo!

ao meu filho **João Bento.** Filho, você é um menino amável e carinhoso que todos que conhecem se apaixonam. Obrigada por compreender os momentos que a mamãe passou em frente ao computador e os momentos que ela precisou se ausentar. Você é tudo na minha vida, amo você!

aos meus pais **Benedicto e Irene.** Vocês são meus exemplos de dedicação, honestidade, caráter, inteligência e fé. Muito obrigada por doarem tanto de suas vidas para a minha formação. Vocês são meus alicerces e representam meu porto seguro. Amo vocês!

à minha sogra **Lúcia.** Dona Lúcia, minha segunda mãe, muito obrigada por dado colo, carinho e amor para meu pequeno nas inúmeras vezes que precisei me ausentar. Muito obrigada pelas várias vezes em que você me acompanhou em viagens para São Carlos. Serei eternamente grata!

aos meus sobrinhos e sobrinhas, em especial a minha sobrinha **Rafaelle.** Rafa, muito obrigada por me ajudar em tudo e em todos os momentos, desde um carinho no João Bento até em correções na tese. Você sabe o quanto é importante na nossa vida;

à minha orientadora **Maria do Carmo.** Professora, muito obrigada por ter acreditado no meu trabalho na entrevista para o doutorado. Muito obrigada por

dividir comigo os seus ensinamentos, pela leitura dos meus textos e pelos conselhos. Professora, esse trabalho é nosso!

às minhas tias **Yolanda** e **Sebastiana** (in memoriam)**.** Tia Landa, muito obrigada por ter nos acolhido, com muito amor, em sua casa, e ajudado a cuidar do João Bento. Tia Tiana, gostaria muito de poder agradecer pessoalmente todas as vezes que fiquei em sua casa com minha família, agradecer pelo carinho e pelos cuidados. No entanto, você nos deixou dois meses antes da minha defesa. Ficará para sempre as lembranças dos momentos alegres e de seu sorriso inesquecível.

à minha amiga **Geraldina (Gê).** Gê, você é uma pessoal muito especial para nossa família. Muito obrigada pelo carinho e pela dedicação que você tem todos nós;

aos meus amigos e minhas amigas de doutorado, em especial **Patrícia, Lucinéia, Marcelo, Amauri, Rosefran, Vanderlei** e **Daniel.** A presença de vocês tornou o período de doutorado menos difícil e mais agradável;

aos meus amigos e minhas amigas da turma 31 de matemática de 1999 da Universidade Estadual de Maringá. Vocês representam o início de um sonho e marcaram a minha vida para sempre;

aos meus amigos e minhas amigas **Flávia, Neil, Fabiane, Grazielle, Cléber, Veridiana, Guto, Fábio, Denise e Roni.** Obrigada por serem meus grandes amigos;

a todos meus amigos e amigas que moram e Maringá e trabalham ou trabalharam em Campo Mourão. As idas e vindas para Campo Mourão nos permitem dialogar com pessoas de diferentes áreas de conhecimento e diferentes histórias. Vocês me ensinam e me ensinaram muito;

a todos os meus familiares, vô (in memoriam), vó, tios, tias, primos, primas, irmãos, cunhados e cunhadas que sempre torceram por mim. Vô Bento, você esteve presente no início do sonho do doutorado, mas infelizmente não pode vê-lo tornar-se realidade. Você é uma pessoa inesquecível e sentimos muito a sua falta;

a todos os professores que participaram da minha formação, em especial, Irene, minha mãe e minha professora de português que me ensinou a paixão pela leitura, Cida, minha inspiração para fazer matemática, Maria Bachi, minha grande professora de história, Valdeni, meu orientador de mestrado e o responsável pela minha paixão pelas geometrias, Carla, minha querida professora

de Cálculo I, Regina, Clélia e Marta, minhas professoras do mestrado, com elas aprendi a assumir minha responsabilidade enquanto formadora de professores de matemática. **Obrigada por sempre acreditarem em mim e, de certa forma, influenciarem nas minhas escolhas**;

à Universidade Estadual do Paraná – campus de Campo Mourão e a todos meus companheiros de trabalho, em especial, aos professores do Colegiado de Matemática;

aos meus companheiros do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática de Campo Mourão (GPEMCAM), pelas trocas de ideias e pelas sugestões;

aos alunos que participaram dessa pesquisa. A participação de vocês foi fundamental, muito obrigada!

a todos os discentes e docentes do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos. Vocês ajudaram a repensar a minha prática e contribuíram para a construção desta pesquisa;

às professoras que participaram da banca da qualificação **Denise, Arlete, Carmen e Vanessa.** As sugestões e as críticas de vocês foram importantes para a conclusão dessa pesquisa. Muito obrigada!

às professoras **Arlete, Vanessa, Carmen e Regina** que gentilmente aceitaram o convite para participar da banca examinadora desta tese. Muito obrigada!

a todos os professores, em especial aos professores do Estado do Paraná que foram massacrados em praça pública, que lutam por uma educação pública, gratuita e de qualidade;

à Fundação Araucária, pelo suporte *financeiro à presente pesquisa.*

Pra Não Dizer Que Não Falei Das Flores

Caminhando e cantando e seguindo a canção
Somos todos iguais braços dados ou não
Nas escolas, nas ruas, campos, construções
Caminhando e cantando e seguindo a canção

Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer
Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer

Pelos campos há fome em grandes plantações
Pelas ruas marchando indecisos cordões
Ainda fazem da flor seu mais forte refrão
E acreditam nas flores vencendo o canhão

Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.
Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.

Há soldados armados, amados ou não
Quase todos perdidos de armas na mão
Nos quartéis lhes ensinam uma antiga lição
De morrer pela pátria e viver sem razão

Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.
Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.

Nas escolas, nas ruas, campos, construções
Somos todos soldados, armados ou não
Caminhando e cantando e seguindo a canção
Somos todos iguais braços dados ou não
Os amores na mente, as flores no chão
A certeza na frente, a história na mão
Caminhando e cantando e seguindo a canção
Aprendendo e ensinando uma nova lição

Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.
Vem, vamos embora, que esperar não é saber,
Quem sabe faz a hora, não espera acontecer.

Geraldo Vandré

RESUMO

Objetivamos com essa pesquisa, analisar, se as Atividades de Ensino (AE) de Geometrias na perspectiva lógico-histórica podem se configurar como unidade entre o ensino e a aprendizagem, ou seja, como Atividade Orientadora de Ensino (AOE) na formação inicial de professores. Dessa forma, tivemos como pressuposto que a perspectiva lógico-histórica pode se tornar didática para a formação inicial de professores, quando as AE forem desenvolvidas, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi conduzida pelas seguintes questões: As atividades de ensino desenvolvidas nas disciplinas de "Geometria" e de "Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não euclidianas" foram geradoras de objetivos e motivos para se ensinar e aprender a ensinar geometrias? Essas atividades vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas se tornaram uma AOE? Quais são as produções de sentidos, de significados, os objetivos e motivos que são explicitados nas narrativas elaboradas por licenciandos do curso de matemática, enquanto vivenciaram AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe? Para a construção dos dados utilizamos os seguintes instrumentos: questionário, AE, diário de campo e as narrativas postadas em ambiente virtual. A análise do material empírico foi feita a partir de quatro categorias descritivas e analíticas que emergiram da triangulação dos dados, são elas: *Do isolado ao coletivo; O Novo; Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições*. Os resultados permitem inferir que as AE de Geometrias na perspectiva lógica-histórica, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas desencadearam (re)significações relacionadas à apropriação do conhecimento teórico, ao ensino do conhecimento teórico, à organização do ensino, às ações pedagógicas e pesquisa, na maioria dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Formação inicial de professores. Leontiev. Geometrias não euclidianas. Teoria da Atividade. História da Matemática.

ABSTRACT

The manner Teaching Activities (TAs) of different types of Geometry may be presented as a unity between teaching and learning, or rather, as Teaching Guiding Activity (TGA) in the initial formation of teachers, is discussed. It has thus been presumed that the logical and historical perspective may become a didactic factor in teachers´ initial formation when TAs are developed as from the subject-group-class-narrative dynamics. Current qualitative research was developed based on the following questions: Did teaching activities developed in the disciplines ‘Geometry’ and ‘Euclidian Geometry and Topic for Non-Euclidian Geometries’ generate aims and motives to teach and learn to teach Geometries? Did the activities experienced by the subject-group-class dynamics and posting of narratives become a TGA? Which are the productions of meanings, aims and motives explicit in the narratives prepared by undergraduates of the Math course during their experience in TAs of Geometries within the logical and historical perspective as from the subject-group-class dynamics? Data were retrieved from questionnaires, TAs, field diaries and narratives posted on the Internet. The empirical material was analyzed by four descriptive and analytic categories emerging from three-fold data, namely, *From the isolated to the collective; The New; From Learning to Learning to Teach; Contradictions*. Results show that Geometry TAs within the logical-historical perspective as from the subject-group-class-narrative dynamics trigger information related to the appropriation of theoretical knowledge, teaching of theoretical knowledge, organization of teaching, pedagogical activities and research in most people involved in the teaching-learning process.

Keywords: Teachers´ initial formation. Non-Euclidian Geometries. Leontiev. Activity theory. History of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AE	Atividades de ensino
AOE	Atividades orientadoras de ensino (AOE)
CNS	Conselho Nacional de Saúde
DCE	Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Estado do Paraná
PPP	Projeto Político-Pedagógico
SEED	Secretaria de Estado da Educação do Paraná
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

"Todos os dias quando acordo
Não tenho mais
O tempo que passou
Mas tenho muito tempo
Temos todo o tempo do mundo
Todos os dias
Antes de dormir
Lembro e esqueço
Como foi o dia
Sempre em frente
Não temos tempo a perder..."

(Renato Russo)

O nosso objetivo ao realizar esta pesquisa é analisar se as Atividades de Ensino (AE) de Geometrias na perspectiva lógico-histórica podem se configurar como unidade entre o ensino e a aprendizagem, ou seja, como Atividade Orientadora de Ensino (AOE) na formação inicial de professores. Para tal intento, o trabalho segue dividido em seis capítulos com os seguintes objetivos:

no capítulo 1, denominado Trilhando Caminhos, descrevemos as lembranças do passado que nos movimentou em direção a construção desta pesquisa. Em uma eterna contradição entre a busca pela coerência e o medo de enfrentar o novo nos levou a compreender que o passado interfere no presente, que interfere no futuro e que somos seres sociais, inconclusivos e sempre em busca de mudanças. Afinal, somos o que os anos nos fizeram e a vida nos possibilitou;

no capítulo 2, apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa. Descrevemos os 30 sujeitos da pesquisa, as duas disciplinas e a escolha das ações utilizadas no decorrer da pesquisa de campo: Questionário inicial; Diário de Campo; Narrativas; e AE;

no capítulo 3, apresentamos as ideias centrais dos conceitos de produção de sentido e significado; motivos e Atividades Orientadoras de Ensino (AOE), com foco na formação inicial de professores de Matemática;

no capítulo 4, discutiremos quais elementos teóricos relacionados à história da matemática foram utilizados na construção das AE;

no capítulo 5, apresentaremos primeiramente a análise do questionário, a análise das narrativas referentes às 11 Atividades de Ensino (AE) e as unidades de análise das narrativas que emergiram dessa análise. Em seguida, indicaremos as quatro categorias descritivas e analíticas que emergiram da triangulação dos dados construídos por meio do questionário, das narrativas, do diário de campo e das AE;

no capítulo 6, apresentaremos algumas considerações, as quais indicam que as AE de Geometrias na perspectiva lógica-histórica, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, se configuraram como uma unidade entre o ensino e a aprendizagem (AOE) na formação inicial de professores. Isso, pois, a nosso ver, houve unidade entre ensino e aprendizagem, o que desencadeou e (re)significações em boa parte dos sujeitos envolvidos, relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem.

1 TRILHANDO CAMINHOS

“Eu prefiro ser
Essa metamorfose ambulante
Eu prefiro ser
Essa metamorfose ambulante
Do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo
Eu quero dizer
Agora o oposto do que eu disse antes
Eu prefiro ser
Essa metamorfose ambulante
Do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo...”

(Raul Seixas)

Lembranças do passado nos ajudam a compreender algumas escolhas que fiz no presente. Essas lembranças me fazem refletir os movimentos de mudanças em minha vida, ajudam a me compreender como ser em constante movimento, ser inconclusivo, sempre em busca de mudanças, ou seja, seres sociais. “A memória prende-o ao que foi; o desejo, ao que será” (BICUDO, 2009, p. 17). Assim, para que possam compreender os movimentos de motivos, objetivos, sentidos e significados que deram origem a esta pesquisa, é necessário um breve histórico das condições pessoais e sociais que me encaminharam a desenvolver tal investigação. Afinal, somos o que o tempo nos fez e, para compreendermos os nossos movimentos, é preciso entender o que nos levou a eles. Neste capítulo, descreverei a passagem de acadêmica do curso de matemática para formadora de professores, as dúvidas, as inquietações e as reflexões que me levaram a construir esta pesquisa.

1.1 Lembranças de uma formação em matemática

Em 1999 iniciei[1] a graduação em matemática na Universidade Estadual de Maringá (UEM), muito mais atraída pela matemática em si do que pelo fato de me tornar professora. No ano 2000 fiz a opção por estudar bacharelado. Tal escolha foi amparada na ideia, construída no primeiro ano de curso, de desvalorização da licenciatura em relação ao bacharelado. Durante a graduação tive pouca, ou quase nenhuma, aproximação com a história da matemática.

[1] A esse breve histórico que nos encaminhou a desenvolver esta pesquisa denominaremos memorial. Na escrita do memorial fizemos a opção de usar a primeira pessoa do singular, no restante do texto utilizaremos a primeira pessoa do plural.

Alguns nomes foram citados, dentre eles o de Euclides e Tales, por exemplo, sempre exaltados como pessoas com inteligências extraordinárias, capazes de pensar sozinhos, de criar teorias, ou seja, essas pessoas eram gênios, eram quase deuses matemáticos. A minha concepção de matemática, até então, levava-me a acreditar que ela era para poucos, que a matemática era a rainha das ciências e a ela eu creditava um carácter de ciência perfeita, imutável, exata e pensada por gênios.

> É grande o número de pessoas que concebem a matemática como sendo um conhecimento existente na natureza ou na mente do Criador do universo. A origem dessa crença nos remete as cosmogonias pitagórica e platônica, que procuravam explicar a gênese do mundo e dos seres humanos a partir de uma fundamentação matemática como forma de fugir aos mitos. Hoje, os mitos são tomados como sendo discursos dos homens e mulheres acerca dos problemas que os incomodam e a filosofia da matemática afasta-se a ideia de que a matemática não seja criação humana (COSTA, 2006, p. 7).

O curso de matemática que fiz foi baseado quase que exclusivamente em disciplinas com abordagens axiomático-dedutivas e havia grande preocupação com o rigor e com o encaminhamento lógico de conceitos e proposições. Como a minha escolha inicial foi pelo bacharelado, todas as disciplinas do currículo eram de conteúdos matemáticos, qualquer outra discussão era descartada. Não havia espaço nas disciplinas para se discutir filosofia, história, política ou práticas sociais.

> Como todos sabemos, as disciplinas chamadas disciplinas de conteúdo matemático que integram a grade curricular de tais cursos ainda estão centradas quase que exclusivamente em abordagens axiomático-dedutivas que, mais preocupadas com o rigor formal e com o encaminhamento lógico de conceitos e proposições, descartam outros elementos de extrema importância para o professor que deverá atuar em instituições escolares, tais como a constituição desses conceitos e proposições em diferentes práticas sociais na história, as relações que poderiam ser estabelecidas entre conceitos e proposições que participam na atualidade de teorias formais independentes, os diferentes quadros ou campos semânticos em que tais conceitos e proposições poderiam ser abordados e as significações diferenciadas que assumem no interior desses quadros ou campo, os usos sociais que foram e são feitos de tais conceitos e proposições em diferentes práticas, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 53).

Durante toda a minha formação inicial eu não conseguia perceber que havia o descarte de elementos de extrema importância para a formação do professor. E o que para mim não era perceptível, já o era para alguns amigos de graduação, como Lorin (2002), à época acadêmico do 3º ano de bacharelado em matemática, pela Universidade Estadual de Maringá, e autor do texto intitulado: *Provão "A" Cidadão "E"*. Enquanto comemorávamos uma excelente nota no sistema de avaliação utilizado na época, Lorin (2002) chamava a atenção para a visão tecnicista, adotada na nossa formação inicial:

> No filme 'Tempo Modernos' o autor faz uma sátira da Robotização Humana na revolução industrial, que mostra a classe operária trabalhando em ritmo acelerado. Não tão longe do que é mostrado no filme somos nós hoje, frutos deste sistema que presa somente o conhecimento que possui valor de troca. Particularmente agora para o curso de matemática, onde no último provão alcançou mais um conceito A, nos deparamos com um curso que realmente forma ótimos alunos, dentro da visão tecnicista, porém deixa a desejar na formação de cidadãos. Afinal não seria este um papel fundamental da universidade? Não podemos esquecer que fazemos parte de uma minoria privilegiada, não pela condição sócia, mas sim por estudantes em uma universidade pública, privilégio este que devemos aproveitar ao máximo, e que deixamos escapar por estarmos todos ou pelo menos grande parte, tomados pelo ritmo acelerado da 'fábrica do capitalismo'. Quero por meio desta nota, apontar para a necessidade de um espaço de discussão onde possa haver uma troca interdisciplinar, ou seja, a geração de oportunidades para contatos mais estreitos entre as diversas áreas do conhecimento. Penso ser de suma importância este intercâmbio, não só de ideias, mas também de diferentes pontos de vista. Noto que para haver um maior entendimento da complexidade do mundo pós-moderno seja necessária à comunhão de distintas áreas do entender humano, caso contrário corremos o risco de avançarmos cada vez mais na direção de uma visão unidimensional do mundo e assim não sermos capazes de transformá-lo, mas sim de reproduzi-lo. Através deste exercício podemos, quem sabe, até propormos uma reforma na grade curricular onde estes pressupostos essenciais à formação do 'homem' (não somente o matemático, engenheiro, médico,...) sejam considerados. Fica também a despretensiosa sugestão para que seja incluso na grade curricular as disciplinas de História da Matemática e Filosofia (LORIN, 2002, p. 5).

À época, o texto de Lorin (2002) apresentou pouco significado para mim, pois eu não conseguia questionar o currículo que a mim era ofertado. Eu estava sendo "treinada" para ser uma matemática, para demonstrar teoremas, para admirar a beleza de suas demonstrações, sem parar para pensar com qual objetivo eu fazia tudo aquilo. A formação a mim ofertada se aproximava da concepção bancária da educação tratada por Freire (1981), na obra *Pedagogia do Oprimido*; para o autor, tal concepção é um instrumento de opressão que não permite que os educandos desenvolvam uma consciência crítica de sua interação com o mundo, possibilitando a transformação do mesmo. Na concepção de educação bancária o saber é uma doação dos que se julgam sábios aos que julgam nada saber. O dever do educador é conduzir os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado, depositando e transferindo a eles valores e conhecimentos. Quanto mais os educadores puderem encher os recipientes dos educandos com seus depósitos, melhor o educador será, e quanto mais docilmente os educando permitirem se encher, melhor eles serão.

> Não é de estranhar, pois, que nesta visão ‘bancária’ da educação, os homens sejam vistos como seres da adaptação, do ajustamento. Quanto mais se exercitem os educandos no arquivamento dos depósitos que lhes são feitos, tanto menos desenvolverão em si a consciência crítica de que resultaria a sua inserção no mundo, como transformadores dele. Como sujeitos (FREIRE, 1981, p. 34).

Opondo-se à concepção de educação bancária, Freire (1981) propõe a educação libertadora, e, segundo ele, esta se caracteriza por ser problematizadora e não pode ser o ato de depositar, ou de narrar, ou de transferir “conhecimentos” e valores aos educandos. Quanto mais se problematizam os educandos, como seres no mundo e com o mundo, tanto mais os educandos se sentem desafiados. “A educação como prática da liberdade, ao contrário daquela que é prática da dominação, implica na negação do homem abstrato, solto, desligado do mundo, assim também na negação do mundo como uma realidade ausente dos homens” (FREIRE, 1981, p. 40). Segundo Freire, a concepção bancária termina por desconhecer o homem como ser histórico, enquanto a problematizadora parte exatamente do caráter histórico e da historicidade dos homens. E assim, como uma concepção mais próxima da bancária do que da libertadora, terminei a graduação em 2002. Poucas oportunidades eu tive de discutir e refletir as ideias matemáticas de forma histórica e epistemológica e sua prática social. Quase não houve espaços durante a minha formação que possibilitassem refletir e discutir questões fundamentais, tais como:

> Qual o papel da matemática na formação do pensamento humano? Quais são as relações entre matemática, sociedade e cultura? Quais as diferentes formas de produzir e sistematizar os conhecimentos matemáticos? Qual matemática é relevante e imprescindível à formação do homem contemporâneo? Quais as diferenças entre a matemática científico-acadêmica, a escolar e aquela mobilizada e produzida nas diferentes práticas socioculturais? O que caracteriza e diferencia o pensamento e a linguagem aritmética, da álgebra, da geometria, da estocástica, da análise matemática? (GONÇALVES; FIORENTINI, 2005, p. 7).

E por que tais questões seriam fundamentais? Refletir acerca dessas questões nos ajuda a compreender a matemática em seus aspectos conceituais, semânticos e atitudinais e rompe com uma formação que prioriza os aspectos procedimentais, tais como demonstrar teoremas, saber manipular algebricamente a matemática e saber resolver exercícios. Sem pensar ainda nessas questões, até aquele momento eu acredita que a beleza da matemática era a demonstração de teoremas que levavam a resultados perfeitos, exatos e imutáveis.

1.2 Inquietações de uma formadora de professores

Em 2003, iniciei o mestrado, como aluna não regular e sem bolsa, em matemática pura na mesma instituição. Precisava trabalhar e foi então que me tornei professora de matemática da educação básica.

Não demorou muito para que eu percebesse que todo o saber matemático que eu possuía não era suficiente para ensinar matemática aos meus alunos. Isso começou a me incomodar. Em alguns desses momentos de incômodo, comecei a questionar a minha formação inicial e então me lembrava do texto escrito por Lorin (2002). Eu sentia necessidade de entender melhor o "ensinar matemática".

Como minha formação inicial era bacharel em matemática, em 2005 iniciei a licenciatura. Depois de dois anos eu era licenciada em matemática. Se durante o bacharelado foi priorizado o conteúdo matemático, durante as disciplinas que cursei para a licenciatura pouco se falou nisso, a ênfase era em como transmitir tais conhecimentos. Licenciei-me em matemática, segundo a fórmula "licenciatura = bacharelado + didática" (MOREIRA, 2012, p. 1138). Para Moreira (2012), essa estrutura é consistente com a seguinte visão:

> [...] o futuro professor, no processo de obter o licenciamento para ensinar, passa por uma primeira etapa de aprender o conteúdo e depois por uma etapa de aprender a transmitir. A lógica subjacente é que o bom professor precisa, antes de tudo deter o conhecimento. Mas isso não basta, há professores que sabem muito, mas não sabem transmitir. É preciso, também, saber ensinar (MOREIRA, 2012, p. 1139).

A licenciatura, segundo a fórmula licenciatura = bacharelado + didática, assim como o bacharelado, desprezou elementos importantes na formação de um professor para atuar em instituições escolares, tais como as citadas anteriormente (MIGUEL; MIORIM, 2008; GONÇALVES; FIORENTINI, 2005). As minhas inquietações continuavam. Em 2006, iniciei uma especialização em educação matemática. Foi o primeiro contato que eu tive com a modelagem matemática na perspectiva da educação matemática, com a resolução de problemas, com o uso de jogos e das tecnologias como perspectiva didática. Tudo era muito novo e o tempo foi muito curto. No mesmo ano tornei-me especialista em educação matemática e essa pós-graduação foi à abertura de uma pequena fresta, que não representou uma mudança na minha prática, em uma janela de um mundo, até então, desconhecido para mim.

No final de 2006, tornei-me formadora de professores que ensina matemática e esse foi o último ano em que trabalhei como professora da educação básica. Peguei meus cadernos da graduação, já um pouco amarelados, e comecei a reproduzir aulas e avaliações tais como tive durante a graduação.

No ano de 2007, iniciei o mestrado em educação para a ciência e a matemática, na UEM e me senti desafiada a discutir aspectos envolvidos com a formação de professores. Pela primeira vez me apresentaram as Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Estado do Paraná (DCE) (PARANÁ, 2008) e eu me propus a investigar a inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica no Estado do Paraná. Tal inclusão havia ocorrido no ano de 2006. De acordo com Paraná (2008), o ensino de geometrias não euclidianas possibilita uma nova maneira de se conceber o conhecimento geométrico:

> Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas. Um exemplo são os estudos que resultaram na Teoria da Relatividade, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma geometria não-euclidiana (PARANÁ, 2008, p. 56).

Levando em conta a inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica do Estado do Paraná, durante o mestrado procurei investigar:

> Como os professores sentiram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná? O que pensam a respeito? Após participarem de um curso sobre Geometrias não-euclidianas se sentem mais preparados para abordar o tema com seus alunos? (SANTOS, 2009, p. 31).

Ali, o foco do estudo era entender como os professores perceberam a inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica e se eles se sentiam preparados para trabalhar com o tema em sala de aula. Os dados indicaram que grande parte dos professores, em 2008, ainda não se encontrava preparada e segura para trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula e que um curso de formação continuada não os deixava à vontade para discutir o tema com seus alunos.

> O contato com novos conhecimentos que romperam com conhecimentos antigos gerou conflitos internos em muitos professores, que muitas vezes mostraram-se confusos. O curso de vinte e quatro horas tratou apenas de uma primeira aproximação, muito rápida, com vários conteúdos sendo trabalhado em poucas aulas. Porém, não sabemos ao certo, sem fundamentos em experiências a respeito se mesmo um curso mais longo, ou mesmo uma disciplina durante a graduação, garantiria que os professores se sentissem preparados, com conhecimentos suficientemente construídos para trabalhar com o tema em sala de aula (SANTOS, 2009, p. 121).

Ainda em 2009, Lovis (2009) procurou investigar “os conhecimentos dos professores sobre Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica, por meio de atividades com auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra” (LOVIS, 2009, p. 18). Santos (2009) e Lovis (2009) apontaram as dificuldades dos professores em abandonar os conceitos e definições da geometria euclidiana, como um conhecimento geral, tido como único e acabado, e a falta de conhecimentos dos mesmos acerca das definições e propriedades dessa geometria: “A falta de conhecimento de Geometria Euclidiana pelos professores, que já havia sido denunciada por vários autores, foi, mais uma vez constatada durante o curso” (SANTOS, 2009, p. 121).

Ainda com o objetivo de discutir a inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica do Estado do Paraná, Caldatto (2011) apresentou uma narrativa histórica do processo de elaboração das DCE, com base nas memórias de professores que dele participaram.

> Essa narrativa tem como foco a inclusão, no arcabouço de conteúdos a serem ensinados na escola básica, das geometrias não euclidianas. Tendo em vista a deficiente formação de professores com relação à geometria euclidiana e, em decorrência, os problemas existentes com ensino desse tema na escola básica, nosso interesse se voltou a entender como e porque essa inserção ocorreu e qual a visão dos professores participantes na elaboração das DCE sobre essa inserção e sua participação nas decisões tomadas no decorrer desse processo (CALDATTO, 2011, p. 8).

Os resultados da pesquisa evidenciaram que

> [...] o processo de elaboração das DCE foi muito mais influenciado pelos problemas de gestão e crises internas que ocorreram na SEED[2] do que pela participação dos professores da rede estadual de ensino, e que a inserção das geometrias não euclidianas não foi uma decisão dos professores, mas uma ação desenvolvida por membros da equipe técnica de Matemática da SEED. Por outro lado, os professores alegam não possuírem formação mínima, nem para discutir o tema, nem para trabalhá-lo em sala de aula (CALDATTO, 2011, p. 8).

Para Caldatto (2011), para que fosse viável a implementação das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica,

> [...] a SEED deveria pôr em ação um programa voltado especificamente à formação continuada dos professores da rede no tema – geometrias não euclidianas, o que não nos parece passível de acontecer. No entanto, sem esta providência, acreditamos ser impossível evitar a profecia já anunciada pelos próprios professores: a não abordagem desse tema em sala de aula (CALDATTO, 2011, p. 247).

A pesquisa de Caldatto (2011) vai ao encontro da de Santos (2009) e Lovis (2009) e aponta para a necessidade de se propiciar um preparo mais adequado dos professores e futuros professores de matemática para que estes possam abordar a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas em sua futura prática docente.

Com as leituras desses trabalhos, duas questões iniciais tornam-se importantes. A primeira é sobre qual o sentido e os objetivos da inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica. A segunda faz referência à formação de professores para desenvolver atividades relacionadas ao tema. Essas questões alimentaram e solicitaram novas teorizações, que refletiram em modificações na minha prática docente e começaram a delinear este trabalho. A discussão acerca da formação de professores para desenvolver atividades em sala de aula com geometrias não euclidianas na educação básica passou a ser um objeto de pesquisa.

Na busca por teorizações, pude compreender o que são as geometrias não euclidianas e perceber que já havia estudado algumas durante minha formação inicial. Mas por que ninguém havia falado em geometrias não euclidianas quando falavam de topologia? Mas por que ninguém havia comentado acerca delas quando ensinavam geometria diferencial? Por que durante a minha graduação ninguém

---

[2] Secretaria de Estado da Educação do Paraná.

falou que existiam verdades sobre o conhecimento matemática, e não apenas uma única verdade? Por que não me disseram da atividade humana, da contribuição cultural dos povos para elaboração do conhecimento científico? A cada leitura novas inquietações surgiam.

A minha prática enquanto professora formadora de professores me incomodava cada dia mais. Os cadernos da graduação, cada vez mais amarelados, não serviam mais como modelo. As mudanças, apesar de “pequenas”, começavam a aparecer. A partir de 2010, passei a incluir na disciplina de análise na reta aspectos de história da matemática, usando para isso o livro *História da Matemática em Atividades Didáticas*, de Miguel et al. (2009).

Em 2011, iniciei o doutoramento em educação na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e novos apontamentos teóricos me foram apresentados e a história da matemática se apresentava como uma possibilidade. E esses apontamentos teóricos me fizeram repensar novamente a minha prática e, ao me movimentar a pensar sobre ela, percebi o quão é difícil diminuir a distância entre o que dizemos e o que fazemos, e isso é uma questão de sermos coerentes. “Nem sempre fácil de ser assumida, a busca da coerência educa a vontade, faculdade fundamental para mover-nos no mundo” (FREIRE, 2000, p. 2).

Dizer para o futuro professor ou para o professor em formação continuada como ele deve fazer é muitas vezes fácil e, ao mesmo tempo, simplista. Mas como fazemos quando somos nós os professores? Isso é ser coerente, isso é educar a vontade. E a busca pela coerência entre o que digo e o que faço e a vontade de mudar fez-me buscar transformar algumas práticas. Segundo Freire (2000), mudar é difícil, mas é possível, não podemos ficar acomodados.

> Não posso estar no mundo de luvas nas mãos constatando apenas. A acomodação em mim é apenas caminho para inserção, que implica decisão, escolha, intervenção na realidade. Há perguntas a serem feitas insistentemente por todos nós e que nos fazem ver a impossibilidade de estudar por estudar. De estudar descomprometidamente como se misteriosamente de repente nada tivéssemos que ver com o mundo, um lá fora e distante mundo, alheado de nós e nós dele (FREIRE, 2000, p. 37).

Mas como promover esse novo movimento na minha prática? Como buscar transformações? Era preciso decidir, escolher e buscar compreender a impossibilidade de estudar por estudar. A história da matemática enquanto perspectiva didática se apresentava como uma possibilidade, mas como trabalhar como essa perspectiva? Quais os discursos que existiam e que justificavam os trabalhos com a história da matemática? Foi nessa busca que me aproximei das leituras que tratavam do uso da história da matemática no ensino de matemática, em especial na formação do professor de matemática. Percebi então que havia perspectivas diferentes e que por isso seria importante conhecer e ter clareza do discurso utilizado para justificar cada perspectiva, para então tomarmos a decisão de qual discurso nos aproximaríamos. Autores como Miguel (1993), Miguel e Brito (1996), Miguel (1997), Miguel e Miorim (2008) e Balestri (2008) me ajudaram a melhor compreender tais discursos e tecer as articulações necessárias para a composição e elaboração do trabalho.

As leituras desses trabalhos me mostraram quão “espinhosa” poderia ser a minha escolha em desenvolver atividades, levando em conta elementos da história da matemática. Mas era preciso decidir qual o caminho trilharia. Optei por uma perspectiva, e mais teorizações foram necessárias. Tomei como pressupostos a teoria histórico-cultural e a formação de professores. Comecei a ler os estudos de autores como Moura (1996), Catalani (2002), Sousa (2004, 2009), Ferreira (2005), Moretti (2007), Dias (2007), Cedro (2008), Moura et al. (2010), Moretti e Moura (2010), Sousa e Jesus (2011), Furlanetto (2013) e Panossian (2013). A perspectiva lógico-histórica, preconizada por Kopnin (1978) e presente nas pesquisas dos respectivos autores, mostrava-se atividade formadora de professores, e as Atividades Orientadoras de Ensino (AOE), definidas por Moura (1996) e Moura et al. (2010) se apresentavam como possibilidade de criar *elo* entre o professor que tem o objetivo de ensinar e o aluno que tem como objetivo a aquisição do conhecimento teórico.

Era um momento de escolhas e as teorizações foram importantes. Primeiramente a escolha foi por desenvolver atividades de ensino com as geometrias não euclidianas na formação inicial de professores de matemática. No entanto, na universidade, na qual eu desenvolveria a pesquisa, não havia uma disciplina exclusiva de geometrias não euclidianas. Assim, a opção foi por desenvolver atividades de ensino com geometrias, ou seja, com a geometria euclidiana e com as geometrias não euclidianas, considerando a perspectiva lógico-histórica. Digo desafio, pois, durante toda a construção dos dados da pesquisa, vivi desafios e contradições interiores. De um lado, havia a busca pela coerência e, de outro, o medo de quem começava a trilhar os caminhos da teoria histórico-cultural.

Medo esse, que, segundo Freire (2000, p. 40), “não é uma coisa que me diminui, mas que me faz reconhecer que sou um ser humano”.

Aceitei o desafio e, durante o ano letivo de 2013 na Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – *campus* de Campo Mourão, ministrei duas disciplinas: 1) geometria, para os alunos do quarto ano de licenciatura em matemática, e 2) geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas, para os alunos do segundo ano do mesmo curso. Vale salientar que, nesse mesmo ano, tínhamos duas grades curriculares vigentes no curso, por conta de uma mudança no projeto Político-Pedagógico (PPP).

A disciplina de geometria, ministrada aos alunos do quarto ano, fazia parte do PPP antigo e não vigorava desde 2014, e a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas faz parte do novo PPP, vigente desde 2011.

No decorrer da construção dos dados desta pesquisa, fiz o uso de Atividades de Ensino (AE) de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe, acrescida de um quarto momento, a escrita de uma narrativa dos licenciandos e postada no Google Grupos.

A discussão deste trabalho vem ao encontro das pesquisas anteriormente citadas e de outras mais que tratam do assunto. Pretendo, no entanto, analisar a inserção do uso de AE na perspectiva lógico-histórica na formação inicial do professor de matemática em geometrias, em disciplinas que têm em sua composição curricular a axiomatização da geometria euclidiana e aspectos das geometrias não euclidianas.

Nesse sentido, a presente pesquisa tem confluências com os estudos de Moura (1996), Catalani (2002), Sousa (2004, 2009), Ferreira (2005), Moretti (2007), Dias (2007), Cedro (2008), Moura et al. (2010), Moretti e Moura (2010), Sousa e Jesus (2011), Furlanetto (2013), Panossian (2013), já que também se fundamenta teórica e metodologicamente na teoria histórico-cultural.

Com isso, nesta pesquisa pretendo responder a questões como as que seguem abaixo:

As atividades de ensino desenvolvidas nas disciplinas de “Geometria” e de “Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não euclidianas” foram geradoras de objetivos e motivos para se ensinar e aprender a ensinar geometrias?

Essas atividades vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas se tornaram uma AOE?

Quais são as produções de sentidos, de significados, os objetivos e motivos que são explicitados nas narrativas elaboradas por licenciandos do curso de matemática, enquanto vivenciaram AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe?

Para responder às questões, analisei as narrativas de 30 licenciandos, 19 licenciandos do segundo ano e 11 do quarto. A triangulação que ocorreu entre diário de campo, AE, questionário inicial e narrativas fez emergir quatro categorias de análise: *Do isolado ao coletivo; O diálogo; Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições.*

Até o momento, procurei descrever a minha formação inicial, o início da minha carreira docente e as dúvidas e incertezas que me afligiram e ainda me afligem. Vivenciei um modelo de formação que privilegiou os conteúdos matemáticos, um curso centrado quase exclusivamente em abordagens axiomático-dedutivas. Quando me tornei professora, fiz na sala de aula, basicamente, aquilo que havia me impressionado durante a graduação.

Mas à medida que fui exercendo a minha prática e com minhas observações e reflexões teóricas, fui sendo tomada por inquietações e críticas. E foi a minha prática docente que alimentou e solicitou teorizações que se refletiram em modificações. Isso não significa, de maneira alguma, que eu tenha encontrado o "pote de ouro ao final do arco-íris", ou seja, a receita para acabar com os problemas da formação de professores e com todas as minhas inquietações. Ao contrário disso, exercer minha prática docente e repensar e refletir sobre essas mudanças alimenta e solicita novamente teorizações que mais uma vez refletem em modificações.

Em suma, a justificativa para o desenvolvimento desta pesquisa envolveu pelo menos três movimentos que podem ser denominados de inquietações, teorizações e mudanças.

O primeiro é fruto de reflexões e inquietações que fiz em relação ao conteúdo de geometrias e a formação inicial de professores de matemática. Esse momento se caracterizou como de escolhas, de recortes e de teorizações acerca da formação inicial de professores.

Considerando a trajetória enquanto formadora de professores e pesquisadora, a opção foi de adentrar ao debate da formação inicial de professores de matemática, que, segundo Cyrino (2013), pode se configurar como um desafio, já que é “um campo de luta ideológica e prática” (CYRINO, 2013, p. 77). No entanto, corroboro a autora, ou seja, é imperativa a responsabilidade dos “investigadores, elaboradores de projetos e programas, enfim, de todas as pessoas envolvidas com a formação de professores de Matemática” (CYRINO, 2013, p. 77). Assim, levando em conta as inquietações, advindas de críticas da minha própria prática, assumi minha responsabilidade enquanto formadora de professores de matemática e adentrei a esse campo de luta ideológica e prática.

A necessidade de mudanças na minha prática docente me levou a novas teorizações e ao segundo movimento que pode justificar esta pesquisa. As teorizações me aproximaram de pesquisas que apresentam algumas possibilidades de a história da matemática se configurar como perspectiva didática para a formação de professores de matemática. Esse segundo movimento se caracterizou como de estudo acerca dessas perspectivas e de aproximações com o lógico-histórico (KOPNIN, 1978), com a teoria da atividade (Leontiev) e com as AOE (MOURA, 1996; MOURA et al., 2010). Tais conceitos serão discutidos nos capítulos 3 e 4.

O terceiro movimento foi de mudança da minha prática docente e construção dos dados da pesquisa. O desafio inicial era ministrar a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas, no entanto foi decidido no colegiado de matemática que eu ministraria também a disciplina de geometria, ambas do curso de matemática da UNESPAR – *campus* de Campo Mourão. Isso ocorreu porque no ano de 2010 o departamento de matemática da UNESPAR – *campus* de Campo Mourão – realizou mudanças no projeto Político-Pedagógico (PPP) do curso de matemática.

Dentre as mudanças realizadas, foram feitas alterações na grade curricular do curso. O novo PPP passou a valer para os alunos que ingressaram no curso a partir de 2011. Levando isso em consideração, optei por desenvolver a pesquisa com os licenciandos que faziam disciplinas relacionadas às duas grades curriculares, a grade antiga para os ingressantes até 2010 (alunos que cursavam a disciplina de geometria) e a nova grade, para os alunos ingressantes a partir de 2011 (alunos que cursavam a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana).

Uma das alterações feitas foi na disciplina de geometrias. No PPP antigo, a disciplina era denominada geometria e era ministrada no quarto e último ano do curso. No novo PPP, a disciplina passou a ser denominada geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas e veio a ser ministrada no segundo ano do curso.

De acordo com o projeto Político-Pedagógico do curso de matemática, a ementa da disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas é constituída por:

> Incidência e ordem no Plano, Segmentos, ângulos, medidas, congruência de triângulos, axioma das paralelas, regiões poligonais e áreas, semelhança de triângulo e o Teorema de Tales, Circunferência e Círculo, Trigonometria, Incidência e Ordem no espaço, Paralelismo no espaço e suas conseqüências, Perpendicularismo no Espaço e suas conseqüências, Projeções, Distância, Ângulos, Diedros e Triedros, Poliedros, Superfície Esférica e Esfera, Áreas e Volumes. Noções de Topologia, Noções de Geometria Projetiva, Noções de Geometria Hiperbólica, Noções de Geometria Esférica, Noções de Geometria dos Fractais (FACULDADE ESTADUAL DE CIÊNCIAS E LETRAS DE CAMPO MOURÃO, 2009, p. 78).

E a ementa da disciplina de geometria é constituída por:

> 1. Geometria plana: Axiomas de incidências e ordem. Axiomas sobre medição de segmentos. Axiomas sobre medição de ângulos. Congruência. O teorema do Angulo externo e suas conseqüências. O axioma das paralelas. Semelhança de triângulos. O círculo. Relações trigonométricas. Áreas. Teorema de Pappus. 2. Geometria Espacial: Ponto, reta e plano no espaço tridimensional. Interseção de retas e planos. Paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos. Diedros. Triedros. Poliedros: Angulo poliédrico, prisma ilimitado, poliedros. O teorema de Euler, poliedros regulares, prismas, pirâmides, troncos. Congruência de poliedros. Esferas, cilindros e cones. Seções cônicas. 3. Elementos de Geometrias não-euclidiana. Elementos de topologia (FACULDADE ESTADUAL DE CIÊNCIAS E LETRAS DE CAMPO MOURÃO, 2003, p. 72).

Com as ementas das disciplinas em mãos, era o momento de construir a pesquisa. No capítulo seguinte caracterizarei a pesquisa, contextualizando-a, indicando como e onde a pesquisa foi desenvolvida, bem como quem foram os sujeitos e quais os instrumentos de pesquisa que utilizei.

2 A CONSTRUÇÃO DA PESQUISA

"Nos perderemos entre monstros
Da nossa própria criação?
Serão noites inteiras
Talvez por medo da escuridão
Ficaremos acordados
Imaginando alguma solução
Pra que esse nosso egoísmo
Não destrua nosso coração"

(Dado Villa-Lobos / Renato Russo / Marcelo Bonfá)

A presente pesquisa está inserida no ideal de uma pesquisa qualitativa, considerando-se o exposto por Bogdan e Biklen (1999), quando afirmam que na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, o que constitui o instrumento principal - o pesquisador permanece no ambiente pesquisado com o intuito de relatar e observar com maior clareza e precisão o ambiente "natural" dos sujeitos.

Tentando conduzir esta pesquisa qualitativamente e procurando nos aproximar da teoria histórico-cultural, desenvolvemos esta investigação, durante o ano de 2013, que envolveu 30 licenciandos do curso de matemática[3] da UNESPAR – *campus* de Campo Mourão. Para a construção dos dados foram utilizados quatro instrumentos: questionário, atividades de ensino, diário de campo e narrativas.

O objetivo desta pesquisa é analisar se Atividades de Ensino (AE) de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, seriam uma AOE e dessa forma se constituiriam como uma unidade entre o ensino e aprendizagem configurando-se como perspectiva didática para a formação de professores em geometrias.

2.1 Contextualizando a pesquisa

Pelas mudanças propostas pelo PPP e citadas anteriormente, o primeiro ambiente do contexto da pesquisa se constituiu a partir de duas salas de aulas. A primeira era formada por 11 licenciandos do quarto ano de matemática, matriculados durante o ano de 2013 na disciplina de geometria. Nessa primeira turma não houve desistências, enquanto a pesquisa foi desenvolvida.

---

[3] O curso de matemática da Unespar – campus de Campo Mourão é o noturno.

A segunda sala de aula foi constituída por 22 licenciandos de matemática, matriculados durante o ano de 2013 na disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas. Houve três desistências na turma do segundo ano. Um aluno abandonou todas as disciplinas já no início do ano. Os outros dois desistiram no segundo semestre, sem apresentarem uma justificativa formal.

Dessa forma, excluímos da pesquisa os sujeitos que desistiram da disciplina, já que não havia material suficiente, por eles postado, que nos permitisse uma análise mais profunda acerca dos objetos de pesquisa. Sendo assim, participaram 11 sujeitos do quarto ano de matemática e 19 participantes do segundo ano, totalizando 30 sujeitos.

Temos de considerar ainda que, de acordo com a resolução CNS 196/96 do Conselho Nacional de Saúde, toda investigação com seres humanos envolve risco, no entanto, esses riscos são aceitáveis desde que seus benefícios e sua importância sejam explicados. Como existia uma relação de poder instaurada em sala, uma vez que a professora da disciplina também era a pesquisadora, algumas ações foram realizadas a fim de permitir aos estudantes exercer sua liberdade de escolha de participar ou não da pesquisa sem que sua situação em sala de aula fosse prejudicada e/ou estigmatizada pela sua escolha. Dessa forma, algumas ações foram necessárias, conforme segue abaixo:

a) expomos o projeto de pesquisa para o diretor da UNESPAR – *campus* de Campo Mourão - e obtivemos a autorização[4] para realizar a pesquisa na universidade;
b) em seguida, mostramos a proposta de pesquisa para o chefe e o coordenador do departamento de matemática e obtivemos as autorizações[5] dos mesmos para a realização da pesquisa no curso;
c) apresentamos ainda a proposta para o colegiado do curso de matemática e obtivemos a aprovação[6] para o desenvolvimento da pesquisa. É importante constar que no colegiado do curso há a presença de um discente e de um docente representante de cada turma do curso;

---

[4] Apêndice A
[5] Apêndice A
[6] Apêndice B

d) convidamos no primeiro encontro todos os alunos, totalizando 33, para participar da pesquisa;

e) exibimos e obtivemos a concordância de todos os alunos no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido[7]. Cada aluno recebeu uma cópia do mesmo.

f) ao término das análises, enviamos um e-mail para todos os sujeitos participantes e demos um prazo de quinze dias para que eles se manifestassem, caso não concordassem com as análises[8].

Para a construção dos dados da pesquisa, organizamos dois ambientes de pesquisa e estudo, sendo que o primeiro denominaremos de presencial, já que aconteceu no interior da sala de aula e com a presença da professora/pesquisadora e dos licenciandos, e o segundo ambiente denominaremos virtual porque ocorreu via Google Grupos.

No ambiente presencial, portanto nas salas de aula, encontramo-nos com os licenciandos no período de um ano, semanalmente, durante 4 h, para estudar as atividades de ensino, as quais serão denominadas de AE, que foram elaboradas a partir elementos lógico-históricos, presentes na história da geometria euclidiana e das geometrias não euclidianas. Tais elementos tinham por objetivo desencadear situações de aprendizagem, de forma que os licenciandos pudessem se apropriar de conhecimentos acerca dessas geometrias. Ao mesmo tempo, procurávamos analisar com os licenciandos o papel desses conhecimentos em suas futuras práticas docentes.

Assim, a pesquisa de campo teve início com o ano letivo de 2013 e ela se encerrou no final do mesmo ano. As aulas eram semanais, com carga-horária semanal de 4 horas-aula, e as disciplinas de geometria e de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas são anuais. As disciplinas tinham, cada uma, carga-horária anual de 144 horas-aula.

O segundo ambiente, portanto, o virtual, organizado para que a construção dos dados fosse possível, foi o Google Grupos. Criamos dois grupos de discussões, um para a disciplina de geometria e um para a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas, em que ocorreram as discussões e debates *online* sobre os encontros presenciais. Nesse ambiente virtual, os licenciandos postaram suas narrativas, puderam ler as narrativas dos demais participantes,

---

[7] Apêndice C
[8] Nenhum aluno retornou o e-mail discordando das análises.

compartilharam dúvidas, incertezas, inseguranças e analisaram os momentos vivenciados durante a disciplina por meio de suas narrativas.

Conforme já afirmamos anteriormente, as disciplinas foram pautadas na dinâmica relacional, proposta por Sousa (2004) e Ferreira (2005) e composta de três momentos: primeiramente, individualmente, os licenciandos analisaram uma situação proposta e produziam uma síntese que indicava uma possível resposta. Depois, em pequenos grupos, as sínteses individuais foram analisadas e reelaboradas. Aqui, o grupo produzia uma única síntese, a partir das reflexões coletivas. No momento seguinte, cada grupo apresentava a sua síntese para toda a turma, para que a mesma chegasse à melhor resposta para si mesma.

Ou seja, as primeiras teorizações sobre determinado conteúdo foram feitas pelos licenciandos. Nesse momento, eles tiveram a oportunidade de explicitarem, individualmente, os sentidos que davam aos conceitos tratados, e, em pequenos grupos, tais sentidos foram coletivizados, dessa forma, os grupos explicitaram os significados que foram produzidos.

A partir dos estudos de Leontiev, entendemos que sentido e significado caminham juntos. No caso específico desta pesquisa, os sentidos individuais se convergiram em sentidos coletivos, produziram significados. Isso não quer dizer que os sentidos e os significados produzidos pelos licenciandos coadunam-se tanto com os nossos, quanto com os sentidos e os significados explicitados por teóricos em seus estudos. Alguns sentidos e significados possuem aproximações com os dos teóricos. Outros, nem tanto.

Ao considerarmos o conceito de AOE para elaborarmos as AE e fazermos uso da dinâmica indivíduo-grupo-classe, durante a organização do ensino ocorrido nas salas de aula do ensino superior, especialmente no que diz respeito ao curso de licenciatura de matemática, buscamos romper com o ensino de geometrias focado em listas de exercícios e repetições mecânicas. Procuramos estimular a criatividade, a curiosidade, o salto em direção ao aspecto mais qualitativo da matemática, por exemplo, a possibilidade de expressão e a capacidade de se correr risco, promovendo, assim, momentos em que os futuros professores da educação básica pudessem duvidar de verdades absolutizadas e não repetir aquilo que falamos, que muitas vezes nada mais é que a repetição de alguma coisa que alguém já nos disse.

> A criatividade precisa ser estimulada não só no nível de individualidade do aluno, mas também no nível de sua individualidade num contexto social. Em vez de sufocar esse ímpeto de curiosidade, os educadores deveriam estimular o arriscar-se, sem o qual não existe criatividade. Em vez de reforçar as repetições puramente mecânicas de frases e de listas de fatos ou

> acontecimentos, os educadores deveriam estimular os alunos a duvidar (FREIRE; MACEDO, 1990, p. 39).

Além dos três momentos da dinâmica, criamos o quarto momento: a escrita de uma narrativa individual e postagem dessas narrativas no fórum de discussão no Google Grupos para que as reflexões pudessem continuar, na medida em que a turma entendesse ser necessário. Denominaremos os quatro momentos dessa dinâmica de indivíduo-grupo-classe-narrativa.

2.2 Caracterizando os instrumentos e os sujeitos da pesquisa

Neste item apresentaremos os quatro instrumentos que foram utilizados no decorrer da pesquisa de campo, para construirmos os dados da pesquisa: questionário, atividades de ensino, diário de campo e narrativas. Segue o detalhamento de cada instrumento.

2.2.1 Questionário

O objetivo do questionário inicial era delinearmos o perfil dos sujeitos participantes da pesquisa, compreendendo quem eram, no que trabalhavam e se já atuavam como professores, quanto tempo tinham de formados no ensino médio, para podermos discutir se as geometrias não euclidianas estão presentes na escola, o que sabiam acerca de geometrias e qual sentido haviam produzido sobre a história da matemática até aquele momento. Segue abaixo o Quadro 1 que contém as duas questões que fizemos aos licenciandos:

Quadro 1 – Questionário

QUESTÃO 01: Conhecendo os licenciandos em matemática: Idade: Sexo: Profissão: Tempo de profissão: Possui outra graduação: ( ) Não ( ) Sim Qual? Quando terminou? Em que ano terminou o ensino fundamental? Em que ano terminou o ensino médio? Já lecionou? ( ) Não ( ) Sim Por quanto tempo? Qual disciplina? Rede pública ou particular?

Quais anos?
QUESTÃO 02[9]: Escreva uma narrativa em que necessariamente as seguintes frases e palavras devam aparecer. Não necessariamente na ordem em que elas foram dadas: 1) Eu espero que a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana. 2) Esta disciplina é importante para a minha formação já que. 3) Euclides. 3) Durante a educação básica eu aprendi que a geometria euclidiana. 4) Já sobre as geometrias não euclidianas. 5) A inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica. 6) História da matemática. 7) A obra Os Elementos. 8) Axiomas. 9) Em relação à parte da história da matemática que trata sobre geometria. 10) Postulado das paralelas.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

2.2.2 Participantes da pesquisa

Os 11 sujeitos do quarto ano de matemática foram denominados de: Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10 e Q11 e os outros 19 participantes, do segundo ano, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18 e S19, totalizando 30 sujeitos.

Os licenciandos Q8 e S9 não responderam ao questionário. O questionário nos possibilitou a elaboração do Quadro 2 abaixo. Nele, delineamos, ou seja, caracterizamos o perfil dos sujeitos participantes da pesquisa, conforme segue abaixo:

Quadro 2 – Caracterização dos sujeitos participantes da pesquisa

Perfil	Sujeitos	Inferências
Atuavam como professores da educação básica	Q1 - 4 anos Q7 – 4 meses Q10 – 2 anos S2 – 11 meses S4 – 3 anos S5 – 2 meses S11 – 1 ano S13 – 3 anos	Os licenciandos que já atuavam como professores da educação básica.
Terminou a educação básica depois da inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica do Estado do Paraná.	Q2, Q3, Q4, Q5, Q10, Q11, S1, S2, S3, S5, S6, S7, S8, S10, S11, S12, S15, S16, S17, S18 e S19.	Dentre os 21 sujeitos que terminaram a educação básica após a inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica, apenas Q5, Q10, Q11, S2 e S18 afirmaram ter algum conhecimento acerca dessas geometrias. Q5, Q10 e S2 relataram ter estudado sobre as geometrias não euclidianas em cursos oferecidos pela universidade[10], Q11 alegou ter estudado ainda na educação básica sobre os fractais e S18 relatou que por curiosidade fez algumas

[9] Entendemos que a questão 02 ficou, de certa maneira, diretiva. No entanto, acreditamos que atingimos nosso objetivo, uma vez que conseguimos delinear o perfil dos alunos participantes.

[10] Tais cursos trataram de Introdução às Geometrias não-euclidianas e foram oferecidos por professores do colegiado de matemática e por alunos participantes do programa de iniciação científica em eventos ocorridos no campus de Campo Mourão.

		leituras em *sites* da internet acerca do assunto.
Terminou a educação básica antes da inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica do Estado do Paraná.	Q1, Q6, Q7, Q9, S4, S13, S14.	Apesar de os licenciandos Q6, Q7 e Q9 terem terminado a educação básica antes da inclusão, eles declararam ter feito cursos durante a graduação que possibilitaram conhecimentos acerca das geometrias não euclidianas.
Já trabalham como professores da educação básica e possuem algum conhecimento acerca das geometrias não euclidianas.	Q7, Q10 e S2.	Dentre os oito licenciandos que já lecionam apenas três deles narraram ter algum conhecimento acerca das geometrias não euclidianas.
Os conhecimentos de história das geometrias são factuais e Euclides aparece como o pai da geometria.	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q7, Q9, Q11, S2, S3, S11, S12, S14 e S18.	Pudemos perceber nas narrativas desses 14 licenciandos a presença de uma história factual, que privilegiou principalmente a figura de Euclides como um grande matemático e pai da geometria euclidiana e a Grécia como o berço dessa geometria. Ou seja, a participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem da matemática ainda privilegia nomes, datas e locais e praticamente desaparece com a contribuição cultural dos povos em sua elaboração.
Pouco ou nada conhecem acerca da história das geometrias e afirmam não terem ouvido falar acerca de Euclides ou recordarem vagamente sobre o nome.	Q6, Q10, S1, S4, S5, S6, S7, S8, S10, S13, S15, S16, S17 e S19.	A escassa participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem da matemática pode ser percebida nas narrativas de 14 licenciandos. Ou seja, o privilégio das regras formais lógicas, o uso mecanizado de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes em detrimento da dinâmica histórica.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Na análise dos dados usaremos o símbolo NO (ene 0) para as respostas obtidas no questionário. Assim, por exemplo, S1-NO apresenta uma resposta dada pelo licenciando 1, do questionário inicial.

2.2.3 Atividades de Ensino (AE)

Durante a pesquisa foram elaboradas, planejadas e desenvolvidas 11 AE intituladas: 1) *AE 1 Pensando sobre vida e movimento, 2) AE 2 Verdades eternas ou verdades aproximadas, 3) AE 3 O tempo e os gregos, 4) AE 4 A quantificação do espaço, 5) AE 5 Primeiros passos na arte de medir, 6) AE 6 Sulbasutras, 7) AE 7 A geometria grega, 8) AE 8 Medindo alturas inacessíveis, 9) AE 9 A medida e o tijolo, 10) AE 10 Conhecendo os fractais,11) AE 11 Geometrias não euclidianas e quatro* *avaliações intituladas: 1) AE 12 Avaliação do primeiro bimestre, 2) AE 13 Avaliação do segundo bimestre, 3) AE 14 Avaliação do terceiro bimestre* e *4) AE 15 Avaliação do quarto bimestre.* Das 11 AE, seis foram elaboradas por nós: AE 2, AE 3, AE 6, AE 7, AE 8, AE 10. As demais são adaptações de AE já desenvolvidas por outros pesquisadores[11].

No caso específico das quatro avaliações, vale à pena ressaltarmos que elas também seguiram a dinâmica da disciplina, ou seja, os alunos resolveram as avaliações individualmente, depois em pequenos grupos, com toda a classe e finalizaram com a postagem da narrativa no Google Grupos. Permitimos que os licenciandos trouxessem para a avalição todos os materiais que desejassem. Dessa forma, as avaliações se configuraram como um processo de análise e síntese do processo de ensino e aprendizagem.

> Nesta perspectiva, o objetivo principal da avaliação consiste na reflexão das ações desenvolvidas tanto pelo aluno como pelo professor, no sentido de qualificar o processo de atividade cognitiva dos envolvidos. A avaliação como um processo de análise e síntese é importante para direcionamento das atividades desenvolvidas pelos sujeitos do processo de ensino e aprendizagem (MORAES, 2008, p.108).

Para a mesma autora, a avaliação é parte integrante tanto da atividade de ensino do professor quanto da atividade de aprendizagem do aluno. Assim, as quatro avaliações realizadas se configuraram como AE, uma vez que, ao elaborar tais atividades, levamos em conta a definição dos procedimentos de como desenvolver o conhecimento teórico e a proposição de discussões de como trabalhar com o conhecimento teórico na futura prática docente do licenciando.

Nas atividades refletimos, estudamos, discutimos e dialogamos com os licenciandos os produtos culturais e científicos, produzidos por alguns grupos culturais, dentre eles, o grego, egípcio, indiano e babilônio, em busca do domínio do conhecimento teórico.

Apresentamos, no Quadro 3, os nomes das 11 AE e das quatro avaliações desenvolvidas durante a pesquisa, seus objetivos, conteúdos desenvolvidos e fontes utilizadas para a construção das AE. O quadro está composto por seis colunas. A primeira coluna indica o nome da AE. A segunda

---

[11] Indicaremos nas AE as referências dos pesquisadores.

apresenta os objetivos delineados por nós ao planejarmos as AE. Denominamos a terceira coluna de isolado, baseados na definição de Caraça (1970, p.112).

> A um tal conjunto daremos o nome de isolado; um isolado é, portanto, uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente. É claro que o próprio fato de tomar um isolado comporta um erro inicial – afastamento de todo o resto da realidade ambiente, – erro que necessariamente se vai refletir nos resultados do estudo. Mas é do bom-senso do observador recortar o seu isolado de estudo, de modo a compreender nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar (CARAÇA, 1970, p. 112).

Assim, com a impossibilidade de “abraçarmos” em uma única AE a totalidade das geometrias, foi necessário fazer recortes, destacados segundo o objetivo de cada AE, e que pudessem promover a compreensão dos fatores dominantes, ou seja, os fatores cuja ação de interdependência influenciava no ensino de geometrias.

Na quarta coluna destacamos os principais conceitos desenvolvidos a partir das AE. Na quinta coluna apresentamos as principais referências bibliográficas que foram consultadas para a construção da AE. Na última coluna denominamos a narrativa que faz referência à AE.

Quadro 3 – Atividades de ensino

AE	Objetivos	Isolados	Conceitos	Fontes	Narrativas
AE 1 – Pensando sobre vida e movimento	Discutir com os licenciandos sobre o que eles consideram natureza humana, natureza universal e natureza desconhecida, bem como o mundo e seus movimentos.	• Movimentos • Natureza	• Natureza humana • Natureza universal • Natureza desconhecida • Mundo fixo • Metafísica	• Sousa (2004)	N1
AE 2 – Verdades eternas ou verdades aproximadas	Discutir a unicidade e a veracidade eterna, proposta pelos gregos aos conceitos da geometria euclidiana.	• Verdades • Visão e representação • Formas	• Verdades eternas propostas pelos gregos • Verdades aproximadas quando aplicadas ao mundo real • O que vemos e como representamos • Topologia • Geometria projetiva	• Hogben (1970)	N2

AE 3 – O tempo e os gregos	Discutir com os licenciandos acerca da problemática da medida, do aparecimento da incomensurabilidade, do movimento, do infinito e do fator tempo.	• Tempo • Medida • Incomensurabilidade • Infinito • Movimento	• Tempo • Medida • Infinito	• Hogben (1970)	N3
AE 4 – A quantificação do espaço	Promover a discussão da matemática como uma criação humana, bem como do conceito de dimensão a e de representação.	• Espaço • Visão e representação • Geometrias não euclidianas • Formas • Movimentos	• Dimensão • Natureza e representação geométrica • Geometria projetiva	• Ferreira e Sousa (2002) • Franco e Gerônimo (2010)	N4
AE 5 – Primeiros passos na arte de medir	Romper com a ideia de que a matemática teve início na Grécia. Trazendo para isso textos que relatam acerca do homem e a sua necessidade de conquistar o tempo e medir o espaço. Debater com eles a ideia de ângulos na geometria euclidiana, como um conceito congelado, e a ideia de ângulo no seu surgimento, como uma ideia em movimento. Fazer com que os licenciandos discutam os motivos que levaram o homem a estabelecer a circunferência com 360º.	• Espaço • Tempo • Medida • Movimento	• Ângulos • Simetrias • Triângulos • Circunferências e círculo	• Hogben (1952) • Hogben (1970) • Franco e Gerônimo (2010) • Lanner de Moura (2013)	N5
AE 6 – Sulbasutras	Apresentar aos licenciandos a matemática védica e iniciar a apresentação da axiomatização da geometria euclidiana a partir	• Geometria Euclidiana axiomática • Construções geométricas védicas	• Congruência de triângulos • Semelhança de triângulos • Teorema de Pitágoras • Triângulo e quadriláteros	• Gaspar (2004) • Franco e Gerônimo (2010)	N6

	da geometria encontrada nos sulbasutras.		• Ângulos, segmentos e medidas. • Círculo e circunferência • Regiões poligonais e áreas • Axioma das paralelas		
AE 7 – A geometria grega	Apresentar a axiomatização da geometria euclidiana plana.	• Geometria euclidiana axiomática	• Cinco axiomas euclidianos • Noções primitivas • Axiomas de incidência • Axiomas de ordem • Axiomas de medidas • Axioma de existência de um segmento de comprimento dado • Axioma de congruência • Axioma das paralelas	• Franco e Gerônimo (2010) • Gaspar (2003) • Eves (2011) • Hogben (1952) • Brito (1995) • Bicudo (2009) • Nobre (2004) • Euclides (2009)	N7
AE 8 – Medindo alturas inacessíveis	Discutir com os alunos maneiras diferentes de encontrar alturas inacessíveis e debater acerca dos relatos sobre a medição da pirâmide. Tratar acerca da representação de objetos tridimensionais, debater o olhar e a representação do olhar. Trabalhar com a geometria euclidiana espacial	• Medida • Visão e representação • Geometrias não euclidianas • Verdades • Geometria euclidiana espacial	• Trigonometria • Teorema de Tales • Semelhança de triângulos • Geometria esférica • Representação de figuras tridimensionais • O olhar e a representação do olhar • O olhar e a representação do olhar • Proporcionalidade • Planificações • Paralelismo e perpendicularismo no espaço • Projeções, distâncias, ângulos, diedros e triedros • Poliedros • Superfície esférica e esfera • Áreas e volumes	• Mendes (2009) • Eves (2011) • Franco e Gerônimo (2010) • Flores (2007) • Fontana (2011)	N8
AE 9 – A medida e o tijolo	Discutirmos com os acadêmicos os conceitos de volume, capacidade, superfície, área e comprimento, bem como iniciarmos o debate acerca de superfícies de comprimento	• Medida • Composição e decomposição • Geometrias não euclidianas	• Medida padrão • Unidade de medida de volume, área e comprimentos • Superfície e área • Volume e capacidade • Fractais	• Ferreira e Sousa (2002) • Franco e Gerônimo (2010)	N9

	infinito e volume nulo.				
AE 10 – Conhecendo os fractais	Discutir com os licenciandos a busca do homem pelo padrão e pela medida exata. Usando a medida da costa do Brasil e a geometria fractal buscamos romper com a ideia de um mundo de medidas fixas.	• Visão e representação • Geometrias não euclidianas • Formas • Verdades	• A natureza e suas formas • Busca pelo padrão • Geometria fractal	• Franco e Gerônimo (2010) • Gleick (1989) • Barbosa (2005)	N10
AE 11 – Geometrias não euclidianas	Apresentar aos licenciandos modelos para a geometria esférica e geometria hiperbólica. Tratar das geometrias não euclidianas como negação do quinto postulado.	• Geometrias não euclidianas • Verdades • Movimentos • Visão e representação • Movimentos • Forma	• A visão e a representação • Transformações topológicas • Toro • Geometria projetiva • A negação do quinto postulado de Euclides – existência de infinitas ou a inexistência de retas paralelas • Geometria esférica • Geometria hiperbólica • Modelos para outras geometrias • Natureza e as geometrias	• Franco e Gerônimo (2010) • Sampaio (2008) • Santos (2009) • Thomaz e Franco (2014)	N11
AE 12 – Avaliação 1º bimestre	Oportunizar que os alunos pensassem acerca dos conceitos envolvidos nas AE desenvolvidas no primeiro bimestre.	• Movimentos • Natureza • Verdades • Visão e representação • Formas • Tempo • Espaço • Visão e representação • Geometrias não euclidianas • Formas • Movimentos	• Natureza humana • Natureza universal • Natureza desconhecida • Mundo fixo • Metafísica • Verdades eternas propostas pelos gregos • Verdades aproximadas quando aplicadas ao mundo real • O que vemos e como representamos • Topologia • Geometria projetiva • Dimensão • Plano e espacial • Natureza e representação geométrica • Geometria projetiva	• Sousa (2004) • Hogben (1970)	N12
AE 13 –	Avaliar se os	• Geometria	• Cinco axiomas	• Franco e	N13

Avaliação 2º bimestre	conceitos debatidos durante o segundo bimestre foram compreendidos.	euclidiana axiomática	euclidianos • Noções primitivas • Axiomas de incidência • Axiomas de ordem • Axiomas de medidas • Axioma de existência de um segmento de comprimento dado • Axioma de congruência • Axioma das paralelas • Trigonometria • Teorema de Tales • Semelhança de triângulos • Geometria esférica	Gerônimo (2010)	
AE 14 – Avaliação 3º bimestre	Avaliar se os licenciandos conseguiram compreender a axiomatização da geometria euclidiana	• Medida • Visão e representação • Geometrias não euclidianas • Verdades • Geometria euclidiana plana	• Cinco axiomas euclidianos • Noções primitivas • Axiomas de incidência • Axiomas de ordem • Axiomas de medidas • Axioma de existência de um segmento de comprimento dado • Axioma de congruência • Axioma das paralelas • Trigonometria • Teorema de Tales • Semelhança de triângulos • Representação de figuras tridimensionais • O olhar e a representação do olhar • Proporcionalidade • Planificações • Paralelismo e perpendicularismo no espaço	• Franco e Gerônimo (2010) • Gaspar (2003) • Eves (2011) • Hogben (1952) • Brito (1995) • Bicudo (2009) • Nobre (2004) • Euclides (2009)	N14
AE 15 – Avaliação 4º bimestre	Avaliar se os conceitos debatidos durante o quarto bimestre foram compreendidos.	• Geometria euclidiana espacial • Geometrias não euclidianas • Verdades • Movimentos • Visão e representação • Movimentos • Forma	• Proporcionalidade • Planificações • Paralelismo e perpendicularismo no espaço • Projeções, distâncias, ângulos, diedros e triedros • Poliedros • Superfície esférica e esfera • Áreas e volumes • Medida padrão	• Franco e Gerônimo (2010) • Gaspar (2003) • Eves (2011) • Hogben (1952) • Brito (1995) • Bicudo (2009) • Nobre (2004) • Euclides (2009) • Mendes (2009)	N15

			• Unidade de medida de volume, área e comprimentos • Superfície e área • Volume e capacidade • Comprimento • Fractais • A visão e a representação • Transformações topológicas • Toro • Geometria projetiva • A negação do quinto postulado de Euclides – existência de infinitas ou a inexistência de retas paralelas. • Geometria esférica • Geometria hiperbólica		

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Seguem abaixo as 15 AE que foram desenvolvidas com os estudantes.

- AE 1 – Pensando sobre a vida e movimento

Pensando sobre vida e movimento[12]

Primeiro momento: individual

Atividade 1: Pensando sobre a totalidade da vida – as naturezas

a) Leia o texto individualmente e em seguida escreva se concorda ou não com ele, justificando a sua resposta:

> O homem é parte da natureza. **Natureza** é o movimento universal do qual o homem é parte integrante. O homem conhece alguns movimentos naturais e deles se utiliza para sobreviver. Denominamos de **natureza humana** ao conjunto de movimentos naturais que o homem conhece e administra para a sua sobrevivência. Denominamos de natureza **desconhecida** ao conjunto de movimentos naturais que o homem desconhece (Lima, 1998: 10).

b) Faça três desenhos: no primeiro você representará a **Natureza Universal**; no segundo, a **Natureza Humana**; No terceiro, a **Natureza Desconhecida.**

Atividade 2: pensando sobre o universo em movimento

a) Olhe em torno de você. Preste muita atenção!
b) Anote tudo aquilo que você considera que está em movimento.
c) Reflita sobre suas anotações e suas ideias sobre o que é “movimento”.

Atividade 3: refletindo sobre a metafísica

a) Quantas pessoas estão agora em sua casa?
b) Você é o mesmo de um ano atrás?
c) De um segundo atrás? Por quê?

---

[12] A AE 1 é uma adaptação do trabalho de LIMA, L. C.; TAKAZAKI, M.; MOISÉS, R. P. **Elementar é o essencial**. São Paulo: CTEAC, 1998, publicada por LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. S. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC06705545968.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013.

d) O mundo é o mesmo enquanto eu falo a palavra “mundo”? Por quê?
e) O prédio da escola permanece o mesmo depois que eu vou embora para a casa? Por quê?
f) Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra? É a mesma? Por quê?

Segundo momento: refaça as três atividades em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google grupos.

Fonte: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC06705545968.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013 e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 2 – Verdades eternas ou verdades aproximadas

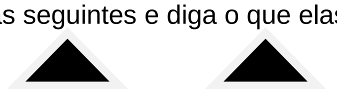
Verdades eternas ou verdades aproximadas

Primeiro momento: leitura individual
Atividade 1: pensando sobre as verdades:

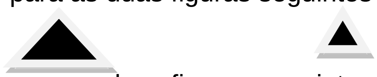
a) Leitura do texto:

A maior façanha de Platão foi inventar uma religião capaz de satisfazer as necessidades emocionais de homens que viviam em conflito com seus ambientes sociais e eram demasiado inteligentes ou individualistas para procurar santuário nas formas mais grosseiras do animismo. A curiosidade dos primeiros que especularam o átomo, estudaram a propriedade dos ímãs, observaram as consequências de se atritar o âmbar, dissecaram os animais e catalogaram as plantas, três séculos antes de Aristóteles escrever o seu epitáfio sobre ciência grega, banira as personalidades do interior dos objetos naturais. Platão colocou animismo fora do alcance da devassas experimental inventando um mundo de "universais". Este mundo de universais é o mundo tal como Deus o conhece, é o "verdadeiro" mundo, do qual o nosso não passa de sombra. Neste "verdadeiro" mundo, os símbolos fonéticos e numerais eram investidos da magia que se evolava do corpo dos animais e do tronco das árvores, logo que dissecados e descritos. O Timaeus é uma encantadora coletânea das estranhas perversões a que poderia ser compelida esta mágica do simbolismo. A verdadeira terra, em contraposição à terra sólida em que construímos nossas casas, é um triângulo equilátero. A verdadeira água, em contraposição àquela que, uma vez ou outra, consideramos como bebida, é um triângulo retângulo. O verdadeiro fogo, em contraposição ao fogo contra que nos seguram as companhias, é um triângulo isósceles. O verdadeiro ar, em contraposição àquele com que enchemos pneumáticos, é um triângulo escaleno. Armemo-nos de paciência e vejamos como Platão transformou a geometria da esfera numa explicação mágica da origem do homem. Deus – informa ele – "imitando a forma esférica do universo, encerrou os dois desígnios divinos num corpo esférico, a que chamamos cabeça". Para que a cabeça "não ficasse aos trambolhões pelos altos e baixos da terra, para que pudesse sair destes e galgar aqueles", dotamos de "um corpo destinado a servir de veículo e de meio de locomoção, e que por isso tinha certo comprimento e era dotado de quatro membros compridos e articulados... (HOGBEN, 1970, p. 28-29).

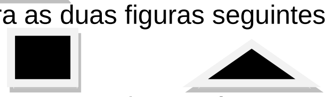
b) Faça um desenho que represente a sua leitura do texto.
c) O que você pensa da afirmação de Platão: "imitando a forma esférica do universo, encerrou dois desígnios divinos num corpo esférico, a que chamamos cabeça"?
d) Feche o olho e imagine um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Abra o olho e feche-o novamente, imaginando um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. O segundo triângulo é o mesmo que você imaginou da primeira vez?
e) Desenhe um triângulo equilátero de lado 3. Olhe para o desenho de seu companheiro ao lado. O seu triângulo é o mesmo do desenhado pelo seu companheiro?
f) Olhe para as duas figuras seguintes e diga o que elas apresentam em comum:



g) Olhe para as duas figuras seguintes e diga o que elas apresentam em comum:



h) Olhe para as duas figuras seguintes e diga o que elas apresentam em comum:



i) Olhando ao seu redor, você consegue encontrar algum triângulo retângulo?
j) Para Platão, as verdades geométricas representam verdades eternas, eram absolutas no sentido de independerem do tempo e do ser humano. O que você pensa dessa afirmação?
k) Segundo Hogben (1970), os postulados geométricos não passam de verdades aproximadas quando aplicados ao mundo real. O que você pensa dessa afirmação?

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo

Fonte: HOGBEN (1970) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 3 – O tempo e os gregos

O tempo e os gregos

Primeiro momento: leitura individual

Segundo Hogben (1970), os primeiros homens que residiram em cidades eram animais falantes. O homem da idade da máquina é um homem calculante. Mais do que nunca vivemos imersos em um oceano de números, contas a pagar, contas a receber, horários de entrada e saída, receitas, limites de velocidade, limites de teor alcoólico, tabela de pesos, tabela de calorias, juros, medidores de pressão, medidores de diabetes, velocidade dos computadores, excessos de bagagem, multas, estatísticas, taxas bancárias, índices, impostos dentre tantos outros.

> Todas as noites, ao dar corda ao relógio, o homem moderno ajusta um instrumento científico de uma precisão e delicadeza inimagináveis, mesmo para os mais hábeis artesãos de Alexandria em sua época áurea. Mas isto todo o mundo sabe. O que, em geral, escapa à nossa atenção, é que, ao fazermos essas coisas aprendemos a valer-nos de expedientes que apresentavam tremendas dificuldades aos mais ilustres matemáticos do mundo antigo (HOGBEN, 1970, p. 22).

Comungamos das ideias desse autor quando ele defende que razões, limites, acelerações, não são abstrações distantes, pensadas por gênios solitários, mas que estas encontram gravadas em cada página de nossa existência. Algumas perguntas, que torturaram o espírito dos mais hábeis matemáticos da Antiguidade, podem ser respondidas por nós hoje sem muita dificuldade. Vejamos um exemplo:

> O filósofo Zenão intrigou os seus contemporâneos propondo-lhes uma série de quebra-cabeças, dos quais o mais comumente citado é o 'paradoxo de Aquiles e da tartaruga'. Aquiles aposta uma corrida com uma tartaruga. Corre dez vezes mais depressa que ela. Mas a tartaruga parte com uma vantagem de cem metros. Bom- diz Zenão- Aquiles percorre cem metros e chega ao ponto donde parte a tartaruga. Enquanto isto a tartaruga percorre um décimo o que percorreu Aquiles e fica, pois, dez metros a sua frente. Aquiles cobre estes dez metros. Entrementes a tartaruga percorre um décimo do que percorreu Aquiles, fica , portanto um metro na dianteira. Aquiles corre este metro. Enquanto isto a tartaruga percorre um décimo deste metro, isto é, um décimo adiante de Aquiles. Quando Aquiles cobrir este decímetro a tartaruga estará um centímetro a sua frente. De maneira que – conclui Zenão – Aquiles está sempre a aproximar-se da tartaruga sem jamais alcançá-la (HOGBEN, 1970, p. 23).

Atividade 1: pensando sobre o texto:

a) Faça um desenho que represente o paradoxo de Aquiles e da tartaruga.
b) Será Aquiles capaz de ultrapassar a tartaruga? Se responder não, justifique a sua resposta. Se responder sim, diga em que ponto Aquiles alcança a tartaruga.

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: HOGBEN (1970) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 4 – A quantificação do espaço

A quantificação do espaço[13]

Primeiro momento: individual
Atividade 1: leitura

> A geometria não surgiu 'plana', definida por pontos, retas, semi-retas, e sim a partir da observação e análise dos movimentos naturais. Em nosso dia a dia, não vemos na natureza cubos perfeitos, triângulos eqüiláteros passeando na rua, ângulos retos observáveis em qualquer esquina - até porque 'esquina' é uma criação humana. Então de onde vem tudo isso de que tratamos no estudo da geometria? (LIMA; MOURA, 2001)

Atividade 2: observando a natureza
Desenvolvimento da atividade:

- recolher da natureza objetos e trazer para a classe. Observar o objeto e descrevê-lo, a partir de todos os sentidos, e desenhá-lo em seu caderno;
- envolver o objeto em papel alumínio e proceder da mesma forma que anteriormente;
- colocar os objetos no retroprojetor e descrevê-lo novamente;
- afastar e aproximar os objetos do retroprojetor e descrever o que acontece;
- rotacionar os objetos no retroprojetor e descrevê-los novamente;
- desenhar a sombra do seu objeto no computador.
- Agora responda:

a) que diferenças podemos observar nas três mudanças ocorridas com o objeto trazido para a sala de aula: ao natural, embrulhado no papel alumínio, no retroprojetor e no computador?
b) o que define os contornos de um objeto e o distingue de outros objetos?
c) como podemos definir "forma plana"?

Segundo momento: refaça as atividades em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: FERREIRA, E. M.; SOUSA, M. C. O Ensino de geometria nas séries iniciais. Disponível em: <http://www.lite.fe.unicamp.br/papet/2002/fp255/ t_geo.htm>. Acesso em: 17 fev. 2013, do trabalho de formação elaborado pelo CTEAC 2001 – organizado por LIMA, L. e LANNER DE MOURA. A. R. e Diário de campo da pesquisadora.

---

[13] A AE 4 é uma adaptação da adaptação feita por FERREIRA, E. M.; SOUSA, M. C. **O Ensino de geometria nas séries iniciais.** Disponível em: <http://www.lite.fe.unicamp.br/papet/2002/fp255/ t_geo.htm>. Acesso em: 17 fev. 2013, do trabalho de formação elaborado pelo CTEAC 2001 – organizado por LIMA, L. e LANNER DE MOURA. A. R.

- AE 5 – Primeiros passos na arte de medir

Primeiros passos na arte de medir[14]

Primeiro momento: individual

Atividade 1: como você caracterizaria o homem da "Velha Idade da Pedra"?
Atividade 2: leitura do texto: o tempo e a distância

Para Hogben (1952), conquistar o tempo e a distância marcou o inicio da ciência, já que significou a espécie de conhecimento de que precisamos para seguir o curso das estações e para encontrar o nosso lugar no mundo em que habitamos. Não há como separar o tempo e a distância, uma coisa depende da outra, todas as medições de tempo dependem de medições no espaço, e a localização no espaço depende de medições do tempo. Para muitos, a matemática teve início quando surgiram pessoas com dedicação para brincar com números e figuras. Corroboramos as ideias de Hogben (1970), segundo o qual, é errôneo imaginar que a matemática foi obra de atenienses folgados e sonhadores, atraídos pela absoluta inutilidade dessa ciência.

Antes mesmo do começo da história escrita, existiam realizações sociais da humanidade mais importantes do que a perfeição das machadinhas e de pontas de flechas. Hogben (1952) cita três descobertas, que, para ele, são particularmente significativas, às quais o homem foi levado muito antes de amanhecer da civilização no Egito, na Suméria, ou no Turquestão. Com o auxílio de cachorros o homem passou de caçador a pastor. "Colecionou pepitas de ouro e pedaços de ferro meteórico, e talvez tenha observado a formação do cobre a partir do pigmento verde que usava como adorno. Quando esse pigmento era aquecido no borralho" (HOGBEN, 1952, p. 5). Domesticou o carneiro, animal de fertilidade periódica, o que facilitava as colheitas de cereais, em sua maioria anuais.

Com isso o homem sentiu a necessidade de marcar a passagem do tempo e, aprendendo a registrar a passagem do tempo, o homem aprendeu a medir as coisas e a narrar acontecimentos passados. De acordo com Hogben (1952), as artes de escrever, de construir, de contar e, em particular, a geometria nascem assim do conhecimento das estrelas e do cálculo pela sombra e constituem o primeiro grande subproduto da primeira realização organizada do homem: a organização do calendário. Logo, quando o homem começou a fazer planos antecipados para a estações, e isso exigiu um corpo organizado de observações contínuas e registros permanentes da periodicidade, teve início a ciência,

> Os primeiros problemas geométricos surgiram da necessidade de um calendário destinado a regular as sequências estacionais da agricultura organizada. A periodicidade das estações era reconhecida por meio da construção de monumentos em linha com o nascer e o por do sol e a passagem pelo meridiano de corpos celestes (HOGBEN, 1952, p. 6).

O que faríamos sem o relógio? Por onde nos guiaríamos? "Antes da existência dos relógios, ou de dispositivos mais simples, como a ampulheta ou a clepsidra, para o registro da passagem do tempo, a Humanidade tinha de depender da direção dos corpos celestes, - o Sol durante o dia, e as estrelas durante a noite" (Hogben, 1952, p. 8). De acordo com Hogben (1952), a necessidade do registro do tempo fez com que a humanidade traçasse um mapa dos céus antes de traçar a cartografia da Terra, fez com que os homens aprendessem a ler ângulos, fundamento necessário à contagem do tempo, antes de assentarem os padrões de comprimento ou área. Entre os começos da vida citadina e o tempo em que os seres humanos começaram a semear o milho e criar carneiros, dez ou 20 mil anos devem ter sido ocupados em perscrutar os céus noturnos e em observar a sombra produzida pelo Sol, através das estações.

> Quase todos os povos primitivos sabiam reconhecer as estações, observando quais as primeiras constelações que se viam nascer logo após o pôr do sol, e

[14] Atividade de ensino baseada nas atividades de Ensino de LANNER DE MOURA, A. L. **Medindo a sombra**. Disponível em: <https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCoQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.lite.fe.unicamp.br%2Fpapet%2F2002%2Ffp255%2Ft_sombra.doc&ei=N-hcVbe0CoavggS7iYGwDw&usg=AFQjCNEhCTwUFiGOip67rbhNe-sWckOa2w&sig2=9Xjq1MLrhWG2onsMXMi8fw>. Acesso em: 17 fev. 2013.

> também contar o número de luas transcorridas entre as estações secas e chuvosas. Os Egípcios, antes de 4000 a. C., já haviam fixado a duração do ano em 365 dias, e o fizeram contando os dias transcorridos entre duas ocasiões sucessivas em que se vai a estrela do cão, Sirius, nascer antes do arrebol (HOGBEN, 1970, p. 45).

Segundo Hogben (1970), o homem primitivo via a morte e o nascer, o sono e o despertar, a fertilidade e a decadência refletirem-se no firmamento mutável. A sombra solar anunciava o período de sementeira, de plantio e de colheita. Há cinco mil anos os sacerdotes caldeus já sabiam prever eclipses e se valiam disso mais para mandar do que para servir. Uma estação do ano pode ser separada da outra por acontecimentos naturais, seca ou chuva, frio ou calor. No entanto não conseguimos separar horas e minutos por acontecimentos naturais, suas medições são feitas à régua, medições essas que podemos fazer com maior ou menor grau de precisão:

> A necessidade de medições exatas surgiu, naturalmente, da prática de registrar o tempo, pré-requisito essencial da vida metropolitana. É quase certo que o homem aprendeu a medir ângulos muito antes de se dar incômodo de medir comprimento (HOGBEN, 1970, p. 54).

Desde a mais remota Antiguidade os babilônios sabiam como traçar o ângulo de 60 graus e fazia isso inscrevendo um hexágono regular em um círculo qualquer, e a facilidade em se traçar o ângulo de 60 graus, segundo Hogben (1970, p. 64), “permite que imaginemos a razão da escolha da hora como unidade de tempo”. Talvez a maneira simples de se traçar, desde a Antiguidade, um ângulo de 60 graus permite que imaginemos a razão da escolha da hora como unidade de tempo. A divisão do dia de trabalho, pela direção da sombra solar, em intervalos não separados por nenhum fenômeno natural, depende da escolha de uma unidade angular com que se possa calibrar o relógio de sombra. Em uma hora, a Terra descreve, em torno de seu eixo, um ângulo de 3.600 : 24 = 150. Sabiam também traçar um ângulo reto e faziam isso emendando três segmentos de corda de comprimentos proporcionais a 3, 4 e 5.

Segundo Hogben (1970), o homem neolítico construía monumentos como o chamado obelisco para medir a sombra solar cuja periodicidade permitia organizar suas atividades durante o dia. A necessidade de medições exatas surgiu, naturalmente, da prática de registrar o tempo. Segundo o comprimento da sombra, podia estabelecer, aproximadamente, o momento do dia.

Para orientar-se e medir o tempo, o egípcio não contava com mais dados do que os caçadores e os coletores de alimentos de épocas passadas: o nascer e o pôr do Sol, a Lua, as estrelas, a sombra solar e a rotação de um conjunto de estrelas ao redor da estrela polar, durante a noite. No entanto, após anos de cuidadosas anotações, conseguiram melhorar o uso desses dados. Um caçador primitivo, ao ver a sombra de uma árvore, avaliaria o tempo somente de forma qualitativa, dizendo: “ainda é muito cedo”. O egípcio, diante do relógio de Sol que media o comprimento da sombra sobre um pedaço de madeira graduado com marcas, olharia e diria: “Estamos entrando na quinta hora do dia”.

Vários documentos, afirma o mesmo autor, revelam como se fixou a localização exata da sombra do meio-dia. Na terra que rodeava o obelisco traçou-se, com o auxílio de um pedaço de corda, uma circunferência. Depois, marcaram-se os dois pontos em que a sombra tangenciava a circunferência. Nesses dois pontos as sombras têm o mesmo comprimento e são, portanto, simétricas em relação à sombra do meio-dia. Traçou-se a bissetriz do ângulo formado pelos dois pontos, primeiramente, unindo-os por uma corda e dobrando-a ao meio, mais tarde, traçando-se arcos de raio idêntico, com centro nos dois pontos. A bissetriz corresponde à posição da sombra do meio-dia e ao eixo norte-sul. O eixo perpendicular a este corresponde ao eixo leste-oeste.

Por muitos milênios o homem contentou-se com usar grosseiras unidades anatômicas de comprimento para a maior parte das finalidades práticas. Os povos semitas usavam o cúbito, distância que ia da ponta do dedo médio ao cotovelo, do mesmo modo que os lavradores ainda usam os passos para medir os campos em metros. Para os fins ordinários, contentavam-se com uma unidade de comprimento variável de indivíduo para indivíduo. A construção dos templos exigiu uma precisão muito maior, e o construtor foi buscá-la na arte muito antiga de medir a sombra solar que nasceu nos climas iluminados em que começou a civilização.

Calculavam-se as alturas pelo comprimento da sombra e pelo ângulo formado pelo Sol com o horizonte. As primeiras descobertas matemáticas pertencem a essa classe de problemas. Como já vimos desde a mais remota Antiguidade, os babilônios sabiam como traçar o ângulo de 60 graus inscrevendo um polígono de seis lados iguais num círculo qualquer.

Dado a importância que esses conhecimentos tiveram para o desenvolvimento da geometria, da medida e do número, propõem-se atividades que considerem essa dinâmica dos conceitos.

Atividade 3: observar o nascer e o pôr do Sol e desenhar a posição de sua casa relativa a esses pontos;
Atividade 4: fazer o registro e o desenho da variação da sombra de um objeto colocado na vertical, durante um dia. Explicar como mediu a sombra do objeto;
Atividade 6: observar os ângulos formados pela variação da sombra no plano dos eixos dos pontos cardeais;
Atividade 7: observar as posições simétricas formadas pelas sombras e desenhar as respectivas circunferências concêntricas;
Atividade 8: observar e desenhar os triângulos formados pelo objeto, pela sombra deste e pelo segmento que une a extremidade do objeto ao ponto extremo da sombra. Comparar os vários triângulos formados, discutir suas relações numéricas;
Atividade 9: o que ocorreria se repetíssemos essas atividades mensalmente;
Atividade 10: leitura do primeiro capítulo de Hogben (1952).

Segundo momento: discuta os resultados das atividades 3,4,5,6,7,8,e 9 em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: HOGBEN (1952), HOGBEN (1970), LANNER DE MOURA, A. L. Medindo a sombra. Disponível em: <https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCoQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.lite.fe.unicamp.br%2Fpapet%2F2002%2Ffp255%2Ft_sombra.doc&ei=N-hcVbe0CoavggS7iYGwDw&usg=AFQjCNEhCTwUFiGOip67rbhNe-sWckOa2w&sig2=9Xjq1MLrhWG2onsMXMi8fw>. Acesso em: 17 fev. 2013 e Diário de Campo da pesquisadora.

- AE 6 – Sulbasutras

Sulbasutras
Primeiro momento: individual **Atividade:** leitura do texto "Um estudo sobre áreas em um curso de formação de professores tomando como ponto de partida a história da Matemática indiana no período dos Sulbasutras", de autoria de Maria Terezinha Jesus Gaspar (GASPAR, 2004). **Segundo momento: atividades em pequenos grupos.** Dividir a turma e o texto em três grupos, cada grupo ficará responsável por uma parte do texto. Cada grupo justificará, com base na geometria euclidiana axiomática, as construções geométricas encontradas nos sulbasutras e trazidas no texto de Gaspar (2004). Para fazer as justificativas, os grupos deverão usar o livro texto da disciplina (FRANCO; GERÔNIMO, 2010). **Terceiro momento: discussão com toda a turma.** As equipes apresentarão os resultados obtidos no segundo momento e as discussões serão abertas para toda a turma. **Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.**

Fonte: GASPAR (2004), FRANCO; GERÔNIMO (2010) e Diário de Campo da pesquisadora.

- AE 7 – A geometria grega

A geometria grega

Primeiro momento: individual
Atividade 1: leitura do texto.
Para muitas pessoas, Euclides é considerado o pai da geometria euclidiana, no entanto os primeiros problemas geométricos foram anteriores a Euclides ou Tales, eles têm origem nos primeiros registros de algumas civilizações feitos por homens e mulheres quando se atreviam a olhar para o céu e tentavam compreender o espaço em que viviam.

> A pré-história da atividade produtiva do homem, do pensamento e da linguagem começou com o aparecimento do *homo sapiens* por volta do ano 50000 a.C. e com a formação das sociedades primitivas iniciada nesta época e que durou aproximadamente até o ano 10000 a.C.. Tais homens assemelhavam-se, biologicamente, ao homem moderno, viviam da caça, fabricavam e utilizavam instrumentos e utensílios variados como anzóis, arpões, arco e flecha, etc, [...] Esse homem primitivo, na contínua luta com a natureza que o rodeava, obteve seus primeiros conhecimentos matemáticos e astronômicos (GASPAR, 2003, p. 45).

De acordo com Gaspar (2003, p. 46), depois de um período de transição de 10000 a.C. a 5000 a.C., as populações se tornaram mais sedentárias, surge então uma nova cultura, a neolítica, e “uma economia que era baseada na caça e coleta começa a ser substituída pela agricultura e criação de gado surgindo neste momento a primeira divisão social do trabalho” (GASPAR, 2003, p. 46).
Segundo Eves (2011, p. 52), perto do final da Idade da Pedra as vastas savanas, onde os caçadores viviam, começaram a se contrair, em alguns lugares, as florestas em expansão começaram a invadir as savanas, em outros lugares estas se tornaram áridas e sem vida, transformando-se em deserto. De acordo com o mesmo autor (2011, p. 52), no norte da África, do Oriente Médio e da Ásia Central a transformação não foi tão simples. A vegetação murchava, os ribeirões secavam, dunas de areia enormes se formavam, os animais deixavam as regiões, abrindo caminho para algum oásis. E os homens seguiam os animais em fuga, estabelecendo-se às margens dos desertos em regiões úmidas semelhantes a oásis, esses novos lugares eram denominados cisternas.
De acordo com Eves (2011, p. 52), na África, com o avanço do deserto do Sahara, o vale do rio Nilo oferecia água para os animais e para os caçadores humanos. No Oriente Médio, os rios Tigres e Eufrades formavam uma cisterna para aqueles que fugiam do deserto árabe. O vale do rio Indo, na periferia do deserto de Thar na Índia e o vale do rio Amarelo na China, no deserto de Gobi, também serviam de cisternas. Nas Américas com a seca da planície costeira do Pacífico, os povos escalaram os altos picos da serra Madre no México e América Central e os Andes no Peru e na Colômbia.
Segundo o autor, as densidades populacionais dessas cisternas tornaram-se altas demais e não era mais possível viver apenas como caçadores e colhedores. Isso representou, de acordo com o mesmo autor, uma espécie de revolução agrícola, que significou profundas modificações culturais, uma dessas foi a escrita, outra foi o cultivo da terra que levou à irrigação dos vales do norte da África e do Oriente Médio onde a chuva era muito escassa, construção de barragens nas cheias dos rios Amarelo, Nilo, Tigre e Eufrades, bem como anotações acerca de calendários que ajudavam a observar períodos de seca e chuva.

> Os agricultores rezavam aos deuses para que as cheias e as chuvas pudessem vir conforme as tabelas e, no processo, observavam o movimento das estrelas. Todas essas atividades deram origem a novas classes de homens educados: sacerdotes, escribas e astrólogos (EVES, 2011, p. 53).

Por volta de 4000 a.C. surgiram povoados mais evoluídos, assentados às margens dos grandes rios da Ásia e África (Nilo, Tigre, Eufrates, Indo, Ganges, Huang Ho e Yang Tse). Com o aperfeiçoamento da agricultura intensiva houve a melhora do padrão de vida dessas populações e surgiu uma aristocracia urbana, responsável pela arte de dividir campos, armazenar alimentos, analisar o movimento dos astros, etc. “A civilização mesopotâmica é provavelmente a mais antiga civilização do mundo, começou por volta de 3500 a.C. nos vales dos rios Tigres e Eufrades" (GASPAR, 2003, p. 46).

> Com relação ao conhecimento geométrico este revela sua origem prática: juntamente com o cálculo de áreas de campos aparecem cálculos dos rendimentos totais dos terrenos, dependentes de um rendimento específico, que é função da qualidade do solo. No cálculo de taludes com perfil trapezoidal está também calculado o número de trabalhadores necessários por jornada média de trabalho. Aparecem também cálculos relativos à construção de tabiques com forma de anel, de alicerces de templos, poços e canais. Existe evidência de que os babilônios estavam familiarizados com regras para calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular às bases (GASPAR, 2003, p. 52).

Segundo Gaspar (2003), não há na matemática babilônica nenhum teorema e nenhuma prova explícita, no entanto é possível perceber, além do interesse teórico encontrado, por exemplo, na tábula Plimpton 322[15], sinais do uso de inter-relações entre álgebra e geometria. E os trabalhos dos babilônicos acerca do Teorema de Pitágoras e de semelhança de triângulos "anteciparam aos trabalhos gregos em mais de 1000 anos" (GASPAR, 2003, p. 53).
De acordo com Gaspar (2003), a agricultura surgiu no vale do Nilo em torno de 6000 a.C. e os primeiros egípcios se fixaram às margens do Nilo, por volta de 4000 a.C.

> Os primeiros problemas geométricos surgiram da necessidade de um calendário destinado a regular as sequências estacionais da agricultura organizada. A periodicidade das estações era reconhecida por meio da construção de monumentos em linha com o nascer e o por do sol e a passagem pelo meridiano de corpos celestes (HOGBEN, 1952, p. 6).

E o que fizeram os homens? Elaboraram calendários, deixaram de ser sedentários e construíram as primeiras cidades: Ur (3000 a.C.) – no vale do Tigre e Eufrades, Mênfis e Tebas (metrópoles líderes do Egito) e Heracleópolis (?-c 2200 a. C.) no Egito.
De acordo com Eves (2011), as ciências egípcias e babilônicas estagnaram durante séculos, concomitantemente com as migrações e guerras que marcaram a passagem da Idade do Bronze para a Idade do Ferro. Por volta de 900 a.C. os Impérios Minóicos, Micênicos, Hititas, Egípcios e Babilônicos desapareceram ou estavam reduzidos. Não só o uso do ferro pode ser citado como mudança importante dessa época, mas também o aparecimento e a fixação de novos povos como os hebreus, assírios, fenícios e gregos. Houve o aparecimento das cidades-estado gregas. A mais importante foi Mileto, seguida posteriormente por Corinto, Atenas, Crotona, Tarento e Siracusa.
Eves (2011, p. 94) afirma que com o aparecimento dessa nova civilização, espalhada ao longo das costas da Ásia Menor, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália, a visão "estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável, e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar como e por quê" (EVES, 2011, p. 94).
Segundo Brito (1995, p. 29), os gregos, ao apropriarem-se dos conhecimentos dos antigos povos do Oriente e isolarem a linha, o ângulo e o ponto, acreditaram que haviam chegado a elementos imutáveis, exteriores ao tempo e, portanto, eternos. Ainda segunda a autora, para os gregos, os entes geométricos só poderiam ser de uma maneira o que eram, só podiam exibir de uma maneira o que eram e só podiam oferecer-se ao conhecimento inteligível de uma maneira. Diferentemente dos entes físicos como a água, que apesar de ser único, podia se manifestar no estado sólido, líquido e gasoso. "Para os gregos, a geometria era o conhecimento racional do universo, e devido a isto, identificava-se com ele com sua verdade e com sua unicidade. Daí também conclui-se que, para eles, a forma como a geometria estava organizada era a única possível" (Brito, 1995, p.30).
De acordo com Bicudo (2009, p. 83), um dos capítulos importantes, e pouco conhecido, da história cultural é a transformação do conhecimento empírico de "egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas".
Uma leitura descuidada dos livros de história da matemática pode levar as pessoas a acreditar que toda a geometria nasceu das ideias de um gênio, denominado Euclides.

[15] "O nome indica que se trata da tábula da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C.) e os primeiros a descrever seu conteúdo foram Negebauer e Sachs em 1945" (EVES, 2011, p. 63).

> Quem se achegue descuidadamente a essa história terá a impressão de a geometria ter nascido inteiramente radiante da cabeça de Euclides. [...] Tal foi o êxito dos seus Elementos no resumir, corrigir, da base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros do que o precederam (BICUDO, 2009, p. 83).

No entanto, afirma Bicudo (2009, p. 84), não se pode negar que a noção de ciência dedutiva era desconhecida dos povos orientais da Antiguidade, não havia definições, axiomas e teoremas.

> Ao herdarem esse conhecimento – Heródoto, Aristóteles e Eudemo afiançam-nos ter a geometria sido importada do Egito – por que os gregos não se contentaram com o seu fundamento empírico? Por que substituíram a coleção existente das receitas matemáticas por uma ciência dedutiva sistemática? O que os levou a confiar mais no que podiam demonstrar do que naquilo que podiam 'ver' como correto? Por que a transformação no critério de verdade ali usado, trocando a justificativa baseada na experiência por aquela sustentada por razões teóricas? (BICUDO, 2009, p. 84).

Para o autor, a influência de Platão foi decisiva para a moldagem dessa nova configuração de matemática, uma vez que a mudança resultante está intimamente associada ao caráter idealista e antiempírico da filosofia platônica. Segundo Eves (2011, p. 132), a importância de Platão na matemática se deve

> [...] à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal. Isso explica o famoso lema à entrada da Academia: *'Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria'*.

Segundo Bicudo (2009, p. 87), os matemáticos daquela época, que estavam associados à academia, possuíam uma concepção de matemática como uma ciência dedutiva e compreendiam que não havia necessidade de demonstrarem os seus princípios.

> Então, segundo Szabó, os matemáticos chegaram à conclusão de que não precisavam (e não podiam) demonstrar os princípios da sua ciência pela prática da dialética. Estariam habituados com o fato de que, quando um dos debatedores queria provar algo para os outros, limitava-se a começar a partir do que tinha sido convencionado verdadeiro por todos os participantes (BICUDO, 2009, p. 87).

Assim, podemos inferir que nasceu a matemática, como uma ciência dedutiva, arquiteta por meio de conceitos, axiomas, postulados e teoremas.

> Os conceitos não definidos são chamados *conceitos ou termos primitivos* e todos os outros, *conceitos ou termos derivados.* As proposições admitidas sem demonstração são ditas *axiomas* (hoje não se faz qualquer distinção entre *postulado* e *axioma*), e as demais, demonstradas, *teoremas* (BICUDO, 2009, p. 83).

Para Eves (2011, p. 179), uma das grandes contribuições dos matemáticos gregos foi a criação da forma postulacional de raciocínio.

> A fim de se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma consequência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se, ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não demonstradas para evitar imperdoáveis círculos viciosos (EVES, 2011, p. 179).

De acordo com Eves (2011), os primeiros séculos da matemática grega começaram com os esforços de Tales por um geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminaram na obra *Os Elementos*, organizada por Euclides (por volta de 300 a.C.). No entanto, de acordo com Nobre (2004, p. 537), acerca da existência de Euclides pairam diversas dúvidas, o lugar onde ele viveu não é consenso entre os historiadores e o que sabemos sobre ele está baseado em informações

fornecidas por terceiros, como Proclus, que viveu cerca de sete séculos após o possível período em que Euclides viveu. As únicas informações da obra *Os Elementos* são traduções, já que o texto original é considerado perdido. Essa obra é fundamentada em axiomas (noções comuns) e postulados, que são verdades aceitas sem demonstração.
Os cinco axiomas que se encontram na obra *Os Elementos* são:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES, 2009, p. 99).

E os cinco postulados são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Os cinco postulados em uma linguagem atual teriam os seguintes enunciados:
1. Dois pontos distintos determinam uma reta.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada, é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.
3. É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Dados um ponto P é uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.

Atividade 2: os cinco postulados encontrados na obra *Os Elementos* podem ser considerados equivalentes aos cinco postulados em linguagem atual? Por quê?
Atividade 3: para você, a reta, o ponto e o ângulo podem ser comparados aos entes físicos? Ou seja, os entes geométricos só podem ser de uma maneira, só podem ser exibidos de uma maneira e só podem oferecer-se ao conhecimento inteligível de uma maneira?
Atividade 4: os cinco axiomas, encontrados na obra *Os Elementos*, continuam válidos? Por quê?
Atividade 5: você conhece alguma geometria em que pelo menos um dos cinco postulados não seja válido? Qual é a geometria e qual, ou quais, postulados não são válidos?
Segundo momento: refaça as atividades em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: GASPAR (2003), EVES (2011), HOGBEN (1952), BRITO (1995), BICUDO (2009), NOBRE (2004), EUCLIDES (2009) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 8 – Medindo alturas inacessíveis

Medindo alturas inacessíveis

Primeiro momento: individual
Atividade 1: leitura
Segundo Mendes (2009), foram os gregos que efetivaram concretamente a medição da altura de objetos a partir de sua sombra. “Tal experiência tem sua prática atribuída a Tales de Mileto. Aproximadamente por 600 a.C. ele se encontrava no Egito e foi abordado pelos escribas egípcios (estudiosos da época), para que, em nome do Faraó, calculasse a altura de uma pirâmide de base quadrangular” (Mendes, 2009, p.141). Segundo Eves (2011), há duas versões de como Tales teria calculado a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombras. Uma seria um relato mais antigo, dado por Hierônimos, discípulo de Aristóteles; segundo ele, Tales teria se apoiado em uma vara e esperado até o momento que, em plena manhã, a sombra da vara, estando na vertical, tivesse comprimento igual ao da própria vara. “Disse, então, a um deles: “*Vá, meça depressa a sombra, pois seu comprimento é igual a altura da pirâmide*” (Mendes, 2009, p.141). Outra versão, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente a vara e fez uso da semelhança de triângulos. “Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide” (Eves, 2011, p. 115). Para completar o processo, segundo Mendes (2009), foi preciso acrescentar metade da medida do comprimento da base, pois, sendo a pirâmide muito grande, ela escondia uma parte da sombra da pirâmide.
Atividade 2:
a) faça dois desenhos para representar os dois relatos de como Tales teria calculado a altura de uma pirâmide egípcia;
b) existe alguma relação entre a maneira com que Tales pensou e atividade que vocês realizaram de medir a sombra de um objeto durante um dia?
c) poderíamos aproveitar as medidas utilizadas naquela atividade? Se sim, de que maneira? Se não, quais os motivos?
d) refaça um dos desenhos representados no Globo Terrestre;
e) o método é válido matematicamente?

Atividade 3:
a) na sua cidade escolha um objeto a ser medida a altura;
b) escolha um bastão de altura conhecida e procure observar as medidas do bastão e do objeto escolhido simultaneamente em diferentes horas do dia. Registre com máquina fotográfica as sombras;
c) transfira as fotos para o Geogebra e marque as medidas conhecidas o os triângulos retângulos formados;
d) você encontrou a altura do objeto?
e) enuncie o Teorema de Tales e explique qual a relação dele com o pensado por Tales para medir a altura da pirâmide;
f) surgiu algum imprevisto durante a realização da atividade? Quais poderiam ter surgido?

Atividade 4: vamos imaginar a situação descrita por Mendes (2009), “... o que faria um homem para medir a altura de um objeto em um dia nublado ou chuvoso. Qual seria a alternativa para solucionar tal problema?” (MENDES, 2009, p. 149). Segundo o mesmo autor, foi para resolver casos como esses o que provocou o desenvolvimento de inúmero mecanismos de medição e levou o homem a estabelecer medidas para distâncias consideradas inacessíveis. “Quando exércitos do passado, como o do Império Romano e o de Napoleão, chegavam a um rio ou canyon, tinham que derrubar árvore para servirem de pontes. Eles necessitavam saber com precisão razoável a altura da árvore e a largura do espaço a ser cruzado. Qualquer pessoa que precise derrubar uma árvore deve saber sua altura, para ficar em local seguro quando ela cair” (MENDES, 2009, p. 170). Mendes (2009) nos desafia a calcular a largura de um rio sem molhar os pés e a altura de uma árvore sem subir para medir. Vamos conhecer os métodos propostos por Mendes (2009, p. 170-174).
Atividade 5: você conhece uma maneira de medir uma altura desconhecida, diferente das apresentadas nas atividades anteriores?
Atividade 6: leitura
Vimos que conta a história que Tales foi desafiado a medir a altura de grande pirâmide de Queóps. Construída por volta de 2500 a.C., é considerada uma das grandes maravilhas do mundo antigo; sua base é um quadrado cujos lados medem cerca de 230 m e sua altura é de 150 m, aproximadamente.

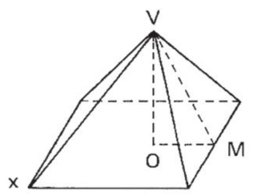
Existem dois relatos de como Tales teria calculado a altura da pirâmide. Teria Tales conseguido medir a altura de tal pirâmide?
Fontana (2011) levanta dúvidas acerca dos relatos tradicionais e aponta alguns motivos:

> 1.1. a história pode ter sido fruto da criação de autores helenistas;
> 1.2. existem divergências entre os relatos que nos servem de fontes dessa história; e
> 1.3. exigem-se condições muito propícias a fim de se efetuar a referida medição utilizando os conhecimentos matemáticos da época (FONTANA, 2011, p. 24).

Dentre os dois relatos que podemos encontrar acerca da medida da altura da pirâmide, Fontana (2011) prefere a primeira versão e justifica a sua escolha, argumentado que a primeira versão é mais intuitiva e mais concordante com o conhecimento de um jônio do século VI a.C.

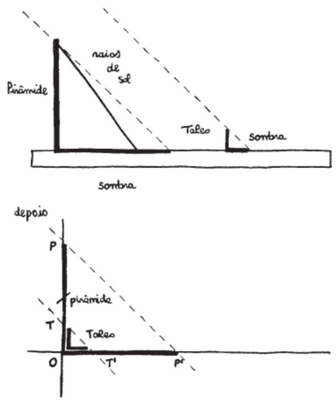
> A segunda versão, além de envolver o conceito de triângulo, atribui um conhecimento mais complexo a Tales, a saber, que a altura da pirâmide está para o comprimento da sua sombra, exatamente como a altura de qualquer objeto vertical mensurável está para o comprimento da sua sombra no mesmo momento do dia (FONTANA, 2011, p. 27).

Segundo Fontana (2011), as pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (med (OMV)) fosse constante – aproximadamente 52°, assim, Tales poderia ter utilizado o *seqt*, uma importante ferramenta de cálculo da matemática egípcia, que é mencionado por quatro vezes no papiro de Rhind, e calculado a medida da altura da pirâmide sem recorrer a qualquer sombra. “O *seqt* do âsgulo OMV é a razão entre OM e OV e, portanto, corresponde à ideia atual de cotangente” (FONTANA, 2011, p. 28).



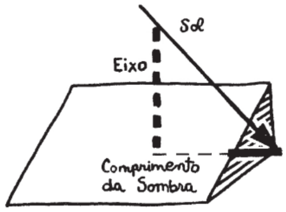
Fonte: FONTANA (2011)

De acordo com Fontana (2011), o relato de Plutarco faz sentido, ou seja, é possível calcular a altura da pirâmide da maneira com que ele descreve. No entanto, essa medição não é obtida facilmente, já que a pirâmide não é um corpo delgado, mas ela é mais larga embaixo. “A figura 2 mostra como Tales pode ter imaginado as linhas geométricas que permitiriam o cálculo da altura da pirâmide” (FONTANA, 2011, p. 29).



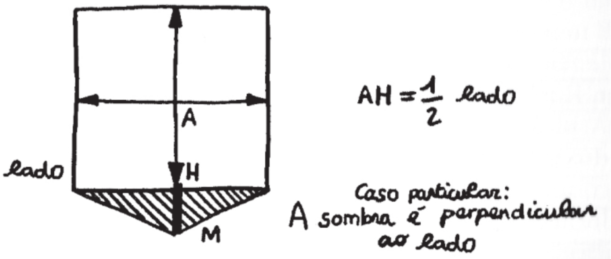
Fonte: FONTANA (2011)

“A situação real, portanto, que deveria ocorrer a fim de possibilitar o tipo de solução imaginada por Tales, é a mostrada pela figura 3” (FONTANA, 2011, p. 29).



Fonte: FONTANA (2011)

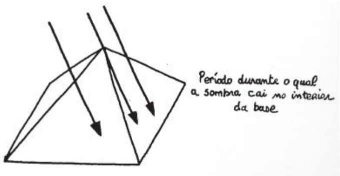
A base da pirâmide é quadrada e sua altura cai exatamente no meio dela. Assim, a distância da altura ao lado da base é metade desse lado. Logo, “era preciso somente Tales medir a um dos lados da base da pirâmide e dividir por 2 para obter o tamanho da parte inacessível (figura 4)” (FONTANA, 2011, p. 30).

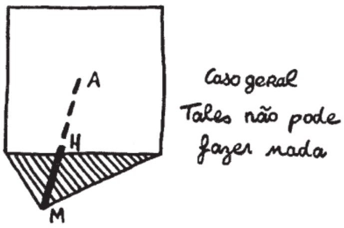


Fonte: FONTANA (2011)

Para Fontana (2011), o caso mostrado nas figuras anteriores é uma interpretação ideal sobre o fenômeno, quando a sombra é perpendicular ao lado da base.

> São raras as vezes em que, durante o ano, isto acontece de forma tão exata. Ou seja, a sombra da pirâmide pode não estar exatamente na posição que permita a realização dos cálculos, como mostra a figura 5, ou então ocorre o caso de o Sol se posicionar de tal forma que não projeta qualquer sombra, como mostra a figura 6 (FONTANA, 2011, p. 30).





Fonte: FONTANA (2011)

De acordo com o mesmo autor, para que Tales tivesse procedido à medição da altura da pirâmide, duas condições deveriam ter sido conjugadas:

> 1. a sombra aparente da pirâmide mais 1/2 do lado da base deve ser igual à altura da pirâmide, e
> 2. a sombra deve ser perpendicular à base.
>
> Quando ocorre o fato da sombra aparente da pirâmide mais 1/2 do lado da base ser igual ao seu tamanho e perpendicular ao lado de sua base? Para que a sombra seja igual ao objeto, os raios têm de estar inclinados a 45°. E para que ela seja perpendicular à base, tem de estar orientada norte-sul (FONTANA, 2011, p. 31).

Essas condições, segundo o autor, só estão reunidas em dois dias por ano: 21 de novembro ou 20 de janeiro. Ou seja,

> [...] são raros os períodos do ano em que o Sol se encontra em posição de oferecer uma sombra privilegiada para que se possa fazer as medições para se determinar, de forma um pouco mais precisa, a altura da pirâmide. Tales teria que ter passado o ano inteiro observando a pirâmide a fim de realizar tal tarefa, o que é muito improvável que tenha feito (FONTANA, 2011, p. 31).

Para Fontana (2011), o relato que descreve Tales medindo a altura de uma pirâmide no Egito foi criado posteriormente.

> Não somente apontamos problemas históricos, como também fraquezas matemáticas, envolvendo os relatos que sustentam a famosa anedota. Esse é mais um daqueles casos de relatos de viagens supostamente realizadas por sábios gregos com o intuito de adquirir conhecimento pelo mundo (FONTANA, 2011, p. 31).

Atividade 7: segundo Fontana (2011, p. 23), “Qualquer pessoa que tenha frequentado a escola até o Ensino Médio certamente conhece a história da medição da altura da pirâmide realizada por Tales de Mileto no século VI a.C. Conta-se que ele fez isso utilizando um teorema geométrico que, posteriormente, ficou conhecido pelo seu nome: o teorema de Tales”. Você foi apresentado a essa história na educação básica? Naquele momento você conseguiu compreender a relação que o professor queria estabelecer?
Atividade 8: é importante apresentarmos essa história na educação básica? Como ela pode ser trabalhada?
Atividade 9: sabendo que na pirâmide de Queóps sua base é um quadrado cujos lados medem cerca de 230 m e sua altura é de 150 m, aproximadamente, podemos calcular seu volume?
Atividade 10: com os dados acima, conseguiríamos calcular a área lateral da pirâmide de Queóps?
Atividade 11: apresente uma planificação, reduzida e proporcional, para a pirâmide de Queóps? Essa é a única possível?
Atividade 12: se você construísse uma pirâmide com a planificação que você fez na atividade 11, qual seria o volume dessa pirâmide? Qual seria a área lateral dessa pirâmide? Existe alguma relação com o volume e a área lateral da pirâmide de Queóps?
Atividade 13: imagine que construíssemos a pirâmide da atividade 11 de massa de modelar e em seguida resolvêssemos transformar a pirâmide em um cubo. Qual seria o volume desse cubo? Poderíamos determinar a área lateral desse cubo?

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: MENDES (2009), EVES (2011), FONTANA (2011) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 9 – A medida e o tijolo

A medida e o tijolo[16]

Primeiro momento: individual

O tijolo é usado nas construções em larga escala. Assentando vários deles em diferentes formas, obtemos casas, edifícios, muros e outras edificações bem variadas. A principal utilidade do tijolo é a de que pode ser combinado em grandes quantidades para a construção de diferentes formas. Temos, então, a combinação harmônica de dois contrários. Com vários tijolos iguais podemos construir várias formas diferentes. Com o tijolo o homem criou o que chamaremos de composição homogênea. Composição homogênea é a combinação de vários elementos iguais que resulta diferentes qualidades. Mas o movimento de composição sugere o seu contrário, a decomposição.

Atividade 1: fazendo composições

Tome seis tijolos do mesmo formato e tamanho, em seguida faça todas as combinações possíveis (usando todos) entre eles, desenhando-as:

Atividade 2: composição com tijolos

a) com os mesmos tijolos anteriores, construa um novo tijolo. Recubra-o com papel sulfite e desenhe-o novamente, também nas posições possíveis;
b) marque bem os vincos no papel e abra-o cuidadosamente. Observe o desenho registrado no papel sulfite e reproduza-o;
c) a que conclusão podemos chegar? Quais conceitos podem ser explorados?

Composição, decomposição e volume

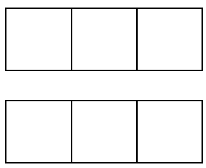
Com seis tijolos podemos fazer uma edificação. Sabemos que esta ocupa uma quantidade de espaço de seis tijolos. Na quantidade de seis tijolos podemos ver a qualidade a que damos o nome de volume. E, ao dizermos que esse volume é de seis tijolos, estamos numeralizando uma grandeza usando outra – o tijolo – como unidade padrão de medida.

Observe que, quando o homem inventou o tijolo,

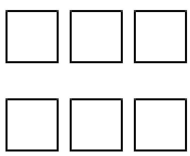
1. descobriu uma qualidade das coisas, o espaço, ou volume;
2. inventou a medição do volume;
3. e inventou a medição feita na própria composição, a medição por composição.

Do volume à área

Se observarmos, por exemplo, uma edificação com 18 tijolos organizados em 3 placas de 3 colunas por 2 linhas, poderemos perceber que, ao separarmos do todo apenas uma dessas partes e a visualizarmos de cima, poderemos ter a seguinte combinação: uma placa com 3 colunas e 2 linhas.



Essa figura que vemos de cima é uma superfície. Ela é composta por superfícies iguais às dos tijolos. Se fizermos sua decomposição, teremos:



[16] A AE 9 é uma adaptação da adaptação feita por FERREIRA, E. M.; SOUSA, M. C. **O Ensino de geometria nas séries iniciais.** Disponível em: <http://www.lite.fe.unicamp.br/papet/2002/fp255/t_geo.htm>. Acesso em: 17 fev. 2013, do trabalho de formação elaborado pelo CTEAC 2001 – organizado por LIMA, L. e LANNER DE MOURA. A. R.

Podemos fazer a contagem das superfícies de tijolos, usando o princípio multiplicativo: trata-se de 3 colunas e 2 linhas, então, 3 x 2= 6 superfícies de tijolos. Juntos ou separados, os tijolos apresentarão sempre a mesma superfície. Podemos concluir que a superfície da figura corresponde à de 6 superfícies de tijolos. Essa é a numeralização da superfície ou da área.

Da área ao comprimento

Nos momentos anteriores vimos que o volume é decomposto em superfícies, isto é, em áreas. As áreas, por sua vez, podem ser decompostas em colunas ou linhas. Tomando-se apenas as arestas dos tijolos, ou o seu contorno externo, teremos os lados da superfície que correspondem às arestas das colunas e linhas. Esses lados são chamados de largura (a coluna) e comprimento (a linha) e foram compostos a partir das arestas dos tijolos. Juntas ou separadas, essas arestas apresentarão sempre o mesmo comprimento. Podemos numeralizar os lados e extrair daí a sua qualidade comprimento.

Observe que o homem, quando descobriu o tijolo,

1. descobriu a qualidade comprimento;
2. inventou a medição do comprimento;
3. e a medição é feita tanto na composição, a medição por composição, quanto na decomposição, a medição por decomposição.

Pensando sobre o conceito de volume

Atividade 3: Construa com tijolos um tanque que tenha 16 tijolos de comprimento, 12 tijolos de largura e 13 de altura. Em seguida responda às questões abaixo:

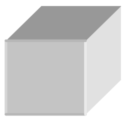
a) se completássemos totalmente o espaço interior com tijolos, quantos tijolos teríamos no total?
b) se colocássemos dentro do tanque "tijolos de água", quanto de água caberia dentro do nosso tanque?
c) qual seria o volume de nosso tanque?
d) qual é a capacidade de nosso tanque?

Metro cúbico

Doravante, quando falarmos de medidas de um tanque, nos referiremos às suas medidas internas. Não mais usaremos o nosso tijolinho como unidade de medida mas sim um tijolo abstrato que possui um metro de aresta.

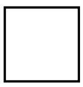
Tijolo abstrato de um metro

ou cubo de metro de aresta
ou ainda um metro cúbico



1 metro cúbico (m^3)

Sua face é um quadrado de um metro



de lado; é o metro quadrado

1 metro quadrado (m^2)

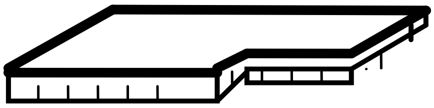
Sua aresta mede 1 m; é o metro 1 metro (m) ____ linear

Atividade 4: Separe, usando os seus tijolos para fazer um muro de uma camada, uma superfície que tenha 8 tijolos de comprimento e 6 de largura. Em seguida responda às questões abaixo:

a) se completássemos totalmente a superfície interior com tijolos, quantos deles seriam necessários?
b) qual o cálculo que você fez?
c) quantos tijolos no total teríamos no interior e no contorno?
d) qual o cálculo que você fez?
e) qual a diferença deste cálculo em relação ao anterior?
f) nos cálculos anteriores utilizamos como unidade de medida o tijolo; e, se utilizássemos como unidade de medida apenas o comprimento da aresta do tijolo?
g) quantos tijolos teríamos no total, se completássemos o interior da superfície com tijolos?
h) e quantos tijolos caberiam no contorno?
i) qual a diferença entre os cálculos feitos com essa nova unidade de medida e a anterior?

Superfície e área

Ao afirmamos que a área de uma superfície é de 21 tijolos, estamos numeralizando uma medida, usando a área do tijolo como unidade padrão de medida. O desenho ao lado é de uma superfície com as marcações feitas com a unidade de medida comprimento da aresta do tijolo; calcule a sua área em tijolos.



Atividade 5: no caso do volume havia uma diferença quantitativa quando se tomavam o espaço interno e o espaço total. Existe essa diferença na superfície, no caso entre a superfície interna e a total? Por quê?

Atividade 6: um lavrador quer cercar uma área retangular que corresponda à superfície de 48 m^2.

a) faça você a área com as medidas que achar conveniente; quais seriam elas?
b) se o lavrador desejar que essa área tenha 8 m de comprimento, qual deve ser a outra medida?
c) se o lavrador desejar que essa área tenha 4 m de largura, qual deve ser o seu comprimento?
d) se o labrador desejar aumentar a superfície para 50 m^2 ele poderá fazer isso sem aumentar a largura ou o comprimento da área retangular?
e) sempre que aumentamos a área de uma superfície, seu comprimento ou sua largura também aumentam?
f) seria possível pensarmos em formas com comprimento infinito e área nula, área infinita e volume nulo?

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: FERREIRA, E. M.; SOUSA, M. C. O Ensino de geometria nas séries iniciais. Disponível em: <http://www.lite.fe.unicamp.br/papet/2002/fp255/ t_geo.htm>. Acesso em: 17 fev. 2013, do trabalho de formação elaborado pelo CTEAC 2001 – organizado por LIMA, L. e LANNER DE MOURA. A. R. e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 10 – Conhecendo os fractais

Conhecendo os fractais

1º Momento: individual

Observar a natureza de uma forma um pouco mais precisa e criteriosa pode nos levar a perceber que nem sempre as formas da natureza seguem um padrão euclidiano. O homem percebeu, ao buscar compreender e entender mais profundamente a complexidade das formas da natureza, que esses fatos complexos não eram aleatórios, ao acaso, eles seguiam determinado padrão. O homem desenvolveu uma nova geometria, denominada de fractais.

De acordo com Gleick (1989), como as medidas euclidianas (extensão, profundidade e espessura) não abrangem a essência das formas irregulares, o homem voltou-se para a ideia de dimensão. Gleick (1989) credita a Mandelbrot a criação dessa nova geometria. Ainda segundo o mesmo autor, Mandelbrot fez com essa geometria uma afirmação sobre os padrões irregulares que estudara na natureza: a de que o grau de irregularidade permanecesse constante em diferentes escalas. Assim, os estudos sobre os padrões irregulares e as formas complexas, por meio de análises com os preços de algodão, com o ruído das transmissões eletrônicas e observação na natureza, começaram a se encaixar, ou seja, tiveram um ponto em comum: a característica de autossemelhança. Começava sua caminhada para a observação da ordem diante do caos.

> As idéias unificadoras da geometria fractal reuniram cientistas que achavam que as suas observações eram idiossincráticas e que não dispunham de uma maneira sistemática de compreendê-las. As percepções da geometria fractal ajudaram os cientistas que estudavam a maneira pela qual as coisas se fundiam, a maneira pela qual se separavam ou a maneira pela qual se fragmentavam. É um método de examinar os materiais – as superfícies microscopicamente irregulares dos metais, os pequenos orifícios e canais de rochas porosas portadoras de petróleo, as paisagens fragmentadas de uma zona de terremotos (GLEICK, 1989, p. 99).

Segundo Barbosa (2005, p.18): "Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos". Para definirmos os fractais de uma maneira mais simples, basta que observemos a propriedade que possuem, a autossimilaridade, ou seja, eles possuem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes.

Atividade 1: é possível medir o comprimento da costa do Brasil?

a) pesquise na internet acerca do comprimento da costa do Brasil? Com base nessa pesquisa você pode afirmar exatamente qual o comprimento da costa brasileira? Por quê?
b) seria possível calcularmos com exatidão o comprimento da costa do Brasil? Por quê?

Atividade 2: desenhando a curva de KOCH

a) desenhe um segmento de 6 cm e divida esse segmento em 3 partes iguais;
b) retire o seguimento central e substitua por um triângulo equilátero sem a sua base;
c) quantos segmentos obtemos e qual o comprimento de cada segmento? Qual a soma dos comprimentos dos segmentos obtidos?
d) repita o processo para cada segmento. Quantos segmentos obtemos? Qual o comprimento de cada segmento da segunda iteração? Qual a soma dos comprimentos dos segmentos obtidos?
e) depois de n iterações quantos segmentos teremos? Qual será o comprimento de cada segmento? E qual será a soma dos comprimentos dos segmentos obtidos?
f) quantas vezes podemos repetir o processo?
g) o que ocorre com o tamanho de cada segmento quando aumentamos as iterações? O que ocorre com a soma do tamanho de todos os segmentos quando aumentamos as iterações?
h) qual a relação da curva de Koch com a medida da costa brasileira?

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão com toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

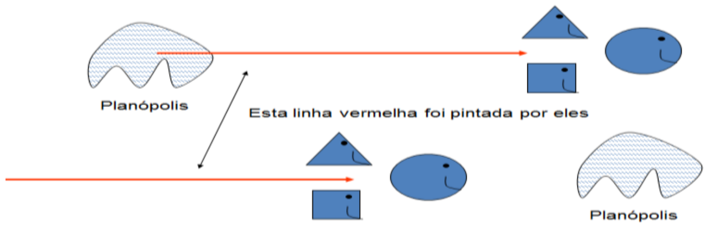
Fonte: GLEICK (1989), BARBOSA (2005) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 11 – Geometrias não euclidianas

Geometrias não euclidianas

1º Momento: individual
De acordo com Sampaio (2008), podemos entender que a superfície é um ambiente geométrico bidimensional. Nesse sentido, se imaginarmos "habitantes" fictícios para uma superfície, eles podem ser mover apenas com dois graus de liberdade. Vamos imaginar a seguinte situação:

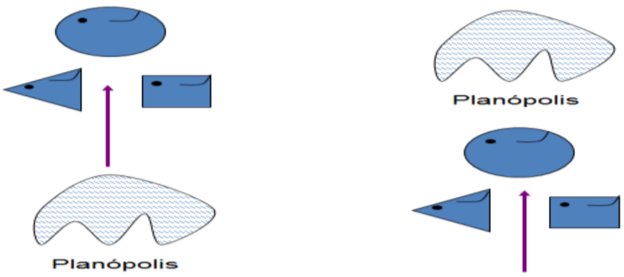
Alguns cientistas de um planeta denominado Planolândia, portanto bidimensionais, tais como o Hum Quadrado, o Hum Triângulo e o Hum Círculo, resolveram conhecer melhor o mundo em que viviam. Para isso, organizaram uma expedição científica.



Fonte: SANTOS (2009).

Atividade 1[17]: Desenhe as possíveis formas desse planeta.
Vamos considerar a segunda situação:

Em uma nova expedição científica, os mesmos cientistas resolveram fazer uma nova rota. Ao invés de percorrer no sentido oeste-leste, caminharam no sentido sul-norte. Deixaram agora uma marca roxa.



Após esse retorno, eles observaram que não haviam cruzado a linha vermelha nenhuma vez, ou seja, o único lugar de cruzamento das linhas vermelha e roxa foi no início do percurso.

Fonte: SANTOS (2009)

Atividade 2: desenhe as possíveis formas desse planeta.
Atividade 3[18]: um caçador saiu de sua casa e caminhou 10 km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou mais 10 km. Então virou e caminhou novamente por mais 10 km ao norte. Ficou surpreso, pois descobriu que voltara novamente a sua casa.

[17] As atividades 1 e 2 são adaptações das atividades propostas por Valdeni Soliani Franco em um curso para professores da Educação Básica do Estado do Paraná e estão dispostas em SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica**. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática)–Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

[18] As atividades 3, 4, 5 e 6 são adaptações das atividades propostas por THOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S. **Geometria não euclidiana/Geometria Esférica.** Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>. Acesso em: 4 set. 2013.

a) desenhar numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador;
b) de acordo com a situação acima é possível que o caçador volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões;
c) desenhar numa bola o caminho percorrido pelo caçador;
d) analisando o caminho desenhado na bola, é possível para o caçador voltar ao mesmo ponto de partida?

Atividade 4: agora imagine esse mesmo caçador, ele resolveu sair de casa e caminhar em linha reta infinitamente.

a) desenhe o caminho percorrido pelo caçador numa folha de papel;
b) de acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel, é possível para o caçador voltar no ponto de partida?
c) desenhe o caminho percorrido pelo caçador numa bola;
d) de acordo com o caminho percorrido desenhado na bola, é possível para o caçador voltar ao ponto de partida?

Atividade 5: agora o caçador caminhará em linha reta da sua casa até a floresta:

a) desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador;
b) desenhe numa bola o caminho percorrido pelo caçador e represente esse desenho na folha de papel;
c) qual é a diferença entre os dois desenhos? Anote suas conclusões.

Atividade 6: agora o caçador caminhará levando o seu fiel amigo cachorro. Eles caminharão paralelamente.

a) desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro;
b) desenhe numa bola de isopor o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro;
c) é possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro na folha de papel e na bola de isopor?

Atividade 7: como você explicaria para um aluno, atento e curioso, que afirmasse que numa viagem em um estrada sem curvas, ele teve a impressão de que as laterais da pista se encontrariam em um ponto, e isso o levou a afirmar que as retas paralelas se cruzam?

Segundo momento: refaça a atividade em pequenos grupos;
Terceiro momento: discussão com toda a turma;
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: SAMPAIO (2008), SANTOS (2009), THOMAZ; FRANCO (2014) e Diário de campo da pesquisadora.

- AE 12 – Primeira avaliação

Primeira avaliação

Para a realização da avaliação você poderá usar qualquer material que desejar, tais como: livros, cadernos, computadores etc.
Primeiro momento: individual
1º Questão: conte-me sobre a sua experiência de escrever narrativas para a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana e sobre as experiências vivenciadas durante a dinâmica indivíduo-grupo-classe no decorrer desse primeiro semestre.
2º Questão: baseado em nossas discussões acerca do movimento da vida, descreva a nossa sala de aula, o nosso planeta e o nosso universo.
3º Questão: vimos que, para Platão, as verdades geométricas representam verdades eternas, eram absolutas no sentido de independerem do tempo e do ser humano; já segundo Hogben (1970), os postulados geométricos não passam de verdades aproximadas quando aplicados ao mundo real. Baseado nessas duas maneiras de pensar acerca das verdades geométricas, discuta os seguintes itens:

a) Olhe para as duas figuras seguintes e diga o que elas apresentam em comum:

b) Olhe para as duas figuras seguintes e diga o que elas apresentam em comum:

c) Olhando ao seu redor, você consegue encontrar algum triângulo? E um retângulo? E um cubo?

Segundo momento: refaça a avaliação em pequenos grupos.
Terceiro momento: discussão da avaliação toda a turma.
Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

- AE 13 – Segunda avaliação

Segunda avaliação

Para a realização da avaliação você poderá usar qualquer material que desejar, tais como: livros, cadernos, computadores etc.

Primeiro momento: individual

1º Questão: analise as afirmações abaixo e diga se as mesmas são verdadeiras ou falsas, usando para isso seus conhecimentos acerca de geometria euclidiana e as nossas discussões em sala de aula. Justifique suas afirmações:

a) todo trapézio isósceles é um retângulo;
b) todo retângulo é um trapézio;
c) todo trapézio é um quadrilátero;
d) todo losango é um retângulo;
e) todo quadrado é um losango;
f) todo paralelogramo é um quadrado;
g) todo quadrado é um paralelogramo;
h) todo retângulo é um trapézio isósceles.

2º Questão: baseado em nossas discussões em sala de aula e sobre sua experiência em medir a sombra de um objeto, justifique o fato de a circunferência utilizada por nós possuir 360º.

3º Questão: segundo Gomes e Silva (2013), usando o fato que existe uma complexidade de demonstrar o seno de 1º com a circunferência que nós conhecemos de 360º, o astrônomo iraniano al-Samaw'al (c. 1130-c. 1180) justificou a mudança da circunferência de 360º para 480º. "Entretanto, a história não mostra que tal proposta de mudança se expandiu, mas culminou em alguns grandes avanços na matemática computacional e na astronomia árabe e hindu do início do século XII" (GOMES; SILVA, 2013, p. 11). Preencha a tabela a seguir como a equivalência entre os ângulos na forma atual (com a circunferência medindo 360º) e nessa outra possibilidade (com a circunferência medindo 480º). Discuta também acerca do conceito que você possuía sobre ângulo, o conceito de ângulo no nascimento de tal conceito e o conceito de ângulo usado na geometria euclidiana. Há diferença entre o conceito que você possuía, o conceito no nascimento e o conceito utilizado na geometria euclidiana?

Ângulo na circunferência atual	Ângulo na circunferência de 480º
60º	
	60º
36º	
	8º
270º	

OBSERVAÇÃO: escolha apenas uma dentre as questões 4 e 5.

4º Questão: um lado de um de dois triângulos semelhantes é cinco vezes maior que o lado correspondente do outro. Se a área do triângulo menor é 6 cm^2, qual é a área do maior? (Obs.: justifique cada afirmação com base na geometria euclidiana).

5º Questão: mostre que na geometria euclidiana em qualquer triângulo retângulo a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

OBSERVAÇÃO: escolha apenas uma dentre as questões 6 e 7.

6º Questão: demonstre, baseado nos conhecimentos de geometria euclidiana, que as retas tangente a uma circunferência nas extremidades de um diâmetro são paralelas.

7º Questão: todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subtendem uma semicircunferência são retos.

8º Questão: escreva acerca da sua experiência com a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana.

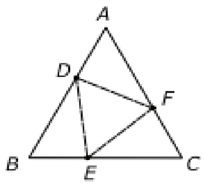
Segundo momento: refaça a avaliação em pequenos grupos.

Terceiro momento: discussão da avaliação toda a turma.

Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

- AE 14 – Terceira avaliação

Terceira avaliação
Para a realização da avaliação você poderá usar qualquer material que desejar, tais como: livros, cadernos, computadores etc. **Primeiro momento: individual** 1º Questão: escreva uma narrativa em que necessariamente as seguintes frases e palavras devam aparecer, não necessariamente na ordem em que elas foram dadas: 1) Euclides. 2) Geometria euclidiana. 3) Geometrias não euclidianas. 4) História da matemática. 5) A obra *Os Elementos*. 6) Axiomas. 7) Postulado das paralelas. 8) Noções primitivas. 9) Hipócrates de Quios. 10) Tales. 11) Pitágoras. 12) O todo é maior do que a parte. 2º Questão: sobre os lados de um triângulo equilátero, tomam-se três pontos D, E e F conforme a figura abaixo. Sendo AD ≡ BE ≡ CF, prove que o triângulo DEF é equilátero.  3º Questão: Desenhe as diagonais de um quadrilátero, de um pentágono e de um hexágono. Conte quantas diagonais tem cada um deles. Quantas diagonais tem um polígono de n lados? 4º Questão: Analise as afirmações a seguir, com base nos seus conhecimentos de geometria euclidiana, e diga com qual afirmação você concorda e demonstre por que ela é válida, em seguida dê um contraexemplo para a afirmação com a qual você discorda. Afirmação 1: "Todo triângulo congruente é semelhante". Afirmação 2: "Todo triângulo semelhante é congruente". 5º Questão: Tendo a geometria euclidiana como referência: a) demonstre que, se as diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares entre si, então a área do quadrilátero é metade do produto dos comprimentos das diagonais; b) calcule a área de um losango de diagonais d_1 e d_2; c) calcule a área de um quadrado de diagonal d; 6º Questão: dado um triângulo retângulo e a altura em relação à hipotenusa, mostre que a) a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original. b) a altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa (projeção dos catetos). **Segundo momento: refaça a avaliação em pequenos grupos.** **Terceiro momento: discussão da avaliação toda a turma.** **Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.**

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

.

- AE 15 – Quarta avaliação

Quarta avaliação
Para a realização da avaliação você poderá usar qualquer material que desejar, tais como: livros, cadernos, computadores etc. **Primeiro momento: individual** 1º Questão: com base nos seus conhecimentos acerca de geometria euclidiana e sabendo que na pirâmide de Queóps a base é um quadrado cujos lados medem cerca de 230 m e sua altura é de 150 m, apresente uma planificação, reduzida e proporcional, para a pirâmide de Queóps. Chamaremos essa pirâmide de nova pirâmide? Se você construísse uma pirâmide com a planificação que você fez, qual seria o volume dessa nova pirâmide? Qual seria a área lateral dessa nova pirâmide? Existe alguma relação entre o volume e a área lateral da nova pirâmide e a pirâmide de Queóps? Imagine que construíssemos a nova pirâmide de massa de modelar e em seguida resolvêssemos transformar a nova pirâmide em um cubo. Qual seria o volume desse cubo? Poderíamos determinar a área lateral desse cubo? Quais os conceitos que poderiam ser explorados com alunos da educação básica a partir dessa atividade? 3º Questão: Responda às seguintes atividades com base nas discussões feitas em sala de aula, justificando suas respostas. **Atividade 1:** "Um caçador saiu de sua casa e caminhou 10 Km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou mais 10 km. Então virou e caminhou novamente por mais 10 Km ao norte. Ficou surpreso, pois descobriu que voltara novamente a sua casa". a) desenhar numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador; b) de acordo com a situação acima é possível que o caçador volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões; c) se desenharmos numa bola o caminho percorrido pelo caçador, é possível ele voltar ao mesmo ponto? Desenhe o caminho. **Atividade 2:** "Agora o caçador vai caminhar levando o seu fiel amigo cachorro. Eles vão caminhar paralelamente". a) desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro; b) imagine essa mesma situação em uma esfera, represente o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro; c) é possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelo caçador e pelo cachorro na folha de papel e na esfera? 4º Questão: Apresente um modelo para a geometria hiperbólica, dando o maior número de informações possíveis. 5º Questão: Desenhando a curva de triângulo de Sierpinski. Desenhe um triângulo equilátero de lado 6 cm. Iteração 1: Marque os pontos médios de cada um dos três segmentos que delimitam o triângulo, obtendo um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior. Ligue esses três pontos médios e obtenha quatro triângulos congruentes. Retire o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros. Iteração 2: Repita a iteração 1 em cada um dos triângulos restantes. 1) Quantos triângulos obtemos na iteração 1, na iteração 2, na iteração 3 e na iteração n? 2) Qual o perímetro de cada triângulo na iteração 1, na iteração 2, na iteração 3 e na iteração n? Qual a perímetro total na iteração 1, na iteração 2, na iteração 3 e na iteração n? 3) Qual a área de cada triângulo na iteração 1, na iteração 2, na iteração 3 e na iteração n? E a área total na iteração 1, na iteração 2, na iteração 3 e na iteração n? 4) Calcule a dimensão do triângulo de Sierpinski (Em geral o número **n** de peças é dado por $\mathbf{n = m^D}$, em que **m** é o fator de aumento e **D** a dimensão). **Segundo momento: refaça a avaliação em pequenos grupos.** **Terceiro momento: discussão da avaliação toda a turma.** **Quarto momento: postagem da narrativa no Google Grupo.**

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

.

2.2.4 Diário de campo

Todas as observações realizadas por nós foram escritas em "notas de campo", as quais, segundo Bogdan e Biklen (1999, p. 150), constituem-se num "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo". As notas de campo eram elaboradas após o desenvolvimento de cada aula, com base no que vivíamos e experienciávamos durante a disciplina. As anotações estão indiretamente inseridas na análise dos dados, já que elas ajudaram a compreender as narrativas e a escolher os excertos que seriam utilizados.

2.2.5 Narrativas

A escrita da narrativa teve dois objetivos, o primeiro estava relacionado à própria pesquisa, já que as narrativas foram um dos instrumentos para construir os dados da pesquisa, o segundo objetivo estava diretamente ligado ao papel da escrita no que diz respeito à formação de professores de matemática.

Entendemos as narrativas como um modo de refletir, descrever e apresentar aos pares as experiências vividas pelos licenciandos durante as disciplinas. De acordo com Passos e Galvão (2011, p. 76), a escrita das narrativas pode revelar "sentimentos de avanços e de recuos que refletem os momentos e dos contextos em que se encontram e permitem reflexões para além das relacionadas à ação como professoras".

Consideramos que a interpretação dos textos narrativos possibilita a compreensão e a análise do processo das produções de sentidos, de significados, de objetivos e motivos dos acadêmicos do curso de matemática que vivenciaram AE de geometrias na perspectiva indivíduo-grupo-classe-narrativas.

Com a escrita da narrativa tentamos romper com práticas de formação de professores de matemática que priorizam a linguagem técnica e que destacam a oralidade como única forma de comunicação.

> Os cursos de formação matemática do professor, entretanto, continuam a desenvolver uma prática de ensino em que se destaca a oralidade como forma de comunicação. Essa linguagem, de um lado, pode ajudar na sistematização lógica do conhecimento matemático, mas, de outro, pouco

> contribui para a exploração e problematização dos conceitos que estão sendo ensinados e aprendidos (FREITAS; FIORENTINI, 2008, p. 139).

De acordo com os mesmos autores, a escrita discursiva em diferentes momentos da formação do licenciando podem contribuir para o desenvolvimento profissional, tornando-os

> [...] agenciadores de suas reflexões e autores de suas imagens e conceitos. [...] A organização, por escrito, dos pensamentos e das ideias permitia aos (futuros) professores que seus conhecimentos docentes, às vezes ditos como tácitos, fossem identificados, problematizados e (re)significados (FREITAS; FIORENTINI, 2008, p. 148).

Para Cunha (1997, p. 187), o relato dos fatos vividos possibilita a reconstrução e a (re)significação da trajetória percorrida. Entendemos que a escrita das narrativas possibilita que os acadêmicos tomem consciência da construção do seu conhecimento, além de orientar o professor na condução de sua prática docente.

As narrativas indicavam os sentidos individuais que cada licenciando estava dando ao que estava estudando. Indicavam-nos o que poderíamos mudar durante o desenvolvimento das aulas. As narrativas eram disponibilizadas do Google Grupo para todos os participantes, uma vez que pretendíamos que os licenciandos fossem explicitando os significados que estavam dando aos conceitos e aos conteúdos ministrados. Sentidos e significados deveriam caminhar juntos. As narrativas e o ambiente virtual se configuraram como bons instrumentos para se construir o que estamos denominando de sentidos e de significados.

Os licenciandos tinham o prazo de uma semana para postar a narrativa. Não foi possível saber se os licenciandos liam as narrativas de seus pares. Líamos individualmente todas as narrativas, antes do início da próxima AE. Assim podemos inferir que as narrativas serviam como uma orientação para a condução de nossa prática docente. Nas narrativas era possível percebermos o destaque de situações, a supressão de episódios, as influências da trajetória de vida, a negação, a lembrança e esquecimento de etapas (CUNHA, 1997, p. 186), e esses fatos eram usados por nós com fins pedagógicos. As narrativas nos indicavam se a mensagem que pretendíamos dar aos licenciandos tinha sido compreendida.

Nesta pesquisa, foram envolvidos 30 sujeitos e cada um deveria ter postado 15 narrativas, o que totalizaria 450 narrativas. No entanto, dessas 450 narrativas, tivemos 39 que não foram postadas. Assim o total de narrativas postadas foi de 411. As narrativas foram enumeradas de 1 a 15 e serão denotadas N1, N2, ..., N15. As narrativas N1, N2, ..., N11 estão relacionadas com as AE e as N12, N13, N14 e N15, com as narrativas feitas após as avaliações.

Na impossibilidade de trazermos todas as narrativas para o texto, escolhemos e destacamos apenas alguns excertos destas, os quais representam recortes da totalidade das narrativas, ou seja, uma seção da realidade, recortada de forma a nos auxiliar a responder à questão de pesquisa. Para escolher os excertos elaboramos os seguintes critérios: 1) clareza na apresentação das ideias e 2) argumentação bem fundamentada.

Por isso, entendemos que os excertos das narrativas se aproximam da ideia de isolado, trazida por Caraça (1970). Dessa forma durante a análise, ao denominarmos S1- N1, estamos nos referindo ao excerto do aluno do segundo ano, denominado S1, da narrativa denominada N1, a qual se refere à AE 1. Q3-N5 apresenta um excerto de um licenciando do quarto ano, denominado Q3, da narrativa denominada N5, referente à AE 5.

Segue abaixo um exemplo de narrativa completa, do aluno S11, referente às reflexões que fez, a partir do desenvolvimento da AE 5.

S11-N5 - Primeiramente nós fomos colocados a pensar o homem da idade da pedra, imaginado por mim e por muitos com um ser sem conhecimento cientifico algum, que se utilizava de paus e pedra para caçar e sobreviver. Este pensamento foi logo desfeito quando nos foi proposto pela professora a leitura de um texto que retratava o homem como um ser brilhante, como um profundo conhecedor dos céus, e que tinha noções de ângulo e sabia as estações do ano e ordenou os dias meses e anos. Nunca imaginei que há tanto tempo atrás 4000 anos a.C. a nossa espécie já dava os primeiros passos para a construção da ciência que nos dias atuais é tão desenvolvida, que aquelas observações astrológicas deu vida a astronomia que é considerada a mãe da ciência por dar base a outras ciências entre elas para matemática. Esses textos históricos nos mostraram a importância desses fatos serem levados e refletidos no ensino básico e em qualquer nível de ensino, pois, quebram preconceitos e rompem barreiras, valorizam nossos antepassados dão significado às noções que temos hoje de tempo e de espaço e de medidas de ângulo. Muitos ainda não sabem o porquê de um ano ter 365 dias, de um mês ter 30 dias e ser dividido em 4 semanas, das estações do ano serem assim. Nas discussões em sala de aula me recordo que nas leituras feitas pelos colegas, que o homem definiu que um ano tem 365 dias com base nas estrelas, que um ano tem 12 meses porque esse número é múltiplo de 360 que a priori era uma aproximação de um ano, os meses tem 30 dias pelo fato do movimento lunar completar um ciclo que vai de uma lua cheia ou uma lua nova a outra e isso leva um tempo de 30 dias, uma lua possui 4 fases cada fase é compreendida de 7 dias, isso determinou as semanas. As estações do ano se dão pelo fato do planeta terra ter uma trajetória elíptica em torno do sol. Todas essas observações contribuíram para a criação de um calendário. Para nos colocar a par das observações de ângulo a professora propôs aos acadêmicos uma atividade pratica que consistia em colocar um objeto qualquer na vertical e fazer o registro e o desenho da variação da sombra do objeto durante um dia. Para desenvolver esta atividade tínhamos como referencia o nascer e o por do sol, respectivamente o leste e o oeste, e precisávamos desenhar a nossa casa em relação a estes dois pontos. Realizei a atividade observando a sombra em quatro momentos do dia e, pude perceber

que a sombra gira no sentido anti-horário e tem uma variação de tamanho de posição, sendo bem longa ao amanhecer, próximo ao meio dia estava perto de seu tamanho mínimo e ao entardecer voltou a alongar-se novamente. Quando observei a sombra de 4 em 4 horas notei que o ângulo formado por elas era de 60 graus, sendo assim em 1 hora gira aproximadamente 15 graus. Tomando o meio dia como referencia segundo a professora podemos ver que haverá simetria entre as sombras em vários momentos do dia. Após termos feito os trabalhos na prática, já em sala montamos grupos para fazer algumas discussões a respeito dos mesmos, comparando as atividades surgiram duvidas, pois, para alguns não havia simetria entre as sombras, e as medidas dos ângulos em relação aos pontos cardeais variavam um pouco de trabalho para trabalho, e ainda cada um analisou as sombras em horários diferentes e além do mais ninguém comentou ter utilizado prumo ao alinhar o objeto na vertical, também éramos de regiões diferentes e o lugar do planeta onde estamos tem influencia na hora de medir ângulos. Esta atividade representou para nós acadêmicos uma oportunidade para que pudéssemos de maneira pratica entender como foi feita a medição de tempo e de posição por meio de ângulo. A história das varias civilizações antigas é muito complexa e contraditória, é difícil imaginar e compreender exatamente como se deu ao certo o processo de medir ângulos, pois, somos de uma época em que somos muito acomodados não estamos acostumados a estudar conceitos por meio de atividades praticas e reflexivas. Entender o que levou o homem a criar o ângulo até que não é difícil, porque acredito que o mesmo criou o ângulo para representar a mudança de direção ou um giro em relação a um ponto fixo chamado origem, esse conceito ajudou o homem a se localizar no planeta. Mas pensar como que o homem fez para medir o ângulo é muito complexo, pois a história conta que as primeiras noções de ângulos surgiram a 4 mil anos antes de cristo e naquela época não existia um sistema de numeração. Sabemos que primeiramente o homem interpretou o mundo por meio de ângulos antes mesmo de ter noção de comprimento, criou inicialmente o ângulo medindo 60 graus e depois criou seus múltiplos, por isso o sistema de medida de ângulo é sexagesimal. Em um dado momento das discussões foi necessário definir ângulo. A definição mais comum para muitos é a que o ângulo era uma abertura entre duas semirretas tendo em comum o mesmo vértice, essa definição logo foi rejeitada quando a professora questionou o fato de uma figura ter uma abertura interna e externa. O conceito de ângulo é complicado, mesmo os escritores matemáticos não falam a mesma língua na hora de definir o que é um ângulo. Segundo um autor cujo nome não me lembro, ângulo é a figura formada por duas semirretas com a mesma origem. Afinal como imaginar essa figura? Já outro autor diz que num semi-plano, chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas com a mesma origem, tal que uma das semirretas está sobre a reta que determina o semi-plano, essa foi a definição mais aceita pela classe. Achei ambígua a definição que a professora usou dizendo que ângulo é toda a região formada por duas semirretas com mesma origem, pois, para mim isso pode se confundir o conceito de área. A história dos ângulos é fascinante ao contrario de que pensávamos que a matemática era a rainha das ciências, estudando ângulos percebemos que este posto pertence a astronomia, a grande fonte de inspiração humana vem dos céus. Essa historia é cheia de incertezas e deve-se ter cuidado na hora de trabalhá-la em sala de aula, pois, exige muita interpretação e se não for bem conduzida pode confundir. Com essa atividade minha visão do homem da idade da pedra mudou 180 graus, já não a vejo mais como sendo um individuo destituído de conhecimento, passou de um ser retardado a um ser magnifico que mesmo sem ter os artifícios que temos hoje tinha um senso e um olhar capaz de compreender o universo.

Fonte: Diário de Campo da pesquisadora.

A seguir, descreveremos como foi organizada a análise dos instrumentos de pesquisa.

2.3 Análise dos dados

A análise dos dados considerou inicialmente a análise do questionário e das narrativas referentes às 11 AE. Durante a análise do questionário, procuramos descrever os sujeitos participantes da pesquisa e os motivos que os levaram a cursar a disciplina.

Para a análise das narrativas referentes às 11 AE (AE1, AE2,..., AE 11), houve o estabelecimento das unidades de análise das narrativas.

Para isso, as narrativas foram fragmentadas e os excertos das narrativas foram separados em unidades de análise das narrativas, de acordo com o significado que entendemos que comportavam e com a convergência de ideias presentes em um ou mais excertos de narrativas. As unidades de análise das narrativas não foram estabelecidas *a priori*, elas surgiram durante a análise e são excludentes entre si, ou seja, cada excerto da narrativa pode ser encontrado em apenas uma unidade de análise das narrativas.

Foram estabelecidas nove unidades de análises das narrativas, são elas: 1) *descrição da atividade, 2) mudanças, 3) reflexões, 4) preocupação com a prática, 5) (re)significações de conceitos, 6) da verdade matemática às verdades matemáticas, 7) críticas às atividades, 8) concepção de matemática como construção humana, 9) a preocupação com as notas e com as avaliações.*

Para a análise das narrativas e os estabelecimentos das unidades de análise daquelas, utilizamos cores diferentes e pintamos todas nas narrativas. Cada cor foi usada para representar uma unidade de análise da narrativa. No quadro a seguir, apresentamos um exemplo da fragmentação das narrativas e da separação dos excertos em unidades de análise das narrativas. A seguir, o Quadro 4 indica a criação das unidades de análise:

Quadro 4 – Criação das unidades de análise

Narrativa N10 da acadêmica Q1	Unidades de análise da narrativa
Dando continuidade ao estudo dos fractais e por consequência da geometria não euclidiana, a professora nos propôs outra atividade. Tal atividade tinha como questionamento inicial se era possível saber o comprimento exato da costa brasileira. Por saber que a costa não é uma superfície regular, ou seja, possui vários desníveis, afirmei que não seria possível encontrar a medida desse contorno com tanta precisão. Na verdade, o objetivo desta pergunta era o de mostrar que a costa brasileira se assemelha a um fractal, por ter várias superfícies irregulares. Sabendo que os fractais têm comprimento infinito não seria possível fazer a medição exata dessa costa. Porém, ao responder a pergunta não consegui alcançar o objetivo desta questão. A partir daí foram surgindo discussões acerca dos fractais e da costa brasileira, e para exemplificar melhor a relação existente entre os fractais e a costa, a professora nos deu um claro exemplo de uma formiga e de um homem, ambos andando em uma mesma superfície. Como a formiga é um inseto pequeno ela consegue percorrer os lugares mais irregulares. Já o homem não, suas marcações não são tão precisas quanto a da formiguinha. Este claro exemplo me fez compreender que, por mais que se tente chegar ao comprimento exato dessa costa não seria possível, pois nunca chegaríamos a um mesmo comprimento. A segunda atividade foi mais dinâmica onde deveríamos desenhar o fractal conhecido como curva de Koch. Não senti nenhum problema em realizar a execução da curva, apenas no momento de fazer as relações entre os comprimentos dos segmentos à medida que cada segmento era subdividido. Após as discussões a professora nos apresentou uma tabela que relacionava o tamanho desses segmentos, encerrando a atividade com uma apresentação sobre um pouco mais da história da geometria não euclidiana.	Os excertos da narrativa em amarelo fazem parte da unidade de análise da narrativa: descrição da atividade. Os excertos da narrativa em verde fazem parte da unidade de análise da narrativa: reflexões. Os excertos da narrativa em cinza fazem parte da unidade de análise da narrativa: (re)significação de conceitos.

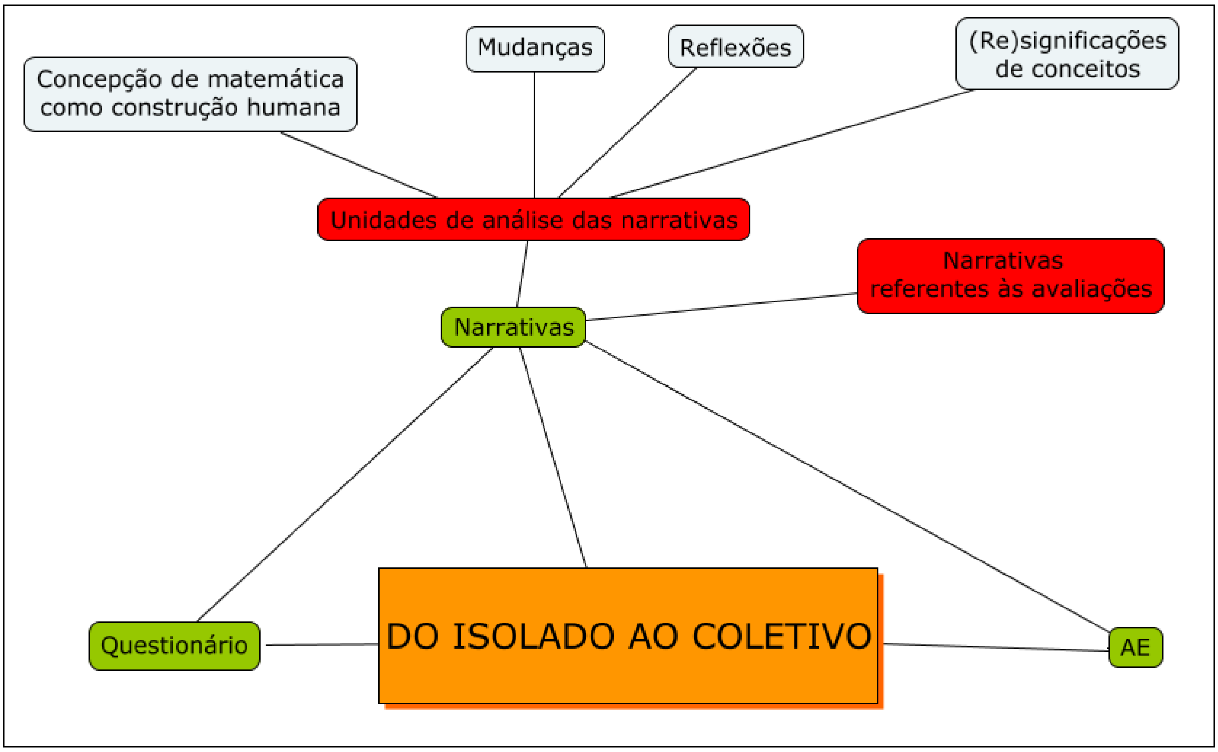
Fonte: Elaborado pela autora.

As unidades de análise das narrativas foram estabelecidas apenas para as 11 narrativas referentes às AE 1, AE 2, ..., AE 11. Para as narrativas referentes as quatro avaliações não houve tal estabelecimento, já que não houve convergência com as unidades de análise das narrativas. Isso, pois entendemos que no momento de refletir acerca da avaliação as preocupações e as reflexões dos licenciandos se diferenciam do momento da escrita das narrativas referentes às 11 AE.

O movimento de compreensão do problema de pesquisa levou-nos a definir o próximo passo da pesquisa, a triangulação dos dados, a partir dos conteúdos que constavam no diário de campo, no questionário, nas unidades de análise das narrativas, nas narrativas referentes às avaliações e nas AE. Dessa triangulação emergiram quatro categorias de análise: *Do isolado ao coletivo; O novo, Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições.*

A categoria *Do isolado ao* coletivo emergiu da triangulação dos dados contidos no questionário e nas AE. A Figura 1 a seguir apresenta a articulação desses três instrumentos.

Figura 1 – Categoria: do isolado ao coletivo

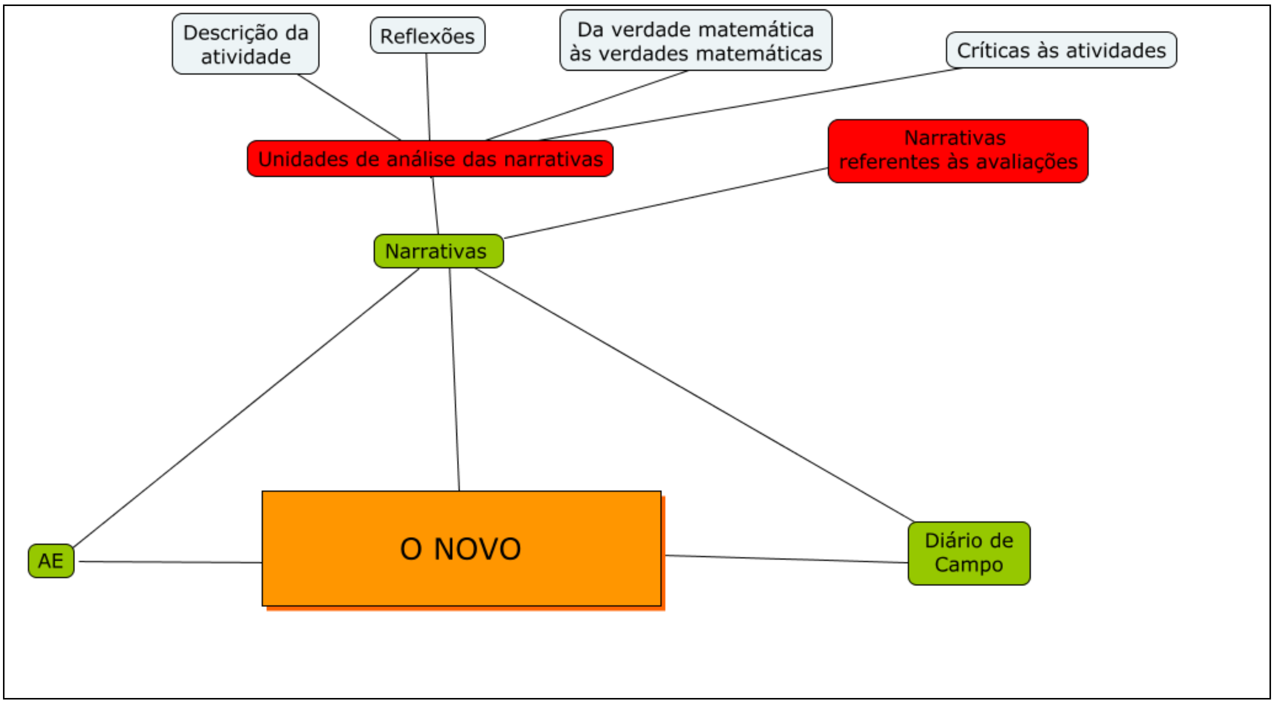


Fonte: Elaborado pela autora.

Na categoria *Do isolado ao coletivo,* discutimos as mudanças na maneira de pensar e as (re)significações que ocorreram por parte dos licenciandos durante as disciplinas de geometria e de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas e foram provocadas principalmente pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas que orientou as reflexões.

A categoria *O novo* emergiu da triangulação dos dados contidos nas narrativas, no diário de campo e nas AE. A Figura 2 apresenta a articulação desses três instrumentos.

Figura 2 – Categoria: o novo

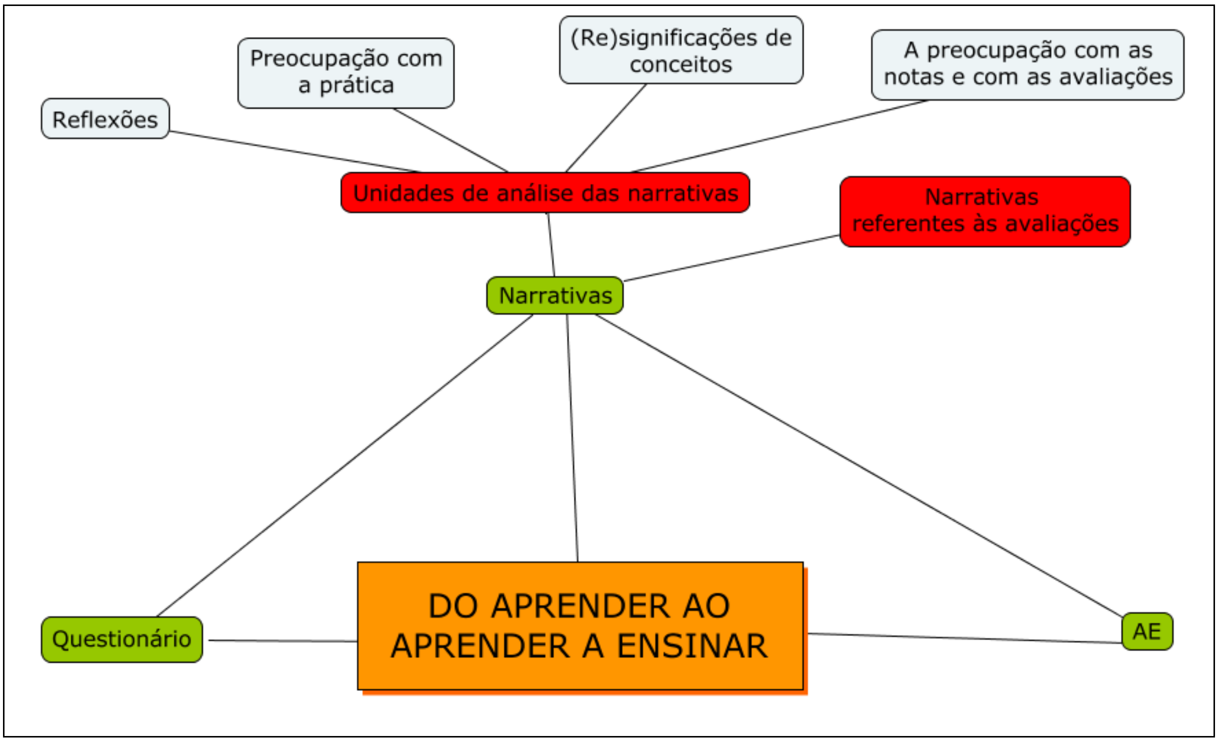


Fonte: Elaborado pela autora.

Na categoria *O novo,* apresentamos as manifestações de silêncio, de alegria, de resistência e de incômodo dos licenciandos ao vivenciarem a disciplina e a metodologia.

A categoria *Do aprender ao aprender a ensinar* emergiu da triangulação dos dados contidos no questionário, nas narrativas e nas AE. A figura a seguir apresenta a articulação desses três instrumentos.

Figura 3 – Categoria: do aprender ao aprender a ensinar

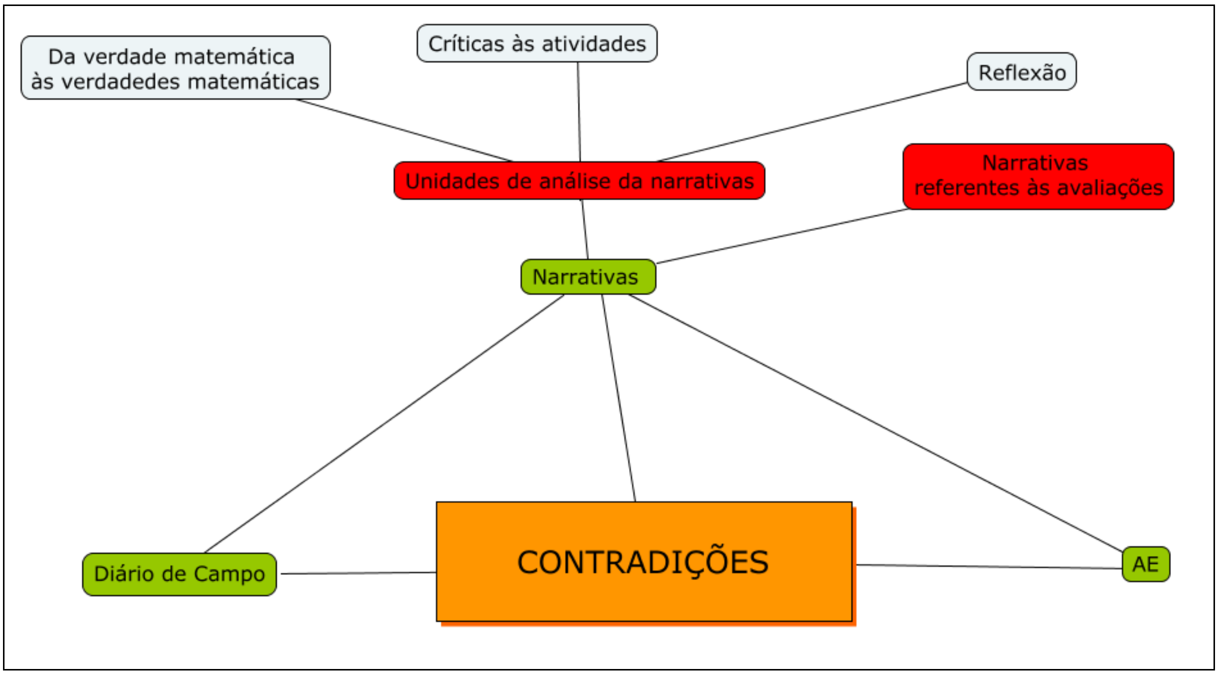


Fonte: Elaborado pela autora.

Na categoria *Do aprender ao aprender a ensinar,* procuramos inferir se as AE desenvolvidas foram geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias.

A categoria *Contradições* emergiu da triangulação dos dados contidos no diário de campo, nas narrativas e nas AE. A figura a seguir apresenta a articulação desses três instrumentos.

Figura 4 – Categoria: contradições



Fonte: Elaborado pela autora.

Na categoria *Contradições,* discutimos a contradição como geradora de conhecimento, contradição esta manifesta nas narrativas, nos questionários e nas AE.

No próximo capítulo apresentaremos as ideias centrais da Teoria da Atividade e de Atividade Orientadora de Ensino como pressuposto teórico para a escrita desta pesquisa e, consequentemente, para a formação inicial de professores de matemática.

3 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES E A TEORIA DA ATIVIDADE

"Um dia me disseram
Que as nuvens não eram de algodão
Um dia me disseram
Que os ventos às vezes erram a direção
Quem ocupa o trono tem culpa
Quem oculta o crime também
Quem duvida da vida tem culpa
Quem evita a dúvida também tem
Somos quem podemos ser
Sonhos que podemos ter"

(Humberto Gessinger)

Neste capítulo descreveremos o movimento de busca por teorizações e reflexões teóricas que nos aproximaram da teoria histórico-cultural, especialmente no que diz respeito à Teoria da Atividade e à AOE. Apresentaremos, ainda, as ideias centrais dos conceitos de produção de sentido e significado, objetivos, motivos e discutiremos a unidade entre AE e AOE.

A nosso ver, as AE se apresentam como uma das possibilidades de romper com a concepção de que o dever do educador é conduzir o educando à memorização mecânica de conteúdos. Pois as AE devem gerar e promover a Atividades de Aprendizagem, ou seja devem criar um motivo especial para que os estudantes aprendam teoricamente sobre a realidade. Assim entendemos que a AE media a ação pedagógica e desencadeia a aprendizagem. Nesse processo, a AE possibilita a quem já está em prática em sala de aula rever sua própria prática e quem ainda não está pode vê-la como uma possibilidade.

Segundo Libâneo (2010), precisamos conceber a escola como espaço de integração e síntese, para formarmos cidadãos participantes em todas as instâncias da vida social contemporânea e preparados para uma leitura crítica das transformações que ocorrem em escala mundial.

Para Libâneo (2010, p. 11), tudo que esperamos da escola para os alunos deve, também, ser colocado aos professores. E isso sugere que as universidades e os cursos de formação precisam, segundo o mesmo autor, formar professores com uma cultura geral mais ampliada, com capacidade de aprender a aprender, com competências para saber agir na sala de aula, com domínio da linguagem informacional, sabendo usar meios de comunicação e conseguindo articular as aulas com as mídias e multimídias.

De acordo com Libâneo (2006, p. 72), o professor pode aprimorar seu trabalho, tomando para si os instrumentos de mediação desenvolvidos na experiência humana e fazendo leitura crítica da realidade. Segundo o autor, para que isso ocorra, é necessário que formemos sujeitos com potencialidades de um pensar epistêmico.

> Pensar é mais do que explicar e para isso, as instituições precisam formar sujeitos pensantes, capazes de um pensar epistêmico, ou seja, sujeitos que desenvolvam capacidades básicas em instrumentação conceitual que lhes permitam, mais do que saber coisas, mais do que receber uma informação, colocar-se frente à realidade, apropriar-se do momento histórico de modo a pensar historicamente essa realidade e reagir a ela (LIBÂNEO, 2004a, p. 141).

Concordamos com Libâneo (2006), segundo o qual, a teoria sócio-histórica da atividade possibilita compreender a formação de professores a partir do trabalho real e das práticas no contexto de trabalho. Além disso, essa teoria permite juntar quatro componentes da prática do professor:

> [...] uma cultura científica crítica como suportes teóricos ao trabalho docente; conteúdos instrumentais que assegurem o saber-fazer; uma estrutura de organização e gestão das escolas que propicie espaços de aprendizagem e de desenvolvimento profissional; uma base de convicções ético-políticas que permita a inserção do trabalho docente num conjunto de condicionantes políticos e culturais (LIBÂNEO, 2006, p. 75).

Esses componentes da prática docente podem ser harmonizados na teoria histórico-cultural. Nesse modelo a atividade do professor em formação é caracterizada por um desenvolvimento de uma educação humanizadora de ensino, uma educação que atribui valor à atividade humana e à formação do conhecimento científico.

Nós corroboramos Moura et al. (2010, p. 212), segundo os quais, a escola é um lugar social privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente e que para tal intento a ação do professor deve estar organizada intencionalmente. No entanto, segundo Cedro (2012, p. 2), os processos de formação de professores ainda fortemente se encontram em um modelo reprodutivista e não se constituem como uma condição necessária para a emancipação do indivíduo e valorização da riqueza humana universal.

Cedro (2008) nos induz então ao seguinte desafio:

> [...] como fornecer ao indivíduo a formação necessária e suficiente para que ele possa promover o salto qualitativo de suas concepções individuais de mundo para aquelas que reflitam os conhecimentos universais mais avançados obtidos pela humanidade. Esta situação torna-se mais delicada ao sabermos que uma das formas de concretizar esse processo de humanização é por meio da escolarização (CEDRO, 2008, p.15).

O homem se humaniza, quando se apropria da cultura historicamente acumulada, e, ao se humanizar, constitui a humanidade e a educação é um processo que humaniza. Concordamos que a apropriação de elementos da cultura humana ocorre também fora do contexto escolar, de acordo com as necessidades e interesses de todos os envolvidos.

De acordo com Moura et al. (2010, p.23), é na busca da organização do ensino, na unidade entre a teoria e a prática que se constituem a atividade do professor, a atividade de ensino. "Essa atividade se constituirá como práxis pedagógica se permitir a transformação da realidade escolar por meio da transformação dos sujeitos, professores e alunos" (MOURA et al., 2010, p. 213).

> A atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do estudante, deve criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. É com essa intenção que o professor organiza a sua própria atividade e suas ações de orientação, organização e avaliação (MOURA et al., 2010, p. 213).

No caso da formação de professores, a AE do professor formador de professores deve, além de levar os licenciandos a ter um motivo especial para estudar e aprender teoricamente sobre a realidade estudada, deve também criar motivos para estudar e compreender a sua inserção no trabalho docente. Assim a AE do professor formador está diretamente ligada à atividade educativa do futuro professor.

O conceito de atividade é entendido aqui com base na perspectiva leontieviena e recorreremos ao conceito de AOE como um recurso metodológico que possa contribuir para a formação inicial de professores de matemática, com o objetivo de uma perspectiva de formação não alienante e na qual os sujeitos em formação possam se apropriar do conhecimento historicamente construído e discutir e pensar acerca de seus futuros objetos de trabalho. O conceito de trabalho não é entendido aqui como uma preparação para o mercado, mas como uma atividade humana, adequada a um fim, a qual promove a geração de conhecimentos, considerando-se que é por meio do trabalho que conhecemos e construímos conhecimento. No caso da formação de professores, entendemos o trabalho do professor como uma atividade humana, que tem por objetivo a formação de sujeitos que possam se apropriar da cultura historicamente acumulada, ao mesmo tempo em que constroem conhecimentos sobre si mesmos. Ou seja, ao ensinar matemática, o professor tem a oportunidade de teorizar sobre os conteúdos que ministra e de gerar novos conhecimentos relacionados ao ensinar e ao aprender.

3.1 A teoria da atividade

Para compreendermos o conceito de atividade, é preliminar diferenciar o conceito de atividade e o conceito de ação.

Leontiev et al. (2006, p. 68) designam a atividade como "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo" e designa ação como "um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo, (isto é, com aquilo para o qual ele se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte" (LEONTIEV et al., 2006, p. 69). Ou seja, para Leontiev (2006), a atividade só se constitui a partir de uma necessidade que se objetiva materialmente no motivo.

Segundo Cedro (2008, p. 26), a principal característica das ações é o vínculo com seus objetivos explícitos e elas estão também ligadas às operações definidas como as formas de realização de uma ação.

Leontiev et al. (2006) entendem por operações o modo de execução de um ato:

> Uma operação é o conteúdo necessário de qualquer ação, mas não é idêntico a ela. Uma mesma ação pode ser efetuada por diferentes operações e, inversamente, uma mesma operação pode-se, às vezes, realizar diferentes ações; isto ocorre porque uma operação depende das condições em que o alvo da ação é dado, enquanto uma ação é determinada pelo alvo (LEONTIEV et al., 2006, p. 74).

Leontiev et al. (2006) acentuam dois aspectos liames entre o desenvolvimento das operações e das ações, o desenvolvimento das operações ao longo de uma ação e sua dependência de uma ação e,

> [...] quando o nível do desenvolvimento das operações é suficientemente alto, torna-se possível passar para a execução de ações mais complicadas e estas, por sua vez, podem proporcionar a base para novas operações que preparam a possibilidade para novas ações, e assim por diante (LEONTIEV et al., 2006, p. 76).

De acordo com Leontiev et al. (2006, p. 80), uma ação, ao se converter em operação, reduz a posição que ela ocupa na atividade, mas isso não significa que ela seja simplificada, pois a qualquer momento ela pode tornar-se novamente consciente e voltar a ser uma ação. Já que uma das características das operações é que elas são automáticas e não exigem a consciência do indivíduo. Para os autores, existe uma relação particular entre a atividade e a ação. Uma atividade que perde seu motivo pode se transformar em uma ação e uma ação que adquire motivos pode se transformar em uma atividade. Leontiev et al. (2006, p. 13) afirmam ainda que o termo motivo pode corresponder a fenômenos completamente diferentes, tais como impulso, inclinações, apetites biológicos, ideais de vida, dentre outros. Mas, para os autores, "trata-se de uma questão que diz respeito às relações entre motivos e necessidades" (LEONTIEV et al., 2006, p. 14). E a necessidade real sempre é uma "necessidade de alguma coisa, "as necessidades são mediadas pela reflexão psíquica, e de duas maneiras" (LEONTIEV et al., 2006, p. 14).

> Acontece que, na própria condição de necessidade do sujeito, o objeto que é capaz de satisfazer a necessidade não é claramente delineado. Até o momento de sua primeira satisfação, a necessidade 'não conhece' seu objeto; ele ainda precisa ser revelado. Só como resultado dessa revelação, é que a necessidade adquire sua objetividade e o objeto percebido (representado, imaginado) vem a adquirir sua atividade provocativa e diretiva como função; isto é, torna-se um motivo (LEONTIEV et al., 2006, p. 14).

Para Leontiev et al. (2006, p. 14), a necessidade aparece, primeiramente, só como uma condição, um pré-requisito para a atividade, somente quando o sujeito começa a agir é que ocorre a transformação, e a necessidade deixa de ser aquilo que era virtualmente em si mesma.

Vejamos um exemplo dado por Leontiev et al. (2006). Imaginemos um estudante preparando-se para uma avaliação e para isso lendo um livro. Imaginemos agora que um amigo desse estudante o avise que tal livro não será mais cobrado na avaliação. Caso o estudante abandone a leitura do livro, fica claro que o motivo que o levou a ler o livro não era o conteúdo do livro por si mesmo, mas a necessidade de ser aprovado, sendo assim a leitura do livro não se constitui como atividade, uma vez que seu motivo era a preparação para o exame.

Mas, caso o aluno continue a ler o livro, mesmo sabendo que o mesmo não será cobrado na avaliação, temos que o conteúdo do livro foi o motivo, sendo assim teríamos o motivo coincidindo com o objeto e o estudante estaria então em atividade.

> Para Leontiev, uma atividade só se constitui como tal se partir de uma necessidade. No entanto, esta não é entendida por ele como o motivo da atividade. A necessidade que deu origem à atividade objetiva-se materialmente no motivo, dentro das condições consideradas, e é este que estimula a atividade, o que lhe confere direção. Dessa forma, um sujeito encontra-se em atividade quando o objeto de sua ação coincide com o motivo de sua atividade (MORETTI; MOURA, 2010, p. 157).

Leontiev et al. (2006) denominam dois tipos de motivos, são eles os motivos compreensíveis e os motivos realmente eficazes.

> Os primeiros são aqueles que não coincidem com o objeto da atividade. Assim, por exemplo, se um professor participa de um programa de formação continuada porque isso lhe possibilita ascensão funcional, seu motivo – promoção – não coincide com o objeto de sua atividade: leitura, discussões, elaboração de propostas didáticas. Neste caso, temos, então, um motivo compreensível. No entanto são exatamente os motivos compreensíveis que se tornam motivos eficazes (MORETTI; MOURA, 2010, p. 158).

Segundo Leontiev et al. (2006), um motivo compreensível pode vir a ser um motivo realmente eficaz.

> É uma questão de o resultado da ação ser mais significativo, em certas condições, que o motivo que realmente a induziu. Ocorre uma nova objetivação de suas necessidades, o que significa que elas são compreendidas em um nível mais alto (LEONTIEV et al., 2006, p. 70).

Ou seja, um grupo que inicialmente participa de um programa de formação continuada porque isso lhe possibilita ascensão funcional pode passar a ver outro sentido naquele curso, como, por exemplo, possibilitar respostas para sua necessidade de ensinar, assim a ação de realizar o curso passa a ser orientada por um motivo e transforma-se em atividade.

No caso desta pesquisa, podemos pensar que para alguns licenciandos a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas e a disciplina de geometria podem se configurar apenas como necessárias para que se cumpra a grade curricular do curso. No entanto podemos possibilitar um pensar diferente, que possa provocar mudanças em como os licenciandos concebiam o ensinar na sua futura prática docente. Assim, ele passa a buscar respostas para a sua necessidade de ensinar, e a ação de realizar a disciplina, orientada por um motivo, transforma-se em atividade.

O motivo está sempre ligado ao sentido pessoal. “Isso porque o sentido é sempre sentido de algo, não sendo possível falar em sentido puro” (MORETTI; MOURA, 2010, p. 159). O sentido que o sujeito atribui à ação faz mudar o motivo, podendo torná-lo eficaz, quando coincidir com o objeto da atividade.

Entender o movimento dos motivos pode nos ajudar a compreender porque muitas ações de formação, inicial e continuada de professores têm pouco impacto. O que faz o sujeito entrar em atividade é o motivo eficaz, mas o sujeito inicia sua atividade por conta dos motivos compreensíveis.

Se em um processo de formação os motivos compreensíveis não se transformam em motivos eficazes, dificilmente haverá uma mudança da prática. A transformação dos motivos só ocorre na própria atividade do sujeito, a partir do momento em que ele atribui sentido as suas atividades. O professor tem que atribuir sentido a sua prática.

De acordo com Moretti e Moura (2010, p. 159), a necessidade do sentido na formação docente tem sido tomada no senso comum. No entanto, para os autores, a relação entre a formação docente e o sentido atribuído pelo sujeito em formação às suas ações não é tão óbvia. Sendo assim, podemos pensar que:

> O grande desafio é como criar condições para que, ao longo da atividade proposta, o professor possa confrontar o sentido que o move para a formação com o objeto que é tomado como produto desse processo. Ou seja, como desencadear um movimento de formação no qual os professores possam rever os motivos que os movem e, dessa forma, possam atribuir novos sentidos aos elementos constitutivos da organização do ensino (MORETTI; MOURA, 2010, p. 159).

No caso desta pesquisa, o grande desafio é criar condições para que o professor em formação possa rever os motivos que o movem a cursar a disciplina e assim possa atribuir novos sentidos a sua organização de ensino, para quem já é professor, e novos sentidos para a sua futura organização de ensino para quem ainda não é professor.

O sentido pessoal, para Leontiev (2010, p. 105), corresponde a um motivo. Para o autor, é necessário que se distinga o conceito de sentido e o de significado, já que eles são intrinsecamente ligados, “mas apenas por uma relação inversa da assinalada precedentemente; ou seja, é o sentido que se exprime nas significações (com os motivos nos fins) e não a significação no sentido” (LEONTIEV, 2010, p. 105).

Para melhor compreendermos a dissociação entre os conceitos de sentido e significado, Leontiev (2010) traz o seguinte exemplo: imaginemos que seja preciso compreender a significação de uma data de um acontecimento histórico, isso não exclui a possibilidade de a data em questão apresentar diferentes sentidos para o homem. “Um sentido para o jovem ainda nos bancos da escola, outro sentido para o mesmo jovem que partiu para o campo de batalha a defender a sua pátria e dar a vida por ela” (LEONTIEV, 2010, p. 105). Assim também pensamos a atividade docente, ela tem um sentido para os licenciandos que ainda já lecionam e outro para aqueles que ainda estão sentados apenas nos bancos das universidades.

> Todo sentido é sentido de qualquer coisa. Não há sentidos ‘puros’. Razão por que, subjetivamente, o sentido faz de certa maneira parte integrante do conteúdo da consciência e parece entrar na significação objetiva. [...] Na verdade, se bem que o sentido (‘sentido pessoal’) e a significação pareçam, na introspecção, fundidos com a consciência, devemos distinguir esses dois conceitos (LEONTIEV, 2010, p. 104).

Já a significação é, para Leontiev (2010), a forma como o homem assimila a experiência humana:

> [...] a generalização da realidade que é cristalizada e fixada num vetor sensível, ordinariamente a palavra ou a locução. [...] A significação é, portanto, a forma sob a qual um homem assimila a experiência humana generalizada e refletida. [...] A significação mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste, isto é, na medida em que o seu reflexo do mundo se apoia na experiência da prática social e a integra (LEONTIEV, 2010, p. 101).

Leontiev (2010, p. 101) sinaliza para a compreensão das significações, afirmando que as mesmas “não têm existência fora dos cérebros humanos concretos; não existe qualquer reino de significações independente e comparável ao mundo platônico das ideias”.

> Naturalmente, o que eu penso, compreendo e sei do triângulo, pode não coincidir perfeitamente com a significação ‘triângulo’ admitida na geometria moderna. [...] Por consequência, não podemos opor uma significação ‘geométrica’, lógica e, em geral, objetiva, a esta mesma significação de um indivíduo enquanto significação psicológica particular. A diferença não é entre o lógico e o psicológico, mas entre o geral e o particular, o individual (LEONTIEV, 2010, p. 101).

Ainda de acordo com o autor, o homem, ao nascer, encontra significações prontas e elaboradoras historicamente e apropria-se delas tal como se apropria de um instrumento. Para Leontiev (2010, p. 101), a apropriação ou não, a assimilação ou não, o grau de assimilação e o que tal significação se torna para mim dependem do sentido pessoal que tal significação tem para mim.

Ou seja, para Leontiev (2010), o sentido é atribuído pelo sujeito no decorrer da própria vida, e, portanto não é possível ensinar o sentido de algo a alguém.

Para Moretti e Moura (2010, p. 160), “a implicação disso para a formação de professores é que as ações desencadeadas por estes no âmbito de tais propostas devem ter como referência direta o seu trabalho docente”, uma vez que se constituam como respostas às suas necessidades. Logo, segundo esses autores, o professor em atividade de ensino é levado, por sua necessidade, a buscar instrumentos e planejar ações coerentes com seus motivos antes, durante e depois do trabalho em sala de aula.

Sendo assim, podemos dizer que o professor está em atividade de ensino não apenas quando desenvolve suas ações em sala de aula, mas também quando planeja, organiza, reorganiza suas ações e a direciona a partir da avaliação dos resultados obtidos. O professor se constitui professor por seu trabalho, ou seja, pela atividade de ensino. “Na busca de organizar o ensino, recorrendo à articulação entre a teoria e a prática é que constitui a atividade do professor, mais especificamente, a atividade de ensino” (MOURA et al., 2010, p. 214).

Conforme Moura et al. (2010, p. 2013), a AE do professor deve gerar a atividade do estudante, ou seja, deve provocar nele um motivo especial para a sua atividade, que é estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. O professor não pode perder de vista que tão importante quanto a sua atividade é a atividade de aprendizagem que o estudante desenvolve.

> Daí a importância de que os professores tenham a compreensão sobre seu objeto de ensino, que deverá se transformar em objeto de aprendizagem para os estudantes. Além disso, é fundamental que no processo de ensino, o objeto a ser ensinado seja compreendido pelos estudantes como objeto de aprendizagem. Isso, para a teoria histórico-cultural, só é possível se este mesmo objeto se constitui como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo tempo objeto e necessidade na atividade de aprendizagem (MOURA et al., 2010, p. 215).

E como pensar a AE do professor formador de professores? Nesse caso, a atividade de ensino do professor formador deve gerar a atividade do estudante, ou seja, deve criar um motivo para a sua atividade, que é aprender teoricamente sobre a realidade, colocar-se frente à realidade, apropriar-se do momento histórico de maneira que permita pensar historicamente a realidade e reagir a ela e compreender como trabalhar com essas questões na sua futura prática docente. Assim a atividade de aprendizagem dos licenciandos está intimamente ligada a sua futura atividade de ensino.

3.2 Atividade orientadora de ensino na formação inicial do professor

A partir da estrutura da atividade, é possível a identificação de alguns elementos do conceito de atividade na AOE.

De acordo com Moura (1996, p. 33), a atividade de ensino que

> Respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define um objeto de formação como problema coletivo é o que chamamos de atividade orientadora de ensino. Ela orienta o conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico (MOURA, 1996, p. 32).

Os pressupostos da AOE, segundo Moraes (2008, p. 97), indicam que, na relação ensino e aprendizagem, a cultura aparece como algo a ser apropriado e interiorizado pelos indivíduos. “Para a concretização da atividade pedagógica com vista à humanização dos sujeitos envolvidos no trabalho educativo, o professor lança mão da AOE como base metodológica para a organização do ensino” (MORAES, 2008, p. 97). Para Moura et al. (2010, p. 219), as ações do professor devem ser pensadas a fim de possibilitar aos “estudantes a apropriação dos conhecimentos e das experiências histórico-culturais da humanidade”.

Assim corroboramos Moura et al. (2010), segundo os quais na AOE existe a unidade entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Ou seja, a AOE como metodologia de organização do ensino se constitui pela atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do licenciando.

> Na AOE, ambos, professor e aluno, são sujeitos em atividade e como sujeitos se constituem como indivíduos portadores de conhecimentos, valores e afetividade que estarão presentes no modo como realizarão as ações que têm por objetivo um conhecimento de qualidade nova. Tomar consciência de que sujeitos em atividade são indivíduos é primordial para considerar a Atividade Orientadora de Ensino como um processo de aproximação constante do objeto: o conhecimento de qualidade nova. A atividade assim, só pode ser orientadora (MOURA et al., 2010, p. 218).

No contexto escolar, os autores (MOURA et al., 2010, p. 18) destacam que “a necessidade do professor é a de ensinar e a do aluno é aprender”. Já no contexto da formação inicial de professores, podemos inferir que os sujeitos são o professor formador de professores e o aluno um futuro professor, que podemos denominar licenciando ou acadêmico. O objetivo do primeiro sujeito vai além de ensinar, ele também objetiva formar professores. Os objetivos do licenciando são aprender o conhecimento teórico e se tornar professor. Os motivos do professor formador de professores são a organização do ensino e a orientação acerca do ensinar e suas ações devem ser organizadas de forma a possibilitar aos licenciandos a apropriação do conhecimento teórico bem como a compreensão de como trabalhar com o conhecimento teórico na futura prática docente. Sendo assim, inferimos que no contexto da formação de professores a AE media a ação pedagógica e a aprendizagem de conteúdos e da docência.

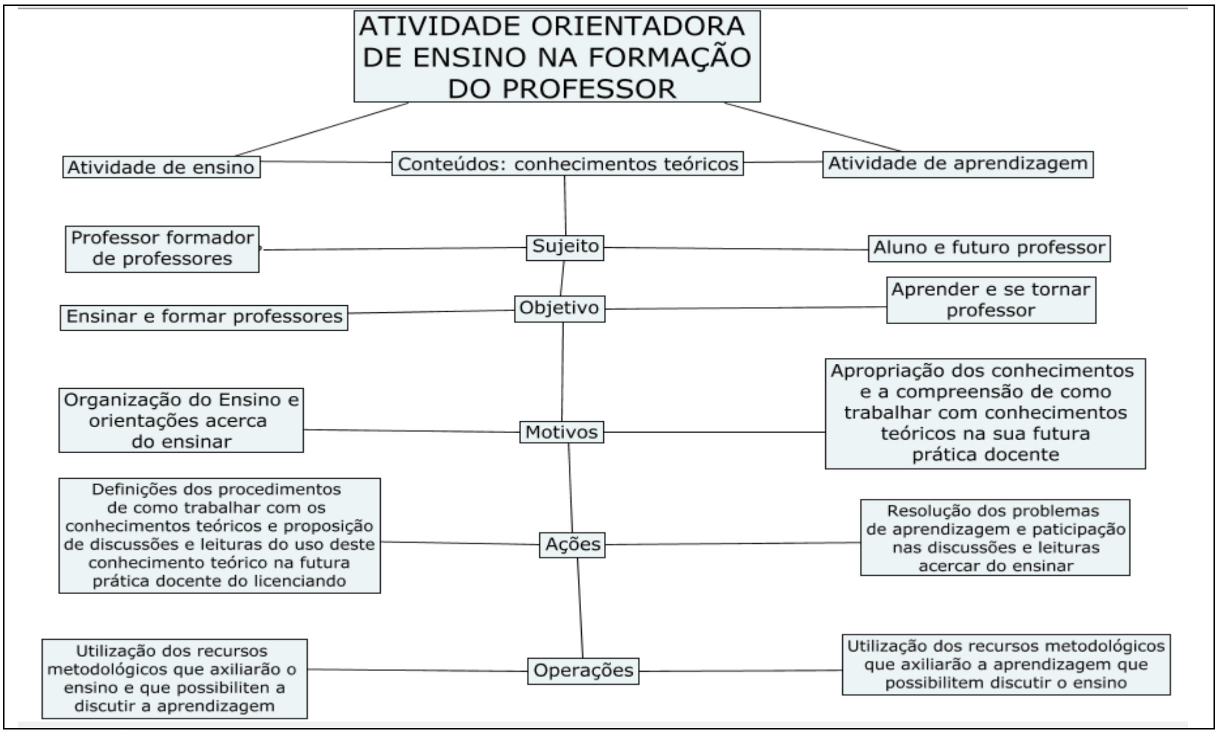
A figura a seguir, proposta por Moraes (2008), apresenta em um quadro os componentes centrais da Atividade Orientadora de Ensino, a relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem.

Figura 5 – AOE: Relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem

Fonte: Moraes (2008, p. 116).

Reelaboramos o quadro proposto por Moraes (2008), inserimos nele elementos importantes no contexto da formação inicial de professores. A seguir, apresentamos uma figura síntese da relação entre AE, atividade de aprendizagem e AOE na formação inicial de professores.

Figura 6 – AOE: Relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem na formação do professor



Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Ao desenvolvermos AE na perspectiva da AOE durante a formação do professor de matemática, temos dois sujeitos em atividade, o professor formador de professores e o aluno, futuro professor, e que podemos denominar de licenciando.

Objetivando ensinar e formar professores, o professor formador organiza o ensino do conhecimento teórico e planeja orientações acerca do ensinar. Para isso ele precisa definir procedimentos que possibilitem aos licenciandos a apropriação do conhecimento teórico e a compreensão de como trabalhar com o conhecimento teórico na sua futura prática docente. “Os elementos característicos da Atividade Orientadora de Ensino (necessidades, motivos, ações, operações) permitem que ela seja elemento de mediação entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem” (MOURA et al., 2010, p. 220). Assim, as AOE se configuram como geradora de necessidade e de motivos para ensinar, ensinar a ensinar e aprender matemática.

No caso desta pesquisa, ao fazermos uso das AE e ao planejarmos a organização do ensino, a partir dos pressupostos da AOE, consideramos que as geometrias são os conhecimentos teóricos, ensinar geometrias e propor AE para pensar a futura prática docente são os motivos. Os objetivos são três principais, o primeiro é discutir o aprender e o ensinar, o segundo é compreender os conceitos matemáticos relacionados à geometria euclidiana e geometrias não euclidianas e o terceiro é formar professores para desenvolver os conceitos dessas geometrias na educação básica.

Assim tínhamos por hipótese que as atividades desenvolvidas nas disciplinas poderiam vir a ser geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender, aprender a ensinar geometrias e vivenciada pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas indicariam que a atividade de ensino do professor formador poderia vir a ser geradora da atividade do estudante, ou seja, poderiam vir a criar neles motivos para a sua atividade

4 DE QUE HISTÓRIA ESTAMOS FALANDO?

"Você pode até dizer que eu tô por fora
ou então que eu tô inventando
Mas é você
Que ama o passado
E que não vê
É você
Que ama o passado
E que não vê
Que o novo sempre vem..."

(Belchior)

Neste trabalho, fizemos uso de AE fundamentadas em pressupostos lógico-históricos de geometrias como uma possiblidade para a formação inicial de professores de matemática e para o desenvolvimento de uma educação humanizadora. Uma possibilidade de formar professores que levem em conta as referências pessoais dos sujeitos envolvidos, que façam referência ao tempo histórico e à cultura historicamente acumulada, preocupando-se assim em desenvolver o seu papel humanizador.

Quando optamos por relacionar elementos da história da geometria com a construção das AE, foi necessário compreendermos quais os discursos que os que defendem tal perspectiva utilizam e em quais momentos eles iam ao encontro ao adotado na pesquisa.

De acordo com Miguel e Miorim (2008), presenciamos a ampliação da presença do discurso histórico nas produções destinadas à matemática escolar. Tal presença pode ser notada nos livros didáticos, paradidáticos, propostas de trabalhos docentes, propostas de trabalhos por escolas e nas elaborações de diretrizes para o ensino fundamental, médio e superior. Para os autores, essa ampliação leva a alguns questionamentos:

> Quais argumentos têm sido utilizados para justificar a inclusão do discurso histórico em produções brasileiras destinadas à Matemática escolar? Existem diferenças na forma como esse discurso participa dessas produções? Caso existam como elas se relacionam ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática? (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 15).

Segundo Miguel e Miorim (2008), um dos primeiros argumentos utilizados para defender o uso da história da matemática no ensino da matemática foi o caráter motivacional, como se a história tivesse um poder "quase mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 16). Para os defensores dessa perspectiva, o poder motivador da história é atestado pela adoção de uma concepção lúdica ou recreativa, é a história-anedotária.

Para os defensores desse ponto de vista, a história-anedotária seria necessária como um contraponto aos momentos formais do ensino, que exigem grande dose de concentração e esforço por parte do estudante, "tudo se passaria como se a Matemática exigisse o pensamento e a seriedade, enquanto a História aliviaria a tensão e confortaria" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 17). Para os autores, esse argumento é ingênuo, simplista e precisa ser questionado, uma vez que, se fosse esse o caso e a história exercesse um papel motivador, o ensino da própria história seria automotivador, o que não é confirmado pelos professores de história, estes se defrontam em seu cotidiano com o desinteresse de seus alunos:

> [...] não apenas com o desinteresse de seus alunos por esse campo de saber, como também com a enorme dificuldade de fazer com que eles compreendam a sua importância, a sua natureza, os seus objetivos e os seus métodos (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 24).

Segundo Miguel (1993, p. 64), houve um deslocamento dos esquemas motivadores das aulas de matemática via utilização da história, de um plano no qual eles eram entendidos de forma episódica e externa ao conteúdo do ensino para outro em que a motivação aparece vinculada e produzida no ato cognitivo na solução de um problema. Para o autor, passou-se a defender a ideia de que a matemática poderia ser desenvolvida nos estudantes via resolução de problemas históricos e que a resolução de problemas vinculada à história seria uma atividade educativa e motivadora.

Para Miguel (1993, p. 70), a categoria motivação torna-se uma problemática para a justificação da incorporação da história no ensino, uma vez que, "podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma" (MIGUEL, 1993, p. 70).

Balestri (2008) investigou a participação da história da matemática na formação inicial de professores de matemática na ótica de professores e pesquisadores que atuam ou já atuaram com história da matemática. A pesquisa de Balestri (2008) mostrou que, sob a ótica de alguns entrevistados, a história da matemática pode motivar e satisfazer as curiosidades dos alunos em relação à matemática. No entanto, o autor salienta que o uso daquela deve ultrapassar esse aspecto.

A nosso ver, nesta pesquisa, em alguns momentos, a história da matemática, especialmente, os elementos históricos da geometria, aparecem como motivadora, no entanto, entendemos que conseguimos ultrapassar esses aspectos, uma vez que não tínhamos o objetivo de somente satisfazer as curiosidades dos licenciandos.

Temos de chamar a atenção para o fato de que, no final do século XIX e início do século XX, já seria possível localizar a presença de elementos históricos nos livros, essa presença era marcada por notas de rodapé, algumas observações ou comentários acerca de temas e personagens da história da matemática.

Essa forma de apresentar a história, na grande maioria das vezes, segundo Nobre (2004),

> [...] isola o grande pensador do mundo, do qual ele fez parte, mas não se pode esquecer que, nesse mundo, estavam presentes a família, o ambiente social, os amigos, a escola e seus professores. Caracteriza-se como ingenuidade histórica a afirmação de que nada disso teria contribuído para que o grande gênio chegasse aos seus resultados (NOBRE, 2004, p. 539).

Na pesquisa que desenvolvemos não utilizamos uma história estritamente factual, ou seja, uma história que privilegia apenas datas, nomes e locais. Tentamos, de alguma forma, discutir as influências sociais, políticas, religiosas e filosóficas que permitiram que algumas sociedades percebessem determinadas relações matemáticas de maneiras diferentes.

Também procuramos discutir com os licenciandos que as histórias que conhecemos acerca da história da matemática são passíveis de serem questionadas. Na realidade, estamos falando de historiografias, ou, ainda, modos de descrever fatos históricos. Por exemplo, a história nos conta que Euclides foi um grande matemático grego, que organizou a obra denominada *Os Elementos.* No entanto, de acordo com Nobre (2004, p. 537), acerca da existência de Euclides pairam diversas dúvidas, o lugar onde ele viveu não é consenso entre os historiadores e o que sabemos sobre ele está baseado em informações fornecidas por terceiros, como Proclus, que viveu cerca de sete séculos após o possível período em que Euclides viveu. As únicas informações da obra *Os Elementos* são traduções, já que o texto original é considerado perdido.

> Poderia ser considerada uma aberração histórica, por exemplo, se, baseado no fato da ausência de provas, alguém dissesse que o personagem Euclides tenha existido. O que pode ter havido foi a existência de uma 'escola euclidiana' composta por vários personagens ilustres que compilaram maravilhosamente o livro Os Elementos, e também outras obras atribuídas a Euclides (NOBRE, 2004, p. 537).

Não se trata de apagar a figura de Euclides e também não era o objetivo da pesquisa buscar provas da existência desse matemático, já que não tínhamos a intensão de fazer um estudo acerca da história da geometria e, se esse fosse o objetivo, teríamos que recorrer a fontes primárias. O que buscávamos era refletir sobre essas histórias, como uma maneira de compreendermos que Euclides não foi um pensador que, isolado do mundo em que vivia, compilou sozinho e independente da sociedade a obra *Os Elementos*. Ao provocar a dúvida, a hesitação e a contradição em nossos licenciandos, optamos por romper com a matemática como uma criação harmoniosa, em que os capítulos se encadeiam sem contradição.

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é de um todo harmoniosos, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanha-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (CARAÇA, 1970, p. XIII).

Na pesquisa que desenvolvemos, não defendemos o princípio recapitulacionista, ou o princípio genético, uma vez que não acreditamos ser possível fazer a reprodução do movimento de construção da história das geometrias seguindo todos os passos da humanidade. O que defendemos é que a história pode ser usada enquanto possibilidade didática para que os alunos possam compreender que em determinados momentos e contextos foi preciso pensar diferente, foi preciso romper com pensamentos prontos e acabados. E que esses rompimentos não são apenas ocasionados por fatores internos à própria matemática, ou seja, existem fatores políticos, sociais, filosóficos inerentes a todo esse processo. Esses rompimentos revelam os movimentos de ação de diversos grupos culturais para resolver os problemas que se apresentavam. Essas ações "Provocam mudanças qualitativas do conhecimento que podem ser evolutivas ou as de ruptura” (PANOSSIAN, 2013, p. 94).

O princípio genético, segundo Miguel e Miorim (2008), foi um fator decisivo e reforçador de várias formas de participação da história em livros didáticos e propostas oficiais brasileiras e se fortaleceu com a influência do positivismo, mais precisamente no final do século XIX e início do século XX, como forma de legitimar essa participação.

De acordo com Miguel e Miorim (2008), o princípio genético, ou recapitulacionista, no plano pedagógico incide em “considerar que todo indivíduo, em sua construção particular do conhecimento passaria pelos mesmos estágios que a humanidade teria passado na construção deste conhecimento” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 40). Segundo os autores, a partir do século XIX, o princípio genético tornou-se um modo aparentemente sensato e natural de justificar a participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem. Atualmente tal argumento é questionado, uma vez que se defende que não faz sentido buscar argumentos a favor da linearidade e unicidade do método histórico.

Questionando a linearidade da história, podemos pensar que seja possível discutir as geometrias não euclidianas mesmo antes de enunciarmos os cinco postulados euclidianos. Podemos, por exemplo, discutir a maneira que vemos e representamos determinados objetos, antes mesmo de falarmos nos postulados ou axiomas euclidianos. O diálogo com os alunos sobre a visão e a representação do espaço e dos objetos pode possibilitar que a matemática contribua para uma leitura do mundo em que vivemos.

> Levantar a problemática da representação do espaço e dos objetos no espaço significa trazer a questão do desenho das coisas do mundo, e de suas formas, para a superfície (o plano), ou seja, ver como elas estão no espaço e recoloca-las, então, em outro espaço, o espaço da tela, da parede, do papel, o espaço da representação (FLORES, 2007, p. 30).

Frequentemente, as geometrias não euclidianas são tratadas apenas como a negação de um dos postulados euclidianos, como se elas nada tivessem a ver com a maneira de vermos e representarmos o mundo em que vivemos. Ou seja, muitas vezes priorizamos o formalismo[19] da matemática em detrimento das

[19] Entedemos que, o formalismo traz para a matemática um conjunto de símbolos e regras que nos possibilita operar mecanicamente. “Dos matemáticos que tentaram formalizar a matemática podemos destacar Hilbert.

interpretações dos sujeitos históricos que conceberam as diversas interpretações do ver e do representar o mundo.

Quando apresentamos as geometrias não euclidianas como a negação de um dos postulados euclidianos, não significa necessariamente que não estamos utilizando a história como uma perspectiva didática. Mesmo porque os postulados euclidianos são históricos.

Na década de 1990, segundo Miguel e Miorin (2008), houve uma ampliação, acompanhada de grande diversidade de formas de abordagens, em livros didáticos, paradidáticos e propostas curriculares, de trabalhos envolvendo elementos históricos. Os autores identificaram diferenças entres as maneiras pelas quais as histórias foram abordadas e entre os argumentos para justificar a participação dessas histórias no ensino-aprendizagem. Isso possibilitou a identificação de duas categorias diferenciadas, mas não necessariamente excludentes:

> [...] os de natureza epistemológica e os de natureza ética. Essa categorização foi estabelecida considerando o modo como se concebe a natureza dos elementos considerados determinantes ou, pelo menos, condicionadores da aprendizagem matemática e/ou da natureza das atitudes e dos valores, isto é, da natureza da aprendizagem ética, via aprendizagem matemática, que se deseja promover no estudante (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 70).

Para os autores, os argumentos de natureza epistemológica "sugerem que a finalidade da educação matemática é fazer com que o estudante compreenda e se aproprie da própria Matemática concebida como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc." (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 61). Os argumentos de natureza ética são aqueles que sugerem "que a finalidade da educação matemática é fazer com que o estudante construa, por intermédio do conhecimento matemático, valores e atitudes de natureza diversa, visando à formação integral do ser humano" (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 71). Assim, os argumentos de natureza epistemológica defendem a matemática como um fim em si mesma, e para os de natureza ético, a matemática é vista como um meio de

Entre suas contribuições, está a axiomatização da Geometria Euclidiana. [...] O que Hilbert pretendia para a matemática era estabelecer uma linguagem formal, com demonstrações verificáveis passo-a-passo e livrá-la de contradições (MONDINI, 2009, p.25) De acordo com Miguel, Brito (1996), a tendência do formalismo pedagógico-estrutural visava à adoção de uma concepção estruturalista da matemática e de uma concepção quase sempre tecnicista do modo de organização do ensino.

promover nos estudantes a construção de atitudes e valores. No entanto, para os autores, a legitimidade de tal distinção deve ser questionada:

> Pensamos que ilegitimidade dessa distinção se assenta, por sua vez, na inadequação de se distinguir rigidamente a aprendizagem matemática da aprendizagem ética via matemática ou, em outras palavras, distinguir conteúdos exclusivamente matemáticos de valores promovidos via aprendizagem matemática (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 71).

Corroboramos a solução harmonizadora, proposta pelos autores, de que os argumentos fossem todos de mesma natureza, de natureza ético-epistemológica. Assim, valores poderiam ser compreendidos como conteúdos específicos de aprendizagem. A tese defendida por eles é que são dois os principais fatores que explicam a pluralidade de perspectivas teóricas controversas acerca do modo de conceber a participação da história na educação matemática; “(1) a concepção que se adota em relação à natureza do conhecimento matemático; (2) a concepção que se adota em relação à natureza da aprendizagem matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 80). Utilizando essa linha de raciocínio, eles caracterizaram cinco perspectivas no interior do campo de investigação Histórica na Educação Matemática: Perspectiva Evolucionista Linear, Perspectiva Estrutural-Construtivista Operatória, Perspectiva Evolutiva Descontínua, Perspectiva Sociocultural e Perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos.

Segundo Miguel e Miorim (2008), a primeira perspectiva remonta do século XIX e tem como base os trabalhos de Ernest Haeckel e defende o argumento recapitulacionista de cunho biológico. De acordo com a perspectiva evolucionista linear,

> [...] a matemática constitui meramente um corpo cumulativo prévio e sequenciado de conhecimentos produzidos, cada um em um tempo determinado, que deveria ser administrado em etapas cronologicamente sequenciadas, hierarquizadas e qualitativamente indistintas durante o processo de ensino-aprendizagem (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 81).

Sendo assim, de acordo com Miguel e Miorim (2008), para os defensores dessa perspectiva, aprender matemática é recapitular progressiva e cronologicamente os objetos e devemos recorrer à histórica, pois ela possibilita identificar a ordem cronológica de surgimento de tais objetos. Os críticos a essa perspectiva argumentam que não faz sentido buscar argumentos a favor da linearidade e unicidade do método histórico.

> É claro que, tendo em vista o estado atual da ciência, da história e da filosofia da história, não faz sentido qualquer tentativa de se buscar argumentos em favor da linearidade e da unicidade do método histórico, mesmo no âmbito da história da matemática (MIGUEL, 1997, p. 80).

Tal perspectiva exerceu influência em todo o mundo, inclusive no Brasil, não apenas nos discursos pedagógicos, como também na elaboração de programas de ensino.

A perspectiva estrutural-construtivista operatória tem suas bases no referencial teórico dos trabalhos de Jean Piaget e Rolando Garcia. Segundo Miguel e Miorim (2008), os defensores de tal perspectiva negam a utilização do princípio recapitulacionista, no entanto, os autores acreditam que existe nessa perspectiva a utilização de tal princípio:

> [...] a justificativa para a adoção do argumento recapitulacionista prende-se também a razões de natureza biológica que se aproximam das de Haeckel por compartilhar uma concepção evolutiva do desenvolvimento cognitivo, as que delas se diferenciam por conceber essa evolução como um processo composto por etapas sucessivas qualitativamente distintas (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 89).

Miguel e Miorim (2008) afirmam que na perspectiva estrutural-construtivista operatória

> [...] a história da matemática aparece como campo de possibilidade de busca de conflitos e de *mecanismos cognitivos operatórios* relativos a um conceito matemático específico que teriam se manifestado na passagem de uma a outra etapa do processo de construção de tal conceito (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 89, grifo do autor).

Os autores acima tecem algumas críticas a essa perspectiva. A primeira crítica faz referência “a [à] concepção etapista no terreno da história das ideias é conivente com as noções de evolução, previsibilidade, hierarquia, legalidade, linearidade e totalidade efetivada” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 97). A segunda é em relação ao equívoco de “julgar que o desenvolvimento cognitivo espontâneo e/ ou a aprendizagem escolar de uma ideia por parte de um indivíduo deveria guiar-se por etapas sucessivas; as posteriores são mais complexas do que as antecedentes” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 97). A terceira faz referência ao equívoco de “julgar que há necessidade (qualquer que seja o fim alegado) de se estabelecer um paralelismo entre as etapas de ambos os tipos de desenvolvimento ou processos” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 98).

Inferimos que nesta pesquisa não fazemos uso da perspectiva estrutural-construtivista operatória, uma vez que não fazemos uso do princípio recapitulacionista e nem da noção de evolução linear do conhecimento.

Para Miguel e Miorim (2008), a perspectiva evolutiva descontínua tem suas bases na obra *A formação do espírito científico*, de autoria do filósofo francês Gaston Bachelard e publicada na década de 30 do século XX. Essa obra “constitui uma ruptura explícita e radical com o pensamento evolucionista linear no âmbito da história e da filosofia da ciência” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 99), garantida a partir da ideia de obstáculo epistemológico.

Segundo Miguel e Miorim (2008), no interior da perspectiva evolutiva descontínua, aprender matemática é aprender a superar obstáculos, obstáculos estes que se manifestam no ato de resolução de problemas escolares, ou seja, “previamente elaborados com base em critérios bem definidos e visando determinadas finalidades de natureza exclusivamente cognitivo-conceitual” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 104). Nessa perspectiva,

> A história da matemática aparece como campo de possibilidade de busca de obstáculos epistemológicos (isto é, de conhecimentos, e/ou concepções e/ou procedimentos inadequados) que teriam se manifestado aos produtores históricos do conhecimento matemático no enfrentamento de situações problemas-problema bem determinadas (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 104).

Miguel e Miorim (2008) entendem que existe a defesa do princípio recapitulacionista nessa perspectiva, mesmo que os que a defendam digam que não.

> [...] a justificativa para a adoção do argumento recapitulacionista se prenderia a razões de ordem estritamente didático-epistemológica que se diferenciaria das alegadas pelos construtivistas menos por deixar de compartilhar uma concepção evolutiva do desenvolvimento cognitivo (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 104).

Para os autores, a perspectiva evolutiva descontínua leva ao entendimento de uma visão indutivista da história e “tudo se passa como se a matemática, inevitavelmente, tivesse que se tornar aquilo que se tornou” (MIGUEL;

MIORIM, 2008, p. 124), o que rompe totalmente com a ideia de que ela poderia ter se tornado algo diferente do que é hoje.

Inferimos que nesta pesquisa não fazemos uso da perspectiva evolutiva descontínua, uma vez que aceitamos que existem conhecimentos matemáticos de diversas culturas e diferentes do que conhecemos e temos como verdade.

A quarta perspectiva, trazida por Miguel e Miorim (2008), é denominada perspectiva sociocultural. A perspectiva tem suas origens no referencial semiótico neovygotskiano e na Teoria da Atividade, de Leontiev.

Na perspectiva sociocultural, a aprendizagem matemática é a “capacidade pessoal de se apropriar, através da negociação interativa (sobretudo de natureza dialógica) dentro de um determinado contexto cultural, das significações semióticas sócio-historicamente produzidas aos objetos matemáticos” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 129), que será “mediada por atividades pedagogicamente adequadas ao contexto cultural escolar e baseada em cuidadosas análises epistemológicas da história” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 133). Assim, se torna importante recorrer à história, pois “ela é um laboratório de experiências humanas com as quais se procura dialogar através de um contraste oblíquo com as práticas pedagógicas atuais a fim de se construírem atividades didáticas para o ensino-aprendizagem escolar da matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 133). Nessa perspectiva não há a adoção do princípio recapitulacionista, já que,

> [...] no diálogo que se busca realizar entre o passado e o presente, nem o passado se subordina ao presente, nem o presente se subordina ao passado, uma vez que as fontes que constituem objeto de investigação no passado e no presente devem ser lidas e interpretadas relativamente aos condicionamentos das respectivas práticas culturais nas quais se acham inseridas (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 132).

Podemos inferir que esta pesquisa se aproxima das ideias da perspectiva sociocultural, embora não usemos as significações semióticas.

De acordo com Miguel e Miorim (2008), a perspectiva jogos de vozes e ecos, a transmissão do conhecimento matemático na escola giraria “no estabelecimento e desenvolvimento de condições que propiciem a apropriação, por parte dos estudantes, das características do conhecimento matemático teórico” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 139).

O objetivo de se recorrer à história, segundo essa perspectiva, é estudar como funcionam os jogos de vozes e ecos, “cujo objetivo pedagógico não é construir um conceito ou uma solução original para um problema nem validar uma produção do estudante, mas detectar contradições entre as vozes históricas e dos estudantes” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 142), com o objetivo de ampliar o horizonte cultural dos alunos, incorporando elementos difíceis de serem trabalhados nas abordagens tradicionais, tais como: “concepções que ferem o senso comum e a intuição; métodos que ultrapassam os limites da experiência cotidiana dos alunos; tipos especializados do discurso científico e matemático, etc.” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 143). Nesse caso, a história se torna um instrumento para acessar características “do conhecimento científico ou teórico que não se manifestam no conhecimento construído espontaneamente fora da escola” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 143).

Podemos inferir que esta pesquisa não se aproxima da perspectiva jogos de vozes e ecos, já que não fazemos uso de seu referencial teórico.

As críticas proferidas pelos autores às três primeiras perspectivas não ocorrem com as duas últimas. Segundos os mesmos, a perspectiva sociocultural e a perspectiva jogos de vozes e ecos são recentes e ainda se encontram em processo de elaboração e precisam ainda de um maior número de pesquisas.

Foi o momento de escolher um caminho a ser trilhado, escolher por uma perspectiva, e mais teorizações foram necessárias. Tomamos como pressuposto a teoria histórico-cultural e nos aproximamos de autores como Moura (1996), Catalani (2002), Sousa (2004, 2009), Ferreira (2005), Moretti (2007), Dias (2007), Cedro (2008), Moura et al. (2010), Moretti e Moura (2010), Sousa e Jesus (2011), Furlanetto (2013) e Panossian (2013) que tomaram como pressuposto a perspectiva histórico-cultural e a formação de professores.

Moura (1996, p. 29) propôs discutir “o papel das atividades de ensino na escola, procurando ressaltar as características de síntese do currículo, ao articular objetivos, conteúdos, métodos e concepções sobre o conhecimento e como este se constrói”. O autor define as AOE como “A atividade de ensino que respeita os diferentes níveis do indivíduo e que define um objetivo de formação como problema coletivo” (MOURA, 1996, p. 32).

Catalani (2002) desenvolveu sua pesquisa com alunos do 4º ano do ciclo I (10 a 11 anos de idade) e analisou as ações destes quando submetidos às atividades que problematizavam o aspecto contínuo das grandezas quanto à numeração. “Cada atividade contou, de modo geral, com uma dinâmica onde o aluno realizava a tarefa individualmente, seguida por discussões em pequenos grupos e posteriormente o debate geral da classe” (CATALANI, 2002, p. 94). Para a autora, as suas análises evidenciaram que o trabalho com essa dinâmica.

> [...] possibilitou a atuação criativa dos alunos na elaboração de soluções pra as situações-problema apresentadas, caracterizando a forma do pensamento matemático como construção e não apenas como pura dedução a partir de indícios e repetição do aspecto formal do conceito (CATALANI, 2002, p. 209).

Sousa (2004) preocupou-se em abordar AE de álgebra. Seus sujeitos foram professores do ensino fundamental. A autora trabalhou com o desenvolvimento de seções de estudo, com propostas de atividades elaboradas pela pesquisadora e análise e elaboração de atividades pelos professores. Durante sua pesquisa, foi feito uso da dinâmica indivíduo-grupo-classe, e a autora ainda destaca o despertar do pensamento flexível, o que possibilita a “mobilidade ao sujeito que inicia um novo movimento com o seu próprio conhecimento de álgebra” (SOUSA, 2004, p. 273). Os resultados dessa pesquisa “[...] mostram que o lógico-histórico do pensamento algébrico se constitui em atividade formadora de professores e de pesquisa” (SOUSA, 2004, p. 11).

Ferreira (2005) investigou professores participantes de um curso de formação continuada que ocorreu em cinco localidades diferentes do Estado de São Paulo. Ferreira fez uso do que denominou dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe, o que possibilitou, segundo ela, manifestações de elementos criativos e momentos de descobertas.

Moretti (2007, p. 9) “investigou o processo de formação de professores em atividade de ensino, ao elaborarem coletivamente situações desencadeadoras de aprendizagem”. Segundo a autora,

> Os resultados da pesquisa evidenciam que, na (re)organização coletiva de suas ações, os professores atribuíram novos sentido às próprias ações, à mediação e à escolha de instrumentos, aproximando-se das formas de realização colaborativa da atividade de ensino (MORETTI, 2007, p. 9).

Dias (2007) ministrou um curso de formação continuada aos professores da educação básica de São Paulo e trabalhou a construção dos números reais organizada sob os pressupostos da atividade orientadora de ensino e da perspectiva lógico-histórica do conceito. A autora concluiu que

> [...] o desenvolvimento da imagem conceitual individual de conceito matemático, ocorre na relação indivíduo-coletividade e, pode ser coerente com o significado científico elaborado historicamente por meio da realização de uma atividade orientadora de ensino fundamentada em pressupostos lógico-históricos do conceito (DIAS, 2007, p. 7).

Para Dias (2007, p. 218), "a compreensão entre o lógico e o histórico, como categorias dialéticas do pensamento no desenvolvimento do conceito matemático", permitiu que o curso fosse orientado à superação da forma empírica do conceito e o desenvolvimento do pensamento teórico.

Cedro (2008, p. 7) discutiu "o processo de transformação e/ou criação dos motivos na atividade de aprendizagem dos futuros licenciandos em Matemática durante o desenvolvimento do estágio supervisionado". Os resultados obtidos indicaram:

> Para a necessidade de uma organização de processo de formação do docente que permita não somente a vivência da atividade de ensino, mas a reflexão e a tomada de consciência das suas ações possibilitando a superação da alienação do sujeito humano frente a si mesmo (CEDRO, 2008, p. 7).

Moura et al. (2010) discutiram as potencialidades do conceito de AOE, que, segundo os autores, ao ser planejada e desenvolvida a partir dos elementos da atividade (necessidade, motivos, objetivos, ações e operações), permite o desenvolvimento do psiquismo dos sujeitos envolvidos. Os autores refinaram o conceito de AOE e a colocaram como elo entre o professor que tem como objetivo ensinar e o aluno que tem como objetivo a aquisição do conhecimento teórico.

Além disso, eles assinalaram que

> Os fundamentos teóricos-metodológicos da AOE, cujos pressupostos estão ancorados na teoria histórico-cultural e na teoria da atividade, são indicadores de um modo de organização do ensino para que a escola cumpra sua função principal, que é possibilitar a apropriação dos conhecimentos teóricos pelos estudantes. Assim, a AOE, enquanto mediação, é instrumento do professor para realizar e compreender seu objeto de estudo: o processo de ensino de conceitos. E é instrumento do estudante que por meio dela pode apropriar-se de conhecimentos teóricos (MOURA et al., 2010, p. 227).

Furlanetto (2013) adotou como referencial teórico a teoria histórico-cultural e investigou um grupo de cinco estagiárias que cursavam diferentes momentos do curso de pedagogia e participaram do projeto Clube da Matemática. Sua proposta era perceber o movimento de mudança de sentido pessoal no sujeito em formação. Para o autor,

> A dinâmica de organização do projeto, as reuniões de planejamento, os encontros nos quais ocorreram as ações de controle e avalição das ações desenvolvidas com as crianças e a mediação do pesquisador permitiram que as futuras professoras adquirissem um novo sentido em relação à formação inicial e sua importância (FURLANETTO, 2013, p. 175).

De acordo com a autor, esse novo sentido fez com que as estagiárias reconduzissem suas ações de estudos, repensassem a organização de ensino, possibilitaram a organização de reflexões acerca do exercício docente e a busca pela proposição de alternativas, estabelecessem uma nova relação quanto à metodologia, à didática, à relação teoria e prática, ao processo de análise sobre prática e planejamento.

Panossian (2013) investigou professores da rede estadual de São Paulo que participaram de um curso de atualização de professores acerca do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos. O objetivo do trabalho era investigar as relações entre movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. Com essa pesquisa, Panossian (2013, p. 270) defendeu a tese de que

> [...] o movimento histórico e lógico dos conceitos é a fundamentação que, pela via da lógica dialética e do pensamento teórico, revela a essência[20] do conhecimento algébrico. [...] Desta forma, o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos caracteriza-se como um princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra, e para análise de forma crítica de situações e ações de ensino, visando à formação do pensamento teórico dos estudantes.

As pesquisas supracitadas foram importantes para que pudéssemos construir a pesquisa. Nelas, encontramos a tentativa de usar a história da

[20] Nesta tese, entendeu-se que essência é uma síntese de várias abstrações no processo de desenvolvimento de uma forma de conhecimento e que se apresenta em seus objetos mais elementares e mais desenvolvidos (PANOSSIAN, 2013). “Assim, essa essência também ganha movimento e se desenvolve, no sentido de que na experiência humana se modificam as grandezas, as relações entre as grandezas e os modos gerais de expressar essa relação” (PANOSSIAN, 2013, p. 175).

matemática, para além do formalismo, tais autores fizeram também uso de elementos qualitativos presentes na perspectiva lógico-histórica para pensar as atividades.

Nesta pesquisa também buscamos fazer uso de elementos qualitativos de geometrias, presentes na perspectiva lógico-histórica, para pensar as AE, por exemplo, a variabilidade e a pluralidade de verdades.

O elemento variabilidade se contrapõe à rigidez. A matemática grega foi invadida pelo horror ao movimento, que levou à construção de uma geometria rígida. "Exclusão, do seio da Geometria, de tudo quanto lembrasse o movimento, o mecânico e o manual; donde: um conceito estreito de curva, limitado à reta, circunferência e cônicas" (CARAÇA, 1970, p. 197). Para o autor, essas características se mantiveram durante quase dois mil anos na Europa e só perderam o reinado quando surgiu uma classe nova, com problemas novos e que impuseram à filosofia e às ciências um pensar e um rumo diferente.

Na construção das atividades, propusemos aos alunos pensar acerca do conceito de ângulo. Como um conceito rígido da geometria euclidiana e como um conceito em movimento, anterior à axiomatização da geometria euclidiana, que pode surgir de uma observação dos movimentos do Sol, da Lua ou das estrelas. As geometrias não euclidianas também possibilitam trabalhar com a variabilidade e com o movimento. Na topologia, por exemplo, temos que o quadrado e o triângulo são topologicamente equivalentes, já que um pode ser transformado no outro por meio de transformações topológicas[21]. Outro exemplo, o estudo da geometria projetiva possibilitou que discutíssemos o movimento do observador que permite os diferentes olhares e representações para um mesmo objeto.

O elemento pluralidade de verdades se contrapõe à unicidade das verdades matemáticas. De acordo com Brito (1995, p. 30), "Para os gregos, as verdades geométricas eram absolutas no sentido de independerem do tempo e do ser humano, além de fornecerem explicações racionais para o funcionamento do universo". Somente em meados do século XIX surgiram as geometrias não

[21] "Podemos descrever as transformações topológicas como alterações nos objetos, que podem ser descritas como: Esticar ou inflar o objeto, ou algumas de suas partes; Encolher o objeto, ou algumas de suas partes; Retorcer o objeto, ou algumas de suas partes; Cortar o objeto segundo uma linha suave nele demarcado e, posteriormente, colar uma na outra as duas bordas que foram geradas por esse corte, resgatando a superfície com a linha nela originalmente demarcada (considerando a mesma orientação" (SANTOS, 2009, p. 21).

euclidianas e puseram em questionamento a geometria euclidiana, considerada até então verdade única e incontestável.

O estudo das geometrias não euclidianas permite uma nova maneira de ver e conceber as verdades matemáticas. Não existe apenas a verdade, existem verdades. A negação do quinto postulado de Euclides levou à construção de geometrias tão consistentes matematicamente quanto à própria geometria euclidiana, e o estudo de tais geometrias possibilita mudanças conceituais.

Nas AE, a geometria esférica e a geometria hiperbólica possibilitam, por exemplo, mudanças conceituais e as (re)significações dos conceitos de reta e plano.

Assim, recorremos à história, para irmos além do ensino de geometria formal, que privilegia a geometria métrica, como, por exemplo, o cálculo de área e perímetro de figuras geométricas. Elegemos para isso os elementos qualitativos variabilidade e pluralidade de verdade, presentes na perspectiva lógico-histórica que pudessem estar presentes na formação inicial do professor de matemática em geometrias. Tais elementos representam sínteses históricas que foram feitas em diversos momentos e foram relatados pelos historiadores, em suas historiografias sobre as geometrias euclidiana e não euclidianas. No entanto, esses elementos qualitativos não são considerados nas salas de aula da educação básica, muito menos nos cursos de licenciatura de matemática.

4.1 O lógico e o histórico

Concordamos com as conjecturas levantadas por Sousa (2004, p. 69), segundo a qual, “o desenvolvimento do pensamento pode ser comparado a vários círculos, que durante o processo em que ocorrer a aprendizagem de conceitos novos, se interligam e se constroem redes de espirais” e que “as abstrações e leis do movimento do pensamento, ao se constituir em sua forma lógica e teórica, consideram os aspectos lógicos, históricos e formais do objeto a ser estudado” (SOUSA, 2004, p. 70).

> Ora o formal do pensamento se transforma em histórico, ora o histórico se transforma no formal do pensamento. O formal do pensamento está relacionado ao último estágio de rigor e abstração a que determinados povos ou civilizações conseguiram chegar em determinada época (SOUSA, 2004, p. 71).

Hoje calculamos área de figuras por meio de fórmulas, mas essas fórmulas representam o conhecimento formal da geometria, e, para chegar a esse estágio de rigor[22], a humanidade precisou usar de outros métodos como a decomposição e recomposição de figuras. O método da decomposição e recomposição de figuras é lógico-histórico e pode auxiliar a compreensão das fórmulas que hoje conhecemos.

> Na geometria egípcia encontramos problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares que, na sua maioria, foram trabalhados pelos egípcios. Eles calculavam áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras [...] A geometria do período védico se manifesta na construção dos diversos altares de sacrifício e se desenvolveu para atender às necessidades religiosas. Tudo o que se conhece como matemática Védica está contida nos Sulbasutras (GASPAR, 2003, p. 58 e 67).

Segundo Gaspar (2003, p. 79), a geometria dos sulbasutras era principalmente construtiva e não continha demonstrações das regras descritas neles.

Sendo assim, quando conhecemos apenas a geometria euclidiana axiomatizada, o primeiro contato com a geometria encontrada nos sulbasutras pode causar certo incômodo e algumas perguntas podem surgir: Onde estão as demonstrações das regras? Como eles sabiam que tais resultados eram válidos?

Apesar desses questionamentos, não podemos perder de vista que a construção do pensamento e dos conhecimentos é contínua, é mutável, está em constante transformação – "As abstrações se processam a todo instante em nosso pensamento e estão em constante transformação" (SOUSA, 2004, p. 72).

Assim, não podemos olhar para a geometria feita pelas civilizações anteriores à grega, simplesmente como uma geometria empírica e como passos para chegarmos ao saber que temos hoje. Precisamos compreender que, para "chegar à forma que temos acesso hoje, a matemática levantou hipóteses, alimentou dúvidas, viveu incertezas, imprecisões, enfim, cometeu "erros" e acertos no

[22] Entendemos que o rigor matemático não é algo fixo, já que os padrões de rigor se alteram o decorrer do tempo. "A importância dada ao rigor altera-se decorrer do tempo. Porém, a própria concepção de rigor também sofre mudanças. Até o início do século XIX, a axiomática exposta nos ELEMENTOS, apesar das controvérsias relativas ao quito postulado, ditava os padrões de rigor. Com o advento das geometrias não-euclidianas, a obra euclidiana foi questionada e buscaram-se novos padrões de rigor (MIGUEL, BRITO, 1996, p.7)".

movimento de constituição como ciência" (GASPAR, 2003, p. 15). A matemática, em especial, a geometria, não forma uma ciência pronta e acabada, ela está em permanente construção, e o que para nós hoje se aproxima de um conhecimento formal daqui a algum tempo pode se tornar um conhecimento lógico-histórico.

> Ao assumirmos o lógico-histórico enquanto formas de pensamento, necessariamente, consideramos a flexibilidade, a relatividade, a interdependência, a fluência, o processo e o movimento do próprio pensamento que ocorre na totalidade do pensamento, enquanto define para si mesmo o que vem a ser a verdade elaborada pela práxis humana enquanto o homem tenta se humanizar pelo conhecimento (SOUSA, 2004, p. 75).

Pensando sobre o lógico e histórico, podemos ter o movimento do pensamento. Entendemos por histórico "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo" (KOPNIN, 1978, p. 183), e por lógico entendemos que este é o meio pelo qual o pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade (KOPNIN, 1978, p. 183).

> O lógico-histórico é a interpretação lógica que o movimento do pensamento faz ao refletir sobre o acontecido. O que chamamos de acontecimento histórico não se manifestou no tempo e no espaço obedecendo estritamente à lógica do desenvolvimento que atribuímos a esses acontecimentos, ao interpretá-los à distância (SOUSA; LANNER DE MOURA, 2008, p. 66).

O lógico e o histórico se relacionam, no entanto, segundo Kopnin (1978, p. 184), "O histórico é primário em relação ao lógico, o lógico reflete os principais períodos da história". Ainda segundo esse autor, o pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real, ele não precisa seguir cegamente o movimento do pensar. "Por isso o *lógico* é o *histórico das causalidades que o perturbam*" (KOPNIN, 1978, p. 184).

> O lógico é reflexo do histórico por meio de abstrações e aqui dá-se atenção principal à manutenção da linha principal do processo histórico real. A lógica do movimento do pensamento tem como uma de suas leis principais a ascensão do simples ao complexo, do inferior ao superior, e esse movimento do pensamento expressa a lei do desenvolvimento dos fenômenos do mundo objetivo (KOPNIN, 1978, p. 184).

A lógica fornece a forma de desenvolvimento mais puro, mas esse não é possível em um processo histórico. No entanto ela reflete o processo histórico, por isso é necessário interpretá-la.

> O lógico-histórico é processo do vir a ser dos conceitos. Contêm dúvidas, incertezas, inesperados, novas qualidades, medos, ousadias, descobertas, relações entre o velho e o novo, imutabilidade, fluências, movimento (SOUSA, 2004, p. 33).

Comungamos da ideia de que o lógico e o histórico são indissociáveis e que isso é uma premissa necessária para a compreensão do movimento do pensamento. O lógico não apenas reflete a história das geometrias como também a história do conhecimento destas.

No entanto, nossa experiência como formadora de professores nos mostra que o lógico e o histórico, de modo geral, não estão presentes no ensino, o mesmo foi constatado por Sousa (2004) ao desenvolver um estudo sobre a álgebra:

> Nossa experiência enquanto formadora de professores, em cursos de licenciatura e de formação continuada mostra que o ensino de álgebra atual propicia àquele que a aprende, repetição de expressões formais sem significado e, por conseguinte, ausência da criação. Embora os licenciandos e demais professores o reconheçam como tal, denotam dificuldades em se desfazer dessa concepção (SOUSA, 2004, p. 11).

De maneira geral, o que aprendemos sobre os conceitos matemáticos em sala de aula é apenas o lógico-formal dos conceitos geométricos, há a predominância do cálculo de áreas, volumes e perímetros, conforme apontam os estudos de Sousa (2004):

> De modo geral, na maioria das salas de aula, o ponto de partida do conhecimento é a manipulação e a experimentação dos objetos e o ponto de chegada do conhecimento é o lógico-formal dos conceitos estudados. [...] Nesse contexto de ensino fica muito difícil para professores e alunos se apropriarem do conhecimento científico ou matemático e fazer conexões com os movimentos de suas vidas. O importante aqui não é o processo e, sim, o resultado (SOUSA, 2004, p. 132).

No caso das geometrias, o que vemos é um uso mecanizado de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, que não privilegia o entendimento da dinâmica histórica, mas apenas o uso de regras lógicas formais. O que vemos é o ensino de uma geometria que está pronta, acabada, perfeita que se apresenta de forma imutável e não passível de questionamento algum.

> Como se a matemática fosse a ciência mais perfeita, não passível de erros, por isso menos humana, por ser uma das mais antigas. A matemática ainda não é. Está por vir a ser. Por consequência, a álgebra também está por vir a ser. Ainda não é. Aqui, a expressão vir a ser tem conotação de fluência, de movimento no conhecimento humano (SOUSA, 2004, p. 20).

Assim, as geometrias também não são, elas estão por vir a ser. Estamos inseridos em um mundo e queremos compreendê-lo e são as formas lógicas do pensamento que nos permitem dar contornos ao mundo em que estamos inseridos. “A lógica das formas de pensamento é elaborada a partir de premissas ditadas pela realidade objetiva em todos os tempos” (SOUSA, 2004, p. 59). As formas lógicas não são a própria realidade, mas nos ajudam a construí-la. “São construídas por todos nós, a partir do movimento do nosso próprio pensamento ao nos relacionarmos com o Universo” (SOUSA, 2004, p. 59).

O ensino de geometrias[23] não pode ser reduzido apenas ao estudo do lógico-formal, a importância da geometria não está apenas no rigor, mas na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses e compreender que o conhecimento não é imutável.

No entanto, Libâneo (2004a, p. 115) destaca que

> As mudanças nas formas de aprender afetam as formas de ensinar, em vista da subordinação das práticas de ensino à atividade de aprendizagem e às ações do aprender e do pensar. Sendo assim, o que se espera da aprendizagem dos alunos também deverá ser esperado de um programa de formação dos próprios professores.

Sendo assim, estamos convencidos

> [...] da relevância da formação teórica dos professores, da necessidade de adquirirem maior efetividade no uso das instrumentalidades dos trabalhos docentes e da importância dos contextos culturais e institucionais em que se dão o ensino e a aprendizagem (LIBÂNEO, 2004a, p. 115).

O que propomos neste trabalho é que, durante a formação inicial do professor de matemática em geometrias, esse futuro professor seja convidado a

---

[23] Quando dizemos geometrias, estamos nos referindo à geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas.

pensar sobre a natureza lógico-histórica do pensamento geométrico por meio de atividades de ensino. Isso pressupõe levar em conta: a) a geometria euclidiana e o movimento do pensamento teórico a partir do desenvolvimento lógico-histórico do pensar geométrico das diversas civilizações; b) as rupturas que foram necessárias para a criação das geometrias não euclidianas e por que foi difícil romper com tais estruturas.

Segundo Sousa (2004, p. 4), nos cursos de licenciatura, não pensamos sobre a natureza lógico-histórica do pensamento matemático. Preocupamo-nos com o ensinar e aprender matemática e proporcionamos poucos momentos de reflexões, pelos quais professores e estudantes possam pensar acerca das diversas concepções de mundo que interferem na nossa maneira de conceber a matemática.

Para compreendermos as geometrias enquanto descrição de movimentos, propomos que o ponto de partida das aulas seja o estudo de conceitos de movimento, medida, composições e decomposições, visão e representação, espaço, tempo e forma, verdades, geometria euclidiana axiomática e geometrias não euclidianas. Com o objetivo de que estudantes e professores, em atividade, compreendam alguns dos movimentos presentes na vida.

Corroboramos Miguel e Brito (1996, p. 2), segundo os quais, a história da matemática não pode ser apenas mais uma disciplina isolada das demais na formação dos professores de matemática. Para esses autores, isso reforçaria a indesejável separação entre matemática e história e entre o lógico e o histórico. A tese defendida pelos autores é de uma participação orgânica da história na formação do professor. Isso significaria conceber a história como fonte de uma problematização que deveria contemplar as várias dimensões da matemática e da educação matemática. Em nossa pesquisa, fizemos uso da participação orgânica da história na formação do professor de matemática, uma vez que procuramos discutir alguns dos tópicos trazidos por Miguel e Brito (1996, p. 3) e que podem contribuir para tal participação: a concepção da natureza dos objetos da matemática, a função da abstração e da generalização, a noção de rigor e o papel da axiomatização e a maneira de se entender a organização do saber.

Aqui, temos como pressuposto de que as atividades de ensino elaboradas intencionalmente podem auxiliar os licenciandos a aceitarem as geometrias não euclidianas, pois isso ajuda a constituir sujeitos pensantes, capazes de reelaborar suas verdades de forma individual ou coletiva.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa nas disciplinas de geometria e de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas, procuramos proporcionar espaços onde os licenciandos discutiram sobre filosofia, religião, geometrias, história, política, escola, ensino e tiveram contato com uma perspectiva didática “diferente daquele que privilegia somente a dedução dos conceitos trabalhados que visam apenas posterior aplicação em exercícios de reforço” (FERREIRA, 2005, p. 48), podendo reelaborar, a todo o momento, suas verdades, de forma individual ou coletiva.

> O conhecimento que se adquire por métodos transmissivos e de memorização não se converte em ferramenta para lidar com a diversidade de fenômenos e situações que ocorrem na vida prática. Um ensino mais vivo e eficaz para a formação na personalidade, deve basear-se no desenvolvimento do pensamento teórico. Trata-se de um processo pelo qual se revela a essência e desenvolvimento dos objetos de conhecimento e com isso a aquisição de métodos e estratégias cognitivas gerais de cada ciência, em função de analisar e resolver problemas e situações concretas da vida prática. O pensamento teórico se forma pelo domínio dos procedimentos lógicos do pensamento que, pelo seu caráter generalizador, permite sua aplicação em vários âmbitos da aprendizagem (LIBÂNEO, 2004b, p. 16).

Logo, ao elegermos as AE na perspectiva lógico-histórico, pretendíamos tratar dos conteúdos de geometria euclidiana e de geometrias não euclidianas de modo a discutir, dialogar e refletir com os licenciandos os produtos culturais e científicos elaborados por vários grupos distintos que compõem a humanidade, em busca do domínio do conhecimento teórico.

5 EM BUSCA DE RESPOSTAS

“Estamos sós e nenhum de nós
Sabe onde quer chegar
Estamos vivos sem motivos
Que motivos temos pra estar?
Atrás de palavras escondidas
Nas entre linhas do horizonte
Desta highway
Silenciosa highway
Eu vejo um horizonte trêmulo
Eu tenho os olhos úmidos
Eu posso estar completamente enganado
Posso estar correndo pro lado errado
Mas A dúvida é o preço da pureza
E é inútil ter certeza
Eu vejo as placas dizendo ‘Não corra’
‘Não morra’, ‘Não fume’
Eu vejo as placas cortando o horizonte
Elas parecem facas de dois gumes"

(Humberto Gessinger)

Nos capítulos anteriores, tratamos acerca das escolhas, das teorizações e das reflexões que nos levaram a pensar as AE, construídas a partir de elementos lógico-históricos de geometrias, como uma possibilidade para a formação inicial de professores.

Depois de construídos os dados da pesquisa foi o momento de analisarmos e tentarmos responder as questões que foram propostas.

As atividades de ensino desenvolvidas nas disciplinas de “Geometria” e de “Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não euclidianas” foram geradoras de objetivos e motivos para se ensinar e aprender a ensinar geometrias? Essas atividades vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas se tornaram uma AOE?

Quais são as produções de sentidos, de significados, os objetivos e motivos que são explicitados nas narrativas elaboradas por licenciandos do curso de matemática, enquanto vivenciaram AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe?

Para isso, organizamos o capítulo a partir dos instrumentos utilizados para a construção dos dados.

Primeiramente, fizemos a análise do questionário, buscando compreender elementos que nos permitam compreender quais eram os motivos que os licenciandos possuíam para cursar a disciplina de geometria e a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas.

O segundo momento se configurou a partir da análise das narrativas referentes as 11 AE desenvolvidas (AE1, AE2, (...) e AE11) e o estabelecimento das unidades de análise das narrativas. As unidades de análise das narrativas permitiram que buscássemos compreender os destaques, a supressão de episódios, as influências da trajetória de vida, as críticas, os medos, as escolhas, as preocupações, o silêncio e as dificuldades trazidas pelos licenciandos em suas narrativas.

O terceiro momento esteve relacionado à análise das quatro categorias de análise que emergiram da triangulação dos dados, são elas: *Do isolado ao coletivo; O Novo; Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições.*

5.1 Análise do questionário

Dentre os 30 sujeitos participantes, dois não responderam ao questionário inicial, são eles os sujeitos Q8 e S9. A análise do questionário nos permitiu descrever o quadro abaixo, referente aos motivos e aos objetivos que os licenciandos possuíam para cursar a disciplina. Em determinados momentos, os objetivos dos licenciandos coincidem com os da disciplina. Quando ocorre tal coincidência, dizemos que os acadêmicos possuem motivos eficazes para cursar a disciplina. Quando não coincidem, dizemos que os motivos são compreensíveis.

Quadro 5 – Análise do questionário

Motivo para cursar a disciplina está relacionado à prática docente.	Q1, Q7, Q10, S2, S4, S5, S11 e S13.	Todos os licenciandos que já ministravam aulas na educação básica se mostraram preocupados com a sua prática nas aulas de geometrias e creditavam à disciplina a possibilidade de mudanças dessa prática. Nesse caso, podemos afirmar que os motivos destes licenciandos coincidiam com os objetivos da professora, portanto os mesmos podem ser considerados eficazes, conforme indicam os estudos de Leontiev et al. (2006).
Motivo para cursar a disciplina está relacionado à futura prática docente.	Q2, Q3, Q5, Q6, Q11, S3, S10 e S16.	Pudemos verificar nas narrativas desses 8 licenciandos a presença de motivos relacionados à futura prática docente. No entanto, os motivos estão intimamente relacionados ao sentido que eles atribuem à figura do professor. Para Q2, Q11, S3, S10 e S16 a sua futura prática se relaciona ao domínio do conhecimento, assim os motivos deles se caracterizam como compreensíveis, conforme

		indicam os estudos de Leontiev et al. (2006). Podemos inferir que o sentido atribuído por eles à prática docente esteja atrelado ao saber conteúdos. Por outro lado, os acadêmicos Q3, Q5 e Q6 apresentam motivos eficazes, já que os mesmos expuseram a necessidade de compreender os conceitos matemáticos relacionados às geometrias e a importância de discutir e pensar acerca de seus futuros objetos de trabalho.
Motivo para cursar a disciplina é adquirir conhecimentos.	Q4, S1, S6, S14, S17 e S19.	Seis acadêmicos apresentam motivos compreensíveis para cursar a disciplina. O objetivo da disciplina, para eles, era apenas o conhecimento geométrico. Tal conhecimento poderia ser utilizado como ferramenta para outras disciplinas.
Motivo para cursar a disciplina é que ela faz parte da grade curricular.	S7, S8, S12 e S15.	As narrativas de 4 licenciandos mostraram que os mesmo tinham motivos compreensíveis para cursar a disciplina, pois não coincidiam com os objetivos da professora.
Motivo para cursar a disciplina está relacionado a preocupação com os estudos de uma futura pós-graduação.	Q9 e S18.	O objetivo dos licenciandos Q9 e S18 era a apropriação do conhecimento geométrico com vistas a uma pós-graduação, podemos dizer que eles tinham um motivo compreensível para cursar a disciplina.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Os motivos e os objetivos dos licenciandos estão relacionados: 1) aos conteúdos; 2) à prática pedagógica; 3) estudos de uma futura pós-graduação.

No caso de S2, o motivo de sua matrícula na disciplina está relacionada a sua não aprendizagem, no que diz respeito à geometria euclidiana. S2 diz ter aprendido acerca de algumas coisas, mas não sabia que a geometria que aprendera na educação básica era denominada geometria euclidiana:

S2-N0 Durante a Educação Básica eu aprendi sobre Geometria não sabia que seu nome realmente era Geometria Euclidiana, aprendemos sobre ângulos, áreas, volumes entre outros conteúdos.

Há de se chamar atenção para o fato de que, os motivos dos licenciandos para aprender as geometrias não euclidianas não foram explicitados. Este fato parece ocorrer mesmo com os licenciandos que terminaram o ensino médio após a publicação das DCE ou os que já lecionavam na educação básica tinham pouco, ou nenhum, na maior parte dos casos, conhecimento acerca do que seriam tais geometrias. Esta constatação vai ao encontro das pesquisas de Santos (2009), Lovis (2009) e Caldatto (2011). As geometrias não euclidianas estão presentes apenas no papel, nas DCE, mas não se efetivaram na prática de sala de aula.

Quando os motivos envolvem a história da matemática, ao que parece, o sentido produzido pelos licenciandos sobre esta temática, até aquele momento, indicava que a matemática para eles foi criada por heróis e por mitos e a história da matemática está relacionada ao seu poder motivador, ou seja, uma concepção lúdica ou recreativa (MIGUEL; MIORIM, 2008). Podemos inferir que o carácter motivacional ainda se encontra fortemente estabelecido nas escolas, como uma forma de legitimar o uso da história da matemática. Os conhecimentos dos sujeitos são limitados às histórias encontradas em livros didáticos, que segundo Brito e Mendes (2009, p. 11) são ineficazes, em sua maioria, já que “restringem-se a citações de datas e nomes, sem qualquer indicação para o professor de como a histórica poderia ser utilizada na construção de conceitos matemáticos por parte de seus alunos”, além disso, para os mesmos autores uma quantidade significativa de dados incorretos existe “tanto em livros didáticos quanto em paradidáticos que usam a história como mero instrumento ilustrativo”.

Q9, ao indicar-nos, dentre os seus motivos, alguns elementos da história da matemática, constatamos que, em sua narrativa, não aparece o ser humano comum. Ao falar da história da matemática prioriza os heróis, que possuem feitos maravilhosos e potencialidades de abstrações não possíveis a qualquer ser humano.

Q9-N0 A grandiosidade das abstrações de Euclides ao apresentar seus axiomas e compilar a obra Os Elementos, o que certamente foi um dos grandes marcos para a Geometria.

A narrativa indica que há a presença de certa ingenuidade histórica (NOBRE, 2004), uma vez que a história que os licenciandos descrevem é estritamente factual. O fato histórico isola o pensador do mundo, do qual ele fez parte.

Em relação à preocupação com a futura prática docente dos licenciandos, um olhar para o projeto político-pedagógico das disciplinas, nos permite afirmar que o objetivo das disciplinas não é apenas ensinar o conhecimento geométrico, mas como se trata de um curso de formação de professores, estas disciplinas deveriam proporcionar também reflexões acerca de como ensinar os conhecimentos geométricos na educação básica. E esses eram os nossos objetivos ao ministrar tais disciplinas e que deveriam coincidir com os motivos dos licenciandos. No entanto, os dados nos mostram que nem sempre há essa coincidência, uma vez que os motivos estão relacionados aos sentidos pessoais.

Por exemplo, a prática docente apresenta um sentido para o acadêmico que lecionou, ou leciona, e outro sentido para aquele que nunca adentrou como professor em uma sala de aula. Isso pode ser percebido nos dois excertos a seguir.

Os motivos de Q1 para participar da disciplina estão relacionados às dúvidas e incertezas que se apresentam em sua prática docente. Q11 espera que a disciplina livre de todas as dúvidas e incertezas, uma vez que, o professor deve ser o detentor de todo o conhecimento, não podendo apresentar dúvidas e muito menos se sentir inseguro.

Q1-N0 Eu espero que a disciplina de Geometria me auxilie em problemas rotineiros (de sala de aula) que muitas vezes fico em dúvida e não consigo compreender o real sentido daquela situação. Esta disciplina é muito importante para minha formação já que estou trabalhando com geometria dos 6º aos 9º anos.

Q11-N0 Espero que a disciplina de Geometria, possa me livrar de todas as dúvidas e medos que encontrei durante a Educação Básica, pois acredito que esta disciplina é importante para minha formação já que por minha insegurança antes de fazê-la é intensa e expresso um profundo medo de prejudicar meus futuros alunos.

Os licenciandos Q1, Q3, Q5, Q6 Q7, Q10, S2, S4, S5, S11 e S13 tinham como objetivos participar da disciplina aprender e aprender a ensinar. Tais objetivos coincidiam com os objetivos da disciplina; os motivos deles nesse momento se apresentaram como motivos eficazes.

S2-N0 Ensinar meus futuros alunos por meio de uma metodologia que os estimule a aprender significamente a matemática. Logo esta disciplina é fundamental para ter um conhecimento melhor do mundo em que vivemos.

O motivo do licenciando Q9 e S18 para participar da disciplina envolvia a apropriação do conhecimento geométrico com vistas a uma pós-graduação. Podemos dizer que eles tinham um motivo compreensível para cursar a disciplina.

Q2-N0 Eu espero que a disciplina de Geometria possa contribuir de um modo significativo para meu aprendizado, pois, esta disciplina é importante para minha formação já que meu intuito é seguir em uma carreira acadêmica, cujas pesquisas necessitam de suporte acessível e visual que a geometria proporciona.

Os acadêmicos Q2, Q11, S3, S10 e S16 participaram da disciplina para sanar dúvidas e incertezas relacionadas aos conhecimentos geométricos. A partir do momento que começassem a cursá-la, os acadêmicos tornariam detentores do conhecimento geométrico e, portanto, bons professores. Para eles, ser bom professor significa saber o conteúdo. Podemos dizer que não há uma coincidência de objetivos, logo eles apresentavam motivos compreensíveis.

Para Q4, S1, S6, S14, S17 e S19, o objetivo da disciplina é apenas o conhecimento matemático, assim há um motivo compreensível. O conhecimento geométrico é visto como ferramenta para outras disciplinas.

Q4-N0 ela é necessária em outras partes da matemática.

Podemos inferir que o motivo de Q4 está diretamente ligado ao sentido que ela atribui ao conhecimento geométrico sentido construído no decorrer da sua escolaridade, na qual a geometria era sempre deixada de lado, com a justificativa de não haver tempo para tratar do conteúdo.

Q4-N0 Sempre tive muita curiosidade pela Geometria, entendendo-a, maioria das vezes, apenas como formas geométricas os polígonos, mas não tive muito contato com ela no ensino básico por falta de tempo do professor para lecioná-la. Uma vez folheando o livro vi um capítulo de geometria e perguntei ao professor se iríamos estudá-lo, ele me respondeu que não, devido ao tempo, mas disse também que deveríamos estudá-lo. Porém, durante a educação básica eu aprendi que a geometria se tratava de figuras: quadrado, triângulo, pentágono.

Ou seja, não existe uma importância em si em estudar a geometria, mas existe a importância de estudar geometria para compreender outras partes da matemática, que talvez ela julgue ser mais importante que a própria geometria. Percebemos, nesse discurso, a presença da perspectiva evolucionista linear, segundo a qual a matemática constitui como um corpo cumulativo e sequenciado de conhecimentos produzidos. Segundo essa perspectiva, os conhecimentos precisam ser administrados em etapas cronologicamente sequenciadas (MIGUEL; MIORIM, 2008).

Outro motivo compreensível aparece nas narrativas de S7, S8, S12 e S15. Eles iniciam a disciplina, pois ela é um degrau necessário para a formatura, ou seja, ela faz parte da grade curricular do curso.

S15-N0 Essa disciplina é importante para minha formação já que preciso dela para concluir o curso.

5.2 Análise das narrativas relacionadas às AE

A seguir, trataremos as análises das narrativas relacionadas às 11 AE e apresentaremos as unidades de análise das narrativas referentes a cada AE.

- AE 1 – Pensando sobre a vida e movimento

A AE 1 denominada “Pensando sobre a vida e movimento”, conforme apresentamos no capítulo 02, tinha por objetivo discutir com os licenciandos acerca da natureza e do movimento. Essa foi a primeira aproximação dos licenciandos com a dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativa.

Da análise da narrativa N1 emergiram três unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças e reflexões acerca da atividade.

Quadro 6 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 1

Unidades de análise da narrativa N1	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q11, S4, S5, S6, S8, S9, S11, S12, S15, S17 e S19	Dos 30 sujeitos participantes da pesquisa, 21 apresentaram partes das suas narrativas com a descrição da atividade nessa primeira narrativa. Pudemos notar que todos os alunos do 4º ano se preocuparam com a descrição. Os licenciandos Q9, S6 e S9 apresentaram em suas narrativas apenas a descrição da atividade.
Mudanças	Q1, Q2, Q3, Q4, Q6, Q7, Q8, Q10, Q11, S1, S3, S5, S11, S12, S14, S15, S17	A reelaboração das verdades de forma individual e coletiva foi descrito por 16 licenciandos.
Reflexões acerca da atividade (conclusões)	Q1, Q5, Q10, Q11, S2, S3, S4, S5, S7, S8, S10, S11, S13, S14, S16, S18, S19	Nas narrativas de 14 acadêmicos foi possível encontrar reflexões acerca da atividade. Estes acadêmicos apresentaram o que compreenderam da dinâmica da aula e trouxeram suas conclusões acerca da atividade. Em suas reflexões, eles também narraram acerca da dificuldade em pensar acerca das questões da AE, já que se dizem mais habituados a demonstrações e resoluções de exercícios matemáticos. A insegurança, o medo da exposição e de não responder a pergunta de maneira correta foi narrado por Q1, Q10, S8, S19.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Nessa primeira AE, foi possível notar que para muitos ainda existia o medo da exposição, medo esse manifestado tanto nos diálogos em sala de aula como nas narrativas. Muitos alunos preferiram se silenciar tanto do debate em sala de aula como nas narrativas. O silêncio nas narrativas pode ser percebido nas narrativas que apresentaram apenas descrições da atividade, sem nenhum tipo de reflexão.

Vinte e um sujeitos apresentaram partes da narrativa com a descrição da aula. Segue como exemplo o excerto da narrativa de Q7:

> *Q7-N1 O primeiro momento da primeira atividade (Pensando a vida e o movimento) foi realizado individualmente, respondemos um questionário com perguntas relacionadas à leitura do texto. No segundo momento, fomos convidados a formar pequenos grupos e discutir sobre as respostas dadas e responder novamente o questionário, mas desta vez nos pautando sobre a ideia geral do grupo sobre o que tratava o texto. No terceiro momento, foi proposta uma discussão com todos os alunos. Discutimos sobre os diferentes tipos de natureza e qual a nossa concepção sobre o que está em movimento.*

Vejamos que tal excerto descreve a atividade e sua dinâmica. Olhando para tal descrição algumas indagações podem ser feitas: Será que os licenciandos não conseguiram compreender a AE e assim não se sentiram seguros para narrar? Por que eles preferiram não se expor e então dizer o que realmente pensavam? Será que para eles o mais importante da realização da AE foi a maneira que ela foi elaborada? Será que os licenciandos em matemática, mais acostumados às listas de exercícios do que a escrita de narrativas, tiveram dificuldades na escrita das narrativas? A narrativa de S14 nos permite inferir que é mais habitual, para o licenciando em matemática fazer demonstração e resolver exercícios:

> *S14-N1 A interpretação e as respostas das perguntas foi algo muito difícil, pois não estou acostumada com este tipo de atividade, é mais familiar e habitual a demonstração e resolução de exercícios matemáticos.*

O excerto da narrativa de S14 nos permite afirmar que o curso de formação de professores de matemática, ainda se preocupa, mais fortemente, com demonstrações e resoluções de exercícios matemáticos e parece que não há muito espaço para a discussão acerca dos movimentos da vida. Ou seja, ainda há forte preocupação com o conteúdo matemático, e há poucos momentos de reflexões sobre as diversas concepções de mundo, concepções essas que modificam a nossa maneira de conceber a matemática e pensar nos conceitos matemáticos que ensinamos.

Esta constatação vai ao encontro dos estudos de Cedro (2012), segundo o qual os processos de formação de professores ainda se encontram em um modelo reprodutivista e não se constituem como condição necessária para a emancipação do indivíduo e valorização da riqueza humana universal.

Com a análise da narrativa N1, podemos concluir ainda que a AE 1 causou estranhamento aos alunos que não estavam acostumados com esse tipo de atividade.

- AE 2 – Verdades eternas ou verdades aproximadas

A AE 2 tinha por objetivo principal discutir a unicidade e a veracidade eterna proposta pelos gregos da Antiguidade aos conceitos da geometria euclidiana. A atividade nos permitiu discutir acerca das transformações topológicas, bem como sobre a forma de vermos e representarmos os objetos.

Com essa atividade procuramos romper com a linearidade da história, uma vez que iniciamos a discussão acerca das geometrias não euclidianas, mesmo antes de enunciarmos os cinco postulados euclidianos.

Da análise das narrativas referentes à AE2 emergiram seis unidades de análise: descrição da atividade, mudanças, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos e da verdade matemáticas às verdades matemáticas.

Quadro 7 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 2

Unidades de análise da narrativa N2	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q3, Q4, Q6, Q7, Q8, Q9, S4, S8, S9, S10, S13, S18	Quatro acadêmicos: Q6, Q7, Q9 e S9 escreveram suas narrativas apenas descrevendo a aula. Cabe ainda salientar que Q9 e S9 já haviam apresentado na narrativa N1 apenas descrições da atividade. As inferências levantadas na análise de N1 continuam valendo para a narrativa N2.
Mudanças	Q2, Q3, Q4, S17	Para 04 alunos, a dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativa possibilitou mudanças na maneira de pensar o ver e o pensar suas verdades.
Reflexões	Q1, Q2, Q5, Q10, Q11, S1, S2, S5, S6, S11, S12, S13, S14, S16, S17, S18, S19	As mudanças na maneira de ver e conceber a matemática foram descrita pelos licenciandos. Dez alunos, Q2, Q5, Q10, S2, S5, S13, S14, S17, S18, S19, descreveram a dificuldade de aceitar e visualizar uma geometria diferente da geometria euclidiana.
Preocupação com a prática	Q1, S14	A preocupação com a prática foi notada nas narrativas de 2 licenciandos, cabe salientar que Q1 já ministrava aula como professora da educação básica.
Re(significação) de conceitos	Q8, S1, S2, S3, S4, S5, S7, S8, S10, S11, S12, S14, S15, S16	A (re)significação de conceitos foi notada na narrativa de 13 alunos do 2º ano e apenas em 1 narrativa de 1 aluno do 4º ano.
Da verdade matemática às verdades matemáticas	S1, S7, S11, S17	Quatro alunos descreveram acerca da existência de verdades matemáticas.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

As licenciandas Q1 e S14 ao desenvolverem a atividade proposta entraram em atividade, uma vez que tiveram seus motivos e objetivos coincidentes, aprender os conteúdos e pensar na prática docente. Cabe destacar que as duas licenciandas se diferenciam uma da outra, por causa da prática docente. Na época da pesquisa, a licencianda Q1 já era professora da educação básica. Sua preocupação estava em repensar a sua prática docente. Já, a licencianda S14 tratava acerca da sua futura prática docente, porque nunca havia trabalhado como professora.

S14-N2 Trazendo tudo isto para a nossa realidade de futuros professores de matemática, podemos fazer uma análise de como estes fatos podem ser interpretados no ambiente escolar. O ensino não pode ficar estático, os alunos precisam conhecer novos conceitos, serem instigados a pensar e resolver situações diferentes, pois não existem verdades absolutas, com o passar do tempo e a ação do ser humano tudo muda, pois tudo está em movimento.

Vemos assim que a AE promoveu a análise, por parte da licencianda de sua ação pedagógica.

Ao mesmo tempo, podemos inferir que essa AE possibilitou a Q11 entrar em contato com os conhecimentos que, até então, desconhecia: as geometrias. Esse contato gerou-lhe medo e angústia:

Q11- N2 A mensagem que se tira dessas atividades, são conhecimentos desconhecidos, que aos poucos vão se abrindo como uma caixinha de surpresas na mente de cada um. Encontrando erros, acertos e manifestações de o que novo gera medo e angustia, mas também leva a caminhos gloriosos.

Esta AE provocou mudanças na maneira de ver e conceber a matemática de S11.

S11-N2 Como consequência estas atividades fizeram-me mudar de comportamento perante a matemática, não a vejo mais como uma ciência exata, que os conteúdos devem ser decorados e não aprendidos, dessa forma ela fica mais atraente e chamativa, me sinto capaz de ampliar meus conhecimentos e com isso participar mais ativamente do desenvolvimento da sociedade.

Nessa AE, apresentarmos aos alunos um quadrado e um triângulo e afirmarmos que essas duas figuras são topologicamente equivalentes, também conversamos acerca das diferentes representações do mesmo objeto e sobre algumas geometrias não euclidianas. No entanto, nem todos os licenciandos assimilaram tais significações, já que a assimilação depende do sentido pessoal que tal significação tem para ele. O excerto da narrativa de S13-N2 mostra a dificuldade de aceitar as geometrias não euclidianas, enquanto o excerto de S3-N2 mostra um maior grau de assimilação de tais significações.

S13-N2 Em determinado momento, no texto era apresentado figuras em tamanhos diferentes, porém as mesmas figuras (triângulos), mostrando que se podem perceber a sombra de um mesmo objeto, mostrando que pela Geometria da Topologia são iguais, porém, leva-se em consideração a visualização. Tal visualização se torna mais complexa ao analisarmos figuras diferentes como a representação de um retângulo e um triângulo. Torna-se difícil imaginar a deformação da figura retângulo sendo transformada num triângulo.

S3-N2 Se tudo está em movimento não se pode considerar que existem verdades absolutas, o que é verdade para mim pode não ser verdade para a outra pessoa de acordo com os seus conhecimentos, ou melhor, pode ser que seja sim verdade, porém o outro pode considerar outro significado, então é bom especificar bem o que se esta falando para não haver essas confusões, por exemplo, dizer que a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180° não é verdade, na verdade depende da geometria em que estamos falando, para a geometria plana isso é verdadeiro, contudo na geometria hiperbólica, por exemplo, essa soma é sempre menor que 180°. Esse tipo de situação pode se tornar cada vez mais frequente, pois o conhecimento também está em constante movimento.

A narrativa S15-N2 mostra que, de certa forma, a AE 2 provocou o pensar acerca da significação de um triângulo.

S15-N2 Na segunda atividade tinha várias perguntas, mas uma me chamou atenção onde era: “Olhando ao seu redor você consegue encontrar algum triângulo retângulo?” Nesta pergunta tinha dito que sim, mas será que conseguimos encontrar um triangulo?! Ou será que conseguimos ver apenas uma representação de um triângulo? Essa e muitas outras perguntas nos faz pensar, pois na verdade triângulo é o nome de uma representação de uma forma geométrica.

Entendemos que por meio da AE 2, os licenciandos (re)significaram alguns conceitos de geometrias, isso, pois essa atividade possibilitou, em graus diferentes, aos alunos um movimento nos sentidos que eles atribuíam às geometrias e permitiu a formação de sujeitos com potencialidades de um pensar epistêmico, ou seja, sujeitos que mais do que saber coisas, mais do que receber informações, colocam-se à frente da realidade de modo a pensar historicamente essa realidade e reagir a ela (LIBÂNEO, 2004a, p. 141). Essas mudanças educam a vontade de entendermos melhor o mundo em que vivemos e podem permitir que nos formemos como cidadãos preparados para uma leitura crítica das transformações que ocorrem em nossa sociedade.

Chama a atenção o fato de que, de acordo com Leontiev (2010), o homem, ao nascer, encontra significações prontas e elaboradas historicamente e apropria-se delas, e a significação é a forma como o homem assimila a experiência humana. Para o autor, a significação mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste.

Segundo o mesmo autor, as significações não existem fora dos cérebros humanos concretos e que não existe um reino de significações independente e comparável ao mundo platônico das ideias. Assim, o significado de triângulo não se encontra no objeto em si, muito menos no mundo platônico das ideias, mas no cérebro humano concreto e tal significação está relacionada ao sentido pessoal construído por cada um.

- AE 3 – O tempo e os gregos

O objetivo da AE 3 era discutir com os licenciandos a questão da medida, o aparecimento das incomensurabilidades e do fator tempo. Para Hogben (1970), medir volume e pesos de objetos, área de superfície, comprimento de lados de uma superfícies, ou ângulos é bem diferente de usarmos números para contarmos as ovelhas que se encontram no pasto. “Contamos moedas, maçãs, dias e homens. Estimamos altura, voltagens, áreas, quartos e pulsações” (HOGBEN, 1970, p. 78). E foi esse o uso dos números para contar e medir que produziu uma grande dificuldade de entendimento e provocou uma crise na matemática.

> Defrontado pela dificuldade de adaptar os números inteiros à expressão de medições feitas por seres humanos imperfeitos, num mundo imperfeito, com recurso de órgãos sensoriais imperfeitos, instrumentos imperfeitos, num mundo imperfeito e mutável, o homem prático, durante muito tempo, contentou-se com acrescentar novas e novas divisões à sua escala de medida (HOGBEN, 1970, p. 80).

O homem cada vez mais introduzia divisões menores em sua vara de medir. E o que fizeram os gregos, antigamente? Os gregos pararam as figuras, desenhando-as na areia. Com o uso de uma linha geométrica, os gregos representavam a altura de um muro, com um retângulo geométrico eles representavam um terreno retangular. De acordo com Hogben (1970, p. 1241), a geometria grega não levava em consideração a existência do tempo, já que poderiam passar anos e aquela mesma linha geométrica continuaria a representar a altura daquele muro e o retângulo geométrico continuaria a representar o terreno retangular.

O fator tempo era desconsiderado pelos gregos da antiguidade, mas isso ocorria, pois eles não estavam acostumados a grandes e radicais variações de costumes. “Contavam o tempo com relógio solares e ampulhetas. Não possuíam nenhum aparelho físico, capaz de medir intervalos de tempo inferiores àquele que leva um ovo para cozinhar” (HOGBEN, 1970, p. 126). O fator posição era outro fator importante que era desprezado pela geometria grega.

> A discrepância observada era devida a uma razão muito simples: não terem as figuras de Euclides, posição determinada. Com efeito, a geometria grega considerava idênticas, coisas evidentemente diversas. Não desprezava apenas o tempo, também a posição. Foi só quando a determinação do ponto de um navio no mar inspirou uma nova geometria, que o fator tempo se incorporou definitivamente à ciência geométrica (HOGBEN, 1970, p. 127).

De acordo com Hogben (1970, p. 39), foi meditando acerca de mapas, longitude, latitudes em um mundo tumultuoso das grandes navegações, que surge uma nova geometria, denominada geometria de Descartes.

> No mundo tumultuoso das grandes navegações, relógios mecânicos substituem os sacerdotes na função tradicional de registrar o tempo. Nessa geometria que pode representar o tempo e uma religião na qual não há dias santos emergindo do mesmo conceito social. Desta geometria do tempo, um grupo de homens que estudava o mecanismo do relógio de pêndulo e fazia novas descobertas sobre o deslocamento dos planetas, elaborou uma nova linguagem das grandezas capaz de medir o movimento. Hoje a chamamos de Cálculo (HOGBEN, 1970, p. 40).

O mundo em que vivemos, com certeza, é muito diferente do que viveram na Grécia Antiga, ou mesmo em períodos anteriores.

Os gregos viveram em um tempo em que podiam ver homens a medir os ângulos entre as estrelas, desenhar figuras na areia e a medir altura de objetos utilizando para isso sua sombra. O fator tempo para eles não era crucial.

Ao debater com licenciandos acerca da geometria euclidiana e de suas verdades, pudemos evidenciar esse fator, justificando que não podemos estabelecer comparações diretas com o nosso tempo.

O paradoxo de Aquiles e da tartaruga, por exemplo, não foi resolvido na antiguidade. Segundo Caraça (1970, p. 6), na Grécia houve uma degradação do número em relação à geometria, a exclusão do conceito quantitativo de infinito que provocou o horror ao infinito e o abandono das concepções dinâmicas que levou ao horror ao movimento.

Discutir com os acadêmicos sobre tal paradoxo, permitiu-nos mostrar que o movimento não é uma sucessão de estados particulares, isso é estudá-lo pelo método estático. Para entendermos o movimento, precisamos aceitar o infinito.

> Na verdade, a essência do *movimento* é tal que, quando vamos a querer fixar a posição dum móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajetória, já ele aí não encontra outro, o móvel percorreu um segmento, como uma infinidade de pontos (CARAÇA, 1970, p. 215).

Nessa atividade, houve um problema nosso de comunicação com os alunos do segundo ano.

Estávamos em época de eleição para a direção do campus e um dos candidatos pediu os 15 min finais da aula do segundo ano para a apresentação do seu projeto. Com a interrupção da aula e a ansiedade por conta das disputas eleitorais, não ficou claro para os alunos do segundo ano que eles deveriam postar a narrativa acerca dessa atividade.

Na aula seguinte, iniciamos a AE 4 e os alunos reclamaram de ter que realizar duas narrativas. Assim, ficou acordado entre nós e os alunos do segundo ano que eles fizessem apenas uma narrativa, referente à AE 3 e à AE 4. No entanto, ao elaborá-la os licenciandos se atentaram mais fortemente à AE 4. Por conta disso, as análises da AE 3 foram feitas a partir das narrativas dos alunos do quarto ano, já que os licenciandos do segundo ano não a fizeram.

Da análise da narrativa N3 emergiram quatro unidades de análises das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões e crítica às atividades.

Quadro 8 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 3

Unidades de análise da narrativa N3	**Sujeitos**	**Inferências**
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10	Apesar de 09 licenciandos apresentarem a descrição da atividade, eles evidenciaram outras reflexões em suas narrativas.
Mudanças	Q4, Q5, Q10	Os acadêmicos Q4, Q5 e Q10 afirmaram que com as discussões ocorreram mudanças na maneira de pensar a AE.
Reflexões	Q1, Q2, Q5, Q6, Q7, Q9, Q10, Q11	As reflexões destes licenciandos explicitaram a dificuldade com os conceitos de velocidade e movimento. Os licenciandos Q1, Q2, Q9 e Q10 só aceitaram que Aquiles iria passar a tartaruga após a demonstração matemática de tal fato. Para Q3, Q7 e Q11, a demonstração matemática por séries convergentes não foi suficiente para que eles compreendessem que a ultrapassagem. A licencianda Q6 afirmou em sua narrativa que estava convicta desde o início que ocorreria a ultrapassagem, no entanto como alguns colegas afirmavam o contrário, ela preferiu se silenciar e não se manifestar
Crítica as atividades	Q4, Q8, Q11	Q4, Q8 e Q11 narraram sobre suas inquietações. Segundo Q4 e Q8, as atividades são interessantes. No entanto, elas não se relacionam com a disciplina. Para Q11, atividades que envolvam demonstrações e teoremas não fazem sentido para ela, são vagas.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Ao realizarmos as análises das narrativas referentes a essa atividade, pudemos perceber que sete licenciandos aceitam que Aquiles alcançaria a tartaruga. Destes, apenas Q2, Q6, Q8 e Q9 afirmaram desde o início que a ultrapassagem aconteceria. Q8 e Q9 utilizaram argumentos físicos, mostrando inclusive em qual ponto o encontro ocorreria. Q2 e Q6 mostraram compreender que a ultrapassagem ocorreria. No entanto, elas não conseguiram demonstrar matematicamente. Podemos inferir pelas narrativas de Q2 e Q6 que elas compreenderam que o movimento não é uma sucessão de estados particulares. O argumento de Q2 – N3 mostra que ela compreende que quando fixa à posição de um móvel, num instante, o outro já percorreu um segmento.

Q2-N3 Na segunda questão respondi que Aquiles conseguiria ultrapassar a tartaruga, pois a tartaruga parte com uma vantagem de cem metros, mas enquanto a tartaruga percorreu mais dez metros, Aquiles percorreu cem metros, assim quer dizer que enquanto a tartaruga percorrer mais dez metros, Aquiles vai ter percorrido mais cem metros, assim Aquiles já vai ter ultrapassada a tartaruga. Mas não soube dizer em que ponto Aquiles alcançaria a tartaruga.

As licenciandas Q1, Q4, Q5 e Q10 inicialmente afirmaram que tal ultrapassagem não iria acontecer. As acadêmicas Q1 e Q10 passaram a aceitar o fato após a demonstração matemática.

Q10-N3 Muito interessante a atividade, pois se pensarmos na distância de vantagem da tartaruga ela nunca iria ultrapassar o homem, mas graças as séries convergentes ele a ultrapassará sim.

Veja que pelo excerto da narrativa Q10- N3, não podemos inferir se ela compreendeu que o movimento não é uma sucessão de estados particulares. Podemos inferir que ela agrega valor às demonstrações matemáticas. Mesmo que sua ideia de movimento não seja compatível com o fato de Aquiles ultrapassar a tartaruga, ela acaba aceitando o fato, já que isso foi demonstrado matematicamente. Aqui, vemos o sentido a ela atribuído às demonstrações, algo inquestionável, que precisa ser aceito, mesmo que eu não concorde.

Com todas as discussões oportunizadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, as licenciandas Q3, Q7 e Q11 afirmaram em suas narrativas que a ultrapassagem não aconteceria. Vejamos no excerto Q3-N3 que as discussões não mudaram a maneira de compreender o movimento.

Q7-N3 Eu, assim como a maioria, pensei que Aquiles nunca ultrapassaria a tartaruga, visto que essa sempre estaria um pouquinho à frente. No entanto, vimos que em um determinado momento Aquiles via ultrapassar a tartaruga e isso pode ser provado utilizando séries convergentes. Mesmo assim, essas atividades não me convencem, não sei se porque não me identifico com tais atividades ou porque não sei resolver tais atividades, para mim a tartaruga sempre vai estar a frente de Aquiles, nem que seja infinitésimo de centímetros.

As alunas Q3, Q7 e Q11 mostraram que possuem outro sentido em relação às demonstrações. Para elas, as demonstrações matemáticas nem sempre são lógicas e possíveis de serem entendidas.

Q11- N3 Mas, questões que envolvem muita lógica matemática, não acredito que tenham sentido. A lógica é um ramo que vive debruçado em demonstrações, algumas exaustivas outras simples, fundamentadas em definições e propriedades, um círculo de ideias que não são refutáveis e mesmo assim para mim não tem lógica. Estudei fundamentos da matemática elementar, estruturas algébricas, e acredite, tirei notas boas, mas não vi sentido, pois existem definições, teoremas, propriedades, axiomas, tirados sabem sei lá de onde (você que lê não leia com maus olhos isto, mas como uma expressão pessoal do meu eu), sei que dizem que foram matemáticos sábios que definiram, provaram, morreram por isto.

Vejamos que o sentido atribuído pelas licenciandas Q3, Q7 e Q11 às demonstrações matemáticas, está relacionado aos motivos que as levam a pensar acerca das demonstrações.

O excerto da narrativa de Q11-N3 deixa claro que o motivo que a leva a resolver uma demonstração é a obtenção de nota e não há uma preocupação com a tomada de consciência das suas ações. Isso, pois, o motivo está relacionado ao sentido pessoal.

De acordo com Leontiev et al. (2006), existe uma relação entre motivos e necessidades. Para os autores, a necessidade surge primeiramente como um pré-requisito para a atividade. Somente quando a necessidade adquire objetividade é que ela se torna um motivo e isso faz com que o sujeito entre em atividade.

Assim, entendemos que alguns licenciandos apresentaram necessidades para pensar acerca das demonstrações, cujo objeto que é capaz de satisfazer a necessidade não está claramente delineado. Ou seja, alguns acadêmicos não compreendiam quais os objetivos para estudar as demonstrações matemáticas e faziam estes estudos apenas a fim de obter notas.

- AE 4 – A quantificação do espaço

O objetivo da AE 4 era promover a discussão da matemática, em especial, das formas geométricas como uma criação humana, bem como debater o conceito de dimensão da geometria euclidiana e por meio do uso de sombras trazer elementos da geometria projetiva.

Da análise da narrativa N4, emergiram três unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, preocupação com a prática e (re)significação de conceitos.

Quadro 9 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 4

Unidades de análise da narrativa N4	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q10, Q11, S2, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S14, S17, S18	Quatro dos 11 alunos do 4º ano apresentaram narrativas apenas descrevendo a atividade. Mais uma vez, isso nos leva a pensar acerca dessa postura por parte dos licenciandos.
Preocupação com a prática	Q11, S11, S14	Podemos inferir que a AE 4, construída a partir de elementos lógico-históricos de geometrias e vivenciada pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas foi geradora de necessidade e de motivos para ensinar e aprender a ensinar para os licenciandos Q11, S11 e S14.
Re(significação) de conceitos	Q1, Q6, Q7, Q11, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S11, S12, S13, S14, S16, S17, S18	A (re)significação de conceitos, principalmente do conceito de dimensão, foi trazida na narrativa da grande maioria dos licenciandos do 2º ano.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

De acordo com Flores (2007), levantar a problemática da representação do espaço e dos objetos no espaço significa discutir a questão do desenho, como os objetos se encontram no espaço e como recolocá-los no papel, na parede, na tela, no espaço de representação. A AE 4 permitiu que discutíssemos a representação das coisas do mundo, das suas formas, dos seus contornos e das suas diversas representações. Desenvolver uma atividade com o objeto ao natural, depois com ele embrulhado em papel alumínio, com a sua sombra, rotacionando-o, aproximando-o, afastando-o permitiu que os acadêmicos (re)significassem os seus conceitos de representação e dimensão.

Os excertos das narrativas de Q1-N4, S4-N4 exemplificam a (re)significação do conceito de dimensão.

Q1-N4 Durante esses desenhos e observações surgiram as discussões acerca das dimensões em que estes objetos estavam. Quando os objetos foram colocados no retroprojetor ficou claramente evidente que os mesmos representavam uma figura em duas dimensões, e quando camuflados ou descobertos representavam uma figura em três dimensões. Alguns objetos tinham a espessura tão mínima, que nem pareciam estar em três dimensões, porém depois das discussões conseguimos visualizar que estas também estavam em terceira dimensão.

S4-N4 Fiquei surpreso ao saber também que nossos desenhos eram tudo em três dimensões, pois a folha em que os fazemos tem uma espessura, e eu acreditava ser tudo em duas dimensões.

O excerto da narrativa de S16-N4 exemplifica a (re)significação de representação.

S16-N4 No decorrer de algumas semanas estamos discutindo as formas, onde elas podem variar de acordo como o modo em que a objeto é apresentado, uma forma de exemplificar esse caso seria, se pegarmos um objeto qualquer e mudar sua posição em vários momentos verificaríamos que nenhuma das vezes sua representação seria igual quando projetada sua sombra ou então quando envolvemos tal objeto em um embrulho, onde o objeto mesmo sendo o mesmo muda seu formato ou sua representação que seja.

Vejamos que a AE 4 possibilitou a alguns sujeitos a mobilidade em relação aos seus próprios conhecimentos de geometria euclidiana e de geometrias não euclidianas, mostrando que o lógico-histórico se constituiu como atividade formadora para esses sujeitos. Cabe ressaltar que não podemos inferir que a AE 4 possibilitou a mesma mobilidade a todos os sujeitos, uma vez que tivemos um número considerável de narrativa que priorizou a sua descrição. Essas narrativas podem evidenciar um desconforto com as atividades ou uma falta de sentido para escrevê-las ou até mesmo o medo de escrever o que de fato se pensa.

Ou seja, a escrita das narrativas apresentou um sentido para alguns licenciandos que a entenderam como um modo de reflexão, descrição, partilha entre os pares, tais como sentimentos de avanços e recuos (PASSOS; GALVÃO, 2011), que vivenciaram durante a disciplina e como uma possibilidade de romper com as práticas de formação de professores de matemática que priorizam a linguagem técnica e destacam a oralidade como única forma de comunicação (FREITAS; FIORENTINI, 2008). A escrita das narrativas apresentou outro sentido para os licenciandos que a entenderam como uma obrigação, uma condição necessária para a obtenção de nota para a aprovação na disciplina.

- AE 5 – Primeiros passos na arte de medir

A leitura de alguns livros de história da matemática que priorizam o eurocentrismo pode nos levar a pensar que a matemática nasceu na Grécia, com Tales, Pitágoras, Euclides, dentre outros. O objetivo desta atividade era refletir sobre textos que relatassem acerca do homem e a sua necessidade de conquistar o tempo e medir o espaço, em tempos anteriores ao da Grécia Antiga. A intenção era valorizar a riqueza humana universal e que isso possibilitasse aos alunos perceber a matemática como uma construção humana, nascida da atividade humana e que tem raízes e contribuições culturais de vários povos.

Da análise da narrativa N5, emergiram sete unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões, (re)significação de conceitos, preocupação com a prática, crítica às atividades e concepção de matemática como construção humana.

Quadro 10 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 5

Unidades de análise da narrativa N5	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, S2, S4, S5, S6, S8, S11, S12, S13, S15, S16, S17, S18	Destacamos nessa unidade de análise da narrativa a licencianda S6 que manifestou o seu silêncio por meio de uma narrativa apenas descritiva.
Mudanças	Q1, Q2, Q3, Q6, Q11, S9, S17	Em grupo, os alunos conseguiram (re)significar conceitos.
Reflexões acerca da atividade	Q4, Q6, Q11, S2, S5, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18	Os alunos narraram as suas conclusões a respeito da atividade, por exemplo, que as sombras dos objetos giram em sentido anti-horário, que as menores sombras ocorrem por volta do meio dia, que até o meio dia, o tamanho das mesmas diminui e que após esse horário voltam a crescer.
Re(significação) de conceitos	Q1, Q2, Q3, Q5, Q6, Q7, Q9, Q10, Q11, S2, S3, S4, S5, S7, S9, S10, S11, S12, S13, S15, S17, S18	Ângulo, grau, circunferência, simetrias, divisão da circunferência em 360.
Preocupação com a prática	S11	Novamente, o licenciando S11, que já é professor da educação básica, demonstrou em sua narrativa, preocupação com a sua prática docente.
Crítica às atividades	Q4, S13	S13 considerou a atividade muito cansativa e Q4 vê tais atividades como pertencentes apenas à história da matemática, não vendo ligação com a disciplina de geometria.
Concepção da matemática como construção humana	Q1, Q2, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q11, S1, S2, S3, S4, S5, S7, S9, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18	As narrativas dos licenciandos nos permitem inferir que eles conseguiram perceber a matemática como uma atividade humana.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Com o desenvolvimento da AE 5, possibilitamos que os licenciandos tivessem contato com a história da matemática que não privilegia apenas datas, nomes e locais, ou seja, com a história factual, mas com a história que procura discutir influências sociais, políticas, religiosas e filosóficas que permitiram a vários homens estabelecer determinadas relações matemáticas. Romper com a história factual se tornou necessário, uma vez que no questionário inicial, pudemos perceber nas narrativas de 14 acadêmicos que os seus conhecimentos acerca da história da matemática estavam atrelados à perspectiva factual, privilegiando nomes, datas, pessoas e locais. Outros 14 licenciandos afirmaram na narrativa N0 que pouco ou nada conheciam acerca da história da matemática.

Os excertos das narrativas Q1-N5 e Q5-N5 nos mostram uma nova maneira de conceber a matemática como uma construção humana e que desconstrói a ideia da história estritamente factual.

Q1-N5 Os povos da antiguidade começaram a observar fenômenos que apareciam com maior frequência como o sol, a lua e as constelações. A sombra do sol projetada sobre algum objeto, por exemplo, era como um relógio, pois a partir daí poderiam saber se estavam nas horas da manhã, na metade do dia, ou no final da tarde. Dentre estas constelações havia algumas estrelas que serviam como referencia, ou seja, determinavam as épocas de colher ou semear alguma plantação, as épocas chuvosas e escassas, de geada e muito calor. Porém, essas análises e conclusões, advindas dessas observações não eram únicas, ou seja, cada grupo caracterizava esses fenômenos de uma forma diferente. Até que após muitas observações definiram-se as estações do ano, os 12 signos zodiacais, e principalmente o ano de 365 dias, que variava para mais ou para menos em alguns grupos.

Q5-N5 Durante as discussões em grupo sobre a atividade realizada me apropriei de novos conhecimentos que não tinha, sendo este que "cada hora no relógio solar equivale a 15º, ainda aprendi que essa forma de dividir o dia poderia ter sido feita de outra maneira se a medida em graus tivesse sido inventada com base em outro sistema numérico não sendo o sexagesimal".

Os dois excertos a seguir, Q4-N5 e S14-N5, representam dois sentidos diferentes atribuídos pelos licenciandos à AE 5.

Q4-N5 As atividades realizadas e as discussões foram bem proveitosas, mas essas atividades, em minha opinião, estão mais com cara de História da Matemática do que Geometria, sinceramente não gosto dessas atividades e preferiria que a professora estivesse definindo no quadro o que é ponto, reta, plano e os demais entes geométricos.

Para a licencianda Q4, existe uma separação entre o lógico e o histórico, e a disciplina de história da matemática deve se constituir em uma disciplina isolada da disciplina de geometria. Essa separação por ela proposta está ligada ao sentido atribuído à disciplina de geometria e a figura do professor. É possível identificar no excerto de sua narrativa a defesa de argumentos de natureza epistemológica.

Segundo Miguel e Miorim (2008, p. 70), os argumentos de natureza epistemológica sugerem que a educação matemática deva fazer com que o estudante compreenda e se aproprie da matemática, idealizada como um conjunto de resultados, métodos, procedimentos e algoritmos. Cabe salientar que, segundo Leontiev (2010), o sentido é atribuído pelo sujeito no decorrer da sua vida e não é possível ensinar o sentido de algo a alguém.

De acordo com S14, a atividade possibilitou olhar, observar e compreender os movimentos e as fluências do mundo em que estamos inseridos.

S14-N5 Com a vida corrida e agitada, não parramos para observar as pequenas situações do dia a dia, foi importante realizar esta tarefa, pois estamos acostumados apenas com aulas teóricas e listas de exercício, nunca desenvolvemos atividades práticas para aprimorar o conhecimento aprendido em sala de aula, o muito que fazemos e ler sobre alguma aplicação de que esta sendo estudado.

A atividade e a dinâmica utilizadas possibilitaram a (re)significação de conceitos, principalmente dos conceitos de ângulo e medida de ângulo.

Q11-N5 A discussão foi tremenda, que se fosse para narrá-la aqui faltaria espaço, não lembro muito a definição dada pelo autor, mas o problema se deu em relação à palavra figura, o autor iniciava a definição dizendo que ângulo é a figura... e todos queriam entender o sentido desta palavra. Houve pesquisas em dicionários eletrônicos, em artigos e outros livros, mas só piorava. E isso, só gerava mais dúvidas, até que outra dúvida surgiu, o que é grau? Que eu até então brinquei: Oi ângulo, qual é o seu grau? A professora e alguns alunos tentaram abdicar esta dúvida, citando que grau é a unidade de medida do ângulo, mas estava difícil. Foi hilariante esta discussão, atingiu níveis que ninguém esperava. Foi explicada a questão das 360 partes da divisão da circunferência, depois foi instigado se esta circunferência fosse aberta em uma reta, ou se esta divisão fosse feita em um quadrado se continuaria o mesmo grau.

A AE 5 permitiu que discutíssemos como os licenciando acerca do homem e a sua necessidade de conquistar o tempo e medir o espaço, em tempos anteriores ao da Grécia Antiga. Com a leitura destes textos pudemos debater com os licenciandos a ideia de ângulo na geometria euclidiana, como um conceito congelado, e a ideia de ângulo anterior a geometria euclidiana, como um conceito em movimento. No entanto, percebemos que nem todos os licenciandos consideraram a atividade importante, e como já relatado, isso está relacionado ao sentido atribuído à matemática e ao professor.

- AE 6 – Sulbasutras

O objetivo dessa atividade era apresentar aos licenciandos a matemática védica e iniciar a apresentação da axiomatização da geometria euclidiana a partir da geometria encontrada nos Sulbasutras.

Da análise da narrativa N6 emergiram sete unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, crítica às atividades e concepção da matemática como construção humana.

Quadro 11 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 6

Unidades de análise da narrativa N6	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q11, S2, S4, S5, S6, S8, S9, S11, S13, S14, S15, S16, S17, S17	Cinco acadêmicos, Q5, Q7, S4, S6 e S9 apresentaram narrativas contendo apenas a descrição da atividade.
Mudanças	Q6, S7, S8	A (re)elaboração das verdades foi descritas por três alunos.
Reflexões	Q6, Q8, Q11, S2, S3, S5, S7, S10, S13, S16, S17	Os licenciandos descreveram acerca da experiência em conhecer o sulbasutras.
Preocupação com a prática	S3	Apenas uma licencianda apresentou preocupação com a sua futura prática docente.
Re(significação) de conceitos	Q3, Q6, Q10, S1, S2, S3, S11, S14, S15	A (re)significação de conceitos de geometria euclidiana foi narrada por 9 acadêmicos.
Crítica às atividades	Q1, Q4, Q6, Q9	Enquanto alguns alunos preferiam ainda se silenciar, apresentando narrativas estritamente descritivas, percebemos os alunos do 4º ano manifestando suas inquietações e críticas em relação às atividades e à dinâmica utilizada para organizar o ensino.
Concepção da Matemática como construção humana	Q1, Q4, Q10, S1, S2, S3, S5, S7, S8, S10, S11, S13, S17	Nas narrativas, foi possível notar a presença da atividade humana na construção da matemática.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Os licenciandos Q1, Q4, Q6 e Q9 trouxeram em suas narrativas a insatisfação com a dinâmica que estava sendo utilizada. As licenciandas Q5 e Q7 deram sinal dessa insatisfação por meio da narrativa estritamente descritiva. Assim, podemos afirmar que a maioria dos alunos do quarto ano apresentava apenas motivos compreensíveis para realizar a atividade, uma vez que os motivos que os faziam realizar a AE não coincidia com o objetivo atribuído por nós, conforme excerto da narrativa Q4-N6.

Q4-N6 Embora a atividade tenha sido interessante, pois discutimos algumas coisas de geometria como semelhança de triângulos e reta tangente a uma circunferência, não gosto dessas atividades porque não vejo o formalismo das definições e me parece que fica algo incompleto, que foi o que aconteceu com essa atividade com algumas demonstrações inacabadas. Por isso não consigo entender como essas atividades me ajudam a aprender geometria!

Opondo-se aos argumentos defendidos pela grande maioria dos alunos do quarto ano, a acadêmica S3 mostrou em sua narrativa que a dinâmica estava despertando seu interesse e curiosidade, tornando-a mais criativa e investigativa.

De acordo com Freire; Macedo (1990), a criatividade precisa ser estimulada não apenas na individualidade do aluno, mas também na individualidade no contexto social. Assim inferimos que para alguns licenciandos, as AE fundamentadas em pressupostos lógico-históricos dos conceitos de geometria provocaram manifestações de elementos criativos e de descobertas. Isso pode ser notado nos excertos das narrativas de S3-N6 e S5-N6.

S3-N6 Diria que agora já estamos mais entusiasmados com as aulas de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana e com a nova metodologia utilizada pela professora, acredito que a metodologia está despertando nossa curiosidade, nos levando a ser mais criativos e investigativos. Ao iniciarmos um novo texto a ser discutido já ficamos na expectativa de qual o conteúdo que será trabalhado. *S5-N6 Ter demonstrado matematicamente essas decomposições e cálculos de área para mim foi uma das partes mais interessante. Você estudar tentar entender e conseguir provar, conseguir dizer que algo é válido devido aos teoremas que nos garante fazer isso ou aquilo foi legal, e durante as demonstrações isso foi feito muito, a utilização dos teoremas que nos garante alguns passos.*

Vale a pena ressaltar que vários licenciandos passaram a denominar, em suas narrativas, a dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe-narrativas, utilizada por nós, para organizar o ensino, de “nova” metodologia ou simplesmente, “metodologia”.

A (re)significação de conceitos e a falta de conhecimento sobre a geometria euclidiana ficam evidenciadas na narrativa do licenciando S11.

S11-N6 Na ocasião a professora aproveitou para formalizar os conceitos com base na geometria que temos hoje, utilizando principalmente o livro de Geometria Plana e Espacial um estudo axiomático 2ª ed. De João Roberto Gerônimo e Valdeni Soliani Franco. Revisamos todas as

definições básicas de quadriláteros como: o trapézio, paralelogramo, losango, retângulo, quadrado e a inclusão desses no conjunto de quadriláteros, e também vimos às definições de triângulos, triângulo escaleno, isósceles e equiláteros. Também entendemos melhor os conceitos de paralelismo, perpendicularismo, semelhança de triângulos, o teorema de Talles e o teorema de Pitágoras. As dificuldades em compreender os conceitos e demonstra-los foram enormes, pois, tinham noções incompletas de trapézio, retângulos, retângulos e outros, por exemplo, não estamos acostumados a ver um quadrado como sendo um tipo de trapézio, paralelogramo, retângulo e losango. É unânime o fato de nós acadêmicos não termos estudado com mais qualidade e aprofundamento a geometria na nossa formação elementar.

Trabalhar com a geometria encontrada nos sulbasutras, possibilitou que os licenciandos conhecessem aspectos da geometria anteriores a Euclides, de povos que motivados por necessidade de rituais ou por suas relações com a natureza, criaram, inventaram e aprimoraram conhecimentos para lidar com essas relações.

S18-N6 Eu particularmente achei muito interessante, pois não achava que os povos antigos dominavam tanto conhecimento a ponto de fazerem conversões exatas utilizando quadrados, circunferências, triângulos, trapézios e retângulos, ou descobertas bem aproximadas, como o caso da raiz quadrada de 2, inclusive no Sulbasutras, já se encontrava o Teorema de Pitágoras em sua formulação geral, realmente incrível.

Os conteúdos geométricos, encontrados nos Sulbasutras, permitiram que discutíssemos com os alunos acerca das demonstrações geométricas e o método axiomático, além do que possibilitaram o trabalho com o conceito de área, não apenas como uma fórmula a ser decorada. Pois, trabalhar com medições e unidades adotadas pelos indianos viabiliza a discussão sobre o conceito de área.

De acordo com Gaspar (2004, p. 190), existe dois aspectos que devemos considerar quando pensamos na questão de como medir a área de uma superfície, o primeiro é o cálculo da área utilizando determinada unidade de medida e o segundo é o cálculo da área por meio do processo de decomposição e recomposição da figura dada. Esse segundo aspecto, segundo Gaspar (2004, p. 190) "é muito encontrado na história da matemática das civilizações, e consiste em transformar a figura que desejamos calcular a área em uma outra figura, de mesma área que a figura dada, cujo método para calcular sua área seja conhecido".

Assim, entendemos que o estudo da geometria encontrada nos Sulbasutras permitiu que discutíssemos a medição da área de superfícies por meio da decomposição e recomposição da figura dada e não apenas como a obtenção de um valor numérico por meio de uma fórmula estabelecida.

- AE 7 – A geometria grega

O objetivo da AE 7 era apresentar a axiomatização da geometria euclidiana plana.

Da análise da narrativa N7 emergiram sete unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, da verdade matemática às verdades matemáticas, concepção da matemática como construção humana; a preocupação com as notas e com as avaliações.

Quadro 12 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 7

Unidades de análise da narrativa N7	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q10, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S9, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19	Vinte e cinco alunos fizeram em suas narrativas descrição da atividade.
Reflexões	Q1, Q3, Q4, Q7, Q9, Q11, S2, S3, S4, S5, S6, S9, S10, S11, S12, S16, S18	Os alunos apresentaram suas reflexões acerca da mudança da geometria encontrada nos sulbasutras para a geometria euclidiana. Para Q4, Q9, S5, S9, S16, a axiomatização da geometria euclidiana apresentou-se para alguns alunos como algo impossível de se contestar, uma vez que está demonstrada matematicamente. Os alunos Q6, Q11 e S1 escreveram acerca de suas dificuldades em entender o sentido das demonstrações.
Preocupação com a prática	Q2, Q3, Q5, Q7, S11, S13, S16	Novamente S11 e S13 apresentaram preocupações com a prática docente.
Re(significação) de conceitos	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, S1, S2, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S15, S17, S18	A atividade possibilitou que muitos conceitos fossem (re)siginificados.
Da verdade matemática às verdades matemáticas	S1, S3, S10, S11, S13, S14, S16, S17, S18, S19	Os licenciandos, todos do 2º ano, escreveram em suas narrativas acerca das verdades matemáticas.
Concepção da matemática como construção humana	Q1, Q2, Q7, Q8, Q10, S1, S2, S3, S5, S7, S8, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17	Nas narrativas, foi possível perceber a presença do homem e não apenas de grande gênio, responsável por toda a construção da geometria.
A preocupação com as notas e com as avalições (litas de exercícios)	Q6, Q9, Q11	Os acadêmicos lembraram-se da necessidade das listas de exercícios.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Podemos inferir que as atividades desenvolvidas permitiram uma mudança no sentido e no significado atribuído pelos licenciandos à matemática. O excerto S10-N7 mostra que os acadêmicos começaram a questionar acerca da existência de uma matemática pronta, exata e acabada:

> *S10-N7 O grande questionamento é que, "postulados são definições que não são provadas, e que realmente se acredita", mas se não são provadas, por que as utilizamos e dizemos que a matemática que acreditamos hoje é exata? A resposta é simples, para as nossas necessidades a matemática que estamos estudando está suficiente transformada. Podemos ressaltar também que os postulados, se você analisar e interpretar, são verdades sem prova.*

A dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas aliada a AE com elementos da perspectiva lógico-histórico nos permite inferir, por meio da leitura e análise das narrativas, que alguns licenciandos superaram a preocupação apenas com a nota e a preocupação em apenas aprender o conteúdo e pensaram também na sua futura prática docente.

> *Q7-N7 Entretanto, essas discussões são interessantes, mas ao mesmo tempo nos faz repensar sobre o que realmente sabemos e se sabemos alguma coisa, não temos ainda uma visão que nos permite analisar minuciosamente detalhes que podem fazer a diferença para o aprendizado dos alunos. Eu acho válido quando surgem essas discussões que envolvem conceitos que serão trabalhados com os alunos na sala de aula, pois acredito que preparar uma aula é fácil, mas pensar em uma maneira que vai realmente esclarecer certos conceitos para os alunos de modo a sanar a sua dúvida é muito difícil e essas discussões me ajudam a ter uma visão mais ampla sobre coisas que antes eu não tinha capacidade para visualizar.*

A narrativa Q9-N7 nos permite afirmar que para alguns acadêmicos há uma separação entre o lógico e o histórico, e para além dessa fragmentação, esses alunos consideram o lógico mais importante do que o histórico.

> *Q9-N7 Algo interessante a destacar sobre os últimos encontros, é o modo como a visão mais formalizada parece agir como um 'banho de realidade' nos conceitos obscuros que trazemos da educação básica e era exatamente disso que eu 'tanto relatava' nas narrativas anteriores. Nós precisamos rever, pelo menos, uma infinidade de conceitos equivocados que ainda persistem na memória, além de aprender outra infinidade de novos. Para que a correta conceituação ocorra, muitas coisas são necessárias e talvez a mais importante delas esteja na necessidade de não deixar espaço para aspectos confusos do entendimento, pois são em falhas como essas que a conceituação deixa de existir e a mecanização torna-se preponderante.*

Corroboramos com Miguel e Brito (1996, p. 8), que segundo eles, essa visão fragmentada dos alunos é um reflexo da maneira como nós professores representamos esse campo do saber e a nossa formação universitária, com poucas exceções.

Em relação ao papel da axiomatização, segundo os mesmos autores:

> É esperado que, ao entrarem na universidade, os futuros professores de matemática tomem contato com os padrões atualizados de rigor, aprendendo a utilizá-los de modo adequado, e compreendam a necessidade de se empreender a axiomatização de determinado campo da matemática (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 8).

Para os autores, o problema é que, muitas vezes, o rigor é tratado como sendo algo independente do tempo e do espaço. A nosso ver, as disciplinas de geometria e de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas se mostravam como um espaço interessante para discutirmos as alterações de padrões de rigor dentro da matemática.

Ao discutirmos com os licenciandos acerca da axiomatização e do rigor matemático, percebemos dois grupos formados. O primeiro grupo de acadêmicos apresenta o rigor como perfeito, belo e independente do tempo e do espaço:

Q4-N7 Nesta semana fiquei estarrecida com algumas declarações de meus colegas em relação a alguns fatos matemáticos. Eu respeito a opinião de meus colegas que acham que a demonstração matemática não é algo interessante, mas eu acredito que ela é a base que sustenta a matemática, pois se a demonstração não existisse para provar a veracidade como verificaríamos a validade de fatos matemáticos? Eu acho muito lindo ver tudo justificadinho, para mim é muito bonito ver como uma coisa leva a outra

O outro grupo é formado por licenciandos que possuíam repulsa às demonstrações, como nos mostra os excertos das narrativas de Q6 e Q11.

Q6-N7 Às vezes me ponho a pensar porque essa tamanha dificuldade em aprender por meio de teorias e demonstrações, inicialmente pensava que era um déficit meu, no entanto conversando com meus colegas percebo a mesma dificuldade em aprender desta maneira. Desse modo acredito e fundamentado pela professora fomos criados por uma cultura em que métodos, algoritmos são enaltecidos, em que "pensar" não era muito de nosso feitio, apenas realizávamos infinitos exercícios num processo de memorização.

Q11-N7 E como já disse em outras narrativas, não tolero demonstrações, pois não vejo sentido nelas, me perdoem a quem pensa o contrário

Podemos inferir que as necessidades dos licenciandos Q8, Q11 e S1, ao pensar acerca das demonstrações, não tinham o objeto claramente delineado. Ou seja, não havia clareza nos objetivos em estudar tais demonstrações, assim suas necessidades não possuíam objetividades, e com isso eles não entravam em atividade. Isso dificulta o entendimento sobre o conhecimento.

- AE 8 – Medindo alturas inacessíveis

O objetivo dessa atividade era discutir maneiras diferentes de determinar alturas inacessíveis, e a busca pela “exatidão” dessa medida depende do objetivo que temos ao medir a altura. Buscamos também questionar a história que nos é contada sobre a medição da altura da pirâmide por Tales. Cabe salientar que não tínhamos a intenção de apagar da história a figura de Tales, nem muito menos procurar provas da existência de tal matemático. A ideia era colocar em dúvida as histórias que se encontram nos livros de história da matemática e até mesmo nos livros didáticos. Para, além disso, o objetivo da atividade era tratar da representação de objetos tridimensionais e trabalhar com a axiomatização geometria euclidiana espacial.

Da análise da narrativa, N8 emergiram seis unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, da verdade matemática às verdades matemáticas, e a preocupação com as notas e com as avaliações.

Quadro 13 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 8

Unidades de análise da narrativa N8	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q5, Q6, Q7, Q10, S1, S5, S6, S7, S9, S10, S12, S13, S15, S17, S19	A descrição de toda a atividade permeou a narrativa de 18 licenciandos.
Mudanças	Q1, Q5, S1	Novamente, foram destacadas pelos licenciandos as mudanças na forma de pensar, provocadas pela dinâmica da disciplina.
Reflexões	Q1, Q2, Q5, Q6, Q7, Q8, S1, S2, S3, S4, S5, S7, S8, S9, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S19	As discussões acerca da AE 8 permearam a instituição escolar, o ensinar e o aprender, os desafios de ser professor nos dias de hoje, política e poder.
Preocupação com a prática	Q2, Q10, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10, S11, S14, S15, S16, S17, S19	Dentre todas as atividades, essa foi a que mais movimentou os licenciandos a pensarem acerca da prática docente.
Re(significação) de conceitos	Q6, S1, S13, S14, S15	A representação de objetos tridimensionais foi destaque nas narrativas dos licenciandos.
Da verdade matemática às verdades matemáticas	Q1, Q3, Q6, S11, S12	Podemos inferir que alguns licenciandos passam a ver a matemática com um olhar diferente do que possuíam.
A preocupação com as notas e com as avalições	Q3, Q5, Q6, S10, S13	Os acadêmicos argumentaram em suas narrativas que não há como lutar contra o sistema, assim a nota é uma preocupação.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

A AE 8 possibilitou que várias discussões fossem feitas com os licenciandos e extrapolaram o conhecimento apenas de matemática. Primeiramente, discutimos acerca do ver e do representar os objetos tridimensionais. O excerto da narrativa S18-N8 descreve um desses momentos.

> *S18-N8 No meu ponto de vista, eu achei que teria que desenhar estes dois relatos, como se eu fosse Tales olhando as pirâmides, então tentei representá-las em três dimensões, e que, por sua vez, gerou várias discussões com relação a perspectiva da imagem de uma pirâmide, onde uma delas seria: como é a imagem de uma pirâmide vista de cima? E ,como seria a imagem de um pirâmide observada do solo, porém, com uma de suas arestas direcionadas para nós?*

Outro ponto de debate recaiu acerca das histórias que conhecemos acerca da medição da altura da pirâmide por Tales. O nosso objetivo era o de romper com a ideia que a matemática é uma criação harmoniosa, criada por gênios e que seus capítulos se encadeiam sem contradição. Olhando para a história dos livros de ensino, a matemática é apresentada em seu aspecto harmonioso (Caraça, 1970), mas podemos questionar essas histórias. Foi por meio desses questionamentos que possibilitamos que os licenciandos descobrissem as hesitações, as dúvidas e as contradições.

As narrativas Q2-N8, Q11-N8 e S9-N8 ilustram esses momentos de hesitações, dúvidas e contradições vividos pelos licenciandos.

> *Q2-N8 Geralmente encontramos nos livros didáticos quando se vai falar sobre o Teorema de Tales, um balãozinho, que conta uma dessas versões. E o aluno toma aquilo como uma verdade inquestionável, sem pensar se sempre será possível, se a sombra vai estar sempre na mesma posição, pois pelo menos pra mim sempre foi assim, quando havia uma história referente a algum conteúdo nos livros didáticos, apenas líamos e dávamos continuidade no conteúdo, sem nunca termos parado para pensar se era real ou não.*
>
> *Q11-N8 Durante as aulas de geometria, temos nos deparado com diversos episódios que desequilibram o nosso conhecimento. Isto tudo, graças ao intenso contato com a diversidade de situações colocadas diante de nós pela professora.*
>
> *S9-N8 Depois que a professora nos mostrou este artigo, confesso que fiquei confuso, porque a história diz uma coisa, e este artigo fala outra coisa que realmente pode ser verdade, então fico imaginando, será que outras histórias da matemática também podem ter acontecido de outra maneira?*

Os debates anteriormente feitos culminaram na escola, na prática docente e nos desafios de ser professor nos dias de hoje. Os excertos das narrativas S11-N8 e S17-N8 tratam desses momentos.

S17-N8 Nas últimas aulas de Geometria Euclidiana e Tópicos de geometria não-euclidiana gerou uma grande discussão sobre a escola pública, o método de ensino utilizado pelos professores, o que queremos que os alunos aprendam, entre outros assuntos. Primeiramente para atender às necessidades dos alunos que queremos formar, preparando-os para os desafios do futuro, acredito que deve haver uma parceria entre membros da escola, família e alunos; dou aula em escola pública há pouco tempo, mas já foi o suficiente para perceber o tamanho da responsabilidade que um professor carrega. Acredito que tudo comesse em uma boa educação familiar, os pais devem conscientizar seus filhos do valor que tem os estudos, para que servirá futuramente, o papel do professor é ensinar e muitas vezes, eles fazem o papel dos pais na escola onde já se começa a utilizar o pouco tempo que se tem para ensinar.

S11-N8 As discussões foram ampliadas, perpassamos o ensino da geometria, em tempos em que o sistema educacional se encontra em crise precisamos inovar, a professora nos passou que devemos repensar o papel da escola e o papel da geometria na matemática. Que tipo de cidadãos queremos formar? Que conhecimentos matemáticos devem ser ensinados? Os objetivos da escola são muito vagos, não se sabe ao certo o tipo de individuo que se quer formar. Particularmente me chamou muito a atenção esses questionamentos, pois no colégio onde trabalho está sendo desenvolvido o Projeto Educando com a Horta Escolar e a Gastronomia no Paraná, esse projeto contempla um novo modelo de ensino. Tem como principal objetivo melhorar os hábitos alimentares dos escolares, fazer a interdisciplinaridade e consequentemente diminuir os índices de sobrepeso e obesidade, que são causadores de doenças crônicas como: hipertensão, diabetes, depressão e outras. Na construção da horta a geometria desempenha um papel importante, pois nela são feitos canteiros com diversas formas geometrias planas e espaciais, que propiciam aos alunos um melhor interesse e melhor entendimento dos conteúdos. De acordo com a ONU a escola deve se preocupar com o bem estar físico, psicológico e social dos alunos. Desenvolvemos inúmeras atividades, que foram apresentadas a toda a comunidade, posteriormente foram apresentadas em Curitiba e no dia 01/10/2013 o nosso projeto será documentado pelo MEC e ganhará divulgação nacional. Também foi proposto pelo governo do Estado às escolas um ensino médio inovador, onde os professores passarão por formação e deverão fazer aulas diferenciadas, a intenção é diminuir os índices de aprovação pelo conselho de classe "reprovação", e os índices de evasão. O sistema de ensino é ultrapassado não atrai mais os alunos, o mundo fora da escola é muito mais atraente e dinâmico. A escola deve despertar os alunos para o conhecimento e não levar coisas prontas que não servem para nada.

As atividades de aprendizagem vivenciadas pelos licenciandos possibilitaram que os mesmos pensassem acerca da atividade de ensino. Ou seja, os acadêmicos passaram a atribuir novos sentidos e significados às ações do professor, como a mediação, a escolha de instrumentos para a realização dessas ações e as reflexões sobre as diversas concepções de mundo que interferem na nossa maneira de conceber a matemática.

S2-N8 O conhecimento adquirido somente na faculdade não é suficiente, pois o professor tem que relacionar o conteúdo com o que acontece no mundo, assim o acadêmico não pode ficar só focado na faculdade, mas também no que está acontecendo no mundo, porque assim o conteúdo fará sentido ao aluno. O professor tem que ter uma concepção do que é escola, saber aonde quer chegar e realizar na prática o que pensa, porém isto implica a estar disposto questionar e enfrentar o próprio sistema de ensino que pensa que o aluno tem que saber todo conhecimento que há no currículo, e que o professor dar conta de salas lotadas.

S4-N8 O fato é que hoje os professores têm pouco domínio sobre as ações educativas e pedagógicas. Uma série de intervenções dita o ritmo de sua prática: os livros didáticos que devem ser usados, mesmo que o docente discorde da linha adotada por esse ou aquele autor; as diretrizes e currículos indicados pelo Ministério da Educação e as secretarias de educação; os métodos; os sistemas; as apostilas confeccionadas por outros professores, com o objetivo de *homogeneizar o ensino para que se atinjam melhores resultados estatísticos. A questão da autonomia docente vai muito além do simples fato de se dar ao professor o direito de ter suas escolhas, mas também o direito de ter seus erros, de aprender com eles e junto aos seus alunos conseguir construir a melhor forma de se aprender e de ensinar.*

Ao analisarmos as narrativas dos licenciandos, corroboramos com Moura et al. (2010), segundo os quais na AOE, professor e alunos são sujeitos em atividade, e como tais são portadores de conhecimentos, valores e afetividades que estão presentes na maneira como realizam as ações. A nossa atividade de ensino gerou nos licenciandos a atividade de aprendizagem, uma vez que criou um motivo para a atividade de aprendizagem, que é aprender teoricamente sobre a realidade, colocar-se frente à realidade, apropriar-se do momento histórico de maneira que permita pensar historicamente a realidade e reagir a ela e compreender como desenvolver, por meio dessas questões, a sua futura prática docente. Assim, entendemos que a AE se configurou, para a maioria dos sujeitos envolvidos o processo de ensino e aprendizagem, como geradora de necessidade e de motivos para ensinar, ensinar a ensinar e aprender matemática, ou seja, ela se tornou uma AOE.

- AE 9 – A medida e o tijolo

O objetivo dessa atividade era tratar dos conceitos de volume, capacidade, superfície, área e comprimento, bem como iniciar as discussões acerca da geometria fractal.

Da análise da narrativa N9, emergiram oito unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, da verdade matemática às verdades matemáticas, crítica às atividades e concepção de matemática como construção humana.

Quadro 14 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 9

Unidades de análise da narrativa N9	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q6, Q7, Q8, Q10, Q11, S1, S2, S4, S5, S6, S7, S11, S12, S13, S14, S15, S17, S18	Os alunos apresentaram a síntese da atividade nas primeiras linhas da narrativa.
Mudanças	Q6, Q7, S2, S7, S12, S17, S18	Os licenciandos, mais uma vez, destacaram as mudanças na forma de pensar.
Reflexões	Q2, Q3, Q8, Q9, Q11, S3, S4, S5, S6, S10, S13, S16, S17, S18, S19	As principais reflexões dos acadêmicos faziam referência aos conceitos que eles deveriam ter aprendido na escola e que não aprenderam.
Preocupação com a prática	S2, S3, S5, S11, S15, S16, S17	Ao perceber a dificuldade que possuíam em conceituar volume, capacidade, superfície, área e comprimento, os alunos passaram a se preocupar em como ensinar tais conceitos.
Re(significação) de conceitos	Q1, Q2, Q3, Q6, Q7, Q9, Q10, S1, S2, S4, S5, S7, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S19	De acordo com as narrativas, os licenciandos puderam (re)significar os conceitos de volume, capacidade, superfície, área e comprimento
Da verdade matemática às verdades matemáticas	Q1, Q2, Q6, Q10, S3, S7, S11, S12, S14, S15	A última atividade da AE 9 possibilitou que os alunos pensassem acerca de uma geometria diferente da geometria euclidiana.
Crítica as atividades	Q1, Q8	Dois acadêmicos narraram dificuldade em entender as atividades.
Concepção da matemática como construção humana	S11, S17	Foi possível notar a concepção da matemática como uma construção humana em duas narrativas.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

De acordo com Leontiev (2010), a significação mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste. Para o mesmo autor, o homem ao nascer encontra significações prontas e elaboradas historicamente e se apropria delas. No entanto, a apropriação, ou não, de tais significações depende do sentido pessoal que tal significação tem.

Os excertos das narrativas S16-N9 nos permitem inferir que as significações dos acadêmicos sobre o volume e superfície estavam ligadas aos sentidos que atribuíam a esses conceitos, apenas como meras definições.

S13-N9 Meu pensamento era: "Parece fácil, mas é difícil!" Dessa vez uma atividade com algo que nos deparamos muito, sempre ouvimos falar, pensávamos saber a diferença e que era fácil. Área, Volume, Capacidade, Comprimento... Na aula de Geometria Euclidiana e tópicos da geometria não-euclidiana, nos foi proposta uma atividade que relacionava aos elementos: área, volume, comprimento, altura, largura, capacidade. Quando comecei a fazer a atividade individualmente percebi o quanto sou incapaz, o quanto as coisas que mais nos envolvemos talvez sejam as que mais nos causam dúvidas. A atividade proposta tinha a finalidade de aprendermos a diferenciar volume de capacidade. Assim, pensei: "Fácil! Capacidade é "o que cabe", mas e o conceito de volume? Quanto ao cálculo, como diferencio?" E assim, perguntas e mais perguntas; meu cérebro em constante pensamento, sem obter nenhuma resposta. Confesso que ao fazer individualmente a atividade proposta fiquei muito frustrada, não conseguia chegar a conclusões que pareciam óbvias, pensei que saberia responder. Com isso, percebi que nada sei! Neste momento até pensei na música que adoro: "Nada sei dessa vida, vivo sem saber... Nunca soube e nada saberei..."

S16-N9 Durante anos fui vítima de vagas e meras definições, até mesmo pensava que volume e superfície eram coisas que se coincidiam, mas apenas no segundo ano da faculdade na matéria de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana pude distinguir esses tais, onde cada um tem seu próprio sentido e valor. Jamais poderia imaginar que essas diferenças poderiam intervir em todo o resultado pois, calcular o volume é diferente de calcular a superfície.

Outro ponto a ser destacado na atividade foi que os alunos estabeleceram ligações com outras disciplinas, um ponto importante em um currículo com disciplinas fragmentadas e fechadas.

S3-N9 Quando falamos sobre cercar uma área de 48 m², foi inevitável não se lembrar do conceito de derivada do Cálculo I e lembrar que a figura que geraria maior economia seria um quadrado. Nesse momento lembrei-me também que seria possível pensar em um volume fixo, que já seria do Cálculo II. Acredito que essas conexões são possíveis a partir de pensarmos os conceitos não apenas efetuar os cálculos.

S13-N9 Falando de perímetro e área, a última atividade pedia para cercarmos uma área retangular de 48 m^2, assim, a professora nos fez uma pergunta se esta área poderia ser um quadrado. No momento afirmamos positivamente, mas ao pensar qual seriam as medidas para que obtivéssemos uma área de 48 metros quadrados ficamos em dúvida do que responder. Pensamos então na fatoração do número 48 e obtemos $4\sqrt{3}$, sendo que conhecemos $\sqrt{3}$, logo poderemos calcular, que seria o menor custo para a área de menor quadrado.

Em uma tendência contrária à linearidade da história, desde as primeiras atividades, tratamos das geometrias não euclidianas, mesmo antes de enunciarmos os postulados euclidianos. Nessa atividade, os licenciandos puderam pensar em algumas verdades matemáticas que, até aquele momento, eram impensáveis.

S12-N9 Foi falado ainda que nos fractais têm como diminuir os lados de uma figura qualquer, porem quando somados obtêm infinito. Na geometria fractal a área pode tender ao infinito e o comprimento de cada lado tender a zero, já na geometria Euclidiana não é possível fazer isso. Assuntos como estes relatados em sala, foi um aprendizado adquirido por meio desses momentos, individual, pequeno grupo e a turma toda. Foi muito importante porque aprendi e aprimorei meus conhecimentos a partir dessas discussões.

S8-N9 Ou seja, a maioria das vezes ficamos limitadas a conceitos que já temos formado, mas como sempre a professora me surpreende nos mostrando como devemos ampliar nosso visão em relação a matemática a vários conceitos , que muitas vezes parecem simples e fáceis mas nos confundem, mas vejo isso como um ponto positivo, pois a cada nova atividade aumentamos mais nossa bagagem em relação ao conhecimento.

A AE 9 possibilitou que houvesse um movimento de sentidos e também a (re)significação dos conceitos. A AE permitiu que os licenciandos tomassem consciência que os conceitos de volume, capacidade, superfície, área e comprimento, muitas vezes são entendidos apenas como uma definição que leva a uma fórmula e que isso colaborava para confusão dos conceitos e a não compreensão.

Corroborando com Leontiev (2010), segundo o autor, o sentido faz parte integrante do conteúdo da consciência e parece entrar na significação objetiva, a tomada de consciência dos licenciandos possibilitou que eles atribuíssem sentidos qualitativos, tais como: unidade padrão e medição por decomposição e (re)significassem e diferenciassem o conceito de volume, capacidade, área e comprimento.

- AE 10 – Conhecendo os fractais

O objetivo da AE 10 era desconstruir a ideia da exatidão do conhecimento matemático, bem como debater a busca do homem em organizar o caos.

Da análise da narrativa N10, emergiram-se oito unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, mudanças, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, da verdade matemática às verdades matemática, crítica às atividades e concepção de matemática como construção humana.

Quadro 15 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 10

Unidades de análise da narrativa N10	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q10, Q11, S1, S4, S6, S12, S13, S14, S15, S19	Dezessete alunos apresentaram uma breve síntese da AE 10.
Mudanças	Q5, Q6, S9, S13, S18	Os acadêmicos perceberam que seus conceitos foram (re)significados no decorrer da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas.
Reflexões	Q1, Q2, Q3, Q6, Q7, Q9, Q10, Q11, S3, S4, S5, S6, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19	As reflexões dos licenciandos permearam a dificuldade em encontrar um comprimento exato para a costa do Brasil.
Preocupação com a prática	S1, S17	As reflexões, acerca da AE 10, provocaram preocupações com a prática docente.
Re(significação) de conceitos	Q1, Q5, Q6, S2, S4, S5, S6, S8, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19	A (re)significação de conceitos que essa AE 10 promoveu está relacionada ao conhecer os fractais.
Da verdade matemática às verdades matemáticas	Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q11, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S10, S11, S13, S16, S17, S19	O ensino de geometrias não euclidianas possibilita que os alunos desconstruam a ideia de que a matemática é exata e acabada.
Crítica as atividades	Q9	O licenciando Q9 sentiu falta de uma maior formalização dos conceitos da geometria fractal.
Concepção da matemática como construção humana	S2, S3, S11	A matemática é descrita como uma construção humana na narrativa de três licenciandos.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

Como vimos na análise do questionário inicial, os licenciandos pouco, ou nada, conheciam acerca das geometrias não euclidianas. Para além disso, é possível inferir, pelas narrativas, que os mesmos pouca atenção davam para o movimento, para a fluência e isso deixava transparecer o significado de exatidão que alguns impunham à matemática. A dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas aliada à fluência possibilitou que os licenciandos repensassem o sentido e posteriormente o significado de matemática.

S13-N10 No momento de realizar as atividades individualmente obtive um pouco de dificuldade, mas, pela primeira vez, tive a impressão que sabia o que estava fazendo. Ou seja, percebi o objetivo da atividade. Mesmo tendo cometido alguns erros nas minhas respostas, percebi que estava errado, mas naquele momento não conseguia pensar para arrumar meu erro. Com isso, após realizarmos as atividades individualmente, desenvolvemos a mesma atividade em grupo. Neste momento, eu realmente vi onde estavam meus erros e percebi o motivo para que eu tivesse errado. No meu parecer, esta atividade realizada em grupo me proporcionou uma maior compreensão, aprendi muito com meus colegas do grupo.

S18-N10 Após o texto, havia algumas atividades para serem realizadas. Tanto na etapa individual como na etapa em grupo, eu achei que era possível medir o comprimento da costa do Brasil com exatidão, mas no coletivo foi discutido a respeito, e percebi que estava errado.

S10-N10 Nunca imaginei como seria difícil aprender a matemática, não sabia o quão grande era seu conteúdo, e que sempre está em desenvolvimento, sempre novas descobertas e novas maneiras de visualizar e interpretar um determinado problema, mas após a última aula, percebi que ainda tenho muito a aprender. Quando me deparei com a atividade de fractais, com a qual relacionava a medida da costa do Brasil, achei que seria fácil, uma medida exata iria ser encontrada por "Fractais", ou seja, haveria uma fórmula ou uma maneira de se calcular com exatidão a costa do Brasil. Deparei-me com uma incrível confusão, a professora questionou se seria a mesma medida se usássemos um carro ou um barco para medir a costa, através desse questionamento comecei a imaginar o quando seria difícil obtermos um número exato, inusitadamente o interesse por fractais e saber qual seria esse novo conhecimento a ser adquirido.

O movimento da vida, o movimento do mundo, o movimento das ondas do mar e tudo mais que pudesse lembrar o movimento foi excluído do seio da geometria euclidiana na Grécia Antiga (CARAÇA, 1970). "O seu reinado só deveria terminar quando uma sociedade nova, dominada por uma classe nova, portadora de interesses e problemas novos, impusesse à Filosofia e à Ciência um rumo diferente" (CARAÇA, 1970, p. 197).

Esses movimentos estão, muitas vezes, excluídos da geometria que se ensina na escola. Segundo Sousa (2004, p. 4), durante a formação do professor de matemática, poucas oportunidades são oferecidas para se pensar sobre a natureza lógico-histórica do pensamento matemático. Preocupamo-nos com o ensinar e aprender matemática e proporcionamos poucos momentos de reflexões, pelos quais professores e estudantes possam pensar acerca das diversas concepções de mundo que interferem na nossa maneira de conceber a matemática. Vemos, então, que os fractais se apresentaram com uma boa oportunidade de se discutir com os alunos sobre a exatidão do conhecimento matemático e refletir sobre as diversas concepções de mundo que interferem na maneira de concebermos a matemática.

- AE 11 – Geometrias não euclidianas

Durante as atividades anteriores, tratamos das geometrias não euclidianas, sem nos preocuparmos, necessariamente, com sua axiomatização e com a apresentação de modelos. Na AE 11, buscamos apresentar modelos para a geometria esférica e hiperbólica, e trabalhamos com alguns de seus principais resultados. Nessa atividade também trabalhamos com a geometria projetiva e com a topologia, discutimos as geometrias a partir do movimento da vida, do ver, do olhar e do representar.

Da análise da narrativa N11, emergiram sete unidades de análise das narrativas: descrição da atividade, reflexões, preocupação com a prática, (re)significação de conceitos, da verdade matemática às verdades matemática, crítica as atividades e concepção de matemática como construção humana.

Quadro 16 – Unidades de análise das narrativas referentes à AE 11

Unidades de análise da narrativa N11	Sujeitos	Inferências
Descrição da atividade	Q2, Q3, Q10, Q11, S2, S3, S4, S8, S10, S11, S12, S13, S15, S17, S18, S19	A descrição da atividade foi notada em 16narrativas.
Reflexões	Q1, Q3, Q5, Q7, Q9, Q10, Q11, S2, S3, S4, S5, S6, S8, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19	As reflexões dos licenciandos foram acerca do novo mundo, das geometrias não euclidianas, que a eles foi apresentado.
Preocupação com a prática	Q2, Q3, Q5, Q7, S2, S17	Como trabalhar com as geometrias não euclidianas na educação básica? Esse questionamento apareceu tanto no debate em sala de aula como nas narrativas.
Re(significação) de conceitos	Q2, S2, S3, S4, S5, S6, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19	Por meio do estudo das geometrias não euclidianas, os licenciandos puderam (re)significar conceitos de geometria euclidiana.
Da verdade matemática às verdades matemáticas	Q2, S2, S3, S4, S5, S6, S8 S9, S10, S11, S13, S14 S16, S17, S19	O trabalho com as geometrias não euclidianas possibilitou que os alunos percebessem que na matemática é possível a existência de verdades e não de uma única verdade.
Crítica as atividades	Q1, Q4, Q9	Os licenciandos relataram que gostariam que mais tempo fosse dedicado aos estudos das geometrias não euclidianas.
Concepção da matemática como construção humana	S3, S4, S11	A matemática pensada como uma construção humana apareceu em três narrativas.

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

A nosso ver, o ensino de geometrias não pode ser reduzido apenas ao estudo lógico formal, a importância das geometrias está na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses, compreender que o conhecimento não é imutável.

Os excertos das narrativas S6-N11, S8-N11 e S13-N11 nos mostram como o estudo de geometria pode se tornar interessante e questionador:

> S6-N11 As atividades pareciam confundir a cabeça da gente, pois *imaginávamos uma coisa, quando representada no papel saía de um jeito e quando representada na bola saía de outra forma. Igual quando tivemos que imaginar um caçador andando paralelamente com seu cachorro, logo de cara pensamos ser possível, desenhando no papel conseguíamos representar, já na bolinha dependendo de como representávamos dava certo dependendo não dava, enfim.*
>
> *S8-N11 Umas das obras que achei muito interessante foi o quadro de Santa Ceia, como os pontos, as retas são centralizados em Jesus, achei incrível, e esse ponto de fuga é exatamente onde as paralelas se cruzam, é o infinito. Outro detalhe importante que podemos citar que na geometria hiperbólica duas retas paralelas não são equidistantes em todos os pontos como acontece na geometria euclidiana.*
>
> *S13-N11 Posso afirmar que cada dia que passa, a Geometria se torna mais interessante e também que à medida que aprendemos algo novo, percebemos que ainda há muitos conceitos a serem explorados. No meu parecer, à medida que aprendo algo novo crio mais perguntas no meu subconsciente, buscando sempre querer saber mais e mais.*

O estudo das geometrias não euclidianas possibilitou também que os alunos compreendessem que na matemática é possível existir verdades matemáticas, e isso significa que, dependendo dos axiomas que considerarmos, podemos construir diferentes geometrias. E essa compreensão levou os acadêmicos a pensar nas concepções de mundo e de matemática e questionar a importância de trabalhar com essas geometrias na educação básica.

> *S2-N11 Ainda não tinha conhecimento das geometrias não euclidianas, foi interessante conhecer um pouco sobre elas, que fazer parte do nosso mundo. Estas geometrias têm que ser mais exploradas nas escolas para que as pessoas compreendam que não existe somente uma verdade, mas sim inúmeras verdades, que o mundo está em constante movimento e tudo pode ser modificado, avançado, construído.*
>
> *S2-N11 Ao visualizar o mundo percebemos que ele não se resume somente na geometria euclidiana, mas também por as outras geometrias. Muitas pessoas ainda não têm conhecimento estas geometrias recentes que é de fundamental importância para entender as relações matemáticas empregada no mundo. Por isso, estas geometrias não podem deixar de ser trabalhada nas escolas.*

Cabe destacar que três licenciandos narraram que gostariam de mais tempo para discutir sobre as geometrias não euclidianas. Entendemos que tais alunos têm razão, no entanto, a carga-horária da disciplina e a dinâmica adotada na disciplina impossibilitaram que tivéssemos mais tempo para discutir com os alunos sobre as geometrias não euclidianas.

Entendemos que a importância do ensino de geometria não está apenas no rigor, mas na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses e a compreensão que o conhecimento geométrico é mutável. A AE 11 possibilitou que os licenciandos compreendessem os movimentos de criar, experimentar e questionar.

Corroboramos com Freire e Macedo (1990), segundo os autores, a criatividade, a dúvida, a capacidade de arriscar-se e a curiosidade precisam ser estimuladas nos alunos pelos educadores, em vez de reforçar repetições puramente mecânicas de frases e litas.

Inferimos então que a perspectiva didática utilizada possibilitou o contato com um ensino diferente daquele que privilegia somente a dedução dos conceitos trabalhados visando à posterior aplicação em listas de reforços (FERREIRA, 2005), por possibilitar que os alunos dialogassem, discutissem e refletissem acerca dos produtos culturais e científicos da humanidade, em busca do conhecimento, mostrando que o lógico-histórico se constitui como atividade formadora para os licenciandos.

5.3 Educando o olhar

5.3.1 Do isolado ao coletivo

A categoria *Do isolado ao coletivo* emerge da triangulação dos dados contidos no questionário, nas AE e nas narrativas. Representa, principalmente as mudanças na maneira de pensar e as (re)significações de conceitos descritas pelos licenciandos em suas narrativas e que foram provocas principalmente pelas AE e pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas adotadas nas disciplinas.

Os dados contidos nos questionários apontam para conhecimentos de uma história factual, privilegiando a figura de Euclides como o pai da geometria e da Grécia como o berço da geometria.

As AE 5, AE 6, AE 7, AE 8, AE 10 e AE 11 desenvolvidas permitiram que os licenciandos refletissem sobre a matemática como uma construção humana e percebessem que os conhecimentos matemáticos não surgem de pensadores trancados em laboratórios e isolados do mundo e da sociedade. Tais conhecimentos estão relacionados com os movimentos da vida, como mostra o excerto da narrativa S3-N5:

S3-N5 De início a atividade parecia estar relacionada apenas com as horas, em como definir que horas são em determinado momento... e surpreendeu. Isto esclarece bem a dificuldade que se tem de ter um diferente ponto de vista, de se questionar, de se refletir sobre o momento. Não relacionamos a situação com, por exemplo, como definiríamos que horas são se não sabemos quantas horas tem o dia? E como isso foi definido? Estas eram questões simples que nós mesmos poderíamos ter feito, contudo esse estudo não se restringiu a isso... Acredito que poucos conseguiram imaginar tudo, ou ao menos uma parte, da relação que os movimentos do sol teriam com as diversas descobertas que o estudo destes contribuiu. Mas isto foi generalizado, para o movimento dos astros (o Sol, as estrelas, a Lua) e a partir disto vimos que a preocupação inicial não era em olhar para o sol, ou as estrelas, e dizer que horas são. Esse estudo avançou de acordo com as necessidades da época, como por exemplo, qual é a melhor época para se plantar, assim como outras datas definidas por eles, como: agora é tempo de se visitar. E a partir da observação dos movimentos e mudanças de posição ou de fases, como a lua, de quando os ciclos se repetiam com determinados astros, levou a definir o que chamamos hoje de calendário. Isso não aconteceu de repente, foi se alterando ao longo da história, mas é interessante pensar que as observações dos astros e dos fenômenos naturais levaram a definir, horas, semanas, meses, estações e ano, com aproximações extremamente boas como o ano de 365 dias nas civilizações egípcias, e mais, ao estudo dos ângulos.

As AE de geometrias desenvolvidas a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas possibilitaram a comunicação entre os envolvidos na pesquisa.

Segundo Freire (1979), o mundo humano é um mundo da comunicação, e comunicação se dá por meio de sujeitos coparticipantes que apresentam reciprocidade entre si. Assim não existe um sujeito que sabe tudo e outro que nada sabe, existem sujeitos que sabem coisas diferentes e que se comunicam.

Nesse sentido, a educação é comunicação.

> Todo ato de pensar exige um sujeito que pensa, um objeto pensado, que mediatiza o primeiro sujeito do segundo, e a comunicação entre ambos, que se dá através de signos linguísticos. O mundo humano é, desta forma, um mundo de comunicação (FREIRE, 1979, p. 66).

Ainda, para Freire (1979), o que caracteriza a comunicação enquanto este comunicar comunicando-se, é que ela é dialógica, assim como o diálogo é comunicativo. “A tarefa do educador, então, é a de problematizar aos educando o conteúdo que os mediatiza, e não a de dissertar sobre ele, de dá-lo, de estendê-lo, como se tratasse de algo já feito, elaborado, acabado, terminado” (FREIRE, 1979, p. 81).

Durante a discussão com toda a turma, procuramos dialogar com os licenciandos, pois entendemos que o diálogo pode ser um caminho democrático.

> O diálogo entre professoras ou professores e alunos ou alunas não os torna iguais, mas marca a posição democrática entre eles ou elas. O diálogo tem significação precisamente não apenas com sua identidade, mas a defendem e assim crescem um com outro. Dialogo por isso mesmo, não nivela, não reduz um ao outro. Nem é favor que um faz ao outro. Nem é tática manhosa, envolvente, um usa para confundir o outro. Implica, ao contrário, um respeito fundamental dos sujeitos nele engajados, que o autoritarismo rompe ou não permite que se constitua (FREIRE, 1992, p. 117).

Corroboramos com Freire (1992), que segundo o autor, o diálogo não nos torna iguais, mas marca posição democrática entre todos. Ao dialogar, os licenciandos começaram a perceber que seus colegas, e eles próprios, sabem de coisas que o professor não sabe e que podemos aprender na coletividade e que nossas verdades podem ser reelaboradas a qualquer momento, de forma individual e coletiva. O aprender com o colega e a possibilidade de reelaborar as verdades podem ser encontrados na narrativa de S11.

S11-N1 No segundo momento da primeira atividade houve muitas contradições, cada um tinha visões diferentes a respeito de movimento, por exemplo, muitos não concordavam que quando

olhamos para uma pedra e fechamos os olhos por um segundo e abrimos os olhos e olhamos para ela novamente ela não é mais a mesma, isso se dá pelo fato de nós nos deixarmos levar pelas coisas mais aparentes, fácil de ser visualizadas. No terceiro momento da atividade um colega relatou algo que nos ajudou a entender a ideia de movimento, ele disse que a química nos explica que todos os corpos são formados por minúsculas partículas denominadas átomos e que elas estão em contínuo movimento, isso abriu caminho para pensarmos se os corpos estatizados como uma pedra esta ou não em movimento, a meu ver sim, e além do mais estão se degradando com o tempo.

Ao lermos este excerto, nos remetemos, novamente aos estudos de Freire (1992). De acordo com o autor, o diálogo e a possibilidade do ato de ensinar só se tornam verdadeiramente possíveis quando o pensamento crítico, inquieto, do educador ou da educadora não freia a capacidade de criticamente também pensar ou começar a pensar do educando, é preciso que o pensamento crítico do educador ou da educadora se entrega à curiosidade do educando.

As unidades de análise das narrativas: mudanças, reflexões e (re)significação de conceitos apontam que os licenciandos aceitaram o desafio de (re)elaborar suas verdades e suas respostas a partir do diálogo que foi permitido na dinâmica adotada na disciplina. Ou seja, passaram a aceitar que suas próprias respostas, individuais poderiam se modificar, a partir do coletivo, como mostram os excertos das narrativas, a seguir:

S8-N9 Quando peguei as atividades para fazer, não imaginei que teria tantas dúvidas mas a cada atividade que fazia ou pelo menos tentava fazer , ficava ainda mais confusa e frustrada ao mesmo tempo , pois as atividades não eram difíceis mas nos levavam a pensar um pouco mais nas resposta, algumas não consegui responder e em relação ao volume e a capacidade respondi, mas na discussão em grupo descobri que a resposta estava errada.

Q7-N10 Na discussão entre o grupo percebi qual foi o meu erro na interpretação dos enunciados, tais como a formalização do pensamento na fórmula para encontrar o número de segmentos e a soma dos comprimentos da curva de Koch. Com esta atividade conclui que a costa brasileira se assemelha a um fractal, e que as medidas que possuímos são apenas aproximações, pois seria inviável calcularmos a sua dimensão de uma maneira tão precisa. Logo, conseguiríamos encontrar um tamanho bem aproximado da costa brasileira utilizando a ideia de fractal.

Q3-N12 Um dos prós das experiências vivenciadas durante as aulas de Geometria, com toda certeza foi poder expor minha opinião, e ouvir as opiniões dos colegas, dessa forma eu como aluna, pude mudar concepções com algumas atividades. E se por algum motivo não mudasse de opinião eu pude ao menos, escutar e refletir sobre as outras maneiras de ver e pensar.

Q11-N13 A liberdade de expressão que ela nos forneceu, juntamente com os conceitos implícitos em cada atividade, forneceu indícios de uma aprendizagem totalmente inusitada ao meu eu. Alguns não gostam, mas eu gosto de poder me expressar e dizer o que penso, também gosto de fazer leituras, raciocinar um pouco e ser estimulada a escrever. Se existe mudanças no meu eu, existem sim, meu modo como vejo o mundo foi totalmente incrementado pela opinião dos demais, com atividades individuais e grupais, pensamentos e razões foram cruzados e agora andam interligados. O que tenho a concluir sobre minha formação em decorrência destas aulas, é que será totalmente diferenciada das demais formações e não posso dizer que as dos outros serão, até porque não posso dizer o que outro pensa.

A dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas orientaram as reflexões dos futuros professores, enquanto cursavam as disciplina de geometria e a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas. Tal dinâmica foi pensada para que os licenciandos pudessem estar em atividade de aprendizagem, ao mesmo tempo em que, nós estávamos em atividades de ensino.

Nas AE, os licenciandos mobilizaram seus conhecimentos e geraram uma busca por um novo referencial. E nessa busca, partilharam significados na interação com os sujeitos e geraram soluções que trouxeram significados novos. Nas narrativas, os licenciandos explicitaram os sentidos e significados que passaram a dar aos conceitos geométricos, considerando-se que: “A atividade de ensino é desencadeadora quando se torna o meio onde uma necessidade seja provocada, percebida e planejada, permitindo com isso novas elaborações a partir da dinâmica adotada” (FERREIRA, 2005, p. 43).

Em suma, a categoria *Do isolado ao coletivo* nos permite afirmar que as AE vieram a ser uma AOE, uma vez que um dos nossos motivos como professora/pesquisadora era a organização do ensino e coincidiu com um dos motivos da atividade de aprendizagem dos licenciandos, ou seja, possibilitou a apropriação do conhecimento.

5.3.2 O novo

A categoria *O novo* emerge da triangulação dos dados contidos no Diário de Campo, nas AE e nas narrativas e o novo se manifesta em dois aspectos: na aceitação das geometrias não euclidianas e na vivência da dinâmica ocorrida nas aulas. A categoria representa principalmente os momentos de silêncio, de incômodo, de resistência, de confronto, de alegria e de satisfação dos acadêmicos durante o desenvolvimento das disciplinas. Esses momentos foram experienciados tanto durante os diálogos ocorridos em sala de aula, quanto nas escritas das narrativas.

Essa categoria se faz presente em quatro unidades de análise das narrativas: descrição da atividade; reflexões; da verdade matemática às verdades matemática e críticas as atividades.

As unidades de análises das narrativas reflexões e da verdade matemática às verdades matemáticas estão intimamente ligadas ao sentido que os licenciandos atribuíam às geometrias que os levou à (re)significar os conceitos de geometria euclidiana e aceitar a existência do novo, no caso, das geometrias não euclidianas.

> *Q6-N8 Diante de um questionamento realizado pela professora em uma dada aula de Geometria, me pus a pensar na possibilidade de organizar a Geometria Euclidiana de outra maneira, pois da maneira com que foi abordada em toda minha educação Básica, jamais havia pensado na possibilidade de organizá-la diferente, por considerá-la uma verdade absoluta, portanto inquestionável. No entanto diante da abordagem realizada pela professora no decorrer do ano, passei olhar a Geometria com outros olhos, de modo que o pensamento equivocado que eu possuía em relação à Matemática e sua construção, passou a ser mais critico e argumentativo. Considerando assim a possibilidade de organizá-la de outra maneia, no caso por meio da Geometria não-Euclidiana.*

A maioria dos homens das diversas civilizações levou quase 2 mil anos para aceitar a existência de outras geometrias tão consistentes matematicamente quanto à organizada por Euclides em 300 a.C..

Para enfrentar o desconhecido, o novo e dar um impulso para o imutável foi preciso estar “ligados ao já conhecido, aos conceitos concebidos momentaneamente fixos, verdades sólidas” (SOUSA, 2009, p. 86). Ou seja, para que os licenciandos pudessem se aventurar em direção ao novo, foi preciso que os conhecimentos de geometria euclidiana fossem, de fato, conhecidos.

Nesse sentido, as atividades de ensino contribuíram para que os licenciandos dessem o impulso em direção ao novo, compreendendo que não existe a verdade, única e incontestável, na matemática; que existem verdades matemáticas, e que isso não é uma questão de tornar tudo que se fala ou ainda toda a argumentação verdadeira.

Aqui, temos como pressuposto de que as atividades de ensino elaboradas intencionalmente, fazendo uso de elementos qualitativos de geometrias, tais como, variabilidade e pluralidade de verdades, opondo-se à rigidez e a unicidade, puderam auxiliar os licenciandos a aceitarem as geometrias não euclidianas, pois ajuda a constituir sujeitos pensantes, capazes de reelaborar suas verdades de forma individual ou coletiva.

As unidades de análises das narrativas: descrição da atividade, reflexões e críticas às atividades, apresentadas anteriormente, estão ligadas ao sentido que os licenciandos atribuíram à disciplina e a sua organização, que para eles se configuravam como uma experiência nova e jamais vivida durante todo o processo de escolarização, como aponta S4.

S4-N15 As novas experiências que tive com essa matéria foi muito enriquecedora para o meu desenvolvimento na área matemática, no começo das aulas fique meio assustado com o método adotado pela professora para as aulas de Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não Euclidiana, pois sempre tinha aprendido da maneira tradicional de ensino, mas com essa nova experiência percebi uma nova maneira de ensinar matemática a meus futuros alunos.

O olhar desconfiado, os lábios cerrados e sérios, os sorrisos de canto de boca e a ansiedade em um roer de unhas eram possíveis de serem percebidos no primeiro encontro com as turmas do segundo ano e do quarto ano; dia esse em que nos apresentamos, explicamos a pesquisa que seria desenvolvida, expusemos o termo de livre esclarecimento e discutimos sobre a disciplina.

Os estudantes matriculados no segundo ano eram mais quietos, mais desconfiados; fizeram poucas perguntas, e as poucas perguntas que fizeram estavam relacionadas às geometrias não euclidianas e à dinâmica. Os que estavam matriculados no quarto ano se mostraram um pouco mais questionadores, no entanto, poucos deles falaram.

O cenário encontrado no primeiro encontro se desfez logo nos encontros seguintes. A partir da AE 3, os licenciandos, em geral, participaram dos diálogos em sala de aula. O licenciandos S1 narrou acerca da superação de seu medo e da sua aversão à dinâmica, que para ele se configurava como algo novo.

S1-N13 Quero ressaltar que nós acadêmicos nunca utilizamos antes dessa metodologia e que por este motivo nos causou inicialmente espanto e medo, espanto por falta de conhecimento em relação a essa forma de ensino e medo ocasionado pela insegurança em relação ao nosso desempenho ao decorrer das atividades que são de certa forma diferenciadas. Acredito que a aversão a essa metodologia já tenha sido superada com o decorrer das aulas, já que esta vem se mostrando muito interessante e muito construtiva quando se fala em termos de conhecimento, tendo em vista que através dela pudemos ver a matemática com outros olhos como quando estudamos um pouco da história da matemática e desestabilizamos conhecimentos errôneos que tínhamos sobre os antigos matemáticos. Outra coisa que acredito que seja interessante é a utilização de recursos que visam a ver a matemática não só teoricamente, mas que possamos vê-la na prática como quando desenvolvemos uma atividade sobre as sombras e tivemos de medi lá isso é importante, pois isso é como se visualizássemos a matemática de um jeito diferente mais não mesmo importante.

Os alunos do quarto ano foram mais resistentes, quando comparados aos do segundo ano, em relação à dinâmica utilizada. Foi por meio do diálogo na sala de aula, das nossas reflexões como da professora/pesquisadora feitas nos diários de campo e das narrativas que percebemos a resistência e as críticas em relação à dinâmica, que representava o novo.

A acadêmica Q4 narrou acerca da sua insatisfação com a disciplina. A imposição da dinâmica durante todo o ano causou desconforto.

Q4-N15 Quanto a forma que a disciplina foi ministrada, devo dizer que não gostei muito, gosto do método tradicional e acredito que se tivesse estudado neste método a minha aprendizagem em geometria teria sido mais satisfatória. Porém, não foi de todo o mal estudar assim, uma das coisas que eram interessantes na aula eram as discussões feitas sobre as atividades, onde eram levantados diferentes pontos com relação a uma mesma situação. E sobre as narrativas, no início até que era interessante escrevê-las, mas depois foi ficando um trabalho muito maçante a se fazer.

O licenciando Q9 escreveu sobre sua insatisfação em escrever as narrativas.

Q9-N13 Particularmente, me senti/sinto desconfortável com o desenvolver de tais atividades. Muito embora o hábito de escrever se mostre presente em todo o caminho trilhado durante minha formação, eu percebo uma diferença abissal entre uma escrita prazerosa e uma escrita por simples obrigação. Infelizmente sinto-me obrigado a narrar situações que pouco representam para mim.

Analisando os diferentes posicionamentos dos alunos do segundo ano e quarto ano, podemos inferir que essa resistência por parte dos licenciando pode estar ligada aos sentidos atribuídos por eles no momento vivenciado na disciplina. Um sentido para aquele licenciando que está no quarto ano do curso e outro para aquele que está no segundo ano do curso, e, portanto há menos tempo no curso.

Para a licencianda Q5, essa resistência era esperada, pois os alunos do quarto ano já estão "domesticados" pela estrutura do curso:

> *Q1-N15 Penso que a professora foi bastante ousada em mudar sua metodologia, sabendo que iria encontrar muita resistência por parte dos alunos, pois boa parte de nós (alunos) estamos "domesticados" pelo método tradicionalista.*

Enquanto alguns narravam sobre a sua satisfação e insatisfação com a dinâmica da disciplina, encontramos alguns alunos que preferiram se silenciar e faziam isso por meio do silêncio em sala de aula e por narrativas quase que exclusivamente descritivas.

Ao lermos as narrativas, encontramos uma forte presença da descrição da atividade. Procuramos compreender esse modo de escrever, e levantamos algumas inferências: 1) alguns licenciandos adotaram a descrição das atividades como uma forma de fazer uma síntese da aula e isso os ajudava a compreender melhor os conceitos usados; 2) para alguns acadêmicos, a descrição foi utilizada para fazer a narrativa e não dizer o que eles realmente pensavam; 3) alguns licenciandos não se sentiam seguros para refletir sobre os conceitos e como precisavam entregar as narrativas, faziam-nas extremamente descritivas; 4) para alguns, o mais importante da realização da AE foi a maneira como ela foi elaborada; 7) constatamos dificuldade na escrita, uma vez que os licenciandos em matemática estão mais acostumados às listas de exercícios do que a escrita de narrativas.

A narrativa de S14 nos permite inferir que a última indagação faça sentido, ou seja, é mais habitual, para o licenciando em matemática, a demonstração e a resolução de exercícios matemáticos.

> *S14-N1 A interpretação e as respostas das perguntas foi algo muito difícil, pois não estou acostumada com este tipo de atividade, é mais familiar e habitual à demonstração e resolução de exercícios matemáticos.*

Outro ponto a ser levantado é que os licenciandos ficavam, muitas vezes, esperando a resposta da professora, que para muitos ainda era considerada a reposta certa. Quando algum licenciando questionava a fala da professora, ficava nítida a expressão de espanto dos demais.

Era perceptível que alguns ficavam incomodados com o fato de não ter a resposta exata e pronta, isso revela os sentidos e os significados atribuídos pelos alunos à figura do professor.

S7-N13 Por outro lado, a momentos em que ficamos perdidos, sem saber como fazer determinadas coisas, ou se aquilo é real. Em algumas situações recorremos à professora buscando uma resposta e o que encontramos foram mais perguntas.

Para muitos deles, o professor é o detentor de todo o conhecimento; ele deve dizer o que é certo e o que é errado e pune, geralmente com o desconto na nota, os alunos que não respondem o que ele pensa como verdade. Esse sentido é atribuído pelo sujeito no decorrer da sua própria vida e, assim, não é possível ensinar o sentido de algo a alguém (LEONTIEV, 2010).

A categoria *O Novo* se manifestou em dois aspectos. Primeiramente em relação à aceitação das geometrias não euclidianas. Entendemos que nesse aspecto as AE vieram a ser uma AOE, uma vez que possibilitaram aos envolvidos no processo entrarem em atividade. As AE contribuíram para que os alunos percebessem que a matemática não é um conhecimento pronto e acabado e rompessem com a rigidez e a unicidade posta pela geometria euclidiana.

O segundo aspecto diz respeito à vivência das AE na perspectiva lógico-histórico, segundo a dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas. As sensações de incômodo, de resistência e de satisfação foram mostradas pelos licenciandos por meio de suas narrativas. A resistência está ligada aos sentidos e aos significados que os alunos atribuem à figura do professor, o detentor do conhecimento e que deve saber todas as respostas, e da matemática, onde o mais importante são os aspectos lógico-formais. O incômodo está relacionado à imposição de uma dinâmica durante todo o ano letivo. E a satisfação tem relação com a importância da vivência da dinâmica, o que possibilitou que eles percebessem que há outras formas de aprender e de ensinar. A categoria *O Novo* traz importantes elementos para nossa futura prática enquanto professora/pesquisado, uma vez que nos permite refletir e pensar acerca da dinâmica.

5.3.3 Do aprender ao aprender a ensinar

A categoria *Do aprender ao aprender a ensinar* emerge da triangulação dos dados contidos no questionário, nas AE e nas narrativas. Nesta pesquisa, tomamos como pressuposto e nos fundamentamos na perspectiva da AOE; consideramos que as geometrias são os conhecimentos teóricos, ensinar geometrias e propor situações para pensar a futura prática docente são os motivos. Elencamos três objetivos, o primeiro - discutir o aprender e o ensinar; o segundo - compreender os conceitos matemáticos relacionados à geometria euclidiana e geometrias não euclidianas e o terceiro - formar professores para trabalhar essas geometrias.

Nesta categoria, analisamos excertos que nos permitem inferir que as atividades desenvolvidas foram geradoras de necessidades e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias.

Ao lermos o questionário, 16 licenciandos, Q1, Q2, Q3, Q5, Q6, Q7, Q10, Q11, S2, S3, S4, S5, S10, S11, S13 e S16, afirmaram que seus motivos para cursar a disciplina estavam relacionados à prática docente, e dentre eles, Q1, Q7, Q10, S2, S4, S5, S11 e S13, já eram professores da educação básica. Assim, podemos inferir que estes alunos possuíam motivos eficazes para cursar a disciplina, uma vez que havia coincidência entre os motivos deles e da professora. A análise das narrativas desses licenciandos permite afirmar que a preocupação com a prática docente continua permeando as reflexões desses 16 alunos durante toda a disciplina.

As narrativas dos licenciandos S1, S6, S7, S8, S9, S14, S15, S17 e S19 nos mostraram que houve um movimento em seus motivos, relacionados aos seus objetivos em cursar a disciplina, uma vez que no questionário apresentaram motivos compreensíveis para realizar a disciplina, e esses motivos se transformaram em motivos eficazes no decorrer do ano. O movimento dos motivos pode indicar uma possível mudança em sua futura prática docente, porque a transformação dos motivos ocorre na própria prática do sujeito, a partir do momento que ele atribui sentido às atividades.

Os licenciandos Q4, Q8, Q9, S12 e S18 não apresentaram reflexões em nenhuma narrativa que nos permitam afirmar que possuíam preocupações com sua futura prática docente. Nenhum desses licenciandos tinha atuado como professor da educação básica.

A unidade de análise das narrativas, preocupação com a prática, pode ser encontrada nas narrativas referente a AE: AE2, AE4, AE5, AE6, AE7, AE8, AE9, AE10, AE11. A unidade de análise das narrativas, (re)significação de conceitos, pode ser encontrada nas narrativas referente as mesmas dez AE. Assim, podemos inferir que essas AE vieram a ser uma AOE, como o exemplo da narrativa da licencianda S3 que aponta para a necessidade de aprender o conteúdo e aprender a ensinar.

S3-N8 Acredito que a maior dificuldade e preocupação nos dias de hoje é ensinar de modo significativo e chamar a atenção do indivíduo para discutir a respeito da matemática. Nas perspectivas que temos contato, a ideia principal é responsabilizar o aluno de sua aprendizagem de maneira que este construa o seu conhecimento. Na minha visão faz todo sentido, pois somos alunos e com certeza já passamos por isso: o professor fala a aula inteira e você só entende depois de pesquisar, resolver vários exercícios e tirar dúvidas, mesmo assim dependendo o contexto que nos deparamos, não conseguimos resolver. Há uma necessidade de se ter contato com uma parte mais significativa do conceito para poder generalizar o conceito. Percebemos nas discussões que uma preocupação dos estão formando em professores é em se deparar com a realidade da sala de aula e como lidar com os problemas. A formação certamente ajuda, porém nada se aproxima melhor que a prática. O professor sai formado com uma bagagem de conteúdos, mas encontra uma sala onde os alunos não querer aprender, não veem sentido em aprender e tem aquela famosa frase na cabeça: "matemática é muito difícil, quase ninguém aprende", e assim são poucos que se interessam por essa ciência. O professor recém-formado, conhecedor das teorias de ensino e aprendizagem, até tenta aplicá-las em sala de aula, mas por não tê-las visto em prática, ou seja, a formação do professor é muito teórica, não consegue se organizar para trabalhar e acaba por desistir e passa a dar aula como seus professores davam. Contudo creio que por enquanto o que temos que ter em mente é a vontade de mudança, ter claro como eu poderia torna mais significativa a minha prática. Acho ser um bom começo.

A nosso ver, as AE possibilitaram os licenciandos a atribuir novos sentidos e significados aos elementos constitutivos da organização do ensino, como indica as reflexões de Q2 e Q7:

Q2-N8 Para mim a função de um bom professor, além de passar aos alunos o conteúdo específico, ele precisa planejar estratégias, com criatividade, para resolver os problemas que vão surgindo na sala de aula no dia a dia. Mas há algumas questões que o professor sozinho não vai conseguir resolver e nem é função dele resolver sozinho, pois há, ou melhor, pela lei em toda escola deve ter pedagogos, psicólogos, profissionais capacitados a algumas questões específicas dos alunos, o professor precisa sim, observar esses alunos e se necessário pedir ajuda aos demais profissionais.

Q7-N7 Entretanto, essas discussões são interessantes, mas ao mesmo tempo nos faz repensar sobre o que realmente sabemos e se sabemos alguma coisa, não temos ainda uma visão que nos permite analisar minuciosamente detalhes que podem fazer a diferença para o aprendizado dos alunos. Eu acho válido quando surgem essas discussões que envolvem conceitos que serão trabalhados com os alunos na sala de aula, pois acredito que preparar uma aula é fácil, mas pensar em uma maneira que vai realmente esclarecer certos conceitos para os alunos de modo a sanar a sua dúvida é muito difícil e essas discussões me ajudam a ter uma visão mais ampla sobre coisas que antes eu não tinha capacidade para visualizar.

A unidade de análise das narrativas intitulada: "A preocupação com as notas e com as avaliações" permite afirmar que os alunos, muitas vezes, privilegiam as notas nas avaliações em detrimento do saber, como mostra a narrativa de S10.

S10-N8 O aluno entra na escola com o pensamento de tirar a notas boas para passar de ano, e não se preocupa com a matéria, pois para ele, a sociedade ensina que ele deve concluir o curso e não a aprender todos os conteúdos para sua profissionalização.

A unidade de análise das narrativas, intitulada: “Reflexões” indica que os licenciandos mostraram-se preocupados com a escola e sua organização. O licenciando S13 reflete acerca do professor de matemática, um sujeito pensante, capaz de um pensar epistêmico (LIBÂNEO, 2004a, p.141), que seja capaz de ir além de saber coisas, que seja capaz de apropriar-se do momento histórico de modo a pensar historicamente essa realidade e reagir a ela.

S13-N8 No mundo atual, o professor de matemática deve ser capaz de discutir qualquer assunto, pois somente o conhecimento acadêmico não é suficiente para formar um profissional. Assim, percebemos o quanto a prática não tem sido relacionada com a teoria que se aprende nas salas de aula no Ensino Superior. E o que fazer para mudar isso?

Há de se considerar, ainda, que de acordo com Libâneo (2004b), a didática precisa comprometer-se com a qualidade cognitiva das aprendizagens e esta, por sua vez, está associada à aprendizagem do pensar.

A categoria, *Do aprender ao aprender a ensinar,* leva-nos a afirmar que para alguns alunos o desenvolvimento das AE, a partir da dinâmica estabelecida, se tornou uma AOE, pois indicaram o elo entre o ensino e a aprendizagem, com vistas à humanização dos sujeitos envolvidos no trabalho educativo.

5.3.4 Contradições

Na categoria *Contradições,* a contradição aparece como geradora de conhecimento, não apenas nos licenciandos como também em nós, enquanto atuávamos como professora/pesquisadora.

> Podemos entender que, na perspectiva mais básica da lógica, a natureza contraditória da realidade leva ao surgimento de afirmações conflitantes. Estas, por sua vez, constituem-se em verdades, pois estão vinculadas à própria realidade, logo, elas exigem uma forma de pensamento que supere a lógica formal. Portanto, há necessidade do surgimento de uma lógica dialética que entenda o princípio da contradição. A lógica dialética, ao partir do princípio da contradição, considera que tudo está em movimento, e que qualquer tipo de movimento é gerado pela coexistência de diversos elementos contraditórios na totalidade de determinado sistema (CEDRO, 2008, p. 95).

Esta categoria emergiu da triangulação dos dados contidos no diário de campo, nas AE e nas narrativas.

Nas AE, promovemos situações que levassem ao desequilíbrio dos licenciandos e conseguimos isso em alguns momentos, como, por exemplo, no excerto abaixo:

Q11-N8 Durante as aulas de geometria, temos nos deparado com diversos episódios que desequilibram o nosso conhecimento. Isto tudo, graças ao intenso contato com a diversidade de situações colocadas diante de nós pela professora.

A AE 8 permitiu que discutíssemos e questionássemos as histórias encontradas nos livros de história da matemática, o que levou os alunos a uma possível contradição que permitiu um pensar novo, um pensar diferente.

S9-N8 Depois que a professora nos mostrou este artigo, confesso que fiquei confuso, porque a história diz uma coisa, e este artigo fala outra coisa que realmente pode ser verdade, então fico imaginando, será que outras histórias da matemática também podem ter acontecido de outra maneira?

O pensar novo, o pensar diferente pode ser encontrado nas unidades de categorias das narrativas, reflexões e da verdade matemática às verdades matemáticas.

A unidade de análise das narrativas, intitulada, “Crítica às atividades”, permite afirmar que os licenciandos viveram um conflito, o que fez com que entrassem em contradições. Sabiam da necessidade de mudanças no curso de formação de professores. No entanto, já estavam acostumados com a formação, na qual as aulas são baseadas em disciplinas de conhecimentos proposicionais, as disciplinas são fragmentadas e fechadas.

Q4-N5 As atividades realizadas e as discussões foram bem proveitosas, mas essas atividades, em minha opinião, estão mais com cara de História da Matemática do que Geometria, sinceramente não gosto dessas atividades e preferiria que a professora estivesse definindo no quadro o que é ponto, reta, plano e os demais entes geométricos.

O excerto, a seguir, da narrativa da licencianda Q4, mostra que ela considera importantes as discussões realizadas. Mas ela prioriza o resultado e não o processo, ou seja, o lógico-formal dos conceitos estudados.

Nesse contexto, segundo Sousa (2004), fica muito difícil para alunos e professores se apropriarem do conhecimento científico ou matemático e fazer conexões com os movimentos da vida.

Q4-N7 Embora a atividade tenha sido interessante, pois discutimos algumas coisas de geometria como semelhança de triângulos e reta tangente a uma circunferência, não gosto dessas atividades porque não vejo o formalismo das definições e me parece que fica algo incompleto, que foi o que aconteceu com essa atividade com algumas demonstrações inacabadas. Por isso não consigo entender como essas atividades me ajudam a aprender geometria!

A contradição também se fez presente em nossas ações como professora/pesquisadora. Vivemos durante toda pesquisa a contradição entre a busca pela coerência e o medo de enfrentar o novo.

O diálogo estabelecido na disciplina foi importante para os alunos, já que os mesmos puderam se manifestar e para nós, para que pudéssemos repensar as nossas próprias contradições. O diálogo foi estabelecido não apenas durante as aulas, foram vários os dias que, mesmo depois de finalizado o horário da aula, ficamos conversando com alguns licenciandos em relação à disciplina e a sua organização. Nem todos os licenciandos conseguiram falar o que realmente pensavam, alguns preferiram se silenciar, alguns se manifestaram nas narrativas e outros preferiram a conversa, o diálogo.

No diálogo com os licenciandos, foi necessário que admitíssemos que houve contradições em nossa própria prática; os excertos das narrativas S11-N13 e Q9-N13 destacam a importância desse momento.

S11-N13 Nas aulas de geometria não temos muito esse problema, a professora mantém constante

diálogo conosco, às vezes assume algumas culpas por ser para ela também algo novo, nos dá alternativas para não sermos de certo modo desfavorecidos na nota.

Q9-N13 No encontro posterior (ocorrido na última semana antes do recesso do meio do ano), a professora comentou com a turma que já havia lido algumas das narrativas e pediu que expuséssemos nossos pontos. É importante destacar a professora se mostrou atenciosa com a discussão e agiu de modo a buscar uma solução interessante a todos, algo importantíssimo (sob minha ótica), pois são poucos os professores que aceitam ser questionados, principalmente quanto ao modo como se propõem a ensinar.

Cabe salientar que, mesmo usando de uma dinâmica diferenciada, acabamos retornando em um mesmo cenário, de avaliação formal, permeada por notas. Isso causou desconforto em grande parte dos alunos. O excerto da narrativa S3-N13 mostra o desconforto que a avaliação pode provocar, mesmo sabendo que eles não seriam avaliados apenas de uma maneira.

S3-N13 A expressão "ser avaliado" causa no mínimo algum sentimento assim como vários outros que veem entrelaçados com este, e ao sermos sujeitos a isto é quase inevitável passar por tudo sem pensar na tão esperada NOTA, somos acostumados a fazer uma coisa em troca de outra e induzidos a pensar assim também quando a nos deparamos com uma situação de avaliação, pensamentos que por vezes somente atrapalha, pois há dias em que o nervosismo, a ansiedade, a cobrança exagerada levam a falta de concentração e consequentemente ao esquecimento. Contudo "o importante é o aprendizado". Esta é a mensagem que alguns professores têm tentando nos transmitir, alguns dizem, sugerem, porém na matéria de geometria euclidiana e tópicos de geometria não euclidiana a professora quer ver isso na prática. A professora vem fazendo isso de jeito a atender também aos nossos costumes, fazendo todas as atividades propostas valendo nota em todas as aulas.

A categoria, *Contradição,* permitiu que olhássemos não apenas para as contradições dos licenciandos, mas também para a nossa enquanto professora/pesquisadora. A contradição nos alunos se manifesta principalmente na dificuldade em aceitar uma dinâmica que não favoreça exclusivamente um ensino de matemática memorístico. A contradição que vivenciamos, percebida principalmente na análise do diário de campo, enquanto professora/pesquisadora se manifestou na luta em aproximar a teoria professada da teoria praticada. Vivemos durante toda a disciplina momentos de embate com os licenciandos, que cobravam a respostas de todas as perguntas que surgiam na sala de aula, que desejavam listas de exercícios e que as avaliações fossem repetições de tais exercícios. Mesmo não corroborando com tais ideias, o incômodo, o desafio e o medo, a nossa formação inicial, nos levaram, em alguns momentos, a percorrer tais caminhos e por em prática um ensino que privilegiava a formação dos conteúdos matemáticos em detrimento da humanização dos sujeitos.

Ao encerrarmos as análises, pudemos inferir que as AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica se configuraram como unidade entre o ensino e a aprendizagem na formação inicial de professores. Na presente pesquisa, inferimos que a perspectiva lógico-histórica pode se tornar didática para a formação de professores.

6 TECENDO ALGUMAS CONCLUSÕES

"Mudaram as estações
nada mudou
Mas eu sei que alguma coisa aconteceu
Tá tudo assim, tão diferente

Se lembra quando a gente
chegou um dia a acreditar
Que tudo era pra sempre
sem saber
que o pra sempre
sempre acaba".

(Renato Russo)

Na busca de analisar se as AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, desenvolvidas a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativa, podem se configurar como unidade entre ensino e a aprendizagem (AOE) na formação inicial de professores, deparamo-nos com esclarecimentos, teorizações, perguntas, inquietações, dúvidas, contradições e incertezas. Com isso, modificamo-nos enquanto pesquisadora e professora e modificamos também os licenciandos que foram sujeitos da pesquisa.

O movimento de pesquisa que levou a escolha pelo referencial teórico foi construído com o tempo e influenciado por acontecimentos anteriores e posteriores ao início da pesquisa. As geometrias e a formação de professores, desde 2006, vêm sendo tema de nossas pesquisas. A história da matemática, como possibilidade de perspectiva teórica, surge da busca de modificar uma prática que provocava incômodo.

Quando optamos em fazer uso do discurso histórico para a construção das AE, foi necessário compreendermos os discursos existentes, e em quais momentos eles iam ao encontro daquele que adotamos na pesquisa.

Entendemos que na perspectiva que usamos, conseguimos romper com a história factual e com o princípio recapitulacionista. Em relação ao caráter motivacional, a nosso ver, a história da matemática apareceu, nessa pesquisa, como motivadora. No entanto, conseguimos ultrapassar esse aspecto. Ainda na busca pela compreensão dos diferentes discursos do uso da história da matemática, deparamo-nos com as cinco perspectivas elencadas por Miguel e Miorim (2008): perspectiva evolucionista linear, perspectiva estrutural-construtivista operatória, perspectiva evolutiva descontínua, perspectiva sociocultural e perspectiva dos jogos de vozes e ecos.

Por não compartilhar da ideia do princípio recapitulacionista e da noção linear do conhecimento, inferimos que não nos aproximamos da perspectiva evolucionista linear e nem da perspectiva estrutural-construtivista operatória. Como aceitamos que existem conhecimentos matemáticos de diversas culturas e diferentes daquele que conhecemos e temos como verdade, entendemos que não fizemos uso da perspectiva evolutiva descontínua. Embora não façamos uso de significações semióticas, aproximamo-nos da perspectiva sociocultural. Pelo referencial teórico, não fazemos uso da perspectiva jogos de vozes e ecos.

Em busca por mais teorizações, tomamos como pressuposto a perspectiva histórico-cultural e de autores como Moura (1996), Catalani (2002), Sousa (2004, 2009), Ferreira (2005), Moretti (2007), Dias (2007), Cedro (2008), Moura et al. (2010), Moretti e Moura (2010), Sousa e Jesus (2011), Furlanetto (2013) e Panossian (2013), e assim passamos a ver o lógico-histórico e a teoria da atividade como um possibilidade de perspectivas.

Esses autores nos deram elementos qualitativos presentes na perspectiva lógico-histórica para que pudéssemos construir a pesquisa. Assim, optamos por fazer uso das AE fundamentadas em pressupostos lógico-históricos de geometrias como uma possibilidade para a formação inicial de professores de matemática.

Ao assumirmos o lógico-histórico enquanto perspectiva didática para a formação de professores, consideramos a fluência, o movimento, a variabilidade, a pluralidade da verdade matemática. Por isso, corroboramos com Sousa (2004, p. 33), segundo a qual, o lógico-histórico é o processo de vir a ser dos conceitos. Assim, as geometrias não são, elas que estão por vir a ser, já que suas verdades não são eternas, prontas e acabadas.

Foi preciso fazer uso de elementos qualitativos de geometrias, presentes na perspectiva lógico-histórica, para pensar as AE; dentre eles, destacamos a variabilidade se contrapondo à rigidez e à pluralidade de verdades se contrapondo à unicidade de verdades. Com isso, recorremos à história da matemática, para irmos além da geometria formal que privilegia a geometria métrica.

Para compreendermos as AE, foi preciso teorizar o conceito de atividade, motivo, objetivo, sentido e significado na perspectiva leontieviena e recorrermos ao conceito de AOE, unidade entre o ensino e aprendizagem, como um recurso metodológico que pudesse contribuir para a formação inicial de professores de matemática.

Baseado em um quadro proposto por Moraes (2008), em que o autora apresenta os componentes centrais da AOE, propusemos um novo quadro com elementos que consideramos importantes no contexto da formação inicial de professores. A construção desse novo quadro nos auxiliou enquanto professora e para a organização das disciplinas. Isso, pois, objetivando ensinar conceitos e formar professores, organizamos as disciplinas não apenas pensando na apropriação dos conhecimentos, mas também nas orientações e discussões acerca do ensinar. Com vistas a permitir uma formação não alienante e na qual os sujeitos em formação possam se apropriar do conhecimento historicamente construído e discutir e pensar sobre seus futuros objetos de trabalho.

As modificações, em nós como pesquisadoras, refletiram nas modificações em nós enquanto professoras. Quanto ao movimento de busca em pôr em prática a teoria foi um momento difícil e por muitas vezes contraditório.

Pensando nas ações em sala, organizadas a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino, rompemos com o modelo de ensino que até então tínhamos feito o uso e elaboramos a disciplina de geometria e a disciplina de geometria euclidiana e tópicos de geometrias não euclidianas por meio de AE na perspectiva lógico-histórico e vivenciadas a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas. Foram desenvolvidas 11 AE e quatro avaliações, inferimos que as avaliações também se configuraram como uma AE.

Tínhamos o objetivo de responder as seguintes questões de pesquisa:

1) As atividades de ensino desenvolvidas nas disciplinas de “Geometria” e de “Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não euclidianas” foram geradoras de objetivos e motivos para se ensinar e aprender a ensinar geometrias? Essas atividades vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe e postagem das narrativas se tornaram uma AOE?
2) Quais são as produções de sentidos, de significados, os objetivos e motivos que são explicitados nas narrativas elaboradas por licenciandos do curso de matemática, enquanto

vivenciaram AE de geometrias na perspectiva lógico-histórica, a partir da dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe?

Para responder as questões de investigação, analisamos as narrativas de 30 licenciandos, sendo 19 licenciandos do segundo ano de matemática e 11 do quarto ano. Com a análise das narrativas, estabelecemos nove unidades de análises das narrativas 1) *descrição da atividade; 2) mudanças; 3) reflexões; 4) preocupação com a prática; 5) (re)significações de conceitos; 6) da verdade matemática às verdades matemáticas; 7) críticas às atividades; 8) concepção de matemática como construção humana; 9) a preocupação com as notas e com as avaliações.*

A triangulação entre diário de campo, AE, questionário inicial e narrativas fizeram emergir quatro categorias de análise: *Do isolado ao coletivo; O Novo; Do aprender ao aprender a ensinar; Contradições*.

Na categoria *Do isolado ao coletivo,* apresentamos as mudanças de sentido e significado que foram explicitadas pelos licenciandos em suas narrativas e foram provocadas, principalmente pelas AE vivenciadas na dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas. Essas mudanças se refletiram principalmente na maneira de pensar e significar a história da matemática como construção humana, a educação como comunicação e o diálogo como um ato de ensinar. A dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas orientaram as reflexões dos licenciandos, fazendo com que eles mobilizassem conhecimentos, partilhassem significados e gerassem soluções que trouxeram novos significados.

Na categoria *O novo,* destacamos os momentos de silêncio, de incômodo, de resistência, de confronto, de alegria e de satisfação manifestados pelos licenciandos em suas narrativas e nos diálogos em sala de aula. Entendemos que essa categoria se manifestou em dois momentos. Primeiramente, na aceitação das geometrias não euclidianas como uma geometria tão consistente quanto à geometria euclidiana. A nosso ver, as AE contribuíram para que os licenciandos dessem o impulso em direção ao novo e (re)significassem o conceito de verdade matemática; o segundo momento se manifestou no sentido que os licenciandos atribuíram à disciplina e à sua organização. Os acadêmicos do segundo ano, inicialmente, se apresentaram tímidos, temerosos e com aversão à dinâmica que escolhemos para organizar o ensino, mas os licenciandos do quarto ano foram mais resistentes. A imposição da dinâmica durante todo o ano causou desconforto em alguns licenciandos. Inferimos que o sentido atribuído pelos licenciandos do quarto ano à dinâmica se diferenciou do sentido atribuído pelos licenciandos do segundo ano. Os alunos que estavam a mais tempo no curso cobravam mais listas de exercícios e demonstrações matemáticas.

A categoria *O novo* nos permitiu repensarmos o trabalho desenvolvido e com isso, avaliamos as críticas e sugestões dos licenciandos. E esse pensar sinaliza para a necessidade de novas mudanças, para novas teorizações e certamente levarão as novas mudanças em nossa prática. Afinal, ao organizar uma atividade, sabemos por onde começar e idealizamos o seu fim, no entanto nem sempre conseguimos atingir os objetivos idealizados e isso acarreta mudanças na nossa prática.

Na categoria *Do aprender ao aprender a ensinar,* apresentamos os movimentos dos motivos que levaram os licenciandos a cursar a disciplina. Inferimos que, de maneira geral, as AE foram geradoras de motivos para atividade de aprendizagem, ou seja, elas geraram e promoveram motivos nos alunos que os levaram à apropriação do conhecimento e a compreensão de como trabalhar com esses conhecimentos na futura prática docente. As AE se apresentaram como uma possibilidade para o licenciando que não adentrou nas salas da educação básica e como uma perspectiva para quem já possui prática docente.

Na categoria *Contradições*, indicamos os momentos de contradições vivenciados pelos licenciandos e pela professora/pesquisadora. Os licenciandos manifestaram suas contradições por meio de frases conflituosas, nas quais admitiam a necessidade de mudanças na formação inicial e consideraram importantes as discussões realizadas. No entanto, sentiram dificuldades em aceitar a dinâmica utilizada, uma vez que estavam acostumados com uma formação baseada em disciplinas fechadas e que priorizavam aulas memorísticas.

O nosso desafio ao trilhar o caminho da perspectiva histórico-cultural foi permeado por uma luta por superação das nossas próprias contradições. Uma vez, mesmo que, tomando como pressuposto uma dinâmica que procura superar a aula que prioriza a cultura memorística, focada no uso de fórmulas, por muitas vezes, principalmente nas avaliações, acabamos por privilegiar o formalismo em detrimento do processo de humanização. A contradição que vivenciamos, enquanto professora/pesquisadora, se manifestou na luta em aproximar a teoria professada da teoria praticada. Entendemos a contradição a geradora de conhecimento, não apenas nos licenciandos, mas também para nós mesmos. Pois ao pensarmos acerca delas, repensamos nossos motivos e nossos objetivos para ensinar e aprender a ensinar.

Com a análise das quatro categorias, somos levados a responder a primeira questão da pesquisa de forma afirmativa, ou seja, as AE desenvolvidas nas disciplinas, e vivenciadas pela dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, foram geradoras de objetivos e motivos para ensinar, aprender e aprender a ensinar geometrias. Com isso, inferimos que as AE vieram a ser uma AOE, uma vez que houve a unidade entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Ou seja, as AE se tornaram uma AOE, pois, desencadearam a formação do estudante, a minha formação enquanto professora e a minha formação enquanto pesquisadora; desencadearam a formação do estudante, pois, permitiu a apropriação do conhecimento teórico e reflexões acerca de como ensinar esse conhecimento teórico na prática docente. De maneira geral, entendemos que as AE se apresentaram como uma possibilidade de romper com a concepção de que o dever do educador é conduzir o educando a memorização mecânica de conteúdo; possibilitaram a nossa formação como professora, pois, mobilizaram movimentos nos motivos da atividade docente, o que acarretou em mudanças na organização do ensino e nas ações que se concretizaram na atividade pedagógica e permitiram a nossa formação enquanto pesquisadora, pois a utilizamos como uma fonte de pesquisa e como uma estrutura que nos possibilitou responder as nossas questões iniciais e formular outras. Durante essa pesquisa, surgiram novas inquietações, críticas à própria prática e são essas inquietações e críticas que nos movimentarão e alimentarão a busca por teorizações que levarão a um novo movimento da prática.

Procurando responder a nossa segunda questão de pesquisa, podemos dizer que houve movimentos nos motivos e objetivos dos licenciandos provocados pelas mudanças nos sentidos e significados que eles atribuíam à disciplina, ao papel do professor, às geometrias e à formação inicial.

Na análise do questionário, foi possível constatar a presença de motivos compreensíveis para cursar a disciplina, no decorrer do ano, muitos deles se transformaram em motivos eficazes, já que houve coincidência com os nossos objetivos. Assim, durante o curso, os licenciandos apresentaram objetivos de aprender o conhecimento teórico e pensar na prática docente. Esse movimento dos motivos pode indicar uma possível mudança em sua futura prática docente, uma vez que a transformação dos motivos ocorre na própria prática do sujeito, a partir do momento que ele atribui sentido as atividades.

Pensar acerca do lógico-histórico das geometrias permitiu o movimento do pensamento dos licenciandos e o entendimento que o ensino de geometrias não pode ser reduzido apenas ao lógico-formal, uma vez que a importância do ensino de geometrias não está apenas no rigor, mas na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses, compreender os movimentos da vida e a mutabilidade dos conhecimentos.

Corroboramos com Miguel e Miorim (2008), segundo os quais as disciplinas de conteúdo matemático que integram a grade curricular dos cursos de matemática ainda estão centradas quase exclusivamente em abordagens axiomático-dedutivas. Isso faz com que os licenciandos construam um sentido em relação à matemática, sentido esse que se manifesta na valorização do conhecimento matemático em detrimento das reflexões acerca das diversas concepções de mundo. As AE permitiram que os licenciandos refletissem sobre esses sentidos, o que os levou, muitas vezes, à contradição. No decorrer da disciplina, os licenciandos atribuíram novos sentidos à matemática, diferentes daqueles que construíram durante a vida escolar, isso os fez entrar em conflito e recair em contradições.

Corroboramos com Libâneo (2004a), segundo o qual, as mudanças na maneira de aprender afetam as formas de ensinar. Foi possível mostrar que são possíveis outras perspectivas de ensinar geometrias. Ou seja, criamos condições para que o professor em formação pudesse rever os motivos que os moviam a cursar a disciplina e assim passaram a atribuir novos sentidos à organização do ensino, no caso de quem já era professor, e novos sentidos para a futura organização do ensino, para quem não era professor.

As análises das narrativas nos permitem afirmar que a dinâmica utilizada possibilitou que os licenciandos (re)significassem conceitos de geometrias e passassem a aceitar a pluralidade de verdades e a variabilidade dos conceitos matemáticos. Nas AE, os licenciandos mobilizaram seus conhecimentos e geraram uma busca por um novo referencial. E, nessa busca, partilharam significados na interação com os sujeitos e geraram soluções que trouxeram significados novos. Nas narrativas, eles explicitaram os sentidos e significados que passaram a dar aos conceitos geométricos.

Considerando todos os elementos acima levantados, defendemos a tese que as AE de geometrias na perspectiva lógica-histórica, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas, se configuraram, na pesquisa, como uma unidade entre o ensino e a aprendizagem (AOE) na formação inicial de professores.

Dessa forma, temos como pressuposto que a perspectiva lógico-histórica pode se tornar didática para a formação inicial de professores quando as AE forem desenvolvidas, a partir da dinâmica indivíduo-grupo-classe-narrativas. Nesse sentido, a nosso ver, houve unidade entre ensino e aprendizagem, o que desencadeou transformações em todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

As modificações, enquanto pesquisadora, se refletem no modo de entender a pesquisa. Uma das coisas mais valiosas que esse trabalho de doutorado nos proporcionou foi compreender que “nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas” (D`AMBROSIO, 1997, p. 81), e ainda que, “o elo entre teoria e prática é o que chamamos pesquisa” (D`AMBROSIO, 1997, p. 91).

Ou seja, levou-nos a compreender que a teoria e prática estão em movimento e o pensar acerca desse movimento nos permitiu realizar essa pesquisa. Olhar criticamente para a nossa prática não é algo fácil, exige cuidado, amadurecimento e nem sempre conseguimos realizar no tempo que queremos e temos os resultados que desejaríamos. Isso angustia, leva a contradições e possibilita compreender que estamos sempre em movimento, em uma eterna busca por novos motivos e novos objetivos.

Essa pesquisa não se apresenta como uma teoria final e muito menos como uma prática definitiva. Ela se apresenta como uma possibilidade e precisa ser (re)pensada por pesquisadores, por professores que investigam a própria prática e por nós mesmo, que temos como intenção prosseguir os estudos sobre essa perspectiva na formação de professores.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. D. **A participação da história da matemática na formação inicial de professores de matemática na ótica de professores e pesquisadores**. 2008. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)–Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, I. Introdução. In: EUCLIDES. **Os elementos**: Euclides. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009. p.15-96.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1999.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

BRITO, A. J.; MENDES, I. A. Apresentação. In: MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 7-12.

CALDATTO, M. E. **O processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das geometrias não euclidianas**. 2011. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática)–Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1970.

CATALANI, E. M. T. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração**. 2002. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CEDRO, W. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática**: uma teoria histórico-cultural. 2008. 261 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CEDRO, W. L. Professores de matemática em formação: discutindo os motivos da atividade pedagógica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais...** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012. p. 1-20.

COSTA, W. N. G. De criação divina a instituição humana: as relações entre matemática e mitos. **Zetetiké**, Campinas, v. 14, n. 26, p. 7-27, jul./dez. 2006.

CUNHA, M. I. Conta-me agora! as narrativas como alternativas pedagógicas na pesquisa e no pesquisa. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 23, n. 1-2, p. 185-195, jan./dez. 1997.

CYRINO, M. C. C. T. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de matemática. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 77-88.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria a prática. 2. ed. Campinas: Papirus, 1997.

DIAS, M. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. 252 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

EUCLIDES. **Os elementos**: Euclides. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2011.

FACULDADE ESTADUAL DE CIÊNCIAS E LETRAS DE CAMPO MOURÃO. Departamento de Matemática. **Político Pedagógico do Curso de Matemática.** Campo Mourão: FECILCAM, 2003.

FACULDADE ESTADUAL DE CIÊNCIAS E LETRAS DE CAMPO MOURÃO. Departamento de Matemática. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática.** Campo Mourão: FECILCAM, 2009.

FERREIRA, E. S. M. **Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar**. 2005. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

FERREIRA, E. M.; SOUSA, M. C. **O Ensino de geometria nas séries iniciais.** Disponível em: <http://www.lite.fe.unicamp.br/papet/2002/fp255/ t_geo.htm>. Acesso em: 17 fev. 2013.

FLORES, C. **Olhar, saber, representar**: sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007.

FONTANA, J. Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide. **Metatheoria**, Buenos Aires, v. 2, n. 1, p. 23-36, 2011.

FRANCO, V. S.; GERÔNIMO, J. R. **Geometria plana e espacial**. 2. ed. Maringá: Eduem, 2010.

FREIRE, P. **Extensão ou comunicação?** Santiago de Chile: Instituto de Capacitación e Investigación en Reforma Agrária, 1979.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1981.

FREIRE, P. **Pedagogia da esperança**: um reencontro com a pedagogia do oprimido. Notas: Ana Maria Araújo Freire. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992.

FREIRE, P. **Pedagogia da indignação**: cartas pedagógicas e outros inscritos. São Paulo: UNESP, 2000. Disponível em: <http://www.dhnet.org.br/direitos/militantes/paulofreire/paulo_freire_pedagogia_da_indignacao.pdf>. Acesso em: 22 out. 2012.

FREIRE, P.; MACEDO, D. **Alfabetização**: leitura do mundo leitura da palavra. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1990.

FREIRE, P.; SHOR, I. **Medo e ousadia**: o cotidiano do professor. Tradução de Adriana Lopez. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. Desafios e potencialidades da escrita na formação docente em matemática. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 37, p. 138-189, 2008.

FURLANETTO, F. R. **O movimento de mudança de sentido pessoal na formação inicial do professor**. 2013. 194 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2013.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GASPAR, M. T. J. Um estudo sobre áreas em um curso de formação de professores tomando como ponto de partida a história da matemática indiana no período do sulbasutras. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 4, n. 8, p.189-214, 2004.

GLEICK, J. **Caos**: a criação de uma nova ciência. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

GOMES, S. C.; SILVA, J. C. C. Uma circunferência de 480º? **Revista História da Matemática para Professores**, Natal, n. 1, p. 11-15, 2013.

GONÇALVES, T. O.; FIORENTINI, D. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIOENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. Campinas: Musa, 2005. p. 68-88.

HOGBEN, L. **O homem e a ciências**. Tradução de Paulo M. da Silva, Roberto Bins e Henrique C. Pfeiter. Rio de Janeiro: Globo, 1952. v. 1.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Tradução de Paulo M. da Silva, Roberto Bins e Henrique C. Pfeiter. Porto Alegre: Globo, 1970. v. 1.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LANNER DE MOURA, A. L. **Medindo a sombra**. Disponível em: <https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&ved=0CCoQFjAC&url=http%3A%2F%2Fwww.lite.fe.unicamp.br%2Fpapet%2F2002%2Ffp255%2Ft_sombra.doc&ei=N-hcVbe0CoavggS7iYGwDw&usg=AFQjCNEhCTwUFiGOip67rbhNe-sWckOa2w&sig2=9Xjq1MLrhWG2onsMXMi8fw>. Acesso em: 17 fev. 2013.

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. S. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC06705545968.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo.** São Paulo: Moraes, 2010.

LEONTIEV, A. N.; VIGOSTSKY, L. S.; LURIA, A. R. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 10. ed. São Paulo: Ícone, 2006.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Revista Educar**, Curitiba, n. 24, p. 113-147, 2004a.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 5-25, 2004b.

LIBÂNEO, J. C. Reflexividade e formação de professores: outra oscilação do pensamento pedagógico brasileiro? In: PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Orgs.). **Professor reflexivo no Brasil**: gênese e crítica de um conceito. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2006. p. 53-80.

LIMA, L. C.; TAKAZAKI, M.; MOISÉS, R. P. **Elementar é o essencial**. São Paulo: CTEAC, 1998, publicada por LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. S. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/MC06705545968.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2013.

LIBÂNEO, J. C. **Adeus professor, adeus professora?**: novas exigências educacionais e profissão docente. São Paulo: Cortez, 2010.

LORIN, J. H. Provão “A” cidadão “E”. **Jornal Integral**, Maringá, v. 2, p. 5, 2002.

LOVIS, K. A. **Geometria euclidiana e geometria hiperbólica em um ambiente de geometria dinâmica**: o que pensam e o que fazem os professores. 2009. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática)–Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino de trigonometria. In: MIGUEL, A. et al. (Orgs.). **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: Argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p. 73-105, jul./dez. 1997.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: FERREIRA, E. S. (Org.). **História e educação matemática**. Campinas: Papirus, 1996. (Cadernos CEDES, 40).

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática.** 2009. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, 2009.

MORAES, S. P. G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. 2008. 261 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2008.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (in)variantes: reflexões sobre as possibilidade de uma nova estrutura curricular na licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p.1137-1150, 2012,

MORETTI, V. **Professores de matemática em atividade de ensino**: uma perspectiva histórico-cultural para a formação. 2007. 207 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MORETTI, V. D.; MOURA, M. O. O sentido em movimento na formação de professores de matemática. Zetetiké, Campinas, v. 18, n. 34, p.155-180, 2010.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, ano 2, n. 12, p. 29-43, 1996.

MOURA, M. O. et al. Atividades Orientadoras de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, 2010.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição dos objetos de ensino da álgebra**. 2013. 317 f. Tese (Doutorado em Educação)–Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2012.

PASSO, C. L. B.; GALVÃO, C. Narrativas de formação: investigações matemáticas na formação e na atuação de professores. **Interacções**, Lisboa, v. 7, n. 18, p. 76-103, 2011.

SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução à topologia geométrica**: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores. São Carlos: EDUFSCar, 2008.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica**. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática)–Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. 2004. 308 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica. **Bolema**, Rio Claro, ano 22, n. 32, p. 83-99, 2009.

SOUSA, M. C.; JESUS, W. P. Reflexões sobre os nexos conceituais do número e de seu ensino na Educação Básica. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 35, n. 58, p. 115-127, 2011.

SOUSA, M. C.; LANNER DE MOURA, A. L. Dando movimento ao pensamento algébrico. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 63-76, 2008.

TARDIF, M. **Saberes docente e formação profissional.** 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

THOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S. **Geometria não-euclidiana/Geometria Esférica**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>. Acesso em: 4 set. 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Autorização do diretor da UNESPAR – Campus de Campo Mourão e do chefe e do coordenador do departamento de matemática para a realização da pesquisa no curso de matemática

ESTADUAL DO PARANÁ
CAMPUS DE CAMPO MOURÃO

FECILCAM
Pública, gratuita, de qualidade

AUTORIZAÇÃO DE PESQUISA

A UNESPAR/FECILCAM – Universidade Estadual do Paraná Campus de Campo Mourão vem por meio desta, concordar e autorizar à pesquisadora Talita Secorun dos Santos realizar a pesquisa de seu projeto de doutorado pela UFSCar – Universidade Federal de São Carlos intitulada "ATIVIDADES DE ENSINO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA" que pretende investigar as narrativas dos licenciandos, do curso de matemática da UNESPAR, Campus de Campo Mourão, matriculados na disciplina de Geometria e Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não-euclidianas, enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre as Atividades de Ensino de Geometrias não-euclidianas na perspectiva lógico-histórica. Esperamos que ao analisar as narrativas dos licenciando em matemática enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre as atividades de ensino de Geometrias não-euclidianas na perspectiva lógico-histórica, possamos discutir teoricamente e defender a Tese do porque o conceito lógico-histórico pode vir a ser uma perspectiva didática para o ensino de Geometrias não-euclidianas durante a formação inicial de professores de matemática. A intervenção será realizada no ano de 2013 nas disciplinas Geometria e Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometria não-euclidiana nas turmas de quarto e segundo ano respectivamente do curso de licenciatura em matemática ofertado por esta instituição.

Campo Mourão, 22 de abril de 2013.

Prof. Éder Rogério Stela Diretor em Exercício	Marcos Erhardt Chefe do Departamento de Matemática	Fábio Alexandre Borges Coordenador do Curso de Matemática

APÊNDICE B – Ata da reunião de Colegiado do curso com autorização para realização da pesquisa no curso

Campo Mourão, 07 de Fevereiro de 2013
Local: Departamento de Matemática da FECILCAM
Ata da reunião de Colegiado do curso - número 01/2013

Aos sete dias do mês de Fevereiro do ano de dois mil e treze, às 9:00 horas, reuniram-se no departamento de Matemática da FECILCAM os professores Fábio Alexandre Borges, Wellington Hermann, Valdete dos Santos Coqueiro, Marcos Erhardt, Talita Secorun dos Santos, Valdir Alves, Gislaine Aparecida Periçaro, Amauri Jersi Ceolim, Veridiana Rezende, Willian Beline, João Henrique Lorin, Juliano Fabiano da Mota, Mariana Moran Barroso, Solange Regina dos Santos, Analéia Domingues, Sônia Maria Yassue Okido Rodrigues, Roberto Soltoski, Rosefran Adriano Gonçales Cibotto, além da discente Maisa Silva Leite.

O professor Fábio iniciou a reunião falando sobre a importância de apresentar os planos de ensino nos primeiros dias de aula, lembrando que, devido à mudança do Projeto Político Pedagógico, os professores devem estar atentos quanto à carga horária das disciplinas. Na sequência, o professor Fábio falou que anteciparia a entrega do primeiro capítulo do TCC devido aos problemas apresentados nos anos anteriores quanto à falta de tempo no final de ano. Ficou definido que deveria ser entregue em meados de abril sendo que todos os presentes concordaram com os prazos. O professor Wellington comentou que modificou a ordem do programa da disciplina de Complementos, iniciando com os conteúdos de trigonometria. Na sequência, ele comentou sobre a concentração de 4 aulas da disciplina de Cálculo II aos sábados, a cada 15 dias. O professor Rosefran fez um pedido para desenvolver atividades com os alunos do quarto ano do curso de matemática envolvendo tecnologias, na disciplina de estágio do quarto ano. O professor Valdir disse que, como o projeto envolve o conteúdo de funções, seria melhor desenvolvido no estágio do terceiro ano e no Ensino Fundamental, já que seu estudo inicia-se no nono ano, e nos primeiros bimestres do primeiro ano do Ensino Médio. A professora Analéia modificou a bibliografia da disciplina de Políticas Educacionais, incluído alguns textos. A seguir comentou sobre a dificuldade enfrentada com os acadêmicos do curso referente à falta de interesse nas disciplinas pedagógicas. O professor Fábio comentou que a dificuldade é natural, mas que é importante trabalhar com a leitura e escrita com os alunos. A professora Talita comentou sobre as mudanças que fez nos planos de ensino das disciplinas de Geometria do segundo e do quarto ano do curso de matemática quanto à metodologia, devido ao seu projeto de doutorado que será desenvolvido com essas turmas, incluído narrativas e trabalho e o Moodle. Como último tópico, o professor Fábio apresentou o pedido da aluna Amanda Richart de fazer a disciplina de Cálculo Numérico do curso de Engenharia de Produção Agroindustrial devido a impossibilidade de fazê-la no curso de Matemática, pois está passando por adaptação de grade curricular. A professora Valdete disse que não vê problemas em ela fazer essa disciplina na Engenharia. Todos concordaram que ela pode cursar a disciplina nestas condições.

Não havendo mais nada a ser tratado, a reunião encerra-se às 10:00 horas. Esta ata vai assinada por mim, professor Fábio Alexandre Borges, bem como por todos os participantes da mesma.

Valdete dos Santos Coqueiro
Valdir
Wellington Hermann

APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa de doutorado **"**ATIVIDADES DE ENSINO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**"**, sob a responsabilidade da pesquisadora Talita Secorun dos Santos. O objetivo desse estudo é investigar as narrativas dos licenciandos, do curso de matemática da UNESPAR, Campus de Campo Mourão, matriculados na disciplina de Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não-euclidianas, enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre as Atividades de Ensino de Geometrias na perspectiva lógico-histórica. Esperamos que ao analisar as narrativas dos licenciando em matemática enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre as atividades de ensino de Geometrias não-euclidianas na perspectiva lógico-histórica, possamos discutir teoricamente e defender a Tese do porque o conceito lógico-histórico pode vir a ser uma perspectiva didática para o ensino de Geometrias não-euclidianas durante a formação inicial de professores de matemática.

Você foi selecionado(a) porque atende a todos os critérios de seleção do participante da pesquisa, quais sejam: 1) é graduando do curso de licenciatura em matemática da UNESPAR/FECILCAM; 2) está matriculado na disciplina de Geometria Euclidiana e Tópicos de Geometrias não-euclidianas do curso de licenciatura em matemática da UNESPAR/FECILCAM.

Sua participação não é obrigatória e a qualquer momento você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. A sua recusa na participação não trará nenhum prejuízo à sua relação com o pesquisador que neste caso é professor da disciplina ou com a UNESPAR/FECILCAM, sua recusa não trará prejuízo algum ao seu desempenho na disciplina em questão, já que a sua participação na pesquisa não faz parte da avaliação da disciplina.

Sua participação consistirá em responder a um questionário inicial que terá como objetivo traçar o perfil dos sujeitos participantes da pesquisa. Você também deverá manter uma espécie de diário online, onde você deverá postar textos para discussões, dúvidas, o que pensam, como pensam enquanto vivenciam, analisam e pensam sobre as Atividades de Ensino de Geometrias não-euclidianas na perspectiva lógico-histórica e outras coisas que achar necessário e que possa contribuir para a disciplina.

Seu consentimento em participar pode gerar riscos, como por exemplo, o perigo da exposição bem como os desconfortos decorrentes dessa exposição. De acordo com a Resolução CNS 196/96 – Conselho Nacional de Saúde –, toda investigação com seres humanos envolve risco. Não obstante, esses riscos são aceitáveis na medida em que os benefícios esperados são apresentados e a sua importância é explicada. Tais benefícios representam a possibilidade de entender se o conceito lógico-histórico pode vir a ser uma perspectiva didática para o ensino de Geometrias não-euclidianas durante a formação inicial de professores de matemática. O estudo a ser desenvolvido não acarretará riscos físicos e/ou psíquicos, pois não irá te submeter a procedimentos invasivos, uso e/ou privação de fármacos ou outro tipo de terapêutica. Também não acarretará danos morais, pois os dados só serão utilizados mediante sua autorização prévia. É importante que fique claro que a sua participação nesta pesquisa não fará parte da avaliação da disciplina em questão. Em momento algum você será avaliado por participar da pesquisa.

Os dados da pesquisa serão construídos a partir das respostas obtidas por meio de questionários, da observação das aulas e das narrativas dos acadêmicos postadas em ambientes virtuais. Além disso, serão utilizadas, quando necessário, gravações de voz para o fiel registro dos dados.

Todas as informações obtidas através dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Seu nome será mantido em absoluto sigilo e quando suas falas forem relatadas no trabalho, serão utilizados apenas pseudônimos como Aluno1, Aluno2, ..., AlunoN.

Após a análise do material construído com a pesquisa você irá receber um e-mail com as análises da sua participação. Você terá um prazo de quinze dias para retornar o e-mail, caso discorde da análise feita. Caso o e-mail não seja retornado iremos entender que você concordou com a análise. Caso retorne o e-mail é imprescindível que argumente as análises com as quais discordou. Assim na análise final discutiremos acerca dos argumentos levantados por você. Lembrando que a qualquer momento você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento.

Os resultados serão utilizados para a conclusão da pesquisa acima citada, sob orientação da professora da UFSCar Dra. Maria do Carmo de Sousa. Os dados coletados durante o estudo serão analisados e apresentados sob a forma de relatórios e serão divulgados por meio de trabalhos apresentados em reuniões científicas, congressos, seminários, encontros, artigos, revistas científicas e da própria tese de doutorado.

Você receberá uma cópia deste termo onde constam os dados para contato com o pesquisador e com sua orientadora. Você poderá entrar em contato a qualquer momento, a fim de retirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação na pesquisa.

____

Assinatura do Pesquisador

Eu, ____, declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar. O pesquisador me informou que o projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UFSCar que funciona na Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Federal de São Carlos, localizada na Rodovia Washington Luiz, Km. 235 - Caixa Postal 676 - CEP 13.565-905 - São Carlos - SP – Brasil. Fone (16) 3351-8110. Endereço eletrônico: cephumanos@power.ufscar.br

Campo Mourão, ______ de ________________ de 2013.

____

Assinatura do Sujeito da Pesquisa

Pesquisador: Talita Secorun dos Santos
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação – UFSCar
Contato: Departamento de Matemática da UNESPAR/FECILCAM
Telefone: (44) 9845-8839 (TIM)
E-mail: tsecorun@hotmail.com

Orientadora: Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa
Programa de Pós-Graduação em Educação Departamento de Teorias e Práticas Pedagógicas Universidade Federal de São Carlos
E-mail: mdcsousa@gmail.com