Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Imersões isométricas de formas espaciais em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Samuel da Cruz Canevari

Orientador: *Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior*

São Carlos
Junho de 2015

Imersões isométricas de formas espaciais em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Samuel da Cruz Canevari

Orientador: *Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior*

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de doutor em Matemática.

São Carlos

Junho de 2015

Autor

Orientador

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53B25.

Palavras chaves: Imersões Isométricas, variedades Riemannianas, espaços com curvatura seccional constante, espaços produto, transformação de Ribaucour, hipersuperfícies.

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

C221ii

Canevari, Samuel da Cruz.
Imersões isométricas de formas espaciais em S^n x R e H^n x R. / Samuel da Cruz Canevari. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
97 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Geometria diferencial. 2. Imersões isométricas. 3. Transformação de Ribaucour. 4. Hipersuperficies. 5. Variedades diferenciáveis. 6. Espaços produto. I. Título.

CDD: 516.36 (20[a])

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Samuel da Cruz Canevari, realizada em 08/06/2015:

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
UFSCar

Prof. Dr. Marcos Dajczer
IMPA

Keti Tenenblat

Prof. Dr. Keti Tenenblat
UnB

Prof. Dr. Guilherme Machado de Freitas
IMPA

Prof. Dr. Pedro Roitman
UnB

À minha filha Betina

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo.

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos à minha esposa Katia, aos meus pais Francisco e Salete, aos meus irmãos Thiago e Glauco, às minhas cunhadas Mariana e Leinha, e ao meu sobrinho e afilhado Arthur, pelo amor, compreensão, carinho, paciência e incentivo constante.

Sou sinceramente grato ao amigo e orientador Prof. Ruy Tojeiro, pelo profissionalismo e incentivo a mim dedicado, através de sua grande experiência e admirável conhecimento matemático.

A todos meus amigos, onde quer que estejam, pelo convívio gostoso e apoio constante; em especial ao Daniel Silveira Guimarães, Fernando Manfio, Guilherme de Freitas e Carlos Gonçalves Filho pelas longas e valiosas discussões matemáticas.

Aos professores do Departamento de Matemática do Campus Prof. Alberto Carvalho da UFS, que me eximiram de minhas atribuições acadêmicas todos esses anos.

Finalmente agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese classificamos as imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$, $p \leq m-3$ e $c \leq 1$, em que M_c^m denota uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante igual a c. Obtemos resultados parciais sobre a classificação das imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$, $p \leq m-3$ e $c < 0$. Caracterizamos ainda as hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ para as quais existe outra imersão isométrica $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$, em que $\mathbb{Q}^4(c)$ e $\mathbb{L}^4$ denotam, respectivamente, uma forma espacial Riemanniana com curvatura constante igual a c e o espaço de Lorentz de dimensão 4.

Abstract

In this thesis we classify the isometric immersions $f : M_c^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ with $m \geq 3$, $p \leq m-3$ and $c \leq 1$, where M_c^m denotes a Riemannian manifold with constant sectional curvature equal to c. We obtain partial results on the classification of isometric immersions $f : M_c^m \to \mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R}$ with $m \geq 3$, $p \leq m-3$ and $c \leq 0$. We also characterize the hypersurfaces $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ for which there exists another isometric immersion $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$, where $\mathbb{Q}^4(c)$ and $\mathbb{L}^4$ denote a 4-dimensional space form of constant sectional curvature c and the 4-dimensional Lorentz space, respectively.

Sumário

Introdução

Um tópico central na teoria de subvariedades é o estudo de imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$ de uma variedade Riemanniana M_c^m com curvatura seccional constante c e dimensão m. Aqui, e em todo o trabalho, $\mathbb{Q}^N(\tilde{c})$ denota uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante $\tilde{c}$ e dimensão N. É um fato conhecido que $\mathbb{Q}^N(\tilde{c})$ é isométrica à esfera $\mathbb{S}^N(\tilde{c}) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ de raio $1/\sqrt{\tilde{c}}$ se $\tilde{c} > 0$, ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$ se $\tilde{c} = 0$ e ao espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^N = \{X = (x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{L}^{N+1} \, : \, \langle X, X \rangle = \frac{1}{\tilde{c}}, \ x_0 > 0\}$$

se $\tilde{c} < 0$, em que $\mathbb{L}^{N+1}$ denota o espaço de Lorentz de dimensão $N + 1$.

Com auxílio de sua teoria de formas quadráticas exteriormente ortogonais, E. Cartan mostrou, dentre outras coisas, que, se $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$ é uma imersão isométrica com $c < \tilde{c}$, então $p \geq m - 1$ e, se $p = m - 1$, então f possui, necessariamente, fibrado normal plano. Posteriormente, J.D.Moore ([17]) desenvolveu a teoria de formas bilineares Euclidianas com valores em espaços vetoriais munidos de formas bilineares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não-degeneradas, estendendo a teoria de formas quadráticas exteriormente ortogonais de Cartan, que corresponde ao caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo-definida. Com auxílio de sua teoria, Moore inicialmente reobteve um resultado devido a O'Neill [18], segundo o qual a segunda forma fundamental uma imersão isométrica $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$, com $c > \tilde{c}$ e $p \leq m - 2$, se decompõe ortogonalmente como

$$\alpha^f = \sqrt{c} \langle \cdot, \cdot \rangle \eta + \gamma, \tag{0.0.1}$$

em que η é um campo unitário normal a f. Além disso, se $p = m - 1$ e $\alpha^f(x)$ não se decompõe como em (0.0.1), Moore provou que f deve ter fibrado normal plano em x. Um ponto $x \in M$ no qual α^f se decompõe como em (0.0.1) é denominado um *ponto fracamente* *umbílico* para f. Se todos os pontos $x \in M$ forem fracamente umbílicos para f, diremos que f é *fracamente umbílica*.

Posteriormente, Dajczer e Tojeiro mostraram em ([7]) que uma imersão isométrica $f\colon M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$, com $c > \tilde{c}$ e $p \leq m-2$ é, localmente em um subconjunto aberto e denso de M^m, uma composição $f = i \circ h$, em que $i\colon M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+1}(\tilde{c})$ é uma inclusão umbílica e $h\colon U \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^{m+p}$ é uma imersão isométrica de um aberto $U \subset \mathbb{Q}^{m+1}(\tilde{c})$ contendo $i(M_c^m)$. O mesmo resultado é ainda válido se $p = m-1$ e f é fracamente umbílica. Exemplos explícitos de imersões isométricas $f\colon M_c^m \to \mathbb{Q}^{2m-1}(\tilde{c})$, $c > \tilde{c}$, sem pontos fracamente umbílicos, foram construídos em ([9]) usando a transformação de Ribaucour.

Neste trabalho estudamos as imersões isométricas $f\colon M_c^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Observe que $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ admite um mergulho isométrico canônico em $\mathbb{E}^{n+2}$, em que $\mathbb{E}^{n+2}$ denota o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ ou o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+2}$, conforme seja $\epsilon = 1$ ou -1, respectivamente. Em particular, para $\epsilon = 1$, tal estudo se insere no problema clássico de estudar as imersões isométricas de variedades Riemannianas com curvatura seccional constante no espaço Euclidiano.

Superfícies com curvatura Gaussiana constante de $\mathbb{Q}^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ foram estudadas em [1] e [2], com ênfase em suas propriedades globais. Os autores mostraram que não existem superfícies completas com curvatura Gaussiana constante c em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) quando $c < -1$ e $0 < c < 1$ (respectivamente, $c < -1$). Mostraram também que uma superfície completa com curvatura Gaussiana constante $c > 1$ (respectivamente, $c > 0$) de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) é necessariamente de rotação, e suas curvas geratrizes foram determinadas explicitamente.

As hipersuperfícies de $\mathbb{Q}^m(\epsilon) \times \mathbb{R}$ com curvatura seccional constante c e dimensão $m \geq 3$ foram classificadas por F.Manfio e R. Tojeiro em [14]. Se $m \geq 4$ e $\epsilon = 1$ (respectivamente, $\epsilon = -1$), mostrou-se que tais hipersuperfície somente existem, mesmo localmente, para $c \geq 1$ (respectivamente, $c \geq -1$). Além disso, para tais valores de c, uma tal hipersuperfície sempre se estende a uma hipersuperfície completa de rotação. No caso $m = 3$, existe uma única classe de hipersuperfícies não-rotacionais de $\mathbb{Q}^m(\epsilon) \times \mathbb{R}$ com curvatura seccional constante c, com $\epsilon c \in (0, 1)$. Qualquer hipersuperfície dessa classe é dada explicitamente em termos de uma família de superfícies paralelas de $\mathbb{Q}^3(\epsilon)$ com curvatura nula.

O principal resultado deste trabalho refere-se a imersões isométricas $f : M_c^m \to$

$\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$, $p \leq m-3$ e $c \leq 1$. Nessas hipóteses, mostramos inicialmente que uma tal imersão isométrica não existe, mesmo localmente, se $c < 0$. Além disso, mostramos que o caso $c = 0$ pode ocorrer apenas se $p = m-3$ e, ademais, f deve ser um cilindro vertical sobre uma subvariedade de dimensão $m-1$ e curvatura nula de $\mathbb{S}^{2m-3}$. No caso em que $c = 1$, provamos que $f(M_c^m)$ é necessariamente uma subvariedade de uma fatia $\mathbb{S}^{m+p} \times \{t\}$ de $\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$. O caso mais interessante é aquele em que $c \in (0,1)$, o qual ocorre também somente quando $p = m-3$. Obtivemos uma construção explícita de tais imersões em termos de uma família de imersões isométricas paralelas pertencentes a uma certa classe de subvariedades de dimensão $m-1$ de $\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$, a qual denominamos de *classe* $\mathcal{B}$. Mostramos que qualquer imersão isométrica $g\colon M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ na classe $\mathcal{B}$ pode ser construída, via teorema fundamental das subvariedades, a partir de uma hipersuperfície de $\mathbb{Q}^m(c)$ que admite uma outra imersão isométrica em $\mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$, em que $\mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ denota o espaço pseudo-Euclidiano de dimensão $2m-4$ cuja métrica possui índice $m-3$. Para $m = 4$, obtivemos uma caracterização, com interesse próprio, das hipersuperfícies que têm essa propriedade. Construímos exemplos explícitos de imersões isométricas na classe $\mathcal{B}$, a partir dos quais produzimos exemplos explícitos de imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)\times\mathbb{R}$, com $m \geq 3$ e $\epsilon c \in (0,1)$. Para $\epsilon = 1$, as composições $\tilde{f} = i \circ f$ de tais imersões com a inclusão canônica $i\colon \mathbb{S}^{2m-3} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2m-1}$ fornecem, em particular, novos exemplos de imersões isométricas $\tilde{f} : M_c^m \to \mathbb{R}^{2m-1}$ sem pontos fracamente umbílicos.

Como consequência de nosso principal resultado, concluímos que uma imersão isométrica $f : M_c^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$, $p \leq m-2$ e $c \leq 1$, de uma variedade Riemanniana *completa* M_c^m existe apenas se $c = 1$ e f é uma inclusão totalmente geodésica de $\mathbb{S}^m$ em uma fatia $\mathbb{S}^{m+p} \times \{t\}$ de $\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$. Se $p = m-3$, além de tais exemplos triviais existem apenas aqueles em que $c = 0$ e f é um cilindro vertical sobre uma imersão isométrica $g\colon N_0^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$, com N_0^{m-1} completa.

Apresentamos a seguir uma descrição do conteúdo dos vários capítulos desta tese. Começamos nosso texto introduzindo, no primeiro capítulo, algumas ferramentas úteis ao estudo das subvariedades de $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon)\times\mathbb{R}$, com curvatura seccional constante. São dadas as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, além de equações adicionais envolvendo as partes tangente e normal do campo $\partial/\partial t$ tangente ao segundo fator de $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Tais equações determinam, a menos de movimentos rígidos, uma subvariedade de $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon)\times\mathbb{R}$. Descrevemos também uma classe de subvariedades $f : M^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$, denominada classe $\mathcal{A}$, que possuem a propiedade de que a componente tangente do campo $\partial/\partial t$ é um autovetor de todos os operadores de forma de f. São dadas também a definição e as parametrizações das subvariedades (respectivamente, hipersuperfícies) de rotação em $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{Q}_s^n(c)$) que têm uma curva como geratriz, em que $\mathbb{Q}_s^n(c)$ denota uma forma espacial pseudo-Riemanniana de dimensão n, curvatura constante c e índice $s \in \{0, 1\}$.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo das imersões isométricas $g\colon M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ pertencentes à classe $\mathcal{B}$. Obtemos uma transformação de Ribaucour para tal classe, a qual permite obter novos exemplos de imersões isométricas nessa classe a partir de uma dada e de uma solução de um sistema linear de EDP's. Em particular, produzimos exemplos explícitos de elementos dessa classe a partir de uma solução trivial. Tais exemplos são usados no capítulo seguinte para construir exemplos explícitos de imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R}$ com $\epsilon c \in (0, 1)$ (Ver Seção 3.6).

No Capítulo 3 mostramos o resultado principal deste trabalho, descrito anteriormente, sobre imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$, $p \leq m - 3$. Obtemos ainda resultados parciais para imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com $m \geq 3$ e $p \leq m - 3$.

No quarto e último capítulo estudamos o problema de determinar as hipersuperfícies $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ para as quais M^3 admite também uma imersão isométrica no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^4$. O principal resultado desse capítulo dá uma caracterização das soluções do problema que possuem três curvaturas principais distintas. No final deste capítulo, exibimos exemplos explícitos de hipersuperfícies que são soluções do problema em questão. Tal problema foi estudado, em maior generalidade, em [3].

No final do trabalho acrescentamos um apêndice com algumas definições e resultados conhecidos, utilizados ao longo do texto. Tais resultados aparecem acompanhados de referências bibliográficas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos e enunciamos alguns resultados que são utilizados no decorrer desta tese. Os resultados não demonstrados são acompanhados de referências nas quais suas demonstrações podem ser encontradas.

1.1 Imersões isométricas em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$.

O conteúdo desta seção está baseado em [16] e tem por objetivo fornecer algumas ferramentas úteis ao estudo de imersões isométricas, em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, de variedades Riemannianas de dimensão $m \geq 3$ e curvatura seccional constante.

Sejam $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e $\frac{\partial}{\partial t}$ um campo de vetores unitários tangentes ao segundo fator de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$. Então, um campo de vetores tangente T e um campo de vetores η normais a f ficam definidos por

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \eta. \tag{1.1.1}$$

Derivando (1.1.1) e usando que $\frac{\partial}{\partial t}$ é um campo de vetores paralelo em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, obtemos das equações de Gauss e Codazzi que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = \bar{\nabla}_X f_*T + \bar{\nabla}_X \eta \\ &= f_*\nabla_X T + \alpha^f(X,T) - f_*A^f_\eta X + \nabla^\perp_X \eta \\ &= f_*(\nabla_X T - A^f_\eta X) + \alpha^f(X,T) + \nabla^\perp_X \eta, \end{aligned}$$

em que ∇ e $\bar{\nabla}$ denotam as conexões de Levi-Civita de M^m e $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, respectivamente, enquanto $\nabla^{\perp}$ e $\alpha^f(\cdot,\cdot)$ denotam a conexão normal e a segunda forma fundamental de f, respectivamente. Daí,

$$\nabla_X T = A^f_\eta X \tag{1.1.2}$$

e

$$\alpha^f(X,T) = -\nabla^{\perp}_X \eta \tag{1.1.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Aqui, e em toda esta tese, A^f_η denota o operador de forma de f na direção de η, dado por:

$$\langle A^f_\eta X, Y\rangle = \langle \alpha^f(X,Y), \eta\rangle$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Note que T é o gradiente da função altura

$$h = \langle \tilde{f}, i_*\frac{\partial}{\partial t}\rangle,$$

em que $i : \mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ denota a inclusão canônica, sendo $\mathbb{E}^{n+2}$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ quando $\epsilon = 1$ ou o espaço Lorentziano $\mathbb{L}^{n+2}$ quando $\epsilon = -1$, e $\tilde{f} := i \circ f$. De fato,

$$\langle \nabla h, X\rangle = X(h) = X\langle \tilde{f}, i_*\frac{\partial}{\partial t}\rangle = \langle \tilde{f}_* X, i_*\frac{\partial}{\partial t}\rangle = \langle X, T\rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci para f são, respectivamente (ver, por exemplo, [13])

$$R(X,Y)Z = \epsilon(X\wedge Y - \langle Y,T\rangle X\wedge T + \langle X,T\rangle Y\wedge T)Z + A^f_{\alpha(Y,Z)}X - A^f_{\alpha(X,Z)}Y, \tag{1.1.4}$$

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z) = \epsilon(\langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle)\eta \tag{1.1.5}$$

e

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A^f_\xi Y) - \alpha(A^f_\xi X, Y), \tag{1.1.6}$$

em que $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(N^f M)$ e $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$. A equação (1.1.5) é equivalente a

$$(\nabla_X A^f)(Y,\zeta) - (\nabla_Y A^f)(X,\zeta) = \epsilon\langle \eta, \zeta\rangle (X \wedge Y)T. \tag{1.1.7}$$

Embora isso não seja utilizado no que segue, vale a pena mencionar que as equações (1.1.2) - (1.1.6) determinam completamente uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ a menos de uma isometria de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ (ver Corolário 3 de [13]).

Vamos agora relacionar as segundas formas fundamentais e as conexões normais de f e $\tilde{f}$. Primeiro note que $\hat{\nu} = \pi \circ i$ é um campo de vetores normal unitário da inclusão $i : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, em que $\pi : \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção, e

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Z \hat{\nu} &= \pi_* i_* Z = i_* Z - \langle i_* Z, i_* \frac{\partial}{\partial t}\rangle i_* \frac{\partial}{\partial t} \\ &= i_*(Z - \langle Z, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t})\end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R})$, em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{E}^{n+2}$. Logo

$$A^i_{\hat{\nu}} Z = -Z + \langle Z, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.1.8}$$

Os espaços normais, $N^f M$ e $N^{\tilde{f}} M$, de f e $\tilde{f}$, respectivamente, são relacionados por

$$N^{\tilde{f}} M = i_* N^f M \oplus \operatorname{span}\{\nu\},$$

em que $\nu = \hat{\nu} \circ f = \pi \circ \tilde{f}$. Dado $\xi \in \Gamma(N^f M)$, obtemos de (1.1.8) que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X i_* \xi &= i_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_i(f_* X, \xi) \\ &= -\tilde{f}_* A^f_\xi X + i_* \nabla^\perp_X \xi + \langle X, T\rangle \langle \xi, \eta\rangle \nu\end{aligned}$$

donde segue que

$$A^{\tilde{f}}_{i_*\xi} = A^f_\xi$$

e

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_X i_*\xi = i_*\nabla^{\perp}_X\xi + \langle X, T\rangle\langle \xi, \eta\rangle\nu, \tag{1.1.9}$$

em que $\tilde{\nabla}^{\perp}$ é a conexão normal de $\tilde{f}$. Por outro lado,

$$\tilde{\nabla}_X\nu = \tilde{\nabla}_X\hat{\nu}\circ f = \tilde{\nabla}_{f_*X}\hat{\nu} = \tilde{f}_*(X - \langle X, T\rangle T) - \langle X, T\rangle i_*\eta,$$

logo

$$A^{\tilde{f}}_{\nu}X = -X + \langle X, T\rangle T$$

ou, equivalentemente,

$$A^{\tilde{f}}_{\nu}T = -\|\eta\|^2 T \ \ \textbf{e} \ \ A^{\tilde{f}}_{\nu}X = -X, \ \text{ se } \ X \in \{T\}^{\perp}, \tag{1.1.10}$$

e

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_X\nu = -\langle X, T\rangle i_*\eta. \tag{1.1.11}$$

1.1.1 Classe $\mathcal{A}$

Denotaremos por $\mathcal{A}$ a classe das imersões isométricas $f: M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$ com a propriedade de que o campo T, definido em (1.1.1), é um autovetor de todos os operadores de forma de f. Exemplos triviais de tais imersões são os *cilindros* sobre imersões isométricas $g\colon N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$, para os quais M^m é uma variedade produto $N^{m-1}\times\mathbb{R}$ e $f = g\times id$, em que $id\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a aplicação identidade. Em tais exemplos, o campo de vetores normais η em (1.1.1) é identicamente nulo. Exemplos mais interessantes são construídos como segue.

Seja $g: N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$ uma imersão isométrica. Suponha que exista um conjunto ortonormal $\{\xi_1, \ \xi_2, \ ..., \ \xi_k\}$ de campos de vetores normais paralelos ao longo de g. Esta hipótese é satisfeita localmente, por exemplo, se g possui fibrado normal plano. Assim, o subfibrado vetorial E de posto k do fibrado normal N^gN de g, gerado por $\xi_1, \ \xi_2, \ ..., \ \xi_k$, é paralelo e plano. Sejam $j: \mathbb{Q}^n(\epsilon)\to\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$ e $i: \mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}\to\mathbb{E}^{n+2}$ as inclusões canônicas, e $\tilde{j} = i\circ j$. Defina $\tilde{\xi}_i = \tilde{j}_*\xi_i$, $1\le i\le k$, $\tilde{\xi}_0 = \tilde{g} := \tilde{j}\circ g$ e $\tilde{\xi}_{k+1} = i_*\frac{\partial}{\partial t}$.

Então, o subfibrado vetorial $\tilde{E}$ de $N^{\tilde{g}}N$ cuja fibra $\tilde{E}(x)$, em $x \in N^{m-1}$, é gerada por $\tilde{\xi}_0,\ \tilde{\xi}_1,\ ...,\ \tilde{\xi}_{k+1}$, é também paralelo e plano. Defina uma isometria de fibrados vetoriais $\phi :\ N^{m-1} \times \mathbb{E}^{k+2} \to \tilde{E}$ por

$$\phi_x(y) := \phi(x,y) = \sum_{i=0}^{k+1} y_i \tilde{\xi}_i, \tag{1.1.12}$$

para $y = (y_0,\ y_1,\ ...,\ y_{k+1}) \in \mathbb{E}^{k+2}$. Seja

$$f :\ M^m := N^{m-1} \times I \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$$

dada por

$$\tilde{f}(x,s) := (i \circ f)(x,s) = \phi_x(\gamma(s)) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s)\tilde{\xi}_i(x) \tag{1.1.13}$$

em que $\gamma :\ I \to \mathbb{Q}^k(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, ...,\ \gamma_k,\ \gamma_{k+1})$, é uma curva regular suave tal que $\epsilon\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + ... + \gamma_k^2 = \epsilon$ e γ_{k+1} possui derivada não nula em todo ponto.

Teorema 1.1. *[16] A aplicação f define, em pontos regulares, uma imersão na classe $\mathcal{A}$. Reciprocamente, qualquer imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$, na classe $\mathcal{A}$ é, localmente, dada desta forma.*

Uma condição necessária e suficiente para um ponto $(x,s) \in M^m = N^{m-1} \times \mathbb{R}$ ser regular para f é dada na parte (ii) da Proposição 1.4 abaixo.

A aplicação $\tilde{f}$ é um *tubo parcial sobre $\tilde{g}$ com fibra γ*, no sentido dado em [4]. Geometricamente, $\tilde{f}(M)$ é obtida transportando paralelamente a curva $\phi_x(\gamma(I))$, contida no espaço normal de $\tilde{g}$ em $x \in N^{n-1}$, com respeito à conexão normal de $\tilde{g}$.

Sejam $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e $\tilde{f} = i \circ f$, em que $i : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ é a inclusão canônica.

Corolário 1.2. *[16] As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) O campo T em (1.1.1) é não nulo e $\tilde{f}$ possui fibrado normal plano;
(ii) f possui fibrado normal plano e pertence à classe $\mathcal{A}$;
(iii) $\tilde{f}$ é localmente dada como em (1.1.13) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$ com fibrado normal plano e uma curva regular suave $\gamma :\ I \to \mathbb{Q}^k(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \cdots,\ \gamma_k,\ \gamma_{k+1})$ com γ'_{k+1} não nulo em todo ponto.

A proposição seguinte descreve a diferencial, o espaço normal e a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\tilde{f}$ definida em (1.1.13). Dados $x \in N^{m-1}$, $X \in T_xN$ e $s \in I$, denote por $X^{\mathcal{H}}$ o único vetor em $T_{(x,s)}M$ tal que $\pi_{1*}X^{\mathcal{H}} = X$ e $\pi_{2*}X^{\mathcal{H}} = 0$, em que $\pi_1 : M^m \to N^{m-1}$ e $\pi_2 : M^m \to I$ são as projeções canônicas.

Proposição 1.3. *São válidas as seguintes afirmações:*
(i) A diferencial de $\tilde{f}$ é dada por

$$\tilde{f}_*(x,s)X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_*(x)(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x))X \tag{1.1.14}$$

para todo $X \in T_xN$, em que I é o endomorfismo identidade de T_xN, e

$$\tilde{f}_*(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = \phi_x(\gamma'(s)). \tag{1.1.15}$$

(ii) A aplicação $\tilde{f}$ (e, portanto, f) é uma imersão em (x,s) se, e somente se,

$$P_s(x) := \gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(s)A^g_{\xi_i}(x) = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))} = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma(s))}, \tag{1.1.16}$$

em que $\bar{\gamma}(s) = (\gamma_0(s), ..., \gamma_k(s), 0)$, é um endomorfismo inversível de T_xN.
(iii) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x,s), então

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = \tilde{j}_*E(x)^{\perp} \oplus \phi_x(\gamma'(s)^{\perp}) \subset N^{\tilde{g}}_xN, \tag{1.1.17}$$

em que $E(x)^{\perp}$ e $\gamma'(s)^{\perp}$ denotam os complementos ortogonais de $E(x)$ em N^g_xN e de $\gamma'(s)$ em $\mathbb{E}^{k+2}$, respectivamente, e

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = i_*N^f_{(x,s)}M \oplus \operatorname{span}\{(\pi \circ \tilde{f})(x,s)\} = i_*N^f_{(x,s)}M \oplus \phi_x(\overline{\gamma}(s)), \tag{1.1.18}$$

em que $\pi : \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção canônica.
(iv) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x,s), então

$$A^{\tilde{f}}_{\xi}(x,s)X^{\mathcal{H}} = (P_s(x)^{-1}A^{\tilde{g}}_{\xi}(x)X)^{\mathcal{H}}. \tag{1.1.19}$$

para quaisquer $\xi \in N^{\tilde f}_{(x,s)}M$ *e* $X \in T_xN$,

$$A^{\tilde f}_\xi(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = 0,\ \ se\ \xi \in \tilde j_* E(x)^\perp \tag{1.1.20}$$

e

$$A^{\tilde f}_{\phi_x(\zeta)}(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\langle\gamma''(s),\zeta\rangle}{\langle\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle}\frac{\partial}{\partial s},\ \ se\ \zeta \in \mathbb{E}^{k+2},\ \ \langle\zeta,\gamma'(s)\rangle = 0. \tag{1.1.21}$$

Além disso,

$$A^f_\zeta(x,s) = A^{\tilde f}_{i_*\zeta}(x,s) \tag{1.1.22}$$

para todo $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$.

Demonstração: Dada uma curva suave $\beta : J \to N^{m-1}$, com $0 \in J$, $\beta(0) = x$ e $\beta'(0) = X$, para cada $s \in I$ seja $\beta_s : J \to M^m$ dada por $\beta_s(t) = (\beta(t), s)$. Então $\beta_s(0) = (x,s)$ e $\beta_s'(0) = X^{\mathcal H}$. Assim

$$\begin{aligned}
\tilde f_*(x,s)X^{\mathcal H} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde f(\beta_s(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sum_{i=0}^{k+1}\gamma_i(s)\tilde\xi_i(\beta(t))\\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma_0(s)\tilde g(\beta(t)) + \frac{d}{dt}|_{t=0}\sum_{i=1}^{k+1}\gamma_i(s)\tilde\xi_i(\beta(t))\\
&= \gamma_0(s)\tilde g_*(x)X - \sum_{i=1}^{k}\gamma_i(s)\tilde g_*(x)A^{\tilde g}_{\tilde\xi}(x)X\\
&= \tilde g_*(x)(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^{k}\gamma_i(s)A^{\tilde g}_{\tilde\xi}(x))X
\end{aligned}$$

e (1.1.14) segue do fato de que $A^{\tilde g}_{\tilde\xi_i} = A^g_{\xi_i}$ para todo $1 \le i \le k$. Além disso,

$$\tilde f_*(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\sum_{i=0}^{k+1}\gamma_i(s)\tilde\xi_i = \phi_x(\gamma'(s)).$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente do item (i).

Para provar (1.1.19), dados $\xi \in N^{\tilde f}_{(x,s)}M$ e $X \in T_xN$, sejam $\beta : J \to N^{m-1}$ e $\beta_s : J \to M^m$ como no início da demonstração. Então, usando (1.1.14) obtemos

$$\begin{aligned}
-\tilde f_*(x,s)A^{\tilde f}_\xi(x,s)X^{\mathcal H} &= (\tilde\nabla_{X^{\mathcal H}}\xi)^T = (\frac{d}{dt}|_{t=0}\xi(\beta_s(t)))^T = -\tilde g_*(x)A^{\tilde g}_\xi(x)X\\
&= -\tilde g_* P_s(x)P_s(x)^{-1}A^{\tilde g}_\xi(x)X = -\tilde f_*(x,s)(P_s(x)^{-1}A^{\tilde g}_\xi(x)X)^{\mathcal H},
\end{aligned}$$

isto é, vale (1.1.19). Para provar (1.1.21), dado $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$ com $\langle \zeta, \gamma'(s) \rangle = 0$, estenda ζ a um campo de vetores normal paralelo ao longo de γ. Então

$$\zeta'(s) = \frac{\langle \zeta'(s), \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \gamma'(s) = -\frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \gamma'(s)$$

e

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_*(x,s) A^{\tilde{f}}_{\phi_x(\zeta)}(x,s) \frac{\partial}{\partial s} &= \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \phi_x(\zeta) \right)^T = (\phi_x(\zeta'(s)))^T \\ &= -\frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} (\phi_x(\gamma'(s)))^T \\ &= -\tilde{f}_*(x,s) \frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s}, \end{aligned}$$

em que usamos (1.1.15) na última igualdade. A equação (1.1.21) segue. ∎

No caso em que a imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ na classe $\mathcal{A}$ é dada em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$ com fibrado normal plano, com $k = n - m + 1$, podemos reescrever as afirmações da Proposição 1.4 como segue.

Corolário 1.4. *Nas condições acima, são válidas as seguintes afirmações:*
(i) A diferencial de $\tilde{f}$ é dada por

$$\tilde{f}_*(x,s) X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_*(x)(\gamma_0(s) I - \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i(s) A^g_{\xi_i}(x)) X \tag{1.1.23}$$

para todo $X \in T_x N$, em que I é o endomorfismo identidade de $T_x N$, e

$$\tilde{f}_*(x,s) \frac{\partial}{\partial s} = \phi_x(\gamma'(s)). \tag{1.1.24}$$

(ii) A aplicação $\tilde{f}$ (e, portanto, f) é uma imersão em (x,s) se, e somente se,

$$P_s(x) := \gamma_0(s) I - \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i(s) A^g_{\xi_i}(x) = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\overline{\gamma}(s))} = -A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\gamma(s))}, \tag{1.1.25}$$

em que $\overline{\gamma}(s) = (\gamma_0(s), ..., \gamma_{n-m+1}(s), 0)$, é um endomorfismo inversível de $T_x N$.
(iii) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x,s), então

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)} M = \phi_x(\gamma'(s)^{\perp}) \subset N^{\tilde{g}}_x N. \tag{1.1.26}$$

(iv) Se $\tilde{f}$ é uma imersão em (x,s), então

$$\alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x)X, Y) - \frac{\langle \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x)X, Y), \phi_x(\gamma'(s))\rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle}\phi_x(\gamma'(s)). \tag{1.1.27}$$

e $\alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s}) = 0$, *para quaisquer* $X, Y \in T_xN$, *e*

$$\alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) = \phi_x(\gamma''(s)). \tag{1.1.28}$$

Demonstração: Os itens (i), (ii) e (iii) seguem diretamente da Proposição 1.3. Para provarmos o item (iv), observe que, para qualquer $\xi \in N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}), \xi\rangle &= \langle A^{\tilde{f}}_{\xi}X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\rangle_{\tilde{f}} = \langle \tilde{f}_* A^{\tilde{f}}_{\xi}X^{\mathcal{H}}, \tilde{f}_* Y^{\mathcal{H}}\rangle \overset{(1.1.19),(1.1.23)}{=} \\
&= \langle \tilde{g}_* A^{\tilde{g}}_{\xi}X, \tilde{g}_* P_s(x)Y\rangle = \langle A^{\tilde{g}}_{\xi}X, P_s(x)Y\rangle_{\tilde{g}} \\
&= \langle \alpha^{\tilde{g}}(P_s(x)X, Y), \xi\rangle,
\end{aligned}$$

e (1.1.27) segue de (1.1.26). Além disso,

$$\langle \alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}), \phi_x(\zeta)\rangle = \langle A^{\tilde{f}}_{\phi_x(\zeta)}\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\rangle \overset{(1.1.21)}{=} \langle \gamma''(s), \zeta\rangle$$

se $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$, $\langle \zeta, \gamma'(s)\rangle = 0$, e (1.1.28) segue. ∎

Observação 1.5. Decorre imediatamente do Corolário 1.4 que, se $\{X_1, \ ..., \ X_{m-1}\}$ é uma base ortonormal de T_xN^{m-1} de direções principais de $\tilde{g}$, então $\left\{\frac{\partial}{\partial s}, X_1^{\mathcal{H}}, \ ..., X_{m-1}^{\mathcal{H}}\right\}$ é uma base ortogonal de $T^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$ de direções principais de $\tilde{f}$.

1.1.2 Subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$

Nesta seção definiremos, com base em [16], as subvariedades de rotação de dimensão m em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ que têm curvas como geratrizes. Tal definição estende aquela dada em [11] para o caso de hipersuperfícies.

Sejam $(x_0, ..., x_{n+1})$ coordenadas canônicas em $\mathbb{E}^{n+2}$ com respeito às quais a métrica de $\mathbb{E}^{n+2}$ é escrita como

$$ds^2 = \epsilon dx_0^2 + dx_1^2 + ... + dx_{n+1}^2$$

Considere $\mathbb{E}^{n+1}$ como

$$\mathbb{E}^{n+1} = \{(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+2} : x_{n+1} = 0\}$$

e

$$\mathbb{Q}^n(\epsilon) = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{E}^{n+1} : \epsilon x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = \epsilon\} \ (x_0 > 0 \,\text{se}\, \epsilon = -1).$$

Seja P^{n-m+3} um subespaço de $\mathbb{E}^{n+2}$ de dimensão $n-m+3$ que contém os vetores e_0 e e_{n+1}, em que $\{e_0, ..., e_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{E}^{n+2}$. Então

$$(\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}) \cap P^{n-m+3} = \mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon) \times \mathbb{R}.$$

Denote por $\mathcal{I}$ o grupo de isometrias em $\mathbb{E}^{n+2}$ que fixa os pontos de um subespaço $P^{n-m+2} \subset P^{n-m+3}$ que contém a direção e_{n+1}. Considere uma curva regular γ em $\mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset P^{n-m+3}$ situada em um dos dois hiperplanos de P^{n-m+3} determinados por P^{n-m+2}.

Definição 1.6. Uma subvariedade de rotação em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ com curva geratriz γ e eixo P^{n-m+2} é a órbita de γ sob a ação de $\mathcal{I}$.

Segue imediatamente da definição acima que tal variedade de rotação possui dimensão m.

Suponhamos que P^{n-m+3} seja gerado por $e_0, e_m, ..., e_{n+1}$. No caso $\epsilon = 1$ suponha, também, que P^{n-m+2} seja gerado por $e_m, ..., e_{n+1}$. Escrevendo a curva γ como

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)e_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma(s)e_{i-m+1} + h(s)e_{n+1}, \tag{1.1.29}$$

com $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-m+1} \gamma_i^2 = 1$, a subvariedade de rotação, de dimensão m, em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2}, pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s,t) = (\gamma_0(s)\varphi_1(t), ..., \gamma_0(s)\varphi_m(t), \gamma_1(s), ..., \gamma_{n-m+1}(s), h(s)), \tag{1.1.30}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Para $\epsilon = -1$, temos três possibilidades distintas a considerar, conforme P^{n-m+2} seja Lorentziano, Riemanniano ou degenerado, e a subvariedade de rotação será denominada, respectivamente, do tipo *esférico*, *hiperbólico* ou *parabólico*. No primeiro caso, podemos supor que P^{n-m+2} seja gerado por $e_0, e_{m+1}, \cdots, e_{n+1}$, e que γ seja dada por (1.1.29), com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$. Então, a subvariedade de rotação de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2} pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s,t) = (\gamma_0(s), \gamma_1(s)\varphi_1(t), \cdots, \gamma_1(s)\varphi_m(t), \gamma_2(s), \cdots, \gamma_{n-m+1}(s), h(s)), \tag{1.1.31}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

No segundo caso, podemos supor que P^{n-m+2} seja gerado por $e_m, \cdots, e_{n+1}$. Então, com a curva γ também dada por (1.1.29) com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$, a parametrização é também dada por (1.1.31), sendo que neste caso $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{H}^{m-1} \subset \mathbb{L}^m$.

Finalmente, quando P^{n-m+2} é degenerado, escolha uma base pseudo-ortonormal

$$\hat{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_0 + e_n), \ \hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_n), \ \hat{e}_j = e_j, \tag{1.1.32}$$

para $j \in \{1, \cdots, n-1, n+1\}$, e suponha que P^{n-m+2} seja gerado por $\hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_{n+1}$. Note que $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_0 \rangle = 0 = \langle \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle$ e $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_n \rangle = 1$. Então, podemos parametrizar γ por

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)\hat{e}_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1}(s)\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1}, \tag{1.1.33}$$

com $2\gamma_0(s)\gamma_{n-m+1}(s) + \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i^2(s) = -1$, e a parametrização da correspondente subvariedade de rotação nas coordenadas pseudo-ortonormais escolhidas é

$$\tilde{f}(s,t) = \left(\gamma_0, \gamma_0 t_1, \cdots, \gamma_0 t_{m-1}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-m}, \gamma_{n-m+1} - \frac{\gamma_0}{2} \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2, h \right), \tag{1.1.34}$$

em que $t = (t_1, ..., t_{m-1})$ parametriza $\mathbb{R}^{m-1}$, $\gamma_i = \gamma_i(s)$, $0 \le i \le n-m+1$, e $h = h(s)$.

Temos o seguinte teorema de caracterização das subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$:

Teorema 1.7. *[16] Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, uma imersão isométrica tal que o campo de vetores T, definido em* (1.1.1)*, não se anule em nenhum ponto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f é uma subvariedade de rotação cuja geratriz é uma curva em uma subvariedade

totalmente geodésica $\mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$;

(ii) f *é dada como em (1.1.13) em termos de uma imersão isométrica umbílica* $g: N^{m-1}\to\mathbb{Q}^n(\epsilon)$;

(iii) existe um campo de vetores normais ζ *ao longo de* f *tal que*

$$A^f_\xi X = <\zeta,\xi> X \tag{1.1.35}$$

para quaisquer $X\in\{T\}^\perp$ *e* $\xi\in\Gamma(N^fM)$.

1.2 Hipersuperfícies de rotação de $\mathbb{Q}^4_s(c)$.

Denotaremos por $\mathbb{Q}^n_s(c)$ uma forma espacial pseudo-Riemanniana de dimensão n, curvatura constante c e índice $s\in\{0,1\}$, isto é, $\mathbb{Q}^n_s(c)$ é uma forma espacial Riemanniana ou Lorentziana com curvatura seccional constante c, conforme seja $s=0$ ou $s=1$, respectivamente. É um fato conhecido que $\mathbb{Q}^n_s(c)$ admite uma imersão isométrica umbílica em $\mathbb{R}^{n+1}_{s+\epsilon_0}$, em que $\mathbb{R}^{n+1}_{s+\epsilon_0}$ denota o espaço pseudo-Riemanniano de dimensão $n+1$ cuja métrica possui curvatura nula e índice $s+\epsilon_0$, em que $\epsilon_0=0$ ou 1, conforme seja $c>0$ ou $c<0$, respectivamente. Para $c=0$, a $\mathbb{Q}^n_s(c)$ denota o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^n$, quando $s=0$ ou $s=1$, respectivamente.

Nesta seção definiremos as hipersuperfícies de rotação $f: M^3\to\mathbb{Q}^4_s(c)$ sobre uma curva, estendendo a definição de hipersuperfícies de rotação de formas espaciais Riemannianas dada em [12]. Além disso, exibiremos parametrizações de tais hipersuperfícies. Tais parametrizações serão úteis no Capítulo 4.

Seja P^3 um subespaço de $\mathbb{R}^5_{s+\epsilon_0}\supset\mathbb{Q}^4_s(c)$ de dimensão 3 tal que $P^3\cap\mathbb{Q}^4_s(c)\neq\emptyset$, em que $\epsilon_0=0$ ou 1, conforme seja $c>0$ ou $c<0$, respectivamente. Denote por $\mathcal{I}$ o subgrupo do grupo de isometrias de $\mathbb{R}^5_{s+\epsilon_0}$ que fixa os pontos do subespaço $P^2\subset P^3$. Considere uma curva regular γ em $\mathbb{Q}^2_s(c)=P^3\cap\mathbb{Q}^4_s(c)$, contida em um dos dois semi-espaços de P^3 determinados por P^2.

Definição 1.8. Uma hipersuperfície de rotação $f: M^3\to\mathbb{Q}^4_s(c)$ com curva geratriz γ e eixo P^2 é a órbita de γ sob a ação de $\mathcal{I}$.

Se P^2 é não-degenerado, então f pode ser parametrizada por

$$f(s,u)=(\gamma_1(s)\varphi_1(u),\gamma_1(s)\varphi_2(u),\gamma_1(s)\varphi_3(u),\gamma_4(s),\gamma_5(s)), \tag{1.2.1}$$

com respeito a uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_5\}$ de $\mathbb{R}^5_{s+\epsilon_0}$ satisfazendo as condições (i) ou (ii) abaixo, conforme a métrica em P^2 possua índice $s+\epsilon_0$ ou $s+\epsilon_0-1$, respectivamente:

(i) $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ para $1 \leq i \leq 3$, $\langle e_{3+j}, e_{3+j}\rangle = \epsilon_j$ para $1 \leq j \leq 2$, com (ϵ_1, ϵ_2) igual a $(1,1)$, $(1,-1)$ ou $(-1,-1)$, conforme seja $s+\epsilon_0$ for 0, 1 ou 2, respectivamente.

(ii) $\langle e_1, e_1\rangle = -1$, $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ para $2 \leq i \leq 4$ e $\langle e_5, e_5\rangle = \bar{\epsilon}$, em que $\bar{\epsilon} = 1$ ou $\bar{\epsilon} = -1$, conforme $s+\epsilon_0$ seja igual a 1 ou 2, respectivamente.

Em ambos os casos, temos que $P^2 = span\{e_4, e_5\}$, $P^3 = span\{e_1, e_4, e_5\}$, $u = (u_1, u_2)$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_4(s), \gamma_5(s))$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathbb{Q}^2_s(c) \subset P^3$ e $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u))$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset (P^2)^\perp$ no caso (i) e do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 \subset (P^2)^\perp$ no caso (ii). Diz-se que a hipersuperfície é, respectivamente, do tipo *esférico* ou *hiperbólico.*

Se P^2 é degenerado, então f é uma hipersuperfície de rotação do tipo *parabólico*, que pode ser parametrizada por

$$f(s,u) = (\gamma_1(s), \gamma_1(s)u_1, \gamma_1(s)u_2, \gamma_4(s) - \frac{1}{2}\gamma_1(s)(u_1^2+u_2^2), \gamma_5(s)), \tag{1.2.2}$$

com respeito a uma base pseudo-ortonormal $\{e_1, \ldots, e_5\}$ de $\mathbb{R}^5_{s+\epsilon_0}$ tal que $\langle e_1, e_1\rangle = 0 = \langle e_4, e_4\rangle$, $\langle e_1, e_4\rangle = 1$, $\langle e_2, e_2\rangle = 1 = \langle e_3, e_3\rangle$ e $\langle e_5, e_5\rangle = \bar{\bar{\epsilon}} := -2(s+\epsilon_0)+3$, em que $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_4(s), \gamma_5(s))$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathbb{Q}^2_s(c) \subset P^3 = span\{e_1, e_4, e_5\}$.

Na próxima proposição calculamos as curvaturas principais de uma hipersuperfície de rotação $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4_s(c)$, $c \neq 0$.

Proposição 1.9. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4_s(c)$ uma hipersuperfície de rotação. Então os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq 2$ e $\frac{\partial}{\partial s}$ são direções principais. Além disso,*
(i) Se f é do tipo esférico, então as curvaturas principais $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ e λ_3 correspondentes as direções $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq 2$ e $\frac{\partial}{\partial s}$, respectivamente, são:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-c\gamma_1^2-\gamma_1'^2}}{\gamma_1}, & se\ \epsilon_1=\epsilon_2=1 \\ \dfrac{\sqrt{-1+c\gamma_1^2+\gamma_1'^2}}{\gamma_1}, & se\ \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \end{cases} \quad e\ \lambda_3 = \begin{cases} -\dfrac{\gamma_1''+c\gamma_1}{\sqrt{1-c\gamma_1^2-\gamma_1'^2}}, & se\ \epsilon_1=\epsilon_2=1 \\ \dfrac{\gamma_1''+c\gamma_1}{\sqrt{-1+c\gamma_1^2+\gamma_1'^2}}, & se\ \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \end{cases}$$

se $c > 0$ *e*

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-1 + c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}{\gamma_1}, & se\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = -1 \\ -\dfrac{\sqrt{1 - c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2}}{\gamma_1}, & se\ \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \end{cases} \quad e\ \lambda_3 = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{-1 + c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}, & se\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = -1 \\ \dfrac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{1 - c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2}}, & se\ \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \end{cases}$$

se $c < 0$.

(ii) Se f *é do tipo hiperbólico, então as curvaturas principais* $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ *e* λ_3 *correspondentes as direções* $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq 2$ *e* $\frac{\partial}{\partial s}$, *respectivamente, são:*

$$\lambda = -\frac{\sqrt{1 + c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}{\gamma_1} \ \ e\ \gamma_3 = -\frac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{1 + c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}$$

se $c > 0$ *e*

$$\lambda = -\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}(-1 - c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}{\gamma_1} \ \ e\ \gamma_3 = \bar{\epsilon}\frac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{\bar{\epsilon}(-1 - c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}$$

se $c < 0$.

(iii) Se f *é do tipo parabólico, então as curvaturas principais* $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ *e* λ_3 *correspondentes as direções* $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq 2$ *e* $\frac{\partial}{\partial s}$, *respectivamente, são:*

$$\lambda = -\frac{\sqrt{c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}{\gamma_1} \ \ e\ \gamma_3 = -\frac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}$$

se $c > 0$ *e*

$$\lambda = -\bar{\bar{\epsilon}}\frac{\sqrt{\bar{\bar{\epsilon}}(-c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}{\gamma_1} \ \ e\ \lambda_3 = \frac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{\bar{\bar{\epsilon}}(-c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}$$

se $c < 0$.

Demonstração: Suponha que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo esférico. Segue de (1.2.1) que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\gamma_1'\varphi_1, \gamma_1'\varphi_2, \gamma_1'\varphi_3, \gamma_4', \gamma_5'), \tag{1.2.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (\gamma_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}, \gamma_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_i}, \gamma_1\frac{\partial \varphi_3}{\partial u_i}, 0, 0) \tag{1.2.4}$$

Note que

$$\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle=1,\ \langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial u_i}\rangle=0 \text{ e } \langle\frac{\partial f}{\partial u_i},\frac{\partial f}{\partial u_j}\rangle=\alpha_{ij}\gamma_1^2 \tag{1.2.5}$$

com $\alpha_{ij}=\langle\frac{\partial\varphi}{\partial u_i},\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\rangle$. Um campo normal unitário é dado por

$$N=\sqrt{|c|}(-\varphi(\gamma_5'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_5),\epsilon_1(\gamma_5'\gamma_1-\gamma_1'\gamma_5),\epsilon_2(\gamma_1'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_1))$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=(\gamma_1''\varphi,\gamma_4'',\gamma_5''),\ \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial u_j}=\left(\gamma_1'\frac{\partial\varphi}{\partial u_j},0,0\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_i\partial u_j}=\left(\gamma_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_j},0,0\right).$$

Como φ é uma parametrização ortogonal, obtemos

$$\langle\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial u_j},N\rangle=0=\langle\frac{\partial^2 f}{\partial u_i\partial u_j},N\rangle.$$

Logo, as curvas coordenadas de f são linhas de curvatura. Além disso, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1\leq i\leq 2$, e s são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\lambda &= \left\|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right\|^{-2}\langle\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2},N\rangle=\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right\|^{-2}\gamma_1^{-2}\sqrt{|c|}\gamma_1(\gamma_5'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_5)\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right\|^{2}\\ &= \frac{\sqrt{|c|}}{\gamma_1}(\gamma_5'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_5),\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \langle\frac{\partial^2 f}{\partial s^2},N\rangle=\sqrt{|c|}[-\langle\varphi,\varphi\rangle\gamma_1''(\gamma_5'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_5)+\gamma_4''(\gamma_5'\gamma_1-\gamma_1'\gamma_5)+\gamma_5''(\gamma_1'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_1)]\\ &= \sqrt{|c|}[-\gamma_1''(\gamma_4'\gamma_5-\gamma_5'\gamma_4)+\gamma_4''(\gamma_5'\gamma_1-\gamma_1'\gamma_5)+\gamma_5''(\gamma_1'\gamma_4-\gamma_4'\gamma_1)].\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Por outro lado, podemos parametrizar a curva $\gamma : I \to \mathbb{Q}_s^2(c) \subset P^3$ por

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \begin{cases} \sqrt{1/c - \gamma_1^2}\cos\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,1), \\ \sqrt{\gamma_1^2 - 1/c}\,\mathrm{senh}\,\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,-1), \\ \sqrt{\gamma_1^2 - 1/c}\cos\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1,-1), \end{cases} \quad \text{e} \\ \gamma_5 &= \begin{cases} \sqrt{1/c - \gamma_1^2}\,\mathrm{sen}\,\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,1), \\ \sqrt{\gamma_1^2 - 1/c}\cosh\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,-1), \\ \sqrt{\gamma_1^2 - 1/c}\,\mathrm{sen}\,\phi, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1,-1), \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Impondo que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, que

$$1 = \gamma_1'^2 + \epsilon_1 \gamma_4'^2 + \epsilon_2 \gamma_5'^2$$

obtemos que

$$\phi'(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1/c - \gamma_1^2 - \gamma_1'^2/c}}{1/c - \gamma_1^2}, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,1) \\ \dfrac{\sqrt{-1/c + \gamma_1^2 + \gamma_1'^2/c}}{\gamma_1^2 - 1/c}, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,-1) \\ \dfrac{\sqrt{1/c - \gamma_1^2 - \gamma_1'^2/c}}{\gamma_1^2 - 1/c}, & \text{se } (\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1,-1) \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Observe que, se $c > 0$, então $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,1)$ ou $(1,-1)$ e, se $c < 0$, então $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,-1)$ ou $(-1,-1)$. Agora, o item (i) do teorema segue de (1.2.6) e (1.2.7), utilizando (1.2.8) e (1.2.9).

Suponha que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo hiperbólico. Segue de (1.2.1) que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\gamma_1'\varphi_1, \gamma_1'\varphi_2, \gamma_1'\varphi_3, \gamma_4', \gamma_5'), \tag{1.2.10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}, \gamma_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_i}, \gamma_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_i}, 0, 0) \tag{1.2.11}$$

Note que

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = 1, \; \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial u_i} \rangle = 0 \text{ e } \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \rangle = \alpha_{ij}\gamma_1^2 \tag{1.2.12}$$

com $\alpha_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \rangle$. Um campo normal unitário é dado por

$$N = \sqrt{|c|}(\varphi(\gamma_5'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_5), \gamma_5'\gamma_1 - \gamma_1'\gamma_5, \bar{\epsilon}(\gamma_1'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_1))$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = (\gamma_1''\varphi, \gamma_4'', \gamma_5''), \ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j} = \left(\gamma_1' \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, 0, 0\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, 0, 0\right).$$

Como φ é uma parametrização ortogonal, obtemos

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j}, N \rangle = 0 = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N \rangle.$$

Logo, as curvas coordenadas de f são linhas de curvatura. Além disso, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1 \leq i \leq 2$, e s são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\|^{-2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, N \rangle = - \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^{-2} \gamma_1^{-2} \sqrt{|c|} \gamma_1 (\gamma_5'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_5) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^2 \\ &= \frac{\sqrt{|c|}}{\gamma_1} (\gamma_4'\gamma_5 - \gamma_5'\gamma_4), \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \rangle = \sqrt{|c|}[\langle \varphi, \varphi \rangle \gamma_1''(\gamma_5'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_5) + \gamma_4''(\gamma_5'\gamma_1 - \gamma_1'\gamma_5) + \gamma_5''(\gamma_1'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_1)] \\ &= \sqrt{|c|}[\gamma_1''(\gamma_4'\gamma_5 - \gamma_5'\gamma_4) + \gamma_4''(\gamma_5'\gamma_1 - \gamma_1'\gamma_5) + \gamma_5''(\gamma_1'\gamma_4 - \gamma_4'\gamma_1)]. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Por outro lado, podemos parametrizar a curva $\gamma : I \to \mathbb{H}^2(c) \subset \mathbb{L}^3$ por

$$\gamma_4 = (\gamma_1^2 + 1/c)^{1/2} C_{\bar{\epsilon}}\phi \text{ e } \gamma_5 = (\gamma_1^2 + 1/c)^{1/2} S_{\bar{\epsilon}}\phi, \tag{1.2.15}$$

em que

$$S_{\bar{\epsilon}}\phi = \begin{cases} \operatorname{sen}\phi, \ \text{se } \bar{\epsilon} = 1 \\ \operatorname{senh}\phi, \ \text{se } \bar{\epsilon} = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad C_{\bar{\epsilon}}\phi = \begin{cases} \cos\phi, \ \text{se } \bar{\epsilon} = 1 \\ \cosh\phi, \ \text{se } \bar{\epsilon} = -1 \end{cases}$$

Impondo que γ seja parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$\begin{aligned}1 &= -\gamma_1'^2+\gamma_4'^2+\bar{\epsilon}\gamma_5'^2 = -\gamma_1'^2+(\gamma_1\gamma_1'(\gamma_1^2+1/c)^{-1/2}C_{\bar{\epsilon}}\phi-\bar{\epsilon}(\gamma_1^2+1/c)^{1/2}\phi' S_{\bar{\epsilon}}\phi)^2\\ &+ \bar{\epsilon}(\gamma_1\gamma_1'(\gamma_1^2+1/c)^{-1/2}S_{\bar{\epsilon}}\phi+(\gamma_1^2+1/c)^{1/2}\phi' C_{\bar{\epsilon}}\phi)^2\\ &= -\gamma_1'^2+\gamma_1^2\gamma_1'^2(\gamma_1^2+1/c)^{-1}+\bar{\epsilon}(\gamma_1^2+1/c)\phi'^2\end{aligned}$$

obtemos que

$$\phi'(t)=\frac{\sqrt{\bar{\epsilon}(1/c+\gamma_1^2+\gamma_1'^2/c)}}{\gamma_1^2+1/c}. \tag{1.2.16}$$

Observe que, se $c>0$, então $\bar{\epsilon}=1$. Agora, o item (ii) do teorema segue de (1.2.13) e (1.2.14), utilizando (1.2.15) e (1.2.16).

Suponha, agora, que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo parabólico. Como a curva $\gamma : I \to \mathbb{Q}_s^2(c) \subset \mathbb{R}^3_{s+\epsilon_0}$ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos que as coordenadas $\gamma_1,\gamma_4,\gamma_5$, de γ, satisfazem

$$2\gamma_1\gamma_4+\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_5^2=1/c \text{ e } 2\gamma_1'\gamma_4'+\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_5'^2=1. \tag{1.2.17}$$

Substituindo em (1.2.2), temos

$$f(s,u)=\left(\gamma_1(s),\gamma_1(s)u_1,\gamma_1(s)u_2,-\frac{-1/c+\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_5^2(s)+\gamma_1^2(s)(u_1^2+u_2^2)}{2\gamma_1(s)},\gamma_5(s)\right) \tag{1.2.18}$$

Segue de (1.2.18),

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}=(0,\gamma_1(s),0,-\gamma_1(s)u_1,0), \tag{1.2.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\left(\gamma_1',\gamma_1'u_1,\gamma_1'u_2,-\frac{2\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_1\gamma_5\gamma_5'+\gamma_1^2\gamma_1'(u_1^2+u_2^2)+\gamma_1'/c-\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_1'\gamma_5^2}{2\gamma_1^2},\gamma_5'\right) \tag{1.2.20}$$

Temos,

$$\langle\frac{\partial f}{\partial u_i},\frac{\partial f}{\partial u_j}\rangle=\gamma_1^2\delta_{ij},\ \ \langle\frac{\partial f}{\partial u_i},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle=0 \text{ e } \langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial s}\rangle=1.$$

Para encontrarmos um campo de vetores normais a f, escrevemos:

$$\eta=\zeta+\frac{\gamma_1'}{c\gamma_1}\frac{\partial f}{\partial s},\ \zeta=\left(\gamma_1,\gamma_1u_1,\gamma_1u_2,\frac{-1/c-\bar{\bar{\epsilon}}\gamma_5^2-\gamma_1^2(u_1^2+u_2^2)}{2\gamma_1},\gamma_5\right). \tag{1.2.21}$$

Note que

$$\langle \zeta, \zeta \rangle = -1/c, \ \langle \zeta, f \rangle = 0, \ \langle \zeta, \frac{\partial f}{\partial u_i} \rangle = 0 \text{ e } \langle \zeta, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = -\frac{\gamma_1'}{c\gamma_1}.$$

Assim, η é um vetor normal e $\langle \eta, \eta \rangle = -\dfrac{1}{c} - \dfrac{\gamma_1'^2}{c^2\gamma_1^2}$.

Temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = (0, 0, 0, -\gamma_1, 0).$$

Logo, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1 \leq i \leq 2$, são iguais e dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\|^{-2} |\langle \eta, \eta \rangle|^{-1/2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, \eta \rangle = \gamma_1^{-2} \left| -\frac{1}{c} - \frac{\gamma_1'^2}{c^2\gamma_1^2} \right|^{-1/2} \left[-\gamma_1^2 - \frac{\gamma_1'^2}{c} \right] \\ &= \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}{\gamma_1}, \ \text{se}\, c > 0 \\ -\bar{\bar{\epsilon}} \dfrac{\sqrt{\bar{\bar{\epsilon}}(-c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}{\gamma_1}, \ \text{se}\, c < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, a curvatura principal ao longo da curva coordenada s é dada por

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= |\langle \eta, \eta \rangle|^{-1/2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \eta \rangle = -|\langle \eta, \eta \rangle|^{-1/2} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s} \rangle \\ &= |\langle \eta, \eta \rangle|^{-1/2} \left(-\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial \zeta}{\partial s} \rangle - \left(\frac{\gamma_1'}{c\gamma_1} \right)' - \frac{\gamma_1'}{c\gamma_1} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \rangle \right) \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Para simplificar a expressão acima, observe que, derivando $\langle \dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial s} \rangle = 1$, temos

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = 2 \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle.$$

Além disso,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \left(\gamma_1', \gamma_1' u_1, \gamma_1' u_2, \frac{\gamma_1'/c - \gamma_1^2 \gamma_1' (u_1^2 + u_2^2) + \bar{\bar{\epsilon}} \gamma_1' \gamma_5^2 - 2\bar{\bar{\epsilon}} \gamma_1 \gamma_5 \gamma_5'}{2\gamma_1^2}, \gamma_5' \right)$$

e $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial \zeta}{\partial s} \rangle = \frac{\gamma_1'^2}{c\gamma_1^2} + 1$. Assim, (1.2.22) simplica-se no seguinte:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \left| -\frac{1}{c} - \frac{\gamma_1'^2}{c^2\gamma_1^2} \right|^{-1/2} \left(-\frac{\gamma_1'^2}{c\gamma_1^2} - 1 - \frac{\gamma_1''\gamma_1 - \gamma_1'^2}{c\gamma_1^2} \right) \\
&= \begin{cases} -\dfrac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{c\gamma_1^2 + \gamma_1'^2}}, & \text{se } c > 0, \\[2ex] \dfrac{\gamma_1'' + c\gamma_1}{\sqrt{\bar{\bar{\epsilon}}(-c\gamma_1^2 - \gamma_1'^2)}}, & \text{se } c < 0. \ \blacksquare \end{cases}
\end{aligned}$$

As hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{L}^4$ são definidas da seguinte forma: Sejam $P^1 \subset P^2$ dois subespaços de $\mathbb{L}^4$ de dimensão 1 e 2, respectivamente. Denote por $\mathcal{I}$ o subgrupo do grupo de isometrias de $\mathbb{L}^4$ que fixa os pontos do subespaço P^1. Considere uma curva regular γ em $\mathbb{L}^2 = P^2 \cap \mathbb{L}^4$, contida em um dos dois semi-planos de P^2 determinados por P^1.

Definição 1.10. Uma hipersuperfície de rotação $f : M^3 \to \mathbb{L}^4$ com curva geratriz γ e eixo P^1 é a órbita de γ sob a ação de $\mathcal{I}$.

Se P^1 é não-degenerado, então f pode ser parametrizada por

$$f(s,u) = (\gamma_1(s)\varphi_1(u), \gamma_1(s)\varphi_2(u), \gamma_1(s)\varphi_3(u), \gamma_4(s)), \tag{1.2.23}$$

com respeito a uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_4\}$ de $\mathbb{L}^4$ satisfazendo as condições (i) ou (ii) abaixo, conforme a métrica em P^1 possua índice 1 ou 0, respectivamente:

(i) $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ para $1 \leq i \leq 3$, $\langle e_4, e_4 \rangle = -1$.

(ii) $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ para $2 \leq i \leq 4$.

Em ambos os casos, temos que $P^1 = span\{e_4\}$, $P^2 = span\{e_1, e_4\}$, $u = (u_1, u_2)$, $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_4(s))$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathbb{L}^2$ e $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u))$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset (P^1)^\perp$ no caso (i) e do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 \subset (P^1)^\perp$ no caso (ii). Diz-se que a hipersuperfície é, respectivamente, do tipo *esférico* ou *hiperbólico*.

Se P^1 é degenerado, então f é uma hipersuperfície de rotação do tipo *parabólico*, que pode ser parametrizada por

$$f(s,u) = (\gamma_1(s), \gamma_1(s)u_1, \gamma_1(s)u_2, \gamma_4(s) - \frac{1}{2}\gamma_1(s)(u_1^2 + u_2^2)), \tag{1.2.24}$$

com respeito a uma base pseudo-ortonormal $\{e_1, \ldots, e_4\}$ de $\mathbb{L}^4$ tal que $\langle e_1, e_1\rangle = 0 = \langle e_4, e_4\rangle$, $\langle e_1, e_4\rangle = 1$, $\langle e_2, e_2\rangle = 1 = \langle e_3, e_3\rangle$, em que $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_4(s))$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathbb{L}^2 := span\{e_1, e_4\}$.

Na próxima proposição calculamos as curvaturas principais de uma hipersuperfície de rotação $f : M^3 \to \mathbb{L}^4$.

Proposição 1.11. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{L}^4$ uma hipersuperfície de rotação. Então os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq 2$ e $\frac{\partial}{\partial s}$ são direções principais, com curvaturas principais correspondentes dadas por*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{\sqrt{\delta + \gamma_1'^2}}{\gamma_1} \text{ e } \gamma_3 = -\frac{\gamma_1''}{\sqrt{\delta + \gamma_1'^2}}, \tag{1.2.25}$$

respectivamente, em que $\delta = -1$, 0 ou 1, conforme f seja do tipo esférica, parabólica ou hiperbólica, respectivamente.

Demonstração: Suponha que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo esférico. Segue de (1.2.23) que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\gamma_1'\varphi, \gamma_4') \text{ e } \frac{\partial f}{\partial u_i} = (\gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, 0),\ 1 \leq i \leq 2. \tag{1.2.26}$$

Como φ é uma parametrização ortogonal, obtemos:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\rangle = 1,\ \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial u_i}\rangle = 0 \text{ e } \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\rangle = \alpha_{ij}\gamma_1^2 \tag{1.2.27}$$

com $\alpha_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\rangle$. O campo normal unitário é dado por

$$N = (\varphi\gamma_4', \gamma_1')$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = (\gamma_1''\varphi, \gamma_4''),\ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j} = \left(\gamma_1' \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, 0\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, 0\right).$$

Observe que

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j}, N\rangle = 0 = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N\rangle.$$

Logo, as curvas coordenadas de f são linhas de curvatura. Além disso, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1 \leq i \leq 2$, e s são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\|^{-2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, N \rangle = - \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^{-2} \gamma_1^{-2} \gamma_1 \gamma_4' \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^2 \\ &= -\frac{\gamma_4'}{\gamma_1}, \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \rangle = \gamma_1'' \gamma_4' \langle \varphi, \varphi \rangle + \gamma_1' \gamma_4'' \langle e_4, e_4 \rangle \\ &= \gamma_4' \gamma_1'' - \gamma_1' \gamma_4''. \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Por outro lado, como $\gamma : I \to \mathbb{L}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\gamma_1'^2 - \gamma_4'^2 = 1. \tag{1.2.30}$$

Utilizando (1.2.30), segue, respectivamente, de (1.2.28) e (1.2.29), que

$$\lambda = -\frac{\sqrt{-1 + \gamma_1'^2}}{\gamma_1} \text{ e } \lambda_3 = -\frac{\gamma_1''}{\sqrt{-1 + \gamma_1'^2}}.$$

Suponha que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo hiperbólico. Segue de (1.2.23) que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\gamma_1' \varphi, \gamma_4') \text{ e } \frac{\partial f}{\partial u_i} = (\gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, 0), \ 1 \leq i \leq 2. \tag{1.2.31}$$

Como φ é uma parametrização ortogonal, obtemos:

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = 1, \ \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial u_i} \rangle = 0 \text{ e } \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \rangle = \alpha_{ij} \gamma_1^2 \tag{1.2.32}$$

com $\alpha_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \rangle$. O campo normal unitário é dado por

$$N = (\varphi \gamma_4', \gamma_1')$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = (\gamma_1''\varphi, \gamma_4''), \ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j} = \left(\gamma_1' \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, 0\right), \ \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, 0\right).$$

Observe que

$$\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial u_j}, N\rangle = 0 = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, N\rangle.$$

Logo, as curvas coordenadas de f são linhas de curvatura. Além disso, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1 \leq i \leq 2$, e s são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\|^{-2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, N\rangle = -\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^{-2} \gamma_1^{-2}\gamma_1\gamma_4' \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right\|^2 \\ &= -\frac{\gamma_4'}{\gamma_1}, \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N\rangle = \gamma_1''\gamma_4'\langle \varphi, \varphi\rangle + \gamma_1'\gamma_4''\langle e_4, e_4\rangle \\ &= \gamma_1'\gamma_4'' - \gamma_4'\gamma_1''. \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Por outro lado, como $\gamma : I \to \mathbb{L}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$-\gamma_1'^2 + \gamma_4'^2 = 1. \tag{1.2.35}$$

Utilizando (1.2.35), segue, respectivamente, de (1.2.33) e (1.2.34), que

$$\lambda = -\frac{\sqrt{1+\gamma_1'^2}}{\gamma_1} \text{ e } \lambda_3 = -\frac{\gamma_1''}{\sqrt{1+\gamma_1'^2}}.$$

Suponha, agora, que f seja uma hipersuperfície de rotação do tipo parabólico. Como a curva $\gamma : I \to \mathbb{L}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos que as coordenadas γ_1 e γ_4 de γ, satisfazem

$$2\gamma_1'\gamma_4' = 1. \tag{1.2.36}$$

Segue de (1.2.2) que

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (0, \gamma_1(s), 0, -\gamma_1(s)u_i), \tag{1.2.37}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\gamma_1', \gamma_1' u_1, \gamma_1' u_2, \gamma_4' - \frac{1}{2}\gamma_1'(u_1^2 + u_2^2)) \tag{1.2.38}$$

Daí, utilizando (1.2.17), temos

$$\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \rangle = \gamma_1^2 \delta_{ij}, \quad \langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = \gamma_1 \gamma_1' u_1 - \gamma_1 \gamma_1' u_1 = 0,$$
$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle = 2\gamma_1' \left[\gamma_4' - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \right] + \gamma_1'^2 (u_1^2 + u_2^2) = 2\gamma_1' \gamma_4' = 1.$$

Seja

$$N = (\gamma_1', \gamma_1' u_1, \gamma_1' u_2, -\frac{1}{\gamma_1'} + \gamma_4' - \frac{1}{2}\gamma_1'(u_1^2 + u_2^2)). \tag{1.2.39}$$

Observe que

$$\langle N, \frac{\partial f}{\partial u_i} \rangle = 0 = \langle N, \frac{\partial f}{\partial s} \rangle \text{ e } \langle N, N \rangle = -1,$$

ou seja, N é um campo normal unitário a f.

Note que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = (0, 0, 0, -\gamma_1).$$

Logo, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas u_i, $1 \leq i \leq 2$, são iguais e dadas por

$$\lambda = \left\| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right\|^{-2} \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, N \rangle = -\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$$

Por outro lado, a curvatura principal ao longo da curva coordenada s é dada por

$$\lambda_3 \quad = \quad \langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \rangle = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} + \gamma_1' \gamma_4'' + \gamma_1'' \gamma_4' = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} \tag{1.2.40}$$

∎

O próximo teorema, provado em [15], nos dá uma condição suficiente para que uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{Q}_s^4(c)$ seja de rotação.

Teorema 1.12. *[15] Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}_s^4(c)$ uma hipersuperfície. Suponha que as curvaturas principais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de f satisfaçam $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ e que a distribuição definida pelos auto-espaços $E_{\lambda_3} = E_\lambda^\perp$, associados a λ_3, seja totalmente geodésica. Então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto de uma hipersuperfície de rotação.*

Capítulo 2

Uma classe de subvariedades de $\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$.

Neste capítulo estudamos uma classe de subvariedades M^{m-1} em $\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$, denominada *classe* $\mathcal{B}$, que será útil no Capítulo 3.

Dizemos que uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ pertence à *classe* $\mathcal{B}$ se possui fibrado normal plano e existem um campo normal unitário paralelo $\zeta \in \Gamma(N^gM)$ e $c \in \mathbb{R}$, com $\epsilon c \in (0,1)$, tais que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \epsilon c(\epsilon\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle A^g_\zeta X,W\rangle\langle A^g_\zeta Y,Z\rangle - \langle A^g_\zeta X,Z\rangle\langle A^g_\zeta Y,W\rangle) \quad (2.0.1)$$

para quaisquer $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. Quando necessário, diremos que g pertence à classe $\mathcal{B}$ *com respeito a* $c \in \mathbb{R}$ *e a* $\zeta \in \Gamma(N^gM)$.

Decorre de (2.0.1) e da equação de Gauss que uma superfície $g : M^2 \to \mathbb{Q}^3(\epsilon)$ pertence à classe $\mathcal{B}$ se, e só se,

$$\epsilon + \lambda_1\lambda_2 = K = \epsilon c(\epsilon + \lambda_1\lambda_2),$$

logo g pertence à classe $\mathcal{B}$ se, e só se, M^2 tem curvatura nula. Neste capítulo provaremos, em particular (ver Teorema 2.1), que qualquer imersão isométrica $g : M^3 \to \mathbb{Q}^5(\epsilon)$ na classe $\mathcal{B}$ pode ser construída locamente, via Teorema Fundamental das Subvariedades, a partir de uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ que admite uma imersão isométrica $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$, em que $\mathbb{L}^4$ denota o espaço de Lorentz de dimensão 4. Tais hipersuperfícies serão estudadas no Capítulo 4.

Veremos ainda que, se $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ é uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$, então todas as paralelas a g, na direção do campo $\zeta \in \Gamma(N^gM)$, também pertencem à classe $\mathcal{B}$ (ver Proposição 2.5).

Na seção 2.3 obteremos uma transformação de Ribaucour para imersões isométricas na classe $\mathcal{B}$, que permitirá obter exemplos explícitos de tais imersões.

2.1 Classe $\mathcal{B}$

Nesta seção mostraremos inicialmente que qualquer imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ na classe $\mathcal{B}$ pode ser construída locamente, via Teorema Fundamental das Subvariedades, a partir de uma hipersuperfície $f : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^m(c)$ para a qual existe uma outra imersão isométrica $\tilde{f} : M^{m-1} \to \mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$, em que $\mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ denota o espaço pseudo-Riemanniano de dimensão $2m-4$ cuja métrica plana possui índice $m-3$.

Sejam M^{m-1} uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $\epsilon c \in (0, 1)$. Sejam $f : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^m(c)$ e $\tilde{f} : M^{m-1} \to \mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ imersões isométricas. Se $c < 0$, suponha que não exista um subespaço umbílico $U(x) \subset T_xM$, de dimensão maior ou igual a 2, comum a f e $\tilde{f}$. Considere o fibrado vetorial Riemanniano trivial $E := M^{m-1} \times \mathbb{R}^{m-2}$ sobre M^{m-1}. Introduza neste fibrado a única conexão ∇', compatível com a métrica canônica, que torna as seções $\xi_i(x) = (x, e_i)$ paralelas, em que $\{e_1, \cdots, e_{m-2}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{m-2}$. Defina

$$\alpha(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon c}}\langle A^f X, Y\rangle \xi_1 \oplus \frac{1}{\sqrt{\epsilon \tilde{c}}}\sum_{i=2}^{m-2}\langle \tilde{\alpha}(X,Y), \zeta_{i-1}\rangle \xi_i, \qquad (2.1.1)$$

em que $\epsilon = c/|c|$, $\tilde{c} = \dfrac{c}{1-\epsilon c}$, A^f é o operador forma da hipersuperfície f, $\tilde{\alpha}$ é a segunda forma fundamental da imersão isométrica $\tilde{f}$ e $\{\zeta_1, \cdots, \zeta_{m-3}\}$ é um referencial ortonormal normal a $\tilde{f}$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Existem uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ e uma isometria de fibrados vetoriais $\Phi : E \to N^gM$ tais que a conexão normal $\nabla^\perp$ e a segunda forma fundamental α^g de g satisfazem $\nabla^\perp = \Phi\nabla'$ e $\alpha^g = \Phi\alpha$, respectivamente. Além disso, g pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a c e a $\Phi(\xi_1)$. Reciprocamente, qualquer imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ é construída dessa forma.*

Antes de demonstrar o teorema acima, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2. *Sejam $f : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^m(c)$ e $\tilde{f} : M^{m-1} \to \mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ imersões isométricas com $c \neq 0$. Dado $x \in M^n$, se $c < 0$ suponha que não exista um subespaço $U(x) \subset T_xM$ de dimensão maior ou igual a 2 que seja umbílico para f e $\tilde{f}$. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_{m-1}\}$ de T_xM que diagonaliza simultaneamente as segundas formas fundamentais de f e $\tilde{f}$.*

Demonstração: O espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ admite uma inclusão umbílica i em $\mathbb{Q}^{2m-3}_{m-2}(c)$ ou $\mathbb{Q}^{2m-3}_{m-3}(c)$, conforme seja $c > 0$ ou $c < 0$, respectivamente. As segundas formas fundamentais $\tilde{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ de $\tilde{f}$ e $\hat{f} = i \circ \tilde{f}$, respectivamente, são relacionadas por

$$\hat{\alpha} = i_*\tilde{\alpha} + \sqrt{|c|}\langle \cdot, \cdot \rangle \xi \tag{2.1.2}$$

em que ξ é um dos campos de vetores unitários que são normais a i.

Dado $x \in M$, defina $W^{m-1} := N^f_x M \oplus N^{\hat{f}}_x M$. Introduza em W^{m-1} o produto interno

$$\langle\langle (\xi + \hat{\xi}), (\eta + \hat{\eta}) \rangle\rangle_{W^{m-1}} := \langle \xi, \eta \rangle_{N^f_x M} - \langle \hat{\xi}, \hat{\eta} \rangle_{N^{\hat{f}}_x M},$$

o qual possui índice 0 ou 1, conforme seja $c > 0$ ou $c < 0$, respectivamente.

Defina uma forma bilinear $\beta : T_xM \times T_xM \to W^{m-1}$ por

$$\beta = \alpha \oplus \hat{\alpha},$$

em que α e $\hat{\alpha}$ são as segundas formas fundamentais de f e $\hat{f}$, respectivamente, em x. Note que $\mathcal{N}(\beta) \subset \mathcal{N}(\hat{\alpha}) = \{0\}$ por (2.1.2). Por outro lado, segue das equações de Gauss para f e $\hat{f}$ que β é uma forma bilinear Euclidiana com respeito ao produto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, isto é,

$$\langle\langle \beta(X,Y), \beta(Z,W) \rangle\rangle = \langle\langle \beta(X,W), \beta(Z,Y) \rangle\rangle$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in T_xM$. Assim, se $c > 0$, ou se $c < 0$ e $\mathcal{S}(\beta)$ é não degenerado, a desigualdade

$$\dim \mathcal{S}(\beta) \geq \dim T_xM - \dim \mathcal{N}(\beta) = m - 1 = \dim W^{m-1} \tag{2.1.3}$$

vale pelo Teorema A.1, e portanto devemos ter a igualdade na primeira desigualdade acima. Pelo Teorema A.2, existe uma base $\{e_1, \cdots, e_{m-1}\}$ que diagonaliza β e, portanto, diagonaliza ambas as segundas formas fundamentais α e $\hat{\alpha}$ e, consequentemente, α e $\tilde{\alpha}$ por (2.1.2). Segue também de (2.1.2) que

$$0 = \langle \hat{\alpha}(e_i, e_j), \xi \rangle\rangle = \sqrt{|c|}\langle e_i, e_j \rangle,$$

logo a base $\{e_1, \cdots, e_{m-1}\}$ é ortogonal.

Suponha agora que $c < 0$ e que $\mathcal{S}(\beta)$ seja degenerado. Neste caso, existe $N \in N^f M$ e $\zeta \in N^{\hat{f}} M$ tais que $(0,0) \neq (N, \zeta) \in \mathcal{S}(\beta) \cap \mathcal{S}(\beta)^{\perp}$. Em particular, de $0 = \langle\langle (N,\zeta), (N,\zeta) \rangle\rangle$ segue que $\langle N, N \rangle = \langle \zeta, \zeta \rangle$, e podemos supor, sem perda de generalidade, que N e ζ são unitários. Além disso, obtemos de

$$0 = \langle\langle \beta, N \oplus \zeta \rangle\rangle = \langle \alpha, N \rangle - \langle \hat{\alpha}, \zeta \rangle \tag{2.1.4}$$

que $A^f_N = A^{\hat{f}}_{\zeta}$. Daí, segue das equações de Gauss para f e $\hat{f}$ que

$$\begin{aligned}
&\langle A^{\hat{f}}_{\zeta} X, Z \rangle \langle A^{\hat{f}}_{\zeta} Y, W \rangle - \langle A^{\hat{f}}_{\zeta} X, W \rangle \langle A^{\hat{f}}_{\zeta} Y, Z \rangle + \langle \hat{\alpha}_1(X,Z), \hat{\alpha}_1(Y,W) \rangle - \langle \hat{\alpha}_1(X,W), \hat{\alpha}_1(Y,Z) \rangle \\
&= \langle A^f_N X, Z \rangle \langle A^f_N Y, W \rangle - \langle A^f_N X, W \rangle \langle A^f_N Y, Z \rangle \\
&\Longleftrightarrow \langle \hat{\alpha}_1(X,Z), \hat{\alpha}_1(Y,W) \rangle - \langle \hat{\alpha}_1(X,W), \hat{\alpha}_1(Y,Z) \rangle = 0, \ \forall X, Y, Z, W \in TM,
\end{aligned}$$

isto é, $\hat{\alpha}_1 : T_xM \times T_xM \to \{\zeta\}^{\perp} \subset N^{\hat{f}}_x M$, $\hat{\alpha}_1(\cdot,\cdot) = \hat{\alpha}(\cdot,\cdot) - \langle \hat{\alpha}(\cdot,\cdot), \zeta \rangle \zeta$, é plana com respeito ao produto interno Riemanniano $-\langle \cdot,\cdot \rangle$, de $\{\zeta\}^{\perp}$, induzido de $N^{\hat{f}}_x M$. Agora, segue do Teorema A.1 que,

$$\dim \mathcal{N}(\hat{\alpha}_1) \geq m - 1 - (m-3) = 2.$$

Como $A^{\hat{f}}_{\xi} = \sqrt{|c|} I$ por (2.1.2), segue que $U(x) := \mathcal{N}(\hat{\alpha}_1)$ é um autoespaço comum a todos os operadores de forma $A^{\hat{f}}_{\eta}$, $\eta \in N^{\hat{f}}_x M$. Em particular, é um subespaço de T_xM umbílico para $\tilde{\alpha}$. Por outro lado, é também umbílico para $A^f_N = A^{\hat{f}}_{\zeta}$, contradição . ∎

Demostração do Teorema 2.1: Afirmamos que α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci de uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$.

Segue das equações de Gauss para as imersões isométricas f e $\tilde{f}$ que

$$\begin{aligned}
& \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle \\
= \; & \frac{1}{\epsilon c}(\langle A^f X,W\rangle\langle A^f Y,Z\rangle - \langle A^f X,Z\rangle\langle A^f Y,W\rangle) \\
& +\frac{1}{\epsilon\tilde{c}}\left[\sum_{i=1}^{m-3}(\langle\tilde{\alpha}(X,W),\zeta_i\rangle\langle\tilde{\alpha}(Y,Z),\zeta_i\rangle - \langle\tilde{\alpha}(X,Z),\zeta_i\rangle\langle\tilde{\alpha}(Y,W),\zeta_i\rangle)\right] \\
= \; & \frac{\langle R(X,Y)Z,W\rangle}{\epsilon c} - \epsilon\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle - \frac{\langle R(X,Y)Z,W\rangle}{\epsilon\tilde{c}} \\
= \; & \left(\frac{1}{\epsilon c} - \frac{1}{\epsilon\tilde{c}}\right)\langle R(X,Y)Z,W\rangle - \epsilon\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle \\
= \; & \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \epsilon\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle,
\end{aligned}$$

para quaisquer $X,Y,Z,W \in T_xM$. Donde,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \epsilon\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle \quad (2.1.5)$$

Por outro lado, da definição de α decorre que $A_{\xi_1} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon c}}A^f$ e $A_{\xi_i} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\tilde{c}}}A^{\tilde{f}}_{\zeta_{i-1}}$, $2 \leq i \leq m-2$. Daí, as equações de Codazzi para as imersões isométricas f e $\tilde{f}$ implicam que

$$(\nabla_X A)(Y,\xi_j) = (\nabla_Y A)(X,\xi_j), \quad (2.1.6)$$

para quaisquer $X,Y \in T_xM$ e $1 \leq j \leq m-2$. Isto é, o par (α,∇') satisfaz a equação de Codazzi.

Pelo Lema 2.2, existe uma base ortonormal de T_xM que diagonaliza simultaneamente as segundas formas fundamentais das imersões isométricas f e $\tilde{f}$. Segue de (2.1.1) que tal base diagonaliza α. Logo o par (α,∇') satisfaz também a equação de Ricci, uma vez que R' é identicamente nulo.

Desta forma, a primeira parte do teorema segue do Teorema Fundamental das subvariedades. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
& \langle A^g_{\Phi\xi_1}X,Z\rangle\langle A^g_{\Phi\xi_1}Y,W\rangle - \langle A^g_{\Phi\xi_1}X,W\rangle\langle A^g_{\Phi\xi_1}Y,Z\rangle \\
= \; & \langle\alpha(X,Z),\xi_1\rangle\langle\alpha(Y,W),\xi_1\rangle - \langle\alpha(X,W),\xi_1\rangle\langle\alpha(Y,Z),\xi_1\rangle \\
= \; & \frac{1}{\epsilon c}(\langle A^f X,Z\rangle\langle A^f Y,W\rangle - \langle A^f X,W\rangle\langle A^f Y,Z\rangle) \\
= \; & \frac{1}{\epsilon c}(-c\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)Z,W\rangle), \ \forall X,Y,Z,W \in T_xM,
\end{aligned}$$

isto é, g é uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$.

Reciprocamente, sejam $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ e α^g a segunda forma fundamental de g. Defina o operador $A^f : T_xM \to T_xM$ por

$$A^f := \sqrt{\epsilon c}A^g_\zeta, \tag{2.1.7}$$

em que $\langle A^g\cdot,\cdot\rangle = \langle\alpha^g(\cdot,\cdot),\zeta\rangle$ e $\zeta \in N^g_xM$ é o campo dado na definição da classe $\mathcal{B}$. Segue da equação (2.0.1) que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle(X\wedge Y)Z,W\rangle + \langle A^fX,W\rangle\langle A^fY,Z\rangle - \langle A^fX,Z\rangle\langle A^fY,W\rangle, \tag{2.1.8}$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_xM$. Além disso, sendo $\zeta \in N^g_xM$ paralelo, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}}(\nabla_X A^f)Y &= (\nabla_X A^g_\zeta)Y = (\nabla_X A^g)(Y,\zeta) + A^g_{\nabla^\perp_X\zeta}Y \\
&= (\nabla_X A^g)(Y,\zeta) = (\nabla_Y A^g)(X,\zeta) \\
&= (\nabla_Y A^g_\zeta)X - A^g_{\nabla^\perp_Y\zeta}X = (\nabla_Y A^g_\zeta)X \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon c}}(\nabla_Y A^f)X,
\end{aligned}$$

para todo $X,Y \in T_xM$. Assim, A^f satisfaz as equação de Gauss e de Codazzi. Portanto, segue do Teorema Fundamental para hipersuperfícies que existe $f : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^m(c)$ imersão isométrica cujo operador de forma é A^f.

Defina $\tilde{\alpha} : T_xM \times T_xM \to \{\zeta\}^\perp \subset N^g_xM$ por

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\epsilon\tilde{c}}(\alpha^g - \langle\alpha^g,\zeta\rangle\zeta),$$

em que $\tilde{c} = \dfrac{c}{1-\epsilon c}$. Note que

$$
\begin{aligned}
& \langle\tilde{\alpha}(X,W),\tilde{\alpha}(Y,Z)\rangle - \langle\tilde{\alpha}(X,Z),\tilde{\alpha}(Y,W)\rangle \\
= \; & \epsilon\tilde{c}(\langle\alpha^g(X,W),\alpha^g(Y,Z)\rangle - \langle\alpha^g(X,Z),\alpha^g(Y,W)\rangle \\
& -(\langle A^g_\zeta X,W\rangle\langle A^g_\zeta Y,Z\rangle - \langle A^g_\zeta X,Z\rangle\langle A^g_\zeta Y,W\rangle)) \\
= \; & \epsilon\tilde{c}[\langle R(X,Y)Z,W\rangle - \epsilon\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle - \frac{1}{\epsilon c}\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \epsilon\langle (X\wedge Y)Z,W\rangle] \\
= \; & \epsilon\tilde{c}\left(\frac{\epsilon c-1}{\epsilon c}\right)\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)Z,W\rangle,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $X,Y,Z,W \in T_xM$, em que utilizamos, na segunda igualdade, as equações de Gauss para g e f. Segue que $\tilde{\alpha}$ satisfaz a equação de Gauss de uma subvariedade do espaço pseudo-Riemanniano $\mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$. Além disso, segue da equação de Codazzi para g e do fato de ζ ser paralelo, que $\tilde{\alpha}$ e a conexão de $\{\zeta\}^\perp$ induzida por g satisfazem a equação de Codazzi. A equação de Ricci segue do fato de que o subfibrado $\{\zeta\}^\perp$ de N^g_xM é paralelo. Portanto, o Teorema fundamental para subvariedades implica que existe $\tilde{f} : M^{m-1} \to \mathbb{R}^{2m-4}_{m-3}$ imersão isométrica cuja segunda forma fundamental é $\tilde{\alpha}$. ∎

Observação 2.3. Segue do Teorema 2.1, para $m = 4$, que qualquer imersão isométrica $g : M^3 \to \mathbb{Q}^4(\epsilon)$ na classe $\mathcal{B}$ é construída a partir de uma hipersuperfície $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ para a qual existe outra imersão isométrica $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$. Tais hipersuperfícies f serão caracterizadas no Capítulo 4 desta tese.

Mostraremos a seguir que, se uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $\zeta \in \Gamma(N^gM)$, então todas as paralelas a g na direção de ζ também pertencem à classe $\mathcal{B}$.

Sejam $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica e $\zeta \in \Gamma(N^gM)$ um campo normal unitário e paralelo. Sejam $j : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)\times\mathbb{R}$ e $i : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)\times\mathbb{R} \to \mathbb{E}^{2m-1}$ as inclusões canônicas e $\tilde{j} := i \circ j$. Considere $\tilde{g} := \tilde{j} \circ g$ e $\tilde{\zeta} := \tilde{j}_*\zeta$. Seja $g_s : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ a família de imersões isométricas paralelas a g na direção de ζ, dada por

$$\tilde{g}_s(x) := (\tilde{j} \circ g_s)(x) = C_\epsilon(s)\tilde{g}(x) + S_\epsilon(s)\tilde{\zeta}, \tag{2.1.9}$$

para cada $x \in M^{m-1}$, em que

$$C_\epsilon(s) = \begin{cases} \cos s, & \text{se } \epsilon = 1 \\ \cosh s, & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\epsilon(s) = \begin{cases} \operatorname{sen} s, & \text{se } \epsilon = 1 \\ \operatorname{senh} s, & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}. \tag{2.1.10}$$

Para $\epsilon = 1$, suponha que as curvaturas principais de g, na direção do campo $\zeta \in N^gM$, sejam dadas por

$$\lambda_i = \cot \theta_i,\ 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ 1 \leq i \leq m-1,$$

em que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_{m-1}$. Para X no autoespaço do operador forma A^g_ζ correspondente à curvatura principal λ_i, $1 \leq i \leq m-1$, temos

$$\tilde{g}_{s*}(x)X = \tilde{g}_*(\cos sX - \operatorname{sen} sA^g_\zeta X) = (\cos s - \operatorname{sen} s \cot \theta_i)g_*(x)X = \frac{\operatorname{sen}(\theta_i - s)}{\operatorname{sen} \theta_i} g_*(x)X$$

Assim, $\tilde{g}_s$ é uma imersão em $x \in M$ se, e somente se, $s \neq \theta_i \pmod{\pi}$ para todo $1 \leq i \leq m-1$. Para $\epsilon = -1$, escreva as curvaturas principais de g com valor absoluto maior que 1 como

$$\lambda_i = \coth \theta_i,\ \theta_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq m-1.$$

Como no caso anterior, para X no auto-espaço do operador de forma A^g_ζ, correspondente à curvatura principal λ_i, $1 \leq i \leq m-1$, temos

$$\tilde{g}_{s*}(x)X = \frac{\operatorname{senh}(\theta_i - s)}{\operatorname{senh} \theta_i} \tilde{g}_*(x)X$$

Assim, $\tilde{g}_s$ é uma imersão em $x \in M$ se, e somente se, $s \neq \theta_i$ para todo $1 \leq i \leq m-1$.

No caso $\epsilon = 1$, seja

$$U := \{(x, s) \in M^{m-1} \times \mathbb{R} :\ s \in (\theta_{m-1}(x) - \pi, \theta_1(x))\}. \tag{2.1.11}$$

Para $\epsilon = -1$, seja θ_+ (respectivamente, θ_-) o mínimo (respectivamente, máximo) de θ_i que é maior que 1 (respectivamente, menor que -1), e seja

$$U := \{(x, s) \in M^{m-1} \times \mathbb{R} :\ s \in (\theta_-(x), \theta_+(x))\}. \tag{2.1.12}$$

Em ambos os casos, se $V \subset M^{m-1}$ é um subconjunto aberto e I é um intervalo aberto contendo 0 tais que $V \times I \subset U$, então g_s é uma imersão em V para todo $s \in I$.

Lema 2.4. *As segundas formas fundamentais $\alpha^{\tilde{g}}$ e $\alpha^{\tilde{g}_s}$ de $\tilde{g}$ e $\tilde{g}_s$, respectivamente, se relacionam por*

$$\alpha^{\tilde{g}_s}(X,Y) = C_\epsilon(s)\alpha^{\tilde{g}}(X,Y) - S_\epsilon(s)\alpha^{\tilde{g}}(X, A^g_\zeta Y) \tag{2.1.13}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_{s*}Y &= \tilde{\nabla}_X(C_\epsilon(s)\tilde{g}_*Y - S_\epsilon(s)\tilde{g}_*A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}}Y) \\ &= \tilde{g}_*(C_\epsilon(s)\nabla_X Y - S_\epsilon(s)\nabla_X A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}}Y) + C_\epsilon(s)\alpha^{\tilde{g}}(X,Y) - S_\epsilon(s)\alpha^{\tilde{g}}(X, A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}}Y), \end{aligned}$$

e (2.1.13) segue do fato que $A^g_\zeta = A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}}$. ∎

Proposição 2.5. *Seja $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica pertencente à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\zeta \in \Gamma(N_gM)$. Então a imersão isométrica paralela $g_s : V \subset M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\tilde{\zeta}_s := -\epsilon S_\epsilon(s)\tilde{g} + C_\epsilon(s)\tilde{\zeta}$.*

Demonstração: Dado $x \in M$, seja $\{X_1, \cdots, X_{m-1}\}$ uma base ortonormal de T_xM formada por direções principais de $\tilde{g}$. Segue de (2.1.13) que $\{Y_1, \cdots, Y_{m-1}\}$, em que $Y_i := \dfrac{X_i}{|X_i|_{\tilde{g}_s}}$ para $1 \le i \le m-1$, é uma base ortonormal de $T^{\tilde{g}_s}_x M$ formada por direções principais de $\tilde{g}_s$. Em particular, $\tilde{g}_s$ possui fibrado normal plano. Basta mostrar que

$$\langle \alpha^{\tilde{g}_s}(Y_i, Y_i), \alpha^{\tilde{g}_s}(Y_j, Y_j)\rangle = c(1 + \epsilon\langle A^{\tilde{g}_s}_{\tilde{\zeta}_s}Y_i, Y_i\rangle\langle A^{\tilde{g}_s}_{\tilde{\zeta}_s}Y_j, Y_j\rangle) \tag{2.1.14}$$

para quaisquer $1 \le i \ne j \le m-1$.

Sejam $\lambda_i,\ 1 \le i \le m-1$ as curvaturas principais de $\tilde{g}$ correspondentes às direções principais $X_i,\ 1 \le i \le m-1$, na direção do campo ζ.

Temos que:

$$|X_i|^2_{\tilde{g}_s} = \langle \tilde{g}_{s*}X_i, \tilde{g}_{s*}X_i\rangle = (C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s))^2$$

e

$$\begin{aligned}\alpha^{\tilde{g}_s}(Y_i, Y_i) &\overset{(2.1.13)}{=} \frac{C_\epsilon(s)}{|X_i|^2}\alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_i) - \frac{S_\epsilon(s)}{|X_i|^2}\lambda_i\alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_i) \\ &= \frac{\alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_i)}{C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s)}. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Portanto

$$\langle \alpha^{\tilde{g}_s}(Y_i, Y_i), \alpha^{\tilde{g}_s}(Y_j, Y_j)\rangle = \frac{\langle \alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_i), \alpha^{\tilde{g}}(X_j, X_j)\rangle}{(C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s))(C_\epsilon(s) - \lambda_j S_\epsilon(s))}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & c(1 + \epsilon\langle A^{\tilde{g}_s}_{\tilde{\zeta}_s} Y_i, Y_i\rangle\langle A^{\tilde{g}_s}_{\tilde{\zeta}_s} Y_j, Y_j\rangle) \overset{(2.1.15)}{=} c\left(1 + \epsilon\frac{\langle A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}_s} X_i, X_i\rangle\langle A^{\tilde{g}}_{\tilde{\zeta}_s} X_j, X_j\rangle}{(C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s))(C_\epsilon(s) - \lambda_j S_\epsilon(s))}\right) \\ = & \; c\left(1 + \epsilon\frac{(\epsilon S_\epsilon(s) + \lambda_i C_\epsilon(s))(\epsilon S_\epsilon(s) + \lambda_j C_\epsilon(s))}{(C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s))(C_\epsilon(s) - \lambda_j S_\epsilon(s))}\right) \\ = & \; \frac{c}{(C_\epsilon(s) - (\lambda_i S_\epsilon(s))(C_\epsilon(s) - \lambda_j S_\epsilon(s))}(C^2_\epsilon(s) - (\lambda_j + \lambda_i)S_\epsilon(s)C_\epsilon(s) + \lambda_i\lambda_j S^2_\epsilon(s) + \epsilon S^2_\epsilon(s) \\ & + (\lambda_j + \lambda_i)S_\epsilon(s)C_\epsilon(s) + \epsilon\lambda_i\lambda_j C^2_\epsilon(s)) \\ = & \; \frac{c(1 + \epsilon\lambda_i\lambda_j)}{(C_\epsilon(s) - \lambda_i S_\epsilon(s))(C_\epsilon(s) - \lambda_j S_\epsilon(s))}. \end{aligned}$$

A equação (2.1.14) decorre então do fato que g pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a ζ. ∎

2.2 Transformação de Ribaucour - Preliminares

Nesta seção, baseada em [10], apresentaremos alguns fatos básicos sobre a transformação de Ribaucour que serão úteis na seção seguinte.

Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$ uma imersão isométrica *holonômica*. Isto significa que f possui fibrado normal plano e que M^n admite um sistema global $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de coordenadas principais. Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ um referencial ortonormal principal dado por $X_j = v_j^{-1}\dfrac{\partial}{\partial u_j}$, com $v_j > 0$. Seja $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p\}$ um referencial normal global ortonormal e paralelo na conexão normal. Defina $V_{ir} \in C^\infty(M)$ por

$$A^f_{\xi_r} X_i = v_i^{-1} V_{ir} X_i, \tag{2.2.1}$$

em que $A^f_{\xi_r}$ é o operador forma de f com respeito a ξ_r. Sejam $v = (v_1, ...v_n)$ e $V = (V_{ir}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. Denominamos (v, V) o par associado a f.

Proposição 2.6. *[9] A tripla (v, h, V), em que $h_{ij} = \dfrac{1}{v_i}\dfrac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais*

$$\begin{cases} (i)\frac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji}v_j, \\ (ii)\frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \sum_k h_{ki}h_{kj} + \sum_r V_{ir}V_{jr} + \epsilon v_i v_j = 0, \\ (iii)\frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij}h_{jk}, \\ (iv)\frac{\partial V_{ir}}{\partial u_j} = h_{ji}V_{jr}, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

em que $i \neq j \neq k \neq i$.

Reciprocamente, se (v, h, V) é uma solução de (2.2.2) num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ simplesmente conexo no qual v_i não se anula para nenhum $1 \leq i \leq n$, então existe uma subvariedade holonômica $f : U \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$ que possui (v, V) como par associado.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{E}^{n+p}$, dizemos que uma imersão $\tilde{f} : \tilde{M}^n \to \mathbb{E}^{n+p}$ é uma *transformada de Ribaucour* de f se $|f - \tilde{f}| \neq 0$ e existem uma isometria de fibrados vetoriais $\mathcal{P} : f^*T\mathbb{E}^{n+p} \to \tilde{f}^*T\mathbb{E}^{n+p}$, um tensor simétrico D em M e um campo de vetores não nulo em todo ponto $\delta \in \Gamma(f^*T\mathbb{E}^{n+p})$ tais que:

(a) $\mathcal{P}(Z) - Z = \langle\delta, Z\rangle(f - \tilde{f})$, para todo $Z \in \Gamma(f^*T\mathbb{E}^{n+p})$;

(b) $\mathcal{P} \circ f_* \circ D = \tilde{f}_*$.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$, seja $F = i \circ f : M^n \to \mathbb{E}^{n+p+1}$, em que $i : \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon) \to \mathbb{E}^{n+p+1}$ denota uma inclusão umbílica. Uma imersão $\tilde{f} : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$ é uma transformada de Ribaucour de f com dados (P, D, δ) se $\tilde{F} = i \circ \tilde{f} : M^n \to \mathbb{E}^{n+p+1}$ é uma *transformada de Ribaucour* de F com dados $(\hat{\mathcal{P}}, D, \hat{\delta})$, em que $\hat{\delta} = \delta - \epsilon F$ e $\hat{\mathcal{P}} : F^*T\mathbb{E}^{n+p} \to \tilde{F}^*T\mathbb{E}^{n+p}$ é a extensão de $\mathcal{P}$ tal que $\hat{\mathcal{P}}(F) = \tilde{F}$

Dado um campo de vetores Z ao longo de uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{E}^{n+p}$, denote por Z^* a correspondente $1-$forma em $f^*T\mathbb{E}^{n+p}$, isto é, $Z^*(Y_q) = \langle Z_q, Y_q\rangle$ para $Y \in f^*T\mathbb{E}^{n+p}$ e $q \in M^n$. O seguinte resultado foi provado em [9].

Teorema 2.7. *[9] Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$ uma imersão isométrica holonômica com par associado (v, V). Então qualquer transformada de Ribaucour $\tilde{f} : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\epsilon)$ de f é dada por*

$$\tilde{F} = F - 2\nu\varphi\mathcal{F}, \tag{2.2.3}$$

em que $\mathcal{F} = \sum_i \gamma_i F_* X_i + \sum_r \beta_r \xi_r + \epsilon\varphi F$, $\nu^{-1} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle := \vartheta$ *e* $(\varphi, \gamma, \beta) := (\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_p)$ *é solução do sistema completamente integrável*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i, \\ \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = h_{ji}\gamma_i, \quad para \quad i \neq j, \\ \dfrac{\partial \beta_r}{\partial u_i} = -V_{ir}\gamma_i. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Além disso,

$$\hat{\mathcal{P}} = I - 2\nu\mathcal{F}\mathcal{F}^*, \;\; D = I - 2\nu\varphi\Phi \;\; e \;\; \hat{\delta} = -\varphi^{-1}\mathcal{F}, \tag{2.2.5}$$

em que $\Phi = Hess\,\varphi - A^f_\beta$. *Reciprocamente, dada uma solução* (φ, γ, β) *de* (2.2.4) *defina*

$$B_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{j\neq i} h_{ji}\gamma_j - \sum_r \beta_r V_{ir} + \epsilon v_i \varphi, \tag{2.2.6}$$

e seja $U \subset M^n$ *um subconjunto aberto tal que* $\varphi\vartheta \neq 0$, $\tilde{v}_i := v_i - 2\nu\varphi B_i \neq 0$ *e* $\varphi V_{ir} + \beta_r v_i \neq 0$ *para quaisquer* $1 \leq i \leq n$ *e algum* $1 \leq r \leq p$. *Então* $\tilde{F}$, *definida em* U *por (2.2.3), satisfaz* $\tilde{F} = i \circ \tilde{f}$, *em que* $\tilde{f}|_U$ *é uma transformada de Ribaucour de* $f|_U$. *Além disso, o par* $(\tilde{v}, \tilde{V})$, *associado a* $\tilde{f}$, *é dado por*

$$\tilde{v}_i = v_i - 2\nu\varphi B_i, \;\; e \;\; \tilde{V}_{ir} = V_{ir} + 2\nu\beta_r B_i. \tag{2.2.7}$$

2.3 A transformação de Ribaucour para a classe $\mathcal{B}$.

Mostraremos no Capítulo 3 (Ver Proposição 3.14) que toda imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$ na classe $\mathcal{B}$ é holonômica. Quando $\epsilon = -1$, segue dos Teoremas 2.1 e 4.2 que qualquer imersão isométrica $g : M^3 \to \mathbb{H}^5$ na classe $\mathcal{B}$ é holonômica. Ainda para $\epsilon = -1$, vamos supor que este também seja o caso para $m > 4$. Desta forma, podemos utilizar a teoria de transformações de Ribaucour para subvariedades holonômicas para obter uma transformação de Ribaucour para a classe $\mathcal{B}$ e encontrar exemplos explícitos nesta classe.

Seja $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$, com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\zeta \in \Gamma(N^g M)$. Seja $\{\xi_1, \cdots, \xi_{m-2}\}$ um referencial ortonormal de $N_g M$, com

$\xi_1 := \zeta$, paralelo na conexão normal. O seguinte fato decorre imediatamente da equação de Gauss.

Lema 2.8. *A equação (2.0.1) se escreve como*

$$\epsilon v_i v_j + \sum_{r=1}^{m-2} V_{ir} V_{jr} = \epsilon c(\epsilon v_i v_j + V_{i1} V_{j1}) \quad para \quad i \neq j. \tag{2.3.1}$$

Proposição 2.9. *Seja $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$. Então, dado $C \in \mathbb{R}$, o sistema linear de EDPs*

$$\begin{cases} (i) \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = v_i \gamma_i \\ (ii) \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = h_{ji} \gamma_i, \ i \neq j, \\ (iii) \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = -\sum_{j \neq i} h_{ji} \gamma_j + (1 - C) \sum_r \beta_r V_{ir} - \epsilon(1 - C + \epsilon C c) v_i \varphi + \epsilon C c \beta_1 V_{i1}, \\ (iv) \dfrac{\partial \beta_r}{\partial u_i} = -V_{ir} \gamma_i \end{cases} \tag{2.3.2}$$

é completamente integrável e possui a integral primeira

$$\sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i^2 + (1 - C + \epsilon C c) \beta_1^2 + (1 - C) \sum_{r=2}^{m-2} \beta_r^2 + \epsilon(1 - C + \epsilon C c) \varphi^2 = K \in \mathbb{R}. \tag{2.3.3}$$

Demonstração: O sistema formado pelas equações (i), (ii) e (iv) é completamente integrável pelo Teorema 2.7. Desta forma, basta mostrar que $\dfrac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_k \partial u_i} = \dfrac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_i \partial u_k}$ para quaisquer $1 \leq i \neq k \leq m-1$. Usando (2.3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_k \partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_k} \left[-\sum_{j \neq i} h_{ji} \gamma_j + (1 - C) \sum_r \beta_r V_{ir} - (\epsilon + Cc - \epsilon C) v_i \varphi + Cc\epsilon \beta_1 V_{i1} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_k} \left(-h_{ki} \gamma_k - \sum_{k \neq j \neq i} h_{ji} \gamma_j + (1 - C) \sum_r \beta_r V_{ir} - (\epsilon + Cc - \epsilon C) v_i \varphi + Cc\epsilon \beta_1 V_{i1} \right) \\ &= -\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_k} \gamma_k - h_{ki} \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} - \sum_{k \neq j \neq i} \left(\frac{\partial h_{ji}}{\partial u_k} \gamma_j + h_{ji} \frac{\partial \gamma_j}{\partial u_k} \right) + (1 - C) \sum_r \left(\frac{\partial \beta_r}{\partial u_k} V_{ir} + \beta_r \frac{\partial V_{ir}}{\partial u_k} \right) \\ &\quad -(\epsilon + Cc - \epsilon C) \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_k} \varphi + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + Cc\epsilon \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial u_k} V_{i1} + \beta_1 \frac{\partial V_{i1}}{\partial u_k} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_k}\gamma_k - h_{ki}\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} - \sum_{k\neq j\neq i}(h_{jk}h_{ki}\gamma_j + h_{ji}h_{jk}\gamma_k) + (1-C)\sum_r(-V_{kr}V_{ir}\gamma_k + \beta_r h_{ki}V_{kr}) \\
&\quad -(\epsilon + Cc - \epsilon C)\,(h_{ki}v_k\varphi + v_iv_k\gamma_k) + Cc\epsilon\,(-V_{k1}V_{i1}\gamma_k + \beta_1 h_{ki}V_{k1}) \\
&= \left(-\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_k} - \sum_{k\neq j\neq i} h_{ji}h_{jk} - (1-C)\sum_r V_{kr}V_{ir} - (\epsilon + Cc - \epsilon C)v_iv_k - Cc\epsilon V_{k1}V_{i1}\right)\gamma_k \\
&\quad -h_{ki}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{k\neq j\neq i} h_{jk}\gamma_j - (1-C)\sum_r \beta_r V_{kr} + (\epsilon + Cc - \epsilon C)v_k\varphi - Cc\epsilon\beta_1 V_{k1}\right) \\
&= \left(-\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_k} - \sum_{k\neq j\neq i} h_{ji}h_{jk} - (1-C)\sum_r V_{kr}V_{ir} - C\sum_r V_{ir}V_{kr} - \epsilon v_iv_k\right)\gamma_k \\
&\quad -h_{ki}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{k\neq j\neq i} h_{jk}\gamma_j - (1-C)\sum_r \beta_r V_{kr} + (\epsilon + Cc - \epsilon C)v_k\varphi - Cc\epsilon\beta_1 V_{k1}\right) \\
&= \left(-\frac{\partial h_{ki}}{\partial u_k} - \sum_{k\neq j\neq i} h_{ji}h_{jk} - \sum_r V_{kr}V_{ir} - \epsilon v_iv_k\right)\gamma_k \\
&\quad -h_{ki}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{k\neq j\neq i} h_{jk}\gamma_j - (1-C)\sum_r \beta_r V_{kr} + (\epsilon + Cc - \epsilon C)v_k\varphi - Cc\epsilon\beta_1 V_{k1}\right) \\
&= \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_i}\gamma_k + h_{ki}h_{ik}\gamma_i = \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial u_i \partial u_k}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando as equações do sistema (2.3.2), mostra-se que todas as derivadas do lado esquerdo da equação (2.3.3) são identicamente nulas. ∎

Teorema 2.10. *Seja $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$, $m \geq 3$, uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\zeta \in \Gamma(N_gM)$, e (v, V) seu par associado. Se a transformada de Ribaucour de g determinada pela solução $(\varphi, \gamma, \beta) := (\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_p)$ de (2.3.2) pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a*

$$\hat{\mathcal{P}}(\zeta) = \zeta - 2\nu\beta_1\mathcal{G}, \tag{2.3.4}$$

em que $\mathcal{G} = \sum_i \gamma_i F_* X_i + \sum_r \beta_r \xi_r + \epsilon\varphi G$, $\nu^{-1} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{G}\rangle$ e as funções B_i, $1 \leq i \leq m-1$, dadas por (2.2.6) são não nulas em todos os pontos de M^{m-1}, então (φ, γ, β) satisfaz

$$\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i^2 + (1 - C + \epsilon Cc)\beta_1^2 + (1-C)\sum_{r=2}^{m-2}\beta_r^2 + \epsilon(1 - C + \epsilon Cc)\varphi^2 = 0. \tag{2.3.5}$$

Reciprocamente, se (φ, γ, β) é uma solução de (2.3.2) satisfazendo (2.3.5) em um aberto $U \subset M^{m-1}$ como no Teorema 2.7, então a transformada de Ribaucour de $g|_U$

determinada por (φ, γ, β) *pertence à classe* $\mathcal{B}$ *com respeito a* $c \in \mathbb{R}$ *e a* $\hat{\mathcal{P}}(\zeta) \in \Gamma(N^{\tilde{g}}M)$ *dado por* (2.3.4).

Demonstração: Seja $\tilde{g}$ a transformada de Ribaucour de g determinada pela solução (φ, γ, β) de (2.3.2). Seja $(\tilde{v}, \tilde{V})$ o par associado a $\tilde{g}$, dado por (2.2.7). Pelo Lema 2.8, temos que $\tilde{g}$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\hat{\mathcal{P}}(\zeta)$ se, e somente se, para $i \neq j$,

$$\epsilon \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \sum_r \tilde{V}_{ir} \tilde{V}_{jr} = c(\tilde{v}_i \tilde{v}_j + \epsilon \tilde{V}_{i1} \tilde{V}_{j1}). \tag{2.3.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \epsilon(v_i - 2\nu\varphi B_i)(v_j - 2\nu\varphi B_j) + \sum_r (V_{ir} + 2\nu\beta_r B_i)(V_{jr} + 2\nu\beta_r B_j) \\
= \;& c[(v_i - 2\nu\varphi B_i)(v_j - 2\nu\varphi B_j) + \epsilon(V_{i1} + 2\nu\beta_1 B_i)(V_{j1} + 2\nu\beta_1 B_j)] \\
\Leftrightarrow \;& \epsilon(-2\nu v_i \varphi B_j - 2\nu v_j \varphi B_i + 4\nu^2\varphi^2 B_i B_j) + \sum_r (2\nu\beta_r B_j V_{ir} + 2\nu\beta_r B_i V_{jr} + 4\nu^2\beta_r^2 B_i B_j) \\
= \;& c(-2\nu v_i \varphi B_j - 2\nu v_j \varphi B_i + 4\nu^2\varphi^2 B_i B_j + 2\epsilon\nu\beta_1 B_j V_{i1} + 2\epsilon\nu\beta_1 B_i V_{j1} + 4\epsilon\nu^2\beta_1^2 B_i B_j) \\
\Leftrightarrow \;& 2\nu B_j \left[\sum_r \beta_r V_{ir} + (c-\epsilon) v_i \varphi - c\epsilon\beta_1 V_{i1}\right] + 2\nu B_i \left[\sum_r \beta_r V_{jr} + (c-\epsilon) v_j \varphi - c\epsilon\beta_1 V_{j1}\right] \\
+ \;& 4\nu^2 B_i B_j \left[\sum_r \beta_r^2 - (c-\epsilon)\varphi^2 - c\epsilon\beta_1^2\right] = 0 \\
\Leftrightarrow \;& (A_i + \nu\rho B_i) B_j + (A_j + \nu\rho B_j) B_i = 0
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

em que

$$A_i = \sum_r \beta_r V_{ir} + (c-\epsilon) v_i \varphi - \epsilon c \beta_1 V_{i1} \quad \text{e} \quad \rho = \sum_r \beta_r^2 - (c-\epsilon)\varphi^2 - \epsilon c \beta_1^2.$$

Por outro lado, é fácil ver que $B_i = -CA_i$, para $1 \leq i \leq m-1$. Substituindo em (2.3.7) obtemos

$$(1 - \nu\rho C) A_i A_j = 0, \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq m-1. \tag{2.3.8}$$

Como B_i, $1 \leq i \leq m-1$, é não nulo em todos os pontos de M^{m-1}, segue de (2.3.8) que

$$\nu^{-1} = C\rho \tag{2.3.9}$$

que, por sua vez, é equivalente a (2.3.5).

Reciprocamente, se (φ, γ, β) é uma solução de (2.3.2) satisfazendo (2.3.5) em um aberto $U \subset M^{m-1}$ como no Teorema 2.7 e $\tilde{g}|_U$ é a transformada de Ribaucour de $g|_U$ determinada por (φ, γ, β), então vale (2.3.9) que implica (2.3.7) e, portanto, (2.3.6) é satisfeita, logo $\tilde{g}|_U$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c \in \mathbb{R}$ e a $\hat{\mathcal{P}}(\zeta) \in \Gamma(N^{\tilde{g}}M)$ dado por (2.3.4). ∎

Observação 2.11. Nas hipóteses do Teorema 2.10, se $m \geq 4$ e (φ, γ, β) satisfaz as equações (i), (ii) e (iv) do sistema (2.3.2), então a equação (iii) é automaticamente satisfeita. De fato, nas notações da demostração do Teorema 2.10, como $B_i \neq 0$, $\forall 1 \leq i \leq m-1$, segue de (2.3.7) que

$$A_i + \nu\rho B_i = 0, \quad \text{para} \;\; 1 \leq i \leq m-1. \tag{2.3.10}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial u_j} &= \sum_r \frac{\partial \beta_r}{\partial u_j} V_{ir} + \sum_r \beta_r \frac{\partial V_{ir}}{\partial u_j} + (c-\epsilon)\left[\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\varphi + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\right] - \epsilon c \frac{\partial \beta_1}{\partial u_j} V_{i1} - \epsilon c \beta_1 \frac{\partial V_{i1}}{\partial u_j} \\
&= -\sum_r V_{jr} V_{ir} \gamma_j + \sum_r \beta_r V_{jr} h_{ji} + (c-\epsilon)(h_{ji} v_j \varphi + v_i v_j \gamma_j) + \epsilon c V_{j1} V_{i1} \gamma_j - \epsilon c \beta_1 h_{ji} V_{j1} \\
&= [-\epsilon v_i v_j - \sum_r V_{jr} V_{ir} + c v_i v_j + \epsilon c V_{j1} V_{i1})]\gamma_j + h_{ji}[\sum_r \beta_r V_{jr} + (c-\epsilon) v_j \varphi - \epsilon c \beta_1 V_{j1})] \\
&\overset{(2.3.1)}{=} h_{ji} A_j
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_i}{\partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{l \neq i} h_{li}\gamma_l - \sum_r \beta_r V_{ir} + v_i \varphi\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_j}\right) + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j}\gamma_j + h_{ji}\frac{\partial \gamma_j}{\partial u_j} + \sum_{l \neq i,j} h_{li}\frac{\partial \gamma_l}{\partial u_j} + \sum_{l \neq i,j} \frac{\partial h_{li}}{\partial u_j}\gamma_l - \sum_r \frac{\partial \beta_r}{\partial u_j} V_{ir} \\
&\quad - \sum_r \beta_r \frac{\partial V_{ir}}{\partial u_j} + \varphi \frac{\partial v_i}{\partial v_j} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \\
&= \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i}\gamma_j + h_{ij}h_{ji}\gamma_i + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j}\gamma_j + h_{ji}\frac{\partial \gamma_j}{\partial u_j} + \sum_{l \neq i,j} h_{li}h_{lj}\gamma_j + \sum_{l \neq i,j} h_{lj}h_{ji}\gamma_l \\
&\quad + \sum_r V_{jr}V_{ir}\gamma_j - \sum_r \beta_r h_{ji} V_{jr} + h_{ji} v_j \varphi + v_i v_j \gamma_j \\
&= \gamma_j\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{l \neq i,j} h_{li}h_{lj} + \sum_r V_{jr}V_{ir} + v_i v_j\right) \\
&\quad + h_{ji}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial u_j} + \sum_{l \neq j} h_{lj}\gamma_l - \sum_r \beta_r V_{jr} + \varphi v_j\right) = h_{ji} B_j
\end{aligned}$$

para $i \neq j$. Usando estas equações, diferenciando (2.3.10) obtemos que $\dfrac{\partial(\nu\rho)}{\partial u_i} = 0$, logo existe $C \neq 0$ tal que $\nu^{-1} = C\rho$. Portanto $B_i = -CA_i$ para $1 \leq i \leq m-1$, e a equação (iii) segue. ∎

2.4 Exemplos

Nesta seção obtemos uma família de exemplos explícitos de imersões isométricas $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ holonômicas na classe $\mathcal{B}$. Tal família será usada (Ver Seção 3.6) para produzir exemplos explícitos de imersões isométricas $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{2m-1}$ com $\epsilon c \in (0,1)$. Em particular, para $\epsilon = 1$, tais imersões isométricas têm a propriedade de que $\tilde{f} = i \circ f$, em que $i \colon \mathbb{S}^{2m-3} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2m-1}$ é a inclusão canônica, não tem pontos fracamente umbílicos.

Seja $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ um aberto simplesmente conexo com coordenadas $(u_1, \cdots, u_{m-1})$ e (v, h, V) a solução trivial de (2.2.2) dada por $\hat{V} = I_{(m-1)\times(m-1)}$ e $h = (h_{ij}) = 0$, em que $\hat{V} \in M_{(m-1)\times(m-1)}(\mathbb{R})$ é definida por

$$\hat{V}_{ir} = V_{ir}, \quad \text{para} \quad 1 \leq r \leq m-2, \quad \text{e} \quad \hat{V}_{i(m-1)} = v_i$$

e $I_{(m-1)\times(m-1)}$ denota a matriz identidade de ordem $m-1$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial G}{\partial u_i} = \delta_{i(m-1)} X_{m-1} \\ (ii)\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_j} = 0, \ \forall i \neq j \\ (iii)\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = \xi_i, \ \text{para } i \neq m-1, \ \dfrac{\partial X_{m-1}}{\partial u_{m-1}} = -\epsilon G \\ (iv)\ \dfrac{\partial \xi_r}{\partial u_i} = -\delta_{ir} X_i, \ 1 \leq r \leq m-2 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

com as condições iniciais $G(0) = -\epsilon E_1$, $X_i(0) = E_{2i+1}$, para $i \neq m-1$, $X_{m-1}(0) = E_2$ e $\xi_r(0) = E_{2r+2}$, em que $\{E_1, \cdots, E_{2m-2}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{E}^{2m-2}$, obtemos

$$G = -\epsilon C_\epsilon(u_{m-1})\ E_1 + S_\epsilon(u_{m-1})\ E_2$$

$$X_i = \cos u_i\ E_{2i+1} + \operatorname{sen} u_i\ E_{2i+2}, \ \text{se } i \neq m-1, \ X_{m-1} = S_\epsilon(u_{m-1})\ E_1 + C_\epsilon(u_{m-1})\ E_2,$$

$$\xi_r = -\operatorname{sen} u_r\ E_{2r+1} + \cos u_r\ E_{2r+2}, \ 1 \leq r \leq m-2,$$

em que

$$C_\epsilon(u_{m-1}) = \begin{cases} \cos u_{m-1}, \ \text{se } \epsilon = 1 \\ \cosh u_{m-1}, \ \text{se } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\epsilon(u_{m-1}) = \begin{cases} \text{sen}\, u_{m-1}, \ \text{se } \epsilon = 1 \\ \text{senh}\, u_{m-1}, \ \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}.$$

Embora G não seja uma imersão, a transformação de Ribaucour ainda pode ser aplicada.

Considere uma solução $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{m-1}, \beta_1, \cdots, \beta_{m-2}, \varphi)$ do sistema linear de EDP's

$$\begin{cases} (i) \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \delta_{i(m-1)}\gamma_{m-1}, \\ (ii) \ \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = (1 - C + \epsilon Cc)\beta_1, \\ (iii) \ \dfrac{\partial \gamma_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}(1 - C)\beta_i, \ 2 \leq i \leq m-2, \\ (iv) \ \dfrac{\partial \gamma_{m-1}}{\partial u_{m-1}} = -\epsilon(1 - C + \epsilon Cc)\varphi, \\ (v) \ \dfrac{\partial \beta_r}{\partial u_i} = -\delta_{ir}\gamma_i, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

satisfazendo $\epsilon c \in (0,1)$ e

$$\sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i^2 + (1 - C + \epsilon Cc)\beta_1^2 + (1-C)\sum_{r=2}^{m-2} \beta_r^2 + \epsilon(1 - C + \epsilon Cc)\varphi^2 = 0. \tag{2.4.3}$$

Defina $\tilde{G} : U \to \mathbb{E}^{2m-2}$, $\tilde{G} = (\tilde{G}_1, \cdots, \tilde{G}_{2m-2})$, por

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= -\epsilon C_\epsilon(u_{m-1}) - 2\nu\varphi(\gamma_{m-1}S_\epsilon(u_{m-1}) - \varphi C_\epsilon(u_{m-1})) \\ \tilde{G}_2 &= S_\epsilon(u_{m-1}) - 2\nu\varphi(\gamma_{m-1}C_\epsilon(u_{m-1}) + \epsilon\varphi S_\epsilon(u_{m-1})) \\ \tilde{G}_3 &= -2\nu\varphi(\gamma_1 \cos\ u_1 - \beta_1 \,\text{sen}\ u_1) \\ \tilde{G}_4 &= -2\nu\varphi(\gamma_1 \,\text{sen}\ u_1 + \beta_1 \cos\ u_1) \\ &\vdots \\ \tilde{G}_{2m-3} &= -2\nu\varphi(\gamma_{m-2} \cos\ u_{m-2} - \beta_{m-2} \,\text{sen}\ u_{m-2}) \\ \tilde{G}_{2m-2} &= -2\nu\varphi(\gamma_{m-2} \,\text{sen}\ u_{m-2} + \beta_{m-2} \cos\ u_{m-2}) \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

em que $\nu := \left(\sum_{i=1}^{m-1} {\gamma_i}^2 + \sum_{r=1}^{m-2} {\beta_r}^2 + \epsilon\varphi^2\right)^{-1}$.

Seja $i : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \to \mathbb{E}^{2m-2}$ a inclusão canônica. Segue do Teorema 2.10 que $\tilde{G} = i \circ \tilde{g}$, em que $\tilde{g} : U \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ é uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ em relação a c

e a $\tilde{\zeta} = \hat{\mathcal{P}}(\xi_1) = (\tilde{\zeta}_1, \cdots, \tilde{\zeta}_{2m-2})$ dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_1 &= -2\nu\beta_1(\gamma_{m-1}S_\epsilon(u_{m-1}) - \varphi C_\epsilon(u_{m-1})),\\
\tilde{\zeta}_2 &= -2\nu\beta_1(\gamma_{m-1}C_\epsilon(u_{m-1}) + \epsilon\varphi S_\epsilon(u_{m-1})),\\
\tilde{\zeta}_3 &= -\operatorname{sen}\ u_1 - 2\nu\beta_1(\gamma_1 \cos\ u_1 - \beta_1 \operatorname{sen}\ u_1),\\
\tilde{\zeta}_4 &= \cos\ u_1 - 2\nu\beta_1(\gamma_1 \operatorname{sen} u_1 + \beta_1 \cos u_1),\\
&\vdots\\
\tilde{\zeta}_{2m-3} &= -2\nu\beta_1(\gamma_{m-2}\cos\ u_{m-2} - \beta_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2})\\
\tilde{\zeta}_{2m-2} &= -2\nu\beta_1(\gamma_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2} + \beta_{m-2}\cos\ u_{m-2}),
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Vamos exibir a seguir exemplos explícitos, encontrando soluções do sistema (2.4.2) satisfazendo (2.4.3), em dois casos particulares. Os demais casos são análogos.

Exemplo 2.12. Suponha que $\epsilon = 1$, $c = 1/2$ e $C > 2$: Defina $-a^2 := 1 - C/2$ e $-b^2 := 1 - C$. Segue das equações (i) e (iv) de (2.4.2) que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_{m-1}^2} = a^2\varphi$ e $\dfrac{\partial^2\gamma_{m-1}}{\partial u_{m-1}^2} = a^2\gamma_{m-1}$. Portanto,

$$\varphi(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \operatorname{senh} au_{m-1} \text{ e } \gamma_{m-1}(u_1, \cdots, u_{m-1}) = a\cosh au_{m-1}.$$

Segue das equações (ii), (iii) e (v) do sistema (2.4.2) que

$$\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u_1^2} = a^2\gamma_1 \text{ e } \frac{\partial^2\gamma_i}{\partial u_i^2} = b^2\gamma_i,\ 2 \leq i \leq m-2.$$

Daí,

$$\gamma_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = K_{11}e^{-au_1} + K_{12}e^{au_1} \tag{2.4.6}$$

e

$$\gamma_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = K_{i1}e^{-bu_i} + K_{i2}e^{bu_i},\ 2 \leq i \leq m-2. \tag{2.4.7}$$

Finalmente, segue da equação (v) de (2.4.2) que

$$\beta_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \frac{K_{11}}{a}e^{-au_1} - \frac{K_{12}}{a}e^{au_1} \tag{2.4.8}$$

e

$$\beta_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \frac{K_{i1}}{b}e^{-bu_i} - \frac{K_{i2}}{b}e^{bu_i},\ 2 \leq i \leq m-2 \tag{2.4.9}$$

É fácil ver que essa solução satisfaz as condições do aberto $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ do Teorema 2.7. Além disso, esta solução satisfaz a integral primeira (2.4.3) se, e somente se,

$$\begin{aligned} &(K_{11}e^{-au_1} + K_{12}e^{au_1})^2 + \sum_{i=2}^{m-2}(K_{i1}e^{-bu_2} + K_{i2}e^{bu_2})^2 + a^2\cosh^2 au_{m-1} \\ - \quad & a^2\left(\frac{K_{11}}{a}e^{-au_1} - \frac{K_{12}}{a}e^{au_1}\right)^2 - b^2\sum_{i=2}^{m-2}\left(\frac{K_{i1}}{b}e^{-bu_i} - \frac{K_{i2}}{b}e^{bu_i}\right)^2 \\ &-a^2\operatorname{senh}^2 au_{m-1} = 0 \iff \sum_{i=1}^{m-2} 4K_{1i}K_{2i} + a^2 = 0. \end{aligned}$$

Para tanto, basta tomar, $K_{i1} = -\dfrac{\lambda_i a}{2}$ e $K_{i2} = \dfrac{\lambda_i a}{2}$, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\lambda_i^2 = 1$. Substituindo esses valores nas expressões (2.4.6) − (2.4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma_1(u_1,\cdots,u_{m-1}) &= \lambda_1 a\frac{e^{au_1} - e^{au_1}}{2} = \lambda_1 a\operatorname{senh} au_1, \\ \gamma_i(u_1,\cdots,u_{m-1}) &= \lambda_i a\frac{e^{bu_i} - e^{bu_i}}{2} = \lambda_i a\operatorname{senh} bu_i,\ 2 \le i \le m-2, \\ \beta_1(u_1,\cdots,u_{m-1}) &= -\lambda_1\frac{e^{-au_1} + e^{au_1}}{2} = -\lambda_1\cosh au_1, \end{aligned}$$

e

$$\beta_i(u_1,\cdots,u_{m-1}) = -\frac{\lambda_i a}{b}\frac{e^{-bu_i} + e^{bu_i}}{2} = -\lambda_i ab^{-1}\cosh bu_i\ 2 \le i \le m-2.$$

Substituindo em (2.4.4), temos que $\tilde{G} := (\tilde{G}_1,\cdots,\tilde{G}_{2m-2})$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= -\cos u_{m-1} - 2\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\cosh au_{m-1}\operatorname{sen}\ u_{m-1} - \operatorname{senh} au_{m-1}\cos\ u_{m-1}) \\ \tilde{G}_2 &= \operatorname{sen}\ u_{m-1} - 2\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\cosh au_{m-1}\cos\ u_{m-1} + \operatorname{senh} au_{m-1}\operatorname{sen}\ u_{m-1}) \\ \tilde{G}_3 &= -2\lambda_1\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\operatorname{senh} au_1\cos\ u_1 + \cosh au_1\operatorname{sen}\ u_1) \\ \tilde{G}_4 &= -2\lambda_1\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\operatorname{senh} au_1\operatorname{sen}\ u_1 - \cosh au_1\cos\ u_1) \\ &\vdots \\ \tilde{G}_{2m-3} &= -2\lambda_{m-2}\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\operatorname{senh} bu_{m-2}\cos\ u_{m-2} + ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2}) \\ \tilde{G}_{2m-2} &= -2\lambda_{m-2}\nu\operatorname{senh} au_{m-1}(a\operatorname{senh} bu_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2} - ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\cos\ u_{m-2}). \end{aligned}$$

A imersão $\tilde{g}$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c = 1/2$ e ao campo $\hat{\mathcal{P}}(\zeta) = (\tilde{\zeta}_1,\cdots,\tilde{\zeta}_{2m-2})$

dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_1 &= 2\nu\lambda_1 \cosh au_1(a\cosh au_{m-1} \,\text{sen}\; u_{m-1} - \text{senh}\, au_{m-1} \cos\; u_{m-1}),\\
\tilde{\zeta}_2 &= 2\nu\lambda_1 \cosh au_1(a\cosh au_{m-1} \cos\; u_{m-1} + \text{senh}\, au_{m-1} \,\text{sen}\; u_{m-1}),\\
\tilde{\zeta}_3 &= -\,\text{sen}\; u_1 + 2\nu\lambda_1^2 \cosh au_1(a\,\text{senh}\, au_1 \cos\; u_1 + \cosh au_1 \,\text{sen}\; u_1),\\
\tilde{\zeta}_4 &= \cos\; u_1 + 2\nu\lambda_1^2 \cosh au_1(a\,\text{senh}\, au_1 \,\text{sen}\; u_1 - \cosh au_1 \cos\; u_1),\\
&\vdots\\
\tilde{\zeta}_{2m-3} &= 2\nu\lambda_1\lambda_{m-2} \cosh au_1(a\,\text{senh}\, bu_{m-2} \cos\; u_{m-2} + ab^{-1} \cosh bu_{m-2} \,\text{sen}\; u_{m-2})\\
\tilde{\zeta}_{2m-2} &= 2\nu\lambda_1\lambda_{m-2} \cosh au_1(a\,\text{senh}\, bu_{m-2} \,\text{sen}\; u_{m-2} - ab^{-1} \cosh bu_{m-2} \cos\; u_{m-2}),
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\nu := &\left(\lambda_1^2 a^2 \,\text{senh}^2\, au_1 + \sum_{i=2}^{m-2} \lambda_i^2 a^2 \,\text{senh}^2\, bu_i + a^2 \cosh^2 au_{m-1} + \lambda_1^2 \cosh^2 au_1\right.\\
&\left. + \sum_{r=2}^{m-2} \lambda_i^2 a^2 b^{-2} \cosh^2 bu_i + \text{senh}^2\, au_{m-1}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.13. Suponha que $\epsilon = -1$, $c = -1/2$ e $C > 2$: Sejam $-a^2 := 1 - C/2$ e $-b^2 = 1 - C$. Segue das equações (i) e (iv) de (2.4.2) que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_{m-1}^2} = -a^2\varphi$ e $\dfrac{\partial^2\gamma_{m-1}}{\partial u_{m-1}^2} = -a^2\gamma_{m-1}$, donde

$$\varphi(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \text{sen}\, au_{m-1} \text{ e } \gamma_{m-1}(u_1, \cdots, u_{m-1}) = a\cos au_{m-1}.$$

Segue das equações (ii) e (iii) de (2.4.2) que

$$\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u_1^2} = a^2\gamma_1 \text{ e } \frac{\partial^2\gamma_i}{\partial u_i^2} = b^2\gamma_i,\ 2 \le i \le m-2.$$

Daí,

$$\gamma_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = K_{11}e^{-au_1} + K_{12}e^{au_1} \tag{2.4.10}$$

e

$$\gamma_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = K_{i1}e^{-bu_i} + K_{i2}e^{bu_i},\ 2 \le i \le m-2. \tag{2.4.11}$$

Finalmente, segue da equação (v) de (2.4.2) que

$$\beta_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = a^{-1}(K_{11}e^{-au_1} - K_{12}e^{au_1}) \tag{2.4.12}$$

e

$$\beta_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = b^{-1}(K_{i1}e^{-bu_i} - K_{i2}e^{bu_i}),\ 2 \leq i \leq m-2. \tag{2.4.13}$$

É fácil ver que essa solução satisfaz as condições do aberto $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ do Teorema 2.7. Além disso, esta solução satisfaz a integral primeira (2.4.3) se, e somente se,

$$\begin{aligned}
&(K_{11}e^{-au_1} + K_{12}e^{au_1})^2 + \sum_{i=2}^{m-2}(K_{i1}e^{-bu_i} + K_{i2}e^{bu_i})^2 + a^2\cos^2 au_{m-1} \\
&-a^2\left[a^{-1}(K_{11}e^{-au_1} - K_{12}e^{au_1})\right]^2 - b^2\sum_{i=2}^{m-2}\left[b^{-1}(K_{i1}e^{-bu_i} - K_{i2}e^{bu_i})\right]^2 \\
&+a^2\operatorname{sen}^2 au_{m-1} = 0 \Longleftrightarrow 4\sum_{i=1}^{m-2}K_{i1}K_{i2} + a^2 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, basta tomar $K_{i1} = -\dfrac{\lambda_i a}{2}$ e $K_{i2} = \dfrac{\lambda_i a}{2}$, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\lambda_i^2 = 1$. Substituindo esses valores nas expressões $(2.4.10) - (2.4.13)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) &= -\lambda_1 a\frac{e^{-au_1} - e^{au_1}}{2} = \lambda_1 a\operatorname{senh} au_1, \\
\gamma_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) &= -\lambda_i a\frac{e^{-bu_i} - e^{bu_i}}{2} = \lambda_i a\operatorname{senh} bu_i,\ 2 \leq i \leq m-2, \\
\beta_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) &= -\lambda_1\frac{e^{-au_1} + e^{au_1}}{2} = -\lambda_1\cosh au_1,
\end{aligned}$$

e

$$\beta_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = -\lambda_i ab^{-1}\frac{e^{-bu_i} + e^{bu_i}}{2} = -\lambda_i ab^{-1}\cosh bu_i,\ 2 \leq i \leq m-2.$$

Substituindo em (2.4.4), temos que $\tilde{G} := (\tilde{G}_1, \cdots, \tilde{G}_{2m-2})$ é dada por

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{G}_1 & = & \cosh\ u_{m-1} - 2\nu \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\cos au_{m-1}\,\mathrm{senh}\ u_{m-1} - \mathrm{sen}\, au_{m-1}\cosh\ u_{m-1}) \\
\tilde{G}_2 & = & \mathrm{senh}\ u_{m-1} - 2\nu \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\cos au_{m-1}\cosh\ u_{m-1} - \mathrm{sen}\, au_{m-1}\,\mathrm{senh}\ u_{m-1}) \\
\tilde{G}_3 & = & -2\nu\lambda_1 \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\,\mathrm{senh}\, au_1 \cos\ u_1 + \cosh au_1 \,\mathrm{sen}\ u_1) \\
\tilde{G}_4 & = & -2\nu\lambda_1 \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\,\mathrm{senh}\, au_1 \,\mathrm{sen}\ u_1 - \cosh au_1 \cos\ u_1) \\
 & \vdots & \\
\tilde{G}_{2m-3} & = & -2\nu\lambda_{m-2} \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\,\mathrm{senh}\, bu_{m-2}\cos\ u_{m-2} + ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\,\mathrm{sen}\ u_{m-2}) \\
\tilde{G}_{2m-2} & = & -2\nu\lambda_{m-2} \,\mathrm{sen}\, au_{m-1}(a\,\mathrm{senh}\, bu_{m-2}\,\mathrm{sen}\ u_{m-2} - ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\cos\ u_{m-2}).
\end{array}
$$

A imersão $\tilde{g}$ pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a $c = -1/2$ e ao campo $\hat{\mathcal{P}}(\zeta) = (\tilde{\zeta}_1, \cdots, \tilde{\zeta}_{2m-2})$ dado por

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{\zeta}_1 & = & 2\nu\lambda_1\cosh au_1(a\cos au_{m-1}\,\mathrm{senh}\ u_{m-1} - \mathrm{sen}\, au_{m-1}\cosh\ u_{m-1}), \\
\tilde{\zeta}_2 & = & 2\nu\lambda_1\cosh au_1(a\cos au_{m-1}\cosh\ u_{m-1} - \mathrm{sen}\, au_{m-1}\,\mathrm{senh}\ u_{m-1}), \\
\tilde{\zeta}_3 & = & -\,\mathrm{sen}\ u_1 + 2\nu\lambda_1^2\cosh au_1(a\,\mathrm{senh}\, au_1\cos\ u_1 + \cosh au_1\,\mathrm{sen}\ u_1), \\
\tilde{\zeta}_4 & = & \cos\ u_1 + 2\nu\lambda_1^2\cosh au_1(a\,\mathrm{senh}\, au_1\,\mathrm{sen}\, u_1 - \cosh au_1\cos u_1), \\
 & \vdots & \\
\tilde{\zeta}_{2m-3} & = & 2\nu\lambda_1\lambda_{m-2}\cosh au_1(a\,\mathrm{senh}\, bu_{m-2}\cos\ u_{m-2} + ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\,\mathrm{sen}\ u_{m-2}) \\
\tilde{\zeta}_{2m-2} & = & 2\nu\lambda_1\lambda_{m-2}\cosh au_1(a\,\mathrm{senh}\, bu_{m-2}\,\mathrm{sen}\ u_{m-2} - ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\cos\ u_{m-2}),
\end{array}
$$

em que

$$
\begin{array}{rl}
\nu := & \Bigg(\lambda_1^2 a^2\,\mathrm{senh}^2\, au_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{m-2}\lambda_i^2 a^2\,\mathrm{senh}^2\, bu_i + a^2\cos^2 au_{m-1} + \lambda_1^2\cosh^2 au_1 \\
 & + \displaystyle\sum_{r=2}^{m-2}\lambda_i^2 a^2 b^{-2}\cosh^2 bu_i - \mathrm{sen}^2\, au_{m-1}\Bigg)^{-1}
\end{array}
$$

Capítulo 3

Imersões isométricas de formas espaciais em $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$.

Sejam $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\zeta \in \Gamma(N^g M)$ um campo unitário paralelo na conexão normal. Sejam $j : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R}$ e $i : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{2m-1}$ as inclusões canônicas e $\tilde{j} := i \circ j$. Considere a família de imersões isométricas $g_s : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$, paralelas a g na direção de ζ, definidas por

$$\tilde{g}_s(x) := (\tilde{j} \circ g_s)(x) = C_\epsilon(s)\tilde{g}(x) + S_\epsilon(s)\tilde{\zeta}, \tag{3.0.1}$$

em que $\tilde{g} := \tilde{j} \circ g$, $\tilde{\zeta} := \tilde{j}_* \zeta$,

$$C_\epsilon(s) = \begin{cases} \cos s, & \text{se } \epsilon = 1 \\ \cosh s, & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\epsilon(s) = \begin{cases} \operatorname{sen} s, & \text{se } \epsilon = 1 \\ \operatorname{senh} s, & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}.$$

Defina

$$f : M^{m-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R}$$

por

$$\tilde{f}(x,s) := (i \circ f)(x,s) = \tilde{g}_s(x) + Bsi_* \frac{\partial}{\partial t}, \ B > 0, \tag{3.0.2}$$

e seja $M^m \subset M^{m-1} \times \mathbb{R}$ o subconjunto dos pontos regulares de f. Na Seção 3.2 mostraremos o seguinte fato.

Proposição 3.1. *A métrica induzida por f em M^n tem curvatura seccional constante c*

se, e somente se, $c = \dfrac{\epsilon}{1+B^2}$ *e* g *pertence à classe* $\mathcal{B}$ *com respeito a* c *e a* ζ.

Podemos agora enunciar os principais resultados deste capítulo.

Teorema 3.2. *Seja* $f : M_c^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ *uma imersão isométrica com* $m \geq 3$, $p \leq m-3$ *e* $c \leq 1$. *Então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

(*a*) $c \in [0, 1)$ *e* $p = m - 3$;

(*b*) $c = 1$.

Além disso,

(*i*) *se* $c = 0$, *então* f *é um cilindro sobre uma imersão isométrica* $g : N_0^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$.

(*ii*) *se* $c \in (0, 1)$, *então* f *é dada por (3.0.2), com* $c = \dfrac{1}{1+B^2}$, *em termos de uma imersão isométrica* $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ *pertencente à classe* $\mathcal{B}$ *com respeito a* c *e ao campo* ζ;

(*iii*) *se* $c = 1$, *então* $f(M_1^m)$ *está contido em uma fatia* $\mathbb{S}^{m+p} \times \{t\}$ *de* $\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$.

Em particular, se M_c^n *é completa, então ou* $c = 0$ *e vale a conclusão em* (*i*) *com* N_0^{m-1} *completa, ou* $c = 1$ *e vale a conclusão em* (*iii*) *com* $M_1^m = \mathbb{S}^m$ *e* $f \colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ *totalmente geodésica.*

Diz-se que um ponto $x \in M_c^m$ é *fracamente umbílico* para uma imersão isométrica $\tilde{f} : M_c^m \to \mathbb{E}^N$ se existe $\delta \in N_x^{\tilde{f}}M$, $\langle \delta, \delta \rangle = \mathrm{sgn}(c) := c/|c|$, tal que

$$\langle \tilde{\alpha}(\cdot, \cdot), \delta \rangle = \mathrm{sgn}(c)\sqrt{|c|}\langle \cdot, \cdot \rangle, \tag{3.0.3}$$

em que $\tilde{\alpha}$ é a segunda forma fundamental de $\tilde{f}$ em x. A imersão $\tilde{f}$ é fracamente umbílica se todos os pontos $x \in M_c^m$ são fracamente umbílicos para $\tilde{f}$.

No caso $\epsilon = -1$, obtivemos o seguinte resultado parcial.

Teorema 3.3. *Seja* $f : M_c^m \to \mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R}$ *uma imersão isométrica com* $m \geq 3$, $p \leq m-3$ *e* $c < 0$. *Então* $c \geq -1$. *Além disso:*
(*i*) *se* $c = -1$, *então* $f(M_{-1}^m)$ *está contida em uma fatia* $\mathbb{H}^{m+p} \times \{t\}$ *de* $\mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R}$.;
(*ii*) *se* $c \in (-1, 0)$ *e* $\tilde{f} := i \circ f$ *não possui pontos fracamente umbílicos, em que* i : $\mathbb{H}^{m+p} \times \mathbb{R} \to \mathbb{L}^{m+p+2}$ *é a inclusão canônica, então* $p = m - 3$ *e* f *é dada por (3.0.2), com*

$c = \dfrac{-1}{1+B^2}$, *em termos de uma imersão isométrica* $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ *pertencente à classe* $\mathcal{B}$ *com respeito a* c *e ao campo* ζ.

A seguinte proposição trata dos casos omissos nos Teoremas 3.2 e 3.3.

Proposição 3.4. *Seja* $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $m \geq 3$, $p \leq m-3$, *uma imersão isométrica. Se* $\epsilon = 1$, *suponha que* $c > 1$. *Se* $\epsilon = -1$, *suponha que* $c \in (-1, 0)$ *e que* $\tilde{f} := i \circ f$ *seja fracamente umbílica, em que* $i : \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{m+p+2}$ *é a inclusão canônica. Então existem um mergulho isométrico* $H : \mathbb{E}^{m+1} \to \mathbb{E}^{m+p+2}$, *uma inclusão umbílica* $i : \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{m+p+2}$ *e uma isometria* $\Psi : \bar{M}^m := H(\mathbb{E}^{m+1}) \cap i(\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}) \to M_c^m$ *tais que* $f \circ \Psi = i^{-1}|_{\bar{M}}$.

Geometricamente, a proposição acima afirma que toda subvariedade de dimensão $m \geq 3$ e curvatura constante $c > 1$ de $\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$, $p \leq m-3$, por exemplo, é a interseção de $\mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$ com uma subvariedade de curvatura zero e dimensão $m+1$ de $\mathbb{R}^{m+p+2}$. No entanto, parece um problema difícil determinar em que condições uma tal interseção tem curvatura constante.

Exemplos de imersões isométricas nas condições da Proposição 3.4 são subvariedades de rotação, as quais são classificadas no seguinte:

Teorema 3.5. *Seja* $f : M^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ *uma subvariedade de rotação com curvatura seccional constante* c *e dimensão* $m \geq 3$. *Então* $c \geq \epsilon$. *Além disso:*

(i) *se* $\epsilon = 1$, *então* f *é parametrizada por* (1.1.30), *com* $\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen}(\sqrt{c}s)$. *Ademais,* $c = 1$, *se, e somente se,* $h(s)$, *na parametrização acima, é constante.*

(ii) *se* $\epsilon = -1$ *e* $c \in (-1, 0)$, *então uma das possibilidades ocorre:*

(a) f *é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por* (1.1.31) *com* $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{senh}(\sqrt{-c}s)$;

(b) f *é uma subvariedade de rotação do tipo hiperbólico que pode ser parametrizada por* (1.1.31) *com* $\gamma_0 = \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \cosh(\sqrt{-c}s)$;

(c) f *é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico que pode ser parametrizada por* (1.1.34) *com* $\gamma_0 = exp(\sqrt{-c}s)$.

Outrossim, $c = -1$ *se, e somente se,* $h(s)$, *nas parametrizações acima, é constante.*

(iii) *se* $\epsilon = -1$ *e* $c = 0$, *então uma das possibilidades ocorre:*

(a) f *é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por* (1.1.31) *com* $\gamma_1 = \pm s$;

(b) f é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico que pode ser parametrizada por (1.1.34) *com* $\gamma_0 = k$, k *constante.*

(iv) se $\epsilon = -1$ *e* $c > 0$, *então* f *é uma subvariedade de rotação do tipo esférico que pode ser parametrizada por* (1.1.31) *com* $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s)$.

3.1 Resultados básicos

Nesta seção demonstraremos alguns resultados básicos que serão utilizados nas próximas seções.

Teorema 3.6. *Seja* $\tilde{f} : M_c^m \to \mathbb{E}^{m+p}$ *uma imersão isométrica com* $m \geq 3$ *e* $p \leq m-1$. *Suponha que* $c \neq 0$ *se* $\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{R}^{m+p}$, *e que* $c < 0$ *se* $\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{L}^{m+p}$. *Então valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $p < m-1$, *então* $\tilde{f}$ *é fracamente umbílica. Além disso, se* $\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{R}^{m+p}$ *então* $c > 0$;

(ii) Se $p = m-1$ *e* $x \in M_c^m$ *não é fracamente umbílico para* $\tilde{f}$, *então a segunda forma fundamental* $\tilde{\alpha}$ *de* $\tilde{f}$ *é ortogonalmente diagonalizável em* x. *Em particular,* $\tilde{f}$ *possui fibrado normal plano em* x.

Demonstração: Temos que $\mathbb{R}^{m+p}$ admite uma inclusão umbílica i no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{m+p+1}(c)$ ou na esfera Lorentziana $\mathbb{S}_1^{n+p+1}(c)$ com curvatura seccional constante c, conforme seja $c < 0$ ou $c > 0$, respectivamente, cuja segunda forma fundamental α^i é dada por

$$\alpha^i(X,Y) = \sqrt{|c|}\langle X, Y\rangle \eta,$$

em que η é um dos campos normais a i tais que $\langle \eta, \eta \rangle = -sgn(c)$. Analogamente, para $c < 0$ o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{m+p}$ admite uma inclusão umbílica em $\mathbb{H}_1^{m+p+1}(c)$.

Então, a segunda forma fundamental

$$\hat{\alpha} = \tilde{f}^*\alpha^i + i_*\tilde{\alpha} \tag{3.1.1}$$

de $\hat{f} = i \circ \tilde{f}$, em qualquer $x \in M_c^m$, é uma forma bilinear plana com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ do espaço normal a $\hat{f}$. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo definido se $c < 0$ e

$\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{R}^{m+p}$, e Lorentziano se $c > 0$ e $\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{R}^{m+p}$ ou se $c < 0$ e $\mathbb{E}^{m+p} = \mathbb{L}^{m+p}$. Além disso, segue de

$$\langle \hat{\alpha}(\cdot,\cdot), \eta \rangle = \langle \tilde{f}^* \alpha^i(\cdot,\cdot), \eta \rangle = -\mathrm{sgn}(c)\sqrt{|c|}\langle \cdot,\cdot \rangle$$

que $\mathcal{N}(\hat{\alpha}) = \{0\}$.

Agora considere os dois possíveis casos:

(i) $\mathcal{S}(\hat{\alpha})$ é não degenerado. Neste caso, segue do Teorema A.1 que

$$\dim \mathcal{S}(\hat{\alpha}) \geq m - \dim \mathcal{N}(\hat{\alpha}) = m.$$

Como $\dim \mathcal{S}(\hat{\alpha}) \leq m-3$, isto implica que $m = p+3 = dim\mathcal{S}(\hat{\alpha})$. Agora, o Teorema A.2 implica que, existe uma base $\{e_1, ..., e_m\}$, de T_xM, tal que $\hat{\alpha}(e_i, e_j) = 0$, isto é, $\{e_1, ..., e_m\}$ diagonaliza $\hat{\alpha}$ e, portanto, $\tilde{\alpha}$ por (3.1.1). Além disso, segue de (3.1.1) que

$$0 = \langle \hat{\alpha}(e_i, e_j), \eta \rangle = -\mathrm{sgn}(c)\sqrt{|c|}\langle e_i, e_j \rangle,\ i \neq j, \tag{3.1.2}$$

logo a base $\{e_1, ..., e_m\}$ é ortogonal. Em particular, $R^\perp = 0$ em x.

(ii) $\mathcal{S}(\hat{\alpha})$ é degenerado. Neste caso, existe um vetor $0 \neq \rho \in \mathcal{S}(\hat{\alpha}) \cap \mathcal{S}(\hat{\alpha})^\perp$. Escrevendo $\rho = \eta + i_*\delta$, para $\delta \in N_x^{\hat{f}}M$, obtemos:

$$0 = \langle \eta + i_*\delta, \eta + i_*\delta \rangle = \langle i_*\delta, i_*\delta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \Longrightarrow \langle \delta, \delta \rangle = -\langle \eta, \eta \rangle = \mathrm{sgn}(c). \tag{3.1.3}$$

e

$$0 = \langle \hat{\alpha}(\cdot,\cdot), \eta + i_*\delta \rangle = \langle i_*\tilde{\alpha}(\cdot,\cdot), i_*\delta \rangle - \mathrm{sgn}(c)\sqrt{|c|}\langle \cdot,\cdot \rangle, \tag{3.1.4}$$

isto é, $x \in M$ é fracamente umbílico. ∎

Como escólio do Teorema 3.6, temos o seguinte:

Lema 3.7. *Seja $\tilde{f}:\ M_c^m \to \mathbb{E}^{2m-1}$, $m \geq 3$, uma imersão isométrica. Suponha que $c \neq 0$ se $\mathbb{E}^{2m-1} = \mathbb{R}^{2m-1}$, e que $c < 0$ se $\mathbb{E}^{2m-1} = \mathbb{L}^{2m-1}$. Se $x \in M^n$ não é fracamente umbílico para $\tilde{f}$, então não existe $\xi \in N_x^{\tilde{f}}M$ tal que* rank $A_\xi^{\tilde{f}} \leq 1$.

Demonstração: Suponha que exista $\xi \in N_x^{\tilde{f}}M$ tal que rank $A_\xi^{\tilde{f}} \leq 1$ e considere $W =$

$\{\xi\}^\perp \subset N_xM$. Seja $\hat{\alpha} : T_xM \times T_xM \to W$ dada por

$$\hat{\alpha}(X,Y) = \tilde{\alpha}(X,Y) - \langle \tilde{\alpha}(X,Y), \xi \rangle \xi$$

Como rank $A_\xi^{\tilde{f}} \leq 1$, temos que

$$\langle \hat{\alpha}(X,Y), \hat{\alpha}(Z,T) \rangle - \langle \hat{\alpha}(X,T), \hat{\alpha}(Z,Y) \rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, T \rangle$$

para quaisquer $X, Y, Z, T \in T_xM$. Como $\dim W = n-2$, segue do Teorema 3.6 que existe $\tilde{\xi} \in W$ tal que

$$\langle \tilde{\alpha}(X,Y), \widetilde{\xi} \rangle = \langle \hat{\alpha}(X,Y), \widetilde{\xi} \rangle = \operatorname{sgn}(c)\sqrt{|c|}\langle X, Y \rangle$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$, o que é um absurdo. ∎

Proposição 3.8. *Seja M_c^m uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante $c > 0$. Se $\tilde{f} : M_c^m \to \mathbb{R}^{2m-1}$ é uma imersão isométrica, então existe pelo menos um ponto fracamente umbílico para $\tilde{f}$.*

Demonstração: Passando ao recobrimento universal, podemos supor que M_c^m seja simplesmente conexa e, como $c > 0$, M_c^m é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^m(c)$ de curvatura c.

Suponha, por absurdo, que $\tilde{f}$ não possua pontos fracamente umbílicos. Então existem funções $v_1, \ldots, v_n \in C^\infty(M_c^m)$ e um referencial ortonormal $X_1, \ldots, X_n$ de direções principais de $\tilde{f}$ tais que $[v_iX_i, v_jX_j] = 0$, $1 \leq i \neq j \leq m$. Sejam $Y_i = v_iX_i$ e φ_i o grupo de transformações a um parâmetro gerado por Y_i em M_c^m. Como M_c^m é compacta, as funções v_i, $1 \leq i \leq m$, são limitadas, daí os campos Y_i, $1 \leq i \leq m$ têm norma limitada e, portanto, para todo $x \in M_c^m$, a curva integral maximal $t \mapsto \varphi_i(x,t)$ de Y_i, com $\varphi_i(x,0) = x$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja x_0 um ponto fixo em M^m. Defina $\psi = \psi_{x_0} : \mathbb{R}^m \to M_c^m$ por

$$\psi(t_1, \ldots, t_m) = \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(x_0,t_1),t_2)\ldots),t_m).$$

Como $[Y_i, Y_j] = 0$, segue que os grupos a um parâmetro φ_i e φ_j comutam para quaisquer

$1 \leq i \neq j \leq m$. Isto implica que

$$\begin{aligned}
\psi_{x_0}(t+s) &= \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(x_0, t_1+s_1), t_2+s_2)\ldots), t_m+s_m) \\
&= \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(\varphi_1(x_0, s_1), t_1), t_2+s_2)\ldots), t_m+s_m) \\
&= \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_2(\varphi_1(\varphi_1(x_0, s_1), t_1), s_2), t_2)\ldots), t_m+s_m) \\
&= \varphi_m(\varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_2(\varphi_1(\varphi_1(x_0, s_1), t_1), s_2), t_2)\ldots), s_m), t_m) \\
&= \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(\varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(x_0, s_1), s_2)\ldots), s_m), t_1), t_2)\ldots), t_m) \\
&= \varphi_m(\ldots(\varphi_2(\varphi_1(\psi_{x_0}(s), t_1), t_2)\ldots), t_m) = \psi_{\psi_{x_0}(s)}(t), \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

em que $t = (t_1, \ldots, t_m)$ e $s = (s_1, \ldots, s_m)$. Assim,

$$\psi_*(s)\partial/\partial u_i = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(s_1, \ldots, s_i+t, \ldots, s_m) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_i(\psi(t), t) = Y_i(\psi(s))$$

para todo $s = (s_1, \ldots, s_m)$. Em particular, ψ é um difeomorfismo de uma bola aberta centrada na origem sobre uma vizinhança aberta de x_0.

Mostraremos, agora, que a aplicação ψ_{x_0}, definida em todo $\mathbb{R}^m$, é uma aplicação de recobrimento. Dado $x \in M_c^m$, seja $\tilde{B}_{2\epsilon}(0)$ um bola aberta de raio 2ϵ centrada na origem tal que $\psi_x|_{\tilde{B}_{2\epsilon}(0)}$ é um difeomorfismo sobre $B_{2\epsilon}(x) = \psi_x(\tilde{B}_{2\epsilon}(0))$. Se $\psi_{x_0}^{-1}(x) = \cup_{\alpha \in A}\tilde{x}_\alpha$, para todo $\alpha \in A$ seja $\tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ uma bola aberta de raio 2ϵ centrada em $\tilde{x}_\alpha$. Defina $\phi_\alpha : B_{2\epsilon}(x) \to \tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ por

$$\phi_\alpha(y) = \tilde{x}_\alpha + \psi_x^{-1}(y).$$

Então, de (3.1.5) obtemos

$$\psi_{x_0}(\phi_\alpha(y)) = \psi_{x_0}(\tilde{x}_\alpha + \psi_x^{-1}(y)) = \psi_{\psi_{x_0}(\tilde{x}_\alpha)}(\psi_x^{-1}(y)) = \psi_x(\psi_x^{-1}(y)) = y$$

para todo $y \in B_{2\epsilon}(x)$. Logo, ψ_{x_0} é um difeomorfismo de $\tilde{B}_{2\epsilon}(\tilde{x}_\alpha)$ sobre $B_{2\epsilon}(x)$ tendo ϕ_α como sua inversa. Em particular, isto implica que $\tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\alpha)$ e $\tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\beta)$ são disjuntos se α e β são índices distintos em A. Finalmente, precisamos mostrar que, se $\tilde{y} \in \psi_{x_0}^{-1}(B_\epsilon(x))$, então $\tilde{y} \in \tilde{B}_\epsilon(\tilde{x}_\alpha)$ para algum $\alpha \in A$. Isto segue de

$$\psi_{x_0}(\tilde{y} - \psi_x^{-1}(\psi_{x_0}(\tilde{y}))) = \psi_{\psi_{x_0}(\tilde{y})}(-\psi_x^{-1}(\psi_{x_0}(\tilde{y}))) = x, \qquad (3.1.6)$$

em que utilizamos na ultima igualdade o fato de que, para quaisquer $x, y \in M_c^m$, temos

$\psi_x(t) = y$ se, e somente se, $\psi_y(-t) = x$. Tal fato segue de (3.1.5).

Concluímos que ψ_{x_0}, definida em todo o $\mathbb{R}^m$, é uma aplicação de recobrimento e, portanto, um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre M_c^m, já que $M^m(c)$ é simplesmente conexa, o que é um absurdo. ∎

3.2 Demonstração da Proposição 3.1

Derivando (3.0.2) obtemos:

$$\tilde{f}_*(x,s)X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_{s*}(x)X \tag{3.2.1}$$

para todo $X \in T_xM^{m-1}$, enquanto

$$\tilde{f}_*(x,s)\frac{\partial}{\partial s} = N_s(x) + Bi_*\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.2.2}$$

em que $N_s(x) = -\epsilon S_\epsilon(s)\,\tilde{g}(x) + C_\epsilon(s)\,\tilde{\zeta}$. Em particular, os espaços normais de $\tilde{g}_s$ e de $\tilde{f}$ se relacionam por

$$N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = \{N_s(x) + Bi_*\frac{\partial}{\partial t}\}^{\perp} \subset N^{\tilde{g}_s}_x N. \tag{3.2.3}$$

Além disso, segue do item (iv) da Proposição 1.4 que

$$\begin{aligned} \alpha^{\tilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \alpha^{\tilde{g}_s}(X,Y) - \langle \alpha^{\tilde{g}_s}(X,Y), N_s(x) + Bi_*\frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{N_s(x) + Bi_*\frac{\partial}{\partial t}}{1+B^2} \\ &= \alpha^{\tilde{g}_s}(X,Y) - \langle \alpha^{\tilde{g}_s}(X,Y), N_s(x)\rangle \frac{N_s(x) + Bi_*\frac{\partial}{\partial t}}{1+B^2}, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

e

$$\alpha^{\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = -\epsilon \tilde{g}_s(x) \tag{3.2.5}$$

Seja $\{X_1, \cdots, X_{m-1}\}$ uma base ortonormal em T_xM^{m-1} de direções principais de $\tilde{g}_s$. Então, decorre de (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) e (3.2.5) que $\left\{X_1^{\mathcal{H}}, \cdots, X_{m-1}^{\mathcal{H}}, (1+B^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial s}\right\}$ é uma base ortonormal de $T_{(x,s)}M$ formada por direções principais de $\tilde{f}$.

Da equação de Gauss para a imersão isométrica $\widetilde{f}$ obtemos que

$$\begin{aligned} K_M(X_i^{\mathcal{H}}, X_j^{\mathcal{H}}) &= \langle \alpha^{\widetilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_i^{\mathcal{H}}), \alpha^{\widetilde{f}}(X_j^{\mathcal{H}}, X_j^{\mathcal{H}}) \rangle \\ &\overset{(3.2.4)}{=} \langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_i, X_i), \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_j, X_j) \rangle - \frac{1}{1+B^2} \langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_i, X_i), N_s(x) \rangle \langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_j, X_j), N_s(x) \rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq m-1$, e

$$\begin{aligned} K_M\left(\frac{\partial}{\partial s}, X_i^{\mathcal{H}}\right) &= \frac{1}{1+B^2} \langle \alpha^{\widetilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}), \alpha^{\widetilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_i^{\mathcal{H}}) \rangle \\ &= -\frac{\epsilon}{1+B^2} \langle \alpha^{\tilde{g}_s}(X_i, X_i), \tilde{g}_s(x) \rangle = \frac{\epsilon}{1+B^2}. \end{aligned}$$

Portanto M^m possui curvatura seccional constante se, e somente se,

$$\langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_i, X_i), \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_j, X_j) \rangle = \epsilon c(\epsilon + \langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_i, X_i), N_s(x) \rangle \langle \alpha^{\widetilde{g}_s}(X_j, X_j), N_s(x) \rangle)$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq m-1$, em que $c = \dfrac{\epsilon}{1+B^2}$, ou seja, se, e somente se, g_s pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a c e a N_s para todo $s \in I$. Pela Proposição 2.5, isto ocorre se, e somente se, g pertence à classe $\mathcal{B}$ com respeito a c e a ζ. ∎

3.3 Demonstrações dos Teoremas 3.2 e 3.3

Consideramos, inicialmente, o caso $c = 0$.

Lema 3.9. *Seja $f : M_0^m \to \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R}$, $m \geq 3$, $p \leq m-3$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana com curvatura seccional identicamente nula. Então $p = m-3$ e f é um cilindro sobre uma imersão isométrica $g : N_0^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$ de uma variedade Riemanniana com curvatura seccional nula.*

Demonstração: Seja $\tilde{f} = i \circ f$, em que $i \colon \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+p+2}$ é a inclusão canônica. Segue da equação de Gauss de $\tilde{f}$ que a segunda forma fundamental α de $\tilde{f}$ é uma forma bilinear plana. Seja $\eta \in \Gamma(N^{\tilde{f}}M)$ definido por (1.1.1). Suponha que $\eta(x) \neq 0$ para algum $x \in M_0^m$. Então $A_\nu^{\tilde{f}}$, e portanto α, possui núcleo trivial por (1.1.10). Decorre do Teorema A.1 que

$$p + 2 \geq \dim S(\alpha) \geq m$$

o que é absurdo. Logo η é identicamente nulo e, portanto, $\tilde{f}$ é um cilindro sobre uma imersão isométrica $g : N_0^{m-1} \to \mathbb{S}^{m+p}$ de uma variedade Riemanniana com curvatura seccional nula. Segue-se que $m+p-(m-1) \geq (m-1)-1$, ou seja, $p \geq m-3$. Portanto $p = m-3$. ∎

Lema 3.10. *Seja $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica na classe $\mathcal{A}$, parametrizada segundo o Teorema 1.1 em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon)$ e de uma curva suave $\gamma : I \to \mathbb{Q}^k(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$. Suponha que $c \neq 0$ se $\epsilon = 1$, e que $c < 0$ se $\epsilon = -1$. Suponha ainda que $\tilde{f} = i \circ f$ não possua pontos fracamente umbílicos, em que $i \colon \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{2m-1}$ é a inclusão canônica. Então*

$$N_1^{\tilde{g}^\perp}(x) = span\{i_* \frac{\partial}{\partial t}(j(g(x))\}$$

para todo $x \in N^{m-1}$, em que $j : \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$ é a inclusão canônica e $\tilde{g} = \tilde{j} \circ g$, com $\tilde{j} = i \circ j$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista $x \in N^{m-1}$ tal que $N_1^{\tilde{g}^\perp}(x)$ tenha dimensão maior do que ou igual a dois. Então existe $\bar{\xi} \in N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M \cap N_1^{\tilde{g}^\perp}(x)$, logo $rank\ A^{\tilde{f}}_{\bar{\xi}} \leq 1$ pela equação (1.1.19), o que é um absurdo pelo Lema 3.7. ∎

Lema 3.11. *Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $m \geq 3$, uma imersão isométrica na classe $\mathcal{A}$, parametrizada segundo o Teorema 1.1 em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon)$ e de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : I \to \mathbb{Q}^k(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$. Então, as curvaturas seccionais $K_M(X^{\mathcal{H}}, \dfrac{\partial}{\partial s})$ de M^m segundo os planos gerados por $\left\{X^{\mathcal{H}}, \dfrac{\partial}{\partial s}\right\}$, com $X \in TN$, são todas iguais a $c \neq 0$ se, e somente se,*

$$\phi_x(\gamma''(s) + c\gamma(s)) \in N_1^{\tilde{g}^\perp}.$$

Demonstração: Dados $x \in N$ e $X \in T_xN$, segue de (1.1.27), (1.1.28) e da equação de

Gauss para $\widetilde{f}$ que

$$
\begin{aligned}
K_M\left(X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{\langle \alpha_{\widetilde{f}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}), \alpha_{\widetilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s})\rangle}{\langle X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}\rangle} \\
&= \frac{1}{\langle P_sX, P_sX\rangle}\left(\langle \alpha_{\widetilde{g}}(P_sX, X), \phi_x(\gamma''(s))\rangle\right. \\
&\quad \left. -\langle \alpha_{\widetilde{g}}(P_sX, X), \phi_x(\gamma'(s))\rangle\langle \phi_x(\gamma'(s)), \phi_x(\gamma''(s))\rangle\right) \\
&= \frac{\langle A^{\widetilde{g}}_{\phi_x(\gamma''(s))}X, P_sX\rangle}{\langle P_sX, P_sX\rangle}
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Portanto $K_M\left(X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = c$ para todo $X \in T_xN$ se, e somente se,

$$\langle A^{\widetilde{g}}_{\phi_x(\gamma''(s))}X, P_sX\rangle = c\langle P_sX, P_sX\rangle$$

para todo $X \in T_xN$, ou seja, se, e somente se,

$$A^{\widetilde{g}}_{\phi_x(\gamma''(s)+c\gamma(s))} = 0. \quad \blacksquare$$

Lema 3.12. *Seja* $f:\ M^m_c \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $m \geq 3$, *uma imersão isométrica . Suponha que* $c \neq 0$ *se* $\epsilon = 1$, *e que* $c < 0$ *se* $\epsilon = -1$. *Suponha ainda que* $\tilde{f} := i \circ f$ *não possua pontos fracamente umbílicos, em que* $i : \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{2m-1}$ *é a inclusão canônica. Então* $\epsilon c \in (0, 1)$ *e* f *é dada por (3.0.2), com* $c = \dfrac{\epsilon}{1 + B^2}$, *em termos de uma imersão isométrica* $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ *pertencente à classe* $\mathcal{B}$ *com respeito a um campo* $\zeta \in \Gamma(N^gM^{m-1})$ *paralelo e a* c

Demonstração: Segue do Teorema 3.6 que $\tilde{f}$ possui fibrado normal plano. Daí, segue do Corolário 1.2 que f pertence à classe $\mathcal{A}$, logo pode ser parametrizada, segundo o Teorema 1.1, em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \to \mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$ e de uma curva suave $\gamma : I \to \mathbb{Q}^{m-2}_\epsilon \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^m$. Agora, os Lemas 3.11 e 3.10 implicam que

$$\phi_x((\gamma''(s) + c\gamma(s)) = a(s)i_*\frac{\partial}{\partial t} = a(s)\phi_x(0, ..., 1),$$

para alguma função diferenciável $a\colon I \to \mathbb{R}$, em que ϕ_x é a isometria dada por (1.1.12). Segue, daí, que a curva γ deve satisfazer a equação diferencial

$$\overline{\gamma}''(s) = -c\overline{\gamma}(s) \tag{3.3.2}$$

Decorre de (3.3.2) e de $\langle \overline{\gamma}(s), \overline{\gamma}(s) \rangle = \epsilon$, $\forall s \in I$, que

$$\langle \overline{\gamma}'(s), \overline{\gamma}'(s) \rangle = \epsilon c, \;\; \forall s \in I. \tag{3.3.3}$$

Sendo γ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, segue que:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \\ &= \langle \overline{\gamma}'(s), \overline{\gamma}'(s) \rangle + ({\gamma'}_{m-1}(s))^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$({\gamma'}_{m-1}(s))^2 \overset{(3.3.3)}{=} 1 - \epsilon c, \;\; \forall s \in I.$$

Em particular, $\epsilon c \in (0,1)$ e $\gamma_{m-1}(s) = \sqrt{1-\epsilon c}\; s + K$, para alguma constante $K \in \mathbb{R}$. Seja $\beta(s) := \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right)$ e $\bar{\beta}(s) := \bar{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right)$. Note que

$$\bar{\beta}''(s) = \epsilon \frac{1}{c} \overline{\gamma}'' \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right) = -\epsilon \overline{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right) = -\epsilon \bar{\beta}(s).$$

Donde segue que $\bar{\beta}(s) = (C_\epsilon(s), S_\epsilon(s), 0, ..., 0)$, em que,

$$C_\epsilon(s) = \begin{cases} \cos s, \;\text{se } \epsilon = 1 \\ \cosh s, \;\text{se } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\epsilon(s) = \begin{cases} \operatorname{sen} s, \;\text{se } \epsilon = 1 \\ \operatorname{senh} s, \;\text{se } \epsilon = -1 \end{cases}. \tag{3.3.4}$$

Agora

$$\begin{aligned} \beta(s) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right) &= \bar{\beta}(s) + \gamma_{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon c}} s\right) \frac{\partial}{\partial t} = \beta(s) + Bs \frac{\partial}{\partial t} \\ &= (C_\epsilon(s), S_\epsilon(s), 0, ..., 0, Bs), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

em que $B = \frac{\sqrt{1-\epsilon c}}{\sqrt{\epsilon c}}$, ou seja, $c = \frac{\epsilon}{1+B^2}$. Observe que β é uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco. Daí, segue de (1.1.13) que

$$\tilde{f}(x,s) = (i \circ f)(x,s) = \phi_x(\beta(s)) = C_\epsilon(s)(\tilde{j} \circ g)(x) + S_\epsilon(s) \tilde{j}_* \tilde{\zeta} + Bs i_* \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.3.6}$$

para algum $\zeta \in \Gamma(N^g N^{m-1})$ paralelo na conexão normal. Além disso, como M_c^m possui curvatura constante, segue da Proposição 3.1 que g é uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ em relação a ζ e a c. ∎

Lema 3.13. *Seja $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$, $m \geq 3$, $p \leq m-3$, uma imersão isométrica. Suponha que $c \neq 0$ se $\epsilon = 1$, e que $c < 0$ se $\epsilon = -1$. Então valem as seguintes afirmações:*
(i) se $\epsilon = -1$, então $c \geq -1$;
(ii) se $\epsilon = 1$, então $c > 0$. Além disso, se $c \in (0,1)$ então $p = m-3$ e $\tilde{f} := i \circ f$ não possui pontos fracamente umbílicos, em que $i : \mathbb{S}^{m+p} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+p+2}$ é a inclusão canônica. Ademais, se $c = \epsilon$, então $f(M_\epsilon^m)$ está contido em uma fatia $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}^{m+p}(\epsilon) \times \mathbb{R}$;

Demonstração: Se $p < m-3$, o Teorema 3.6 implica que $\tilde{f}$ é fracamente umbílica e que $c > 0$ quando $\epsilon = 1$. Se $p = m-3$, o Lema 3.12 implica que existe $x \in M$, fracamente umbílico para $\tilde{f}$ ou $\epsilon c \in (0,1)$. Afirmamos que, se $c = \epsilon$, então $\tilde{f}$ é fracamente umbílica. De fato, se existisse um ponto $x \in M_c^m$ não fracamente umbílico para $\tilde{f}$, existiria uma vizinhança aberta U de x sem pontos fracamente umbílicos para $\tilde{f}$. Então, o Lema 3.12, aplicado a $f|_U$, implicaria que $\epsilon c \in (0,1)$, contradizendo a hipótese de $c = \epsilon$.

Suponha que $x \in M_c^m$ seja fracamente umbílico para $\tilde{f}$, ou seja, que exista $\delta \in N_x^{\tilde{f}} M$, $\langle \delta, \delta \rangle = sgn(c)$, tal que

$$\tilde{\alpha}(X,Y) = \sqrt{|c|} < X, Y > \delta + \gamma(X,Y), \ \forall X, Y \in T_xM, \tag{3.3.7}$$

em que $\gamma : T_xM \times T_xM \to \{\delta\}^\perp \subset N_x^{\tilde{f}} M$ é uma forma bilinear. Segue da Equação de Gauss que γ é plana e, portanto, o Teorema A.1, caso Riemanniano, implica que $dim N(\gamma) \geq m - (p+1) \geq 2$.

Por outro lado, seja $\nu = \pi \circ \tilde{f}$, em que $\pi : \mathbb{E}^{m+p+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{m+p+1}$ é a projeção. Escreva

$$-\nu = \mathrm{sgn}(c) < -\nu, \delta > \delta + \nu^\perp, \ \text{com} \ < \nu^\perp, \delta >= 0. \tag{3.3.8}$$

Daí,

$$\begin{aligned} A^{\tilde{f}}_{\nu^\perp} X &= A^{\tilde{f}}_{-\nu} X - sgn(c) < -\nu, \delta > A^{\tilde{f}}_{\delta} X \\ &= (1 - \sqrt{|c|} < -\nu, \delta >) X, \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

para todo $X \in \{T\}^\perp \subset T_xM$, em que, T é o campo definido por (1.1.1).

Agora, como $\dim\{T\}^{\perp} = m-1$ e $\dim\ N(\gamma) \geq 2$, temos que $\{T\}^{\perp} \cap N(\gamma) \neq \{0\}$, donde segue de (3.3.9) que

$$< -\nu, \delta >= \frac{1}{\sqrt{|c|}}. \tag{3.3.10}$$

Daí, a desigualdade de Cauchy-Schwarz Riemanniana (respectivamente, Lorentziana) implica que $c \geq 1$ (respectivamente, $c \geq -1$), quando $\epsilon = 1$ (respectivamente, $\epsilon = -1$), e que vale a igualdade se, e somente se, $\nu = -sgn(c)\delta$. Supondo $\nu = -sgn(c)\delta$ e $\|T\| \neq 0$, segue de (1.1.10) e (3.3.7) que $\|\eta\|^2 = 1$, o que é um absurdo por (1.1.1). Portanto $\|T\| = 0$ e o resultado segue. ∎

Agora estamos em condições de demonstrar os teoremas enunciados na introdução deste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.2: Se $c = 0$, segue do Lema 3.9 que $p = m - 3$ e que vale o item (i). Suponha que $c \neq 0$. O Lema 3.13 implica que $c > 0$ e, se $c \in (0, 1)$, então $p = m - 3$ e $\tilde{f}$ não possui pontos fracamente umbílicos. O item (ii) segue então do Lema 3.12 e da Proposição 3.1. Finalmente, o item (iii) segue do Lema 3.13.

Suponha que M_c^m seja completa. Se $c = 0$, segue do item (i) que f é um cilindro, e este último é completo se N_0^{m-1} completa. Se $c > 0$, segue da Proposição 3.8 que existe pelo menos um ponto fracamente umbílico para $\tilde{f}$. Por outro lado, o Lema 3.13 implica que, se $c \in (0, 1)$, então $\tilde{f}$ não possui pontos fracamente umbílicos. Logo $c = 1$ e, neste caso, temos que $M_1^m = \mathbb{S}^m$ e, como $p \leq m - 3$, segue do Corolário 5.9, em [5], que $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{m+p}$ é totalmente geodésica. ∎

Demonstração do Teorema 3.3 Segue do Lema 3.13 que $c \geq -1$ e que vale o item (i). Agora, se $c \in (-1, 0)$ e $\tilde{f}$ não possui pontos fracamente umbílicos, então segue do Teorema 3.6 que $p = m - 3$ e, do Lema 3.12 e Proposição 3.1, que vale o item (ii). ∎

Antes de finalizarmos esta seção, provaremos a seguinte:

Proposição 3.14. *Toda imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$ na classe $\mathcal{B}$ é holonômica.*

Demonstração: Seja $g : M^{m-1} \to \mathbb{S}^{2m-3}$ uma imersão isométrica na classe $\mathcal{B}$ com relação a $c \in (0, 1)$ e $\zeta \in \Gamma(N^g M)$. Segue da Proposição 3.1 que $\tilde{f}$, definida por (3.0.2), em termos de g, possui curvatura seccional constante c. Por sua vez, o Lema 3.13 implica que $\tilde{f}$ não possui pontos fracamente umbílicos. Logo, a Proposição 4 em [8] existe um sistema de coordenadas $(u_1, \ldots, u_m)$ em M_c^m tais que $\partial/\partial u_i = v_i^{-1} X_i$.

Considere $\hat{f} = j \circ \tilde{f}$, em que $j : \mathbb{R}^{2m-1} \to \mathbb{Q}_1^{2m}(c)$ é uma inclusão umbílica. É facil ver que X_i, $1 \leq i \leq m$, também são direções principais de $\hat{f}$. Temos que $\nu^{\hat{f}} \equiv 0$, então $\hat{\eta}_i = \alpha^{\hat{f}}(X_i, X_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. Como o $N_1^{\hat{f}}$ é não degenerado, temos que $\langle \eta_i, \eta_i \rangle \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq m$. Além disso, segue da equação de Gauss para $\hat{f}$ que $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$ para todo $1 \leq i \neq j \leq m$. Logo, $\{\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_m\}$ é um conjunto ortogonal de $N^{\hat{f}}_{(x,s)}M$ e, portanto, uma base ortogonal de $N^{\hat{f}}_{(x,s)}M$. Tome $\hat{\xi} \in N^{\hat{f}}_{(x,s)}M$, tal que $0 \neq \langle \hat{\eta}_i, \hat{\xi} \rangle \neq \langle \hat{\eta}_j, \hat{\xi} \rangle \neq 0$, para todo $1 \leq i \neq j \leq m$. De $\langle A^{\hat{f}}_{\hat{\xi}} X_i, X_i \rangle = \langle \alpha^{\hat{f}}(X_i, X_i), \hat{\xi} \rangle = \langle \eta_i, \hat{\xi} \rangle$, segue que as m curvaturas principais de $\hat{f}$, na direção de $\hat{\xi}$, são não nulas e distintas duas a duas. Escrevendo $\hat{\xi} = \xi + \zeta$, com $\xi \in N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M$ e ζ um dos campos normais a inclusão j, temos que as m curvaturas principais de $\tilde{f}$, na direção de ξ são distintas.

Por outro lado, admitindo, sem perda de generalidade que $X_i = Y_i^{\mathcal{H}}$, $Y_i \in T_x M^{m-1}$, $1 \leq i \leq m-1$ e $X_m \in span\{\partial/\partial s\}$, segue de (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) e (3.2.5) que $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ é uma base ortonormal de $T_x M^{m-1}$, composta por direções principais de $\tilde{g}_s$ em todas as direções normais a $\tilde{g}_s$, exceto na direção $\tilde{N}_s(x) := N_s(x) + Bi_* \dfrac{\partial}{\partial t}$, em que $\tilde{g}_s$ são as paralelas a g, na direção de ζ, definidas por (3.0.1). Como $N^{\tilde{f}}_{(x,s)}M = \{\tilde{N}_s(x)\}^{\perp} \subset N^{\tilde{g}_s}_x M$, temos que $\xi \in N^{\tilde{g}_s}_x M$. Além disso, segue de (3.2.4) que as curvaturas principais de $\tilde{f}$ e de $\tilde{g}_s$, na direção de ξ, são iguais. Logo as curvaturas principais de $\tilde{g}_s$, na direção de ξ, são distintas. Agora, como $\tilde{g}_s$ possui fibrado normal plano segue, da equação de Ricci, para $\tilde{g}_s$, que $A^{\tilde{g}_s}_{\tilde{N}_s(x)}$ e $A^{\tilde{g}_s}_{\xi}$ comutam e, portanto, $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ também são direções principais de $\tilde{g}_s$, na direção $\tilde{N}_s(x)$. Contudo, $\tilde{g}_s$ admite um sistema de coordenadas cujas direções coordenadas são direções principais e, portanto, é holonômica. Em particular, $\tilde{g}$ é holonômica. ∎

3.4 Demonstração da Proposição 3.4

Se $\epsilon = 1$ e $p \leq m - 2$, segue do Teorema 3.6 que $\tilde{f}$ é fracamente umbílica, isto é, existe $\delta \in N^{\tilde{f}}_x M$, $\langle \delta, \delta \rangle = \operatorname{sgn}(c)$, tal que $\tilde{\alpha}$ satisfaz (3.0.3). Afirmamos que isso também ocorre se $p = m - 3$. De fato, se existisse um ponto $x \in M_c^m$ não fracamente umbílico para $\tilde{f}$, existiria uma vizinhança aberta U de x sem pontos fracamente umbílicos para $\tilde{f}$. Então, o Lema 3.12, aplicado a $f|_U$, implicaria que $c \in (0, 1)$, contradizendo a hipótese.

Defina $\gamma : T_x M \times T_x M \to \{\delta\} \subset N^{\tilde{f}}_x M$ por

$$\gamma(\cdot, \cdot) = \langle \tilde{\alpha}(\cdot, \cdot), \delta \rangle \delta = \operatorname{sgn}(c) \sqrt{|c|} \langle \cdot, \cdot \rangle \delta.$$

É facil ver que γ satisfaz as equações de Gauss e Codazzi de uma hipersuperfície $h : M_c^m \to \mathbb{E}^{m+1}$. Além disso, $\nabla_X^{\perp}\delta \in \{\delta\}^{\perp} \subset N_x^{\tilde{f}}M$, $\forall X \in T_xM$. Desta forma, o Teorema 5', em [7], implica que $\tilde{f} = H \circ h$, em que $H : \mathbb{E}^{m+1} \to \mathbb{E}^{2m-1}$ é a inclusão canônica. Como, localmente, toda imersão isométrica é um mergulho. Defina $\Psi := (H \circ h)^{-1}|_{\bar{M}} : \bar{M} \to M$ uma isometria, em que $\bar{M} := H(\mathbb{E}^{m+1}) \cap i(\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon) \times \mathbb{R})$. Agora, $f \circ \Psi = i^{-1}|_{\bar{M}}$ ∎

3.5 Demonstração do Teorema 3.5

Demonstração do Teorema 3.5: Inicialmente vamos determinar os possíveis valores de c para que a subvariedade de rotação $f : M_c^m \to \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$ possua curvatura seccional constante c. Seja T o campo definido em (1.1.1). Para cada $x \in M$, seja $\{\xi_1, \cdots, \xi_{n-m+1}\}$ uma base ortonormal de $N_x^f M$. Temos, pelo Teorema 1.7, que

$$A_{\xi_r}^f T = \lambda_r T \ \text{ e } \ A_{\xi_r}^f X = \mu_r X, \ \forall X \in \{T\}^{\perp}, \tag{3.5.1}$$

em que, $1 \leq r \leq n-m+1$. Agora a Equação de Gauss (1.1.4), para $X, Y, W \in \{T\}^{\perp}$ ortonormais, com $Y = W$, implica em:

$$c - \epsilon = \sum_{r=1}^{n-m+1} \mu_r^2 \tag{3.5.2}$$

e, para $X = T$ e $Y = W \in \{T\}^{\perp}$, nos dá que:

$$c - \epsilon = \sum_{r=1}^{n-m+1} \lambda_r \mu_r + |T|^2 \tag{3.5.3}$$

Conclui-se de (3.5.2) e de (3.5.3) que $c \geq \epsilon$ e, se $c = \epsilon$, T é um campo de vetores nulo. Portanto, se $c = \epsilon$, então $f(M_\epsilon^m)$ está contido em uma fatia $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$. É facil ver que as fatias $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R}$, são parametrizadas como na seção 1.1.2, com a ultima coordenada constante.

Afirmamos que $\tilde{f} := i \circ f$, em que $i : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ é a inclusão canônica, pode ser vista como um tubo parcial sobre uma imersão isométrica $g : M^{m-1} \to \mathbb{Q}^n(\epsilon)$ umbílica e com fibra $\gamma : I \to \mathbb{Q}^{n-m+1}(\epsilon) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{n-m+3}$, $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-m+1}, \gamma_{n-m+2})$. Além disso, o operador forma $A^{\tilde{g}}$ de $\tilde{g} := j \circ g$, em que $j : \mathbb{Q}^n(\epsilon) \to \mathbb{E}^{n+1}$ é a inclusão canônica, é tal que

$$A^{\tilde g}_{\phi_x(\bar\gamma)}=-\beta I,\ A^{\tilde g}_{\phi_x(\gamma')}=-\beta' I \ \text{ e } \ A^{\tilde g}_{\phi_x(\gamma'')}=-\beta'' I, \tag{3.5.4}$$

em que, $\beta(s)=\gamma_1(s)$, quando $\epsilon=-1$ e a subvariedade de rotação é do tipo esférico, e $\beta(s)=\gamma_0(s)$ nos demais casos, ϕ é a isometria que define o tubo e $\bar\gamma(s)=(\gamma_0,\cdots,\gamma_{n-m+1},0)$.

De fato, para $\epsilon=1$ ou $\epsilon=-1$ e f do tipo hiperbólico, temos que a subvariedade de rotação é parametrizada por (1.1.30), que pode ser escrita como

$$\tilde f(s,t)=\gamma_0(s)\hat g(t)+\sum_{i=m}^{n}\gamma_{i-m+1}(s)e_i+h(s)e_{n+1}, \tag{3.5.5}$$

em que $\hat g(t)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)e_i$, para $t=(t_1,\cdots,t_{m-1})$, é uma imersão isométrica de $\mathbb{Q}^{m-1}(\epsilon)$ em $\mathbb{Q}^n(\epsilon)$ totalmente geodésica. Seja $\{\tilde e_0,\tilde e_m,\cdots,,\tilde e_n,\tilde e_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n-m+3}$. Para cada $t\in\mathbb{Q}^{m-1}_\epsilon$, defina uma isometria $\phi_t:\mathbb{E}^{n-m+3}\to\mathbb{E}^{n-m+3}$ por $\phi_t(\tilde e_0)=\hat g(t)$, $\phi_t(\tilde e_i)=e_i$, $m\le i\le n+1$. Defina uma curva $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{E}^{n-m+3}$ por $\gamma(s)=\gamma_0\tilde e_0+\sum_{i=m}^{n}\gamma_{i-m+1}\tilde e_i+h(s)\tilde e_{n+1}$, com $\epsilon\gamma_0+\sum_{i=1}^{n-m+1}\gamma_i^2=\epsilon$. Agora, $\tilde f(s,t)=\phi_t(\gamma(s))$. Agora a segunda forma fundamental $\alpha^{\tilde g}$ da imersão isométrica $\tilde g:=j\circ\hat g$, é dada por

$$\alpha^{\tilde g}=-\langle\cdot,\cdot\rangle\phi_t(\tilde e_0). \tag{3.5.6}$$

Donde segue (3.5.4). Isto prova a afirmação para $\epsilon=1$ e $\epsilon=-1$ e f do tipo hiperbólico.

Suponha que $\epsilon=-1$ e f é uma subvariedade de rotação do tipo parabólico, parametrizada por (1.1.34). Tal parametrização pode ser escrita como:

$$\tilde f(s,t)=\gamma_0\hat g(t)+\sum_{i=m}^{n}\gamma_i\hat e_i+h(s)\hat e_{n+1}$$

em que

$$\hat g(t)=\hat e_0+\sum_{i=1}^{m-1}t_i\hat e_i-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m-1}t_i^2\right)\hat e_n.$$

Note que $\hat g$ define uma imersão isométrica de $\mathbb{R}^{m-1}$ em $\mathbb{L}^{n+2}$ (de fato, $\hat g(\mathbb{R}^{m-1})\subset\mathbb{V}^{n+1}\subset\mathbb{L}^{n+2}$, em que $\mathbb{V}^{n+1}$ é o cone de luz), e que $\hat g,\hat e_m,\cdots,\hat e_n,\hat e_{n+1}$ é uma base pseudo-ortonormal de $N^{\hat g}\mathbb{R}^{m-1}$, com $\langle\hat g,\hat g\rangle=0=\langle\hat e_n,\hat e_n\rangle$, $\langle\hat g,\hat e_n\rangle=1$ e $\{\hat e_m,\cdots,\hat e_{n-1},\hat e_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $span\{\hat g,\hat e_n\}^\perp$.

Seja $\{e_0, e_m, \cdots, e_n, e_{n+1}\}$ uma base pseudo ortonormal de $\mathbb{L}^{n-m+3}$ com $\langle e_0, e_0\rangle = 0 = \langle e_n, e_n\rangle$, $\langle e_0, e_n\rangle = 1$ e $\{e_m, \cdots, e_{n-1}, e_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $span\{e_0, e_n\}^{\perp}$. Para cada $t\in\mathbb{R}^{m-1}$ define uma isometria $\phi_t : \mathbb{L}^{n-m+3}\to N^{\hat{g}}\mathbb{R}^{m-1}$ por $\phi_t(e_0) = \hat{g}$, $\phi_t(e_n) = \hat{e}_n$, $\phi_t(e_i) = \hat{e}_i$, $m\le i\le n-1$ e $\phi_t(e_{n+1}) = \hat{e}_{n+1}$. Defina uma curva $\gamma : I\to\mathbb{H}^{n-m+1}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{L}^{n-m+3}$ por $\gamma(s) = \gamma_0 e_0 + \sum_{i=m}^{n}\gamma_{i-m+1}e_i + h(s)e_{n+1}$, com $2\gamma_0\gamma_{n-m+1} + \sum_{i=1}^{n-m}\gamma_i^2 = -1$. Observe que $\tilde{f}(s,t) = \phi_t(\gamma(s))$. Para qualquer $s_0\in I$ fixo, seja $g : \mathbb{R}^{m-1}\to\mathbb{H}^n$ dado por $g = \hat{g} - \dfrac{1}{2}\hat{e}_n$. Então g (horosfera) define uma imersão umbílica com mesmo espaço normal, em $\mathbb{L}^{n+2}$, que $\hat{g}$, em qualquer ponto $t\in\mathbb{R}^{m-1}$. Note que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s,t) &= \phi_t(\gamma(s)) = \gamma_0\hat{g} - \frac{\gamma_0}{2}\hat{e}_n + \frac{\gamma_0}{2}\hat{e}_n + \sum_{i=m}^{n}\gamma_{i-m+1}\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1}\\ &= \gamma_0 g + \sum_{i=m}^{n-1}\gamma_{i-m+1}\hat{e}_i + \left(\gamma_{n-m+1} + \frac{\gamma_0}{2}\right)\hat{e}_n + h(s)\hat{e}_{n+1}\end{aligned}$$

Agora, observe que o espaço normal a $\tilde{g} := j\circ g$, em $t\in\mathbb{R}^{m-1}$, é gerado por

$$N_t^{\tilde{g}}\mathbb{R}^{m-1} = \text{span}\left\{\hat{g}, \hat{e}_m, \cdots, \hat{e}_n\right\}.$$

Daí, temos que,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = \langle\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{g}\rangle\hat{e}_n + \langle\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{e}_n\rangle\hat{g} + \sum_{i=m}^{n-1}\langle\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_i\rangle e_i. \tag{3.5.7}$$

Mas, para quaisquer $X, Y\in T_t\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\langle\alpha^{\tilde{g}}(X,Y), \hat{e}_n\rangle = X\langle\tilde{\nabla}_X\tilde{g}_*Y, \hat{e}_n\rangle = X\langle\tilde{g}_*Y, \hat{e}_n\rangle = 0$$

$$\langle\alpha^{\tilde{g}}(X,Y), \hat{g}\rangle = \langle\tilde{\nabla}_X\tilde{g}Y, \hat{g}\rangle = X\langle\tilde{g}_*Y, \hat{g}\rangle - \langle\tilde{g}Y, \hat{g}_*X\rangle = -\langle\hat{g}Y, \hat{g}_*X\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

e

$$\langle\alpha^{\tilde{g}}(X,Y), e_i\rangle = \langle\tilde{\nabla}_X\tilde{g}_*Y, e_i\rangle = X\langle\tilde{g}_*Y, e_i\rangle = 0,\ m\le i\le n-1.$$

Logo,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle\cdot,\cdot\rangle\hat{e}_n.$$

Donde segue (3.5.4).

Por sua vez, suponha que $\epsilon = -1$ e f seja uma subvariedade de rotação do tipo esférico parametrizada por (1.1.31). Observe que (1.1.31) pode ser escrita como:

$$\tilde{f}(t,s) = \gamma_0 e_0 + \gamma_1 \hat{g}(t) + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1},$$

em que

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) e_i,$$

para $t = (t_1, \cdots, t_{m-1})$, é um imersão isométrica de $\mathbb{R}^{m-1}$ em $\mathbb{S}^n$. Seja $\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_m, \cdots, , \tilde{e}_n, \tilde{e}_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{L}^{n-m+3}$. Para cada $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, defina uma isometria $\phi_t : \mathbb{L}^{n-m+3} \to \mathbb{L}^{n-m+3}$ por $\phi_t(\tilde{e}_0) = e_0$, $\phi_t(\tilde{e}_1) = \hat{g}(t)$ e $\phi_t(\tilde{e}_i) = e_i$, $m+1 \leq i \leq n+1$. Defina uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-m+3}$ por $\gamma(s) = \gamma_0 \tilde{e}_0 + \sum_{i=m}^{n} \gamma_{i-m+1} \tilde{e}_i + h(s) \tilde{e}_{n+1}$, com $-\gamma_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$. Agora, $\tilde{f}(s,t) = \phi_t(\gamma(s))$. Para qualquer $s_0 \in I$ fixo, seja $g : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{H}^n$ dado por $g(t) = 2e_0 + \hat{g}(s)$. Então g define uma imersão isométrica umbílica com mesmo espaço normal, em $\mathbb{L}^{n+2}$, que $\hat{g}$, em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}^{m-1}$. Note que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t,s) &= \phi_t(\gamma(s)) = \gamma_0 e_0 + 2\gamma_1 e_0 - 2\gamma_1 e_0 + \gamma_1 \hat{g} + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1} \\ &= (\gamma_0 - 2\gamma_1) e_0 + \gamma_1 g(t) + \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_{i-m+1} e_i + h(s) e_{n+1} \end{aligned}$$

Agora, observe que o espaço normal a $\tilde{g} := j \circ g$, em $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, é gerado por

$$N_t^{\tilde{g}} \mathbb{R}^{m-1} = \operatorname{span}\{e_0, \hat{g}, e_{m+1}, \cdots, e_n\}.$$

Daí, temos que

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_0 \rangle e_0 + \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), \hat{g} \rangle \hat{g} + \sum_{i=m+1}^{n} \langle \alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot), e_i \rangle e_i.$$

Mas, para quaisquer $X, Y \in T_t\mathbb{R}^{m-1}$, temos

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), e_0\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, e_0\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, e_0\rangle = 0,$$

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), \hat{g}\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, \hat{g}\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, \hat{g}\rangle - \langle \tilde{g}_* Y, \hat{g}_* X\rangle = -\langle \tilde{g}_* Y, \tilde{g}_* X\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

e

$$\langle \alpha^{\tilde{g}}(X,Y), e_i\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{g}_* Y, e_i\rangle = X\langle \tilde{g}_* Y, e_i\rangle = 0,\ m+1 \le i \le n.$$

Logo,

$$\alpha^{\tilde{g}}(\cdot,\cdot) = -\langle \cdot,\cdot\rangle \hat{g} = -\langle \cdot,\cdot\rangle \phi_t(\tilde{e}_1).$$

Contudo, a afirmação fica provada.

Agora, sejam $\{X_1, ..., X_{m-1}\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{X_1^{\mathcal{H}}}{\|X_1^{\mathcal{H}}\|}, ..., \frac{X_{m-1}^{\mathcal{H}}}{\|X_{m-1}^{\mathcal{H}}\|}\right\}$ bases ortonormais de $T_t\mathbb{S}^{m-1}$ e $T_{(s,t)}M$, respectivamente, em que $X_i^{\mathcal{H}}$ é o levantamento horizontal de X_i, para todo $1 \le i \le m-1$. Supondo que a curva γ seja parametrizada pelo comprimento de arco, segue de (1.1.19) e (1.1.21) que

$$\alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) = \phi_x(\gamma''(s)),$$

$$\begin{aligned} \alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_j^{\mathcal{H}}) &= -\alpha^{\tilde{g}}(A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i, X_j) + < \alpha^{\tilde{g}}(A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i, X_j), \phi_x(\gamma'(s)) > \phi_x(\gamma'(s)) \\ &= \beta(s)[\alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_j) - < \alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_j), \phi_x(\gamma'(s)) > \phi_x(\gamma'(s))] \\ &= \beta(s)\langle X_i, X_j\rangle[\alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_j) + \beta'(s)\phi_x(\gamma'(s))] \end{aligned}$$

e

$$\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2 = < \tilde{f}_* X_i^{\mathcal{H}}, \tilde{f}_* X_i^{\mathcal{H}} >_{\tilde{f}} = < A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i, A^{\tilde{g}}_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}X_i >_{\tilde{g}} = \beta^2(s),$$

para todo $1 \le i \le m-1$ e $s \in I$.

Contudo, segue da Equação de Gauss para a imersão isométrica $\tilde{f}$ que,

$$
\begin{aligned}
K_M\left(\frac{X_i^{\mathcal{H}}}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|}, \frac{X_j^{\mathcal{H}}}{\|X_j^{\mathcal{H}}\|}\right) &= \frac{< \alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_i^{\mathcal{H}}), \alpha^{\tilde{f}}(X_j^{\mathcal{H}}, X_j^{\mathcal{H}}) >}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2 \|X_j^{\mathcal{H}}\|^2} \\
&= \frac{\langle \alpha^{\tilde{g}}(X_i, X_i) + \beta'(s)\phi_x(\gamma'(s)), \alpha^{\tilde{g}}(X_j, X_j) + \beta'(s)\phi_x(\gamma'(s))\rangle}{\beta^2(s)} \\
&= \frac{a - \beta'^2(s)}{\beta^2(s)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
K_M\left(\frac{X_i^{\mathcal{H}}}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|}, \frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{< \alpha^{\tilde{f}}(X_i^{\mathcal{H}}, X_i^{\mathcal{H}}), \alpha^{\tilde{f}}(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) >}{\|X_i^{\mathcal{H}}\|^2} \\
&= -\frac{\beta''}{\beta}
\end{aligned}
$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq m-1$, em que $a = 1$ quando $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$ e f é do tipo esférico, $a = 0$ quando $\epsilon = -1$ e f é do tipo parabólico e $a = -1$ quando $\epsilon = -1$ e f é do tipo hiperbólico. Logo, M^m tem curvatura seccional constante c se, e somente se,

$$\beta'(s)^2 + c\beta(s)^2 = a. \tag{3.5.8}$$

Note que $-\dfrac{\beta''(s)}{\beta(s)} = c$, ou equivalentemente,

$$\beta''(s) + c\beta(s) = 0, \tag{3.5.9}$$

segue derivando (3.5.8). Para finalizar a prova, basta integrar as equações (3.5.9) e (3.5.8). Para o caso $\epsilon = 1$, temos que $c \geq 1$. Daí, segue de (3.5.9) que

$$\beta(s) = \gamma_0(s) = A\cos(\sqrt{c}s) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{c}s) \tag{3.5.10}$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ constantes. Substituindo (3.5.10) em (3.5.8), obtemos que

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{c}$$

. Desta forma podemos tomar $A=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}\theta_0$ e $B=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\cos\theta_0$. para algum $\theta_0\in\mathbb{R}$. Assim,

$$\gamma_0(s)=\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}\theta_0\cos(\sqrt{c}s)+\frac{1}{\sqrt{c}}\cos\theta_0\operatorname{sen}(\sqrt{c}s)=\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}s+\theta_0).$$

Substituindo s por $s-\dfrac{\theta_0}{\sqrt{c}}$, podemos supor que $\theta_0=0$. Logo, $\gamma_0(s)=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{sen}(\sqrt{c}s)$ e o item (i) do teorema fica provado. Os demais casos são análogos. ∎

3.6 Exemplos.

Nesta seção construiremos exemplos explícitos de imersões isométricas $f:M_c^m\to\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)\times\mathbb{R}$, com $\epsilon c\in(0,1)$. Para $\epsilon=1$, tais exemplos têm, em particular, a propriedade de que as composições $\tilde{f}=i\circ f\colon M_c^m\to\mathbb{R}^{2m-1}$ não possuem pontos fracamente umbílicos.

Seja $U\subset\mathbb{R}^{m-1}$ um aberto simplesmente conexo com coordenadas $(u_1,\cdots,u_{m-1})$. Considere uma solução $(\gamma_1,\cdots,\gamma_{m-1},\beta_1,\cdots,\beta_{m-2},\varphi)$ do sistema linear de EDP's

$$\begin{cases}(i)\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}=\delta_{i(m-1)}\gamma_{m-1},\\ (ii)\ \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u_1}=(1-C+\epsilon Cc)\beta_1,\\ (iii)\ \dfrac{\partial\gamma_j}{\partial u_i}=\delta_{ij}(1-C)\beta_i,\ 2\le i\le m-2,\\ (iv)\ \dfrac{\partial\gamma_{m-1}}{\partial u_{m-1}}=-\epsilon(1-C+\epsilon Cc)\varphi,\\ (v)\ \dfrac{\partial\beta_r}{\partial u_i}=-\delta_{ir}\gamma_i,\end{cases}\tag{3.6.1}$$

com $\epsilon c\in(0,1)$, satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i^2+(1-C+\epsilon Cc)\beta_1^2+(1-C)\sum_{r=2}^{m-2}\beta_r^2+\epsilon(1-C+\epsilon Cc)\varphi^2=0.\tag{3.6.2}$$

Temos que $g:U\to\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)$, definida por (2.4.4), em termos da solução do sistema (3.6.1), satisfazendo (3.6.2), pertence a classe $\mathcal{B}$ em relação a $\tilde{\zeta}:=\hat{\mathcal{P}}(\xi_1)$, dado por (2.4.5), e c.

Defina agora $\tilde{f}:M^m:=U\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}^{2m-3}(\epsilon)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{E}^{2m-1}$, por (3.0.2), em termos de g. As funções coordenadas de $\tilde{f}$ são, portanto:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1 &= -\epsilon C_\epsilon(s) C_\epsilon(u_{m-1}) + \tilde{\psi}(\gamma_{m-1} S_\epsilon(u_{m-1}) - \varphi C_\epsilon(u_{m-1})) \\
\tilde{f}_2 &= C_\epsilon(s) S_\epsilon(u_{m-1}) + \tilde{\psi}(\gamma_{m-1} C_\epsilon(u_{m-1}) + \epsilon\varphi S_\epsilon(u_{m-1})) \\
\tilde{f}_3 &= -S_\epsilon(s) \operatorname{sen}\ u_1 + \tilde{\psi}(\gamma_1 \cos\ u_1 - \beta_1 \operatorname{sen}\ u_1) \\
\tilde{f}_4 &= S_\epsilon(s) \cos\ u_1 + \tilde{\psi}(\gamma_1 \operatorname{sen}\ u_1 + \beta_1 \cos\ u_1) \\
&\vdots \\
\tilde{f}_{2m-3} &= \tilde{\psi}(\gamma_{m-2} \cos\ u_{m-2} - \beta_{m-2} \operatorname{sen}\ u_{m-2}) \\
\tilde{f}_{2m-2} &= \tilde{\psi}(\gamma_{m-2} \operatorname{sen}\ u_{m-2} + \beta_{m-2} \cos\ u_{m-2}) \\
\tilde{f}_{2m-1} &= Bs,
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

em que $B = \dfrac{\sqrt{1-\epsilon c}}{\sqrt{\epsilon c}}$, $\tilde{\psi} = -2(\varphi + \beta_1)\left(\sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i{}^2 + \sum_{r=1}^{m-2} \beta_r{}^2 + \epsilon\varphi^2\right)^{-1}$.

A Proposição 3.1 implica que a métrica induzida por $\tilde{f}$ possui curvatura seccional constante c. Para $\epsilon = 1$, segue do Lema 3.13 que $\tilde{f}$ não possui pontos fracamente umbílicos.

Soluções do sistema 3.6.1, satisfazendo 3.6.2, são obtidas, explicitamente, na Seção 2.4. A seguir exibiremos dois exemplos explicitos.

Exemplo 3.15. No Exemplos 2.12 obtemos uma classe de soluções para o sistema (3.6.1), satisfazendo (3.6.2), a saber,

$$\begin{aligned}
&\varphi(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \operatorname{senh} a u_{m-1}, \\
&\gamma_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \lambda_1 a \operatorname{senh} a u_1, \\
&\gamma_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = \lambda_i a \operatorname{senh} b u_i,\ 2 \leq i \leq m-2, \\
&\gamma_{m-1}(u_1, \cdots, u_{m-1}) = a \cosh a u_{m-1}, \\
&\beta_1(u_1, \cdots, u_{m-1}) = -\lambda_1 \cosh a u_1, \\
&\beta_i(u_1, \cdots, u_{m-1}) = -\lambda_i a b^{-1} \cosh b u_i\ 2 \leq i \leq m-2,
\end{aligned}$$

em que, $-a^2 := 1 - C/2$, $-b^2 := 1 - C$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i^2 = 1$. Substituindo as equações acima em (3.6.3), segue que as funções coordenadas da imersão isométrica $\tilde{f} : M_c^m \to \mathbb{S}^{2m-3} \times \mathbb{R} \subset$

$\mathbb{R}^{2m-1}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1 &= -\cos s\cos u_{m-1}+\tilde{\psi}(a\cosh au_{m-1}\operatorname{sen}\ u_{m-1}-\operatorname{senh} au_{m-1}\cos u_{m-1})\\
\tilde{f}_2 &= \cos s\operatorname{sen} u_{m-1}+\tilde{\psi}(a\cosh au_{m-1}\cos u_{m-1}+\operatorname{senh} au_{m-1}\operatorname{sen}\ u_{m-1})\\
\tilde{f}_3 &= -\operatorname{sen} s\operatorname{sen} u_1+\tilde{\psi}\lambda_1(a\operatorname{senh} au_1\cos\ u_1+\cosh au_1\operatorname{sen}\ u_1)\\
\tilde{f}_4 &= \operatorname{sen} s\cos u_1+\tilde{\psi}\lambda_1(a\operatorname{senh} au_1\operatorname{sen}\ u_1-\cosh au_1\cos\ u_1)\\
&\vdots\\
\tilde{f}_{2m-3} &= \tilde{\psi}\lambda_{m-2}(a\operatorname{senh} bu_{m-2}\cos\ u_{m-2}+ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2})\\
\tilde{f}_{2m-2} &= \tilde{\psi}\lambda_{m-2}(a\operatorname{senh} bu_{m-2}\operatorname{sen}\ u_{m-2}-ab^{-1}\cosh bu_{m-2}\cos\ u_{m-2})\\
\tilde{f}_{2m-1} &= s,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} = -2(\operatorname{senh} au_{m-1}-\lambda_1\cosh au_1)\Bigg(&\lambda_1^2a^2\operatorname{senh}^2 au_1+\sum_{i=2}^{m-2}\lambda_i^2a^2\operatorname{senh}^2 bu_i+a^2\cosh^2 au_{m-1}\\
&+\lambda_1^2\cosh^2 au_1+a^2b^{-2}\sum_{r=2}^{m-2}\lambda_i^2\cosh^2 bu_i+\operatorname{senh}^2 au_{m-1}\Bigg)^{-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.16. No Exemplos 2.13 obtemos uma classe de soluções para o sistema (3.6.1), satisfazendo (3.6.2), a saber,

$$\begin{aligned}
&\varphi(u_1,\cdots,u_{m-1}) = \operatorname{sen} au_{m-1},\\
&\gamma_1(u_1,\cdots,u_{m-1}) = \lambda_1 a\operatorname{senh} au_1,\\
&\gamma_i(u_1,\cdots,u_{m-1}) = \lambda_i a\operatorname{senh} bu_i,\ 2\le i\le m-2,\\
&\gamma_{m-1}(u_1,\cdots,u_{m-1}) = a\cos au_{m-1},\\
&\beta_1(u_1,\cdots,u_{m-1}) = -\lambda_1\cosh au_1,\\
&\beta_i(u_1,\cdots,u_{m-1}) = -\lambda_i ab^{-1}\cosh bu_i\ 2\le i\le m-2,
\end{aligned}$$

em que, $-a^2 := 1-C/2$, $-b^2 := 1-C$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2}\lambda_i^2 = 1$. Substituindo as equações acima em (3.6.3), segue que as funções coordenadas da imersão isométrica $\tilde{f}: M_c^m \to \mathbb{H}^{2m-3}\times\mathbb{R}\subset$

$\mathbb{R}^{2m-1}$ são dadas por

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{f}_1 & = & -\cosh s \cosh u_{m-1} + \tilde{\psi}(a \cos a u_{m-1} \operatorname{senh}\ u_{m-1} - \operatorname{sen} a u_{m-1} \cosh u_{m-1}) \\
\tilde{f}_2 & = & \cosh s \operatorname{senh} u_{m-1} + \tilde{\psi}(a \cos a u_{m-1} \cosh u_{m-1} - \operatorname{sen} a u_{m-1} \operatorname{senh} u_{m-1}) \\
\tilde{f}_3 & = & -\operatorname{senh} s \operatorname{sen} u_1 + \tilde{\psi}\lambda_1(a \operatorname{senh} a u_1 \cos\ u_1 + \cosh a u_1 \operatorname{sen}\ u_1) \\
\tilde{f}_4 & = & \operatorname{senh} s \cos u_1 + \tilde{\psi}\lambda_1(a \operatorname{senh} a u_1 \operatorname{sen}\ u_1 - \cosh a u_1 \cos\ u_1) \\
 & \vdots & \\
\tilde{f}_{2m-3} & = & \tilde{\psi}\lambda_{m-2}(a \operatorname{senh} b u_{m-2} \cos\ u_{m-2} + a b^{-1} \cosh b u_{m-2} \operatorname{sen}\ u_{m-2}) \\
\tilde{f}_{2m-2} & = & \tilde{\psi}\lambda_{m-2}(a \operatorname{senh} b u_{m-2} \operatorname{sen}\ u_{m-2} - a b^{-1} \cosh b u_{m-2} \cos\ u_{m-2}) \\
\tilde{f}_{2m-1} & = & s,
\end{array}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi} = -2(\operatorname{sen} a u_{m-1} - \lambda_1 \cosh a u_1) \Bigg(& \lambda_1^2 a^2 \operatorname{senh}^2 a u_1 + \sum_{i=2}^{m-2} \lambda_i^2 a^2 \operatorname{senh}^2 b u_i + a^2 \cos^2 a u_{m-1} \\
& + \lambda_1^2 \cosh^2 a u_1 + a^2 b^{-2} \sum_{r=2}^{m-2} \lambda_i^2 \cosh^2 b u_i - \operatorname{sen}^2 a u_{m-1} \Bigg)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Hipersuperfícies de $\mathbb{Q}^4(c)$ e $\mathbb{L}^4$

Neste capítulo abordamos o seguinte

*Problema *: Para quais hipersuperfícies* $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$, $c \neq 0$, *existe uma imersão isométrica* $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$*?*

Para $c = 0$, o *Problema ** foi estudado por M. Dajczer e L. A. Florit em [6], onde os autores exibem uma parametrização de Gauss para f.

Antes de enunciar os principais resultados deste capítulo, precisamos introduzir algumas definições. Dada uma superfície $g : M^2 \to \mathbb{Q}^3(\bar{c})$ em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$ de $\mathbb{Q}^4(c)$, $\bar{c} \geq c$, a hipersuperfície parametrizada pela aplicação $G : M^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^4(c)$ dada por

$$G(x,t) = exp_{g(x)}(t\xi(g(x))),$$

em que ξ é um campo de vetores normal unitário a inclusão $i : \mathbb{Q}^3(\bar{c}) \to \mathbb{Q}^4(c)$ e exp é a aplicação exponencial de $\mathbb{Q}^4(c)$, é chamada de *cone generalizado* sobre g.

Um *hélice* em $\mathbb{S}^n(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (respectivamente, $\mathbb{H}^n(c) \subset \mathbb{L}^{n+1}$) é uma curva suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (respectivamente, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n(c) \subset \mathbb{L}^{n+1}$) parametrizada pelo comprimento de arco tal que

$$\langle \gamma''(t), v \rangle = 0 \tag{4.0.1}$$

para algum $v \in \mathbb{E}^{n+1}$.

Uma hélice $\gamma : I \to \mathbb{S}^2(c) \subset \mathbb{R}^3$ pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (At + B, \sqrt{1/c - (At+B)^2}\,\mathrm{sen}\,\phi, \sqrt{1/c - (At+B)^2}\cos\phi),$$

em que A, B são constantes e $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sqrt{1/c(1-A^2)-(As+B)^2}}{1/c-(As+B)^2}ds.$

Hélices $\gamma : I \to \mathbb{H}^2(c) \subset \mathbb{L}^3$ são de três tipos distintos, conforme o vetor v em (4.0.1) seja do tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de $\mathbb{L}^3$, a qual é ortonormal com assinaturas $(1, -1, 1)$ e $(-1, 1, 1)$ no primeiro e segundo casos, respectivamente, e pseudo-ortonormal no último, com $\langle e_2, e_2\rangle = 0 = \langle e_1, e_1\rangle$, $\langle e_1, e_2\rangle = 1$ e $\langle e_3, e_3\rangle = 1$. Então uma parametrização de γ é, respectivamente,

$$\gamma^1(t) = (At+B, \sqrt{(At+B)^2-1/c}\cosh\phi(t), \sqrt{(At+B)^2-1/c}\,\mathrm{senh}\,\phi(t)),$$

em que $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sqrt{(As+B)^2+1/c(A^2-1)}}{(As+B)^2-1/c}ds,$

$$\gamma^2(t) = (At+B, \sqrt{(At+B)^2+1/c}\cos\phi(t), \sqrt{(At+B)^2+1/c}\,\mathrm{sen}\,\phi(t)),$$

em que $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sqrt{(As+B)^2+1/c(A^2+1)}}{(As+B)^2+1/c}ds$, e

$$\gamma^3(t) = (At+B, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-\gamma_2^2\right)\gamma_3^{-1}, \textstyle\int_0^t \displaystyle\frac{\sqrt{\gamma_3^2-A^2/c}}{\gamma_3^2}ds),$$

em que A, B são constantes.

O próximo teorema nos dá a solução para o Problema * em dois casos especiais.

Teorema 4.1. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície para a qual existe uma imersão isométrica $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$.*

(a) Suponha que f possua uma curvatura principal com multiplicidade dois. Se $c > 0$, então f é uma hipersuperfície de rotação, parametrizada como na Seção 1.2, cuja curva perfil é uma hélice em $\mathbb{Q}^2(c) \subset \mathbb{E}^3$ e $\tilde{f}$ é um cone generalizado sobre uma superfície com curvatura constante de uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{L}^4$. Se $c < 0$, então ou vale a mesma conclusão do caso anterior ou existem um mergulho isométrico $H : \mathbb{L}^4 \to \mathbb{L}^5$, uma inclusão umbílica $i : \mathbb{H}^4(c) \to \mathbb{L}^5$ e uma isometria $\Psi : \bar{M}^3 := H(\mathbb{L}^4) \cap i(\mathbb{H}^4(c)) \to M^3$ tais que $f \circ \Psi = i^{-1}|_{\bar{M}^3}$ e $\tilde{f} \circ \Psi = H^{-1}|_{\bar{M}^3}$.

(b) Se uma das curvaturas principais de f é zero, então f é um cone generalizado sobre uma superfície com curvatura constante de uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$ de $\mathbb{Q}^4(c)$,

$\bar{c} > c$, e $\tilde{f}$ é uma hipesuperfície de rotação parametrizada como na Seção 1.2, com

$$\gamma_1 = \begin{cases} a\cos\sqrt{c}t, & c > 0, \\ a\cosh\sqrt{-c}t, & c < 0. \end{cases}$$

Lembremos que uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+1}(c)$ é *holonômica* se M^n admite um sistema global de coordenadas ortogonais $(u_1, ..., u_n)$ tal que os campos de vetores coordenados $\dfrac{\partial}{\partial u_j}$ são autovetores do operador de Weingarten A de f. Defina $v_j = \|\partial/\partial u_j\|$, $e_j = v_j^{-1}\partial/\partial u_j$ e $V_j \in C^\infty(M)$, $1 \leq j \leq n$, por

$$Ae_j = v_j^{-1}V_je_j. \tag{4.0.2}$$

Assim, a primeira e a segunda formas fundamentais de f são

$$I = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 du_i^2 \text{ e } II = \sum_{i=1}^{n} V_iv_idu_i^2. \tag{4.0.3}$$

Sejam $v = (v_1, ..., v_n)$ e $V = (V_1, ..., V_n)$. Denominamos (v, V) o *par associado* a f.

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo e nos dá uma caracterização das hipersuperfícies com três curvaturas principais distintas que são soluções do Problema *.

Teorema 4.2. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica simplesmente conexa cujo par associado (v, V) satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_iv_i^2 = 1, \ \sum_{i=1}^{3} \delta_iv_iV_i = 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^{3} \delta_iV_i^2 = c, \tag{4.0.4}$$

em que $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, 1, 1)$ ou $(-1, 1, -1)$, conforme seja $c > 0$ ou $c < 0$, respectivamente. Então M^3 admite uma imersão isométrica em $\mathbb{L}^4$. Reciprocamente, se $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ é uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas para a qual existe uma imersão isométrica $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$, então f é, localmente, uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz (4.0.4).

Uma característica das hipersuperfícies $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ que podem ser imersas isometricamente em $\mathbb{L}^4$ é que a família de hipersuperfícies paralelas a f também possui a mesma propriedade. Este é o conteúdo do seguinte:

Teorema 4.3. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica cujo par associado (v, V) satisfaz* (4.0.4). *Então qualquer hipersuperfície paralela $f_t : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ de f também satisfaz* (4.0.4).

4.1 Demonstração do Teorema 4.1

Sejam $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ e $\tilde{f} : M^3 \to \mathbb{L}^4$ hipersuperfícies com $c \neq 0$. Segue do Lema 2.2 que, em cada ponto $x \in M^3$, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de T_xM que diagonaliza, simultaneamente, as segundas formas fundamentais de f e $\tilde{f}$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e μ_1, μ_2, μ_3 as curvaturas principais de f e $\tilde{f}$, correspondentes às direções e_1, e_2, e_3, respectivamente.

Lema 4.4. *(a) Suponha que f possua uma curvatura principal de multiplicidade* 2, *digamos, $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$. Se $c > 0$, então*

$$c + \lambda\lambda_3 = 0,\ \mu_3 = 0 \text{ e } c + \lambda^2 = -\mu_1\mu_2. \tag{4.1.1}$$

Se $c < 0$, então vale o mesmo que no caso anterior ou

$$\mu_1 = \mu_2 := \mu,\ c + \lambda^2 = -\mu^2,\ \text{ e } c + \lambda\lambda_3 = -\mu\mu_3. \tag{4.1.2}$$

(b) Suponha que $\lambda_3 = 0$. Então $\mu_1 = \mu_2 := \mu$,

$$c + \lambda_1\lambda_2 = -\mu^2 \tag{4.1.3}$$

e

$$c = -\mu\mu_3. \tag{4.1.4}$$

Demonstração: Pelas equações de Gauss para f e $\tilde{f}$, temos

$$c + \lambda_i\lambda_j = -\mu_i\mu_j,\ 1 \leq i \neq j \leq 3. \tag{4.1.5}$$

(a) Se $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, então as equações precedentes são

$$c + \lambda^2 = -\mu_1\mu_2, \tag{4.1.6}$$

$$c + \lambda\lambda_3 = -\mu_1\mu_3 \tag{4.1.7}$$

e

$$c + \lambda\lambda_3 = -\mu_2\mu_3. \tag{4.1.8}$$

Das duas últimas equações, resulta

$$\mu_3(\mu_1 - \mu_2) = 0, \tag{4.1.9}$$

portanto, $\mu_3 = 0$ ou $\mu_1 = \mu_2$. Segue de (4.1.6) que a segunda possibilidade não pode ocorrer se $c > 0$. Assim, quando $c > 0$, obtemos que $\mu_3 = 0$ e, então, $c + \lambda^2 = -\mu_1\mu_2$ e $c + \lambda\lambda_3 = 0$ por (4.1.6) e (4.1.8), respectivamente.

Quando $c < 0$, ou vale a mesma conclusão acima ou $\mu_1 = \mu_2 := \mu$ e, então, $c + \lambda^2 = -\mu^2$ e $c + \lambda\lambda_3 = -\mu\mu_3$ por (4.1.6) e (4.1.8), respectivamente.

(b) Se $\lambda_3 = 0$, segue de (4.1.5) que

$$c + \lambda_1\lambda_2 = -\mu_1\mu_2, \tag{4.1.10}$$

$$c = -\mu_1\mu_3 \tag{4.1.11}$$

e

$$c = -\mu_2\mu_3 \tag{4.1.12}$$

Segue que $\mu_3 \neq 0$ por (4.1.11) ou (4.1.12), estas equações, também, implicam que $\mu_1 = \mu_2 := \mu$, e obtemos (4.1.4). A equação (4.1.3) segue, agora, de (4.1.10). ∎

Demonstração do Teorema 4.1: (a): Suponha que f possua uma curvatura principal de multiplicidade 2, digamos, $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$. Suponha, de acordo com o Lema 4.4, primeiramente, que $c > 0$ ou que $c < 0$ e vale (4.1.1). Logo, $\lambda \neq 0$ e $\mu_1\mu_2 \neq 0$. A componente da equação de Codazzi para (A^f, e_1, e_3) na direção de e_2 nos dá que

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle\nabla_{e_3}e_1, e_2\rangle \tag{4.1.13}$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2$, segue da equação precedente que $\langle\nabla_{e_1}e_2, e_3\rangle = 0$. Logo, E_λ é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média $\eta = \nu e_3$. Além disso, usando que

$\lambda_1 = \lambda_2$, segue da componente da equação de Codazzi para (A^f, e_1, e_2) na direção de e_2, que $e_1(\lambda) = e_1(\lambda_2) = 0$. A mesma equação de Codazzi, na direção de e_1, nos traz que $e_2(\lambda) = e_2(\lambda_1) = 0$. Como $\lambda_3 = -c/\lambda$, segue que $e_1(\lambda_3) = 0 = e_2(\lambda_3)$, donde E_λ é uma distribuição esférica em M, isto é, é uma distribuição umbílica com vetor curvatura média paralelo. Portanto, as folhas σ de E_λ possuem curvatura seccional constante $\nu^2 + \lambda^2 + c = \nu^2 - \mu_1\mu_2$. Denotando por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de M^3 e $\tilde{f}^*T\mathbb{L}^4$, respectivamente, temos

$$\tilde{\nabla}_{e_i} f_* e_3 = f_* \nabla_{e_i} e_3 = -\nu f_* e_i, \ 1 \leq i \leq 3. \tag{4.1.14}$$

Logo, $\tilde{f}(\sigma)$ esta contido em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^3(\bar{c})$ de $\mathbb{L}^4$ com curvatura seccional constante $\bar{c} = \nu^2$ e $\tilde{f}_* e_3$ é o campo de vetores normal unitário ao longo de $\tilde{f}(\sigma)$. Além disso, uma vez que $E_\lambda^\perp = E_{\mu_3} = \{e_3\}$ é a distribuição de nulidade relativa de $\tilde{f}$, as curvas integrais de e_3 são geodésicas e suas imagens por $\tilde{f}$ são geodésicas de $\mathbb{L}^4$. Segue que $\tilde{f}(M^3)$ está contida em um cone generalizado sobre $\tilde{f}(\sigma)$.

Por outro lado, o Teorema 1.12 implica que f é uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{Q}^4(c)$, com curva geratriz $\gamma : I \to \mathbb{Q}^2(c) \subset \mathbb{E}^3$. Além disso, segue da Proposição 1.9 e de $\lambda\lambda_3 = -c$ que $\gamma_1'' = 0$, isto é, γ é uma hélice.

Por sua vez, suponha que $c < 0$ e que valha (4.1.2). Isto é, $\{e_1, e_2\} \subset T_xM$ é um subespaço umbílico comum às imersões isométricas f e $\tilde{f}$. De acordo com a demostração do Lema 2.2, este é o caso em que $\mathcal{S}(\beta)$ é degenerado. Nas notações da demonstração do Lema 2.2, temos que

$$\hat{\alpha}(\cdot,\cdot) = \langle \hat{\alpha}(\cdot,\cdot), \zeta\rangle\zeta + \gamma(\cdot,\cdot) = \langle \tilde{\alpha}(\cdot,\cdot), \tilde{N}\rangle\zeta + \gamma(\cdot,\cdot), \tag{4.1.15}$$

em que, $\gamma(\cdot,\cdot) := \langle A^{\hat{f}}_{\zeta^\perp}\cdot,\cdot\rangle\zeta^\perp$ é uma forma bilinear plana. Temos que $dim\mathcal{N}(\hat{\alpha}) = 0$ e $dim\mathcal{N}(\gamma) \geq 2$. Além disso, segue de (2.1.2) que $\hat{f}$ não é regrada, isto é, não pode ser folheada por superfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{L}^5$. Desta forma, argumentando como na demostração do Teorema 8, em [7], segue que $\hat{f} = i \circ f = H \circ \tilde{f}$, em que $i : \mathbb{H}^4 \to \mathbb{L}^5$ é a inclusão umbílica e $H : \mathbb{L}^4 \to \mathbb{L}^5$ é um mergulho isométrico.

(b): Prova-se de forma análoga à primeira parte da demostração do item (a), com os papéis de f e $\tilde{f}$ trocados. ∎

4.2 Demostração do Teorema 4.2

Considere, primeiramente, uma hipersuperfície holonômica arbitrária $f : M^m \to \mathbb{Q}_s^{m+1}(c)$. Com as notações da introdução deste capítulo, defina

$$h_{ij} = v_i^{-1} \frac{\partial v_j}{\partial u_i} \tag{4.2.1}$$

Note que

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right] = [v_i e_i, v_j e_j] = \frac{\partial v_j}{\partial u_i} e_j + v_j \nabla_{\partial/\partial u_i} e_j - \frac{\partial v_i}{\partial u_j} e_i - v_i \nabla_{\partial/\partial u_j} e_i,$$

donde $\langle \nabla_{\partial/\partial u_i} e_j, e_i \rangle = h_{ji}$ e, portanto,

$$\nabla_{\partial/\partial u_i} e_j = h_{ji} e_i. \tag{4.2.2}$$

Usando (4.2.2), o próximo resultado segue das equações de Gauss e de Codazzi de f (ver Proposição 2 em [9]).

Proposição 4.5. *A tripla (v, h, V), com $h_{ij} = \dfrac{1}{v_i} \dfrac{\partial v_j}{\partial u_i}$, satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais parciais completamente integravel*

$$\begin{cases} (i) \dfrac{\partial v_i}{\partial u_j} = h_{ji} v_j, \\ (ii) \dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki} h_{kj} + \kappa V_i V_j + c v_i v_j = 0, \;\; \kappa := -2s + 1 \\ (iii) \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = h_{ij} h_{jk}, \\ (iv) \dfrac{\partial V_i}{\partial u_j} = h_{ji} V_j, \quad 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Reciprocamente, se (v, h, V) é uma solução de (4.2.3) em um subconjunto aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$, com $v_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, então existe uma hipersuperfície holonômica $f \colon U \to \mathbb{Q}_s^{n+1}(c)$ cujas primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (4.0.3).

Demonstração do Teorema 4.2: Seja (v, V) o par associado a f. Defina

$$\tilde{V}_j = (-1)^{j+1} \delta_j (v_i V_k - v_k V_i), \;\; 1 \leq i \neq j \neq k \leq 3, \;\; i < k. \tag{4.2.4}$$

Então $\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3) \in \mathbb{R}^3$ é o único vetor em $\mathbb{R}^3$, a menos de sinal, tal que $(v, |c|^{-1/2}V, |c|^{-1/2}\tilde{V})$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com respeito ao produto interno

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \sum_{i=1}^{3} \delta_i x_i y_i. \tag{4.2.5}$$

Portanto, a matriz $D = (v, |c|^{-1/2}V, |c|^{-1/2}\tilde{V})$ satisfaz $D\delta D^t = \delta$, em que $\delta = \mathrm{diag}(-1, -c/|c|, -c/|c|)$. Segue, daí, que

$$v_i v_j + c/|c|^2 V_i V_j + c/|c|^2 \tilde{V}_i \tilde{V}_j = 0, \;\; 1 \leq i \neq j \leq 3. \tag{4.2.6}$$

Multiplicando (4.2.6) por c, obtemos

$$c v_i v_j + V_i V_j = -\tilde{V}_i \tilde{V}_j. \tag{4.2.7}$$

Substituindo (4.2.7) em (v) obtemos

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial h_{ji}}{\partial u_j} + h_{ki} h_{kj} - \tilde{V}_i \tilde{V}_j = 0.$$

Por outro lado, derivando (4.2.4) e usando as equações (i)–(iv), tem-se

$$\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial u_i} = h_{ij} \tilde{V}_i, \;\; 1 \leq i \neq j \leq 3.$$

Segue da Proposição 4.5 que existe uma hipersuperfície $\tilde{f}\colon M^3 \to \mathbb{L}^4$ cuja primeira e segunda formas fundamentais são

$$I = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 du_i^2 \;\; \text{and} \;\; II = \sum_{i=1}^{3} \tilde{V}_i v_i du_i^2,$$

assim M^3 admite uma imersão isométrica em $\mathbb{L}^4$.

Reciprocamente, suponha que $f\colon M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ seja uma hipersuperfície para a qual existe uma imersão isométrica $\tilde{f}\colon M^3 \to \mathbb{L}^4$. Pelo Lema 2.2, existe um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M^3 de direções principais comum a f e $\tilde{f}$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e μ_1, μ_2, μ_3 as curvaturas principais de f e $\tilde{f}$, correspondentes a e_1, e_2 e e_3, respectivamente. Suponha que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, e escolha o campo normal unitário a f de tal modo que

$\lambda_1 < 0$. Segue da equação de Gauss para f e $\tilde{f}$ que

$$c + \lambda_i\lambda_j = -\mu_i\mu_j, \;\; 1 \leq i \neq j \leq 3. \tag{4.2.8}$$

Obtemos que

$$\mu_j^2 = -\frac{(c+\lambda_j\lambda_i)(c+\lambda_j\lambda_k)}{c+\lambda_i\lambda_k}, \;\; 1 \leq j \neq i \neq k \neq j \leq 3. \tag{4.2.9}$$

As equações de Codazzi para f e $\tilde{f}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} e_i(\lambda_j) &= (\lambda_i - \lambda_j)\langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle, \; i \neq j, & (4.2.10)\\ (\lambda_j - \lambda_k)\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle &= (\lambda_i - \lambda_k)\langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle, \;\; i \neq j \neq k. & (4.2.11) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_i(\mu_j) &= (\mu_i - \mu_j)\langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle, \; i \neq j, & (4.2.12)\\ (\mu_j - \mu_k)\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle &= (\mu_i - \mu_k)\langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle, \;\; i \neq j \neq k. & (4.2.13) \end{aligned}$$

Multiplicando (4.2.13) por μ_j e usando (4.2.9) e (4.2.11), obtemos

$$c\frac{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)}{c+\lambda_i\lambda_k}\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = 0, \; i \neq j \neq k.$$

Como as curvaturas principais λ_1, λ_2 e λ_3 são distintas, segue que

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = 0, \;\; 1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 3. \tag{4.2.14}$$

Calculando $2\mu_j e_i(\mu_j)$, primeiramente derivando (4.2.9) e, depois, multiplicando (4.2.12) por $2\mu_j$ e usando (4.2.10), (4.2.8) e (4.2.9), obtemos

$$\begin{aligned} &(c+\lambda_j\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_j)e_i(\lambda_i) + (c+\lambda_i\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_i)e_i(\lambda_j)\\ &\qquad +(c+\lambda_i\lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)e_i(\lambda_k) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Agora, seja $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ o referencial dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$, e defina as 1-formas γ_j,

$1 \leq j \leq 3$, por

$$\gamma_j = \sqrt{\delta_j \frac{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)}{c + \lambda_i \lambda_k}} \omega_j, \quad 1 \leq j \neq i \neq k \neq j \leq 3, \tag{4.2.16}$$

em que $\delta_j = y_j/|y_j|$ para $y_j = \dfrac{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)}{c + \lambda_i \lambda_k}$.

Por (4.2.9), ou todos os três números $c + \lambda_j \lambda_i$, $c + \lambda_j \lambda_k$ e $c + \lambda_i \lambda_k$ são negativos (o que ocorre somente quando $c < 0$) ou dois deles são positivos e o outro negativo. Note que $c + \lambda_1 \lambda_2 > c + \lambda_1 \lambda_3$. Assim, os três números são negativos ou $c + \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Logo as possibilidades são

(I) $c + \lambda_i \lambda_j < 0$, $1 \leq i \neq j \leq 3$.

(II) $c + \lambda_1 \lambda_2 > 0$, $c + \lambda_1 \lambda_3 > 0$ e $c + \lambda_2 \lambda_3 < 0$.

(III) $c + \lambda_1 \lambda_2 > 0$, $c + \lambda_1 \lambda_3 < 0$ e $c + \lambda_2 \lambda_3 > 0$.

Note que $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ é igual a $(-1, 1, -1)$ no caso I, $(-1, -1, 1)$ no caso II e $(1, 1, 1)$ no caso III. Portanto, $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (-1, 1, -1)$ se $c < 0$ e, para $c > 0$, podemos supor que $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, 1, 1)$ depois de uma reordenação das coordenadas.

Afirmamos que (4.2.15) são, precisamente, as condições para que as 1-formas γ_j, $1 \leq j \leq 3$, sejam fechadas. Para provar isto, seja $x_j = \sqrt{\delta_j y_j}$, $1 \leq j \leq 3$, assim, $\gamma_j = x_j \omega_j$.

Segue de (4.2.14) que

$$d\gamma_j(e_i, e_k) = e_i \gamma_j(e_k) - e_k \gamma_j(e_i) - \gamma_j([e_i, e_k]) = 0.$$

Por outro lado, usando (4.2.10) obtemos

$$\begin{aligned} d\gamma_j(e_i, e_j) &= e_i \gamma_j(e_j) - e_j \gamma_j(e_i) - \gamma_j([e_i, e_j]) \\ &= e_i(x_j) + x_j \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle \\ &= e_i(x_j) + x_j \frac{e_i(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}. \end{aligned}$$

Logo, γ_j é fechada se, e somente se,

$$e_i(x_j) = \frac{x_j}{\lambda_j - \lambda_i} e_i(\lambda_j), \quad 1 \leq i \neq j \leq 3. \tag{4.2.17}$$

Temos que

$$e_i(x_j) = e_i((\delta_j y_j)^{1/2}) = \frac{1}{2}(\delta_j y_j)^{-1/2}\delta_j e_i(y_j) = \frac{\delta_j}{2x_j}e_i(y_j),$$

daí (4.2.17) é equivalente a

$$\frac{2x_j^2}{\lambda_j - \lambda_i}e_i(\lambda_j) = \delta_j e_i(y_j),$$

ou ainda, a

$$2(\lambda_j - \lambda_k)e_i(\lambda_j) = e_i(y_j)(c + \lambda_i\lambda_k).$$

A equação precedente é equivalente a

$$\begin{aligned}2(\lambda_j - \lambda_k)(c+\lambda_i\lambda_k)e_i(\lambda_j) = (e_i(\lambda_j) - e_i(\lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)(c+\lambda_i\lambda_k)\\ +(\lambda_j - \lambda_i)(e_i(\lambda_j) - e_i(\lambda_k))(c+\lambda_i\lambda_k)\\ -(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)(e_i(\lambda_i)\lambda_k + \lambda_i e_i(\lambda_k)),\end{aligned}$$

que é o mesmo que (4.2.15).

Portanto, todo ponto $x \in M^3$ possui uma vizinhança aberta V no qual podemos encontrar funções $u_j \in C^\infty(V)$, $1 \leq j \leq 3$, tais que $du_j = \gamma_j$. Podemos escolher V tão pequeno que $\Phi = (u_1, u_2, u_3)$ seja um difeomorfismo de V sobre um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, isto é, (u_1, u_2, u_3) são coordenadas locais em V. Segue de $\delta_{ij} = du_j(\partial/\partial u_i) = x_j\omega_j(\partial/\partial u_i)$ que $\partial/\partial u_i = v_i e_i$, com $v_i = x_i^{-1}$.

Agora note que

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_j v_j^2 = \sum_{i,k\neq j=1}^{3}\frac{c+\lambda_i\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_j v_j V_j = \sum_{j=1}^{3}\delta_j\lambda_j v_j^2 = \sum_{i,k\neq j=1}^{3}\lambda_j\frac{c+\lambda_i\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)} = 0$$

and

$$\sum_{j=1}^{3}\delta_j V_j^2 = \sum_{j=1}^{3}\delta_j\lambda_j^2 v_j^2 = \sum_{i,k\neq j=1}^{3}\lambda_j^2\frac{c+\lambda_i\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_k)} = c. \quad \blacksquare$$

4.3 Demonstração do Teorema 4.3

Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície. Defina φ e ψ por

$$(\varphi(t), \psi(t)) := \begin{cases} (\cos\sqrt{c}t, \operatorname{sen}\sqrt{c}t), & \text{se } c > 0 \\ (\cosh\sqrt{-c}t, \operatorname{senh}\sqrt{-c}t), & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Então a família de hipersuperfícies paralelas $f_t : M^3 \to Q^4_c \subset \mathbb{E}^5$ é dada por

$$i \circ f_t = \varphi(t) i \circ f + \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} i_* N,$$

em que N é um campo de vetores unitário normal a f e $i : \mathbb{Q}^4(c) \to \mathbb{E}^5$ é a inclusão canônica. Denote por M^3_t a variedade M^3 munida com a métrica induzida por f_t.

Lema 4.6. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c)$ uma hipersuperfície holonômica. Então qualquer hipersuperfície paralela $f_t : M^3_t \to Q^4_c$ é também holonômica e os pares (v, V) e (v^t, V^t) associados a f e f_t, respectivamente, são relacionados por*

$$\begin{cases} v^t_i = \varphi(t) v_i - \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} V_i, \\ V^t_i = sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t) v_i + \varphi(t) V_i. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Demonstração: Temos

$$f_{t*} = \varphi(t) f_* + \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} N_* = f_*\left(\varphi(t) I - \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} A^f\right), \tag{4.3.2}$$

assim um campo de vetores unitário normal a f_t é

$$N_t = -sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t) f + \varphi(t) N.$$

Então

$$\begin{aligned} N_{t*} &= f_*(-sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t) I - \varphi(t) A^f) \\ &= -f_{t*}\left(\varphi(t) I - \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} A^f\right)^{-1} (sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t) I + \varphi(t) A^f) \end{aligned}$$

o que implica

$$A_t = \left(\varphi(t)I - \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}}A^f\right)^{-1} (sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t)I + \varphi(t)A^f). \tag{4.3.3}$$

Segue de (4.3.2) e (4.3.3) que f_t é holonômica com par associado dado por (4.3.1). ∎

Demostração do Teorema 4.3: Usando (4.0.4), segue do Lema 4.6 que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^{t2} &= \sum_{i=1}^{3} \delta_i \left(\varphi(t)v_i - \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}}V_i\right)^2 \\
&= \varphi(t)^2 \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 - 2\varphi(t)\frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i + \frac{\psi(t)^2}{|c|} \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 \\
&= \varphi(t)^2 + sgn(c)\psi(t)^2 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^t V_i^t &= \sum_{i=1}^{3} \delta_i \left(\varphi(t)v_i - \frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}}V_i\right)\left(sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t)v_i + \varphi(t)V_i\right) \\
&= sgn(c)\sqrt{|c|}\varphi(t)\psi(t) \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 + (\varphi(t)^2 - sgn(c)\psi(t)^2) \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i - \varphi(t)\frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}} \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 \\
&= sgn(c)\sqrt{|c|}\varphi(t)\psi(t) - \varphi(t)\frac{\psi(t)}{\sqrt{|c|}}c = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^{t2} &= \sum_{i=1}^{3} \delta_i \left(sgn(c)\sqrt{|c|}\psi(t)v_i + \varphi(t)V_i\right)^2 \\
&= |c|\psi(t)^2 \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i^2 + 2sgn(c)\sqrt{|c|}\varphi(t)\psi(t) \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i V_i + \varphi(t)^2 \sum_{i=1}^{3} \delta_i V_i^2 \\
&= |c|\psi(t)^2 + c\varphi(t)^2 = c \ ∎
\end{aligned}$$

4.4 Exemplos

Nesta seção exibiremos exemplos de hipersuperfícies com três curvaturas principais distintas e não nulas que são soluções do *Problema **. Tais exemplos são obtidos através da transformação de Ribaucour. Para mais detalhes sobre como construí-los, ver [3].

Exemplo 4.7. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$, $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$, dada por

$$\begin{aligned} f_1 &= \operatorname{sen} u_3 + g(\cos\theta \cosh u_3 \cos u_3 + \cos\theta \operatorname{senh} u_3 \operatorname{sen} u_3), \\ f_2 &= -g \operatorname{senh} \sqrt{2} u_2, \\ f_3 &= -g(\operatorname{sen}\theta \cosh u_1 \cos u_1 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} u_1 \operatorname{sen} u_1), \\ f_4 &= g(\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} u_1 \cos u_1 - \operatorname{sen}\theta \cosh u_1 \operatorname{sen} u_1), \\ f_5 &= \cos u_3 + g(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cos u_3 - \cos\theta \cosh u_3 \operatorname{sen} u_3), \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

em que

$$g = -2\cos\theta \operatorname{senh} u_3 h,$$

e

$$h = (2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{senh}^2 u_1 + \cosh^2 \sqrt{2} u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)^{-1}$$

para algum $\theta \in [0.2\pi]$. A aplicação f parametriza uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas que é uma solução do *Problema ** com $c = 1$. De fato, seja $\tilde{f} : U \to \mathbb{L}^4$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4)$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= -2g \operatorname{sen}\theta \cosh u_1 \\ \tilde{f}_2 &= g(\sqrt{2}\cosh \sqrt{2} u_2 \operatorname{senh} u_2 - 2\operatorname{senh}\sqrt{2} u_2 \cosh u_2) \\ \tilde{f}_3 &= u_3 + 2g\cos\theta \cosh u_3 \\ \tilde{f}_4 &= g(\sqrt{2}\cosh\sqrt{2} u_2 \cosh u_2 - 2\operatorname{senh}\sqrt{2} u_2 \operatorname{senh} u_2). \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Então verifica-se que a métrica induzida em U tanto por f como por $\tilde{f}$ é $ds^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 du_i^2$, em que

$$\begin{aligned} v_1 &= 4(\operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{senh} u_1 \operatorname{senh} u_3)h, \\ v_2 &= 2\sqrt{2}(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cosh \sqrt{2} u_2)h, \\ v_3 &= (2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{senh}^2 u_1 + \cosh^2\sqrt{2} u_2 - 2\cos^2 \operatorname{senh}^2 u_3)h. \end{aligned}$$

Além disso, f e $\tilde{f}$ são holonômicas, com (u_1, u_2, u_3) como coordenadas principais, e os pares associados a f e $\tilde{f}$ são, respectivamente, (v, V) e $(v, \tilde{V})$, com

$$\begin{aligned} V_1 &= (-2\operatorname{sen}^2 \operatorname{senh}^2 u_1 + \cosh^2 \sqrt{2}u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)h, \\ V_2 &= -2\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} u_1 \cosh \sqrt{2}u_2)h, \\ V_3 &= 4(\operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{senh} u_1 \operatorname{senh} u_3)h. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= -2\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} u_1 \cosh \sqrt{2}u_2)h, \\ \tilde{V}_2 &= (2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{senh}^2 u_1 - \cosh^2 \sqrt{2}u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)h, \\ \tilde{V}_3 &= 2\sqrt{2}(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cosh \sqrt{2}u_2)h. \end{aligned}$$

Exemplo 4.8. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}^4 \subset \mathbb{L}^5$, $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$, dada por

$$\begin{aligned} f_1 &= \cosh u_2 + g(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} u_2 \cosh u_2 - \operatorname{sen}\theta \cos u_2 \operatorname{senh} u_2) \\ f_2 &= -g(\cos\theta \cosh u_3 \cos u_3 + \cos\theta \operatorname{senh} u_3 \operatorname{sen} u_3) \\ f_3 &= -g \operatorname{senh} \sqrt{2}u_1 \\ f_4 &= g(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cos u_3 - \cos\theta \cosh u_3 \operatorname{sen} u_3) \\ f_5 &= \operatorname{senh} u_2 + g(\operatorname{sen}\theta \operatorname{senh} u_2 \operatorname{sen} u_2 - \operatorname{sen}\theta \cosh u_2 \cos u_2) \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

em que

$$g = -2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} u_2 h,$$

e

$$h = (-\cosh^2 \sqrt{2}u_1 + 2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 u_2 - 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)^{-1}$$

para algum $\theta \in [0.2\pi]$. A aplicação f parametriza uma hipersuperfície com três curvaturas principais distintas, a qual é uma solução do *Problema ** com $c = -1$. De fato, seja

$\tilde{f} : U \to \mathbb{L}^4$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4)$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= g(\sqrt{2}\cosh\sqrt{2}u_1 \operatorname{senh} u_1 - 2\operatorname{senh}\sqrt{2}u_1 \cosh u_1) \\ \tilde{f}_2 &= u_2 - 2g \operatorname{sen}\theta \cos u_2 \\ \tilde{f}_3 &= -2g\cos\theta\cosh u_3 \\ \tilde{f}_4 &= g(\sqrt{2}\cosh\sqrt{2}u_1 \cosh u_1 - 2\operatorname{senh}\sqrt{2}u_1 \operatorname{senh} u_1). \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Verifica-se que a métrica induzida em U tanto por f como por $\tilde{f}$ é $ds^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 du_i^2$, em que

$$\begin{aligned} v_1 &= 2\sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} u_2 \cosh\sqrt{2}u_1)h, \\ v_2 &= -(\cosh^2\sqrt{2}u_1 + 2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)h, \\ v_3 &= 4(\operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{sen} u_2 \operatorname{senh} u_3)h. \end{aligned}$$

Além disso, f e $\tilde{f}$ são holonômicas, com (u_1, u_2, u_3) como coordenadas principais, e os pares associados a f e $\tilde{f}$ são, respectivamente, (v, V) e $(v, \tilde{V})$, com

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\sqrt{2}(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cosh\sqrt{2}u_1)h, \\ V_2 &= -4(\operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{sen} u_2 \operatorname{senh} u_3)h, \\ V_3 &= (-\cosh^2\sqrt{2}u_1 + 2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)h \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= (-\cosh^2\sqrt{2}u_1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 u_2 + 2\cos^2\theta \operatorname{senh}^2 u_3)h, \\ \tilde{V}_2 &= 2(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} u_2 \cosh\sqrt{2}u_1)h, \\ \tilde{V}_3 &= -2\sqrt{2}(\cos\theta \operatorname{senh} u_3 \cosh\sqrt{2}u_1)h. \end{aligned}$$

Apêndice A

Algumas definições e resultados utilizados

Neste apêndice colocamos diversos resultados da teoria de Formas Bilineares Planas, utilizados durante a tese mas que não são demonstrados no texto principal. Os resultados deste apêndice não são demonstrados aqui, mas são dadas referências nas quais tais resultados podem ser consultados.

Seja $W^{p,q}$ um espaço vetorial de dimensão $p+q$ munido com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de índice q (dimensão do maior subespaço $V \subset W^{(p,q)}$ cuja métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle|_V$, restrita a V, satisfaz $\langle v,v\rangle < 0$, $\forall v \in V$). Sejam V e U subespaços vetoriais de dimensão finita. Uma forma bilinear $\beta : V \times U \to W^{p,q}$ é dita ser *plana* se

$$\langle\beta(X,Y),\beta(Z,T)\rangle - \langle\beta(X,T),\beta(Z,Y)\rangle = 0$$

para todo $X,Z \in V$ e $Y,T \in U$. Denominamos ser *nula* se

$$\langle\beta(X,Y),\beta(Z,T)\rangle = 0$$

para todo $X,Z \in V$ e $Y,T \in U$. Assim, toda forma bilinear nula é, necessariamente, plana.

Denotaremos por $\mathcal{S}(\beta)$ o subespaço de W gerado pela imagem de β, isto é,

$$\mathcal{S}(\beta) = span\{\beta(X,Y) : X,Y \in V\}$$

e por $\mathcal{N}(\beta)$ o subespaço

$$\mathcal{N}(\beta) = \{X \in V : \beta(X, Y) = 0, \forall Y \in V\}.$$

O proximo resultado é um fato básico sobre formas bilinear planas (Ver Corolário 1 e 2 em [17]):

Teorema A.1. *Seja $\beta : V \times V \to W$ uma forma bilinear plana com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em W. Suponha que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seja positivo definido ou Lorentziano (índice 1) e, no último caso, suponha que $\mathcal{S}(\beta)$ seja um subespaço não-degenerado de W, isto é, $\mathcal{S}(\beta) \cap \mathcal{S}(\beta)^{\perp} = \{0\}$. Então*

$$dim\mathcal{N}(\beta) \geq dimV - dimW.$$

Outro fato que utilizamos com freqência nesta tese é a seguinte consequência do Teorema 2 em [17].

Teorema A.2. *Seja $\beta : V \times V \to W$ uma forma bilinear plana com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em W. Suponha que $dimV = dimW$, que $\mathcal{N}(\beta) = \{0\}$ e que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seja positivo definido ou Lorentziano. Além disso, no último caso, suponha que exista um vetor $e \in W$ tal que $\langle \beta(\cdot, \cdot), e \rangle$ é positivo definido. Então existe uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ que diagonaliza β, isto é, $\beta(e_i, e_j) = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Referências Bibliográficas

[1] Aledo, J. A., Espinar, J. M., and Gálvez, J. A. Complete surfaces of constant curvature in $H^2 \times \mathbb{R}$ and $S^2 \times \mathbb{R}$. *Calc. Var. Partial Differential Equations 29*, 3 (2007), 347–363.

[2] Aledo, J. A., Espinar, J. M., and Gálvez, J. A. Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Height estimates and representation. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 38*, 4 (2007), 533–554.

[3] Canevari, S., and Tojeiro, R. Hypersurfaces of two space forms and conformally flat hypersurfaces. In preparation (2015).

[4] Carter, S., and West, A. Partial tubes about immersed manifolds. *Geom. Dedicata 54*, 2 (1995), 145–169.

[5] Dajczer, M. *Submanifolds and isometric immersions*, vol. 13 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Based on the notes prepared by Mauricio Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima-Filho and Rui Tojeiro.

[6] Dajczer, M., and Florit, L. A. On conformally flat submanifolds. *Comm. Anal. Geom. 4*, 1-2 (1996), 261–284.

[7] Dajczer, M., and Tojeiro, R. On compositions of isometric immersions. *J. Differential Geom. 36*, 1 (1992), 1–18.

[8] Dajczer, M., and Tojeiro, R. Isometric immersions and the generalized Laplace and elliptic sinh-Gordon equations. *J. Reine Angew. Math. 467* (1995), 109–147.

[9] Dajczer, M., and Tojeiro, R. An extension of the classical Ribaucour transformation. *Proc. London Math. Soc. (3) 85*, 1 (2002), 211–232.

[10] Dajczer, M., and Tojeiro, R. Commuting Codazzi tensors and the Ribaucour transformation for submanifolds. *Results Math. 44*, 3-4 (2003), 258–278.

[11] Dillen, F., Fastenakels, J., and Van der Veken, J. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Note Mat. 29*, 1 (2009), 41–54.

[12] do Carmo, M., and Dajczer, M. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc. 277*, 2 (1983), 685–709.

[13] Lira, J. H., Tojeiro, R., and Vitório, F. A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms. *Arch. Math. (Basel) 95*, 5 (2010), 469–479.

[14] Manfio, F., and Tojeiro, R. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math. 55*, 1 (2011), 397–415 (2012).

[15] Mendonça, B. *Imersões isométricas em produto de duas formas espaciais.* PhD em matemática, Departamento de Matemática – Universidade Federal de São Carlos, http://www.dm.ufscar.br/ppgm/attachments/article/179/4348.pdf, 2002.

[16] Mendonça, B., and Tojeiro, R. Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *Canad. J. Math. 66*, 2 (2014), 400–428.

[17] Moore, J. D. Submanifolds of constant positive curvature. I. *Duke Math. J. 44*, 2 (1977), 449–484.

[18] O'Neill, B. Umbilics of constant curvature immersions. *Duke Math. J. 32* (1965), 149–159.

Índice Remissivo