

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Folheações Riemannianas e
Geodésicas Fechadas em Orbifolds**

CRISTIANO AUGUSTO DE SOUZA

São Carlos - SP
Março de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folheações Riemannianas e Geodésicas Fechadas em Orbifolds

CRISTIANO AUGUSTO DE SOUZA

Orientador: PROF. DR. ALEXANDRE PAIVA BARRETO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Março de 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719f Souza, Cristiano Augusto de
Folheações riemannianas e geodésicas fechadas em orbifolds / Cristiano Augusto de Souza. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
87 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Folheação Riemanniana. 2. Espaço das folhas. 3. Orbifold. 4. Geodésica fechada. 5. Processo de encurtamento. I. Título.




Folha de Aprovação

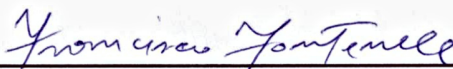
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cristiano Augusto de Souza, realizada em 04/03/2016:



Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto
UFSCar



Prof. Dr. Dirk Toben
UFSCar



Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto
UFF

*Aos meus sonhos de infância, que
recheados de inocência, se realizaram
em um piscar de olhos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, razão do meu viver, pelas grandes coisas que tem feito em minha vida, por me fazer forte quando sou fraco e por estar comigo em todos os momentos.

Ao professor Alexandre Paiva, profissional que inspira admiração e respeito, por sua inestimável orientação. Pela boa vontade, paciência e pelas muitas horas que a mim dedicou.

Ao professor Dirk Töben, pelo aprendizado em sua disciplina de pós-graduação. Pela confiança e pronta disposição em me auxiliar quando precisei, e pelas sugestões que aprimoraram este trabalho.

Ao professor Francisco Fontenele, pela disposição em participar das bancas de qualificação e defesa. Também por suas sugestões que contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao professor e amigo Stelhos Casmeridis, pela confiança, inspiração e pelo inestimável tempo em que estive a me ensinar. Sobretudo, agradeço por sua contribuição no âmbito pessoal, seu modo simples de enxergar a ciência e a vida foram de vital importância para a minha formação.

Aos professores e amigos que tive a felicidade de conviver durante minha graduação. Em especial, à professora Márcia Kashimoto, pelo incentivo desde os meus primeiros anos de graduação e pelos valiosos conselhos para que eu chegasse até aqui.

À minha família: ao meu pai, pelo amor e inspiração, à minha mãe, pelo amor e pelas orações, aos meus irmãos, pela motivação, carinho e pela torcida que antecede cada conquista.

Aos meus amigos queridos, que formaram uma forte torcida pelo meu crescimento profissional. Especialmente ao amigo Filipe Fernandes, com quem dividi inúmeros momentos de alegria e preocupação durante o mestrado.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática com os quais convivi, cursando disciplinas e vivenciando a prática acadêmica. Em especial, agradeço ao colega Francisco Caramello, pelas muitas sugestões e discussões que influenciaram este trabalho.

Enfim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A presente dissertação é devotada ao estudo de geodésicas fechadas em alguns tipos de orbifolds. Primeiro, é apresentada a noção de folheação Riemanniana bem como suas equivalentes definições via atlas folheados e submersões Riemannianas. Visando compreender o espaço das folhas de certas folheações, é introduzido o conceito de orbifold. Também será abordada a noção de orbifolds via pseudogrupos. Para orbifolds riemannianos compactos bons, é provada a existência de geodésicas fechadas de comprimento positivo. O principal objetivo deste trabalho é empregar o processo de encurtamento com relação às folheações Riemannianas para obter geodésicas fechadas em orbifolds riemannianos compactos. Seguindo a abordagem de Alexandrino e Javaloyes [5], também discutimos sobre a existência de geodésicas fechadas no espaço das folhas de algumas classes de folheações Riemannianas singulares.

Palavras-Chave: folheação Riemanniana; espaço das folhas; orbifold; geodésica fechada; processo de encurtamento.

Abstract

The present thesis is devoted to the study of closed geodesics in some types of orbifolds. First, we present the notion of Riemannian foliation and their equivalent definitions using foliation atlas and Riemannian submersions. Aiming to understand the leaf space of certain foliations, we introduce the concept of orbifold. Also, the notion of orbifolds will be addressed via pseudogroups. For compact Riemannian good orbifolds, we will prove the existence of non-trivial closed geodesics. The main objective of this work is to obtain closed geodesics in compact Riemannian orbifolds by employing the shortening process with respect to Riemannian foliations. Following the approach of Alexandrino and Javaloyes [5], we also discuss the existence of closed geodesics in the leaf spaces for some classes of singular Riemannian foliations.

Keywords: Riemannian foliation; leaf space; orbifold; closed geodesic; shortening process.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Geometria Riemanniana	11
1.2 Grupos de Lie	19
1.3 Ações de grupos	21
1.4 Espaço das órbitas	25
2 Folheações	29
2.1 Folheações	29
2.2 Holonomia	35
2.3 Folheações Riemannianas	37
2.4 Propriedades das folheações Riemannianas	39
3 Orbifolds	46
3.1 Orbifolds	46
3.2 Orbifolds riemannianos	49
3.3 Recobrimento e grupo fundamental orbifold	54
4 Geodésicas fechadas em orbifolds	58
4.1 Geodésicas em orbifolds	58
4.2 Processo de encurtamento	68
4.3 Principais resultados	76

Introdução

Intuitivamente, uma folheação \mathcal{F} de uma variedade M é uma decomposição de M em subvariedades imersas, as folhas da folheação. Estas devem ter mesma dimensão e encaixar-se de modo bem comportado. No caso onde as folhas possuem dimensões diferentes, diz-se que \mathcal{F} é uma folheação singular.

Folheações ocorrem naturalmente em vários contextos geométricos, por exemplo, como soluções de equações diferenciais e em Geometria Simplética. A noção geral foi primeiramente introduzida por Ehresmann e Reeb em 1944, motivados pela questão da existência de campos de vetores completamente integráveis em variedades tridimensionais.

No segundo capítulo são apresentadas equivalentes descrições para uma folheação. Um simples exemplo é a decomposição de uma variedade M dada pelos níveis de uma submersão. De modo mais geral, será demonstrado que toda folheação de M é uma decomposição em folhas que são localmente descritas pelas fibras de uma submersão.

Sendo uma folheação \mathcal{F} partição de M , pode-se definir o espaço das folhas M/\mathcal{F} , ou seja, o espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente. Em geral, M/\mathcal{F} possui uma estrutura muito complicada, por exemplo, pode não ser um espaço de Hausdorff. No entanto, para uma folheação Riemanniana, são apresentadas propriedades que ilustram o comportamento de \mathcal{F} .

Em 1959 B. Reinhart [27] introduziu a noção de folheação Riemanniana. Tal definição requer que a variedade M possua uma métrica Riemanniana tal que as folhas de \mathcal{F} sejam localmente equidistantes. Um modo equivalente de descrever folheações Riemannianas é impondo que toda geodésica perpendicular em algum ponto a uma folha de \mathcal{F} permaneça perpendicular a todas as folhas por ela intersectadas. Outra descrição é através de pseudogrupos, que forma parte da teoria de Γ -estruturas dada por A. Haefliger.

Se \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana com folhas compactas, o espaço das folhas tem localmente a mesma estrutura que o espaço das órbitas de um grupo finito agindo sobre

uma bola aberta no espaço euclidiano. Espaços com tal estrutura, que ocorrem também em outros contextos, foram estudados por Satake [29] com o nome de “V-manifolds”, e posteriormente por Thurston [30] que os chamou de “orbifolds”. No Capítulo 3 é dada uma relação entre orbifolds e folheações Riemannianas, a saber, que todo orbifold Riemanniano pode ser descrito pelo espaço das folhas de uma folheação Riemanniana com folhas compactas e vice-versa.

É possível estabelecer uma noção de métrica em orbifolds e definir geodésicas. O teorema clássico de Fet afirma que toda variedade Riemanniana compacta possui uma geodésica fechada não trivial. É natural questionar se existe resultado análogo para um orbifold riemanniano compacto \mathcal{O} . Em [14], Guruprasad e Haefliger provaram a existência de geodésicas fechadas em \mathcal{O} nos seguintes casos:

1. \mathcal{O} é um orbifold bom da forma M/Γ , ou seja, é o quociente de uma variedade Riemanniana M por um grupo de isometrias Γ que é finito ou tem um elemento de ordem infinita.
2. \mathcal{O} não é um orbifold bom.

No Capítulo 4, é dada uma demonstração alternativa do item 1. com base na referência [5]. Também, será construído o processo de encurtamento em relação às folheações Riemannianas que fornece um algoritmo para obter geodésicas fechadas em alguns tipos especiais de orbifolds.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, recordamos alguns conceitos e resultados básicos de geometria Riemanniana, grupos Lie e ações de grupos. A maioria dos resultados serão apresentados sem demonstração, para uma leitura mais detalhada indicamos Alexandrino [4], do Carmo [12], Petersen [25] e Duistermaat [13].

A primeira seção é uma seleção de definições e resultados básicos de geometria Riemanniana que serão empregados no decorrer do trabalho. Começamos introduzindo a noção de métrica, conexão, geodésica e aplicação exponencial. Exploramos algumas propriedades sobre comprimento e energia de geodésicas. Visando o estudo de conexões de Bott no Capítulo 2, falaremos de subvariedades e conexão normal. Em seguida, é apresentado um resultado sobre submersões Riemannianas e levantamento de geodésicas, que permitirá descrever as folheações Riemannianas.

Na segunda seção, falaremos de grupos de Lie. Apesar de tal teoria ser ampla e um tópico central na matemática moderna, seremos breves e objetivos, dando ênfase ao grupo de isometrias em uma variedade Riemanniana. No restante do capítulo, são estudados as ações de grupos de Lie e o espaço das órbitas de uma ação. Uma boa referência para um estudo mais geral de grupos topológicos e domínios fundamentais é o livro de Ratcliffe [26].

1.1 Geometria Riemanniana

Vamos assumir que o conteúdo básico de variedades diferenciáveis é conhecido; maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em Lima [17] ou Warner [31].

Trabalharemos sempre com variedades conexas e suaves (isto é, de classe C^∞). Para

uma variedade M , denotaremos o espaço tangente a M no ponto $p \in M$ por T_pM e o fibrado tangente será denotado por TM . O anel das funções reais suaves em M será representado por $C^\infty(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ representará o módulo (sobre $C^\infty(M)$) dos campos de vetores suaves em M .

Definição 1.1. Uma **variedade Riemanniana** (M, g) é uma variedade suave M munida de uma **métrica** (Riemanniana) g , isto é, g é uma aplicação suave que faz corresponder a cada ponto p de M um produto interno (ou seja, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) g_p no espaço tangente T_pM . Algumas vezes escreveremos $\langle X, Y \rangle_p = g_p(X, Y)$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Um resultado clássico de geometria garante que toda variedade suave admite uma métrica Riemanniana. Para consultas futuras, destacamos um resultado simples que explora a continuidade da métrica g .

Observação 1.2. Se (M, g) é uma variedade Riemanniana e $(p_i, u_i)_{i \in \mathbb{N}}, (p_i, v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são seqüências em TM convergindo para $(p, u), (p, v) \in TM$, respectivamente, então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_{p_i}(u_i, v_i) = g_p(u, v).$$

Uma aplicação diferenciável $f : (M, g^M) \rightarrow (N, g^N)$ **preserva métrica** se

$$g_p^M(X, Y) = g_{f(p)}^N(df_p X, df_p Y),$$

para todo $p \in M, X, Y \in T_pM$.

Definição 1.3. Sejam M, N variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Quando f for um difeomorfismo que preserva métrica, diremos que f é uma **isometria**. A aplicação f será chamada de **isometria local** quando, para todo $p \in M$, existir uma vizinhança aberta U de p tal que a restrição $f : U \rightarrow f(U)$ é uma isometria.

Quando M é conexa, definimos a distância (Riemanniana) $\text{dist}(p, q)$ entre dois pontos $p, q \in M$ como sendo o ínfimo dos comprimentos de todos os segmentos de curvas suave por partes unindo p a q , onde o **comprimento** de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$ é definido por

$$l(c) := \int_a^b \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle} dt.$$

Pode-se provar que (M, dist) é um espaço métrico e que a topologia induzida pela distância coincide com a topologia original do atlas de M (veja, por exemplo, Lee [16], Lemma 6.2, página 94).

De modo semelhante ao comprimento de curva, definimos a energia de uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$ por

$$E(c) = \int_a^b \langle c'(t), c'(t) \rangle dt.$$

Fazendo $f \equiv 1$ e $g = \|c'\| = \sqrt{\langle c', c' \rangle}$ na desigualdade de Schwartz:

$$\left(\int_a^b fg dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dt \cdot \int_a^b g^2 dt,$$

obtemos

$$l(c)^2 \leq (b - a)E(c),$$

e a igualdade ocorre se e somente se g é constante, ou seja, se e somente se t é proporcional ao comprimento de arco.

Introduziremos a noção de conexão afim, que nos permitirá dar sentido aos conceitos de transporte paralelo, de derivação ao longo de curvas e de geodésicas.

Definição 1.4. Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade suave M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que indicaremos por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Além disso, se (M, g) é uma variedade Riemanniana, diz-se que uma conexão afim ∇ é **compatível com a métrica** g se

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Diz-se que ∇ é **simétrica** se sua torção é nula, isto é, se

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.5 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ , chamada de **conexão de Levi-Civita** (ou **conexão Riemanniana**), que é compatível com g e é simétrica.*

Salvo se dissermos o contrário, quando nos referirmos a uma conexão ficará implícito que trata-se da conexão de Levi-Civita.

A definição de conexão não é tão transparente quanto a de estrutura Riemanniana. A seguinte proposição, no entanto, deverá esclarecer um pouco a situação.

Proposição 1.6. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇ e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave. Denote por $\mathfrak{X}_\gamma(TM)$ o conjunto dos campos de vetores suaves ao longo de γ . Existe uma única correspondência que, para cada $X \in \mathfrak{X}_\gamma(TM)$ associa*

$$\frac{D}{dt}X \in \mathfrak{X}_\gamma(TM),$$

chamada de **derivada covariante** de X ao longo de γ , satisfazendo:

i) Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(TM)$,

$$\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y.$$

ii) Para todo $X \in \mathfrak{X}_\gamma(TM)$ e $f \in C^\infty(I)$,

$$\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X.$$

iii) Se X puder ser estendido a um campo vetorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $X(t) = \tilde{X}(\gamma(t))$, então

$$\frac{D}{dt}X = \nabla_{\gamma'}\tilde{X}.$$

Geodésicas

Munidos da noção de derivada covariante, definimos a **aceleração** de uma curva como sendo a derivada covariante do seu campo de vetores tangentes.

Definição 1.7. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** se sua aceleração é nula, ou seja, se

$$\frac{D}{dt}\gamma' = 0.$$

Sempre que nos referirmos a uma geodésica γ , se nada for dito, ficará implícito que sua velocidade é unitária, ou seja, $\|\gamma'\| = 1$. Não há perda de generalidade, visto que toda geodésica pode ser reparametrizada de modo a se tornar unitária.

Definição 1.8. Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado **minimizante** se $l(\gamma) \leq l(c)$ para toda curva suave por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Um fato importante é que os segmentos de geodésicas **minimizam localmente** o comprimento dentre todas as curvas suaves por partes. Convém observar que esse fato não é global. Se considerarmos um segmento de geodésica suficientemente grande ele pode deixar de ser minimizante. Por outro lado, toda curva c suave por partes que é minimizante deve ser uma geodésica.

Proposição 1.9. *Sejam M variedade Riemanniana, $p, q \in M$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante unindo p a q . Então, para toda curva $c : [a, b] \rightarrow M$ unindo p a q ,*

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

e vale a igualdade se, e somente se, c é uma geodésica minimizante.

Mais tarde, faremos uso dos dois seguintes resultados sobre sequências de geodésicas cuja demonstração pode ser encontrada em Burago [9] num contexto mais geral para espaços com comprimento de curvas. O primeiro resultado é uma versão do Teorema de Arzelà-Ascoli da Análise Funcional para espaços compactos.

Teorema 1.10 (Arzelà-Ascoli). *Se M é uma variedade Riemanniana compacta, então toda sequência de curvas em M com comprimento uniformemente limitado contém uma subsequência uniformemente convergente.*

Proposição 1.11. *Se uma sequência de geodésicas minimizantes γ_i em uma variedade Riemanniana (M, g) converge para uma curva γ , então γ também é geodésica minimizante.*

Seja p um ponto de uma variedade Riemanniana (M, g) . Aplicando o clássico resultado de EDO que garante a existência e unicidade de soluções, pode-se provar que se $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\nu \in T_p M$, então existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfazendo as condições iniciais

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'(t_0) = \nu.$$

Além disso, quaisquer duas geodésicas com as mesmas condições iniciais coincidem na intersecção dos seus domínios.

Proposição 1.12. *Se $p \in M$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que a aplicação suave*

$$\begin{aligned} \exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_p M &\longrightarrow M \\ \nu &\longmapsto \exp_p(\nu) = \gamma_\nu(\|\nu\|) \end{aligned}$$

fica bem definida com $\gamma_\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ a única geodésica unitária verificando

$$\gamma_\nu(0) = p \quad e \quad \gamma'_\nu(0) = \frac{\nu}{\|\nu\|}.$$

Chamamos $\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ de **aplicação exponencial** em $B_\varepsilon(0)$ no ponto p . Aqui, e de agora em diante, indicaremos por $B_\varepsilon(0)$ uma bola aberta de centro na origem 0 de $T_p M$ e de raio ε .

Usando o Teorema da função inversa, verifica-se que para todo $p \in M$ existe uma vizinhança V da origem em $T_p M$ e uma vizinhança U de p , tal que $\exp_p|_V : V \longrightarrow U$ é um difeomorfismo. Diz-se que U é uma **vizinhança normal** de p .

Proposição 1.13. *Seja M uma variedade Riemanniana. Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança V de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in V$, \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_q M$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset V$, isto é, V é uma vizinhança normal de cada um dos seus pontos.*

O corolário abaixo é um simples resultado que não é comum na literatura, mas será conveniente destacá-lo para uso futuro.

Corolário 1.14. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Existe $\delta > 0$ tal que, para todo $p \in M$, $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(0))$ é uma vizinhança normal de p .*

Demonstração. Para cada $q \in M$, considere a vizinhança V_q e o número δ_q dados pela Proposição 1.13. Sendo M compacta, existe uma subcobertura finita $\{V_{q_i}\}$ de M . Seja δ o menor dos números δ_{q_i} . Logo, para todo $p \in M$ existe V_{q_i} contendo p e, sendo $\delta \leq \delta_{q_i}$, tem-se que $B_\delta(p)$ é uma vizinhança normal de p em M . \square

Uma variedade Riemanniana é chamada de **geodesicamente completa** se o domínio maximal de definição de todas as suas geodésicas é \mathbb{R} .

Teorema 1.15 (Hopf-Rinow). *Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) \exp_p esta definida globalmente, isto é, $\exp_p : T_p M \longrightarrow M$.

ii) M é geodesicamente completa.

iii) (M, dist) é um espaço métrico completo.

iv) Todo subconjunto limitado e fechado de M é compacto.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

v) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = \text{dist}(p, q)$. Em particular, a aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é sobrejetiva.

Corolário 1.16. Se M é compacta então M é completa.

Outro conceito que envolve a noção de derivada covariante ao longo de uma curva é o de transporte paralelo que definiremos agora.

Definição 1.17. Diz-se que um campo vetorial X suave ao longo de uma curva γ é **paralelo** ao longo de γ se

$$\frac{D}{dt}X = 0.$$

Assim, uma geodésica γ pode ser caracterizada como uma curva cujo campo de vetores tangentes γ' é paralelo ao longo de γ . Um campo vetorial é chamado de **paralelo** se é paralelo ao longo de qualquer curva.

Proposição 1.18. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva, $t_0 \in I$ e $\nu_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$. Existe um único campo vetorial paralelo X ao longo de γ tal que $X(t_0) = \nu_0$.

Esse campo vetorial é chamado de **transporte paralelo** de ν_0 ao longo de γ .

Espaços normais

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade. Para todo $p \in N$ podemos identificar $T_p N$ com um subespaço vetorial de $T_p M$. O **espaço normal** de N em p é definido por

$$\nu_p N := T_p N^\perp \subset T_p M.$$

O **fibrado normal** de N em M é definido por

$$\nu N := \bigsqcup_{p \in N} \nu_p N.$$

Proposição 1.19. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $N \subset M$ uma subvariedade fechada de M . Seja $x \in M - N$ e $\text{dist}(x, N)$ a distância de x a N . Então existe um ponto $p \in N$ tal que $d(x, p) = \text{dist}(x, N)$ e qualquer geodésica minimizante que liga x a p é ortogonal a N em p .*

A métrica g em M fornece uma noção de ortogonalidade e permite a decomposição

$$TM = TN \oplus \nu N.$$

É possível derivar campos em N seguindo essa decomposição conforme observamos agora.

Observação 1.20. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ e N uma subvariedade com a conexão de Levi-Civita ∇ relativa a métrica induzida de M . Verifica-se que se $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ possuem extensões \bar{X}, \bar{Y} a M , então*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top.$$

Localmente, tal extensão é sempre possível.

Analogamente, é natural pensar em definir uma conexão projetando $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ sobre o espaço normal $\nu_p N$ para cada $p \in N$. No entanto, para obter propriedades análogas àquelas apresentadas na Definição 1.4, vamos exigir que $Y(p) \in \nu_p N$.

Definição 1.21. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade. Se $X \in \mathfrak{X}(N)$ e Y é um **campo normal** suave em N , isto é, $Y(p) \in \nu_p N$ para todo $p \in N$, colocamos*

$$\nabla_X^\perp Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de M e \bar{X}, \bar{Y} são extensões, respectivamente, de X, Y a M . Dizemos que ∇^\perp é a **conexão normal** de N em M .

A conexão fica bem definida pois independe da extensão dos campos.

Submersões Riemannianas

Encerramos esta seção introduzindo o conceito de submersão Riemanniana; uma descrição detalhada pode ser encontrada em Palais [24].

Lembremos que uma aplicação suave $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ entre variedades suaves \bar{M} e M é uma **submersão** se

$$d\pi_p : T_p \bar{M} \rightarrow T_{\pi(p)} M$$

é sobrejetiva para todo $p \in \overline{M}$. Vale que $\overline{M}_p := \pi^{-1}(\pi(p)) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada (para todo $p \in \overline{M}$) chamada de **fibra** de p .

Verifica-se que

$$T_p \overline{M}_p = \ker(d\pi_p) \subset T_p \overline{M}.$$

Para uso futuro será interessante fixar a seguinte nomenclatura. Chamaremos $V_p := T_p \overline{M}_p$ de **subespaço vertical** em p e, caso as variedades \overline{M} e M sejam Riemannianas, o subespaço $H_p := V_p^\perp$ será chamado de **subespaço horizontal** em p .

Definição 1.22. Sejam $(\overline{M}, \overline{g})$ e (M, g) variedades Riemannianas. Uma submersão $\pi : (\overline{M}, \overline{g}) \rightarrow (M, g)$ é dita **submersão Riemanniana** se para todo $p \in \overline{M}$, $d\pi_p$ é uma isometria linear de $(T_p \overline{M}_p)^\perp$ sobre $T_{\pi(p)}M$.

A teoria de submersões Riemannianas, estudada sistematicamente pela primeira vez por O’Neil [23], desempenha um importante papel no estudo de ações isométricas. Contudo, para não fugir do escopo deste trabalho, vamos apresentar apenas um resultado que será empregado posteriormente.

Dados um campo X em M e $p \in \overline{M}$, um vetor horizontal $\overline{X}_p \in H_p \subset T_p \overline{M}$ fica determinado pela condição $d\pi_p \overline{X}_p = X_{\pi(p)}$. A associação $p \mapsto \overline{X}_p$ é um campo de vetores suave em \overline{M} relacionado pela submersão π a X , chamado de **levantamento horizontal** de X .

Proposição 1.23. *Seja $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ uma submersão Riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave. Para todo $t_0 \in I$ e $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$, existe uma única curva suave $\overline{\gamma} : I \rightarrow \overline{M}$ satisfazendo $\pi \circ \overline{\gamma} = \gamma$, $\overline{\gamma}(t_0) = p_0$ e $\overline{\gamma}'(t) \in H_{\overline{\gamma}(t)}$ para todo $t \in I$.*

A curva $\overline{\gamma}$ é chamada de **levantamento horizontal** de γ a partir de p_0 .

1.2 Grupos de Lie

Nesta seção, faremos uma introdução à Teoria de Grupos de Lie, apresentando alguns conceitos e resultados que iremos empregar. Daremos ênfase ao grupo das isometrias de uma variedade Riemanniana, visando introduzir as ideias necessárias ao desenvolvimento dos capítulos posteriores. Maiores detalhes podem ser encontrados em Alexandrino [4] ou Duistermaat [13].

Definição 1.24. Um par $(G, *)$ é um **grupo de Lie** se G é uma variedade suave e um grupo munido da operação binária $* : G \times G \rightarrow G$ tal que

$$\begin{aligned} G \times G \ni (x, y) &\longmapsto *(x, y) = xy \in G \\ G \ni x &\longmapsto x^{-1} \in G \end{aligned} \tag{1.1}$$

são suaves.

Um conceito mais geral é o de **grupo topológico**, onde é requerido apenas que o grupo G seja um espaço topológico com as operações definidas em (1.1) contínuas. Em particular, todo grupo de Lie é um grupo topológico. Muitos dos resultados nesta seção podem ser adaptados para o contexto de grupos topológicos, para mais detalhes citamos Ratcliffe [26].

Exemplo 1.25. Seja \mathbb{K} igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Os seguintes grupos matriciais são grupos de Lie:

- i) $GL(n, \mathbb{K})$, o **grupo linear geral** das matrizes $n \times n$ não singulares sobre \mathbb{K} .
- ii) $SL(n, \mathbb{K}) = \{M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, o **grupo linear especial**.
- iii) $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M^t M = I\}$, o **grupo ortogonal**.
- iv) $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M^* M = I\}$, o **grupo unitário**.

Os grupos acima, chamados de **grupos de Lie clássicos**, constituem importantes exemplos que formam quatro grupos de matrizes intimamente ligados às simetrias dos espaços euclidianos.

Um **subgrupo de Lie** H de um grupo de Lie G é um subgrupo H de G tal que H é subvariedade imersa de G .

Definição 1.26. Um **grupo de Lie discreto** é um grupo Lie G tal que todos os seus pontos são abertos.

O conjunto de todas as isometrias de uma variedade Riemanniana M , munido com a composição, forma um grupo $\text{Iso}(M)$, chamado o **grupo de isometrias** de M .

Será interessante associar as isometrias com as ações de grupos de Lie sobre uma variedade Riemanniana. Para tanto, necessitamos munir o grupo $\text{Iso}(M)$ com uma estrutura de grupo de Lie. Isso é garantido no seguinte teorema.

Teorema 1.27 (Myers-Steenrod). *Seja M uma variedade Riemanniana. Então todo subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$ na topologia compacto-aberto é um grupo de Lie. Em particular, $\text{Iso}(M)$ é um grupo de Lie.*

Lembremos que um subconjunto $G \subset \text{Iso}(M)$ é fechado na topologia compacto-aberto se vale a seguinte propriedade: se (f_n) uma sequência de isometrias em G tal que, para cada compacto $K \subset M$, (f_n) converge uniformemente (considerando M como espaço métrico com a métrica induzida pela métrica da variedade Riemanniana M) em K para uma função contínua $f : M \rightarrow M$, então $f \in G$.

1.3 Ações de grupos

Parte dos resultados desta seção poderiam ser adaptados para um contexto mais geral de ação de grupos topológicos tal como está feito em Ratcliffe [26]. Por simplicidade, restringimos os resultados às ações de grupos de Lie.

Definição 1.28. Seja G um grupo e M uma variedade. Uma **ação** (à esquerda) de G em M é uma aplicação $\mu : G \times M \rightarrow M$ satisfazendo

- i) $\mu(e, x) = x$ para todo $x \in M$,
- ii) $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$, para todo $g, h \in G, x \in M$.

Escreveremos gx para denotar $\mu(g, x)$. Quando G for um grupo de Lie, vamos assumir que a aplicação μ é suave.

Se $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma ação e $x \in M$, então:

- i) O subgrupo $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ de G é chamado de **estabilizador** de x em G .
- ii) O subconjunto $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ de M é chamado de **G -órbita** de x . As G -órbitas particionam M .
- iii) A função $\phi : G/G_x \rightarrow G(x)$, dada por $\phi(gG_x) = gx$, é bijeção. Portanto o índice de G_x em G é a cardinalidade da órbita $G(x)$.

Definição 1.29. Seja G um grupo agindo sobre uma variedade M . Diremos que a ação $\mu : G \times M \rightarrow M$ é **livre** se $G_x = \{e\}$, para todo $x \in M$. Se dados quaisquer $x, y \in M$ existir $g \in G$ tal que $\mu(g, x) = y$, diremos que a ação é **transitiva**.

Definição 1.30. Diremos que a ação de G sobre M é **descontínua** se para cada subconjunto compacto K de M , o conjunto $K \cap gK$ for não vazio apenas para uma quantidade finita de elementos g em G . Além disso, se G for um grupo de homeomorfismos de M , diremos que G é um **grupo descontínuo**.

Proposição 1.31. *Se M é uma variedade Riemanniana completa, então todo subgrupo discreto G do grupo de isometrias $\text{Iso}(M)$ é fechado.*

A prova da Proposição 1.31 pode ser encontrada em Ratcliffe [26], Lema 6, página 163, observando que se G é fechado em $C^0(M)$, então G é fechado em $\text{Iso}(M)$. Notemos que se M é uma variedade Riemanniana completa, então o grupo $\text{Iso}(M)$ é metrizável (ver, por exemplo, a demonstração do Teorema 5.3.5 em [26], página 164).

Proposição 1.32. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Um subgrupo G de $\text{Iso}(M)$ é discreto se, e somente se, é descontínuo.*

Demonstração. Segue do Teorema de Hopf-Rinow que M é finitamente compacto. Logo, basta aplicar o Teorema 5.3.5 provado por Ratcliffe [26], página 164. \square

Proposição 1.33. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e G um subgrupo discreto de $\text{Iso}(M)$, então cada G -órbita é um subconjunto fechado e discreto de M .*

Demonstração. Seja $G(x)$ a G -órbita de um elemento x em M . Vamos provar que $G(x)$ não possui ponto de acumulação. Suponha que y é um ponto de M tal que toda vizinhança de y contém infinitos pontos de $G(x)$. Como M é um espaço métrico, existe um sequência (g_n) de elementos distintos de G tal que $(g_n x)$ converge para y . Então

$$K = \{x, y, g_1 x, g_2 x, \dots\}$$

é um subconjunto compacto de M . Da Proposição 1.32 segue que G é descontínuo, logo $g_n x$ pertence a $K \cap g_n K$ apenas para uma quantidade finita de índices n , o que é uma contradição. Concluímos que todo subconjunto de $G(x)$ é fechado em M , e portanto $G(x)$ é um subconjunto fechado e discreto de M . \square

Encerramos esta seção com alguns resultados da teoria de ações próprias que, apesar de apresentados como ferramentas, são relevantes por si só. As principais referências deste tópico são Alexandrino [4] e Duistermaat [13].

Definição 1.34. Uma ação $\mu : G \times M \rightarrow M$, de um grupo de Lie G sobre uma variedade M , é **própria** se a aplicação $G \times M \ni (g, x) \mapsto (gx, x) \in M \times M$ é própria, ou seja, a imagem inversa de todo subconjunto compacto de $M \times M$ é um subconjunto compacto de $G \times M$ na topologia produto.

Exemplo 1.35. A ação

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto hg, \end{aligned}$$

de um subgrupo fechado H sobre um grupo de Lie G , é livre e própria.

A seguinte caracterização das ações próprias implica que toda ação por um grupo de Lie compacto é própria. Para mais detalhes, ver Alexandrino [4], Proposição 3.19, página 56.

Proposição 1.36. *Seja G um grupo de Lie. Uma ação $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é própria se, e somente se, vale a seguinte propriedade: se (g_n) é uma sequência qualquer em G e (x_n) é uma sequência convergente em M , com $(\mu(g_n, x_n))$ convergente, então (g_n) admite uma subsequência convergente.*

Em particular, se G é um grupo de Lie discreto, obtemos algumas equivalências a respeito da ação de G sobre M conforme veremos agora.

Proposição 1.37. *Seja M uma variedade Riemanniana e G um grupo de Lie discreto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *A ação de G sobre M é própria.*
- ii) *Se (g_n) é uma sequência qualquer em G e (x_n) é uma sequência convergente em M , com $(\mu(g_n, x_n))$ convergente, então (g_n) admite uma subsequência convergente.*
- iii) *A ação de G sobre M é descontínua.*

Demonstração. i) \Leftrightarrow ii) Segue da Proposição anterior.

ii) \Rightarrow iii) Suponha por contradição que a ação de G sobre M não é descontínua, ou seja, que existe um compacto K e uma sequência (g_i) de elementos distintos tais que

$$g_i K \cap K \neq \emptyset.$$

Logo, existe uma sequência (x_i) em K tal que $g_i x_i \in K$. Sendo K compacto podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que existem $x, y \in K$ tais que

$$x_i \rightarrow x \quad \text{e} \quad g_i x_i \rightarrow y.$$

A Proposição 1.36 implica que (g_i) possui uma subsequência que converge para algum $g \in G$. Sendo G discreto, devemos ter $g_i = g$ para todo i suficientemente grande, contradizendo o fato de todos os g_i serem distintos.

iii) \Rightarrow i) Seja $K \subset M \times M$ compacto e $\pi_i : M \times M \rightarrow M$, $i = 1, 2$, as projeções na primeira e na segunda entrada de $(x, y) \in M \times M$. Sendo a projeção contínua, tem-se que $K_i = \pi_i(K)$, $i = 1, 2$, são subconjuntos compactos de M . Considere a aplicação

$$\varphi : G \times M \ni (g, x) \mapsto (gx, x) \in M \times M.$$

Vamos provar que $\varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$ é um subconjunto compacto de $G \times M$. Seja $(g, x) \in \varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$ qualquer. Então $\varphi(g, x) \in K_1 \times K_2$ implica que $gx \in K_1$ e $x \in K_2$. Daí

$$g(K_1 \cup K_2) \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset.$$

A hipótese da ação de G sobre M ser descontínua implica que $g \in \{g_1, \dots, g_n\} \subset G$. Logo

$$(g, x) \in \bigcup_{i=1}^n (\{g_i\} \times K_2),$$

donde

$$\varphi^{-1}(K_1 \times K_2) \subset \bigcup_{i=1}^n \{g_i\} \times K_2.$$

Sendo a união finita de compactos também compacta, o fato de $\varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$ ser subconjunto fechado de um compacto implica que ele também é compacto. Note que $K \subset K_1 \times K_2$ é subconjunto fechado. Como $\varphi^{-1}(K)$ é um subconjunto fechado do compacto $\varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$, temos que ele também é compacto. Isso prova que a ação μ é própria. \square

Uma ação $G \times M \rightarrow M$ é chamada de **distinguida** se, para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x tal que $gU \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G - \{e\}$. Uma ação de um grupo de Lie discreto é distinguida se, e somente se, é livre e própria. Em particular, para grupos discretos de isometrias temos as seguintes equivalências.

Corolário 1.38. *Seja M uma variedade Riemanniana e G um grupo de Lie discreto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *A ação de G sobre M é livre e descontínua.*
- ii) *A ação de G sobre M é livre e própria.*
- iii) *A ação de G sobre M é distinguida.*

Lembremos que se M é uma variedade Riemanniana e G é um subgrupo fechado de $\text{Iso}(M)$, então G é um grupo de Lie pelo Teorema 1.27. Além disso, se M é completa e G é um subgrupo discreto de $\text{Iso}(M)$, então a Proposição 1.31 e o Teorema 1.27 asseguram que G é um grupo de Lie fechado com a topologia do compacto-aberto. Nestas condições, resulta das Proposições 1.32 e 1.37 que a ação de G sobre M é própria.

1.4 Espaço das órbitas

Veremos algumas propriedades do espaço das órbitas de um grupo G agindo sobre uma variedade M . Notemos que as órbitas de G constituem uma partição de M , em outros termos, definimos a relação de equivalência que associa dois elementos de M quando suas órbitas forem iguais.

Definição 1.39. Seja G um grupo agindo sobre uma variedade M . O **espaço das órbitas** da ação de G sobre M é definido como sendo o conjunto de todas as G -órbitas

$$M/G = \{G(x) \mid x \in M\}$$

munido da topologia quociente de M . A aplicação $\pi : M \rightarrow M/G$, que associa à cada $x \in M$ uma classe de equivalência, é chamada de **projeção** de M sobre M/G .

A **distância** entre dois subconjuntos A e B de M é definida como sendo

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

A **função distância no espaço das órbitas** $d_G : M/G \times M/G \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$d_G(G(x), G(y)) = \text{dist}(G(x), G(y)).$$

Proposição 1.40. *Seja G um grupo de isometrias agindo sobre uma variedade Riemanniana M . Então d_G é uma métrica em M/G se, e somente se, cada G -órbita é um subconjunto fechado de M .*

Demonstração. Sejam x, y pertencentes a M e $g, h \in G$. Então

$$d(gx, hy) = d(x, g^{-1}hy).$$

Deste modo,

$$\text{dist}(G(x), G(y)) = \text{dist}(x, G(y)). \quad (1.2)$$

Suponha que d_G é uma métrica e que $G(x) \neq G(y)$. Então

$$\text{dist}(x, G(y)) = d_G(G(x), G(y)) > 0.$$

Seja $r = \text{dist}(x, G(y))$. Então $B(x, r) \subset M - G(y)$. Logo $M - G(y)$ é um conjunto aberto e $G(y)$ é fechado. Assim, cada G -órbita é um subconjunto fechado de M .

Reciprocamente, suponha que cada G -órbita é um subconjunto fechado de M . Se $x, y \in M$ e $G(x) \neq G(y)$, então

$$d_G(G(x), G(y)) = \text{dist}(x, G(y)) > 0.$$

Portanto d_G é não degenerada.

Vamos provar a desigualdade triangular. Sejam $x, y, z \in M$ e $g, h \in G$. Então

$$\begin{aligned} d(x, gy) + d(y, hz) &= d(x, gy) + d(gy, ghz) \\ &\geq d(x, ghz) \\ &\geq \text{dist}(x, G(z)). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo, obtemos

$$\text{dist}(x, G(z)) \leq \text{dist}(x, G(y)) + \text{dist}(y, G(z)).$$

Logo, por (1.2)

$$d_G(G(x), G(z)) \leq d_G(G(x), G(y)) + d_G(G(y), G(z)).$$

Portanto d_G é uma métrica em M/G .

□

Corolário 1.41. *Se G é um grupo discreto de isometrias de uma variedade Riemanniana completa M , então d_G é uma métrica em M/G .*

Demonstração. Segue das Proposições 1.33 e 1.40.

□

Notemos que se G é um grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana M tal que d_G é uma métrica em M/G , então a topologia métrica em M/G , determinada por d_G , é a topologia quociente relativa a aplicação quociente $\pi : M \rightarrow M/G$.

Proposição 1.42. *Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo agindo sobre M .*

- i) Se a ação de G sobre M é distinguida, então M/G é uma variedade diferenciável tal que a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ é um difeomorfismo local.
- ii) Se a ação de G sobre M é livre e própria, então M/G é uma variedade diferenciável tal que a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ é suave.

A hipótese da ação de G sobre M ser livre é essencial para que o espaço das órbitas seja variedade diferenciável conforme ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.43. Considere M como sendo o plano \mathbb{R}^2 . Seja $n > 1$ um número natural e α a rotação em \mathbb{R}^2 de $2\pi/n$ ao redor da origem (o exemplo é idêntico para os sentidos anti-horário e horário). É fácil ver que α é uma isometria de \mathbb{R}^2 . Então α gera um grupo de isometrias Γ de \mathbb{R}^2 com n elementos (isomorfo a \mathbb{Z}_n).

Pensamos em \mathbb{R}^2/Γ como sendo um cone. A ponta do cone é a imagem da origem no quociente. Note que o estabilizador da origem não é trivial, logo a ação de Γ sobre \mathbb{R}^2 não é livre. Não vale a Proposição 1.42 visto que o cone \mathbb{R}^2/Γ não tem estrutura de variedade diferenciável oriunda da projeção. Para que a ação seja livre devemos omitir a singularidade, isto é, a ponta do cone. Neste caso, o cone sem a ponta será variedade diferenciável, contudo, não será completa.

Encerramos esta seção recordando algumas definições básicas sobre a geometria de grupos discretos. As imagens de um único ponto pela ação de um grupo sobre uma variedade formam a órbita da ação. Estamos interessados em definir um subconjunto aberto da variedade que contém no máximo um ponto de cada órbita, e cujo fecho contém ao menos um ponto de cada órbita.

Definição 1.44. Um subconjunto R de uma variedade Riemanniana M é uma **região fundamental** para um grupo G de isometrias de M se

1. o conjunto R é aberto em M ,
2. os conjuntos gR , $g \in G$, são mutuamente disjuntos,
3. $M = \bigcup_{g \in G} g\bar{R}$.

No plano \mathbb{R}^2 , por exemplo, a rotação de ângulo $2\pi/n$, $n > 1$ natural, em torno da origem leva cada ponto diferente de $(0, 0)$ em outros n pontos. Qualquer setor circular de ângulo $2\pi/n$ é uma região fundamental para essa ação.

Diremos que um subconjunto D de uma variedade Riemanniana M é um **domínio fundamental** para um grupo G de isometrias de M se é uma região fundamental conexa para G .

Exemplo 1.45. Seja α a aplicação antipodal $\alpha(x) = -x$ para $x \in S^n$. Então $\Gamma = \{e, \alpha\}$ é um subgrupo discreto de $\text{Iso}(S^n)$ e qualquer um dos hemisférios abertos de S^n é um domínio fundamental para Γ .

É natural perguntar quando um grupo agindo sobre uma variedade tem uma região fundamental. Começamos apresentando uma condição necessária cuja demonstração pode ser encontrada em [26], Teorema 6.6.3, página 236.

Proposição 1.46. *Se um grupo G de isometrias de uma variedade Riemanniana M tem uma região fundamental, então G é um subgrupo discreto de $\text{Iso}(M)$.*

Na tentativa de apresentar uma condição suficiente, vamos introduzir uma região que surge de modo natural.

Definição 1.47. Seja G um grupo descontínuo de isometrias de uma variedade Riemanniana M e p um ponto de M cujo estabilizador G_p é trivial. Para cada $g \in G$ diferente do elemento neutro e de G , defina

$$H_g(p) = \{x \in M \mid d(x, p) < d(x, gp)\}.$$

O **domínio de Dirichlet** $D(p)$ para G , com **centro** p , é a própria M se G é trivial ou

$$D(p) = \bigcap_{\substack{g \in G \\ g \neq e}} H_g(p)$$

se G não é trivial.

Sob certas condições, o domínio de Dirichlet é um domínio fundamental.

Proposição 1.48. *Seja G um grupo discreto de isometrias sobre uma variedade Riemanniana completa M e $p \in M$ tal que G_p é trivial. Se $D(p)$ é o domínio de Dirichlet para G com centro p , então $D(p)$ é um domínio fundamental para G .*

Capítulo 2

Folheações

Começaremos introduzindo a noção de folheação. Na literatura, é comum encontrar esta noção dada por um atlas que descreve as folhas. Vamos incluir folheações cujas folhas possuem dimensões diferentes (folheações singulares) e será mais simples dar a definição via campos de vetores. A maior parte dos resultados aqui apresentados é para folheações regulares. Neste caso, veremos que a definição por atlas é equivalente à definição por campos de vetores.

Uma ferramenta muito útil na compreensão do comportamento das folhas é a holonomia. Na segunda seção, definimos o grupo de holonomia de cada folha a partir do grupo fundamental da folha. Depois, daremos uma definição alternativa por meio do transporte paralelo de vetores perpendiculares às folhas.

No restante do capítulo, trataremos de investigar as propriedades das folheações Riemannianas. Será interessante abordar o caso em que as folhas são compactas, sendo possível obter uma vizinhança tubular de cada folha com propriedades que serão empregadas no decorrer do trabalho. Para complementar a leitura do capítulo, sugerimos Alcides [10], Moerdijk [21] e Molino [22].

2.1 Folheações

A grosso modo, uma folheação (regular) de uma variedade M é uma partição de M em subvariedades imersas e conexas com mesma dimensão, de modo que localmente tenha-se um difeomorfismo com um aberto de algum espaço euclidiano particionado por subespaços paralelos.

Vamos permitir folheações singulares para obter partições que admitam folhas de diferentes dimensões.

Definição 2.1. Seja M uma variedade suave e \mathcal{F} uma partição de M por subvariedades imersas, conexas e sem autointersecção, chamadas de **folhas**. Para cada $p \in M$ seja L_p a única folha passando por p e

$$T\mathcal{F} := \bigsqcup_{p \in M} T_p L_p$$

o fibrado tangente as folhas.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ o conjunto dos campos de vetores X suaves em M tal que $X_p \in T_p L_p$ para todo $p \in M$. Notemos que $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ forma um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Definição 2.2. Diremos que \mathcal{F} é uma **folheação singular** de M se $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ age transitivamente em cada folha, isto é, para cada $p \in M$ e $v \in T_p L_p$, existe $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ tal que $X(p) = v$.

Uma folha L de \mathcal{F} é chamada **regular** (e cada ponto de L é chamado regular) se a dimensão de L é maior ou igual do que a dimensão de qualquer folha de \mathcal{F} . Caso contrário, diz-se que L é uma **folha singular** bem como todos os seus pontos.

Suponha que M é uma variedade de dimensão n com uma folheação \mathcal{F} . Se todas as folhas de \mathcal{F} são regulares com dimensão k , dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação regular** de dimensão k e que a codimensão de \mathcal{F} é $n - k$. Usaremos simplesmente o termo “folheação” para indicar uma folheação regular. Na literatura é comumente encontrada a definição de folheação (regular) feita através de um atlas folheado em M que descreveremos agora.

Definição 2.3. Seja M uma variedade suave de dimensão n . Um **atlas folheado** com dimensão k de M (onde $0 \leq k \leq n$) é um atlas

$$(\varphi_i : U_i \longrightarrow B_1 \times B_2)_{i \in I}$$

de M , onde B_1 e B_2 são bolas abertas em \mathbb{R}^{n-k} e \mathbb{R}^k respectivamente, no qual os difeomorfismos de mudança de cartas φ_{ij} são localmente da forma

$$\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x), h_{ij}(x, y))$$

em relação a decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$.

Na Figura 2.1 ilustramos o aspecto local de uma variedade bidimensional folheada por uma folheação de dimensão 1.

As cartas de um atlas folheado são chamadas de **cartas folheadas**. Deste modo, cada U_i está dividido em **placas** que são as subvariedades $\varphi_i^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^k)$, $x \in \mathbb{R}^{n-k}$, e os difeomorfismos de mudança de cartas preservam as imagens das placas por φ_i . As placas são subvariedades conexas suaves de M com dimensão k que não se intersectam.

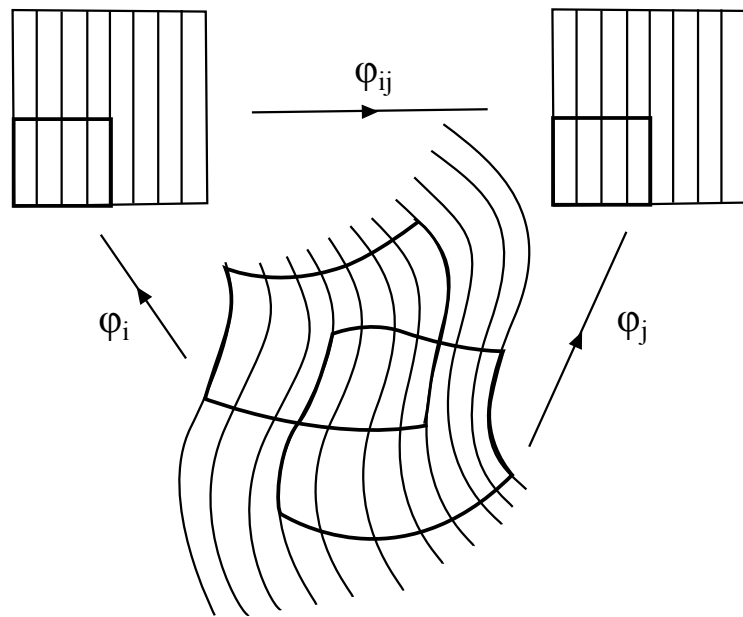


Figura 2.1: Representação de uma folheação de dimensão 1.

Exemplo 2.4. O espaço \mathbb{R}^n admite a folheação trivial de dimensão k cujo atlas consiste de apenas uma carta $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Claramente, qualquer bijeção linear

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$$

determina outra carta cujas folhas são os subespaços afins $A^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^k)$.

Teorema 2.5. *Uma folheação (regular) \mathcal{F} , com dimensão k , de uma variedade n -dimensional M pode ser equivalentemente descrita por:*

- i) *um atlas folheado maximal $(\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)_{i \in I}$ de dimensão k em M ,*
- ii) *uma cobertura aberta (U_i) de M com submersões*

$$s_i : U_i \rightarrow \sigma_i,$$

onde $\sigma_i = s_i(U_i)$ é uma subvariedade de \mathbb{R}^n com dimensão $n - k$, tal que existem difeomorfismos (necessariamente únicos)

$$\gamma_{ij} : s_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow s_i(U_i \cap U_j)$$

com $\gamma_{ij} \circ s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}$.

Demonstração. i) Seja \mathcal{F} uma folheação de dimensão k em M^n conforme a Definição 2.1. Pode-se obter uma carta folheada em M a partir da nossa definição. Com efeito, tome $p \in M$ e fixe uma base de $T_p L_p$. A definição fornece campos X_1, \dots, X_k que coincidem com uma base escolhida em p e logo são linearmente independentes num aberto U contendo p . Seja P_p uma componente conexa de \mathcal{F} restrita a U que contém p . Seja T_p uma subvariedade de M transversa a P_p que contém p e está contida em U e φ_t^i o fluxo de X_i . Considere a bola $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^k$ com ε suficientemente pequeno de modo a definir

$$\begin{aligned} f : T_p \times B_\varepsilon(0) &\longrightarrow M \\ (x, (t_1, \dots, t_k)) &\longmapsto \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_k}^k(x). \end{aligned}$$

A menos de diminuir U , f é um difeomorfismo que leva, para cada $x \in T_p$, $\{x\} \times B_\varepsilon(0)$ na componente conexa de \mathcal{F} restrita a U que contém $f(x, 0)$.

A partir das aplicações locais f obtém-se um atlas folheado de M sobre \mathbb{R}^n .

Reciprocamente, se tivermos um atlas folheado maximal de codimensão k em M , então as placas podem ser unidas globalmente de modo a constituírem **folhas**. Isto é, dois pontos $x, y \in M$ estão na mesma folha se existe uma sequência de cartas folheadas U_1, \dots, U_q e uma sequência de pontos $x = p_0, p_1, \dots, p_q = y$ tais que p_{j-1} e p_j estão na mesma placa de U_j , para cada $1 \leq j \leq q$.

Da construção segue que cada folha é um subconjunto de M , conexo por caminhos, com a estrutura de subvariedade imersa de dimensão k . O conjunto \mathcal{F} de tais folhas constitui uma partição de M por subvariedades imersas conexas.

ii) Vamos provar que os itens i) e ii) produzem definições equivalentes. Consideremos a cobertura aberta (U_i) de M com as submersões $s_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ e os difeomorfismos γ_{ij} satisfazendo

$$\gamma_{ij} \circ s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}.$$

Tomemos um atlas (V_l, φ_l) tal que cada V_l é subconjunto de algum U_{i_l} e $\varphi_l : V_l \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dado pela forma local das submersões, isto é, φ_l é sobrejetiva e existe um difeomorfismo

$\psi_l : s_{i_l}(V_l) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $\psi_l \circ s_{i_l} = \text{pr}_1 \circ \varphi_l$. Afirmamos que (V_l, φ_l) é um atlas folheado: se $(x, y) \in \varphi_l(V_l \cap V_m) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, temos

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1 \circ \varphi_m \circ \varphi_l^{-1}) &= (\psi_m \circ s_{i_m} \circ \varphi_l^{-1})(x, y) \\ &= (\psi_m \circ \gamma_{i_m i_l} \circ s_{i_l} \circ \varphi_l^{-1})(x, y) \\ &= (\psi_m \circ \gamma_{i_m i_l} \circ \psi_l^{-1})(x). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $(\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$ é um atlas folheado, basta tomar um refinamento de modo que os difeomorfismos de mudança de cartas φ_{ij} sejam *globalmente* da forma $\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x), h_{ij}(x, y))$, fazer $s_i = \text{pr}_1 \varphi_i$ e $\gamma_{ij} = g_{ij}$. Isso produz as submersões dadas no item ii). \square

Em particular, uma submersão $s : M \rightarrow \sigma$ define uma folheação regular \mathcal{F} de M , cujas folhas são as componentes conexas das fibras $s^{-1}(q)$, $q \in \sigma$. Um atlas folheado para \mathcal{F} pode ser obtido usando a forma local das submersões tal como na prova do item ii) do Teorema 2.5.

Exemplo 2.6 (Folheação de Kronecker do toro). Seja a um número irracional e considere a submersão $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(x, y) = x - ay$. Temos uma folheação $\mathcal{F}(s)$ de \mathbb{R}^2 dada por s . Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ o recobrimento do toro com a projeção usual, isto é, $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. A folheação $\mathcal{F}(s)$ induz uma folheação \mathcal{F} de T^2 : se φ é uma carta folheada de $\mathcal{F}(s)$ tal que $f|_{\text{dom}\varphi}$ é injetiva, então $\varphi \circ (f|_{\text{dom}\varphi})^{-1}$ é uma carta folheada para \mathcal{F} . Qualquer folha de \mathcal{F} é difeomorfa a \mathbb{R} e densa em T^2 (Figura 2.2).

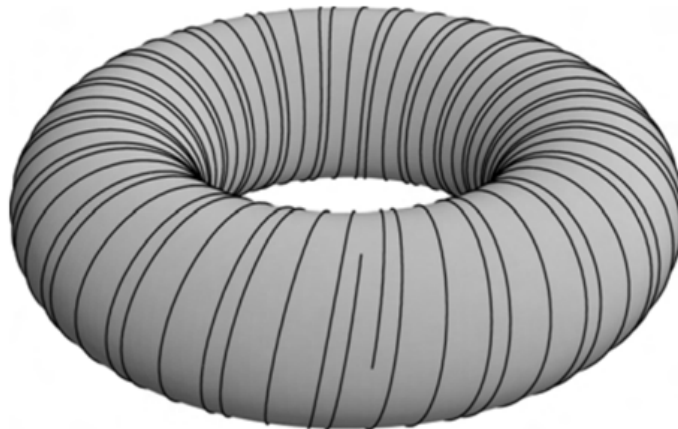


Figura 2.2: Folheação de Kronecker do toro

No exemplo precedente, vemos que as folhas de uma folheação podem acumular em torno de si mesma e em torno de outras folhas. Contudo, se a folha for mergulhada, não ocorre de tal folha acumular em si mesma.

Definição 2.7. Seja \mathcal{F} uma folheação de uma variedade M dada por uma submersão $s : M \rightarrow \sigma$. Se as fibras de s forem conexas, diremos que \mathcal{F} é uma **folheação simples** da variedade M .

A folheação de dimensão k de \mathbb{R}^n dada por subespaços afins paralelos de dimensão k é uma folheação simples.

Definição 2.8. Seja $U \subset M$ um aberto tal que a restrição $\mathcal{F}|_U$, da folheação de M a U , é uma folheação simples de U . Diremos que U é um **aberto simples**.

Em particular, o aberto U_i dado no item ii) do Teorema 2.5 é um aberto simples. Observe que é sempre possível restringir s_i a um aberto simples: basta considerar uma carta folheada $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ e restringir seu domínio de modo que a imagem seja um cubo de \mathbb{R}^n folheado por hiperplanos.

Uma vez que a folheação \mathcal{F} particiona a variedade M , podemos definir o espaço quociente M/\mathcal{F} , chamado o **espaço das folhas**. Deste modo, as folhas de \mathcal{F} são levadas em pontos de M/\mathcal{F} pela aplicação quociente.

Definição 2.9. Seja \mathcal{F} uma folheação singular de uma variedade M . O espaço M/\mathcal{F} com a topologia quociente é chamado de **espaço das folhas** da folheação \mathcal{F} .

Seja \mathcal{F} uma folheação simples de M com $s : M \rightarrow \sigma$ uma submersão sobrejetora descrevendo as folhas de \mathcal{F} . Então a subvariedade σ pode ser identificada com o espaço das folhas M/\mathcal{F} . Neste sentido, a topologia de σ coincide com a topologia quociente de M/\mathcal{F} .

Contudo, não é sempre que o espaço das folhas M/\mathcal{F} pode ser identificado com a variedade $\sigma = s(M)$ como é mostrado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.10. Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de raio 1 e $M = B - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ com a folheação vertical \mathcal{F} dada pela submersão $s : M \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x, y) = x$. Neste caso, o espaço M/\mathcal{F} não coincide com $\sigma = s(M)$: o espaço das folhas M/\mathcal{F} nem sequer é Hausdorff (Figura 2.3), visto que as componentes conexas de $s^{-1}\{0\}$ são levadas pela aplicação quociente em pontos distintos de M/\mathcal{F} que não possuem vizinhanças disjuntas.

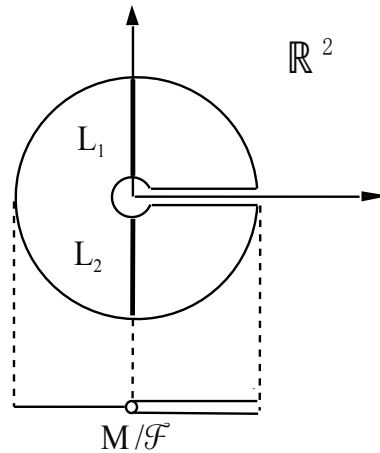


Figura 2.3: As folhas L_1 e L_2 são projetadas em pontos distintos.

Mesmo para folheações regulares, vimos que o espaço das folhas pode não ter uma estrutura simples. Será conveniente impor condições sobre a folheação visando obter um espaço quociente com boas propriedades. Cabe ressaltar que mesmo com nossas imposições o espaço das folhas nem sempre será variedade, conforme veremos no Capítulo 3.

2.2 Holonomia

A ideia básica de holonomia vem de Poincaré, em seus estudos sobre a aplicação de primeiro retorno para campos vetoriais. Para um dado ponto p de uma variedade munida com uma folheação de codimensão k , levamos em consideração como as folhas vizinhas a p intersectam um disco pequeno de dimensão k que é transversal às folhas e contém p . A informação sobre como tais folhas partem e retornam ao disco está contida em um grupo, chamado de grupo de holonomia em p . Estes grupos contém uma série de informações sobre a estrutura da folheação, especialmente quando a folha é compacta. Por exemplo, se este grupo é finito então todas as folhas vizinhas também devem ser compactas. A construção aqui apresentada pode ser encontrada em Moerdijk [21] ou Molino [22].

Lembremos a noção de germes de aplicações.

Definição 2.11. Sejam M, N variedades e $p \in M$ um ponto qualquer. No conjunto de todas as aplicações f definidas em alguma vizinhança de p e tomando valores em N , introduzimos a relação de equivalência \sim :

$$f \sim g \iff \text{existe uma vizinhança } W \text{ de } p \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

A classe de equivalência de f , denotada por f_p , é chamada de **germe** de f em p .

Se $\dim M = \dim N$ e $q \in N$ é um ponto qualquer, denotamos o conjunto de todos os germes de difeomorfismo que levam p em q por

$$\text{Dif}(M_p, N_q).$$

Quando $M = N$ os germes de difeomorfismos que deixam p fixo formam um grupo com a operação de composição, denotado por

$$\text{Dif}(M_p).$$

Seja \mathcal{F} uma folheação com codimensão k de uma variedade M e L uma folha de \mathcal{F} . Sejam $p, q \in L$ dois pontos dessa folha, bem como S e T **seções transversas** em p e q (i.e. subvariedades de M de dimensão k transversas as folhas de \mathcal{F} , com $p \in S$ e $q \in T$). Dada uma curva $\beta : [a, b] \rightarrow L$ suave por partes, unindo p a q , considere a classe de homotopia $[\beta]$ em L que fixa p e q . Iremos associar $[\beta]$ a um germe de difeomorfismo

$$\varphi_{[\beta]} \in \text{Dif}(S_p, T_q),$$

definido em vizinhanças de p contidas em S com $\varphi_{[\beta]}(p) = q$.

Considere uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que $\beta([t_{i-1}, t_i])$ está contido em algum aberto simples U_i (Figura 2.4). Então $\{U_1, \dots, U_k\}$ é chamado de cadeia de conjuntos abertos simples. Escolha seções transversas T_i de \mathcal{F} em $\beta(t_i)$, com $T_0 = S$ e $T_k = T$.

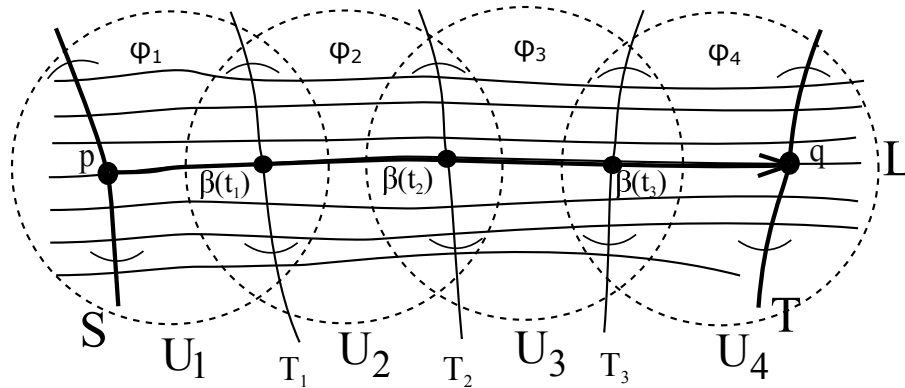


Figura 2.4: Holonomia com $k = 4$.

Como $\beta(t_{k-1})$ e $\beta(t_k)$ estão na mesma placa em U_k , podemos definir um difeomorfismo φ_k de uma vizinhança aberta na seção transversa T_{k-1} sobre um aberto em $T_k = T$, com

$\varphi_k(\beta(t_{k-1})) = \beta(t_k) = q$. Do mesmo modo, estando $\beta(t_{k-2})$ e $\beta(t_{k-1})$ na mesma placa de U_{k-1} , podemos definir um difeomorfismo φ_{k-1} de uma vizinhança aberta em T_{k-2} sobre uma vizinhança em T_{k-1} com $\varphi_{k-1}(\beta(t_{k-2})) = \beta(t_{k-1})$. Depois de alguns passos, obtemos um difeomorfismo φ_1 de uma vizinhança aberta em $T_0 = S$ sobre uma vizinhança aberta em T_1 , com $\varphi_1(\beta(t_0)) = \varphi_1(p) = \beta(t_1)$.

Localmente, o resultado desta construção independe da cadeia de conjuntos abertos simples escolhida, mas apenas da classe de homotopia que fixa os pontos finais de β . Podemos definir o germe de difeomorfismo $\varphi_{[\beta]}$ dado pela classe de equivalência de

$$\varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1$$

em $\text{Dif}(S_p, T_q)$.

Observação 2.12. Quando $p = q$, a aplicação

$$\varphi : \pi_1(L, p) \longrightarrow \text{Dif}(S_p),$$

definida no grupo fundamental da folha L em p , é um homomorfismo de grupos chamado de **holonomia** de L em p . A imagem deste homomorfismo é o **grupo de holonomia** de L em p .

2.3 Folheações Riemannianas

Um importante caso ocorre quando a folheação é dada sobre uma variedade Riemanniana. Neste contexto, vamos introduzir a noção de folheação Riemanniana singular impondo condições sobre as geodésicas na variedade Riemanniana que intersectam ortogonalmente as folhas da folheação. Depois veremos que essa imposição está associada com as propriedades da métrica que influenciam o comportamento das folhas.

Definição 2.13. Seja \mathcal{F} uma folheação singular de uma variedade suave M . Dizemos que uma métrica g é **adaptada** à folheação \mathcal{F} se toda geodésica de M que é ortogonal a alguma folha de \mathcal{F} , permanece ortogonal a todas as folhas de \mathcal{F} por ela intersectadas. Neste caso, dizemos que \mathcal{F} é uma **folheação Riemanniana singular** de (M, g) . Se todas as folhas de \mathcal{F} são regulares, dizemos simplesmente que \mathcal{F} é uma **folheação Riemanniana**.

Para cada ponto $p \in M$ seja L_p a única folha de \mathcal{F} que contém p . Definimos o **fibrado normal** de \mathcal{F} por

$$\nu\mathcal{F} := \bigsqcup_{p \in M} \nu_p L_p.$$

Neste trabalho, usaremos diferentes descrições de uma folheação Riemanniana e por isso, será conveniente introduzir algumas definições equivalentes. Para tanto, vamos apresentar o conceito de métrica transversa que será útil para estudarmos as propriedades das folheações Riemannianas.

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n . Uma $C^\infty(M)$ -forma bilinear simétrica

$$g_T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

é dita ser **positiva** se satisfaz $g_T(X, X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tal forma induz uma forma bilinear positiva g_{T_p} no espaço tangente T_pM , em cada ponto $p \in M$. A nulidade $\ker(g_{T_p})$ é o subespaço vetorial

$$\{X_p \in T_pM \mid g_{T_p}(X_p, Y_p) = 0 \text{ para todo } Y_p \in T_pM\}$$

de T_pM . A **derivada de Lie** $L_X g_T$ de g_T na direção de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dada por

$$L_X g_T(Y, Z) = X(g_T(Y, Z)) - g_T([X, Y], Z) - g_T(Y, [X, Z]).$$

Note que $L_X g_T$ é uma $C^\infty(M)$ -forma bilinear simétrica em $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.14. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão k de uma variedade M . Uma **métrica transversa** em (M, \mathcal{F}) é uma $C^\infty(M)$ -forma bilinear, simétrica e positiva g_T em $\mathfrak{X}(M)$ tal que

1. $\ker(g_{T_p}) = T_pL_p$ para todo $p \in M$, e
2. $L_X g_T = 0$ para todo campo vetorial X em M tangente a \mathcal{F} , isto é, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Dada uma folheação (regular) \mathcal{F} de uma variedade Riemanniana (M, g) , seja g_T a $C^\infty(M)$ -forma bilinear, simétrica e positiva dada por

$$g_T = N^* g \tag{2.1}$$

onde $N_p : T_pM \longrightarrow \nu_pL_p$ é a projeção ortogonal sobre o espaço normal. Se g_T assim definida é uma métrica transversa em (M, \mathcal{F}) , diremos que g_T é a **métrica transversa associada** à métrica g .

O seguinte teorema fornece diferentes caracterizações para uma folheação Riemanniana. Os detalhes da demonstração podem ser encontrados em [4], Proposição 5.7, ou em [21], Remarks 2.7.

Proposição 2.15. *Seja \mathcal{F} uma folheação (regular) de codimensão k de uma variedade Riemanniana (M^n, g) . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana.
- ii) \mathcal{F} é descrita por uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M com submersões Riemannianas

$$s_i : (U_i, g) \longrightarrow (\sigma_i, b_i),$$

onde $\sigma_i = s_i(U_i)$ é uma subvariedade k -dimensional de \mathbb{R}^n , tal que existem isometrias

$$\gamma_{ij} : s_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow s_i(U_i \cap U_j)$$

com $\gamma_{ij} \circ s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}$.

- iii) A $C^\infty(M)$ -forma bilinear, simétrica e positiva g_T , dada em (2.1), é a métrica transversa em (M, \mathcal{F}) associada a g .

2.4 Propriedades das folheações Riemannianas

Vizinhança tubular

O estudo de folheações Riemannianas com folhas compactas é facilitado por um resultado clássico que fornece, para qualquer ponto, uma vizinhança com características muito convenientes. O principal resultado dessa seção é o Teorema 2.19 onde tal vizinhança é apresentada. As demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas em Molino [22].

Começamos explorando a condição de transnormalidade das folheações Riemannianas, isto é, toda geodésica perpendicular a uma folha permanece perpendicular as folhas intersectadas. Em verdade, na próxima demonstração faremos uso do levantamento horizontal dado na Proposição 1.23. Isso é possível pois a folheação é descrita por submersões Riemannianas conforme enunciado na Proposição 2.15. Nossa principal referência é o trabalho de Reinhart [27].

Proposição 2.16. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana (M, g) e U um aberto simples com uma submersão Riemanniana*

$$s : (U, g) \longrightarrow (\sigma, b),$$

onde (σ, b) é uma variedade Riemanniana. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \sigma$ é uma curva suave e $\bar{\gamma}$ é o levantamento horizontal de γ no ponto $p \in U$, isto é, $\bar{\gamma}(0) = p$ e $s \circ \bar{\gamma} = \gamma$ com $\bar{\gamma}'(0) \in \nu_p L_p$, então: γ é geodésica em σ se, e somente se, $\bar{\gamma}$ é geodésica em U perpendicular às folhas de \mathcal{F} .

Demonstração. Seja $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ o levantamento horizontal de γ (perpendicular às folhas de \mathcal{F}) dado pela Proposição 1.23 com $\bar{\gamma}(0) = p$. Para ver que $\bar{\gamma}$ é segmento de geodésica, basta observar que

$$\begin{aligned}
 l(\bar{\gamma}) &= \int_0^1 \sqrt{g(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}'(t))} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{b(ds \cdot \bar{\gamma}'(t), ds \cdot \bar{\gamma}'(t))} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{b(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \\
 &= l(\gamma)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

e que γ minimiza distâncias localmente. Logo $\bar{\gamma}$ minimiza distâncias localmente e portanto é um segmento de geodésica.

Reciprocamente, vamos provar que $\gamma = s \circ \bar{\gamma}$ minimiza distâncias localmente. Sejam $x_0 = \gamma(t_0)$ e $x = \gamma(t)$ suficientemente próximos de modo que $\bar{\gamma}$ minimiza a distância entre $\bar{\gamma}(t_0)$ e $\bar{\gamma}(t)$. Se β é qualquer curva suave unindo x_0 a x , então o levantamento horizontal de β produz uma curva suave unindo $\bar{\gamma}(t_0)$ e $\bar{\gamma}(t)$ cujo comprimento é maior ou igual do que distância entre tais pontos. Da igualdade (2.2) vem que

$$l(\beta) \geq l(\bar{\gamma}|_{[t_0, t]}) = l(\gamma|_{[t_0, t]}).$$

□

Lembremos da definição de tubo e de vizinhança tubular.

Definição 2.17. Dada uma subvariedade N de uma variedade Riemanniana M , definimos o **tubo de raio** $\varepsilon > 0$ de N como sendo o conjunto

$$\text{Tub}_\varepsilon(N) := \{y \in M \mid \text{dist}(y, N) < \varepsilon\}.$$

Em particular, se N é uma subvariedade compacta é possível construir um tubo com propriedades especiais.

Lema 2.18. *Seja N uma subvariedade compacta de uma variedade Riemanniana M . Existe $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\pi : \text{Tub}_\varepsilon(N) \rightarrow N$ tais que: para todo $y \in \text{Tub}_\varepsilon(N)$, se $x = \pi(y)$ então existe um único vetor $\xi_x \in T_x M$ perpendicular a $T_x N$ tal que $y = \exp_x \xi_x$ e $\|\xi_x\|_x = d(y, N)$.*

O tubo $\text{Tub}_\varepsilon(N)$ do Lema 2.18 é chamado de **vizinhança tubular** de N (com raio ε) e a aplicação π é chamada de **projeção ortogonal** de $\text{Tub}_\varepsilon(N)$ em N . Se $x \in N$ e $\pi : \text{Tub}_\varepsilon(N) \rightarrow N$ é a projeção ortogonal, chamamos o conjunto S_x , definido por

$$S_x := \{\exp_x(\xi) \mid \xi \in \nu_x N, \|\xi\| < \varepsilon\},$$

de **slice** (de raio ε) de N em x .

Teorema 2.19. *Seja M uma variedade Riemanniana e \mathcal{F} uma folheação Riemanniana (regular) de M com folhas compactas. Se L é uma folha de \mathcal{F} , então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

- i) *a vizinhança tubular $\text{Tub}_\varepsilon(L)$ está saturada por folhas, ou seja, é igual à união de suas folhas;*
- ii) *para todo $x \in L$ o slice S_x (de raio ε) de N é perpendicular às folhas de \mathcal{F} ;*
- iii) *se \tilde{L} é uma folha em $\text{Tub}_\varepsilon(L)$, então todos os pontos de \tilde{L} equidistam de L ;*
- iv) *para cada $x \in L$ existe uma placa P_x tal que $\pi^{-1}(P_x)$ é um aberto simples.*

Dado $x \in M$ qualquer, o aberto $\pi^{-1}(P_x)$ dado pelo item iv) da proposição anterior é chamado de **vizinhança trivializadora** de x .

Corolário 2.20. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de M com folhas compactas. Existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in M$, a bola $B_x(\delta)$ está contida em alguma vizinhança trivializadora.*

Para folheações Riemannianas, o grupo de holonomia de uma folha fornece informações sobre o comportamento das folhas vizinhas. Por exemplo, se o grupo de holonomia de uma folha é finito então todas as folhas vizinhas devem ser compactas. Outro resultado nesta direção é o teorema de estabilidade “local” de Reeb, apresentado no livro de Moerdijk [21]. Também podemos obter informações sobre o grupo de holonomia de uma folha quando a folheação é Riemanniana com folhas compactas:

Proposição 2.21. *Se \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana de M com folhas compactas, então o grupo de holonomia de cada folha de \mathcal{F} é finito.*

Equifocalidade das folheações Riemannianas

Vamos agora apresentar uma importante propriedade das folheações Riemannianas que usaremos para dar uma definição alternativa de holonomia, a saber, a propriedade da equifocalidade das folheações Riemannianas. Como referência, citamos Candel [11], Seção 6.1.

Definição 2.22. Considere \mathcal{F} uma folheação Riemanniana (regular) de uma variedade Riemanniana M e $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ o módulo dos campos de vetores diferenciáveis em M que são tangentes em cada ponto à correspondente folha. Uma **conexão de Bott** (ou conexão básica) ∇ da folheação \mathcal{F} é uma conexão afim $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \nu\mathcal{F} \longrightarrow \nu\mathcal{F}$ satisfazendo

$$\nabla_X Y = [X, Y]^\perp,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $Y \in \nu\mathcal{F}$. Onde $(\cdot)^\perp$ denota a projeção sobre o fibrado normal $\nu\mathcal{F}$.

Em particular, considerando a conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ e a decomposição $X = X^\top \oplus X^\perp$, $X^\top \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $X^\perp \in \nu\mathcal{F}$, podemos definir a conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \nu\mathcal{F} \longrightarrow \nu\mathcal{F}$ dada por

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{X^\perp} Y)^\perp + [X^\top, Y]^\perp.$$

Se considerarmos a restrição $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \times \nu\mathcal{F} \longrightarrow \nu\mathcal{F}$, obtemos uma conexão de Bott induzida por $\tilde{\nabla}$. De agora em diante, em uma folheação Riemanniana, vamos considerar tal conexão de Bott induzida pela conexão de Levi-Civita.

Um **campo vetorial normal** Y (i.e. $Y \in \nu\mathcal{F}$) em M é dito **folheado** se é paralelo com respeito à conexão de Bott, isto é, $\nabla_X Y = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Na literatura, campos folheados também são chamados de campos básicos ou campos projetáveis.

Proposição 2.23. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana (regular) de M e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial normal às folhas de \mathcal{F} . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) Y é folheado.
- ii) Se $\varphi : U \longrightarrow \sigma$ é uma submersão que descreve as placas de \mathcal{F} no aberto simples U , então $d\varphi \cdot Y$ é constante ao longo de tais placas.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Molino [22], Proposição 2.2.

Corolário 2.24. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Toda folheação Riemanniana \mathcal{F} de M satisfaz a seguinte propriedade: Se ξ é um campo vetorial normal e paralelo (com respeito à conexão de Bott) ao longo de uma curva $\beta : [a, b] \rightarrow L$, então a curva $t \mapsto \exp_{\beta(t)}(\xi(t))$ está contida na folha*

$$L_{\exp_{\beta(a)}(\xi(a))}.$$

Chamamos essa propriedade de **equifocalidade** da folheação Riemanniana \mathcal{F} .

No restante desta seção, exigimos que M seja uma variedade Riemanniana completa. Vamos definir o transporte paralelo (com respeito à conexão de Bott) de **segmentos horizontais de geodésicas** (i.e. segmentos de geodésicas perpendiculares as folhas de \mathcal{F}).

Definição 2.25. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana completa M e L uma folha de \mathcal{F} . Considere uma curva $\beta : [a, b] \rightarrow L$ suave por partes e $\gamma : [c, d] \rightarrow M$ um segmento de geodésica horizontal tal que $\gamma(c) = \beta(a)$. Seja $\xi_0 = \gamma'(c)$ e $\xi : [a, b] \rightarrow \nu L$ o transporte paralelo de ξ_0 com respeito a conexão de Bott ao longo de β . Então ξ_0 é um vetor do espaço normal $\nu_{\beta(a)}L$ satisfazendo $\exp_{\gamma(c)}((d-c) \cdot \xi_0) = \gamma(d)$. Definimos o **transporte paralelo da curva** γ ao longo da curva β (Figura 2.5) por $\parallel_{\beta}(\gamma) := \tilde{\gamma}$, com $\tilde{\gamma}$ o segmento de geodésica*

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [c, d] &\rightarrow M \\ s &\mapsto \tilde{\gamma}(s) = \exp_{\beta(b)}((s-c)\xi(b)). \end{aligned}$$

A equifocalidade nos permite definir a curva $\eta(\gamma, \beta)$ em $L_{\gamma(d)}$ por

$$\begin{aligned} \eta(\gamma, \beta) : [a, b] &\rightarrow L_{\gamma(d)} \\ t &\mapsto \exp_{\beta(t)}((d-c)\xi(t)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Munidos da equifocalidade, estamos aptos a dar uma definição alternativa de holonomia para uma folheação Riemanniana. Neste contexto, a noção de holonomia está relacionada com a estrutura Riemanniana “transversa” da folheação.

Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana completa M e L uma folha de \mathcal{F} . Seja $\beta : [a, b] \rightarrow L$ uma curva suave por partes e $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_{\beta(i)}$ é um difeomorfismo em $B_{\varepsilon}(\beta(i)) \subset T_{\beta(i)}M$, para $i = a, b$. Considere

$$S_{\beta(i)} := \{\exp_{\beta(i)}(\xi) \mid \xi \in \nu_{\beta(i)}L, \|\xi\| < \varepsilon\}$$

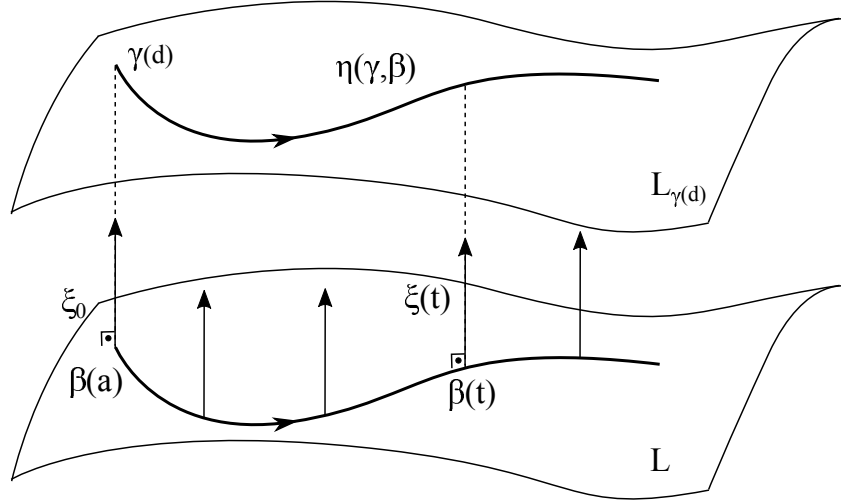


Figura 2.5: Transporte paralelo da curva γ ao longo de β .

um **slice** em $\beta(i)$, $i = a, b$. Definimos uma aplicação associada a curva β por:

$$\begin{aligned} \varphi_\beta : S_{\beta(a)} &\longrightarrow S_{\beta(b)} \\ x &\longmapsto \varphi_\beta(x) := \parallel_\beta \gamma(r). \end{aligned}$$

onde $\gamma : [0, r] \longrightarrow S_{\beta(a)}$ é o segmento de geodésica minimizante unindo $\beta(a)$ a x .

Se R é o tensor de curvatura de uma conexão de Bott e $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ então $R(X, Y) = 0$ (para a demonstração, vide [11], Lema 6.1.7). Um fato simples de geometria Riemanniana garante que se $R \equiv 0$ então o transporte paralelo depende apenas da classe de homotopia $[\beta]$ das curvas que fixam os extremos de β (vide [16], Problem 7-4, página 128). Usando esse fato, podemos dar a seguinte definição:

Definição 2.26. A **aplicação de holonomia** de \mathcal{F} ao longo de β é definida por:

$$\begin{aligned} \varphi_{[\beta]} : S_{\beta(a)} &\longrightarrow S_{\beta(b)} \\ x &\longmapsto \varphi_{[\beta]}(x) := \parallel_\beta \gamma(r). \end{aligned}$$

onde $\gamma : [0, r] \longrightarrow S_{\beta(a)}$ é o segmento de geodésica minimizante unindo $\beta(a)$ a x .

Dada uma folha $L \in \mathcal{F}$ e $p \in L$, podemos definir alternativamente a holonomia $\varphi : \pi_1(L, p) \longrightarrow \text{Dif}(S_p)$, que associa cada classe $[\beta]$ à aplicação de holonomia $\varphi_{[\beta]}$. A aplicação obtida coincide com a holonomia vista na Seção 2.2.

Observação 2.27. A diferencial de $\varphi_{[\beta]}$ no ponto $\beta(a)$ é o transporte paralelo dos vetores de $\nu_{\beta(a)}L$ em $\nu_{\beta(b)}L$. Com efeito, dado ξ_a um vetor do fibrado normal $\nu_{\beta(a)}L$, seja $\xi_b \in \nu_{\beta(b)}L$

o seu transporte paralelo ao longo de β . Se $\gamma : [0, r] \rightarrow S_{\beta(a)}$ é um segmento de geodésica com $\gamma'(0) = \xi_a$, então

$$d\varphi_{[\beta]}(\beta(a)) \cdot \xi_a = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\varphi_{[\beta]} \circ \gamma)(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp_{\beta(b)}(s \xi_b)) = \xi_b.$$

Capítulo 3

Orbifolds

A noção de orbifold foi primeiramente introduzida na década de 1950, por Satake [29], no contexto da geometria Riemanniana com o nome de V -manifolds. Nos anos 70, foi redescoberta por Thurston [30] que introduziu o termo “orbifold”. Posteriormente, a definição de orbifold foi adaptada em diferentes contextos.

Primeiro, definimos orbifolds via cartas cuja imagem é o quociente de \mathbb{R}^n por um grupo finito de difeomorfismos. Para nossos objetivos, será necessário introduzir a noção de orbifold riemanniano. Veremos na segunda seção que é possível descrever todo orbifold riemanniano por meio do espaço das folhas de uma folheação Riemanniana com folhas compactas. Também daremos uma descrição equivalente através de pseudogrupos de isometrias.

As principais referências são o livro de Molino [22] e Moerdijk [21]. Para uma abordagem via pseudogrupos, recomendamos Salem [22], apêndice D ou Bridson e Haefliger [8], apêndice G.

3.1 Orbifolds

Como veremos nesta seção, os orbifolds fornecem uma linguagem para descrever a rica estrutura do espaço das folhas de certas folheações.

Um modo natural de introduzir orbifolds é considerar os espaços que surgem como quocientes de ações. Lembremos que se G é um grupo agindo sobre uma variedade M , então o espaço das órbitas de G particiona M em subvariedades disjuntas. Tem-se naturalmente uma relação de equivalência em M :

$$x \sim y \iff Gx = Gy,$$

ou seja, x e y estão relacionados se suas órbitas são iguais. O **espaço das órbitas** da ação de G sobre M é o espaço quociente M/G com as classes de equivalência de \sim .

Vimos na Proposição 1.42 que se a ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M é própria e livre, então o espaço das órbitas M/G tem uma estrutura de variedade diferenciável. Entretanto, se a ação não for livre, M/G não é necessariamente uma variedade diferenciável, como no caso do cone dado no Exemplo 1.43.

Em geral, o espaço das órbitas possui uma estrutura global muito complicada e nem sempre tem-se uma estrutura de variedade. Na tentativa de compreender o espaço das órbitas, somos compelidos a dar uma generalização para a noção de variedade, que estamos chamando de orbifold.

Essencialmente, um orbifold de dimensão n é definido como uma variedade diferenciável exceto que no lugar de subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n como imagem das cartas locais, usa-se quocientes de \mathbb{R}^n por um grupo finito de difeomorfismos. No caso do cone, tem-se uma única carta (global) dada pelo quociente de \mathbb{R}^2 pelo grupo gerado pela rotação de ângulo $2\pi/n$ em torno da origem.

Definição 3.1. Seja \mathcal{O} um espaço de Hausdorff com base enumerável. Um **atlas orbifold** A de dimensão n é uma família $\{(U_i, \Omega_i/\Gamma_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, tal que:

- i) $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de \mathcal{O} .
- ii) Para todo $i \in I$, $\phi_i : U_i \rightarrow \Omega_i/\Gamma_i$ é um homeomorfismo de U_i sobre o espaço quociente de um subconjunto aberto $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ por um grupo finito de difeomorfismos.
- iii) Para quaisquer $i, j \in I$, se $p \in U_i \cap U_j$ e $q_i \in \Omega_i$, $q_j \in \Omega_j$ são tais que

$$\pi_i(q_i) = \phi_i(p) \quad \text{e} \quad \pi_j(q_j) = \phi_j(p),$$

onde $\pi_{i,j} : \Omega_{i,j} \rightarrow \Omega_{i,j}/\Gamma_{i,j}$ são as respectivas projeções, então existem vizinhanças $V_i \ni q_i$, $V_j \ni q_j$ e um difeomorfismo $f_{ji} : V_i \rightarrow V_j$ tais que

- a) $\pi_i(V_i) \subset \phi_i(U_i \cap U_j)$ e $\pi_j(V_j) \subset \phi_j(U_i \cap U_j)$,
- b) $(\phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ \pi_i)(q) = (\pi_j \circ f_{ji})(q)$, para todo $q \in V_i$.

Um **orbifold** (diferenciável) \mathcal{O} de dimensão n é um espaço de Hausdorff $|\mathcal{O}|$ com base enumerável munido de um atlas orbifold maximal \hat{A} de dimensão n . As cartas de \hat{A}

são chamadas de **cartas locais do orbifold**. Escreveremos $|\mathcal{O}|$ ao considerar apenas a estrutura topológica do orbifold \mathcal{O} .

Interessante que diversos espaços que surgem naturalmente em geometria não são variedades, mas estão na classe dos orbifolds: variedades com cantos, variedades com bordo, cone, hemisfério, entre outros exemplos.

Exemplo 3.2. Se Γ é um grupo finito de difeomorfismos sobre uma variedade M de dimensão n , então o espaço das órbitas M/Γ tem uma estrutura natural de orbifold.

Diremos que um ponto de um orbifold \mathcal{O} é **regular** se existe uma carta local em alguma vizinhança com valores em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Tais pontos formam um conjunto aberto que possui uma estrutura de variedade induzida pelo atlas \hat{A} . Todo ponto de \mathcal{O} que não é regular é chamado de **ponto singular**.

Proposição 3.3. *Seja p um ponto regular de um orbifold \mathcal{O} . Para qualquer carta orbifold $(U, \Omega/\Gamma, \varphi)$, com $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ a projeção e $q \in \Omega$ tal que $\pi(q) = \varphi(p)$, existe $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tal que $q \in \tilde{\Omega}$ e o estabilizador Γ_q restrito a $\tilde{\Omega}$ é trivial.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{O} tem dimensão n . Sendo p regular, existe uma carta orbifold $(U_0, \Omega_0, \varphi_0)$ tomando valores em um subconjunto aberto Ω_0 de \mathbb{R}^n . Pela definição de atlas orbifold, sabemos que existem vizinhanças $V_0 \subset \Omega_0$, $V \subset \Omega$, de $\varphi_0(p)$, q respectivamente, e um difeomorfismo $f : V_0 \rightarrow V$ tal que $\pi \circ f = \varphi \circ \varphi_0^{-1}$, ou seja

$$\pi = \varphi \circ \varphi_0^{-1} \circ f^{-1}. \quad (3.1)$$

Usando o fato de que Γ é finito e a continuidade dos difeomorfismos de Γ , encontramos $\tilde{\Omega} \ni q$ contido em V e invariante por Γ_q . Basta provar que o estabilizador Γ_q restrito a $\tilde{\Omega}$ é trivial. Com efeito, se Γ_q não fosse trivial existiriam $x \in \tilde{\Omega}$ e $w \in \Gamma_q$ tal que $x \neq wx$. Por outro lado, a expressão (3.1) diz que π é uma bijeção, o que contradiz o fato de $\pi(x) = \pi(wx)$. \square

O cone do Exemplo 1.43 é um orbifold com uma carta tomando valores em \mathbb{R}^2/Γ , sendo Γ o grupo gerado por uma rotação em torno da origem. A projeção da origem é portanto o único ponto singular do cone. Notemos que é possível construir um homeomorfismo entre o cone e o plano \mathbb{R}^2 cujo domínio contém o ponto singular. No entanto, este homeomorfismo não está de acordo com a estrutura orbifold do cone, ou seja, não pertence ao atlas maximal do cone visto como um orbifold. Realmente, se tal homeomorfismo produzisse uma

carta orbifold, resultaria da Proposição 3.3 que o estabilizador $\Gamma_{(0,0)}$ é trivial em alguma vizinhança de $(0,0)$. Isso não pode ocorrer visto que Γ é gerado por uma rotação em torno da origem.

Proposição 3.4. *Seja M uma variedade diferenciável e Γ um grupo discreto cuja a ação sobre M é descontínua. Então o espaço das órbitas M/Γ possui uma estrutura de orbifold.*

A proposição anterior permite definir certos orbifolds como espaço das órbitas da ação de um grupo discreto.

Definição 3.5. Diremos que um orbifold é **bom** se for o espaço das órbitas da ação de um grupo discreto agindo descontinuamente sobre uma variedade diferenciável.

3.2 Orbifolds riemannianos

Assim como a noção de métrica enriquece o estudo de variedades, a noção de orbifold é enriquecida quando consideramos uma métrica na imagem de cada carta. Neste caso, diremos que o orbifold é riemanniano. Veremos que orbifolds riemannianos podem ser representados pelo espaço das folhas de folheações Riemannianas com folhas compactas e vice-versa. Uma visão mais moderna é a definição de orbifolds riemannianos por meio de pseudogrupos de isometrias que veremos no final desta seção.

Definição 3.6. Seja \mathcal{O} um orbifold com atlas maximal

$$\hat{A} = \{(U_i, \Omega_i/\Gamma_i, \varphi_i)\}_{i \in I}.$$

Uma **métrica Riemanniana** em \mathcal{O} é uma coleção $b = \{b_i\}_{i \in I}$, onde b_i é uma métrica Riemanniana em Ω_i , tal que cada Γ_i é um grupo de isometrias e os difeomorfismos f_{ji} (dados no item iii) da Definição 3.1) são isometrias de (V_i, b_i) em (V_j, b_j) . Um **orbifold riemanniano** é um orbifold munido de uma métrica Riemanniana.

Pode-se provar que todo orbifold (diferenciável) admite uma métrica Riemanniana.

Proposição 3.7. *Seja M uma variedade Riemanniana e Γ um grupo discreto de isometrias cuja ação sobre M é descontínua. Então o espaço das órbitas M/Γ possui uma estrutura de orbifold riemanniano.*

Se Γ é um grupo discreto de isometrias cuja ação sobre M é descontínua, diremos que o espaço das órbitas M/Γ , munido da estrutura de orbifold riemanniano, é um **orbifold riemanniano bom**.

Em particular, toda variedade Riemanniana é um orbifold riemanniano bom. Contudo, segue da Proposição 3.3 que o cone dado no Exemplo 1.43 é um orbifold que não é variedade. A ponta do cone (ou seja, a imagem da origem no quociente) é um ponto singular, enquanto que todos os outros pontos são regulares.

O exemplo do cone indica também que localmente o quociente pode ter uma estrutura mais bem comportada.

Observação 3.8. Se M/Γ é um orbifold riemanniano bom, então o estabilizador Γ_x é finito para todo $x \in M$.

Exemplo 3.9 (semi-plano). O semi-plano $M^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ é o quociente do plano \mathbb{R}^2 pelo grupo gerado pela reflexão com relação ao eixo y . Logo M é um orbifold bom. Por outro lado, é também uma variedade com bordo $\partial M = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.10 (bola de futebol americano). Seja $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ com pontos (x, y, z) e $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ agindo sobre M pelas rotações de ângulo $2\pi/n$ em torno do eixo z . O espaço quociente é topologicamente S^2 mas metricamente existem dois pontos singulares: o pólo norte (imagem de $(0, 0, 1)$ por Γ) e o pólo sul (imagem de $(0, 0, -1)$) que são fixos por Γ . Estes pontos são os únicos que tem estabilizador não trivial. A figura obtida se assemelha a uma bola de futebol americano.

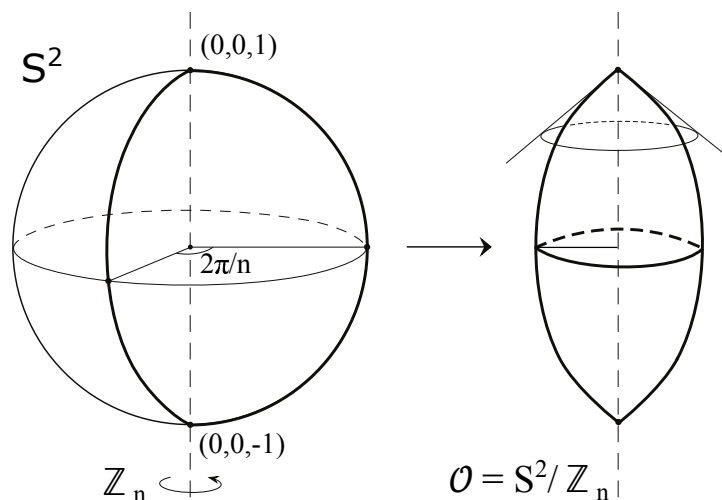


Figura 3.1: A bola de futebol americano.

O próximo resultado mostra que localmente os orbifolds possuem uma estrutura bem comportada. Sua demonstração pode ser encontrada em Molino [22].

Proposição 3.11. *Seja \mathcal{O} um orbifold de dimensão n e $p \in \mathcal{O}$ um ponto qualquer. Então existe uma carta local $(U, \Omega/\Gamma, \varphi)$ de \mathcal{O} com $p \in U$, $\varphi(p) = \pi(0)$, onde $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é a origem e $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ é a projeção, tal que Γ é a restrição a Ω de um grupo de transformações ortogonais preservando a origem.*

Um importante exemplo de orbifold riemanniano é o espaço das folhas M/\mathcal{F} , onde M é uma variedade Riemanniana completa e \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana de M com folhas fechadas e mergulhadas. Em particular, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.12. *Seja M uma variedade Riemanniana e \mathcal{F} uma folheação Riemanniana (regular) de M com codimensão k e folhas compactas. Então o espaço das folhas M/\mathcal{F} admite uma estrutura de orbifold.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em Molino [22]. A ideia da prova é considerar, para cada ponto $p \in M$, a vizinhança tubular $\text{Tub}_\varepsilon(L_p)$ dada pelo Teorema 2.19. Então, para cada laço β em p contido na folha L_p , toma-se um difeomorfismo representante da holonomia $\varphi_{[\beta]}$, definido no slice

$$S_p = \pi^{-1}(p) = \{\exp_p(\xi) \mid \xi \in \nu_p L_p, \|\xi\| < \varepsilon\}$$

(aqui, não é necessário o uso de germes de difeomorfismos, como na Definição 2.11, pois a construção da aplicação de holonomia pode ser feita ao longo do tubo $\text{Tub}_\varepsilon(L_p)$). Assim, tem-se a holonomia:

$$\varphi : \pi_1(L_p, p) \rightarrow \text{Dif}_p(S_p).$$

Por construção, o subconjunto aberto $\text{Tub}_\varepsilon(L_p)/\mathcal{F} \subset M/\mathcal{F}$ pode ser identificado com o espaço S_p/Γ das órbitas do grupo de holonomia $\Gamma = \varphi(\pi_1(L_p, p))$ que é finito pela Proposição 2.21. Por sua vez, Γ pode ser identificado com um grupo finito de isometrias $\tilde{\Gamma}$ da bola $B_\varepsilon(0) \subset T_p S_p$. As cartas de M/\mathcal{F} são os homeomorfismos de $\text{Tub}_\varepsilon(L_p)/\mathcal{F}$ em $B_\varepsilon(0)/\tilde{\Gamma}$ para cada L_p .

Existe um resultado recíproco cuja ideia da demonstração pode ser encontrada em Alexandrino [4], Proposição 5.21.

Teorema 3.13. *Todo orbifold riemanniano \mathcal{O} é o espaço das folhas de uma folheação Riemanniana com folhas compactas.*

Vimos que o espaço das órbitas da ação de um grupo discreto de isometrias agindo descontinuamente sobre uma variedade Riemanniana M é um orbifold riemanniano. É natural perguntar se todo orbifold riemanniano pode ser representado (ao menos localmente) pelo espaço das órbitas da ação de um grupo. Veremos que todo orbifold riemanniano pode ser equivalentemente descrito pelo espaço das órbitas da ação de um pseudogrupo de isometrias.

Um pseudogrupo é uma generalização da noção de grupo de difeomorfismos (ou homeomorfismos) de uma variedade (ou espaço topológico). A teoria de pseudogrupos de isometrias foi desenvolvida por A. Haefliger. Estamos interessados no caso riemanniano onde temos coleções de isometrias locais.

Definição 3.14. Seja Σ uma variedade Riemanniana (possivelmente desconexa). Um **pseudogrupo** (riemanniano) W de isometrias de Σ é uma coleção de isometrias $w : U \rightarrow V$, onde U e V são subconjuntos abertos de Σ , tal que

- (1) A identidade de Σ pertence a W .
- (2) Se $w \in W$, então $w^{-1} \in W$.
- (3) Se $w : U \rightarrow V$, $\tilde{w} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ pertencem a W e $V \subset \tilde{U}$, então $\tilde{w} \circ w : U \rightarrow \tilde{V}$ também pertence a W .
- (4) Se $w : U \rightarrow V$ pertence a W , então sua restrição a cada subconjunto aberto $\tilde{U} \subset U$ também pertence a W .
- (5) Se $w : U \rightarrow V$ é uma isometria entre dois subconjuntos abertos de Σ que coincide em uma vizinhança de cada ponto de U com um elemento de W , então $w \in W$.

Definição 3.15. Seja A uma família de isometrias locais de Σ contendo a aplicação identidade de Σ . O pseudogrupo obtido tomando-se os inversos dos elementos de A , a restrição dos elementos de A a subconjuntos abertos, bem como suas composições e uniões, é chamado de **pseudogrupo gerado** por A .

Exemplo 3.16. Um importante exemplo de pseudogrupo riemanniano é o pseudogrupo de holonomia de uma folheação Riemanniana. Recordemos da Proposição 2.15 que uma folheação Riemanniana (regular com codimensão k) \mathcal{F} de uma variedade Riemanniana (M, g) pode ser descrita por uma cobertura $(U_i)_{i \in I}$ de M com submersões Riemannianas

$$s_i : (U_i, g) \rightarrow (\sigma_i, b_i),$$

onde $\sigma_i = s_i(U_i)$ é uma subvariedade k -dimensional de \mathbb{R}^k , tal que existem isometrias

$$w_{ij} : s_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow s_i(U_i \cap U_j)$$

com $w_{ij} \circ s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}$. Os elementos w_{ij} agindo sobre

$$\Sigma = \bigsqcup_{i \in I} \sigma_i$$

gera um pseudogrupo de isometrias de Σ , chamado de **pseudogrupo de holonomia de \mathcal{F}** .

É natural introduzir a seguinte noção de equivalência:

Definição 3.17. Sejam W e W' pseudogrupos de isometrias de variedades Riemannianas Σ e Σ' , respectivamente. Uma **equivalência** entre W e W' é uma coleção maximal Ψ de isometrias entre subconjuntos abertos de Σ e subconjuntos abertos de Σ' tal que

- i) os domínios (imagens) dos elementos de Ψ formam uma cobertura aberta de Σ (respectivamente Σ'),
- ii) Se $\psi, \psi' \in \Psi$, e $w \in W$ e $w' \in W'$, então

$$\begin{aligned} w' \circ \psi \circ w &\in \Psi, \\ \psi^{-1} \circ w' \circ \psi' &\in W, \\ \psi' \circ w \circ \psi^{-1} &\in W'. \end{aligned}$$

O **espaço das órbitas** de um pseudogrupo de isometrias W agindo sobre uma variedade Riemanniana Σ é o conjunto das classes de equivalência da seguinte relação em Σ :

$$x \sim y \text{ se, e somente se, existe } w \in W \text{ definido em uma vizinhança de } x \text{ com } w(x) = y.$$

As classes de equivalência dos pontos x de Σ são as órbitas

$$Wx = \{w(x) \mid w \in W \text{ está definido em uma vizinhança de } x\}.$$

O espaço das órbitas, munido com a topologia quociente, é denotado por $|\Sigma/W|$. Se (Σ, W) e (Σ', W') são equivalentes, então $|\Sigma/W|$ e $|\Sigma'/W'|$ são homeomorfos.

Observação 3.18. Considere espaço das órbitas Σ/W de um pseudogrupo de isometrias W agindo sobre uma variedade Riemanniana Σ de dimensão n , verificando as seguintes condições:

- (i) O espaço topológico das órbitas $|\Sigma/W|$ é Hausdorff.
- (ii) Para cada $x \in \Sigma$, existe uma vizinhança aberta U de x em Σ tal que a restrição de W a U é gerada por um grupo finito de isometrias de U .

Então Σ/W possui uma estrutura de orbifold riemanniano. Vale a recíproca, ou seja, todo orbifold riemanniano pode ser representado pelo espaço das órbitas de um pseudogrupo deste tipo.

3.3 Recobrimento e grupo fundamental orbifold

Começamos relembrando a noção de espaços de recobrimento. Sejam \bar{M} e M variedades topológicas (diferenciáveis) conexas. Uma aplicação $p : \bar{M} \rightarrow M$ contínua (diferenciável) chama-se um **recobrimento topológico (diferenciável)** se, para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x tal que: se \bar{U} é uma componente conexa de $p^{-1}(U)$, então $p|_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo (respc. difeomorfismo).

Diz-se que $p : \bar{M} \rightarrow M$ é um recobrimento universal de M se é um recobrimento diferenciável tal que, para todo recobrimento diferenciável $p_0 : M_0 \rightarrow M$, existe um recobrimento $\bar{p} : \bar{M} \rightarrow M_0$ satisfazendo $p = p_0 \circ \bar{p}$. Sabemos que toda variedade diferenciável conexa M admite um recobrimento universal $p : \bar{M} \rightarrow M$, com \bar{M} uma variedade diferenciável simplesmente conexa.

Recobrimentos de orbifolds são definidos similarmente.

Definição 3.19. Uma aplicação entre orbifolds conexos $p : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ é chamada de **recobrimento orbifold** se, para todo $x \in \mathcal{O}$, existe uma carta orbifold $(U, \Omega/\Gamma, \varphi)$ com $x \in U$ tal que: para cada componente conexa \bar{U} de $p^{-1}(U)$ em $\bar{\mathcal{O}}$, existe um subgrupo $\bar{\Gamma} \leq \Gamma$ e um homeomorfismo $\bar{\varphi} : \bar{U} \rightarrow \Omega/\bar{\Gamma}$ tais que $(\bar{U}, \Omega/\bar{\Gamma}, \bar{\varphi})$ é uma carta do orbifold $\bar{\mathcal{O}}$.

Notemos que nem sempre o espaço topológico $|\bar{\mathcal{O}}|$ é um espaço de recobrimento de $|\mathcal{O}|$. Por exemplo, considere Γ o grupo gerado pela reflexão em torno do eixo OY em \mathbb{R}^2 . Então a projeção $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento do orbifold \mathbb{R}^2/Γ . Todavia, p não é uma aplicação de recobrimento do espaço quociente $|\mathbb{R}^2/\Gamma|$ visto que, para qualquer vizinhança U de $p(0,0)$ em \mathbb{R}^2/Γ , a restrição de p a uma componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contém $(0,0)$ não é sequer bijeção.

Definição 3.20. Um **recobrimento orbifold universal** do orbifold conexo \mathcal{O} é um recobrimento orbifold $p : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ tal que, para todo recobrimento orbifold $p_0 : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}$, existe um recobrimento orbifold $\bar{p} : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}_0$ satisfazendo $p = p_0 \circ \bar{p}$.

Quando $\mathcal{O} = M/\Gamma$ é um orbifold bom, a projeção $p : M \rightarrow M/\Gamma$ é um recobrimento orbifold. Se $\bar{p} : \bar{M} \rightarrow M$ é o recobrimento universal de M , então $p \circ \bar{p}$ é um recobrimento orbifold universal de M/Γ .

Thurston ([30], Teorema 13.2.4) provou que todo orbifold conexo possui um recobrimento orbifold universal e usou esse fato para introduzir a noção de grupo fundamental orbifold que veremos agora.

Seja $p : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ um recobrimento orbifold, diremos que um homeomorfismo $\alpha : |\bar{\mathcal{O}}| \rightarrow |\mathcal{O}|$ é uma **transformação deck** se $p \circ \alpha = p$. É fácil ver que as transformações deck de p formam um grupo.

Se $\mathcal{O} = M/\Gamma$ é um orbifold bom com M uma variedade simplesmente conexa, então todo recobrimento orbifold de M é isomorfo a $M/\bar{\Gamma}$, para algum subgrupo $\bar{\Gamma} \leq \Gamma$, onde Γ é o grupo das transformações deck de M sobre \mathcal{O} . Em particular, M é o recobrimento orbifold universal.

Para variedades conexas, sabemos que o grupo fundamental da variedade é isomorfo ao grupo das transformações deck do seu recobrimento universal. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.21. O **grupo fundamental** $\pi_1(\mathcal{O})$ de um orbifold \mathcal{O} é o grupo das transformações deck do seu recobrimento universal.

Vamos agora interpretar o grupo fundamental orbifold em termos de laços. Já foi observado na seção anterior que todo orbifold riemanniano \mathcal{O} é o espaço das órbitas Σ/W , onde Σ é uma variedade Riemanniana e W é um pseudogrupo de isometrias sobre Σ .

Definição 3.22. Um W -loop com ponto base $x_0 \in \Sigma$ é definido por

1. uma sequência $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$,
2. curvas contínuas $c_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \Sigma$, $1 \leq i \leq n$,
3. elementos $w_i \in W$ definidos em uma vizinhança de $c_i(t_i)$, para $1 \leq i \leq n$, tais que $c_1(0) = w_n c_n(1) = x_0$ e $w_i c_i(t_i) = c_{i+1}(t_i)$, onde $1 \leq i \leq n-1$.

Uma **subdivisão** de um W -loop é obtida adicionando-se novos pontos ao intervalo $[0,1]$, tomando-se a restrição de c_i aos novos intervalos e w como sendo a identidade em cada um dos novos pontos.

Definição 3.23. Diremos que dois W -loops são **equivalentes**, se existir uma subdivisão comum tal que os W -loops sejam representados por (c_i, w_i) e $(\tilde{c}_i, \tilde{w}_i)$, e elementos $g_i \in W$, definidos em uma vizinhança de curva c_i , tais que

1. $g_1 = id$, $g_i \circ c_i = \tilde{c}_i$, $1 \leq i \leq n$,
2. $\tilde{w}_i \circ g_i$ e $g_{i+1} \circ w_i$ tem os mesmos germes em $c_i(t_i)$, $1 \leq i \leq n-1$,
3. $\tilde{w}_n \circ g_n$ e w_n tem os mesmos germes em $c_n(1)$.

Definição 3.24. Uma **deformação** de um W -loop representado por (c_i, w_i) é dada por deformações contínuas $c_i(s, \cdot)$ das curvas $c_i = c_i(0, \cdot) : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \Sigma$ tais que $(c_i(s, \cdot), w_i)$ representam W -loops.

Definição 3.25. Diremos que dois W -loops estão na mesma **classe de homotopia** se um deles puder ser obtido do outro por uma série de subdivisões, equivalências e deformações. As classes de homotopia dos W -loops com o mesmo ponto base $x_0 \in \Sigma$ formam um grupo $\pi_1(W, x_0)$ chamado de **grupo fundamental do pseudogrupo W** no ponto x_0 .

Observação 3.26. Se o espaço das órbitas $|\Sigma/W|$ é conexo, então existe um isomorfismo, dado por uma conjugação, entre $\pi_1(W, x)$ e $\pi_1(W, y)$ para $x, y \in \Sigma$. Assim, quando for conveniente, escreveremos apenas $\pi_1(W)$.

Se Σ/W é um orbifold conexo, o grupo fundamental orbifold $\pi_1(\Sigma/W)$ pode ser equivalentemente definido pelo grupo fundamental $\pi_1(W)$ do pseudogrupo W .

Cabe observar que o grupo fundamental de um orbifold Σ/W não é necessariamente igual ao grupo fundamental do espaço topológico $|\Sigma/W|$. Uma das diferenças resulta do item 2. da Definição 3.23. Realmente, considere W o grupo gerado pela reflexão em torno do eixo OY agindo sobre \mathbb{R}^2 . Então o segmento de reta que une os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ é um elemento não trivial do grupo fundamental do orbifold \mathbb{R}^2/W . Se removêssemos as palavras “tem os mesmos germes” no item 2. da Definição 3.23, concluiríamos que tal curva é equivalente a concatenação do segmento de reta que une $(-1, 0)$ a $(0, 0)$ com o segmento de reta que une $(0, 0)$ a $(-1, 0)$. Esta curva é homotópica a um ponto e portanto a curva que une $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ seria equivalente a um ponto.

Consideremos agora um orbifold conexo M/\mathcal{F} , onde \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana com folhas mergulhadas e fechadas de uma variedade Riemanniana completa e conexa M . De acordo com Salem ([22], Apêndice D, Seção 1.11) existe um homomorfismo sobrejetor do grupo fundamental de M sobre o grupo fundamental do pseudogruppo de holonomia de M/\mathcal{F} . Este, por sua vez, coincide com o grupo fundamental orbifold $\pi_1(M/\mathcal{F})$. Em suma, temos o resultado:

Proposição 3.27. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana, com folhas mergulhadas e fechadas, de uma variedade Riemanniana completa e conexa M . Então existe um homomorfismo sobrejetor entre o grupo fundamental de M e o grupo fundamental orbifold de M/\mathcal{F} .*

Capítulo 4

Geodésicas fechadas em orbifolds

Se um grupo finito de isometrias age sobre uma variedade Riemanniana, é natural usar a definição de geodésicas em variedades para definir geodésicas no espaço das órbitas pela ação do grupo. Seguindo essa linha de raciocínio, vamos usar as cartas orbifolds para definir geodésicas em orbifolds riemannianos.

Sabemos que um orbifold pode ser equivalentemente descrito pelo espaço das órbitas da ação de um pseudogrupo de isometrias sobre uma variedade Riemanniana. Nesse contexto, temos uma definição equivalente de geodésica como será mostrado na Seção 4.1.

Na segunda seção, falaremos do processo de encurtamento. Este será empregado na última seção para a obtenção de geodésicas fechadas em orbifolds. No final do capítulo, faremos um breve estudo sobre a existência de geodésicas fechadas em orbifolds que surgem como quociente de uma variedade Riemanniana por uma folheação Riemanniana singular.

Aqui, vamos exigir que toda variedade seja completa.

4.1 Geodésicas em orbifolds

Localmente, um orbifold riemanniano \mathcal{O} é semelhante a um cone, ou seja, as cartas do orbifold levam vizinhanças dos pontos de \mathcal{O} em orbifolds riemannianos bons dados pelo quociente de um aberto de \mathbb{R}^n por um grupo finito de isometrias. A dificuldade de se definir uma geodésica em um orbifold riemanniano reside no fato de que a métrica não está definida globalmente. Todavia, vamos contornar esse problema dividindo uma curva de \mathcal{O} em partes para definir a geodésica em cada orbifold riemanniano bom.

Definição 4.1. Seja M/Γ um orbifold riemanniano bom. Uma curva $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M/\Gamma$ é

geodésica se $\tilde{\gamma}(t) = (\pi \circ \gamma)(t)$ onde $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ é um caminho definido por

1. uma sequência $a = t_0 < \dots < t_n = b$,
2. segmentos de geodésica unitários $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow M$, $1 \leq i \leq n$,
3. elementos $w_i \in \Gamma$ tais que

$$w_i \gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i), \quad dw_i(\gamma_i(t_i)) \cdot \gamma'_i(t_i) = \gamma'_{i+1}(t_i),$$

com $1 \leq i \leq n - 1$.

Diremos que $\tilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow M/\Gamma$ é **geodésica fechada** se é geodésica e existe $w_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_1(a) = w_n \gamma_n(b), \quad \gamma'_1(a) = dw_n(\gamma_n(b)) \cdot \gamma'_n(b).$$

O comprimento l de $\tilde{\gamma}$ é definido por $l(\tilde{\gamma}) = \sum_{i=1}^n l(\gamma_i)$.

Definição 4.2. Seja \mathcal{O} um orbifold riemanniano com atlas maximal $\{(U_i, \Omega_i/\Gamma_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. Uma curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{O}$ é **geodésica** se existe uma partição $a = t_0 < \dots < t_n = b$, e finitos $\{U_j\}_{j=1, \dots, n}$ tais que

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$$

e $\phi_j \circ \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ é geodésica em Ω_j/Γ_j , para $j = 1, \dots, n$.

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{O}$ é **geodésica fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e a restrição da imagem de γ a U_1 , definida no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, é levada por ϕ_1 em uma geodésica de Ω_1/Γ_1 .

Nossa principal motivação é o estudo de geodésicas fechadas em orbifolds riemannianos. Buscamos adaptar para o contexto de orbifolds o seguinte resultado clássico de Lyusternik and Fet sobre a existência de geodésicas fechadas em variedades Riemannianas compactas.

Teorema 4.3. *Toda variedade Riemanniana compacta contém uma geodésica fechada não trivial.*

Em [14], A. Haefliger e K. Guruprasad provam o seguinte teorema sobre a existência de geodésicas fechadas em orbifolds riemannianos.

Teorema 4.4. *Se \mathcal{O} é um orbifold riemanniano compacto, então existe uma geodésica fechada não trivial em \mathcal{O} nos seguintes casos:*

- 1) \mathcal{O} não é um orbifold bom,

2) O grupo fundamental orbifold de \mathcal{O} tem um elemento de ordem infinita ou é finito.

Para orbifolds riemannianos bons, apresentaremos uma prova alternativa para o item 2) acima. Já observamos na Seção 3.3 que se $\mathcal{O} = M/\Gamma$ é um orbifold riemanniano bom, então o grupo fundamental orbifold de \mathcal{O} é o grupo Γ das transformações deck sobre M .

Suponha que M é uma variedade Riemanniana conexa e Γ é um subgrupo discreto de isometrias de M tal que M/Γ é um orbifold compacto bom. Então o fato de Γ ser finito implica que o recobrimento orbifold universal de M/Γ é uma variedade Riemanniana compacta que, pelo Teorema 4.3, possui uma geodésica fechada não trivial. A projeção de tal geodésica é uma geodésica fechada não trivial em M/Γ .

Lidaremos agora com o caso em que Γ é infinito. Antes, faremos um lema técnico.

Lema 4.5. *Seja M uma variedade Riemanniana completa conexa e Γ um subgrupo discreto infinito de isometrias de M . Se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências em M e Γ , respectivamente, tais que existe $y \in M$ satisfazendo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(h_n y_n, y_n) = a \geq 0,$$

então existe uma subsequência constante h de (h_n) tal que $d(hy, y) = a$.

Demonstração. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$d(y_n, y) < 1 \quad \text{e} \quad d(h_n y_n, y_n) < a + 1.$$

Seja

$$K := B[y, 2] = \{x \in M \mid d(x, y) \leq 2\}.$$

Para todo $n > n_0$

$$d(h_n y_n, y) \leq d(h_n y_n, y_n) + d(y_n, y) < a + 2,$$

donde

$$y_n \in K \cap h_n K.$$

Sendo Γ discreto, segue da Proposição 1.32 que Γ é descontínuo. Como

$$K \cap h_n K \neq \emptyset \quad \text{para todo } n > n_0,$$

temos que $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto finito, logo existe uma subsequência constante $h = h_{n_k}$ de (h_n) . Daí

$$d(y, hy) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{n_k}, h y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{n_k}, h_{n_k} y_{n_k}) = a.$$

□

Teorema 4.6. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, conexa e Γ um subgrupo discreto de isometrias de M tal que M/Γ é um orbifold compacto bom. Suponha que existe um elemento $w^0 \in \Gamma$ que não fixa pontos. Então existe uma geodésica fechada não trivial em M/Γ .*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em partes:

1. Provar que $\inf_{y \in M} d(y, w^0 y) > 0$.
2. Existe $x \in M$ tal que $d(x, w^0 x) = \inf_{y \in M} d(y, w^0 y)$.
3. Construir uma geodésica fechada $\tilde{\gamma}$ em M .

1. Suponha por contradição que existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, w^0 x_n)$ é igual a zero. Segue do Corolário 1.41 que M/Γ é um espaço métrico que, por hipótese, é compacto. Logo, passando a uma subsequência se necessário, existe $\pi(y) \in M/\Gamma$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n) = \pi(y), \quad (4.1)$$

onde π é a aplicação quociente dada na Definição 1.39. Vamos encontrar uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $g_k \in \Gamma$ tais que $(g_k x_{n_k})$ converge para y . O limite em (4.1) implica que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe n_k tal que

$$\text{dist}(\Gamma(y), \Gamma(x_{n_k})) = d_\Gamma(\pi(y), \pi(x_{n_k})) < \frac{1}{k}.$$

Da igualdade (1.2) vem que

$$\text{dist}(y, \Gamma(x_{n_k})) = d_\Gamma(\Gamma(y), \Gamma(x_{n_k})) < \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos supor $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Sabemos do Teorema 1.33 que a órbita $\Gamma(x_{n_k})$ é fechada para cada k . Assim, existe $g_k \in \Gamma$ tal que

$$d(y, g_k x_{n_k}) = \text{dist}(y, \Gamma(x_{n_k})),$$

de onde

$$d(y, g_k x_{n_k}) < \frac{1}{k}.$$

Logo, por construção, a sequência $(g_k x_{n_k})$ converge para y . Vamos denotar $g_k x_{n_k}$ simplesmente por $g_n x_n$.

Fazendo n tender à infinito na desigualdade

$$d(y, g_n w^0 x_n) \leq d(y, g_n x_n) + d(g_n x_n, g_n w^0 x_n)$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n w^0 x_n = y. \quad (4.2)$$

Como a igualdade em (4.2) é equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n w^0 g_n^{-1} g_n x_n = y$$

e a ação de Γ sobre M é própria, segue da Proposição 1.36, passando a uma subsequência, que

$$g_{n_k} w^0 g_{n_k}^{-1} \longrightarrow g$$

para algum $g \in \Gamma$. Sendo o grupo Γ discreto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo k suficientemente grande, $g = g_{k_0} w^0 g_{k_0}^{-1} = g_{n_k} w^0 g_{n_k}^{-1}$. Donde

$$gy = \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{k_0} w^0 g_{k_0}^{-1})(g_{n_k} x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k} w^0 g_{n_k}^{-1})(g_{n_k} x_{n_k}) = y.$$

Assim

$$g_{k_0} w^0 g_{k_0}^{-1} y = y$$

e neste caso w^0 fixa $g_{k_0}^{-1} y$, contradizendo a hipótese. Portanto vale que $\inf_{y \in M} d(y, w^0 y) > 0$.

2. Escreva $a = \inf_{y \in M} d(y, w^0 y) > 0$ e considere uma sequência (x_n) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, w^0 x_n) = a.$$

Analogamente à construção feita no item 1., encontramos uma subsequência (x_k) e uma sequência (g_k) em Γ tal que $(g_k x_k)$ converge para algum $y \in M$. Tome $y_k = g_k x_k$ e $h_k = g_k w^0 g_k^{-1}$. Então

$$d(y_k, h_k y_k) = d(g_k x_k, (g_k w^0 g_k^{-1}) g_k x_k) = d(x_k, w^0 x_k),$$

e segue do Lema 4.5 que h_k possui uma subsequência constante $h = h_{k_l}$. Seja k_0 tal que $h = g_{k_0} w^0 g_{k_0}^{-1}$. Tomando $x = g_{k_0}^{-1} y$ tem-se

$$d(x, w^0 x) = d(g_{k_0}^{-1} y, w^0 g_{k_0}^{-1} y) = d(y, g_{k_0} w^0 g_{k_0}^{-1} y) = d(y, h y) = a.$$

3. Seja $l = d(x, w^0x)$ e $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ a geodésica minimizante unitária unindo x a w^0x , que existe pelo Teorema de Hopf-Rinow pois M é completa. Vamos provar que a curva $\tilde{\gamma} : [0, 2l] \rightarrow M$ dada por

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [0, l] \\ w^0\gamma(t-l) & \text{se } t \in (l, 2l] \end{cases}$$

é uma geodésica diferenciável. Para tanto, basta verificar que $\tilde{\gamma}$ é diferenciável em $t = l$. Vamos mostrar que

$$(w^0\tilde{\gamma})'(l) = \tilde{\gamma}'(l).$$

Com efeito, consideremos $x' = \gamma(t')$ com $t' \in (0, l)$. Então

$$\begin{aligned} d(x', w^0x') &\leq d(x', w^0x) + d(w^0x, w^0x') \\ &= d(x', w^0x) + d(x, x') \\ &= d(x, w^0x). \end{aligned}$$

Como $d(x, w^0x)$ é o mínimo de $\{d(y, w^0y) \mid y \in M\}$, a última desigualdade produz

$$d(x', w^0x') = d(x', w^0x) + d(w^0x, w^0x').$$

Logo, o segmento de $\tilde{\gamma}$ unindo x' a w^0x' minimiza distância e deve ser um segmento de geodésica. Daí

$$(w^0\tilde{\gamma})'(l) = \tilde{\gamma}'(l)$$

e portanto $\tilde{\gamma}$ é diferenciável em $t = l$. Como $\tilde{\gamma}$ é diferenciável no restante dos pontos, concluímos que $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica e que sua projeção é uma geodésica fechada no orbifold M/Γ . \square

Nas hipóteses do teorema acima, se $w^0 \in \Gamma$ tem ordem infinita, então w^0 não fixa pontos de M . Logo, o item 2) do Teorema 4.4 segue como corolário do Teorema 4.6 quando Γ é infinito.

Suponha que o orbifold riemanniano \mathcal{O} é dado pelo espaço das órbitas Σ/W de um pseudogrupo de isometrias agindo sobre uma variedade Riemanniana Σ . A definição de geodésica pode ser equivalentemente adaptada nesse contexto.

Definição 4.7. Seja Σ/W um orbifold riemanniano. Uma **geodésica fechada** é definida por

1. uma sequência $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$,
2. segmentos não triviais de geodésicas $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \Sigma$, $1 \leq i \leq n$,
3. elementos $w_i \in W$ definidos em uma vizinhança de $\gamma_i(t_i)$ para $1 \leq i \leq n$ tais que $\gamma_1(0) = w_n \gamma_n(1)$, $\gamma'_1(0) = dw_n \gamma'_n(1)$, $w_i \gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$, $dw_i \gamma'_i(t_i) = \gamma'_{i+1}(t_i)$, com $1 \leq i \leq n-1$.

Vamos denotar uma geodésica fechada em Σ/W por (γ_i, w_i) .

Na Seção 3.2 vimos que o espaço das folhas de uma folheação Riemanniana com folhas compactas admite uma estrutura de orbifold. De posse da holonomia de uma folheação Riemanniana vamos introduzir o conceito de geodésica horizontal periódica. Este artifício fornece um modo equivalente de descrever as geodésicas fechadas em orbifolds.

No restante desta seção, M denotará uma variedade Riemanniana completa.

Definição 4.8. Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana completa M . Uma geodésica γ é dita ser **horizontal \mathcal{F} -periódica** se

1. γ é horizontal, isto é, γ é ortogonal as folhas de \mathcal{F} ;
2. existe $0 < t_1$ tal que $\gamma(t_1) \in L_{\gamma(0)}$;
3. existe uma holonomia $\varphi_{[\beta]}$ tal que $d\varphi_{[\beta]} \gamma'(0) = \gamma'(t_1)$.

Se t_1 é o menor número positivo que satisfaz 2. e 3., diz-se que t_1 é o **período** de γ .

Lema 4.9. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana completa M e L uma folha de \mathcal{F} . Dada $\beta : [a, b] \longrightarrow L$ uma curva suave por partes e γ uma geodésica em M com $\beta(a) = \gamma(0)$, defina*

$$H(s, t) = \exp_{\beta(t)} s \cdot \xi(t), \quad s \in \mathbb{R}$$

onde $\xi(t)$ é o transporte paralelo de $\gamma'(0)$ ao longo de β . Então

$$\frac{\partial H}{\partial s}(s, t)$$

é o transporte paralelo de $\gamma'(s)$ ao longo de $\eta(\gamma, \beta)$ (para a definição de η ver (2.3)).

Demonstração. Como M é completa e

$$\beta'(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(0, t),$$

o campo de velocidades $\beta'(t)$ admite extensão a M . Considerando ∇ a conexão de Bott em $\mathfrak{X}(\mathcal{F}) \times \nu\mathcal{F}$ induzida pela conexão Riemanniana de M e usando a simetria da conexão obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) &= \nabla_{\beta'(t)} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \\ &= \left[\beta'(t), \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \right]^\perp \\ &= \left[\frac{\partial H}{\partial t}(s, t), \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) \right]^\perp \\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial H}{\partial t}(s, t)} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) - \nabla_{\frac{\partial H}{\partial s}(s, t)} \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \right)^\perp \\ &= \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) - \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) \right)^\perp \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois a última igualdade resulta do Lema da Simetria:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}(s, t).$$

Isso prova que $\frac{\partial H}{\partial s}(s, t)$ é o transporte paralelo de $\gamma'(s)$ ao longo de $\eta(\gamma, \beta)$. \square

Proposição 4.10. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana M e $\gamma : [0, r] \rightarrow M$ uma geodésica horizontal \mathcal{F} -periódica com $\gamma(t_1) \in L_{\gamma(0)}$. Se $s \in [0, t_1]$ e $n \in \mathbb{Z}$ então*

1. $\gamma(nt_1 + s) \in L_{\gamma(s)}$,
2. existe uma holonomia $\varphi_{[\beta_n]}$ com $d\varphi_{[\beta_n]}\gamma'(s) = \gamma'(nt_1 + s)$.

Demonstração. Notemos que

$$\gamma(nt_1 + s) = \exp_{\gamma(nt_1)}(s\gamma'(nt_1)), \quad (4.3)$$

para $0 \leq s \leq t_1$.

Seja $\beta : [0, t_1] \rightarrow L_{\gamma(0)}$ tal que

$$d\varphi_{[\beta]}(\beta(0)) \cdot \gamma'(0) = \gamma'(t_1).$$

Defina os segmentos de geodésica, $\gamma_0 := \gamma|_{[0,s]}$, $\gamma_n := \gamma|_{[(n-1)t_1+s, nt_1+s]}$. Provemos por indução para $n > 0$. Se $n = 1$, segue da Observação 2.27 e da igualdade

$$\gamma'(t_1) = d\varphi_{[\beta]}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$$

que $\gamma'(t_1)$ é o transporte paralelo de $\gamma'(0)$ ao longo de β . Logo, a igualdade em (4.3) e a equifocalidade implicam que

$$\gamma(t_1 + s) \in L_{\gamma(s)},$$

isso prova o item 1.. Defina

$$\beta_1 : [s, t_1 + s] \mapsto L_{\gamma(s)}$$

por (veja (2.3))

$$\beta_1(t) = \eta(\gamma_0, \beta)(t - s),$$

e seja

$$H_1(r, t) = \exp_{\beta(t)} r\xi(t), \quad r \in [0, s],$$

onde $\xi(t)$ é o transporte paralelo de $\gamma'(0)$ ao longo de β . Segue do Lema 4.9 que

$$\frac{\partial H_1}{\partial r}(s, t)$$

é o transporte paralelo de $\gamma'(s)$ ao longo de β_1 . Vê-se facilmente que

$$\frac{\partial H_1}{\partial r}(s, 0) = \gamma'(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H_1}{\partial r}(s, t_1) = \gamma'(t_1 + s).$$

Logo, segue da Observação 2.27 que

$$\gamma'(t_1 + s) = d\varphi_{[\beta_1]}\gamma'(s).$$

Isso prova o item 2. para $n = 1$.

Agora, suponha que o resultado vale para $n > 0$, isto é, que $\gamma(nt_1 + s) \in L_{\gamma(s)}$ e que existe

$$\beta_n : [s, nt_1 + s] \longrightarrow L_{\gamma(s)},$$

com $\beta_n(s) = \gamma(s)$, $\beta_n(nt_1 + s) = \gamma(nt_1 + s)$ e

$$\gamma'(nt_1 + s) = d\varphi_{[\beta_n]}(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s). \quad (4.4)$$

Seja $\bar{\beta}_n$ a restrição de β_n ao intervalo $[(n-1)t_1 + s, nt_1 + s]$ e defina

$$\beta_{n+1} : [s, (n+1)t_1 + s] \longrightarrow L_{\gamma(s)}$$

por

$$\beta_{n+1}(t) = \begin{cases} \beta_n(t) & \text{se } t \in [s, nt_1 + s], \\ \eta(\gamma_n, \bar{\beta}_n)(t) & \text{se } t \in [nt_1 + s, (n+1)t_1 + s]. \end{cases}$$

De (4.4) e da Observação 2.27 temos que $\gamma'(nt_1 + s)$ é o transporte paralelo de $\gamma'((n-1)t_1 + s)$ ao longo de $\bar{\beta}_n$. Logo, a igualdade em (4.3) e a equifocalidade implicam que

$$\gamma'((n+1)t_1 + s) \in L_{\gamma(nt_1 + s)} = L_{\gamma(s)}.$$

Isso prova o item **1.**. Para provar o item **2.** com $n+1$ definimos

$$H_n(r, t) = \exp_{\bar{\beta}_n} r \xi_n(t), \quad r \in [0, t_1],$$

onde $\xi_n(t)$ é o transporte paralelo de $\gamma'((n-1)t_1 + s)$ ao longo de $\bar{\beta}_n$. Novamente, segue do Lema 4.9 que

$$\frac{\partial H_n}{\partial r}(t_1, t)$$

é o transporte paralelo de $\gamma'(nt_1 + s)$ ao longo de $\bar{\beta}_{n+1}$. Da Observação 2.27 e das igualdades

$$\frac{\partial H_n}{\partial r}(t_1, (n-1)t_1 + s) = \gamma'(nt_1 + s), \quad \frac{\partial H_n}{\partial r}(t_1, nt_1 + s) = \gamma'((n+1)t_1 + s)$$

concluimos que

$$\gamma'((n+1)t_1 + s) = d\varphi_{[\bar{\beta}_{n+1}]} \gamma'(nt_1 + s) = d\varphi_{[\beta_{n+1}]} \gamma'(s),$$

onde a última igualdade é decorrente da hipótese de indução (4.4) e das propriedades do transporte paralelo.

Para $n < 0$ basta considerar o procedimento acima, invertendo-se a ordem dos caminhos γ_n e β_n . □

Se M é uma variedade Riemanniana compacta e as folhas de \mathcal{F} são compactas, então o trabalho de procurar geodésicas fechadas no orbifold riemanniano M/\mathcal{F} se resume em procurar geodésicas horizontais periódicas e vice-versa como veremos agora.

Proposição 4.11. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta, \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de M com folhas compactas e $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ a projeção sobre o orbifold riemanniano M/\mathcal{F} .*

- i) *Se γ é uma geodésica horizontal periódica em M , então a projeção $\tilde{\gamma} := \pi(\gamma)$ sobre M/\mathcal{F} é uma geodésica fechada.*

- ii) Se $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica fechada em M/\mathcal{F} , então existe uma geodésica horizontal periódica γ tal que $\tilde{\gamma} = \pi(\gamma)$.

Demonstração. i) É claro que a projeção $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica em M/\mathcal{F} . Suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma(1) \in L_{\gamma(0)}$. Seja $(U, \Omega/\Gamma, \varphi)$ a carta orbifold dada pela Proposição 3.11 tal que $\tilde{\gamma}(0) \in U$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que a restrição de $\tilde{\gamma}$ ao intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ está contida em U . Tomando a holonomia $\varphi_{[\beta]}$ tal que $d\varphi_{[\beta]}\gamma'(0) = \gamma'(1)$ e $w \in \Gamma$ a transformação ortogonal correspondente a $\varphi_{[\beta]}$, basta observar que os segmentos $\gamma|_{(\varepsilon, 0]}$ e $\gamma|_{[0, \varepsilon)}$ são levantados a Ω em segmentos de geodésicas γ_1 e γ_2 com $w\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Isso prova que $\varphi(\tilde{\gamma}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)})$ é um segmento de geodésica em Ω/Γ , garantindo que $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica fechada.

ii) Seja $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ partição de $[0, 1]$ e $(U_i, \Omega_i/\Gamma_i, \varphi_i)$, $i = 1, \dots, n$, cartas orbifolds dadas pela Proposição 3.11 tais que $\tilde{\gamma}((t_{i-1}, t_i)) \subset U_i$. Agora levantamos cada segmento $(\varphi \circ \tilde{\gamma})|_{(t_{i-1}, t_i)}$ ao slice $S_{\varphi(\tilde{\gamma}(0))}$ de modo a obter uma geodésica horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Sendo $\tilde{\gamma}$ geodésica fechada, existe $w_n \in \Gamma_n$ associado a alguma holonomia $\varphi_{[\beta]}$ tal que

$$w_n(\varphi \circ \tilde{\gamma})'(1) = (\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0),$$

donde

$$d\varphi_{[\beta]}\gamma'(1) = \gamma'(0).$$

Isso prova que γ é uma geodésica horizontal periódica. \square

4.2 Processo de encurtamento

Nesta seção vamos construir o processo de encurtamento de geodésicas associado a uma folheação Riemanniana. Uma motivação para o que estamos a fazer é a prova do Teorema de Fet 4.3 dada em [15], Teorema 5.5.1, onde é construído um processo de encurtamento para geodésicas de modo a obter como curva limite uma geodésica fechada na variedade compacta. Os resultados desta seção são baseados no artigo [5], onde é desenvolvida uma versão do processo de encurtamento para folheações Riemannianas.

Como veremos, a principal dificuldade enfrentada nesta adaptação do processo de encurtamento é obter holonomias de modo que os segmentos de geodésicas horizontais sejam unidos suavemente.

Definição 4.12. Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de uma variedade Riemanniana completa (M, g) , bem como α e β duas curvas suaves por partes $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ e

$\beta : [a, b] \longrightarrow M$ tais que $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ pertencem a mesma folha $L_{\alpha(a)}$ e a imagem de β está contida em $L_{\alpha(a)}$ com $\beta(a) = \alpha(a)$ e $\beta(b) = \alpha(b)$. Nestas condições diremos que o par $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ é um **\mathcal{F} -par fechado**, onde $\varphi_{[\beta]}$ é a holonomia em \mathcal{F} associada a β . Diremos que um par $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ é **\mathcal{F} -par fechado bom** se α é regular em $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, e se $d\varphi_{[\beta]}df_a\alpha'(a) = df_b\alpha'(b)$, onde

$$f_i : \text{Tub}(P_{\alpha(i)}) \longrightarrow S_{\alpha(i)}$$

é uma submersão que descreve as placas em uma vizinhança de $\alpha(i)$ para $i = a, b$.

Notemos que uma geodésica horizontal periódica γ é um par fechado bom $(\gamma, \varphi_{[\beta]})$.

Observação 4.13. Vamos usar dois tipos de concatenação de curvas. Dadas duas curvas $\alpha_1 : [a, b] \longrightarrow M$ e $\alpha_2 : [b, c] \longrightarrow M$ vamos denotar por $*$ a curva obtida pela união das duas curvas, ou seja,

$$\alpha_1 * \alpha_2 : [a, c] \longrightarrow M$$

é a curva que coincide com α_1 e α_2 em $[a, b]$ e $[b, c]$, respectivamente. Por outro lado, vamos denotar por \star a concatenação das curvas

$$\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \longrightarrow M,$$

isto é, $\alpha_1 \star \alpha_2$ representa a curva em $[a, b]$ tal que

$$\alpha_2 \star \alpha_1(s) = \begin{cases} \alpha_1(2s - a) & \text{se } s \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \alpha_2(2s - b) & \text{se } s \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}.$$

Além disso, dada a curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$, vamos denotar por $\alpha^{-1} : [a, b] \longrightarrow M$ a curva definida por

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(b + a - s).$$

Durante todo o restante do capítulo, vamos assumir que \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana, com folhas compactas, de uma variedade Riemanniana compacta M .

Veremos que é possível obter uma geodésica horizontal por partes \mathcal{F} -periódica a partir de um par \mathcal{F} -fechado $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$. Para tanto, usaremos a construção dada na seguinte proposição.

Proposição 4.14. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e \mathcal{F} uma folheação Riemanniana de M com folhas compactas. Existe um raio $\rho_0 > 0$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) ρ_0 é menor do que o raio de injetividade de cada ponto de M .
- ii) Para todo $x \in M$ a bola $B_{\rho_0}(x)$ está contida em alguma vizinhança trivializadora de \mathcal{F} .
- iii) Se P é uma placa para a vizinhança trivializadora dada em ii) cuja distância a x é menor do que ρ_0 , então existe uma única geodésica horizontal minimizante unindo x à placa P .

Demonstração. O Corolário 1.14 garante que existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(x)$ é uma vizinhança normal de $x \in M$, portanto δ_1 é menor do que o raio de injetividade de todo ponto de M . Por outro lado, o Corolário 2.20 fornece $\delta_2 > 0$ tal que $B_{\delta_2}(x)$ está contida em alguma vizinhança trivializadora. Para $\rho_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ os itens i) e ii) são satisfeitos.

Agora, seja L a folha que contém a placa P . Sendo L compacta, segue da Proposição 1.19 que existe um único $y \in P$ tal que $\text{dist}(x, P) = d(x, y) < \rho_0$ e a geodésica γ unindo x a y é ortogonal a P . Sendo γ ortogonal a uma folha, decorre do fato de \mathcal{F} ser uma folheação Riemanniana que γ é geodésica horizontal. A unicidade de γ é garantida aplicando-se a Proposição 1.23 para a submersão Riemanniana que descreve as placas da vizinhança trivializadora dada em ii). Isso prova o item iii). \square

Neste ponto estamos aptos a definir o **processo de encurtamento de geodésicas**. Tomemos ρ_0 como na Proposição 4.14. Fixado um número real $K > 0$, consideremos um par \mathcal{F} -fechado $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ tal que $E(\alpha) \leq K$. Dada uma partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

tal que $t_i - t_{i-1} < \rho_0^2/K$ para $i = 1, \dots, k$, temos:

1. $d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) < \rho_0$,
2. $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ está contida em uma vizinhança trivializadora de \mathcal{F} ,
3. existe uma única geodésica horizontal minimizante $\tilde{\gamma}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ unindo $\alpha(t_{i-1})$ com a placa $P_{\alpha(t_i)}$ que contém $\alpha(t_i)$ e que está contida na vizinhança trivializadora dada pelo item 2.. Além disso, $\tilde{\gamma}_i$ satisfaz

$$E(\tilde{\gamma}_i) \leq E(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}).$$

Vamos demonstrar que tais propriedades são válidas.

1. Pela desigualdade de Schwarz

$$l^2(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq (t_i - t_{i-1})E(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) < \rho_0^2, \quad (4.5)$$

donde

$$d(\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)) \leq l(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) < \rho_0.$$

2. Da desigualdade no item 1. segue que

$$\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset B(\alpha(t_i), \rho_0).$$

Sabemos pelo item ii) da Proposição 4.14 que $B(\alpha(t_i), \rho_0)$ está contido em alguma vizinhança trivializadora de \mathcal{F} .

3. Do item 2. acima e do item iii) da Proposição 4.14 segue que existe uma única geodésica horizontal minimizante $\tilde{\gamma}_i$ unindo $\alpha(t_{i-1})$ e a placa $P_{\alpha(t_i)}$. Logo

$$l(\tilde{\gamma}_i) \leq l(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}).$$

Do Lema 1.9 concluímos que

$$(t_i - t_{i-1})E(\tilde{\gamma}_i) = l^2(\tilde{\gamma}_i) \leq l^2(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq (t_i - t_{i-1})E(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}).$$

□

Nosso objetivo é usar a holonomia trivial em cada vizinhança trivializadora para obter uma geodésica horizontal por partes e uma holonomia entre os seus pontos finais. Com a partição $\{t_0, \dots, t_k\}$ e a curva α , podemos construir uma curva desconexa cujos segmentos $\tilde{\gamma}_i$ são geodésicas horizontais.

Para cada $i = 1, \dots, k$, seja $\hat{\gamma}_{i,i}$ o segmento de geodésica minimizante ortogonal à placa $P_{\alpha(t_i)}$ tal que

$$\hat{\gamma}_{i,i}(t_{i-1}) = \alpha(t_{i-1}) \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_{i,i}(t_i) \in P_{\alpha(t_i)}$$

(tal como no item 3. da construção acima). Seja $\hat{\beta}_{i,i}$ uma curva de $[t_{i-1}, t_i]$ em $P_{\alpha(t_i)}$ tal que

$$\hat{\beta}_{i,i}(t_{i-1}) = \hat{\gamma}_{i,i}(t_i) \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_{i,i}(t_i) = \alpha(t_i).$$

Suponhamos que $\hat{\beta}_{n-1,j}$ e $\hat{\gamma}_{n,j+1}$ estão definidos, então definimos

$$\hat{\gamma}_{n,j} := \|\hat{\beta}_{n-1,j}^{-1}(\hat{\gamma}_{n,j+1}) \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_{n,j} := \eta(\hat{\gamma}_{n,j}, \hat{\beta}_{n-1,j}).$$

Repetimos esse procedimento indutivamente para $n = 2, \dots, k$ e $j = n - 1, \dots, 1$. Agora definimos $\tilde{\beta} := \hat{\beta}_{k,1} * \dots * \hat{\beta}_{2,k}$, a geodésica horizontal por partes

$$\hat{\gamma} := \hat{\gamma}_{1,1} * \hat{\gamma}_{2,1} * \dots * \hat{\gamma}_{k,1},$$

e a holonomia entre os pontos finais pela curva

$$\hat{\beta} := \tilde{\beta}^{-1} \star \beta.$$

Em suma, dado um \mathcal{F} -par fechado $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ e uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ tal que $t_i - t_{i-1} < \rho_0^2/K$ para $i = 1, \dots, k$, obtemos um \mathcal{F} -par fechado $\hat{P}(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\hat{\gamma}, \varphi_{[\hat{\beta}]})$ que chamamos de **encurtamento** do par fechado $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$. Notemos que $\hat{\gamma}$ é uma geodésica horizontal por partes com

$$E(\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^k E(\hat{\gamma}|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq \sum_{i=1}^k E(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) = E(\alpha) \leq K \quad (4.6)$$

e $\hat{\beta}$ é uma curva em $L_{\hat{\gamma}(a)}$ que une as extremidades de $\hat{\gamma}$.

Será conveniente alternar entre duas partições no processo de encurtamento para obter uma curva suave no limite. Isso motiva a definição do **processo de encurtamento duplo**. Tomemos duas partições $\{t_i\}$ e $\{\tau_i\}$ com $i = 1, \dots, k$ tais que

$$\tau_0 = \tau_k - 1 < t_0 = 0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \dots < \tau_k < t_k = 1,$$

e $t_i - t_{i-1}, \tau_i - \tau_{i-1} < \rho_0^2/K$ para $i = 1, \dots, k$. Dado um \mathcal{F} -par fechado $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$, α definido em $[0, 1]$ com $E(\alpha) \leq K$, podemos aplicar o processo de encurtamento \hat{P} com a partição $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$, obtendo uma geodésica horizontal por partes $\hat{\gamma}$ e uma curva $\hat{\beta}$ na folha $L_{\hat{\gamma}(0)}$ unido os pontos finais de $\hat{\gamma}$. Agora estendemos $\hat{\gamma}$ ao intervalo $[\tau_0, 0]$ pelo transporte paralelo:

$$\hat{\gamma}(t) := \|\hat{\beta}^{-1}(\hat{\gamma}|_{[\tau_k, 1]})(t + 1).$$

Ademais, podemos estender a holonomia $\varphi_{[\hat{\beta}]}$ ao longo de $\hat{\gamma}|_{[\tau_0, 0]}$ usando a aplicação η (veja a definição em (2.3)), obtendo uma holonomia $\varphi_{[\tilde{\beta}]}$ na folha de $\hat{\gamma}(\tau_0)$ com $\tilde{\beta}(0) = \hat{\gamma}(\tau_0)$ e $\tilde{\beta}(1) = \hat{\gamma}(\tau_k)$. Novamente, aplicamos o processo \hat{P} à curva $\hat{\gamma} : [\tau_0, \tau_k] \rightarrow M$ e à holonomia $\varphi_{[\tilde{\beta}]}$ obtendo

$$\hat{P}(\hat{\gamma}, \varphi_{[\tilde{\beta}]}) = (\gamma_0, \varphi_{[\tilde{\beta}_0]}). \quad (4.7)$$

Finalmente, podemos estender a curva γ_0 ao intervalo $[\tau_k, 1]$ fazendo

$$\gamma_0(t) := \|\bar{\beta}_0(\gamma_0|_{[\tau_0, 0]})\|(t - 1),$$

e considerar a holonomia na folha contendo $\gamma_0(0)$, dada pela aplicação η de $\bar{\beta}_0$ ao longo de $\gamma_0|_{[\tau_0, 0]}$, para obter um \mathcal{F} -par fechado $(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$. Deste modo, construímos o processo de encurtamento duplo, isto é, $P_0(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$.

Proposição 4.15. *Seja $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ um \mathcal{F} -par fechado (com $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$) tal que $E(\alpha) \leq K$ e $P_0(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$. Então $E(\gamma_0|_{[0, 1]}) \leq E(\alpha)$, e vale a igualdade se, e somente se, α é uma geodésica horizontal periódica.*

Demonstração. Sabemos pela expressão em (4.6) que a curva do par $\hat{P}(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\hat{\gamma}, \varphi_{[\hat{\beta}]})$ satisfaz $E(\hat{\gamma}) \leq E(\alpha)$. Afirmamos que a igualdade vale se, e somente se, $\hat{\gamma} = \alpha$. Suponha que $\hat{\gamma} \neq \alpha$, então algum segmento $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ não é o segmento de geodésica minimal unindo $\alpha(t_i)$ à placa que contém $\alpha(t_{i+1})$. Logo

$$l(\hat{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}) < l(\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}),$$

o que implica $E(\hat{\gamma}) < E(\alpha)$. Portanto, se $E(\hat{\gamma}) = E(\alpha)$ então $\hat{\gamma} = \alpha$. No processo de encurtamento duplo P_0 aplicamos duas vezes o processo \hat{P} , então a energia das curvas resultantes são menores ou iguais do que a energia inicial. Como o transporte paralelo (em relação à conexão de Bott) preserva a norma de vetores tangentes à curva, temos que $E(\hat{\gamma}|_{[\tau_0, \tau_k]}) = E(\hat{\gamma}|_{[0, 1]})$. Daí

$$E(\gamma_0|_{[0, 1]}) \leq E(\alpha).$$

Suponha que $E(\gamma_0|_{[0, 1]}) = E(\alpha)$, então $E(\hat{\gamma}) = E(\alpha)$, donde $\hat{\gamma} = \alpha$. Vamos provar que a extensão de α a $[\tau_0, 0]$ (pelo transporte paralelo ao longo de β^{-1}) é uma geodésica γ_0 em $[\tau_0, 1]$. Para tanto, basta verificar que α é diferenciável nos nós t_i , $i = 0, \dots, k - 1$. Como mudamos os nós ao aplicar o processo \hat{P} à curva $\hat{\gamma}|_{[\tau_0, \tau_k]}$ e a energia permanece a mesma, cada restrição $\hat{\gamma}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ é um segmento de geodésica. Daí, vale a diferenciabilidade de α em cada t_i . Agora, sendo a extensão de α a $[\tau_0, 0]$ obtida pelo transporte paralelo (ao longo de β) do segmento $\alpha|_{[\tau_k, 1]}$, segue da Observação 2.27 que

$$d\varphi_{[\beta]}(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \alpha'(1).$$

Donde α é uma geodésica horizontal periódica.

Reciprocamente, suponha que α é uma geodésica horizontal periódica. Então $\hat{\gamma} = \alpha$ e a extensão de α a $[\tau_0, 1]$ é geodésica. Logo, ao aplicar duas vezes o processo de encurtamento \hat{P} produzimos a mesma curva, de onde $\gamma_0 = \alpha$. \square

A proposição anterior não é necessariamente válida para o encurtamento simples. Daí a necessidade de se tomar um encurtamento duplo. A vantagem é que ao alternar para os nós em τ_i , obtemos novos segmentos de geodésicas contendo em seu interior os antigos nós em t_i .

Definição 4.16. Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é **\mathcal{F} -fechada** se os seus pontos finais $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ pertencem à mesma folha de \mathcal{F} . Diremos que duas curvas \mathcal{F} -fechadas $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow M$ são **\mathcal{F} -homotópicas** se existe uma homotopia entre elas por curvas \mathcal{F} -fechadas, isto é, se existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que

$$H(s, 0) = \alpha(s), \quad H(s, 1) = \beta(s)$$

com $H(a, t)$ e $H(b, t)$ pertencentes à mesma folha de \mathcal{F} para todo $t \in [0, 1]$.

Lema 4.17. *Seja $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ um \mathcal{F} -par fechado tal que $E(\alpha) \leq K$ e $\hat{P}(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\hat{\gamma}, \varphi_{[\hat{\beta}]})$ o seu encurtamento. Então $\hat{\gamma}$ é \mathcal{F} -homotópica a α .*

Demonstração. Considere a partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

do processo de encurtamento \hat{P} . Para cada $i = 1, \dots, k$, seja $\gamma_s : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ a geodésica minimizante unindo $\alpha(t_{i-1})$ a $\hat{\beta}_{i,i}(s)$. Defina

$$H_{i,1} : [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow L_{\alpha(t_i)}$$

$$H_{i,1}(t, s) = \gamma_s(t).$$

Assim, H é uma homotopia entre $\hat{\gamma}_{i,i}$ e $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Usando o transporte paralelo de $\hat{\gamma}_{i,1}$ ao longo de

$$\hat{\beta}_{i-1,1} * \hat{\beta}_{i-1,2} * \dots * \hat{\beta}_{i-1,i-1}$$

e a homotopia $H_{i,1}$, constrói-se homotopias por curvas \mathcal{F} -fechadas:

- H_k entre $\hat{\gamma}_{k,1}$ e $\hat{\beta}_{i-1,1} * \hat{\beta}_{i-1,2} * \dots * \hat{\beta}_{i-1,i-1} * \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$,

- H_i entre

$$(\hat{\beta}_{i,1} * \hat{\beta}_{i,2} * \cdots * \hat{\beta}_{i,i}) \star \hat{\gamma}_{i,1}$$

e

$$\hat{\beta}_{i-1,1} * \hat{\beta}_{i-1,2} * \cdots * \hat{\beta}_{i-1,i-1} * \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}, \quad 2 \leq i \leq k-1,$$

- H_1 entre $\hat{\beta}_{1,1} \star \hat{\gamma}_{1,1}$ e $\alpha|_{[t_0, t_1]}$.

Finalmente, associando as homotopias H_1, \dots, H_k , obtém-se uma homotopia por curvas \mathcal{F} -fechadas entre $\hat{\gamma}$ e α . \square

Proposição 4.18. *Seja $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, um \mathcal{F} -par fechado tal que $E(\alpha) \leq K$ e $P_0(\alpha, \varphi_{[\beta]}) = (\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$. Então γ_0 é \mathcal{F} -homotópica a α .*

Demonstração. Usando o Lema 4.17 obtemos que α é \mathcal{F} -homotópica ao primeiro encurtamento $\hat{\gamma}$. Como nós estendemos $\hat{\gamma}$ com a holonomia $\varphi_{[\hat{\beta}-1]}$, temos que $\hat{\gamma}(t)$ e $\hat{\gamma}(t+1)$ estão na mesma folha para cada $t \in [\tau_0, 0]$. Também decorre do Lema 4.17 que existe uma aplicação homotopia H (de curvas \mathcal{F} -fechadas) definida em $[\tau_0, \tau_k] \times [0, 1]$, tal que

- $H(\tau_k, s) \in L_{H(\tau_0, s)}$ para cada $s \in [0, 1]$,
- $H(\cdot, 0) = \hat{\gamma}|_{[\tau_0, \tau_k]}$ para cada $s \in [0, 1]$.

Afim de estender H ao produto $[\tau_0, 1] \times [0, 1]$, vamos construir uma homotopia

$$\bar{H} : [\tau_k, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

(por curvas \mathcal{F} -fechadas) entre $\hat{\gamma}|_{[\tau_k, 1]}$ e $\gamma_0|_{[\tau_k, 1]}$. Seja $\beta_1 : [0, 1/2] \rightarrow L_{H(1,1)}$ a curva cuja imagem coincide com a restrição de $\bar{\beta}_0$ (veja a definição em (4.7)) tal que

$$\beta_1(0) = \bar{\beta}_0\left(\frac{\tau_0 + \tau_k}{2}\right) \quad \text{e} \quad \beta_1(1/2) = \bar{\beta}_0(\tau_k).$$

Considere uma curva

$$\beta_2 : [1/2, 1] \rightarrow L_{\gamma_0}$$

unindo $\eta(\hat{\gamma}|_{[\tau_k, 1]}, \beta_1)(1/2)$ a $\gamma_0(1)$ na placa de $\gamma_0(1)$ e seja $\gamma_s : [\tau_k, 1] \rightarrow M$, $1/2 \leq s \leq 1$, a geodésica minimizante unindo $\gamma_0(\tau_k)$ a $\beta_2(s)$. Definimos

$$\bar{H}(t, s) = \begin{cases} \eta(\hat{\gamma}|_{[\tau_k, t]}, \beta_1)(s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma_s(t) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

A equifocalidade implica que \bar{H} é uma homotopia de curvas \mathcal{F} -fechadas. Finalmente, associando H e \bar{H} obtemos a extensão de H procurada. Logo, $\gamma_0|_{[0, 1]}$ é \mathcal{F} -homotópica a $\hat{\gamma}|_{[0, 1]}$ e, portanto, \mathcal{F} -homotópica a α . \square

4.3 Principais resultados

Neste ponto, estamos aptos a aplicar o ferramental matemático das seções anteriores para garantir a existência de geodésicas fechadas de comprimento positivo em orbifolds riemannianos compactos ou, equivalentemente, no espaço das folhas de uma folheação Riemanniana com folhas compactas de uma variedade Riemanniana compacta. As ideias aqui apresentadas tem como origem o artigo de Alexandrino [5].

Nosso objetivo é provar o seguinte resultado:

Teorema 4.19. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana com folhas compactas de uma variedade Riemanniana compacta M . Suponha que existe um laço α em M tal que, para toda folha L de \mathcal{F} , não existe um laço em L livremente homotópico a α . Então M/\mathcal{F} possui uma geodésica fechada não trivial.*

A motivação para a prova deste teorema é a demonstração do teorema de Fet (Teorema 4.3), apresentada em [15] para variedades Riemannianas compactas, onde foi empregado um processo de encurtamento de geodésicas. Daremos uma prova construtiva usando o processo de encurtamento para folheações Riemannianas visto na seção anterior.

Se $(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ é um \mathcal{F} -par fechado, denotaremos respectivamente por Π_1 e Π_2 as projeções na primeira e segunda entrada do par, isto é,

$$\Pi_1(\alpha, \varphi_{[\beta]}) := \alpha \quad \text{e} \quad \Pi_2(\alpha, \varphi_{[\beta]}) := \varphi_{[\beta]}.$$

Usaremos a notação $P_0^n(\alpha, \varphi_{[\beta]})$ para indicar que aplicamos n vezes o processo de encurtamento duplo. Dada uma curva fechada, se nada for dito, consideraremos o \mathcal{F} -par fechado com a holonomia trivial.

Proposição 4.20. *Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva fechada com $E(\alpha) \leq K$. Então existe uma subsequência da sequência de curvas $\Pi_1 \circ P_0^n \alpha$ que converge uniformemente para uma geodésica horizontal periódica possivelmente trivial.*

Demonstração. Vamos provar as seguintes afirmações:

- i) A sequência de curvas $\Pi_1 \circ P_0^n \alpha$ admite uma subsequência $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente para uma geodésica horizontal por partes γ_0 .
- ii) Existe uma aplicação de holonomia $\varphi_{[\beta_0]}$ em $L_{\gamma_0(0)}$ tal que $(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$ é um par fechado bom.

iii) A curva γ_0 é uma geodésica horizontal periódica.

i) Cada curva $\Pi_1 P_0^n \alpha$ é uma geodésica horizontal periódica por partes com nós

$$\Pi_1 \circ P_0^n \alpha(\tau_1), \dots, \Pi_1 \circ P_0^n \alpha(\tau_k).$$

Segue do Teorema de Arzelà-Ascoli 1.10 e da Proposição 1.11 que existe um subsequência $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\Pi_1 P_0^n \alpha$ que converge uniformemente para uma geodésica por partes γ_0 com nós $\gamma_0(\tau_i) = p_i$, donde

$$p_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m(\tau_i).$$

Afirmamos que γ_0 é uma geodésica horizontal por partes. Note que γ_0 é composta por segmentos de geodésicas

$$\gamma_0|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t) = \exp_{p_i} t \gamma_0'(\tau_i), \quad i \in \{0, \dots, k\}.$$

Fixado $i \in \{0, \dots, k\}$, pela continuidade da aplicação exponencial tem-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m(\tau_i), \gamma_m'(\tau_i)) = (p_i, \gamma_0'(\tau_i)).$$

Queremos provar que cada segmento $\gamma_0|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ é horizontal, ou seja, que para qualquer $(p_i, u) \in T_{p_i} L_{p_i}$ tem-se $g_{p_i}(\gamma_0'(\tau_i), u) = 0$. Para tanto, basta tomar uma sequência qualquer de vetores $u_m \in T_{\gamma_m(\tau_i)} L_{\gamma_m(\tau_i)}$ satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_m(\tau_i), u_m) = (p_i, u),$$

e decorre da Observação 1.2 que

$$g_{p_i}(\gamma_0'(\tau_i), u) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{\gamma_m(\tau_i)}(\gamma_m'(\tau_i), u_m) = 0.$$

Isso prova que γ_0 é uma geodésica horizontal por partes.

Notemos que

$$(\gamma_{m+1}, \varphi_{[\beta_{m+1}]}) = P_0^{\mu(m)}(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]})$$

para algum inteiro $\mu(m) \geq 1$.

ii) Veremos que as holonomias $\varphi_{[\beta_m]}$ admitem uma subsequência “constante” num certo sentido.

Para a folha $L_{\gamma(0)}$ podemos escolher um raio $\varepsilon < 1$ satisfazendo as propriedades de i) a iv) do Teorema 2.19.

Tome N_0 tal que se $m > N_0$, então

$$L_{\gamma_m(0)} \subset \text{Tub}_{\frac{\varepsilon}{2}}(L_{\gamma_0(0)}).$$

Seja β_m um representante para a classe de holonomia $\Pi_2 \circ P_0^m \alpha \in L_{\gamma_m(0)}$ e defina $\tilde{\beta}_m := \pi(\beta_m) \in L_{\gamma_0(0)}$, onde

$$\pi : \text{Tub}_{\frac{\varepsilon}{2}}(L_{\gamma_0(0)}) \longrightarrow L_{\gamma_0(0)}$$

é a projeção ortogonal dada no Lema 2.18. Afirmamos que

- existe uma subsequência constante $\tilde{\beta}_{m_i}$ tal que $\varphi_{[\beta_0]} = \varphi_{[\tilde{\beta}_{m_i}]} : S_{\gamma_0(0)} \longrightarrow S_{\gamma_0(1)}$.

De fato, sejam $P_{\gamma(0)}$ e $P_{\gamma(1)}$ as placas dadas pelo item iv) do Teorema 2.19. Para m suficientemente grande tem-se

$$\gamma_m(0) \in \pi^{-1}(P_{\gamma(0)}) \quad \text{e} \quad \gamma_m(1) \in \pi^{-1}(P_{\gamma(1)}).$$

Logo, podemos considerar uma extensão de $\tilde{\beta}_m$ unindo $\gamma_0(0)$ a $\gamma_0(1)$ de modo a obter uma mesma aplicação de holonomia $\varphi_{[\tilde{\beta}_m]}$ a menos de identificação. A Proposição 2.21 afirma que o grupo de holonomia de $L_{\gamma(0)}$ é finito, logo existe uma subsequência constante $\varphi_{[\beta_0]} = \varphi_{[\tilde{\beta}_{m_i}]}$. Como γ_0 é o limite de (γ_{m_i}) , tem-se

$$d\varphi_{[\beta_0]} \cdot \gamma'_0(0) = \gamma'_0(1).$$

Donde $(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})$ é um par fechado bom.

iii) Visando simplificar a notação, vamos denotar a subsequência m_i por m . Notemos que

$$\begin{aligned} E(\gamma_m) &= \sum_{i=1}^k E(\gamma_m |_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}) = \sum_{i=1}^k \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|\gamma'_m(t)\|^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) \|\gamma'_m(\tau_{i-1})\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{l(\gamma_m |_{[\tau_{i-1}, \tau_i]})^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{d(\gamma_m(\tau_{i-1}), \gamma_m(\tau_i))^2}{\tau_i - \tau_{i-1}}, \end{aligned}$$

então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(\gamma_m) = \sum_{i=1}^k \frac{d(\gamma_0(\tau_{i-1}), \gamma_0(\tau_i))^2}{\tau_i - \tau_{i-1}} = E(\gamma_0). \quad (4.8)$$

Usando a Proposição 4.15 obtemos

$$\begin{aligned} E(\gamma_0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} E(\gamma_{m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} E(\Pi_1 \circ P_0^{\mu(m)}(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]})) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]})) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E(\gamma_m) = E(\gamma_0). \end{aligned}$$

Da igualdade acima vem que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]})) = E(\gamma_0). \quad (4.9)$$

Agora afirmamos

1. $E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]}))$ converge para $E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]}))$.

Suponha por contradição que a afirmação não é válida, logo existe $A > 0$ e uma subsequência γ_{m_j} tal que

$$\left| E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_{m_j}, \varphi_{[\beta_{m_j}]}) - E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})) \right| > A.$$

Deste modo, existe $A' > 0$ e algum número τ_i da partição tais que

$$\left| E\left([\Pi_1 \circ P_0(\gamma_{m_j}, \varphi_{[\beta_{m_j}]})\right]_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} - E\left([\Pi_1 \circ P_0(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})\right]_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}\right) \right| > A'.$$

O fato de $\varphi_{[\beta_0]} = \varphi_{[\tilde{\beta}_m]}$ e da energia ser invariante pelo transporte paralelo de segmentos de geodésica horizontais implica que

$$\left| E(\gamma_{m_j}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) - E(\gamma_0|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) \right| > A',$$

donde

$$\left| E(\gamma_{m_j}) - E(\gamma_0) \right| > A'.$$

Isso contradiz o fato de γ_{m_j} convergir para γ_0 .

Finalmente, da afirmação 1. e do limite em (4.9) obtemos

$$E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_0, \varphi_{[\beta_0]})) = \lim_{m \rightarrow \infty} E(\Pi_1 \circ P_0(\gamma_m, \varphi_{[\beta_m]})) = E(\gamma_0).$$

E segue da Proposição 4.15 que γ_0 é uma geodésica horizontal periódica. \square

Se \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana com folhas compactas de uma variedade Riemanniana compacta M , resulta da proposição acima e da Proposição 4.11 que o espaço das folhas M/\mathcal{F} possui geodésica fechada possivelmente trivial. Nosso problema se resume em impor condições sobre a curva α visando evitar que a geodésica fechada seja trivial. Por

esse motivo, exigimos no Teorema 4.19 que exista um laço α em M tal que nenhum laço contido em alguma folha de \mathcal{F} é livremente homotópico a α .

Usando a Proposição 4.11, vê-se que a prova do Teorema 4.19 segue imediatamente da seguinte proposição.

Proposição 4.21. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana com folhas compactas de uma variedade Riemanniana compacta M . Suponha que existe um laço α em M tal que, para toda folha L de \mathcal{F} , não existe um laço em L livremente homotópico a α . Então existe uma subsequência de iterações do processo de encurtamento duplo de α que converge para uma geodésica periódica horizontal não trivial.*

Demonstração. Seja α um laço de M que não é livremente homotópico a qualquer laço contido em alguma folha de \mathcal{F} . O Teorema 4.20 garante que existe uma subsequência $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\Pi_1 P_0^m(\alpha)$ que converge para uma geodésica horizontal γ_0 . Suponha por contradição que γ_0 é trivial, ou seja, $\gamma_0 = y$.

Seja n suficientemente grande tal que β_n e γ_n pertençam à mesma vizinhança tubular $\text{Tub}(L_y)$. Considerando a união das curvas $\beta_n \star \gamma_n$, vamos usar a projeção ortogonal

$$\pi : \text{Tub}(L_y) \longrightarrow L_y$$

para construir uma curva $\delta \subset L_y$ livremente homotópica a $\beta_n \star \gamma_n$. Para cada $t \in [0, 1]$, seja $x(t) = \pi(\beta_n \star \gamma_n(t))$ e ξ_t o único vetor em $\nu_{x(t)}L_y$ dado pelo Lema 2.18 tal que

$$\exp_{x(t)} \xi_t = \beta_n \star \gamma_n(t).$$

Defina

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$$

$$H(t, s) = \exp_{x(t)} s \cdot \xi_t.$$

Então H é uma homotopia livre entre os laços $\beta_n \star \gamma_n$ e δ , onde $\delta(t) := \pi(\beta_n \star \gamma_n(t))$. Por outro lado, usando a construção feita na demonstração da Proposição 4.18, segue que $\beta_n \star \gamma_n$ é livremente homotópica a α . Disso concluímos que α é livremente homotópica a δ , o que contradiz a hipótese. Portanto γ_0 é uma geodésica horizontal periódica não trivial. \square

A condição do Teorema 4.21 é satisfeita, por exemplo, quando existe um elemento do grupo fundamental de M com ordem infinita e o grupo fundamental de cada folha é finito.

Corolário 4.22. *Seja \mathcal{O} um orbifold Riemanniano compacto. Suponha que o grupo fundamental do espaço topológico $|\mathcal{O}|$ é não trivial. Então existe uma geodésica fechada não trivial no orbifold \mathcal{O} .*

Demonstração. Resulta do Teorema 3.13 que \mathcal{O} é o espaço das folhas M/\mathcal{F} de alguma variedade Riemanniana compacta M com uma folheação \mathcal{F} por folhas compactas. Seja $\bar{\alpha}$ um laço de $|\mathcal{O}|$ que não é homotópico a um ponto. Levantando $\bar{\alpha}$ a M/\mathcal{F} , obtemos uma curva α cujos extremos pertencem a mesma folha de \mathcal{F} . Unindo, se necessário, os extremos de α por uma curva contínua, conseguimos um laço em M que não pode ser homotópico a nenhum laço de nenhuma folha de \mathcal{F} pois, do contrário, $\bar{\alpha}$ seria homotópico a um ponto. Basta usar o Teorema 4.19 com a curva α para concluir a demonstração. \square

Até agora, dissertamos sobre a existência de geodésicas fechadas no espaço das folhas M/\mathcal{F} com \mathcal{F} uma folheação Riemanniana regular de M com folhas compactas. Existe um resultado análogo quando \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana singular que foi provado por M. Alexandrino e M. Javaloyes em [5].

Teorema 4.23. *Seja \mathcal{F} uma folheação Riemanniana singular com folhas fechadas e mergulhadas de uma variedade Riemanniana completa M com grupo fundamental finito. Se M/\mathcal{F} é um orbifold riemanniano compacto, então M/\mathcal{F} possui uma geodésica fechada não trivial.*

Note que se M/\mathcal{F} é um orbifold compacto que é variedade, então o resultado segue do Teorema 4.3. Por outro lado, se \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana (regular) e $\pi_1(M) = \{e\}$, segue da Proposição 3.27 que existe um homomorfismo sobrejetivo entre o grupo fundamental $\pi_1(M)$ e o grupo fundamental orbifold $\pi_1(M/\mathcal{F})$. Deste modo, o grupo fundamental orbifold M/\mathcal{F} é trivial. Logo o orbifold não pode ser bom pois, se fosse M/\mathcal{F} bom da forma Σ/Γ , com Σ variedade Riemanniana conexa e Γ subgrupo de isometrias de Σ , então Γ seria trivial e Σ/Γ seria variedade. Portanto M/\mathcal{F} não é um orbifold bom e o resultado segue do Teorema 4.4, item 1).

Agora, se \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana singular tal que M/\mathcal{F} não é um orbifold bom e $\pi_1(M)$ é trivial, então o resultado também segue do Teorema 4.4, item 1). A dificuldade reside no caso em que \mathcal{F} é uma folheação Riemanniana singular e M/\mathcal{F} é um orbifold bom com $\pi_1(M/\mathcal{F})$ trivial. Para não fugir do escopo deste trabalho, vamos omitir a demonstração neste último caso, os detalhes podem ser encontrados [5], Teorema 2.20.

Referências Bibliográficas

- [1] Alexandrino, M. M., Proofs of conjectures about singular Riemannian foliations, *Geom. Dedicata* 119, 219-234, 2006.
- [2] Alexandrino, M. M., Singular holonomy of singular Riemannian foliations with sections, *Mat. Contemp.* 33, 23-54, 2007.
- [3] Alexandrino, M. M., Singular Riemannian foliations with sections, *Illinois J. Math.* 48, 1163-1182, 2004.
- [4] Alexandrino, M. M., Bettiol R. G., *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*, 1 ed., Springer Verlag, 2015.
- [5] Alexandrino M. M., Javaloyes M. A., On closed geodesics in the leaf space of singular Riemannian foliations, *Glasgow Mathematical Journal* 53, 555-568, 2011.
- [6] Alexandrino, M. M., Toben, D., Equifocality of singular Riemannian foliations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136, 3271-3280, 2008.
- [7] Alexandrino, M. M., Toben, D., Singular Riemannian foliations on simply connected spaces, *Differ. Geom. Appl.* 24, 383-397, 2006.
- [8] Bridson, M. R., Haefliger, A., *Metric spaces of non-positive curvature*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 319, Springer, New Mexico, 1999.
- [9] Burago D., Burago Y., Ivanov S., *A course in metric geometry*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 33, American Mathematical Society, 2001.
- [10] Camacho, C., Neto, A. L., *Teoria geométrica das folheações*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

-
- [11] Candel A., Conlon, L., *Foliations II*, Graduate studies in mathematics, vol. 60, American Mathematical Society, 2003.
- [12] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, 3 ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [13] Duistermaat, J., Kolk, J., *Lie groups*, Springer-Verlag, 2000.
- [14] Guruprasad, K., Haefliger, A., Closed geodesics on orbifolds, *Topology* 45, 611-641, 2006.
- [15] Jost, J., *Riemannian geometry and geometric analysis*, 2 ed., Universitext, Springer, New Mexico, 1998.
- [16] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1997.
- [17] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas, Impa, 2011.
- [18] Lytchak, A., Geometric resolution of singular Riemannian foliations, *Geom. Dedicata* 149, 379-395, 2010.
- [19] Lytchak, A., Thorbergsson, G., Variationally complete actions on nonnegatively curved manifolds, *Illinois J. Math.* 51, 605-615, 2007.
- [20] Lytchak, A., Thorbergsson, G., Curvature explosion in quotients and applications, *J. Differ. Geom.* 85, 117-139, 2010.
- [21] Moerdijk, I., Mrcun, J., *Introduction to foliations and lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 91, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [22] Molino, P., *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics vol. 73, Birkhauser, Boston, 1988.
- [23] O’Neil, B., *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand, New York, 1969.
- [24] Palais, R. S., Terng, C. L., *Critical point theory and submanifold geometry*, Springer-Verlag, 1988.

-
- [25] Petersen, P., Riemannian Geometry, 2 ed., Graduate Texts in Mathematics, 171, Springer, New York, 2006.
- [26] Ratcliffe, J. M., Foundations of hyperbolic manifolds, 2 ed., Graduate Texts in Mathematics, 149, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [27] Reinhart B., Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math.69, 119-132, 1959.
- [28] Sakai, T., Riemannian Geometry, Translations of Mathematical Monographs, 149, American Mathematical Society, Tokyo, 1996.
- [29] Satake, I.; On a generalization of the notion of manifold, Proceedings of the National Academy of Sciences, 42, 1956.
- [30] Thurston W. P., The geometry and topology of three-manifolds, electronic version, 2002. Disponível em <http://library.msri.org/books/gt3m>.
- [31] Warner, F. W., Foundations of differentiable manifolds and lie groups, Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

Índice Remissivo

Ação

- de grupos, 21
- descontínua, 21
- distinguida, 24
- livre, 21
- própria, 22
- transitiva, 21

Aberto simples, 34

Aplicação

- de holonomia, 44
- exponencial, 16

Atlas

- folheado, 30
- orbifold, 47

Campo

- folheado, 42
- normal, 18
- normal em relação à folheação, 42
- paralelo, 17
- tangente às folhas, 42

Carta

- folheada, 31
- orbifold, 48

Comprimento de segmentos, 12

Conexão

- afim, 13
- de Bott, 42

de Levi-Civita, 14

normal, 18

Curva

- \mathcal{F} -fechada, 74
- \mathcal{F} -homotópica, 74

Derivada

- covariante, 14
- de Lie, 38

Dimensão de uma folheação, 30

Domínio

- de Dirichlet, 28
- fundamental, 28

Equifocalidade, 43

Equivalência entre pseudogrupos, 53

Espaço

- das órbitas, 25, 47
- das órbitas de um pseudogrupo, 53
- das folhas, 34
- normal, 17

Estabilizador, 21

Fibra, 19

Fibrado

- normal, 17
- normal da folheação, 37

Folha, 30, 32

regular, 30

- singular, 30
- Folheação
 - regular, 30
 - Riemanniana, 37
 - singular, 37
 - simples, 34
 - singular, 30
- Geodésica, 14
 - em orbifold riemanniano, 59
 - em orbifold riemanniano bom, 59
 - fechada
 - em orbifold riemanniano, 59, 63
 - em orbifold riemanniano bom, 59
 - horizontal, 43
 - horizontal periódica, 64
 - minimizante, 15
- Germe, 36
- Grupo
 - de holonomia, 37
 - de isometrias, 20
 - de Lie, 20
 - descontínuo, 21
 - discreto, 20
 - linear especial, 20
 - linear geral, 20
 - ortogonal, 20
 - topológico, 20
 - unitário, 20
- Grupo fundamental
 - de um pseudogrupo, 56
 - orbifold, 55
- Holonomia, 37
- Isometria, 12
 - local, 12
- Levantamento horizontal
 - de campos, 19
 - de curvas, 19
- Loop, 55
- Métrica, 12
 - adaptada à folheação, 37
 - em orbifolds, 49
 - transversa, 38
- Orbifold, 47
 - bom, 49
 - Riemanniano bom, 50
 - riemanniano, 49
- Orbita, 21
- Par fechado, 69
 - bom, 69
- Placa, 31
- Ponto
 - regular, 30
 - regular de um orbifold, 48
 - singular, 30
 - singular de um orbifold, 48
- Processo de encurtamento, 70
 - duplo, 72
- Projeção, 25
 - ortogonal, 41
- Pseudogrupo
 - de holonomia, 53
 - gerado, 52
 - riemanniano, 52

Recobrimento

de orbifolds, 54

de variedades, 54

orbifold universal, 55

Região fundamental, 27

Seção

transversa, 36

Slice, 41, 44

Subespaço

horizontal, 19

vertical, 19

Subgrupo

de Lie, 20

Submersão, 18

riemannina, 19

Transformação deck, 55

Transporte paralelo, 17

de curvas, 43

Tubo, 40

Variedade

geodesicamente completa, 16

Riemanniana, 12

Vizinhança

normal, 16

trivializadora, 41

tubular, 41