



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

THAÍS REIGADAS SALVADOR

**UM ESTUDO DO MÉTODO SIMPLEX
E SUA APLICAÇÃO NA RADIOTERAPIA**

Sorocaba

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

**UM ESTUDO DO MÉTODO SIMPLEX
E SUA APLICAÇÃO NA RADIOTERAPIA**

Thaís Reigadas Salvador

Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho

Sorocaba

2016

**UM ESTUDO DO MÉTODO SIMPLEX
E SUA APLICAÇÃO NA RADIOTERAPIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Sílvia Maria Simões de Carvalho.

Sorocaba

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S182e Salvador, Thaís Reigadas
Um estudo do método simplex e sua aplicação na radioterapia / Thaís Reigadas Salvador. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
67 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Programação linear. 2. Método simplex. 3. Radioterapia. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Thais Reigadas Salvador, realizada em 15/06/2016:

Profa. Dra. Sílvia Maria Simões de Carvalho
UFSCar

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira
UNICAMP

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Dedico este trabalho aos meus pais, meu vôdrinho Antônio e vôdrinha Rosa, pelo incentivo, palavras de otimismo e pelas orações. Dedico a Virgem Maria, agradecendo por sua incessável intercessão. Totus tuus ego sum, et omnia mea tua sunt.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Santíssima Trindade, por todas as graças e proteção que recebi ao longo destes anos. Simplesmente nada seria possível se não fosse por vontade de Deus e sua Sabedoria para iluminar meus pensamentos nos momentos que acreditei que não seria possível a conclusão desse trabalho.

Aos meus pais, Maurílio e Fátima, por toda ajuda, apoio e incentivo para que eu me tornasse uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus "vôdrinhos" Antônio e Rosa, por todo amor, sabedoria, incentivo e orações, sempre.

Aos meus professores do Mestrado que me ensinaram muito mais que lições de matemática e teorias, mas que são responsáveis pela profissional que serei no futuro.

Em especial a minha orientadora, professora Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho, que sempre esteve ao meu lado com paciência, dedicação, incentivo, amizade e confiança. Obrigada por ter me concedido esta oportunidade.

À todos os companheiros de mestrado, do meu pólo de Sorocaba, do IMPA e dos grupos de estudos na internet. Sou grata por toda amizade, carinho e ajuda recebida durante todo esse processo. É agradavelmente curioso como laços de amizade podem se estreitar em tão pouco tempo.

Um agradecimento especial ao Pe William que o tempo todo me incentivou, apoiando em suas orações e palavras amigas que tantas vezes vieram nos momentos que mais precisei. Muito obrigada meu grande amigo.

À Roseli, psicóloga e amiga. Obrigada por ter sido luz no meu caminho.

Aos meus amigos que ajudaram direta ou indiretamente na construção deste trabalho e aos que estiveram presentes em momentos diversos. Obrigada por compreenderem minhas faltas, por todo apoio e torcida.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*A fé e a razão constituem como que as duas asas
pelas quais o espírito humano se eleva
para a contemplação da verdade.*

S. João Paulo II

RESUMO

Este trabalho visa apresentar uma aplicação do Método Simplex para resolução de um problema de planejamento ótimo para o tratamento de câncer por radioterapia. O Método Simplex, proposto por George Dantzig, é um procedimento matricial que percorre pontos extremos da região factível em busca de uma solução ótima do problema. O planejamento ótimo para radioterapia pode ser auxiliado pela Programação Linear, onde a preocupação é aplicar uma radiação suficientemente alta no órgão ou tumor e ao mesmo tempo, poupar significativamente regiões saudáveis ou órgãos de risco.

Palavras-chaves: Programação Linear. Método Simplex. Radioterapia.

ABSTRACT

This work presents an application of the Simplex Method for solving an optimal planning problem for cancer treatment by radiotherapy. The Simplex Method, proposed by George Dantzig, is a matrix procedure walks along extreme points of the feasible region in search of an optimal solution problem. The optimal planning for radiation therapy can be aided by Linear Programming, where the concern is to apply a high enough radiation in the tumor while saving significantly healthy regions or critical organs.

Key-words: Linear Programming. Simplex Method. Radiotherapy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Solução Geométrica	28
Figura 2 – As três regiões do plano: $a^i x = b_i$, $a^i x < b_i$ e $a^i x > b_i$	29
Figura 3 – Região factível de restrições do tipo $a^i x \leq b_i, (i = 1, 2, \dots, m)$	29
Figura 4 – Região Factível de S	30
Figura 5 – Determinando a solução ótima x^* (Problema de Maximização)	31
Figura 6 – Solução ótima única: (a) Região Limitada. (b) Região Ilimitada.	32
Figura 7 – Múltiplas soluções ótimas: (a) Região Limitada. (b) Região Ilimitada.	32
Figura 8 – Solução ilimitada.	33
Figura 9 – Solução infactível	33
Figura 10 – Imagem de tomografia computadorizada com estruturas anatômicas selecionadas.	48
Figura 11 – Imagem dividida em pixels (matriz de pixels).	49
Figura 12 – Geometria de uma imagem de <i>pixel</i> 2×2 com ângulos $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correspondência entre o programa primal e o dual.	34
Tabela 2 – Como organizar o problema no formato tableau	44
Tabela 3 – Tableau antes do pivoteamento	45
Tabela 4 – Tableau após o pivoteamento	46
Tabela 5 – Estrutura da matriz de deposição de dose A	51
Tabela 6 – Valores adotados no modelo, referentes à prescrição de dose	58
Tabela 7 – Resultados numéricos da otimização da função (5.1)	59
Tabela 8 – Comparação entre os resultados dos Métodos Simplex e Pontos Interiores	60

SUMÁRIO

	Introdução	12
1	BREVE HISTÓRICO	14
1.1	Modelos Matemáticos	16
1.2	Programação Linear	17
2	PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	19
2.1	Soluções Básicas	21
2.2	Notação Matricial	22
2.3	O Teorema Fundamental da Programação Linear	23
2.4	Relações de Convexidade	25
2.5	Resolução Gráfica de Problemas Lineares	27
2.5.1	Exemplos	30
2.6	Dualidade Linear	34
3	O MÉTODO SIMPLEX	37
3.1	Pivoteamento	37
3.2	Pontos Extremos Adjacentes	39
3.2.1	Determinando qual variável sairá da base	39
3.3	Determinando a Solução Factível Mínima	40
3.4	Soluções Degeneradas	43
3.5	O Método Simplex no Formato de Tableau	43
3.5.1	Pivoteamento no Tableau	44
4	PROGRAMAÇÃO LINEAR NA RADIOTERAPIA	47
4.1	Breve Relato Histórico sobre a Radioterapia	47
4.2	Formulação do Modelo Matemático	48
4.3	Problema de Otimização Linear	54
4.3.1	Propriedades das Restrições Elásticas	56
5	MÉTODO SIMPLEX APLICADO AO MODELO DE TRA- TAMENTO POR RADIOTERAPIA	57
5.1	Resultados Computacionais	58
6	CONCLUSÃO	61

Referências	62
ANEXOS	64
ANEXO A – MODELO DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADO	65

INTRODUÇÃO

O conceito de Otimização está normalmente associado à decisão estratégica de quantidades limitadas de recursos entre atividades competitivas, de forma que a solução produzida seja a melhor possível. Ela está presente no cotidiano, pois sempre que é preciso tomar uma decisão, procura-se escolher entre as várias alternativas aquela que, naquele momento, dê maior satisfação. Nos últimos anos, a matemática vem estudando como encontrar essa solução ótima.

A Pesquisa Operacional atua exatamente nesse campo. Ela criou e cria ferramentas, processos e modelos que permitirão tornar as decisões as mais lógicas e racionais possíveis. É um ramo da ciência que cuida da criação de metodologias específicas para promover o gerenciamento de decisões.

A Programação Linear usa um modelo matemático para descrever o problema. O termo linear significa que todas as funções matemáticas do modelo são funções lineares. A palavra programação não se refere a programação de computadores e deve ser vista como um sinônimo de planejamento. Assim, define-se a programação linear como sendo o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atenda, da melhor forma possível, a um determinado objetivo.

Em 1947, George B. Dantzig desenvolveu o chamado *Método Simplex* para resolver problemas de programação lineares. Desde então tem havido um grande progresso dessa disciplina tanto em desenvolvimentos teóricos e computacionais como na exploração de novas aplicações. O Método Simplex recolhe grande aceitação para a resolução desses problemas, devido não só a sua simplicidade mas principalmente à sua capacidade em produzir soluções em tempo aceitável.

Atualmente existem outros algoritmos teoricamente mais eficientes para problemas lineares, exibindo um comportamento polinomial em relação ao esforço de determinação da solução ótima, como os métodos elipsóide e algoritmo de pontos interiores. No entanto o Método Simplex e sua variante dual-simplex continuam a ser os processos mais usados na prática para a resolução desses problemas.

O surgimento de computadores digitais possibilitou desenvolver e utilizar novas metodologias para resolver uma grande variedade de problemas reais. A utilização dessas técnicas atraiu o interesse em diversas áreas, e vem sendo aplicadas às áreas de produção, logística, indústria, serviços públicos e privados, saúde, etc.

Dentre os problemas de saúde mundiais, o câncer vem se tornado um dos principais

assuntos de pesquisa para várias áreas do conhecimento. Muitas dessas pesquisas são conduzidas com o objetivo de desenvolver e avaliar novas formas de terapia ou simplesmente novas metodologias ou protocolos de tratamento. Devido a existência de uma grande variedade de algoritmos para reconstrução tomográfica e cálculo de dose absorvida na radioterapia, diferentes aplicações envolvendo técnicas matemáticas foram propostas e ainda são constantemente aprimoradas.

Dentre essas técnicas, a programação linear se destaca pela sua intensa e ampla aplicação, além dos resultados obtidos serem considerados promissores. O objetivo do tratamento é eliminar as células do tumor através de radiação ao mesmo tempo em que procura evitar a destruição de células vizinhas saudáveis também afetadas pela radiação.

Para o planejamento do tratamento com radiocirurgia, as imagens de tomografia computadorizadas são digitalizadas e fundidas com imagens de ressonância magnética, obtidas previamente. A partir destas imagens, são localizadas as estruturas críticas e tumorais e posteriormente são feitos cálculos para determinação tridimensional de isocentros, curvas de isodoses, dose a ser prescrita, posição, número e respectivo peso de campos isocêntricos conformais, além de outros. Este planejamento é elaborado pela equipe radioneurocirúrgica visando a obtenção de um tratamento adequado e ideal para cada caso.

Os planos de tratamento são comumente baseados nos níveis de dose desejados para específicos tipos de tumores e órgãos de risco na região irradiada. Esses níveis de dose são escolhidos de forma que uma alta probabilidade de cura seja atingida e ao mesmo tempo, que a probabilidade de complicações em qualquer órgão de risco seja mínima.

O objetivo dessa dissertação é o planejamento ótimo em radioterapia, buscando a solução ótima através do Método Simplex e sua comparação com o Método de Pontos Interiores.

No capítulo 1 é feito um breve relato histórico a respeito da Programação Linear. No Capítulo 2 encontram-se os conceitos básicos de Problemas de Programação Linear. O desenvolvimento do Método Simplex encontra-se no Capítulo 3. No Capítulo 4, apresenta-se o modelo para a formulação do tratamento por radioterapia. Discute-se a aplicação do Método Simplex na aplicação do modelo proposto e os resultados computacionais no Capítulo 5 e as conclusões no Capítulo 6.

1 BREVE HISTÓRICO

A Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional (PO) aplicada à solução de problemas que objetiva a otimização de um sistema em estudo [1]. O problema de otimizar uma função linear, sujeita a restrições lineares, teve sua origem com os estudos de Fourier sobre sistemas lineares de inequações, em 1826. No entanto, só em 1939 Kantorovich, matemático russo, faz notar a importância prática destes problemas, criando assim um algoritmo para a sua solução [8].

O termo *pesquisa operacional* é uma tradução direta do inglês *operational research*, cujo surgimento ocorreu no início da década de 1940, coincidindo com a Segunda Guerra Mundial [11]. Nesse período, a Inglaterra convocou um grupo de cientistas para estudar problemas de estratégias e táticas associadas com a defesa do país. Numa atuação clássica, um grupo de especialistas (matemáticos, físicos, engenheiros, etc) foi designado para avaliar e reposicionar adequadamente os radares do sistema de defesa aérea do país antes e durante o período de guerra. O surgimento deste termo é atribuído ao superintendente da estação A. P. Rowe, que em 1938, coordenava equipes para examinar a eficiência de técnicas de operações advindas de experimentos com interceptação de radares. Em 1941, foi inaugurada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da força Aérea de Combate.

Após o fim da guerra, a Pesquisa Operacional evoluiu rapidamente na Inglaterra e nos Estados Unidos. Muitos dos especialistas, que estiveram envolvidos no planejamento de operações militares, deram continuidade a suas pesquisas, agora visando também operações não militares. Em 1947, foi implantado o projeto SICOOP (*Scientific Computation of Optimal Programs*) no Pentágono, com o objetivo de apoiar as decisões de operações da força aérea americana. O projeto continha um grupo de pesquisa coordenado pelo economista Arcshell Wood e pelo matemático George Dantzig.

Durante esse projeto, Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o *Método Simplex* para resolver Problemas de Programação Linear (otimização linear), com base nos trabalhos precursores de Kantorovich. Após a guerra, ele foi impulsionado a encontrar formas eficientes de desenvolver esta metodologia. Dantzig foi o primeiro a reconhecer que um programa de planejamento poderia ser expresso por um sistema de inequações lineares, assim como foi o primeiro a apresentar, na forma de uma expressão matemática explícita, um critério para seleção do melhor plano, ao que hoje chamamos função objetivo.

A utilização dessas técnicas atraiu o interesse de diversas áreas e a partir da década de 1950 foram aplicadas por cientistas ingleses e americanos em diversos problemas procedentes do setor público e privado, envolvendo setores industriais e financeiros como

mineração, metalúrgico, construção civil e militar, têxtil, transportes, coleta de lixo, polícia, entre outros. Desde então, vem sendo aplicadas às mais diversas áreas de produção e logística, incluindo indústrias de alimentação, eletrônica, telecomunicações, organização de serviços públicos e privados, saúde, etc. A natureza dos problemas é bastante abrangente e complexa, exigindo assim uma abordagem detalhada dos múltiplos aspectos envolvidos.

Seu desenvolvimento ao longo das últimas décadas é devido, principalmente, a dois fatores: o acirramento da concorrência no período pós-guerra, o que implicou numa melhoria do planejamento empresarial para sobrevivência e manutenção das empresas, e o rápido e acentuado desenvolvimento da tecnologia no terreno das telecomunicações e cibernética. O surgimento de computadores digitais na década de 1950 tornou possível desenvolver e utilizar novas metodologias para resolver uma grande variedade de problemas reais. A medida que a capacidade computacional disponível foi crescendo, tornou-se possível resolver problemas cada vez mais complexos.

Em 1952, foi fundada a sociedade científica americana de Pesquisa Operacional ORSA (*Operations Research Society of America*) e, em 1953, a sociedade inglesa ORS (*Operational Research Society*) e a americana de ciências de administração TIMS (*The Institute of Management Sciences*), já em 1957, na Inglaterra, foi realizada a primeira conferência internacional desse tema.

Por volta do fim da década de 60, surgem as questões educacionais, principalmente, no tocante da maior publicação literária do assunto e na presença em cursos de pós-graduação. Esse estudo iniciou-se no Brasil no início dessa década também, por meio de alguns trabalhos pioneiros de profissionais de empresas e, principalmente, no meio acadêmico. O primeiro simpósio ocorreu em 1968 no ITA, em São José dos Campos, SP. Em seguida, foi fundada a SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional) que publica periódicos há mais de 25 anos.

Desde então há um grande progresso tanto em desenvolvimentos teóricos e computacionais como na exploração de novas aplicações da Programação Linear. O Método Simplex recolhe grande aceitação para a resolução desses programas devido não só a sua simplicidade, mas principalmente à sua capacidade em produzir soluções em tempo aceitável. No entanto, é importante referir que se trata de um algoritmo não-polinomial, pois é possível encontrar uma classe de problemas lineares para os quais o Método Simplex exhibe um esforço de crescimento exponencial, com a dimensão do problema [8].

Em 1984, Narendra Karmakar introduz um novo método de Pontos Interiores para resolver problemas de Programação Linear, o que constituirá um enorme avanço nos princípios teóricos e práticos da área.

Atualmente, existem outros algoritmos teoricamente mais eficientes para Problemas

de Programação Linear, exibindo um comportamento polinomial em relação ao esforço de determinação da solução ótima. São exemplos disso o Método do Elipsóide e os já muito famosos algoritmos de Pontos Interiores. No entanto, o Método Simplex continua a ser o processo mais usado na prática para a resolução de programas lineares. Além disso, esse algoritmo ou a sua variante dual-simplex pode ser usado eficientemente na resolução de programas lineares para os quais os algoritmos de Pontos Interiores ainda não se mostraram suficientemente competitivos.

A Pesquisa Operacional, com um enfoque mais clássico, é definida como a arte de aplicar técnicas de modelagem a problemas de decisão por meios de métodos matemáticos e estatísticos, buscando encontrar uma solução ótima de maneira sistêmica, que leva em consideração a interação com o ambiente interno e externo para a formulação da modelagem de um problema. A construção do modelo matemático é a parte mais refinada, não havendo regras para sua construção, sugere-se um roteiro que ajuda a ordenar o raciocínio. A seguir um pouco mais sobre os modelos matemáticos.

1.1 MODELOS MATEMÁTICOS

A matemática tem uma importância fundamental na descrição de fenômenos naturais, sociais, econômicos entre outros. As *leis* que regem esses fenômenos, se possível, podem ser descritas por relações matemáticas, dando origem ao que chamamos de *modelos matemáticos*. Modelos são representações da realidade, no qual o objetivo é reproduzir o sistema de modo a aumentar a sua produtividade. Exemplos de modelos matemáticos são os modelos de:

- programação linear (otimização linear);
- programação inteira (otimização discreta);
- programação em redes (otimização em redes) e
- programação não linear (otimização não linear).

A modelagem e análise de um problema de Programação Linear desenvolve-se através de vários passos. A fase de *formulação do problema* envolve um estudo detalhado do sistema e conseqüente recolha de dados, a identificar as suas restrições ou limitações e a sua função objetivo [8]. O problema em análise pode, frequentemente, ser apenas uma parcela de um sistema mais global. O passo seguinte envolve a identificação do problema através de um *modelo matemático*. É necessário algum cuidado para assegurar que o modelo seja matematicamente tratável e represente satisfatoriamente o sistema em análise.

Este compromisso deverá ser estabelecido de forma equilibrada e, as hipóteses subjacentes ao modelo, deverão ser consideradas de forma adequada.

Uma vez obtido o modelo linear, que é constituído pela função objetivo e pelas restrições, os métodos de programação linear se encarregam de encontrar uma solução ótima, que pode ser tanto a maximização de um lucro, quanto a minimização de custos.

O terceiro passo envolve a *obtenção de uma solução* para a qual, deve ser escolhido o Método Simplex, ou uma sua variante, ou uma técnica de Pontos Interiores. A quarta fase envolve *testes, análises* e (possivelmente) *reestruturação do modelo*. A solução do modelo pode ser examinada, tal como a sua sensibilidade, a vários parâmetros do sistema, estudando o seu comportamento em vários cenários de hipóteses diferentes. Esta análise de sensibilidade permite um melhor conhecimento do sistema e servirá para averiguar a viabilidade do modelo, através da comparação dos resultados calculados com os resultados esperados, utilizando a experiência recolhida no passado. Nesta etapa, pretende-se enriquecer o modelo através da incorporação de outros aspectos importantes do sistema, que tenham sido anteriormente ignorados, ou mesmo optar-se por simplificar o modelo. O último passo envolve a *aplicação* de todo o processo.

A criação de um modelo implica em algo simbólico, que simplifica a realidade mediante o uso de relações matemáticas de algumas variáveis envolvidas, porém mantém as essências de causa-efeito do problema estudado. No que tange a Pesquisa Operacional, podemos ter vários exemplos clássicos de modelos, entre um dos mais básicos e interessantes que envolvem misturas (alimentos, rações, fertilizantes, concreto, poluentes, entre outros). Esses tipos de problemas consistem em combinação de materiais (naturais ou não) para gerar novos materiais ou produtos com características desejáveis, como é o caso por exemplo das misturas de massa de reboco (cal, areia, cimento e água) ou de concreto (areia, brita, cimento e água), que em proporções diferentes ou com adição de alguma substância adquirem propriedades para um fim específico, como acabamento e fundação, respectivamente [10].

1.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

Na operacionalização de um problema surgirão situações onde tem-se que tomar decisões, por existirem fatores limitadores ou recursos escassos que representam restrições ou limitações existentes. O modelo de Programação Linear consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo matemático, e através da resolução deste modelo, encontrar a melhor solução. Este problema, para o qual a Programação Linear proporciona uma solução, pode ser resumido em: maximizar ou minimizar alguma variável dependente, que é função linear de diversas variáveis independentes, sujeita a muitas

restrições.

O problema de otimização de uma função linear teve sua origem com os estudos de Dantzig, quem publicou o Algoritmo Simplex, em 1947, John Von Neuman, que desenvolveu a Teoria da Dualidade no mesmo ano, e Lwoid Kantorovich, um matemático russo, que utiliza técnicas similares na economia antes de Dantzig, e ganhador do Prêmio Nobel em economia em 1975.

No próximo capítulo, serão abordados os principais elementos de um Problema de Programação Linear e suas características.

Qualquer problema de otimização linear pode ser escrito na forma padrão, desenvolvendo modificações simples. Assim, um problema de minimização pode converter-se num problema de maximização, pois:

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\text{Mínimo } \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j.$$

Além disso, toda desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ pode ser transformada numa igualdade, por introdução de uma variável adicional com condição de não negatividade. Com efeito a desigualdade anterior é equivalente a:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,$$

com

$$x_{n+i} \geq 0.$$

Do mesmo modo da desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ pode ser escrita na forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,$$

com

$$x_{n+i} \geq 0.$$

As novas variáveis x_{n+i} designam-se por *Variáveis de Desvio* ou *Variáveis de Folga*.

Este problema pode ainda ser escrito de forma equivalente em notação matricial. Com efeito, considerando os vetores $c, x \in \mathbf{R}^n$ e $b \in \mathbf{R}^m$ e a matriz $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ definidos a seguir:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

então o problema de otimização linear consiste na determinação do vetor $x \in \mathbf{R}^n$, tal que:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) = c^T x \\ \text{Sujeito a } & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Os conceitos apresentados neste capítulo serão utilizados ao longo dos próximos.

2.1 SOLUÇÕES BÁSICAS

Considerando o sistema de equações

$$Ax = b,$$

supondo que das n colunas de A selecionam-se um conjunto de m colunas linearmente independentes (este conjunto existe se o posto de A é m) [5]. Para simplificar a notação seleciona-se as m primeiras colunas de A e denotada por B a matriz $m \times m$ dessas colunas. A matriz B é então não singular podendo assim resolver a equação

$$Bx_B = b,$$

onde $x_B \in \mathbf{R}^m$. Tomando $x = (x_B, 0)$ (ou seja, fixando os m primeiros componentes de x igualando a x_B e os restantes componentes igualando a zero) obtém-se a solução para $Ax = b$. Tem-se então a seguinte definição:

Definição 2.1. *Tomando simultaneamente um conjunto de m equações lineares em n incógnitas de $Ax = b$, seja B uma submatriz não singular $m \times m$ formada pelas colunas de A . Então, se para todos $n - m$ componentes de x não associados com as colunas de B são fixadas como iguais a zero, a solução do resultado do conjunto restante são chamadas de soluções básicas de $Ax = b$ com relação a matriz básica B (ou simplesmente base). Os componentes de x associados com as colunas de B são chamadas de variáveis básicas.*

Na definição acima, refere-se a B como base, uma vez que B é constituído por m colunas linearmente independentes que podem ser consideradas como base no espaço E^m . As soluções básicas correspondem a uma expressão para o vetor b como uma combinação linear destes vetores de base.

Em geral, a equação $Ax = b$ pode não ter soluções básicas. Entretanto, pode-se evitar dificuldades analisando estrutura da matriz A . Primeiro, assumindo que $n > m$, ou seja, o número de variáveis x_i é maior que o número de equações da restrição. Segundo, assumindo que as linhas de A são linearmente independentes, e correspondem as m equações lineares independentes. A dependência linear entre as linhas de A , levaria a restrições contraditórias ou uma redundância que poderia ser eliminada.

Definição 2.2. (Posto completo) *A matriz A ($m \times n$), tem $m < n$, e as m linhas de A são linearmente independentes.*

Com base na definição acima, o sistema $Ax = b$ sempre terá solução e, na verdade, sempre terá pelo menos uma solução básica.

As variáveis básicas de uma solução básica não são necessariamente todas nulas. Isto pode ser notado pela definição abaixo.

Definição 2.3. *Se uma ou mais variáveis básicas de uma solução básica tem valor igual a zero, a solução é chamada de solução básica degenerada.*

Em uma solução básica não-degenerada as variáveis básicas, e conseqüentemente a base B são os componentes positivos da solução. Há uma ambigüidade com a solução básica degenerada, contudo as variáveis nulas básicas e não básicas podem ser trocadas.

Até agora, na discussão de soluções básicas, tratou-se apenas as restrições de igualdade sem fazer referência à restrição de positividade nas variáveis. Definições similares aplicam-se quando estas restrições devem ser consideradas. Considerando agora o sistema de restrições

$$Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

que representam as restrições de um sistema linear na forma padrão.

Definição 2.4. *Um vetor x é chamado de factível se satisfaz todas as restrições do sistema acima. Uma solução factível do sistema e também básica, é chamada de solução básica factível; se esta solução também for uma solução básica degenerada, é chamada de solução factível básica degenerada.*

2.2 NOTAÇÃO MATRICIAL

Pode-se também utilizar a notação matricial para definir as soluções básicas e não básicas [9]. Essa caracterização permite descrever algebricamente o Método Simplex.

Considerando o sistema $Ax = b$ e $x \geq 0$, onde A é uma matriz $m \times n$ e b é um vetor $m \times 1$. Supondo que o posto $(A, b) = \text{posto}(A) = m$. Depois de reorganizar adequadamente as colunas de A , tem-se que $A = [B, N]$ onde B é uma matriz invertível $m \times m$ e N uma matriz $m \times (n - m)$. A solução $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ para a equação $Ax = b$, onde:

$$x_B = B^{-1}b,$$

e

$$x_N = 0,$$

é chamado de *solução básica* do sistema. Se $x_B \geq 0$, é chamada de *solução básica factível*. Neste momento a matriz B é chamada de *matriz básica* (ou simplesmente *base*) e N é chamada de *matriz não básica*. As componentes x_B são chamadas de *variáveis básicas* (ou *variáveis dependentes*) e as componentes de x_N são chamadas de *variáveis não básicas* (ou *variáveis independentes*). Se $x_B > 0$, então x é chamado de *variável básica factível não degenerada*.

2.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nesta seção, através do Teorema Fundamental da Programação Linear, estabelecemos a importância das *soluções básicas factíveis* na solução. O método de prova do Teorema é tão importante quanto o resultado. O Teorema mostra que é necessário apenas considerar as soluções básicas factíveis quando se busca uma solução ótima para o Problema de Programação Linear, isto porque o valor ótimo sempre é encontrado através de uma solução, cuja respectiva forma padrão é dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Uma solução factível que minimize o valor da função objetivo, respeitando as restrições da função é chamada de *solução factível ótima*. Se a solução é uma solução básica, então ela é *solução básica factível ótima*.

Teorema 2.1. (Teorema Fundamental da Programação Linear) *Dada uma função linear da forma padrão onde A é uma matriz $(m \times n)$ de posto m ,*

1. *se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;*
2. *se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.*

Prova: (item 1) Sejam a_1, a_2, \dots, a_n os vetores da coluna da matriz A . Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível. Então, em termos da coluna de A , esta solução satisfaz:

$$x_1 a_1, x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b. \quad (2.2)$$

Supondo que exatamente p das variáveis x_i são maiores do que zero, e por conveniência elas são as p primeiras variáveis, poderá (2.2) ser reescrita como:

$$x_1 a_1, x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b.$$

Há dois casos a serem considerados agora: se os vetores a_1, a_2, \dots, a_p são linearmente dependentes ou linearmente independentes.

CASO 1: Supondo que a_1, a_2, \dots, a_p são linearmente independentes. Logo, $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é básica e a prova está concluída. Se $p < m$, então selecionando $m - p$

vetores dos $n - p$ vetores restantes tal que restará m vetores linearmente independentes. Atribuindo como sendo zero as $m - p$ variáveis restantes, obtém-se uma solução básica factível (degenerada neste caso).

CASO 2: Supondo que a_1, a_2, \dots, a_p são linearmente dependentes. Então, existe uma combinação não trivial desses vetores cujo valor é nulo. Isto é, existem constantes y_1, y_2, \dots, y_p onde pelo menos uma delas é positiva, sendo assim:

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0.$$

Multiplicando essa equação pela escalar ε e subtraindo de (2.2) obtém-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b.$$

Essa expressão acima é válida para qualquer ε , e para cada ε , as componentes $x_i - \varepsilon y_i$ correspondem a uma solução da equação, embora a restrição $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$ possa ser violada. Assumindo $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$, a solução de (2) para qualquer valor de ε é:

$$x - \varepsilon y.$$

Para $\varepsilon = 0$, a solução é uma solução básica factível. Quando ε aumenta a partir de zero, as componentes também podem decrescer, crescer, ou permanecer constantes, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Pelo menos um dos valores de y_i é positivo, logo pelo menos uma das componentes irá decrescer enquanto ε irá crescer. Aumentando o valor de ε até que uma ou mais componentes tornem-se nulas. Isto é, considerando que

$$\varepsilon = \min\{x_i/y_i : y_i > 0\}.$$

Para este valor de ε a solução dada por:

$$x - \varepsilon y,$$

é factível e possui no máximo $p - 1$ variáveis positivas. Repetindo o processo, se necessário, pode-se eliminar as variáveis positivas até encontrar uma solução factível com as colunas correspondentes linearmente independente, situação onde o caso 1 se aplica.

Prova: (item 2) Supondo que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível ótima e, como no caso da prova (item 1) acima, supondo que existem exatamente p variáveis positivas (x_1, x_2, \dots, x_p) . Novamente tem-se dois casos; no Caso 1, correspondente ao linearmente independente, o procedimento é equivalente ao descrito acima.

No Caso 2 o procedimento também é o mesmo que o anterior, mas deve ser demonstrado que para qualquer ε na solução $(x - \varepsilon y)$ é ótimo. Para isso, sabe-se que o valor da solução $x - \varepsilon y$ é:

$$c^T x - \varepsilon c^T y. \quad (2.3)$$

Para ε suficientemente pequeno, $x - \varepsilon y$ é uma solução factível para valores de ε positivos ou negativos. Podendo então concluir que $c^T x = 0$. Pois se $c^T y \neq 0$, um valor pequeno de ε com sinal apropriado poderia ser encontrado para fazer (2) menor que $c^T x$ mantendo a factibilidade. Isto contraria a hipótese assumida que x é uma solução ótima. Logo, $c^T y = 0$.

Assim sendo, tem-se uma menor solução factível com um número menor de variáveis positivas também ótimas, o restante da prova segue exatamente como descrito no (item 1) [5]. \square

O Teorema reduz a tarefa de encontrar as soluções básicas factíveis dos Problemas de Programação Linear. Quando um problema tem n variáveis e m restrições há pelo menos,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

soluções básicas (que corresponde ao número de combinações para escolher m de n colunas), sendo este um número finito de possibilidades. O Teorema Fundamental produz uma solução óbvia, porém finita. Explorando melhor a técnica de prova bem quanto a afirmação do Teorema, o procedimento do Simplex é derivado.

Deve notar-se que a prova do Teorema Fundamental dada acima é de um caráter algébrico simples. Na próxima seção será apresentado uma interpretação geométrica deste Teorema, ou seja, em termos da teoria geral de conjuntos convexos.

2.4 RELAÇÕES DE CONVEXIDADE

O desenvolvimento feito até aqui do Teorema Fundamental foi baseado em propriedades de sistemas de equações lineares. Este resultado, entretanto, tem uma interpretação nos termos da teoria de conjuntos convexos, podendo levar não apenas uma derivação alternativa do Teorema como também dar um entendimento geométrico mais claro para o resultado. A principal ligação entre a teoria algébrica e a geométrica é a relação formal entre as soluções básicas factíveis na forma de pontos extremos de um poliedro. Um

ponto $x \in \mathbf{R}^n$ é um *Ponto Extremo* de um conjunto convexo K , se $x \in K$ e não pertence ao interior de um segmento de reta que une dois pontos de K . Esta correspondência é estabelecida a seguir:

Definição 2.5. *Seja um conjunto $C \in \mathbf{R}^m$. Dados dois pontos quaisquer x_1 e $x_2 \in C$ pertencentes ao conjunto e $\alpha \in [0, 1]$. Se $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ então, pode-se dizer que x_1 e x_2 são chamados pontos extremos e C é um conjunto convexo. Não obedecendo a relação, então é dito não convexo.*

Teorema 2.2. (Teorema da equivalência entre pontos extremos e soluções básicas) *Seja A uma matriz $(m \times n)$ de posto m e b um vetor $(m \times 1)$. Seja K o poliedro convexo, o conjunto dos pontos $K = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$. Um vetor x é um ponto extremo de P se, e somente se, x é uma solução básica factível.*

Prova: Supondo que $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ seja uma solução básica factível de $Ax = b$. Então:

$$x_1 a_1, x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b,$$

onde a_1, \dots, a_m são m colunas de A linearmente independentes. Suponha que x possa ser expresso como uma combinação convexa de dois pontos y e z de K , isto é:

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z, 0 < \alpha < 1, y \neq z.$$

Como todas as componentes de x, y , e z são não negativas e como $0 < \alpha < 1$, conclui-se imediatamente que as $(n - m)$ componentes de y e z são nulas. Então em particular, tem-se que:

$$y_1 a_1, y_2 a_2 + \dots + y_m a_m = b,$$

e

$$z_1 a_1, z_2 a_2 + \dots + z_m a_m = b.$$

Como os vetores a_1, a_2, \dots, a_m são linearmente independentes, tem-se que $x = y = z$. Logo x é um ponto extremo de K .

Reciprocamente, supondo que x é um ponto extremo de K . Assumindo que as componentes não nulas de x sejam as primeiras k componentes.

Então:

$$x_1 a_1, x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = b,$$

com $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$. Para mostrar que x é uma solução básica factível, deve-se mostrar que os vetores a_1, \dots, a_k são linearmente independentes. Desenvolvendo por

contradição. Supondo que a_1, a_2, \dots, a_k são linearmente independentes. Então, existe uma combinação linear não trivial que é nula, isto é:

$$y_1 a_1, y_2 a_2 + \dots + y_k a_k = 0.$$

Definindo o vetor $n \times 1$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0)$.

Como $x_i > 0$, com $1 \leq i \leq k$, é possível escolher ε tal que:

$$(x + \varepsilon y \geq 0, \quad x - \varepsilon y \geq 0).$$

Tem-se então que:

$$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y),$$

o que expressa x como uma combinação convexa de dois pontos distintos de K . Este fato não pode ocorrer, pois x é um ponto extremo de K . Logo, a_1, a_2, \dots, a_k são linearmente independentes e x é uma solução básica factível [5]. \square

Esta correspondência entre pontos extremos e solução básica factível permite provar uma propriedade geométrica que um poliedro convexo K define o conjunto de restrições de um Problema de Programação Linear.

Corolário 2.1. *Se conjunto convexo K correspondente a $Ax = b, x \geq 0$, não é vazio, então ele possui pelo menos um ponto extremo.*

Corolário 2.2. *Se existir uma solução ótima finita para o problema de programação linear, então existe uma solução ótima finita que é um ponto extremo do conjunto de restrições.*

Corolário 2.3. *O conjunto de restrições K correspondente a $Ax = b, x \geq 0$ possui, no máximo, um número finito de pontos extremos.*

Corolário 2.4. *Se um conjunto K de um politopo convexo de $Ax = b, x \geq 0$ é limitado, então K é um poliedro convexo, isto é, K consiste de pontos que são combinações lineares de um número finito de pontos.*

2.5 RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS LINEARES

Nesta seção serão apresentados, e resolvidos de forma gráfica, alguns exemplos de Problemas de Programação Linear contendo duas variáveis. Apesar de *ser restrita a problemas de pequeno porte*, a solução gráfica oferece elementos facilitadores para a compreensão dos procedimentos do Método Simplex.

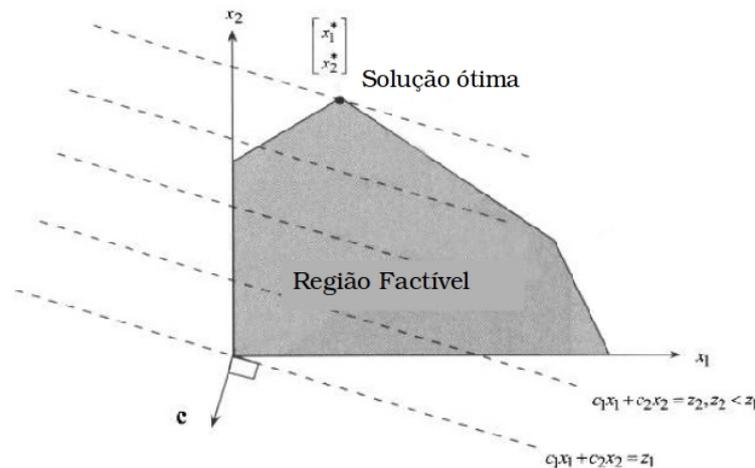
Considerando o seguinte Problema de Programa Linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && c^T x \\ & \text{Sujeito a} && Ax = b \\ & && x \geq 0, \end{aligned}$$

Nota-se que a região factível consiste em todos os vetores x que satisfazem $Ax = b$ e $x \geq 0$. Entre todos esses pontos, deseja-se encontrar uma solução mínima para $c^T x$. Nota-se também que os pontos tem o mesmo valor da função objetivo z que satisfaz a equação $c^T x = z$, ou seja, $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$. Se z é uma função a ser minimizada, então $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$ é uma reta e deve ser movida paralelamente a si mesma na direção que minimiza a função objetivo até encontrar um ponto ótimo. Esta direção é $-c$, e portanto, a reta é movida na direção de $-c$ tanto quanto possível, até alcançar o(s) ponto(s) da região factível.

Este processo é ilustrado na Figura 1. Percebe-se que o ponto ótimo é alcançado na linha $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z^*$, onde $z^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$, não poderá se mover além da direção $-c = (-c_1, -c_2)$, porque só poderá seguir até a direção da região factível. Ou seja, para um problema de maximização, a reta $c^T x = z$ deve ser movida tanto quanto possível na direção de c , mantendo-se dentro da região factível.

Figura 1 – Solução Geométrica



FONTE: Bazaraa et al, p.19, adaptado pela autora.

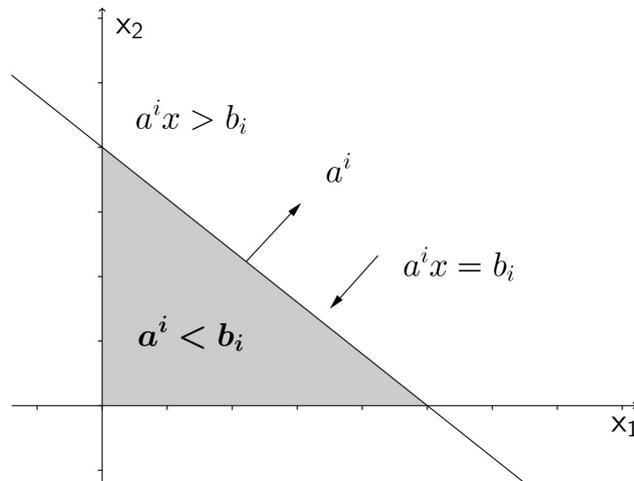
O processo anterior é conveniente para os problemas que têm duas variáveis e é impraticável para problemas com mais de três variáveis [11]. Vale a pena notar que o ponto ótimo x^* na Figura 1 é um dos cinco pontos dos vértices que são chamados de *pontos extremos*.

Em notação matricial, a restrição é $(a^i)^T x \leq b_i$, em que $(a^i)^T = (a_{i1} \ a_{i2})$ é a linha i da matriz A e a equação da reta é $(a^i)^T x = b_i$. Estas restrições dividem o espaço \mathbf{R}^2 em 3 partes:

- $x \in \mathbf{R}^2$ tal que $(a^i)^T x = b_i$;
- $x \in \mathbf{R}^2$ tal que $(a^i)^T x < b_i$;
- $x \in \mathbf{R}^2$ tal que $(a^i)^T x > b_i$.

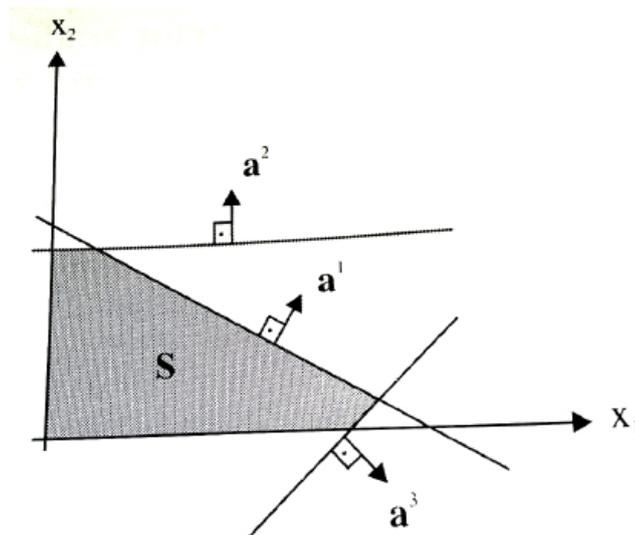
O gradiente a^i (coeficientes da equação da reta), é perpendicular à reta $(a^i)^T x = b_i$, e aponta para os pontos tais que $(a^i)^T x \leq b_i$ conforme a Figura 2.

Figura 2 – As três regiões do plano: $a^i x = b_i$, $a^i x < b_i$ e $a^i x > b_i$.



FONTE: Arenales et al,p.60, adaptado pela autora.

Figura 3 – Região factível de restrições do tipo $a^i x \leq b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$).



FONTE: Arenales et al,p.60, adaptado pela autora.

Finalmente, basta encontrar na região factível Figura 3) a solução x^* que minimize a função objetivo $f(x)$, isto é, a solução ótima. Observando a curva de nível $c^T x = f^*$ da

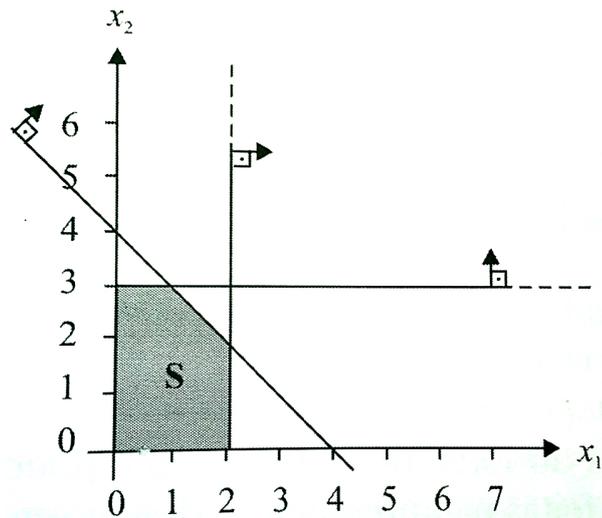
função f em que $f^* = f(x^*)$, observa-se que todo conjunto S está do lado para onde o gradiente aponta.

2.5.1 EXEMPLOS

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (a) \\ & x_1 \leq 2 \quad (b) \\ & x_2 \leq 3 \quad (c) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \quad (d) \end{aligned}$$

Na Figura 4, cada restrição está graficamente representada com sua respectiva reta (a), (b) e (c). Como são inequações, os pontos que as satisfazem definem semi-espacos, isto é, a região acima ou abaixo da reta, à direita ou à esquerda da reta. Por outro lado, a restrição (d) informa que a região está no primeiro quadrante do plano. Logo, tem-se a região factível denominada por $S = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ (região escurecida da Figura 4).

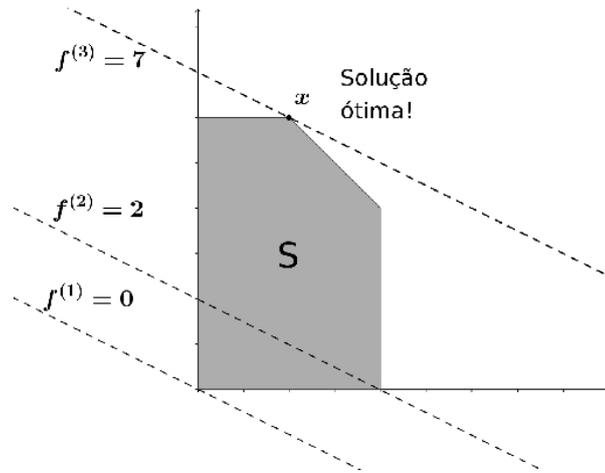
Figura 4 – Região Factível de S



FONTE: Arenales et al, p.57.

A função objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, definida no conjunto S , pode assumir infinitos valores. O conjunto de pontos que atribui o mesmo valor à função objetivo é chamado *curvas de nível*, representada na Figura 5 pela reta tracejada $f^{(1)} = 0$.

Figura 5 – Determinando a solução ótima x^* (Problema de Maximização)



FONTE: Arenales et al, p.58, adaptado pela autora.

Ao definir a região factível, o vetor dos coeficientes $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ou seja o vetor gradiente denotado por ∇f) é perpendicular à reta $x_1 + 2x_2 = 0$ e aponta no sentido em que a função f cresce. Com isso, pode-se visualizar que qualquer ponto de S atribui valor maior que zero à função f . Como pretende-se maximizar f , conclui-se, graficamente, que a solução factível $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ não é uma solução ótima.

Analisando outra solução factível $x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, em que a função objetivo vale $f^{(2)} = f(x^{(2)}) = 2$ e a curva de nível $x_1 + 2x_2 = 2$ está representada, na Figura 5 por $f^{(2)} = 2$. Como o gradiente não se altera, essa reta é paralela à anterior, $f^{(1)} = 0$. Novamente, o gradiente aponta no sentido em que f cresce e podemos identificar no gráfico outros pontos de S que atribuem valores maiores que 2 à função objetivo. Logo, $x^{(2)}$ não é uma solução ótima.

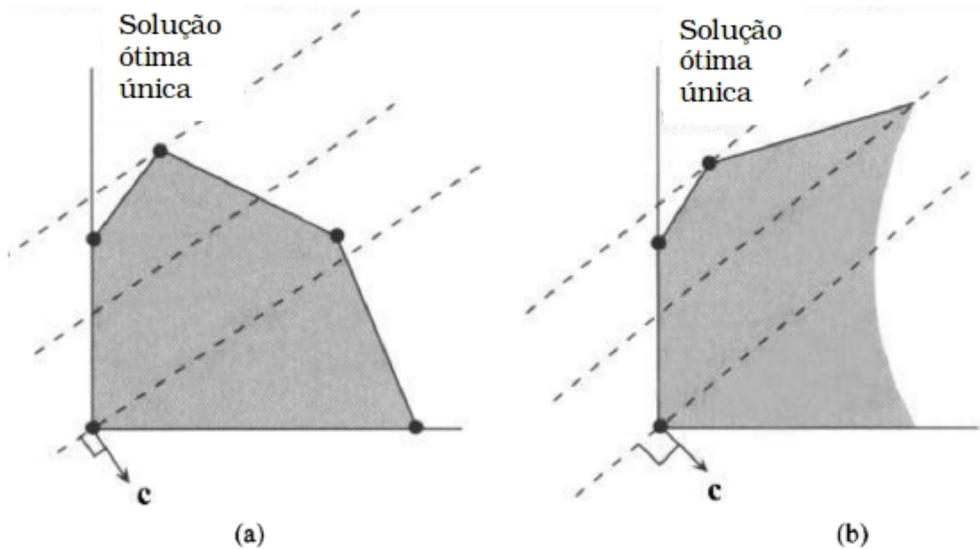
Continuando com esse procedimento (de identificar pontos que atribuem valores maiores à função objetivo), chega-se a um extremo $x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, para o qual $f(x^*) = 7$. A curva de nível $x_1 + 2x_2 = 7$ nos permite observar que todos os pontos de S atribuem valores menores do que 7 à função objetivo, uma vez que o gradiente aponta no sentido de crescimento de f . De outra forma, a solução x^* que satisfaz todas as restrições simultaneamente e maximiza $f(x)$ existe, e é única:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, tem-se uma solução ótima única. Outros casos podem ocorrer dependendo da estrutura do problema. Os casos possíveis que possam surgir são resumidos a seguir:

- *Solução ótima única*: Se a solução ótima é única, isto ocorre quando existe um ponto extremo, como ilustrado nas Figuras 6 (a) e (b). Na Figura 6(a) a região factível é limitada, e na Figura 6(b) a região factível não é limitada, embora em ambos os casos há uma única solução factível (no caso, solução mínima).

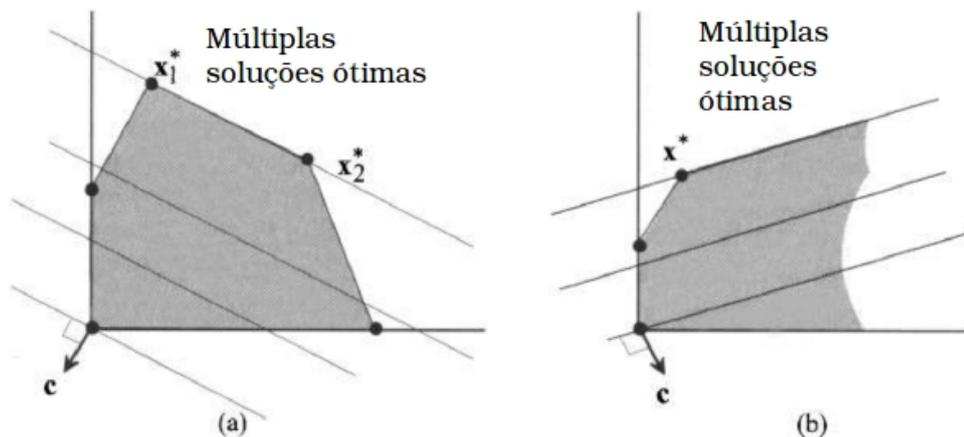
Figura 6 – Solução ótima única: (a) Região Limitada. (b) Região Ilimitada.



FONTE: Bazaraa et al, p.21, adaptado pela autora.

- *Múltiplas soluções ótimas*: Este caso é ilustrado na Figura 7. Nota-se que a Figura 7 (a) a região factível é limitada. As soluções ótimas consistem nos pontos do segmento de reta entre os vértices x_1^* e x_2^* . Pode-se ter também, um conjunto ilimitado de soluções ótimas, como a semi-reta indicada na Figura 7 (b).

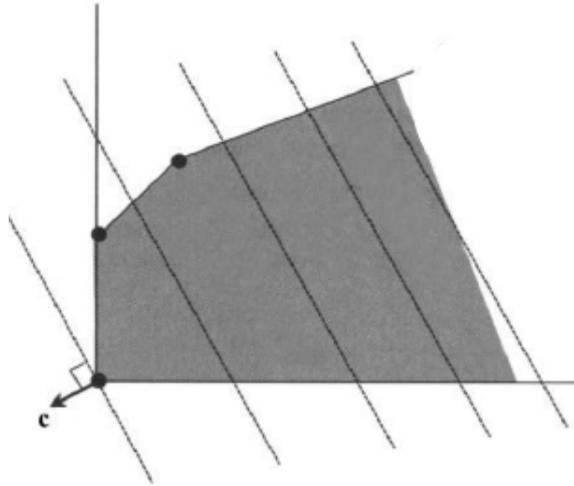
Figura 7 – Múltiplas soluções ótimas: (a) Região Limitada. (b) Região Ilimitada.



FONTE: Bazaraa et al, p.22, adaptado pela autora.

- *Solução ilimitada*: Este caso é ilustrado na Figura 8 onde tanto a região factível quanto o conjunto solução da função objetivo são ilimitados. Neste caso, um problema de otimização linear pode *não ter solução ótima*, apesar de ter soluções factíveis.

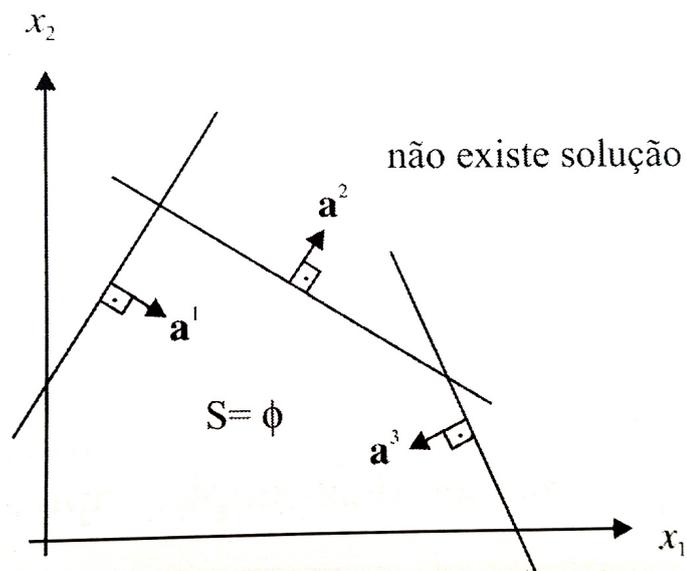
Figura 8 – Solução ilimitada.



FONTE: Bazaraa et al, p.22, adaptado pela autora.

- *Solução infactível*: A inexistência de solução ótima também pode ocorrer pela inexistência de solução factível, isto é, tem-se um *conjunto vazio de soluções*, ilustrado na Figura 9. Isto ocorre quando as restrições são conflitantes, não sendo possível satisfazer a função objetivo.

Figura 9 – Solução infactível



FONTE: Arenales et al, p.65.

2.6 DUALIDADE LINEAR

Para cada problema linear resolvido, existe um outro problema linear associado que pode ser resolvido simultaneamente. Este outro problema satisfaz algumas propriedades importantes. Por uma questão de referência, chama-se o problema original de Programação Linear de Problema *Primal*, e o seu correspondente de Problema *Dual*. Ambos os problemas são construídos a partir dos mesmo coeficientes de custos e suas restrições, mas de tal maneira que se um deles é de minimização, o outro é de maximização. A definição desses problemas é apresentado a seguir.

Dado o problema linear, chamado de *Primal*:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array} \quad (2.4)$$

define-se o correspondente *Dual* como o seguinte Problema Linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w = b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u \leq c. \end{array} \quad (2.5)$$

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ verificam-se as seguintes correspondências entre os dois problemas:

Tabela 1 – Correspondência entre o programa primal e o dual.

	PRIMAL	DUAL
Número de Restrições	m	n
Número de Variáveis	n	m
Variáveis e Restrições	variáveis ≥ 0	restrições de \leq
	restrições de igualdade	variáveis sem restrições
Matriz	A	A^T
Coefficiente de Custo	c	b
Termos Independentes	b	c

Fonte: Júdice et al, p. 28.

Definição 2.6. (Restrições duais e solução dual factível) *O conjunto de restrições $A^T u \leq c$ é chamado de restrições duais, e todo vetor u que satisfaça as restrições duais é chamado de solução dual factível.*

Supondo que o Problema Primal contém uma desigualdade. Dado que no Dual existem desigualdades do tipo \leq , supõem-se que essa desigualdade é da forma \geq . Então o problema linear terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x \\ \text{Sujeito a } & A_1 x \geq b_1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Incluindo a variável de folga x_{n+1} nessa desigualdade, obtem-se o programa equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x + 0x_{n+1} \\ \text{Sujeito a } & A_1 - x_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0, x_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

O dual desse problema é:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } w &= b_1 u_1 \\ \text{Sujeito a } & A_1^T u_1 \leq c \\ & -u_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto $u_1 \geq 0$. Assim, a variável dual correspondente a uma restrição de desigualdade \geq do primal tem restrição de sinal.

Considerando agora o caso de um programa linear com restrição de igualdade e uma variável sem restrição de sinal, isto é:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{Sujeito a } & a^T x + a_{n+1} x_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Se for escrito x_{n+1} na forma $x'_{n+1} - x''_{n+1}$ com $x'_{n+1}, x''_{n+1} \geq 0$, obtem-se o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x + c_{n+1} x'_{n+1} - c_{n+1} x''_{n+1} \\ \text{Sujeito a } & a^T x + a_{n+1} x'_{n+1} - a_{n+1} x''_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0, x'_{n+1}, x''_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

O dual tem então a seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar } w = & b_1 u_1 \\
\text{Sujeito a} & au_1 \leq c \\
& a_{n+1} u_1 \leq c_{n+1} \\
& -a_{n+1} \leq -c_{n+1}.
\end{array}$$

Das duas últimas igualdades tem-se:

$$a_{n+1} u_1 = c_{n+1}.$$

Ou seja, toda variável sem restrição de sinal no primal corresponde a uma igualdade no dual.

A seguir estabelecem-se algumas propriedades dos programas duais.

Teorema 2.3. *O dual do dual de um problema linear é um problema primal.*

Teorema 2.4. (Dualidade fraca) *Se $K_P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e $K_D = \{u \in \mathbb{R}^m : A^T u \leq c\}$ são os conjuntos admissíveis do primal e do dual respectivamente, então para quaisquer $x \in K_P$ e $u \in K_D$ tem-se que*

$$b^T u \leq c^T x.$$

Demonstração: Se $x \in K_P$ e $u \in K_D$ então:

$$b^T u = (Ax)^T u = x^T A^T u \leq x^T c = c^T x,$$

pois $x \geq 0$ e $A^T u \leq c$ [8]. \square

O Método Simplex é o algoritmo primal mais conhecido para a resolução de problemas lineares. No próximo capítulo será discutido com detalhes esse algoritmo.

3 O MÉTODO SIMPLEX

A idéia do Método Simplex é partir de uma solução básica factível (isto é, um ponto extremo) do conjunto de restrições de um problema na forma padrão, para outra solução básica factível, melhorando os valores da função objetivo até um ponto ótimo.

3.1 PIVOTEAMENTO

Considerando o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $m \geq n$. Escrevendo na forma de matriz tem-se:

$$Ax = b.$$

Interpretando o espaço E^n como o conjunto de m relações lineares que podem ser solucionadas por um vetor x . Assim, denotando por a^i as linhas i da matriz A , pode-se expressar (3.1) como:

$$\begin{aligned}
 a^1x &= b_1 \\
 a^2x &= b_2 \\
 \vdots & \\
 a^m x &= b_m.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta é uma interpretação mais natural de (3.1) como um conjunto de m equações.

Se as equações (3.2) são linearmente independentes, pode-se substituir uma equação dada por qualquer múltiplo dele mesmo não nulo, com qualquer combinação linear de outras equações no sistema. Isto leva ao conhecido sistema de eliminação de Gauss, onde equações múltiplas são adequadamente substituídas de outra para compor um forma triangular ou canônica. Assim, se as primeiras m colunas de a são linearmente independentes, então o sistema (3.1) pode, após uma sequência de multiplicações e subtrações, ser convertido na

forma canônica seguinte:

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_1 & & +y_{1,m+1}x_{m+1} & +y_{1,m+2}x_{m+2} & + \dots & +y_{1,n}x_n & = y_{10} \\
 x_2 & & +y_{2,m+1}x_{m+1} & +y_{2,m+2}x_{m+2} & + \dots & +y_{2,n}x_n & = y_{20} \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 x_m & +y_{m,m+1}x_{m+1} & & + \dots & & +y_{m,n}x_n & = y_{m0}
 \end{array} \tag{3.3}$$

Na representação canônica desse sistema, as variáveis x_1, x_2, \dots, x_m são chamadas de *básicas* e as outras são as *não básicas*. Um solução básica desse sistema é da forma:

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0} \quad x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0,$$

ou na forma vetorial $x = (y_0, 0)$ onde y_0 é da forma $(m \times 1)$ e o vetor 0 é da forma $(n - m, \times 1)$.

Também é comum representar o sistema (3.3) na forma de matriz ou *tableau*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\
 0 & 1 & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}.
 \end{array} \tag{3.4}$$

Uma questão resolvida por pivoteamento tem a seguinte forma: dado um sistema da forma canônica, supondo uma variável básica seja não-básica e uma variável não básica seja básica; qual é a nova forma canônica correspondente ao novo conjunto de variáveis básicas? O procedimento é simples. Seja o sistema (3.3), substituindo a variável básica $x_p, 1 \leq p \leq m$, pela variável não básica x_q . Isto pode ser feito se, e somente se, y_{pq} é diferente de zero; isto é possível pela divisão da linha p por y_{pq} obtendo uma unidade como coeficiente de x_q na equação de ordem p , e então subtraindo múltiplos adequados da linha p de cada uma das linhas a fim de conseguir zero como coeficiente de x_q em todas as outras equações. Isto transforma a coluna de ordem q do tableau em valor zero, exceto a variável de ordem p (que é unitária), e não afetando as colunas das outras variáveis básicas. Chamando os novos coeficientes da forma canônica por y'_{ij} , teremos explicitamente:

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, & i \neq p \\ y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \end{cases}$$

A equação acima são as equações pivô que surgem frequentemente na Programação Linear. O elemento y_{pq} é chamado no sistema original de *elemento pivô*.

3.2 PONTOS EXTREMOS ADJACENTES

Existem condições especiais que devem ser consideradas a fim de que a operação de pivoteamento mantenha a factibilidade. A seguir, será visto como é possível seleccionar os elementos pivôs, para transformar uma solução básica factível em outra.

Ao mostrar que, embora não seja possível especificar qual par de variáveis serão trocadas a fim de manter a não negatividade, é possível especificar qual variável não básica deverá se tornar a básica, e conseqüentemente, qual variável básica irá se tornar não básica.

Um argumento significativo, que pode simplificar vários pressupostos da Programação Linear é descrito abaixo:

Definição 3.1. (Solução não degenerada) *Cada solução básica factível de $Ax=b$, com $x_B > 0$ é uma solução básica factível não degenerada.*

Essa definição é utilizada durante todo o desenvolvimento do Método Simplex, desde que as soluções sejam substituídas adequadamente. A seguir, será visto como determinar quais variáveis serão trocadas, a fim de determinar melhores soluções para o sistema.

3.2.1 DETERMINANDO QUAL VARIÁVEL SAIRÁ DA BASE

Considerando $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ como solução básica factível, ou como representação equivalente:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b. \quad (3.5)$$

Com base na Definição 3.1, $x_i > 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$. Considerando também a representação da variável a_q , $q > m$. Representando a variável na forma de base tem-se:

$$a_q = y_{1q} a_1 + y_{2q} a_2 + \dots + y_{mq} a_m.$$

Multiplicando a expressão acima por $\varepsilon \geq 0$ e subtraindo de (3.5) obtêm-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_{1q}) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_{2q}) a_2 + \dots + (x_m - \varepsilon y_{mq}) a_m + \varepsilon a_q = b. \quad (3.6)$$

Assim, para qualquer $\varepsilon \geq 0$ a expressão acima resulta em b como uma combinação linear de no máximo $m + 1$ variáveis. Para $\varepsilon = 0$ tem-se uma solução básica factível. A medida que ε aumenta, os coeficientes de a_q também aumentam, e para valores suficientemente pequenos de ε , a expressão tem uma solução factível, porém não básica. Os coeficientes das outras variáveis irão aumentar ou diminuir linearmente a medida que ε é

aumentado. Se nenhuma variável diminuir, pode-se igualar os valores correspondentes ao primeiro lugar onde um (ou mais) coeficientes desaparecem. Isto é:

$$\varepsilon = \min_{(i)} \{x_i/y_{iq} : y_{iq} > 0\}. \quad (3.7)$$

Neste caso, tem-se uma nova solução básica factível com o vetor a_q substituindo o vetor a_p onde p corresponde ao índice mínimo em (3.7). Se o mínimo na (3.7) é conseguido por mais que índice i então a nova solução é degenerada e qualquer uma das variáveis com componente zero pode ser considerado como sendo o que deixou a base.

3.3 DETERMINANDO A SOLUÇÃO FACTÍVEL MÍNIMA

A ideia do Método Simplex é seleccionar uma coluna de modo que a nova solução básica factível para a função objetivo seja menor que a anterior. Através de cálculos elementares, que serão descritos abaixo, é possível determinar qual variável entrará na base para que o valor da função objetivo diminua, e depois de alguns cálculos, é possível determinar qual variável irá sair a fim de manter a factibilidade. A expressão *entrar na base* significa fazer uma variável não básica deixar o valor nulo e crescer até o máximo valor que lhe seja possível e, portanto, positiva ou eventualmente nula.

Supondo ter a seguinte solução básica factível:

$$(x_b, 0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}, 0, 0, \dots, 0),$$

junto com o tableau tem-se um matriz identidade nas primeiras m colunas como mostradas abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n & b \\ 1 & 0 & & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}. \end{array} \quad (3.8)$$

O valor da função objetivo para qualquer valor de x é:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (3.9)$$

e conseqüentemente para a solução básica, o valor correspondente é:

$$z_0 = c_B^T x_B, \quad (3.10)$$

onde $c_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.

Embora seja natural usar a solução básica $(x_B, 0)$ quando se tem um tableau (3.8), se valores arbitrários são atribuídos para $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, as variáveis restantes podem ser resolvidas como:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j \\ x_2 &= y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j}x_j \\ &\vdots \\ x_m &= y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando (3.9) pode-se subtrair x_1, x_2, \dots, x_m da forma geral (3.11). Fazendo isso obtem-se:

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n, \tag{3.12}$$

onde

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + \dots + y_{mj}c_m, \quad m+1 \leq j \leq n, \tag{3.13}$$

que é uma relação fundamental para determinar a coluna pivô. Um ponto importante é que, esta equação oferece o valor da função objetivo z para qualquer solução de $Ax = b$ em termos das variáveis x_{m+1}, \dots, x_n . A partir disso, pode-se determinar se existe vantagem em trocar a solução básica por uma outra variável não básica. Por exemplo, se $c_j - z_j$ é negativo para qualquer $j, m+1 \leq j \leq n$, então ao aumentar x_j de zero para algum valor positivo que diminua o custo total, tem-se uma solução melhor. As fórmulas (3.12) e (3.13) proporcionam as mudanças que seriam necessárias nos valores das variáveis básicas x_1, x_2, \dots, x_m para satisfazer as mudanças em x_j .

Olhando para essa relação de uma outra maneira: considerando y_i como sendo a i -ésima coluna do tableau. Assim, qualquer solução satisfaz

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m = y_0 - x_{m+1} y_{m+1} - x_{m+2} y_{m+2} - \dots - x_n y_n.$$

Calculando o produto interno desta equação com o vetor C_B^T , tem-se:

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = c_B^T y_0 - \sum_{j=m+1}^n z_j x_j,$$

onde $z_j = c_B^T y_j$. Então adicionando $\sum_{j=m+1}^n c_j x_j$ em ambos os membros, tem-se:

$$c^T x = z_0 + \sum_{j=m+1}^n (c_j - z_j) x_j, \quad (3.14)$$

como anteriormente.

Teorema 3.1. (Melhor solução básica factível) *Seja z_0 uma solução básica factível não degenerada, supondo para algum j tal que $c_j - z_j < 0$. Então, existe uma solução básica factível com valor $z < z_0$. Se a coluna a_j puder ser substituída por algum vetor na base original que obtenha uma nova solução básica factível, esta nova solução terá $z < z_0$. Se a_j não puder ser substituída, então o conjunto K de soluções factíveis é não limitado e a função objetivo pode se tornar arbitrariamente pequena.*

Prova: O resultado é uma consequência imediata da discussão anterior. Seja $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ a solução básica factível com valor z_0 com $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$. Então nesse caso, tem-se uma nova solução básica factível na forma de $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, 0, 0, \dots, 0)$ com $x'_{m+1} > 0$, substituindo em (3.12) tem-se

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0,$$

e conseqüentemente $z < z_0$ para qualquer solução. Deseja-se x'_{m+1} maior possível. Como x'_{m+1} é crescente, as outras componentes podem crescer, permanecerem constantes, ou decrescer. Assim, x'_{m+1} pode crescer até $x'_i = 0, i \leq m$ onde obterá uma nova solução básica factível, ou se nenhum x'_i for decrescente, x'_{m+1} pode crescer ilimitadamente [5]. \square

Foi visto que, em qualquer etapa $c_j - z_j < 0$, para algum j , é possível ter na função objetivo x_j positivo e crescente. A última questão retrata se $c_j - z_j \geq 0$, para todo j , indica otimalidade.

Teorema 3.2. (Condição de otimalidade) *Se para alguma solução básica factível $c_j - z_j \geq 0$ para todo j , então a solução é ótima.*

A prova segue de (3.12), com qualquer solução básica factível tem-se que $x_i \geq 0$ para todo i , e conseqüentemente o valor de z na função objetivo satisfará $z - z_0 \geq 0$ [5]. \square

Como as constantes $c_j - z_j$ desempenham um papel importante no desenvolvimento do Método Simplex, é conveniente utilizar a notação abreviada $r_j = c_j - z_j$ e r_j se referem como os *coeficientes de custo relativo*, ou também, *coeficiente de custo reduzido*. Esses coeficientes expressam o custo relativo de uma base.

3.4 SOLUÇÕES DEGENERADAS

É possível que, no decorrer do processo Simplex, possam aparecer soluções básicas factíveis degeneradas. Muitas vezes, essas soluções podem ser manipuladas como uma solução básica factível não degenerada. No entanto, é possível que depois que uma nova coluna q seja selecionada para entrar na base, a razão mínima entre $\frac{y_{i0}}{y_{iq}}$ seja igual a zero, o que implica que a variável de valor nula seja a variável a sair da base. Isto significa que a nova variável x_q irá entrar com valor nulo, a função objetivo não irá decrescer, e a nova solução básica factível também será uma solução degenerada. Este processo pode ocorrer por várias etapas até que a solução original degenerada seja obtida novamente. Isto gera um ciclo que poderá se repetir indefinidamente.

Uma das formas de resolver o problema de solução degenerada é fazer uma perturbação no valor.

3.5 O MÉTODO SIMPLEX NO FORMATO DE TABLEAU

A cada iteração, o próximo conjunto de sistemas de equações lineares precisa solucionar: $Bx_B = b$, $wB = c_B^T$, e $By_k = a_k$. Vários procedimentos para solucionar e melhorar este sistema nos levará a algoritmos diferentes. Nesta seção será apresentado o formato de tableau [9].

Seja uma solução inicial básica factível x com base B . O Problema de Programação Linear pode ser representado como:

$$\text{Minimizar } z \quad (3.15)$$

$$\text{sujeito a } z - c_B^T x_B - c_N^T x_N = 0 \quad (3.16)$$

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (3.17)$$

$$x_B, x_N \geq 0. \quad (3.18)$$

De cada equação de (3.15) tem-se:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \quad (3.19)$$

Multiplicando (3.19) por c_B^T e adicionando na equação (3.16) tem-se:

$$z + 0x_B + (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N = c_B^T B^{-1}b, \quad (3.20)$$

Como $x_N = 0$, e pelas equações (3.19) e (3.20) tem-se $x_B = B^{-1}b$ e $z = c_B^T B^{-1}b$. Também a partir de (3.19) e (3.20) pode-se representar convenientemente a atual solução

básica factível com a base B nos seguintes tableau. Representa-se por z como sendo uma variável (básica) a ser minimizada. A linha objetivo será referenciada como linha 0 e as demais como linha de 1 a m . A coluna do lado direito indicará os valores das variáveis básicas (incluindo a função objetivo). As variáveis básicas são identificadas na coluna da esquerda, como a seguir:

Tabela 2 – Como organizar o problema no formato tableau

	z	x_B	x_N	
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
z	1	0	$c_B^T B^{-1}N - c_N$	$c_B^T B^{-1}b$

linhas de 1 a m
linha 0

Fonte: Bazaraa et al, p.126, adaptada pela autora.

O tableau no qual z e x_B será resolvido em termos de x_N é chamado de *forma canônica*. Este tableau não fornece somente o valor da função objetivo $c_B^T B^{-1}b$ e das variáveis básicas $B^{-1}b$ na coluna da direita, como também fornece todas as informações necessárias para proceder com o Método Simplex. A linha de custos apresenta $c_B^T B^{-1}N - c_N^T$, que consiste nos valores de $(z_j - c_j)$ das variáveis não básicas. A linha zero informa se há uma solução ótima (se cada $z_j - c_j \leq 0$), e qual variável não básica irá aumentar caso contrário. Se x_k é crescente, então o vetor $y_k = B^{-1}a_k$ que aparece no tableau na linha de 1 a m abaixo da variável x_k , ajudará a determinar por quanto x_k pode aumentar. Se $y_k \leq 0$, então x_k pode aumentar indefinidamente, e o valor ótimo da função objetivo é ilimitado. Por outro lado, se y_k tem pelo menos um componente positivo, o crescimento em x_k será interrompido por alguma variável básica atual, que torna-se zero. O teste da razão mínima (que pode ser realizada desde que $B^{-1} = \bar{b}$ e y_k sejam ambas possíveis no tableau) determina o valor da variável de bloqueio. Deseja-se um esquema que:

1. Atualize as variáveis básicas e seus valores;
2. Atualize os valores de $(z_j - c_j)$ das novas variáveis não básicas;
3. Atualize a coluna y_j .

3.5.1 PIVOTEAMENTO NO TABLEAU

As operações acima podem ser executadas simultaneamente por uma operação de pivoteamento. Se x_k entrar na base e x_{B_r} sair da base, então o *pivoteamento* pode ser iniciado como a seguir:

1. Divida a linha r por y_{rk} ;

- Para $i = 1, \dots, m$ e $i \neq r$, atualize a linha i adicionando a ela $-y_{ik}$ vezes a nova linha r ;
- Atualize a linha zero adicionando a ela $c_k - z_k$ vezes a linha r . As próximas Tabelas 3 e 4 representam, respectivamente, a situação antes e depois da operação de pivoteamento.

Tabela 3 – Tableau antes do pivoteamento

	x_{B_1}	\dots	x_{B_r}	\dots	x_{B_m}	x_j	\dots	x_k	\dots	
x_{B_1}	1	\dots	0	\dots	0	y_{1j}	\dots	y_{1k}	\dots	\bar{b}_1
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_{B_r}	0	\dots	1	\dots	0	y_{rj}	\dots	y_{rk}	\dots	\bar{b}_r
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_{B_m}	0	\dots	0	\dots	1	y_{mj}	\dots	y_{mk}	\dots	\bar{b}_m
z	0	\dots	0	\dots	0	$z_j - c_j$	\dots	$z_k - c_k$	\dots	$c_B^T \bar{b}$

FONTE: Bazaraa et al,p.127.

Examinando as implicações da operação de pivoteamento:

- A variável x_k entrou na base e x_{B_r} deixou a base. Isto fica registrado no lado esquerdo do tableau pela troca de x_{B_r} com x_k . Para a próxima iteração, a nova x_{B_r} é agora x_k .
- O lado direito do tableau representa agora os valores atualizados das variáveis básicas (lembrando que $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$). As variáveis não básicas tem valor igual a zero.
- Supondo que as colunas originais das novas variáveis básicas e não básicas sejam \hat{B} e \hat{N} respectivamente. Através de uma sequência de operações nas linhas elementares (de acordo com as regras de pivoteamento de Gauss, caracterizada por pivoteamento nas iterações intermediárias), o tableau original torna-se um tableau atualizado onde \hat{B} é substituído pela matriz identidade (I). Assim, este novo pivoteamento resulta em um novo tableau onde a nova $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ abaixo das variáveis não básicas e um conjunto de $(z_j - c_j)$ valores atualizados para as novas variáveis não básicas, como também os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo.

Tabela 4 – Tableau após o pivoteamento

	x_{B_1}	\dots	x_{B_r}	\dots	x_{B_m}	x_j	x_k	
x_{B_1}	1	\dots	$\frac{-y_{1k}}{y_{rk}}$	\dots	0	$y_{1j} - \frac{y_{rj}y_{1k}}{y_{rk}}$	\dots	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}\bar{b}_r}{y_{rk}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{B_r}	0	\dots	1	\dots	0	$-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	\dots	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{B_m}	0	\dots	$\frac{-y_{mk}}{y_{rk}}$	\dots	1	$y_{mj} - \frac{y_{rj}y_{mk}}{y_{rk}}$	\dots	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}\bar{b}_r}{y_{rk}}$
Z	0	\dots	$\frac{C_k - z_k}{y_{rk}}$	\dots	0	$z_j - C_j - \frac{y_{rj}(z_k - C_k)}{y_{rk}}$	\dots	$C_B^T \bar{b} - (z_k - C_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

FONTE: Bazaraa et al, p.128.

4 PROGRAMAÇÃO LINEAR NA RADIOTERAPIA

4.1 BREVE RELATO HISTÓRICO SOBRE A RADIOTERAPIA

Nas últimas décadas, o impacto do câncer na sociedade ganhou grande dimensão, tornando-se uma preocupação mundial, sendo no Brasil uma das primeiras posições nas taxas de mortalidade das macrorregiões, ao lado das doenças do aparelho circulatório, causas externas, entre outras. O câncer é uma doença que tem início quando ocorre uma mutação genética no DNA da célula, onde o mecanismo de controle do crescimento normal do tecido celular é alterado. As modalidades existentes de tratamento do câncer são: cirurgia, radioterapia e quimioterapia.

O tratamento por radioterapia tem como objetivo a eliminação das células cancerígenas através de radiação ou alívio dos sintomas, e ao mesmo tempo procura evitar a destruição de células vizinhas saudáveis também afetadas pela radiação [12].

Do ponto de vista matemático, o desafio consiste em emitir uma alta dosagem de radiação no tumor, suficiente para sua eliminação e interrupção do crescimento de células tumorais, e simultaneamente, minimizar a radiação nas regiões vizinhas compostas de tecido saudável, reduzindo ao máximo as complicações nestas regiões que são muitas vezes críticas.

No início do uso da radioterapia, administrava-se tanta dose de radiação quanto se julgava o paciente ser capaz de suportar. O limite da dose era, geralmente, estabelecido pela tolerância da pele [13].

Há dois tipos principais de radioterapia: a teleterapia e a braquiterapia. Dar-se-á mais ênfase neste trabalho ao primeiro tipo. Neste caso, nem a fonte de radiação nem o aparelho que a emite, ficam em contato direto com o paciente. Por isso, a radiação atinge, além do tumor, todos os órgãos e tecidos que estiverem no caminho. Já na braquiterapia, a fonte de radiação é colocada no interior do paciente, na região que deve receber o tratamento. É uma espécie de implante radioativo não-permanente [6].

Usualmente para o tratamento usa-se um feixe, com forma retangular, que passa através dos diferentes tipos de tecidos do corpo do paciente, e dependendo da atenuação e da profundidade dos tecidos, uma grande quantidade de energia é depositada em diferentes pontos dentro do corpo. Para o tratamento de radioterapia deve-se levar em conta a distribuição de dose profunda no eixo central e caracterizar o feixe de radiação. Para se representar e ter-se noção da distribuição e absorção de dose ao longo do volume e no plano faz-se a curva de isodose, que são linhas que representam pontos de mesma dose, em

um determinado arranjo de feixes de radiação. Para o cálculo matemático, são utilizados dados clínicos do tumor para cada paciente tratado. Estes cálculos podem ser auxiliados pelos modelos matemáticos através da Programação Linear.

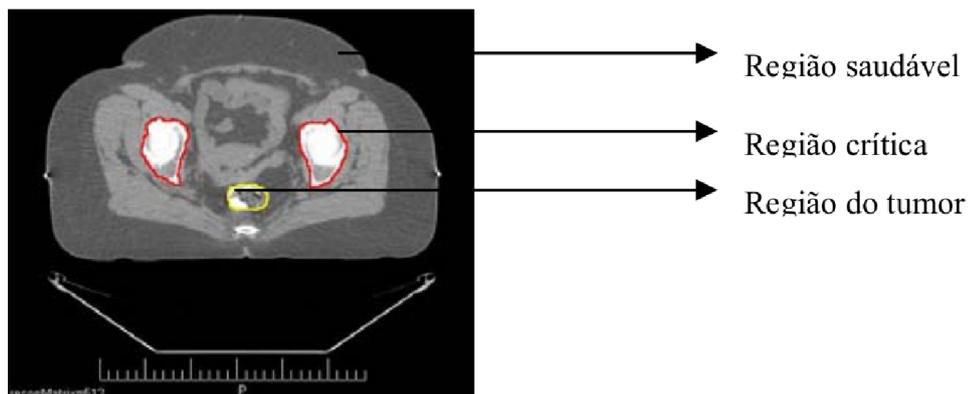
4.2 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Quando o câncer é diagnosticado e há a indicação médica para o tratamento por radioterapia, são realizados vários exames no paciente, com a finalidade de conhecer a localização, forma, e volume do tumor, bem como os tecidos críticos presentes na região a ser tratada. São feitos exames de tomografia computadorizada para uma coleta de dados segura, e na Radiocirurgia, é necessário juntamente com a tomografia computadorizada, um exame de ressonância magnética.

Com base nesses dados, a dose a ser recebida no tumor e o volume a ser irradiado podem ser prescritos pelo médico radioterapeuta. Juntamente com um físico, o radioterapeuta pode, então, através da análise das curvas de isodose, definir qual melhor tipo de tratamento e a técnica a ser utilizada.

Após a obtenção das imagens através da tomografia computadorizada ou da ressonância magnética, a dose mínima a ser aplicada no tumor é prescrita assim como as doses máximas que os tecidos críticos e saudáveis podem receber. Através dessas imagens, faz-se a seleção das estruturas anatômicas de interesse.

Figura 10 – Imagem de tomografia computadorizada com estruturas anatômicas selecionadas.



FONTE: Fernandes,p.53.

Com as imagens obtidas, as estruturas de interesse podem ser então mapeadas (lesão e tecido crítico) através de uma divisão em pixels. Cada pixel é relacionado a uma densidade eletrônica e recebe coordenadas específicas (i, j) , as quais serão usadas na criação do planejamento conformacional ou planejamento 3D do tratamento, como mostra a Figura 11.

cada pixel de coordenadas (i, j) . Desta forma, pode-se estimar a dose a ser recebida em cada tecido do paciente (crítico, saudável e tumor), na região a ser tratada, preocupando-se em não exceder a dose suportada pelos tecidos críticos e saudável e emitir a dose suficiente de forma a eliminar o tumor.

Este modelo pode ser representado pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m D_{ij} \\
 \text{Sujeito a} \quad & D_{ij} = \sum_{p=1}^n w_p A_{ij}^p \quad \forall (i, j) \\
 & l \leq D_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Gamma \\
 & w \geq 0,
 \end{aligned}$$

onde,

- D_{ij} representa a dosagem total recebida pelo paciente na posição (i, j) ;
- A_{ij} representa a dosagem nominal emitida pelo raio p na posição (i, j) ;
- w representa a ponderação da dosagem emitida pelos raios;
- l representa a dosagem mínima a ser recebida pelo tumor;
- Γ representa o subconjunto de posições onde se encontra o tumor;
- n representa o número de raios;
- m representa o número total de pixels.

Definindo os seguintes subconjuntos:

- R representa o subconjunto de posições onde se encontra tecido crítico (saudável) ou estrutura crítica;
- N representa o subconjunto de posições onde se encontram os demais tecidos saudáveis;

é possível formular um modelo com ponderações em cada região do paciente privilegiando ou penalizando algumas áreas à quantidade de dosagem a ser recebida.

Feito a delimitação das estruturas, o plano de tratamento deve ser elaborado de forma a administrar a dose de radiação no tumor, buscando assim a homogeneidade do

Tabela 5 – Estrutura da matriz de deposição de dose A

		(a, i)												
→	a	1				2				...	k			
→	i	1	2	...	η	1	2	...	η		1	2	...	η
p	1	$A_{(p,a,i)}$												
	2													
	.													
	.													
	m													

plano de tratamento, de acordo com a determinação da prescrição de dose das regiões de interesse.

Holder [2] formula alguns modelos de Programação Linear a partir de ponderações em cada região da imagem do paciente, considerando ou privilegiando o tipo de tecido a ser exposto às doses de radiação.

Sendo $x_{(a,i)}$ a dose ao longo do i -ésimo subfeixe, para $i = 1, 2, \dots, \eta$ do a -ésimo ângulo, para $a = 1, 2, \dots, k$ e $d_{(p,a,i)}$ a distância entre a fonte posicionada no ângulo a emitindo o subfeixe i (de dose $x_{(a,i)}$) e o pixel p . A deposição de dose no pixel p devido ao i -ésimo subfeixe do a -ésimo ângulo, $A_{(p,a,i)}$, é definida como:

$$A_{(p,a,i)} = S e^{-\mu d_{(p,a,i)}}, \quad (4.1)$$

O termo S corresponde a área geométrica do pixel p que recebe a dose $x_{(a,i)}$. Com os componente de $A_{(p,a,i)}$ pode-se construir a matriz de deposição de dose A , onde as linhas de A são indexadas por p e as colunas são indexadas por (a, i) , conforme mostra a matriz (4.2), desta forma, a matriz A tem dimensão $m \times k\eta$.

O fator $e^{-\mu d_{(p,a,i)}}$ mede a atenuação da radiação sobre o tecido, e os valores deste coeficiente de atenuação (μ) dependem da energia do raio. O coeficiente de atenuação mede a característica do tecido com relação a sua densidade que são grandezas proporcionais, isto é, quanto menor a densidade do tecido, menos o coeficiente de atenuação.

A matriz dose de propagação sem atenuação ($\mu = 0$) do exemplo da Figura 12, é

dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Os elementos de x podem ser ordenados da seguinte forma:

$$[x_{(1,1)} \ x_{(1,2)} \ \dots \ x_{(1,\eta)} \ x_{(2,1)} \ \dots \ x_{(2,\eta)} \ \dots \ x_{(k,1)} \ \dots \ x_{(k,\eta)}], \quad (4.3)$$

assim, a dose de radiação no pixel p é o p -ésimo componente de:

$$A^*x. \quad (4.4)$$

Embora a matriz de propagação da dose permita modelar facilmente os limites superior e inferior da radiação para algum pixel na imagem, elaborar um plano de tratamento não é uma tarefa trivial. Por exemplo: um plano de tratamento pode prescrever que o tumor não receba menos do que 80 Gy, onde Gy é a dose absorvida, usualmente medida em joules por quilograma (J/kg), também denominada gray (Gy): 1Gy=1J/kg. Por outro lado, o plano de tratamento pode não permitir que alguma estrutura crítica receba mais do que 40 Gy [7].

A maioria das pesquisas tem utilizado modelos de otimização com restrições lineares, com uma das duas funções objetivos mais evidentes, maximização da dose no tumor ou minimização da dose na estrutura crítica. Uma vez que esta maximização leva geralmente a altas doses, outros trabalhos buscam maximizar a dose mínima do tumor ou minimizar a dose máxima da estrutura crítica [4].

As metas listadas abaixo indicam que este problema tem uma grande quantidade de parâmetros a considerar na decisão do que seria desejável para um plano de tratamento:

- Transmitir uma dose uniformemente letal na região do tumor;
- Transmitir uma radiação tão pequena quanto possível na estrutura crítica;
- Obter uma dose total tão pequena quanto possível;

- Reduzir a frequência de doses altas fora da região do tumor;
- Controlar o número de raios utilizados no plano de tratamento.

Na busca de doses uniformes, Holder propôs um modelo de otimização linear para auxiliar no planejamento ótimo de Radiocirurgia. Este modelo tem sido muito citado na literatura por apresentar bons resultados em termos de planos conformais. Assim optou-se pelo estudo e implementação deste modelo, que será discutido a seguir.

Seja, m_T o número de pixels do tumor, m_C o número de pixels da estrutura crítica e m_G o número de pixels do tecido saudável. Logo o número total de pixels é dado por $m = m_G + m_T + m_C$. Assim, no modelo de Holder, a matriz de deposição de dose A é dividida em três partes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_T \\ A_C \\ A_G \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Em que, as linhas da matriz de deposição de dose são reorganizadas de forma que T está relacionado ao conjunto de pixels que compreendem a lesão ou tumor, C ao conjunto de pixels compreendidos pelo tecido crítico ou órgãos de risco e G ao conjunto de pixels do tecido saudável.

Assim, a imagem seccional da Tomografia Computadorizada é convertida em uma matriz de pixels, que são classificados para representar tumorais ou não-tumorais. Devido à divisão em pixels, no modelo que será apresentado, a prescrição da dose é dada em forma de vetor e definida por quatro limites, com a seguinte notação:

- u_t representa o vetor de limite superior para radiação no tumor ($u_t \in \mathfrak{R}^{m_T}$);
- l_t representa o vetor de limite inferior para radiação no tumor ($l_t \in \mathfrak{R}^{m_T}$);
- u_c representa o vetor de limite superior para radiação na estrutura crítica ($u_c \in \mathfrak{R}^{m_C}$);
- u_g representa o vetor de limite superior para radiação no restante de tecido saudável ($u_g \in \mathfrak{R}^{m_G}$).

Obviamente tem-se que $0 < l_t \leq u_t$, $u_c \geq 0$, e $u_g \geq 0$. Se uma dose letal uniforme é transmitida ao tumor, o limite superior e inferior para os pixels do tumor são obtidos através das metas estabelecidas.

Supondo que as metas estabelecidas para uma célula sejam t_g , os valores de u_{t_i} e l_{t_i} são geralmente $(1 + \varepsilon)t_g$ e $(1 - \varepsilon)t_g$, respectivamente, onde ε é a porcentagem da variação

para a dosagem do tumor e é denominado *nível de uniformidade do tumor*. Valores típicos de ε encontrados na literatura vão de 0,02 à 0,15.

O vetor u_g representa a maior quantidade de radiação permitida para algum pixel (saudável). Em geral tecidos saudáveis não devem receber mais do que 10% da dose estabelecida para o tumor. Ou seja, $u_g = t_g(1 + 0,10)$.

As linhas da matriz de deposição de dose são reagrupadas nas linhas que representam as regiões cancerosas, as estruturas críticas e o restante de tecido saudável. Esta reordenação é representada pelas sub-matrizes A_T , A_C e A_G conforme indicado em (4.5).

Os subfeixes que não atingem o tumor são removidos pela eliminação das colunas de A que tem o vetor zero na coluna correspondente da submatriz A_T . Assim, sem perda de generalidade, consira-se que a matriz A_T não tem colunas nulas. Portanto tem-se $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $A_T \in \mathfrak{R}^{m_T \times n}$, $A_C \in \mathfrak{R}^{m_C \times n}$, e $A_G \in \mathfrak{R}^{m_G \times n}$.

4.3 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO LINEAR

O modelo proposto por [2] admite um conjunto de restrições sobre as limitações de quantidade de dose em cada tipo de tecido. A função objetivo é representada pela soma ponderada de três metas:

- $l^T t$, que mede o quanto falta para que o plano encontrado consiga aplicar a dose mínima na região do tumor;
- $u_c^T c$ que mede a quantidade de radiação acima da prescrita recebida pela região crítica;
- $u_g^T g$ que mede a quantidade de radiação acima da prescrita nos demais tecidos saudáveis.

O escalar positivo w pondera a importância da formulação de um plano que obtenha a dose mínima na região do tumor, isto é, valores grandes de w forçam $l^T t$ a ser tão pequeno quanto possível. Seria desejável que existisse valor para um finito $w \geq 0$ tal que o valor ótimo da componente $l^T t$ fosse zero o que garantiria ao tumor receber o nível de radiação para sua eliminação.

O modelo proposto pode ser representado pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & wl^T t + u_c^T c + u_g^T g \\
\text{Sujeito a} \quad & l_t - Lt \leq A_T x \leq u_t \\
& A_C x \leq u_c + U_C c \\
& A_G x \leq u_g + U_G g \\
& 0 \leq Lt \leq l_t \\
& -u_c \leq U_C c \\
& U_G g \geq 0 \\
& x \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde:

- w : escalar positivo;
- x : dose do subfeixe que entra na imagem para alcançar o pixel $p, (x \in \mathfrak{R}^n)$;
- $t \in \mathfrak{R}^{m_T}, t \geq 0$;
- $c : c \in \mathfrak{R}^{m_C}$;
- $g : g \in \mathfrak{R}^{m_G}, g \geq 0$

As restrições $l_t = Lt \leq A_T x, A_C x \leq u_c + U_C c$, e $A_G x \leq u_g + U_G g$, são denominadas *elásticas*, pois seus limites podem variar de acordo com os vetores t, c , e g , respectivamente.

As matrizes L, U_C e U_G definem como medir a elasticidade, e l, u_c e u_g controlam a penalização ou recompensa com relação à elasticidade.

Valores fixos de l, u_c, u_g, L, U_C e U_G definem um conjunto de *funções elásticas*. E estas são incorporadas pelas seguintes razões:

1. a restrição elástica garante que algum conjunto de funções elásticas, (4.6) é sempre estritamente factível;
2. a diferença dos limites nas funções elásticas nos permitem incorporar diferentes objetivos de tratamento.

Como discutido anteriormente, o modelo (4.6) é um Problema de Programação Linear e pode ser resolvido pelo Método Simplex. Resolver este problema, significa determinar x^*, t^*, c^* e g^* que otimizem a função objetivo e atinjam as metas estabelecidas da melhor forma possível. Assim, com o vetor de dose ótimo x , conforme mostrado em

(4.4), é possível calcular a dose de radiação total, ou integral, para cada pixel. Com o conhecimento da distribuição ótima de dose nos tecidos é possível construir as curvas de isodose.

4.3.1 PROPRIEDADES DAS RESTRIÇÕES ELÁSTICAS

Considere a seguinte definição:

Definição 4.1. *A prescrição (u_t, l_t, u_c, u_g) admite a uniformidade do tratamento do tumor se existe um plano, $x \geq 0$, tal que $l_t \leq A_T x \leq u_t$.*

O Teorema abaixo foi demonstrado em [2].

Teorema 4.1. *Seja $x^*(w), t^*(w), c^*(w), g^*(w)$ uma solução ótima de (4.6). Para qualquer conjunto de funções elásticas temos que $l^T t^*(w) = O(\frac{1}{w})$, desde que a prescrição admita a uniformidade do tratamento do tumor.*

Este teorema mostra que se a prescrição do tratamento é viável, o déficit de radiação no tumor é uniformemente limitada pelo inverso de w . Utilizando este resultado é possível, resolvendo apenas um problema de programação linear, interpretar o resultado e concluir se existe um tratamento que atende à prescrição violando ou não os limites u_g e u_c [2].

5 MÉTODO SIMPLEX APLICADO AO MODELO DE TRATAMENTO POR RADIOTERAPIA

Nesta seção será aplicado o Método Simplex para o modelo 4.6.

O próximo passo consiste em obter um problema de programação linear na forma padrão, contento apenas restrições de igualdade. Como a imagem está em pixels, os limites de dose devem ser divididos pela quantidade de pixels dos respectivos órgãos, para garantir a uniformidade da dose [7]. Logo, na função objetivo, os valores dos limites de dose serão $l = \frac{1}{m_T}e$, $u_c = \frac{1}{m_C}e$, e $u_g = \frac{1}{m_G}e$, onde $l \in \mathfrak{R}^{m_T}$, $u_C \in \mathfrak{R}^{m_C}$, $u_G \in \mathfrak{R}^{m_G}$ e $e =$ vetor unitário.

Seja $A_T x = a$, substituindo a restrição canalizada por $l_t - t \leq a \leq u_t$, como $L = I, U_c = I$ e $U_g = I$, obtem-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & w \frac{1}{m_T} e^T t + \frac{1}{m_C} e^T c + \frac{1}{m_G} e^T g \\
 \text{Sujeito a} \quad & a + s_u = u_t \\
 & a + t - s_l = l_t \\
 & A_T x - a = 0 \\
 & A_C x + s_c - c = 0 \\
 & A_G x - g + s_g = u_g \\
 & t + s_t = u_t \\
 & (t, c, g, s, s_u, s_l, s_c, s_g, s_t) \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, obtem-se a seguinte matriz de restrições:

$$\begin{pmatrix}
 I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\
 -I & A_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_C & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
 0 & A_G & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
 a \\
 x \\
 t \\
 c \\
 g \\
 s_u \\
 s_l \\
 s_c \\
 s_g \\
 s_t
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 u_t \\
 l_t \\
 0 \\
 0 \\
 u_c \\
 u_t
 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

A seguir, tem-se os resultados da aplicação do problema 5.1, usando o programa de otimização de MATLAB[®] 10, apresentado no anexo A.

5.1 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Serão apresentados e discutidos a seguir, alguns resultados obtidos na implementação computacional do modelo matemático (4.6), visando auxiliar no planejamento radiocirúrgico ótimo. O problema foi resolvido em um Microcomputador macbook-pro, processador 2,5 GHz, i5, memória 4GB, 1600 MHz, DDR3.

Seguindo a metodologia descrita, inicialmente o câncer é diagnosticado e indicado o tratamento por radioterapia. Posteriormente, são realizadas imagens de tomografia computadorizada para dimensionamento do tumor e localização das regiões de interesse (tumorais, críticas e saudáveis). Assim, o médico determina a dose a ser administrada no tumor (t_g).

A imagem de tomografia é dividida em pixels e são obtidas as posições geométricas das localizações dos pixels referentes aos tecidos críticos, saudáveis e tumorais para serem utilizadas na construção da matriz de dose $A = [A_T \ A_C \ A_G]^T$, conforme definida em (4.5).

Para aplicação do modelo 4.6, considera-se hipoteticamente, que o paciente apresenta um tumor esférico, com diâmetro de 15mm, envolto por tecido crítico, exemplificando um tumor de medula, onde o há dificuldade no planejamento devido a lesão estar totalmente envolvido por uma estrutura crítica.

Neste caso, foi indicado um tratamento radiocirúrgico com dose tumoral de 80 Gy, onde Gy representa a quantidade de energia de radiação ionizante absorvida (ou dose) por unidade de massa (1 Gray(Gy)= 1J/kg). Foi considerada uma porcentagem de variação $\varepsilon = 2\%$, assim a estrutura crítica pode receber até 40 Gy e a saudável no máximo 60 Gy. Como o escalar positivo (w) pondera a importância para que o tumor receba a dose mínima, foi considerado dois valores para comparação, sendo eles $w = 0, 1$ e $w = 40$. Os demais limitantes encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores adotados no modelo, referentes à prescrição de dose

Valor adotado	Gy
u_t	81,6
l_t	78,4
u_c	40
u_g	60
t_g	80

A lesão considerada contém quatro pixels (2×2 pixels), o tecido crítico ao redor da lesão compreende 16 pixels (4×4 pixels). O sistema de planejamento desenvolvido

usa uma grade de 16×16 pixels, com 4 ângulos de $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$ graus, onde cada feixe é composto por 6 sub-feixes. Para melhorar o desempenho computacional, foram restringidas somente as regiões que tendem a formar pixels quentes, que são os pixels que receberão radiação, sendo a estrutura saudável considerada com 36 pixels. Os pixels que não vão receber radiação são chamados de pixels frios [3].

Para a construção das matrizes A_T, A_C e A_G , de deposição de dose para o tumor, estruturas críticas e tecidos saudáveis, respectivamente, utilizou-se a equação discutida e exemplificada em (4.1), na Tabela 5 e em (4.3).

A função objetivo de 5.1 é a soma de três metas: alcançar uma dosagem suficientemente alta para eliminar a lesão e não exceder a dose máxima nos tecidos críticos e saudáveis. A Tabela 7 resume os resultados numéricos obtidos quanto ao valor da função objetivo, número de iterações e tempo de execução em segundos.

Tabela 7 – Resultados numéricos da otimização da função (5.1)

Variáveis	$w = 0, 1$	$w = 40$
Valor da função objetivo	$2,9553 \times 10^{-06}$	$2,9800 \times 10^{-06}$
Iterações	38	38
Tempo	0,010718s	0,011471s
Tolerância	$1,0 \times 10^{-06}$	$1,0 \times 10^{-06}$
Excesso de dose no tumor	$0,1232 \times 10^{-06}$	$0,1133 \times 10^{-06}$
Excesso de dose no tecido crítico	$0,1142 \times 10^{-06}$	$0,1242 \times 10^{-06}$
Excesso de dose no tecido saudável	$0,0045 \times 10^{-06}$	$0,0045 \times 10^{-06}$

Analisando os resultados na Tabela 7, pode-se perceber que a função minimizada obteve valor muito baixo, o que representa uma boa conformação das curvas de isodoses, garantindo assim um tratamento seguro. Os excessos de dose nas regiões críticas e saudáveis e o déficit de dose na região tumoral é praticamente zero, mostrando portanto que o tumor recebeu a dose necessária para sua eliminação e que o limite de dose permitido para as outras regiões não foi ultrapassado.

O peso de w decide a importância da uniformidade de dose no tumor. Como percebe-se pelos resultados, se w for pequeno, indica que encontrar um plano de tratamento que alcance o limite inferior de dose no tumor não é tão importante. Com o aumento de w aumenta-se as chances que o plano de tratamento alcance uma dose tumoral uniforme e precisa. Portanto maiores valores para w forçam o excesso de dose no tumor ser o mínimo possível.

Na Tabela 8 foram utilizados os resultados obtidos por [4], relativo ao método Primal-Dual de pontos interiores. Os valores referente à prescrição de dose foram os mesmos

utilizados neste trabalho, conforme a Tabela 6.

Tabela 8 – Comparação entre os resultados dos Métodos Simplex e Pontos Interiores

Método	Matriz	Iterações	Tempo
Primal-Dual com Cholesky	16 pixels	12	0,05s
	4096 pixels	14	75,3s
Primal-Dual sem Cholesky	16 pixels	12	0,05s
	4096 pixels	14	76,3s
Método Simplex	156 pixels	38	0,01s

Fonte:Cid,p.56 e 57.Adaptada pelo autor.

Observa-se nos resultados da Tabela 8 que ambos os métodos atingiram sua meta de minimizar a função objetivo, mas percebe-se que o tempo computacional do Simplex foi melhor que o de Pontos Interiores. O número de iterações bem mais elevado no Simplex, pode ser explicado pelo fato que ele procura apenas por soluções básicas, o que resulta em iterações mais baratas, o que não ocorre nos Pontos Interiores, em que as soluções não precisam ser básicas.

Apesar das dimensões das matrizes serem diferentes, o comportamento em ambos os métodos se mostrou eficiente para o planejamento ótimo do modelo proposto, onde podemos observar sua eficácia no tratamento.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados os principais conceitos sobre Programação Linear e o Método Simplex, aplicados em um plano de tratamento de tumor por radioterapia e um modelo com base na programação linear para o auxílio no planejamento ótimo.

O desenvolvimento do Método Simplex trouxe grande avanço para a Programação Linear. Como apresentado, este procedimento percorre as soluções básicas, indo de um vértice a outro, definindo uma sequência de vértices com valores que se aproximam do ótimo.

Uma explicação para o Simplex obter mais iterações para o tratamento via radioterapia é que ele encontra soluções básicas, logo algum tecido crítico está recebendo uma dose mínima e algum tecido saudável uma dose máxima, o que não ocorre com os métodos de Pontos Interiores, já que as soluções não precisam ser básicas.

Pode-se perceber que o modelo matemático (4.6) proposto pode ser uma ferramenta de grande importância na construção de planos de tratamento otimizado, pois fornece um conjunto de soluções ótimas, que associadas com o tratamento realizado, poderá possibilitar uma terapia de alta qualidade.

Para um trabalho futuro, pretende-se estudar o Método de Pontos Interiores para implementá-lo e aplicá-lo ao mesmo modelo estudado neste trabalho, com as mesmas matrizes e valores utilizados, a fim de obter comparações mais precisas em relação aos métodos pesquisados.

REFERÊNCIAS

- [1] SILVA Alexandro de Castro da, Daniel Lujan Zanini, Evandro Robiatti, and Oscar Alessandro de Matos. *Resolução de três problemas reais de programação linear, variando-se o sinal das inequações nas restrições*. Funec, 2011.
- [2] HOLDER Allen. *Designing radiotherapy plans with elastic constraints and interior point methods*, volume 6. Health care management science, 2003.
- [3] MARTINS Andréa Camila dos Santos. *O método de pontos interiores no planejamento da radioterapia*. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.
- [4] CID Cecília Bollini Barboza. *Planejamento do tratamento por radioterapia através de métodos de pontos interiores*. Master's thesis, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP-São Carlos., 2003.
- [5] LUENBERGER David G and Yinyu Ye. *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer, 2008.
- [6] FERNANDES David Moreira. *Método de pontos interiores no planejamento ótimo do tratamento de câncer por radioterapia*. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2009.
- [7] JOHNS Harold Elford and John Robert Cunningham. *Physics of radiology*. Thomas, 1974.
- [8] JÚDICE Joaquim J, Pedro Martins, Marta Paschoal, and Jorge Santos. *Programação Linear*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2006.
- [9] BAZARAA Mokhtar S. John J Jarvis, Hanif D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, fourth edition, 2010.
- [10] CANTAO Luiza Amalia Pinto and Felipe Sanches Stark. *Programação Linear-PL*. Unesp- Sorocaba, 2010.
- [11] ARENALES Marcos, Vinicius Armentano, and Reinaldo Morabito. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Elsevier, 2007.
- [12] SOUSA Péricles Crisóstomo de. *Programação linear no planejamento do tratamento de câncer por radiocirurgia*. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2008.

- [13] VIANA Rodrigo Sartorelo Salemi. *Programação Linear aplicada à criação de planejamentos otimizados em radioterapia*. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Biometria, IB, UNESP., 2010. Dissertação de Mestrado.

Anexos

ANEXO A – MODELO DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADO

O modelo a seguir foi elaborado para solucionar problemas usando o Método Simplex. São comandos de programação específicos para o software MATLAB ©.

```
function [x,y,f_obj,iteracao,base]=simplex2(A,b,c,base,fase)

tol=1e-3;

maximo=1e5;

[m,n]=size(A);
A=sparse(A);
b=sparse(b);
c=sparse(c);
bneg=find(b < 0);
A(bneg,:)= -A(bneg,:);
b(bneg)= -b(bneg);
%=====
[L,U]=lu(A(:,base));
L=sparse(L);
U=sparse(U);
xb=U \ (L \ b);%<<<<<— Vetor de solução básica
iteracao=0;
while iteracao<maximo
y=L' \ (U' \ c(base));% <<<<< —Vetor multiplicativo e solução do problema
dual
%*****
% Este procedimento gera um vetor com índices referentes as colunas da
%matriz A e logo depois apaga os índices referentes a suas colunas básicas.
```

```

nbas=[1:n];
nbas(base)=[  ];
%=====
r=c(nbas)-(A(:,nbas))*y;%<<<<— Vetor de custos relativos das variaveis nao
basicas
%*****
% Verificando a Otimalidade do Problema
if min(r) >= -tol
if fase==1
disp('*****')
disp('* YES \0/ "Chegamos ao otimo da fase 1 *')
disp('*****')
else
disp('*****')
disp('* YES \0/ "Chegamos ao otimo da FASE 2 *')
disp('*****')
end
break
end
%=====
[valor,j]=min(r); % <<<<<— Encontra o indice "j"da variavel nao basica q
entrara na base
Ntil=U\ (L\ A(:,nbas(j)));%<<<<<—Atualizando a coluna  $N_j$  nao basica de A
%*****
% Verificando se o Problema eh Ilimitado
if Ntil <= tol
disp('*****')
disp(' "AHHH :( "===»Problema Ilimitado«=== *')
disp('*****')

```

```

break
end
s=find(Ntil>tol); %«««<—Buscando os indices de Ntil que sao >0.
[valor,i]=min(xb(s)./Ntil(s)); %««<—Obtendo o indice "i" da variavel basica que saira
da base
base(s(i))= nbas(j); %«««<—Atualizando a Base.
%***** % Atualizando a fatoracao LU da base
[L,U]=lu(A(:,base));
L=sparse(L);
U=sparse(U);
%=====
xb=U\(L\b);%<<<<<— Atualizando o vetor de solucao basica
iteracao=iteracao+1
end
basefinal=base
x=zeros(n,1);
x(base)=xb;%«««<— Vetor Otimo encontrado
x=sparse(x);
f_obj=c'*x;%<<<<<— Valor da Funcao Objetivo no Otimo encontrado
iteracao

```