

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Existência e semicontinuidade de atratores global, pullback e de trajetórias

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática -
UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Maykel Boldrin Belluzi
Orientadora: Profa. Dra. Karina Schiabel

São Carlos / 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B449e Belluzi, Maykel Boldrin
Existência e semicontinuidade de atratores
global, pullback e de trajetórias / Maykel Boldrin
Belluzi. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
134 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de
São Carlos, 2016.

1. Atrator. 2. Global. 3. Pullback. 4.
Trajetórias. 5. Semicontinuidade. I. Título.



Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Maykel Boldrin Belluzi, realizada em 27/07/2016:

Karina Schiabel

Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar

Cl. C. Buttarello Gentile Moussa

Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile Moussa
UFSCar

Alexandre Nolasco de Carvalho

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
USP

Agradecimentos

Inicialmente a Deus por me manter firme e me dar forças ao longo de toda essa jornada.

À profa. Cleide Maria por ter me apresentado a Matemática sob uma outra perspectiva e pelo incentivo inicial.

À profa. Dra. Karina Schiabel pela orientação ao longo deste trabalho, pela confiança em mim e pela amizade nos últimos anos.

À todos os professores do Departamento de Matemática da UFSCar que tive contato por terem contribuído de alguma forma no meu aprendizado ao longo da Graduação e do Mestrado.

Aos meus pais, Marcos Antonio Belluzi e Renata Boldrin Belluzi, e ao meu irmão e melhor amigo, Marlon Boldrin Belluzi, por estarem sempre ao meu lado, me apoiando e dando força em todos os momentos complicados. Nunca esquecerei todo o sacrifício e carinho de vocês.

Aos meus colegas da Pós-Graduação por todos os momentos compartilhados nesses últimos anos. Em especial à Flávia Endsfieldz e à Renata Oliveira por estarem sempre presentes, seja nas refeições apressadas em vésperas de provas, nas tentativas de resoluções de exercícios e até nas atividades físicas para manter a forma.

E, por último, à minha avó Odair Monteiro Boldrin que infelizmente não chegou a ver este momento, mas cuidou e me amou incansavelmente, e ao meu avô José Vasco Boldrin por bradar meus feitos com orgulho aos quatro ventos.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar o comportamento assintótico de equações de evolução abstratas. A primeira parte do trabalho apresenta e compara, quando possível, a teoria de atração para problemas autônomos e não autônomos unívocos e problemas autônomos multívocos. Após apresentados os resultados, analisamos a existência dos atratores apropriados para uma equação de reação-difusão (autônoma e com unicidade de solução), uma variação da equação anterior (fazendo com que o problema não tenha mais unicidade de solução) e uma equação diferencial com retardo (não autônoma). Nos dois últimos, investigamos também a semicontinuidade superior para as famílias de atratores correspondentes.

Palavras-chave: Atrator global, atrator pullback, atrator de trajetórias, semicontinuidade superior, Faedo-Galerkin.

Abstract

The mainly purpose of this paper is to study the asymptotic behaviour of abstract evolution equations. The first part of this work is dedicated to the attraction theory for univoque autonomous and non-autonomous problems and for multivoque autonomous problems. After that, we analyse the existence of the appropriate type of attractor for a reaction-diffusion equation (autonomous and with uniqueness property), a variation of the previous equation (which makes it no longer possible to ensure the uniqueness property) and a delayed differential equation (non-autonomous). For the two last equations, we also investigate the upper-semicontinuity of the families of the corresponding attractors.

Key-words: Global attractor, pullback attractor, trajectory attractor, upper semi-continuity, Faedo-Galerkin.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
2 Atratores globais para problemas autônomos	11
2.1 Caracterização dos atratores globais	12
2.2 Existência do atrator global	16
2.2.1 Dissipatividade e compacidade assintótica	16
2.2.2 Existência de um compacto que atrai	23
2.3 Continuidade da família de atratores globais	24
2.3.1 Semicontinuidade superior da família de atratores globais	25
2.3.2 Semicontinuidade inferior da família de atratores globais	26
3 Atratores Pullback para problemas não autônomos	29
3.1 Caracterização dos atratores pullback	30
3.2 Comparação entre os atratores pullback e global para problemas autônomos	36
3.3 Existência do atrator pullback	37
3.3.1 Existência de uma família de compactos que atrai	41
3.3.2 Processos pullback limitado dissipativos e pullback assintoticamente compactos	42
3.4 Continuidade da família de atratores pullback	45
3.4.1 Semicontinuidade superior da família de atratores pullback	48
3.4.2 Semicontinuidade inferior da família de atratores pullback	50
4 Atratores de trajetórias para problemas autônomos	55
4.1 Atrator de trajetórias para uma equação em \mathbb{R}^n	55
4.1.1 A topologia em \mathcal{K}^+	57
4.1.2 Construção e caracterização do atrator de trajetórias	62
4.1.3 Comparação entre os atratores de trajetórias e global	66
4.1.4 Dependência do atrator de trajetórias com relação a um parâmetro	67
4.2 Atratores de trajetórias para uma equação autônoma abstrata	70

4.2.1	A topologia em \mathcal{F}^+	71
4.2.2	Construção e caracterização do atrator de trajetórias	74
5	Atrator global para um problema de reação-difusão	77
5.1	Um problema de reação-difusão com condição de Dirichlet	77
5.2	O método de Faedo-Galerkin: existência e unicidade de solução	80
5.3	Existência do atrator global	88
5.3.1	Existência de um conjunto compacto absorvente em $L^2(\Omega)$	91
6	Atrator de trajetórias para um problema de reação-difusão	97
6.1	Um problema de reação-difusão com condição de Dirichlet: abordagem multívoca	97
6.2	Existência de solução via método de Faedo-Galerkin	100
6.3	Construção do atrator de trajetórias	103
6.4	Caracterização do atrator de trajetórias	110
6.5	Semicontinuidade superior de uma família de atratores de trajetórias	111
7	Atrator pullback para uma equação diferencial com retardo	115
7.1	Existência do atrator pullback	116
7.2	Semicontinuidade superior de uma família de atratores pullback	120
A	Conceitos básicos sobre distribuições	125
A.1	Distribuições escalares	125
A.2	Distribuições vetoriais	128
B	Alguns resultados de Topologia	129
C	Atratores em espaços de Hausdorff	131

Introdução

Consideremos o problema de evolução abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = f(t, u(t)) \\ u(s) = u_s \in X, \end{cases} \quad (1)$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $t \geq s$, X é um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Uma questão interessante no estudo dessas equações é a investigação do comportamento assintótico das soluções, quando estas existem.

Com algumas hipóteses sobre f , podemos garantir existência e unicidade de solução para todo $t \geq s$.

No caso em que o problema (1) é autônomo, isto é, $f = f(u)$, podemos sempre assumir $s = 0$ como tempo inicial. Neste caso, podemos definir um operador $T(t) : X \rightarrow X$ associado à solução do problema. Esses operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ constituem um semigrupo. Em algumas situações, a dinâmica assintótica das soluções ocorre em um subconjunto compacto \mathcal{A} do espaço de fase X , chamado *atrator global*.

No caso em que o problema (1) é não autônomo, as soluções definem uma família de operadores $\{S(t, s)\}_{t \geq s}$ dependente tanto do tempo t quanto do tempo inicial s . Tal família recebe o nome de processo. Para o caso não autônomo estamos interessados na dinâmica assintótica das soluções quando o tempo inicial $s \rightarrow -\infty$ e, em algumas situações, uma família de compactos em X (família dependente do tempo t) fornece essa dinâmica assintótica das soluções. Tal família de compactos recebe o nome de *atrator pullback*.

Também é interessante estudar o comportamento assintótico das soluções para problemas sem unicidade. Neste caso, o objeto que captura a dinâmica das soluções recebe o nome de *atrator de trajetórias*.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 1 apresenta uma coletânea de resultados e pré-requisitos que serão necessários ao longo da dissertação.

O Capítulo 2 aborda condições que garantem a existência dos atratores globais para problemas autônomos, propriedades e caracterizações desses objetos e, por fim, a semicontinuidade de famílias de atratores globais.

No Capítulo 3 tratamos de problemas não autônomos. Serão apresentados resultados de existência dos atratores pullback, propriedades e caracterizações desses objetos, comparação com o atrator global no caso em que o problema é autônomo e, por fim, a semicontinuidade de famílias de atratores pullback.

O Capítulo 4 apresenta problemas autônomos sem unicidade de solução. Definiremos os atratores de trajetórias para estes problemas, o qual é o atrator global para um semigrupo de translação definido sobre o conjunto das soluções do problema em consideração. Podemos então aplicar a teoria de atratores globais estudadas no Capítulo 2 para atratores de trajetórias. O Capítulo 4 ainda aborda a caracterização dos atratores de trajetórias, comparação com o atrator global no caso em que há unicidade de solução para o problema e semicontinuidade de famílias de atratores de trajetórias.

Os Capítulos 5, 6 e 7 destinam-se à aplicação dos resultados abstratos obtidos nos capítulos anteriores em problemas específicos e a comparação entre as abordagens distintas.

No Capítulo 5 estudamos o problema de reação-difusão

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$, $d > 1$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $g \in L^2(\Omega)$. Além disso, suporemos que existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_f tais que f satisfaz as seguintes condições: para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f'(v) \geq -c_f, \quad (3)$$

$$f(v)v \geq c_1|v|^p - c_3, \quad (4)$$

$$|f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1), \quad (5)$$

onde $2 < p < \frac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p .

Provaremos através do Método de Faedo-Galerkin que tal problema possui solução em um espaço de fase adequado e tal solução é única. Usaremos então os resultado discutidos no Capítulo 2 para garantir a existência de atrator global para esse problema.

No Capítulo 6 estudamos o problema de reação-difusão

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \end{cases} \quad (6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$, $d > 1$, $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, suporemos que existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_f tais que f satisfaz as seguintes condições: para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f'(v) \geq -c_f, \quad (7)$$

$$f(v)v \geq c_1|v|^p - c_3, \quad (8)$$

$$|f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1), \quad (9)$$

onde $2 < p < \frac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p .

O termo $|u|^{\alpha-1}u$ acrescentado ao problema faz com que não possamos garantir a unicidade de solução. Logo, a abordagem a ser utilizada é a de atratores de trajetórias.

Provaremos através do Método de Faedo-Galerkin que tal problema possui solução em um espaço de fase adequado. Usaremos então os resultado discutidos no Capítulo 4 para garantir a existência de atrator de trajetória para esse problema.

Obteremos também a semicontinuidade superior de uma família de atratores de trajetória $\{\mathcal{U}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ para o seguinte problema (sob as mesmas hipóteses anteriores) envolvendo um parâmetro ε pequeno:

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + \varepsilon|u|^{\alpha-1}u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_\Gamma = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma. \end{cases} \quad (10)$$

No Capítulo 7 estudamos o problema não autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t - \rho(t))) \\ x(s) = x_s = \psi \in \mathcal{CI}, \end{cases} \quad (11)$$

onde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, h]$ é uma função contínua, $\mathcal{CI} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes hipóteses: existem $K, L, \alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\|F(x)\| \leq K, \quad (12)$$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad (13)$$

$$\langle F(x), x \rangle \leq -\alpha \|x\|^2 + \beta. \quad (14)$$

Provaremos a existência de atrator pullback para essa equação e obteremos a semicontinuidade superior da família de atratores pullback $\{\mathcal{A}_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ associados aos problemas

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t - \rho_\varepsilon(t))) \\ x(s) = x_s = \psi \in \mathcal{CI}, \end{cases} \quad (15)$$

onde $\rho_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, \varepsilon]$ e o problema limite é o problema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(s) = x_s = \psi \in \mathcal{CI}. \end{cases} \quad (16)$$

Capítulo 1

Preliminares

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $I \subset \mathbb{R}$ abertos.

O teorema a seguir garante a existência de solução local para o problema (1.1). Sua demonstração pode ser encontrada em [15], Teorema 1.13, p. 19.

Teorema 1.0.1. *Suponha f contínua em $I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\}$. Da continuidade da f , existe $M > 0$ tal que $|f| < M$ em $I_a \times B_b$ e o problema (1.1) tem pelo menos uma solução em $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\}$, onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.*

Seja $u : (\tau_{min}, \tau_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução de (1.1) definida em seu intervalo maximal.

O resultado a seguir ([15], Teorema 1.17, p. 21) afirma que soluções limitadas em intervalos finitos podem ser estendidas a todo semi-eixo positivo, isto é, $\tau_{max} = \infty$.

Teorema 1.0.2. *Seja f contínua em um aberto \mathcal{U} de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se ϕ é uma solução definida em seu intervalo maximal (τ_{min}, τ_{max}) , então a aplicação $g(t) = (t, \phi(t))$ tende a $\partial\mathcal{U}$ quando $t \rightarrow \tau_{max}$ (ou τ_{min}). Isto é, para cada compacto $K \subset \mathcal{U}$ existe uma vizinhança V de τ_{max} (ou τ_{min}) tal que $g(t) \notin K$ para $t \in V$.*

Observação: Segue do Teorema 1.0.2 que se $\tau_{max} < \infty$, então necessariamente $\phi(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \tau_{max}$.

As quatro desigualdades que exibiremos a seguir são usadas com frequência ao longo dos capítulos. Suas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Lema 1.0.3 (Desigualdade de Young). *Sejam $p > 1$ e q o expoente conjugado de p . Se $a, b \in \mathbb{R}_+$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon = \frac{(\varepsilon p)^{1-q}}{q}$ tal que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

Lema 1.0.4 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p . Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lema 1.0.5 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $y, a : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções não negativas tais que $a, y \in L^1([t_0, t_1])$. Suponha que exista uma constante C satisfazendo*

$$y(t) \leq C + \int_{t_0}^t y(s)a(s)ds,$$

então

$$y(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right),$$

para $t \in [t_0, t_1]$.

Lema 1.0.6 (Desigualdade diferencial). *Seja $y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, $y \geq 0$ e suponha que a seguinte desigualdade seja válida*

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + h(t),$$

onde $a, h \in C([t_0, t_1])$, $a \geq 0$, $h \geq 0$. Então,

$$y(t) \leq y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^t h(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) ds$$

e, conseqüentemente,

$$y(t) \leq \left(y(t_0) + \int_{t_0}^t h(s)ds\right) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right).$$

Se a desigualdade

$$y'(t) + \gamma y(t) \leq h(t)$$

vale para $\gamma \geq 0$, então

$$y(t) \leq y(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} h(s)ds.$$

Em particular, se $h(t) = C$, então

$$y(t) \leq y(0)e^{-\gamma t} + C\gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t}) \leq y(0)e^{-\gamma t} + C\gamma^{-1}.$$

O próximo teorema fornece uma forma de identificar imersões entre os espaços de Sobolev. Sua demonstração pode ser encontrada em Triebel, H. [17], Teorema 4.6.2, p. 328.

Teorema 1.0.7. *Sejam Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$ e $1 < p_1, p_2 < \infty$.*

1. *Se $l_2 \geq l_1$, $p_2 \geq p_1$ e $\frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1}$ então $W^{l_2, p_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{l_1, p_1}(\Omega)$.*
2. *Se $l_2 > l_1$, $p_2 \geq p_1$ e $\frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2} > \frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1}$ então $W^{l_2, p_2}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{l_1, p_1}(\Omega)$, isto é, $W^{l_2, p_2}(\Omega)$ está imerso compactamente em $W^{l_1, p_1}(\Omega)$.*

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Lions, J.L. [10], Capítulo 1, Lema 1.2, p. 7.

Lema 1.0.8. *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in L^p(0, T, E)$ e $u' \in L^p(0, T, E)$, então após no máximo uma modificação em um conjunto de medida nula de $[0, T]$, $u : [0, T] \rightarrow X$ é contínua.*

O próximo teorema está demonstrado em Lions, J.L e Magenes, E. [11], Capítulo 8, Lema 8.1, p. 275.

Teorema 1.0.9. *Sejam E, E_0 espaços de Banach e suponha que $E \hookrightarrow E_0$. Se $u \in L^\infty(0, T, E)$, $u(t) \in E_0, \forall t \in [0, T]$ e $\langle u(t), \varphi \rangle$ é uma função contínua em t para todo $\varphi \in E'_0$, isto é, $u : [0, T] \rightarrow E_0$ é fracamente contínua, então*

$$u(t) \in E \text{ e } \|u(t)\|_E \leq \|u\|_{L^\infty(0, T, E)}, \forall t \in [0, T]$$

e $u : [0, T] \rightarrow E$ é fracamente contínua.

O problema de autovalor do Laplaciano fornece um conjunto de autofunções que constituem uma base para o $L^2(\Omega)$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em Jost, J. [9], Capítulo 9, Teorema 9.5.2, p. 260.

Teorema 1.0.10. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e de classe C^∞ , então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega, & w \in W^{1,2}(\Omega) \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

possui uma quantidade enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

tais que $\lambda_j \rightarrow \infty$ e as autofunções satisfazem $w_j|_{\partial\Omega} = 0$ e formam um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, w_j \rangle w_j,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, w_j \rangle^2$$

As autofunções do Laplaciano são elementos de $C^\infty(\Omega)$. Isto será de extrema importância em resultados futuros. A demonstração deste resultado pode ser encontrado em Robinson, J.C. [13], capítulo 6, Corolário 6.14, p. 175.

Corolário 1.0.11. *As autofunções do Laplaciano com condições de Dirichlet são elementos de $C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

O próximo teorema fornece as desigualdades de Poincaré. Sua demonstração pode ser encontrada em Smoller, J. [14], capítulo 11, Teorema 11.11, p. 112.

Teorema 1.0.12. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$ e $u \in H^1(\Omega)$. Se λ_1 é o menor autovalor positivo de $-\Delta$, então*

1. $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ quando $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.
2. se $u \in H^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ quando $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Definição 1.0.13. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um subconjunto aberto. Dizemos que $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory em D quando*

- $F(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo.
- $F(t, x)$ é mensurável em x , para cada t fixo.
- Se $C \subset D$ é um compacto, então existe uma função real integrável $m_C(t)$ tal que $|F(t, x)| \leq m_C(t)$, $\forall (t, x) \in C$.

Sejam $a, b > 0$ e $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset D$.

As demonstrações dos dois próximos teoremas que enunciaremos podem ser encontradas em Coddington, E.A. e Levinson, N [6], Capítulo 2, Teorema 11 e Teorema 13, respectivamente.

Teorema 1.0.14. (Teorema de Carathéodory:) *Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory em R , então existe $\beta > 0$ e uma função $x : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua satisfazendo*

1. $(t, x(t)) \in R$, $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$.
2. $x'(t) = F(t, x)$, $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, exceto em um conjunto de medida nula
3. $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.0.15. *Sejam $b > 0$, $0 < T < +\infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$, $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b$ e $0 < M < b$. Consideremos $D = [0, T] \times B$ e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory. Se $x : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução no sentido do Teorema 1.0.14 e $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, então $x(t)$ tem um prolongamento em $[0, T]$.*

Ambos os resultados a seguir podem ter suas demonstrações encontradas em Robinson, J.C. [13], Capítulo 4, Teorema 4.18 e Corolário 4.19, respectivamente.

Teorema 1.0.16. (Banach-Alaoglu:) *Seja E um espaço de Banach separável. Se u_m é uma sequência limitada em E' , então u_m tem subsequência convergente na topologia fraca*.*

Corolário 1.0.17. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se u_m é uma sequência limitada em E , então u_m tem uma subsequência que converge fracamente em E .*

Sejam $p_1, p_0 \geq 1$ e E_0, E_1 são espaços de Banach satisfazendo $E_1 \hookrightarrow E_0$. Consideremos

$$W_{p_1, p_0}(0, T, E_1, E_0) = \{\psi : \psi \in L^{p_1}(0, T, E_1), \psi' \in L^{p_0}(0, T, E_0)\},$$

munido da norma

$$\|\psi\|_{W_{p_1, p_0}} = \|\psi\|_{L^{p_1}(0, T, E_1)} + \|\psi'\|_{L^{p_0}(0, T, E_0)}.$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Chepyzhov, V.V. e Vishik, M.I. [4], Apêndice A, p. 345.

Teorema 1.0.18. (Teorema da compacidade de Aubin-Lions:) *Se $1 < p_1, p_0 < \infty$, $T > 0$, E_1, E, E_0 Banach. Se $E_1 \xhookrightarrow{c} E \hookrightarrow E_0$, então $W_{p_1, p_0} \xhookrightarrow{c} L^{p_1}(0, T, E)$.*

Observação: Em decorrência do Teorema da compacidade de Aubin-Lions, segue que se $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_1}(0, T, E_1)$ e $\{u'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_0}(0, T, E_0)$, então $\{u_m\}$ é limitada em $W_{p_1, p_0}(0, T, E_1, E_0)$. Assim, da imersão compacta, existe uma subsequência $\{u_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{m_j} \rightarrow u$ fortemente em $L^{p_1}(0, T, E_1)$.

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13], Capítulo 1, Corolário 1.12, p. 27.

Lema 1.0.19. *Se $u_m \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então existe subsequência de $\{u_m\}$ que converge pontualmente para u em qtp Ω .*

O próximo lema pode ter sua demonstração encontrada em Lions, J.L. [10], Capítulo 1, Lema 1.3, p. 12.

Lema 1.0.20. *Sejam \mathcal{O} um domínio limitado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $1 < q < \infty$. Se $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e g são funções em $L^q(\mathcal{O})$ tais que*

$$\|g_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C \text{ e } g_m \rightarrow g \text{ em qtp } \mathcal{O},$$

então $g_m \rightarrow g$ em $L^q(\Omega)$.

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13], Capítulo 11, Lema 11.2, p.288.

Lema 1.0.21. *Seja $V \xhookrightarrow{c} H$. Suponha que $\{u_n\}$ seja uniformemente limitada em $L^\infty(0, T, V)$, isto é,*

$$\text{ess sup}_{s \in [0, T]} \|u_n(s)\|_V \leq C, \quad (1.3)$$

e que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(0, T, V)$. Então

$$\text{ess sup}_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_V \leq C. \quad (1.4)$$

Além do mais, se $u \in \mathcal{C}([0, T], H)$, então

$$\sup_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_V \leq C. \quad (1.5)$$

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Robinson, J.C. [13], Capítulo 7, Lema 7.5, p. 199.

Lema 1.0.22. *Consideremos $p > 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave. Se $E = L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ ou $L^p(\Omega)$ e P_m é o operador projeção ortogonal sobre o subespaço de E gerado pelas m primeiras autofunções do Laplaciano com condição de Dirichlet, então $\|P_m u\|_E \leq \|u\|_E$ e $P_m u \rightarrow u$.*

O lema a seguir pode ser encontrado em Chepyzhov, V.V. e Vishik, M.I. [4], Teorema 1.8, p. 33.

Lema 1.0.23. *Sejam $p > 1$, $q > 1$ expoentes conjugados. Suponhamos que H é um espaço de Hilbert e V, E, X são espaços de Banach satisfazendo*

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow X$$

$$E \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow E' \hookrightarrow X$$

onde V' e E' denotam os duais de V e E , respectivamente. Se $u \in L^2(0, T, V) \cap L^p(0, T, E)$ e a distribuição $\partial_t u$ pode ser representada como $\partial_t u(s) = w(s) + h(s)$, onde $w \in L^2(0, T, V')$ e $h \in L^q(0, T, E')$, então

1. $u \in \mathcal{C}([0, T], H)$.

2. A função $\|u(\cdot)\|_H^2$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e, além disso,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2\langle u(t), u'(t) \rangle = 2\langle u(t), w(t) \rangle + 2\langle u(t), h(t) \rangle,$$

em qtp $[0, T]$.

Capítulo 2

Atratores globais para problemas autônomos

Consideremos o problema autônomo

$$\begin{cases} u' = f(u) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $f : \mathcal{U} \subset X \rightarrow X$, X é um espaço de Banach e f não depende diretamente do tempo.

Sob determinadas hipóteses sobre a função f , dado $u_0 \in X$, existe uma única função contínua $u : [0, \infty) \rightarrow X$ que satisfaz (2.1). Além disso, tal solução depende continuamente das condições iniciais. Denotamos esta solução por $u(t) = u(t, 0, u_0) = u(t, u_0)$, o que significa que no tempo $t = 0$, a função assume o valor inicial u_0 .

As soluções de (2.1) definem uma família de aplicações soluções $\{T(t), t \geq 0\}$, que resgata as soluções do problema da seguinte forma

$$T(t)u_0 = u(t, u_0).$$

A família $\{T(\cdot)\}$ é um *semigrupo* se possui as seguintes propriedades:

1. $T(0) = Id$
2. $T(t)T(s) = T(t) \circ T(s) = T(t + s)$

Além disso, se $\{T(\cdot)\}$ satisfaz

3. $(t, u_0) \mapsto T(t)u_0$ é contínua,

então dizemos que $\{T(\cdot)\}$ é um C_0 -*semigrupo*.

Estamos interessados em estudar propriedades de atração para as soluções desse problema de Cauchy. Podemos considerar o semigrupo $\{T(\cdot)\}$ associado a essas soluções e estudar a atração para essa família. Mais do que isso, podemos estudar as propriedades gerais de atratores para a família abstrata $\{T(t)\}$ sem que nenhuma equação esteja associada a priori.

2.1 Caracterização dos atratores globais

Atratores são objetos no espaço de fase X que ditam a dinâmica das soluções de (2.1) para tempos grandes. Apresentaremos a seguir alguns conceitos necessários para a definição de atrator global.

Definição 2.1.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$. A semidistância de Hausdorff entre A e B é dada por*

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

A semidistância de Hausdorff mede o quanto o conjunto A fica fora de B . Além disso, se A e B são fechados, então $\text{dist}(A, B) = 0 \Rightarrow A \subset B$. De fato, suponhamos que $A \not\subset B$, então existe $a \in A \setminus B$ tal que $d(a, b) > 0, \forall b \in B$, uma vez que $d(a, B) > 0$. Logo, $\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) > 0$.

Definição 2.1.2.

1. *Sejam $A, B \subset X$. A absorve B sob a ação do semigrupo $\{T(t)\}$ se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{dist}(T(t)B, A) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

2. *Sejam $A, B \subset X$. A atrai B sobre a ação de $\{T(t)\}$ se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

3. *$v \in X$ é um ponto de equilíbrio de $T(\cdot)$ se $T(t)v = v, \forall t \geq 0$.*

Um equilíbrio para um semigrupo é uma solução de equilíbrio para a equação associada.

4. *Um conjunto A é invariante por $\{T(\cdot)\}$ se $T(t)A = A, \forall t \geq 0$.*

Observação: *Quando estiver bem explícito qual é o semigrupo $\{T(t)\}$, será dito apenas A absorve B , A atrai B e A é invariante.*

Para um problema do tipo (2.1), uma solução $u(t)$ é global se satisfaz $u'(t) = f(u(t)), \forall t \in \mathbb{R}$. Fazendo a analogia com o problema, temos $T(t)u(\tau) = T(t)T(\tau)u_0 = T(t + \tau)u_0 = u(t + \tau)$, uma vez que temos unicidade de solução do problema em questão.

Logo, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.3. *Uma função contínua $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X$ é solução global de $T(\cdot)$ se para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, tem-se*

$$T(t)x(\tau) = x(t + \tau).$$

Neste caso, a órbita da solução global é o conjunto

$$\Gamma(x(\cdot)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} x(t).$$

Proposição 2.1.4. *Um conjunto A é invariante se, e somente se, consiste de uma coleção de órbitas de soluções globais.*

Demonstração.

(\Leftarrow) Suponhamos que A seja uma coleção de órbitas de soluções globais. Dado $u_0 \in A$, existe uma solução global u tal que u_0 está na órbita dessa solução, isto é, $u(\tau) = u_0$, para algum $\tau > 0$.

Logo, $T(t)u_0 = T(t)u(\tau) = u(t + \tau) \in A$, pois a órbita está em A e $T(t)A \subset A$, para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, $u_0 = u(\tau) = T(t)u(\tau - t)$, uma vez que $u(\cdot)$ é global. Portanto, $A \subset T(t)A$, para todo $t \geq 0$.

(\Rightarrow) Suponhamos agora que A seja invariante. Dado $u_0 \in A$, segue da invariância que $T(t)u_0 \in A$, $\forall t \geq 0$. Tome u e $u(t) = T(t)u_0$, para todo $t \geq 0$.

Ainda da invariância de A , temos $T(1)A = A$. Portanto, existe $u_{-1} \in A$ tal que $T(1)u_{-1} = u_0 = u(0)$. Definamos $u(t) = T(t + 1)u_{-1}$ para $-1 \leq t \leq 0$.

Da mesma forma, existe $u_{-2} \in A$ tal que $T(1)u_{-2} = u_{-1}$. Definamos $u(t) = T(t + 2)u_{-2}$ para $-2 \leq t \leq -1$.

Procedendo dessa forma é possível definir $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X$ solução global e que satisfaz $\Gamma(u(\cdot)) \subset A$, dada por

$$u(t) = \begin{cases} T(t)u_0, & \text{se } t \in [0, \infty) \\ T(t + n)u_{-n}, & \text{se } t \in [-n, -n + 1]. \end{cases} \quad (2.2)$$

□

Definição 2.1.5.

1. Dado $u_0 \in X$, a semi-órbita positiva iniciando em u_0 é dada por

$$\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0.$$

2. A semi-órbita positiva gerada por um conjunto $B \subset X$ (também chamada feixe de semi-órbitas) é o conjunto $\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)B$.

3. O conjunto ω -limite de um ponto $u_0 \in X$ é dado por

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)u_0} = \{v \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } T(t_n)u_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\}.$$

4. Se $B \subset X$, definimos

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B} = \{v \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \text{ e } \{v_n\} \subset B \text{ tal que } T(t_n)v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\}.$$

Os atratores para semigrupos podem então ser definidos.

Definição 2.1.6. *Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um atrator global para o semigrupo $\{T(t)\}$ se*

1. \mathcal{A} é compacto.
2. \mathcal{A} é invariante.
3. \mathcal{A} atrai conjuntos limitados de X , isto é, se $B \subset X$ é limitado, então $\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Segue desta definição a seguinte caracterização para atratores de um semigrupo.

Proposição 2.1.7. *Seja \mathcal{A} um atrator de um semigrupo $T(\cdot)$. Então:*

1. \mathcal{A} é o conjunto minimal compacto que atrai limitados.
2. \mathcal{A} é o conjunto maximal fechado, limitado e invariante.

Demonstração.

1. Suponhamos que $B \subset X$ seja um compacto que atrai limitados. Sendo \mathcal{A} compacto, então \mathcal{A} é limitado e B atrai \mathcal{A} . Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)\mathcal{A}, B) = 0.$$

Uma vez que \mathcal{A} é invariante, $\text{dist}(\mathcal{A}, B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)\mathcal{A}, B) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \subset B$.

Portanto, \mathcal{A} é o minimal compacto que atrai limitados.

2. Seja $B \subset X$ fechado, limitado e invariante.

$$\text{dist}(B, \mathcal{A}) = \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}), \forall t \geq 0 \Rightarrow \text{dist}(B, \mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Portanto, $B \subset \mathcal{A}$ e \mathcal{A} é o maximal fechado, limitado e invariante.

□

Segue da proposição anterior que o atrator para um semigrupo é único (é o minimal compacto que atrai limitados).

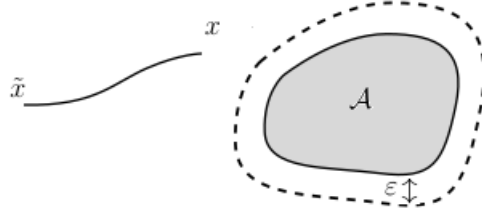
Uma outra caracterização de atrator pode ser dada em termos das soluções globais e limitadas. Seja ξ a união das órbitas de soluções globais limitadas, isto é,

$$\xi = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{x(t) | x : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é solução global e limitada}\}.$$

É imediato que se $T(\cdot)$ tem atrator global \mathcal{A} , então $\mathcal{A} \subset \xi$, uma vez que \mathcal{A} é invariante e então a Proposição 2.1.4 garante que tal afirmação é verdadeira. A proposição a seguir mostra que a inclusão contrária também é válida. Usaremos na proposição a seguir, e em todo o restante do texto, a notação $\mathcal{N}(B, \varepsilon)$ para denotar a ε -vizinhança de um conjunto $B \subset X$.

Proposição 2.1.8. *Se $T(\cdot)$ tem atrator global, então $\xi \subset \mathcal{A}$. Consequentemente, $\mathcal{A} = \xi$.*

Demonstração. Seja $\gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} x(t)$, onde $x(\cdot)$ é uma solução global limitada de $T(\cdot)$. Suponhamos que $\gamma \not\subset \mathcal{A}$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in \gamma$ tais que $x_0 \notin \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon)$.



Como \mathcal{A} atrai limitados, segue que \mathcal{A} atrai γ , ou seja, existe $\tilde{t} > 0$ tal que

$$\text{dist}(T(\tilde{t})\gamma, \mathcal{A}) < \varepsilon, \text{ ou ainda, } d(T(\tilde{t})z, \mathcal{A}) < \varepsilon \quad \forall z \in \gamma.$$

Ora, como $x_0 \in \gamma$, existe $\tilde{x} \in \gamma$ tal que $x_0 = T(\tilde{t})\tilde{x}$. Então $d(x_0, \mathcal{A}) = d(T(\tilde{t})\tilde{x}, \mathcal{A}) < \varepsilon$, o que é uma contradição. □

O próximo lema, apesar de simples, será muito usado em resultados futuros.

Lema 2.1.9. *Sejam K um subconjunto compacto de um espaço métrico X e $\{x_n\} \subset X$ tal que*

$$d(x_n, K) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então, existe subsequência de $\{x_n\}$ que converge para um ponto de K .

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $x_{nk} \in \{x_n\}$ tal que $d(x_{nk}, K) \leq \frac{1}{k}$. Logo, existe $y_k \in K$ tal que $d(x_{nk}, y_k) \leq \frac{1}{k}$.

Como K é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $y_k \rightarrow y_0$. Portanto, segue que $x_{nk} \rightarrow y_0$. □

Seja \mathcal{A} o atrator de um C_0 semigrupo $\{T(t)\}$ dado por $T(t)u_0 = u(t, u_0)$, $u_0 \in X$.

O resultado a seguir mostra que qualquer solução $u(t, u_0)$ pode ser aproximada, em tempos grandes, por uma solução $v(t, v_0)$ contida no atrator.

Proposição 2.1.10. *Seja $u(t) = T(t)u_0$ uma trajetória em um espaço de fase X e \mathcal{A} o atrator global do C_0 -semigrupo $\{T(t)\}$. Então, dados $\varepsilon > 0$ e $T > 0$, existem $\tau = \tau(\varepsilon, T) > 0$ e uma trajetória $v(t) = T(t)v_0$ contida no atrator, tais que*

$$\|u(t + \tau) - v(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

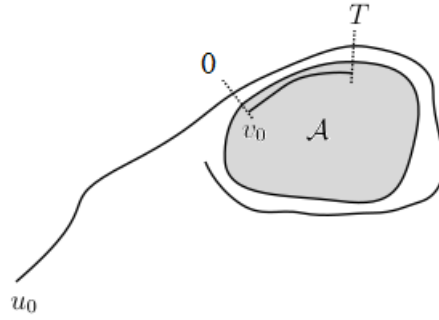


Figura 2.1: Dinâmica das soluções em tempo grande.

Demonstração. Observemos primeiramente que $\left[\bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0 \right] \cup \mathcal{A}$ é compacto. De fato, se tomarmos uma subsequência em \mathcal{A} , certamente existe subsequência convergente, e se tomarmos sequência em $\bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0$, o Lema 2.1.9 garante a existência de subsequência convergente. Como $(t, z) \mapsto T(t)z$ é contínua em relação às condições iniciais, segue que esta aplicação é uniformemente contínua em $[0, T] \times \left[\bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0 \right] \cup \mathcal{A}$.

Logo, dados ε e $T > 0$, é possível obter $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ tal que

$$\|z - w\| \leq \delta \Rightarrow \|T(t)z - T(t)w\| \leq \varepsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Como \mathcal{A} é atrator, existe $\tau = \tau(\varepsilon, T)$ tal que $u(\tau) = T(\tau)u_0$ está numa δ -vizinhança de \mathcal{A} , isto é, $\exists v_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|u(\tau) - v_0\| \leq \delta.$$

Logo, $\|u(t + \tau) - v(t)\| = \|T(t)u(\tau) - T(t)v_0\| \leq \varepsilon, \forall 0 \leq t \leq T$ e $v(t) = T(t)v_0$ está contida no atrator. \square

2.2 Existência do atrator global

Nesta seção forneceremos condições suficientes para que um C_0 -semigrupo $T(\cdot)$ possua atrator global. Ao final da seção, será apresentado um teorema reunindo todas os casos em que é garantida a existência do atrator.

2.2.1 Dissipatividade e compacidade assintótica

Definição 2.2.1. Dizemos que um semigrupo $T(\cdot)$ é:

1. ponto dissipativo se existe um limitado $B \subset X$ que atrai cada ponto de X ;
2. limitado dissipativo se existe um limitado $B \subset X$ que atrai todo subconjunto limitado de X ;
3. assintoticamente compacto se, dado qualquer conjunto fechado, limitado e não vazio \mathcal{W} , positivamente invariante (isto é, $T(t)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$), então existe um compacto não vazio $C \subset \mathcal{W}$ que atrai \mathcal{W} .

Proposição 2.2.2. *Se $T(\cdot)$ possui atrator global, então $T(\cdot)$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração. O fato de $T(\cdot)$ ser limitado dissipativo é imediato, uma vez que \mathcal{A} atrai todos os limitados de X .

Seja agora $\mathcal{W} \subset X$ não vazio, fechado, limitado e tal que $T(t)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$, $\forall t \geq 0$. Sabemos que \mathcal{A} é compacto e, sendo \mathcal{W} fechado, $\mathcal{A} \cap \mathcal{W}$ também é compacto.

Como $T(t)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$ e $d(T(t)\mathcal{W}, \mathcal{A}) \rightarrow 0$, então $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. De fato, se $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, sendo esses dois conjuntos fechados, existiriam vizinhanças $\mathcal{N}_{\mathcal{W}}$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ tais que $\mathcal{W} \subset \mathcal{N}_{\mathcal{W}}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{W}} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \emptyset$. Como $T(t)\mathcal{W} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{N}_{\mathcal{W}} \Rightarrow T(t)\mathcal{W} \not\subset \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \forall t \geq 0$, o que seria um absurdo. Logo, $\mathcal{A} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Afirmamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{W}$ atrai \mathcal{W} . De fato,

$$\text{dist}(T(t)\mathcal{W}, \mathcal{W}) = 0 \text{ e } \text{dist}(T(t)\mathcal{W}, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$\text{dist}(T(t)\mathcal{W}, \mathcal{A} \cap \mathcal{W}) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

□

O objetivo nos próximos resultados é caracterizar o atrator para um C_0 -semigrupo em termos de conjuntos ω -limite.

Proposição 2.2.3. *Seja $T(\cdot)$ um C_0 -semigrupo assintoticamente compacto. Se $B \subset X$ é limitado e existe $\tau_B > 0$ tal que*

$$\bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B$$

é limitado, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto e invariante. Além disso, $\omega(B)$ atrai B .

Demonstração. Temos,

$$\begin{aligned} T(t) \left[\bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B \right] &\subset \bigcup_{s \geq \tau_B} T(s+t)B \subset \bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B \\ \Rightarrow T(t) \left[\overline{\bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B} \right] &\subset \overline{\bigcup_{s \geq \tau_B} T(s)B} \end{aligned}$$

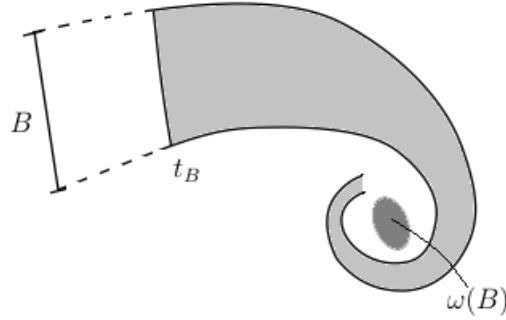


Figura 2.2: Órbita de um conjunto B a partir de um tempo t_B .

Como $\overline{\bigcup_{s \geq t_B} T(s)B}$ é fechado, limitado e não vazio, além de ser positivamente invariante, segue da compacidade assintótica de $T(\cdot)$ que existe $C \subset \overline{\bigcup_{s \geq t_B} T(s)B}$ compacto e não vazio tal que C atrai $\overline{\bigcup_{s \geq t_B} T(s)B}$.

Logo, dado qualquer vizinhança \mathcal{N}_C de C , existe \mathcal{N}'_C vizinhança de C e $\tau_{\mathcal{N}_C} > 0$ tais que

$$\overline{\bigcup_{s \geq \tau_{\mathcal{N}_C}} T(s)B} \subset \overline{\mathcal{N}'_C} \subset \mathcal{N}_C$$

o que implica $\omega(B) \subset \mathcal{N}_C$. Como \mathcal{N}_C foi tomado de forma arbitrária, segue que $\omega(B) \subset C$. De fato, se $\omega(B) \not\subset C$, uma vez que ambos são fechados, deve existir $y \in \omega(B) \setminus C$ tal que $d(y, C) > 0$. Tomando $\mathcal{N}(C, \varepsilon)$, com $\varepsilon = \frac{d(y, C)}{2}$, temos $\omega(B) \not\subset \mathcal{N}(C, \varepsilon)$, o que é um absurdo.

Logo, $\omega(B) \subset C$ e então $\omega(B)$ é compacto.

Consideremos sequências $t_n \nearrow \infty$ e $\{v_n\} \subset B$. Como, para n suficientemente grande, $T(t_n)v_n \rightarrow C$, o qual é compacto, segue que podemos extrair uma subsequência convergente $T(t_{n_k})v_{n_k} \rightarrow y_0$ de modo que $y_0 \in \omega(B)$ e $\omega(B)$ é não vazio.

Mostremos agora que $T(t)\omega(B) = \omega(B)$.

Seja $y \in \omega(B)$. Existem sequências $t_n \nearrow \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \rightarrow y$. Então, $T(t)T(t_n)v_n \rightarrow T(t)y \Rightarrow T(t_n + t)v_n \rightarrow T(t)y \Rightarrow T(t)y \in \omega(B)$. Portanto, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Por outro lado, seja $y \in \omega(B)$. Existem $t_n \nearrow \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tal que $T(t_n)v_n \rightarrow y$. Procuramos por um $w_0 \in \omega(B)$ tal que $T(t)w_0 = y$.

Como $t_n \nearrow \infty$, para n suficientemente grande, $t_n > t$. Logo, $T(t_n)v_n = T(t)T(t_n - t)v_n$.

Ora, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere a vizinhança $\mathcal{N}(C, \frac{1}{k})$ de C . Para cada k , existe n_k tal que

$$T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \in \mathcal{N}\left(C, \frac{1}{k}\right) \Rightarrow d(T(t_{n_k} - t)v_{n_k}, C) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.1.9, passando a uma subsequência, se necessário, $T(t_{n_k} - t)v_{n_k} \rightarrow w_0$ e $w_0 \in \omega(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} T(t_{n_k} - t)v_{n_k} &\rightarrow w_0 \\ \text{e } T(t)T(t_{n_k} - t)v_{n_k} &\rightarrow y. \end{aligned}$$

Portanto, da continuidade de $T(t)$, temos $T(t)w_0 = y$. Assim, $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ e $\omega(B) = T(t)\omega(B)$.

Precisamos agora mostrar que

$$\text{dist}(T(t)B, \omega(B)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Suponha que isto não ocorra, ou seja, que existam $\varepsilon > 0$, $t_n \nearrow \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que

$$d(T(t_n)v_n, \omega(B)) > \varepsilon.$$

Mas $\{T(t_n)v_n\} \rightarrow C$, o que implica que $T(t_n)v_n$ possui subsequência convergente para um ponto de $\omega(B)$, o que é uma contradição. □

O próximo corolário caracteriza o atrator global em termos dos conjuntos ω -limite, o que reforça a relevância dessa definição.

Corolário 2.2.4. *Seja $T(\cdot)$ um C_0 -semigrupo com atrator global \mathcal{A} . Então*

1. *\mathcal{A} é a união dos conjuntos ω -limites de todos os subconjuntos limitados de X , isto é,*

$$\mathcal{A} = \bigcup \{ \omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado} \}.$$

2. *\mathcal{A} é a união dos conjuntos ω -limites de todos os subconjuntos compactos de X , isto é,*

$$\mathcal{A} = \bigcup \{ \omega(K) \mid K \subset X \text{ é compacto} \}.$$

Demonstração. Uma vez que $T(\cdot)$ tem atrator global, segue que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

1. Seja $B \subset X$ limitado. Como \mathcal{A} atrai limitados, existe $\tau_B > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon), \quad \forall t \geq \tau_B.$$

Logo,

$$\bigcup_{t \geq \tau_B} T(t)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}, \varepsilon).$$

Portanto, $\bigcup_{t \geq \tau_B} T(t)B$ é limitado e, pela Proposição 2.2.3, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Além disso,

$$\omega(B) \subset \mathcal{A},$$

pois se $y \in \omega(B)$, então existem $t_n \nearrow \infty$ e $\{v_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)v_n \rightarrow y$. Como \mathcal{A} atrai B , $d(T(t_n)v_n, \mathcal{A}) \rightarrow 0$. O Lema 2.1.9 garante que podemos extrair subsequências $\{t_{n_k}\}, \{v_{n_k}\}$ tal que $T(t_{n_k})v_{n_k} \rightarrow y_0 \in \mathcal{A}$. Logo, $y = y_0$ e $\omega(B) \subset \mathcal{A}$.

Como \mathcal{A} é limitado, temos em particular que $\omega(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Além disso, $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A})$. De fato, seja $y_0 \in \mathcal{A}$. Pela Proposição 2.1.4, existe uma órbita completa que passa por y_0 .

Tome y_{-1} tal que $T(1)y_{-1} = y_0$, y_{-2} tal que $T(2)y_{-2} = y_0$, e assim sucessivamente.

Considere $t_n = n$, $\{y_{-n}\} \subset \mathcal{A}$. Temos $T(t_n)y_{-n} = y_0 \rightarrow y_0$. Logo, $y_0 \in \omega(\mathcal{A})$.

Portanto, $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Logo, fica claro que $\mathcal{A} = \bigcup\{\omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado}\}$.

2. Segue do item anterior. □

Definição 2.2.5. Um semigrupo $T(\cdot)$ é limitado se dado qualquer conjunto limitado $B \subset X$, sua órbita $\gamma(B)$ também é limitada.

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que um C_0 -semigrupo possua atrator.

Teorema 2.2.6. Seja $\{T(\cdot)\}$ um C_0 -semigrupo ponto dissipativo, assintoticamente compacto e limitado. Então $T(\cdot)$ tem um atrator em X .

Demonstração.

Primeiro passo: Inicialmente construiremos um conjunto Ω com a propriedade de que, dado qualquer compacto $C \subset X$, existe uma vizinhança \mathcal{N}_C de C que é absorvida por Ω .

Como $T(\cdot)$ é ponto dissipativo, existe um conjunto limitado \mathcal{W}_0 que atrai todos os pontos de X .

Seja $\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}$ uma vizinhança limitada qualquer de \mathcal{W}_0 . Dado qualquer $v \in X$, segue do fato de \mathcal{W}_0 atrair v e da continuidade de $T(t)$ que existem $\varepsilon_v, \tau_v > 0$ tais que

$$T(t)B(v, \varepsilon_v) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}, \quad \forall t \geq \tau_v.$$

Como a órbita de qualquer limitado é limitada, consideremos $\tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}}$ tal que

$$\Omega := \bigcup_{t \geq \tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}}} T(t)\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}$$

seja limitado. Temos as seguintes propriedades para Ω .

- Ω é positivamente invariante.

- Ω absorve os pontos de X .

De fato, dado $v \in X$, existe τ_v tal que

$$\begin{aligned} \forall t \geq \tau_v \Rightarrow T(t)v \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}_0} &\Rightarrow T(\tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}})T(t)v \in T(\tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}})\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0} \subset \Omega \\ &\Rightarrow T(t')v \in \Omega \quad \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}} + \tau_v \end{aligned}$$

- $\forall v \in X, \exists \varepsilon_v > 0$ e $\tau_v > 0$ tais que

$$\begin{aligned} T(t)B(v, \varepsilon_v) &\subset \mathcal{N}_{\mathcal{W}_0} \quad \forall t \geq \tau_v \\ T(\tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}})T(t)B(v, \varepsilon_v) &\subset T(\tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}})\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0} \subset \Omega \\ T(t')B(v, \varepsilon_v) &\subset \Omega \quad \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}} + \tau_v \end{aligned}$$

Seja então $C \subset X$ um compacto. Temos $C \subset \bigcup_{v \in X} B(v, \varepsilon_v) \Rightarrow \exists v_1, \dots, v_k \in X$ tais que

$$C \subset B(v_1, \varepsilon_{v_1}) \cup \dots \cup B(v_k, \varepsilon_{v_k}) := \mathcal{N}_C.$$

Logo, tomando $\tau^* = \tau_{\mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}} + \max\{\tau_{v_1}, \dots, \tau_{v_k}\}$, onde $\tau_{v_i} > 0$ é o valor para qual $T(t)B(v_i, \varepsilon_{v_i}) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{W}_0}$, $\forall t \geq \tau_{v_i}$, temos

$$\begin{aligned} T(t)C \subset T(t)\mathcal{N}_C &= T(t) \left[\bigcup_{j=1}^k B(v_j, \varepsilon_{v_j}) \right] = \bigcup_{j=1}^k T(t)B(v_j, \varepsilon_{v_j}) \\ &\subset \Omega \quad \forall t \geq \tau^* \end{aligned}$$

Ω é o conjunto com a propriedade desejada.

Segundo passo: Construiremos o conjunto \mathcal{A} compacto, invariante e que atrai limitados.

Seja $B \subset X$ limitado. Por hipótese, a órbita de B é limitada. Segue da Proposição 2.2.3 que $\omega(B)$ é compacto, invariante e atrai B .

Seja $\mathcal{N}_{\omega(B)}$ a vizinhança de $\omega(B)$ que é absorvida por Ω (primeiro passo). Definimos $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$. Como Ω é limitado, segue que \mathcal{A} é compacto, invariante, não vazio e atrai Ω .

Existe $\tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}_{\omega(B)} \quad \forall t \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}},$$

e existe $\tau_B > 0$ tal que

$$\begin{aligned} T(\tau_B)T(t)B &\subset T(\tau_B)\mathcal{N}_{\omega(B)} \subset \Omega \\ T(t')B &\subset \Omega \quad \forall t' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} + \tau_B, \end{aligned}$$

isto é, B é absorvido por Ω .

Como $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$ atrai Ω , dada qualquer vizinhança $\mathcal{N}_{\omega(\Omega)}$ de $\omega(\Omega)$, existe τ_Ω tal que

$$T(t)\Omega \subset \mathcal{N}_{\omega(\Omega)} \quad \forall t \geq \tau_\Omega.$$

Daí,

$$T(t'')B \subset \mathcal{N}_{\omega(\Omega)} \quad \forall t'' \geq \tau_{\mathcal{N}_{\omega(B)}} + \tau_B + \tau_\Omega.$$

Logo, $\mathcal{A} = \omega(\Omega)$ atrai B . □

Portanto, temos as seguintes condições necessárias e suficientes para a existência de atrator global.

Corolário 2.2.7. *Seja $T(\cdot)$ um C_0 -semigrupo limitado. $T(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, é ponto dissipativo e assintoticamente compacto.*

Um resultado importante é apresentado a seguir, onde caracterizamos semigrupos assintoticamente compactos em termos de seqüências.

Proposição 2.2.8. *Um semigrupo limitado $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto se, e somente se, para quaisquer seqüências $t_n \nearrow \infty$ e $\{x_n\}$ limitada, $\{T(t_n)x_n\}$ admite subsequência convergente.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha $T(\cdot)$ assintoticamente compacto. Seja $B \subset X$ limitado. Segue então que $\gamma^+(B)$ é limitada.

A Proposição 2.2.3 garante que $\omega(B)$ é compacto, invariante, não vazio e atrai B .

Logo, $\text{dist}(T(t_n)B, \omega(B)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{dist}(T(t_n)v_n, \omega(B)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\omega(B)$ é compacto, podemos extrair subsequência convergente pelo Lema 2.1.9.

(\Leftarrow) Seja B não vazio, fechado, limitado e positivamente invariante. Logo, $\forall t \geq 0, T(t)B \subset B \Rightarrow \bigcup_{t \geq 0} T(t)B \subset B$ e $\bigcup_{t \geq 0} T(t)B$ é então limitado.

Procuramos um conjunto $C \subset B$ compacto, não vazio e que atrai B . Veremos que tal conjunto é $\omega(B)$.

1. Observe que $T(t)B \subset B \Rightarrow \overline{\bigcup_{t \geq 0} T(t)B} \subset \overline{B} = B \Rightarrow \omega(B) \subset B$.

2. $\omega(B)$ é invariante.

A demonstração de que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ é análoga à feita na Proposição 2.2.3. Para ver que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, tomemos $y \in \omega(B)$. Existe seqüências $t_n \nearrow \infty, \{v_n\} \subset B$ tal que $T(t_n)v_n \rightarrow y$. Dado $t > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$. Temos

$$T(t_n)v_n \rightarrow y \Rightarrow T(t)T(t_n - t)v_n \rightarrow y \tag{2.3}$$

Como $t_n - t \rightarrow \infty$, $\{v_n\} \subset B$, existe, por hipótese, subsequência $T(t_{n'} - t)v_{n'} \rightarrow w$ e $w \in \omega(B)$. Voltando a (2.3)

$$T(t)T(t_{n'} - t)v_{n'} \rightarrow y \text{ e } T(t)T(t_{n'} - t)v_{n'} \rightarrow T(t)w,$$

o que implica $y = T(t)w \in T(t)\omega(B)$.

3. $\omega(B)$ é compacto.

Sabemos que, para todo $t > 0$ $T(t)\omega(B) = \omega(B)$ e $\omega(B)$ é limitado ($\omega(B) \subset B$). Seja $\{y_n\} \subset \omega(B)$ e tome $t_n = n$. Para cada n existe $x_n \in \omega(B)$ tal que $y_n = T(t_n)x_n$.

Por hipótese, existe subsequência $T(t_{n'})x_{n'}$ convergente $\Rightarrow \{y_{n'}\}$ é convergente $\Rightarrow \omega(B)$ é compacto.

4. $\omega(B)$ atrai B .

Segue de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.2.3.

Segue dos itens anteriores que $\{T(t)\}$ é assintoticamente compacto. □

2.2.2 Existência de um compacto que atrai

A existência de um conjunto compacto que atrai limitados garante a existência de atrator global para o semigrupo, como demonstra o teorema a seguir.

Teorema 2.2.9. *O C_0 -semigrupo $T(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, existe um compacto $K \subset X$ que atrai limitados de X . Neste caso, $\mathcal{A} = \omega(K)$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Imediato.

(\Leftarrow) Tome $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \{\omega(B); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado}\}}$.

Seja $B \subset X$ limitado. Uma vez que K atrai B , existe $\tau_B > 0$ tal que $\bigcup_{t \geq \tau_B} T(t)B$ é limitado. Segue da Proposição 2.2.3 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B . Veja que na Proposição 2.2.3 é necessário que $T(\cdot)$ seja assintoticamente compacto. Isto é garantido pela existência do compacto que atrai (basta replicar a Proposição 2.2.2 usando o compacto K ao invés do atrator).

Do Lema 2.1.9, $\omega(B) \subset K$.

1. \mathcal{A} é compacto, pois $\mathcal{A} \subset K$ e \mathcal{A} é fechado.

2. \mathcal{A} atrai limitados, pois dado qualquer $B \subset X$ limitado, B é atraído por $\omega(B)$ e, conseqüentemente, por \mathcal{A} .

3. \mathcal{A} é invariante.

Seja $x_0 \in \omega(B)$ para algum B limitado $\Rightarrow T(t)x_0 \in \omega(B)$, pois $\omega(B)$ é invariante. Logo, $T(t)\bigcup\{\omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado}\} \subset \bigcup\{\omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado}\}$, o que implica

$$T(t)\overline{\bigcup\{\omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado}\}} \subset \overline{\bigcup\{\omega(B) \mid B \subset X \text{ é limitado}\}},$$

ou seja, $T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

Seja $x_0 \in \omega(B)$. Como $\omega(B)$ é invariante, existe t tal que $T(t)y_0 = x_0$, $y_0 \in \omega(B) \subset \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A} \subset T(t)\mathcal{A}$ (passando pelos mesmos argumentos feitos acima).

Resta apenas mostrar que $\mathcal{A} = \omega(K)$.

Ora, $\omega(K)$ é compacto e invariante. Como \mathcal{A} atrai $\omega(K)$, segue da invariância de $\omega(K)$ que $\omega(K) \subset \mathcal{A}$.

Por outro lado, seja $B \subset X$ limitado. Do Lema 2.1.9, $\omega(B) \subset K$. Como K é atraído por $\omega(K)$, segue que $\omega(B)$ é atraído por $\omega(K)$. Mas $\omega(B)$ é invariante. Logo, $\omega(B) \subset \omega(K)$ e assim $\mathcal{A} \subset \omega(K)$. \square

O teorema anterior pode ser aplicado a problemas práticos. Muitas vezes é possível mostrar a existência de um conjunto compacto no plano de fases que absorve limitados e então a existência de atrator global é garantida.

Reunindo os resultados de existência de atrator global para semigrupos apresentado anteriormente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.10. *Seja $T(\cdot)$ um C_0 -semigrupo limitado. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $T(\cdot)$ possui atrator global.
2. $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e ponto dissipativo.
3. $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo.
4. $T(\cdot)$ possui um compacto que atrai limitados.

2.3 Continuidade da família de atratores globais

Estamos interessados em estudar as semicontinuidades dos atratores para determinarmos sob quais condições pequenas perturbações em um C_0 -semigrupo $T_0(\cdot)$ com atrator \mathcal{A}_0 , gerará semigrupos $T_\eta(\cdot)$ com atratores \mathcal{A}_η , de alguma forma próximos de \mathcal{A}_0 .

A semicontinuidade superior da família de atratores irá implicar que pequenas alterações no semigrupo não causem uma explosão do atrator, enquanto a semicontinuidade inferior irá implicar que pequenas alterações no semigrupo não causem a implosão do atrator.

Definição 2.3.1. *Seja B_0 um conjunto em um espaço de Banach X e $\{B_\eta\}$ uma família de subconjuntos em X , $\eta \in [0, \eta_0]$.*

1. *Dizemos que $\{B_\eta\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$ se $\text{dist}(B_\eta, B_0) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$.*
2. *Dizemos que $\{B_\eta\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$ se $\text{dist}(B_0, B_\eta) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$.*
3. *Dizemos que $\{B_\eta\}$ é contínua em $\eta = 0$ se é semicontínua inferior e superiormente.*

2.3.1 Semicontinuidade superior da família de atratores globais

As hipóteses que garantem a semicontinuidade superior dos atratores são mais fracas do que as que serão exigidas para garantir a semicontinuidade inferior.

Teorema 2.3.2. *Suponhamos que a cada $\eta \in [0, \eta_0]$ esteja associado um C_0 -semigrupo $\{T_\eta(t)\}$ que possui atrator global \mathcal{A}_η . Além disso, suponhamos que exista $B \subset X$ limitado tal que*

$$\bigcup_{0 \leq \eta \leq \eta_0} \mathcal{A}_\eta \subset B, \quad (2.4)$$

e que T_η convirja para T_0 no sentido que, para cada $t > 0$, $T_\eta(t)u_0 \rightarrow T_0(t)u_0$, uniformemente em limitados $Y \subset X$, isto é,

$$\sup_{u_0 \in Y} \|T_\eta(t)u_0 - T_0(t)u_0\| \rightarrow 0 \text{ quando } \eta \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Então $\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Demonstração. Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \eta(\varepsilon) < \eta_0$ tal que

$$\eta \leq \eta(\varepsilon) \Rightarrow \mathcal{A}_\eta \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \varepsilon)$$

Como B é limitado e \mathcal{A}_0 é o atrator de $T_0(\cdot)$, segue que existe $\tau \geq 0$ tal que $T_0(t)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \frac{\varepsilon}{2})$, $\forall t \geq \tau$.

Uma vez que $T_\eta \rightarrow T_0$ quando $\eta \rightarrow 0$ e B é limitado, existe $\eta(\varepsilon) \in (0, \eta_0)$ tal que

$$\sup_{u_0 \in B} \|T_\eta(\tau)u_0 - T_0(\tau)u_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \eta \leq \eta(\varepsilon).$$

Temos então $T_\eta(\tau)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \varepsilon)$, pois $T_0(\tau)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \frac{\varepsilon}{2})$ e $\|T_\eta(\tau)B - T_0(\tau)B\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ora,

$$\mathcal{A}_\eta = T_\eta(\tau)\mathcal{A}_\eta \subset T_\eta(\tau)B \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \varepsilon), \quad \forall \eta \leq \eta(\varepsilon),$$

isto é, $\{\mathcal{A}_\eta\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. □

2.3.2 Semicontinuidade inferior da família de atratores globais

O teorema que garante a semicontinuidade inferior dos atratores será válido para um tipo particular de atrator, chamado “gradient-like”. Ele recebe esse nome pois apresenta uma estrutura semelhante à dos atratores que aparecem na classe de problemas gradientes.

Definição 2.3.3. $u^* \in X$ é um ponto de equilíbrio de (2.1) se $f(u^*) = 0$. Neste caso, u^* é uma solução constante para o problema.

Definição 2.3.4. Seja u^* um ponto de equilíbrio de (2.1).

1. A variedade instável de u^* é o conjunto

$$W^u(u^*) = \{\eta \in X; \ u(t, \eta) \text{ está definido para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e} \\ u(t, \eta) \rightarrow u^* \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

2. Dado $\delta > 0$, a δ -variedade instável local de u^* é

$$W_\delta^u(u^*) = \{w \in W^u(u^*); \|w - u^*\| \leq \delta\}.$$

Teorema 2.3.5. Suponhamos válidas as hipóteses do Teorema 2.3.2 e, além disso, suponhamos que

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{z \in \xi} \overline{W^u(z)},$$

onde ξ é o conjunto de equilíbrios e contém apenas uma quantidade finita de pontos.

Suponhamos ainda que as variedades instáveis locais se comportem de forma contínua quando $\eta \rightarrow 0$, no sentido de que se $z_0 \in W_\delta^u(u_0^*)$, existam u_η^* equilíbrio para $T_\eta(\cdot)$, suficientemente próximo de u_0^* , e $z_\eta \in W_\delta^u(u_\eta^*)$, suficientemente próximo de z_0 , quando η e δ são suficientemente pequenos.

Então, $\text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ e família $\{\mathcal{A}_\eta\}$ é contínua em $\eta = 0$.

Demonstração. Precisamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) \in (0, \eta_0)$ tal que

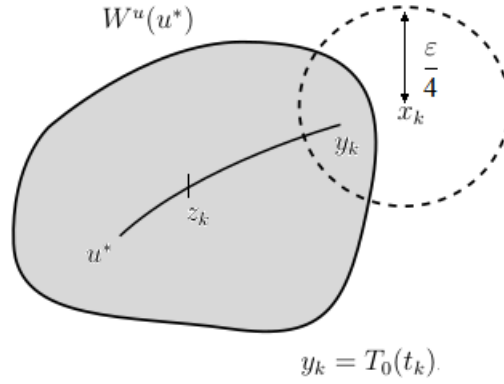
$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_\eta, \varepsilon), \quad \forall \eta \leq \eta(\varepsilon),$$

ou, equivalentemente, que dado $u \in \mathcal{A}_0$, existe $u_\eta \in \mathcal{A}_\eta$, para $\eta \leq \eta(\varepsilon)$, que dista no máximo ε de u_0 .

Como \mathcal{A}_0 é compacto, dado a cobertura

$$\bigcup_{u_0 \in \mathcal{A}_0} B\left(u_0, \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

de \mathcal{A}_0 , existem $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{A}_0$ tais que $\mathcal{A}_0 \subset \bigcup_{k=1}^N B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{4}\right)$.



Uma vez que $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{z \in \xi} \overline{W^u(z)}$, segue que para cada $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, existe $y_k \in W^u(u^*)$, para algum $u^* \in \xi$, tal que

$$\|x_k - y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Precisamos que os pontos da variedade instável estejam suficientemente próximos do equilíbrio para então podermos usar a continuidade. Mas como $y_k \in W^u(u^*)$, da definição de variedade instável, existe $z_k \in W^u(u^*)$ suficientemente próximo de u^* tal que

$$y_k = T_0(t_k)z_k, \quad t_k > 0.$$

Além disso, como $u \mapsto T_0(t_k)u$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u - z_k\| < \delta \Rightarrow \|T_0(t_k)z_k - T_0(t_k)u\| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall k = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

Usando a continuidade do semigrupo e o fato de $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \delta)$ ser limitado, segue que existe $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ tal que

$$\|T_\eta(t_k)u - T_0(t_k)u\| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \forall u \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \delta) \quad \forall k = 1, 2, \dots, N \text{ e } \eta \in (0, \eta_1). \quad (2.7)$$

Segue da continuidade das variedades instáveis que existe $z_k^\eta \in \mathcal{W}_\eta^u(u^*) \subset \mathcal{A}_\eta$ tal que

$$\|z_k^\eta - z_k\| < \delta \text{ e } z_k^\eta \in \mathcal{N}(\mathcal{A}_0, \delta).$$

Segue de (2.6) e (2.7)

$$\begin{aligned} \|T_\eta(t_k)z_k^\eta - x_k\| &\leq \|T_\eta(t_k)z_k^\eta - T_0(t_k)z_k^\eta\| + \|T_0(t_k)z_k^\eta - T_0(t_k)z_k\| + \|y_k - x_k\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

com $\varsigma_k^\eta = T_\eta(t_k)z_k^\eta \in \mathcal{A}_\eta$.

Então, $\forall x \in \mathcal{A}_0$, $\exists x_i \in \{x_k\}_{k=1}^N$ e $\exists \varsigma_i^\eta \in \mathcal{A}_\eta$ tal que

$$\|x - \varsigma_i^\eta\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i - \varsigma_i^\eta\| \leq \varepsilon,$$

ou seja, $dist(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$.

Além disso, pelo Teorema 2.3.2, $\{\mathcal{A}_\eta\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$. Logo, $\{\mathcal{A}_\eta\}$ é contínua em $\eta = 0$ \square

Capítulo 3

Atratores Pullback para problemas não autônomos

Até então consideramos apenas problemas do tipo

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(s) = u_s \quad t \geq s, \end{cases}$$

que independe do tempo inicial, mas apenas do tempo decorrido $(t-s)$. De fato, tomando $w(t) = u(t+s)$ e então o problema anterior pode ser escrito como

$$\begin{cases} w'(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u_s \quad t \geq 0. \end{cases}$$

O problema acima está associado ao semigrupo $u(t, s, u_s) = T(t-s)u_s$ e avaliar a dinâmica quando $t \rightarrow \infty$ equivale a avaliar a dinâmica quando $s \rightarrow -\infty$.

Consideremos então o caso não autônomo

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(s) = u_s \quad t \geq s. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para este caso, não podemos proceder como anteriormente, pois a solução depende tanto de t quanto da condição inicial.

Portanto, as soluções de (3.1) não geram um semigrupo, mas uma família de operadores, a qual chamaremos de *processo* (ou *semiprocesso*). Diferentemente do caso autônomo, as dinâmicas $t \rightarrow \infty$ e $s \rightarrow -\infty$ não estão necessariamente relacionadas. À dinâmica em que $t \rightarrow \infty$ damos o nome de *dinâmica “forward”*. À dinâmica em que $s \rightarrow -\infty$ chamamos de *“pullback”*.

3.1 Caracterização dos atratores pullback

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família de aplicações contínuas*

$$\{S(t, s) : X \rightarrow X, t \geq s\}$$

é um processo se satisfaz, para todo $t, s \in \mathbb{R}, t \geq s$ e $u_s \in X$:

1. $S(t, t) = Id$.
2. $S(t, \tau)S(\tau, s) = S(t, \tau) \circ S(\tau, s) = S(t, s)$
3. $(t, s, u_s) \rightarrow S(t, s)u_s$ *é contínua.*

Algumas observações referentes à definição acima devem ser feitas:

1. Denotaremos o processo por $\{S(t, s)\}$ ou $S(\cdot, \cdot)$.
2. O processo, se associado a uma equação diferencial, retorna a solução se fizermos $t \mapsto S(t, s)u_s$, $t \in [s, \infty)$, isto é,

$$u(t, s, u_s) = S(t, s)u_s.$$

3. Da mesma forma, soluções de um problema não autônomo definidas em $[s, \infty)$ geram um processo, dado por $S(t, s)u_s = u(t, s, u_s)$.
4. Dado um semigrupo $T(\cdot)$, podemos obter um processo através da identificação

$$S_T(t, s)x = T(t - s)x$$

e tal processo é chamado de *processo associado ao semigrupo $T(\cdot)$* . Neste caso, os sistemas autônomos formam um subconjunto dos sistemas não autônomos.

Definição 3.1.2. *Uma família de conjuntos dependente do tempo é uma coleção $\{Z(t) \subset X, t \in \mathbb{R}\}$. Por simplicidade, denotaremos tal família por $Z(\cdot)$.*

Definição 3.1.3. *Uma família $A(\cdot)$ de conjuntos dependente do tempo é invariante pelo processo $S(\cdot, \cdot)$ se*

$$S(t, s)A(s) = A(t) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, t \geq s.$$

Observação: vamos nos referir a tal família como “conjunto invariante”, a fim de tornar mais simples a escrita.

Interpretação geométrica da invariância

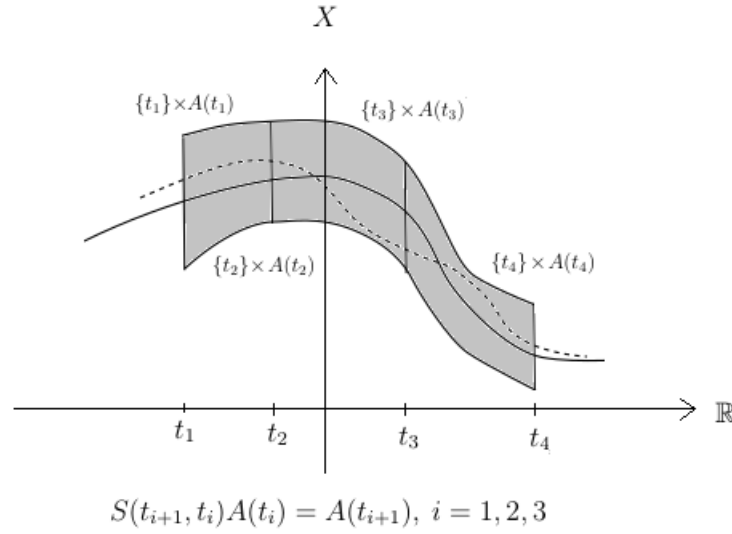


Figura 3.1: Invariância para uma família $A(\cdot)$

Definição 3.1.4. Uma função contínua $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global de $S(\cdot, \cdot)$ se $\forall t, s \in \mathbb{R}, t \geq s$

$$S(t, s)\xi(s) = \xi(t).$$

Veja que tal definição é uma extensão da definição de solução global para o caso autônomo, pois se $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é solução global de $T(\cdot)$, então

$$S_T(t, s)\xi(s) = T(t - s)\xi(s) = \xi((t - s) + s) = \xi(t).$$

Proposição 3.1.5. Uma família $A(\cdot)$ é invariante se, e somente se, é uma coleção de soluções globais. Neste caso, cada $A(t)$ é o conjunto formado por todas as soluções avaliadas em t .

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha que $A(\cdot)$ seja invariante considere $u_s \in A(s)$. Mostraremos que existe $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $u(s) = u_s$ e $u(t) \in A(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Defina $\xi_0 : [s, \infty) \rightarrow X$ dada por $\xi_0(t) = S(t, s)u_s$. Claramente, $\xi_0(s) = u_s$ e $\xi_0(t) \in A(t) \forall t \geq s$, pois $A(\cdot)$ é invariante.

Construiremos uma solução global indutivamente. Como $S(s, s - 1)A(s - 1) = A(s)$, existe algum $u_{s-1} \in A(s - 1)$ tal que $S(s, s - 1)u_{s-1} = u_s$.

Seja $\xi_{-1}(t) = S(t, s - 1)u_{s-1}, s - 1 \leq t \leq s$.

Da mesma forma, tome $u_{s-2} \in A(s - 2)$ tal que $S(s - 1, s - 2)u_{s-2} = u_{s-1}$ e defina $\xi_{-2}(t) = S(t, s - 2)u_{s-2}, s - 2 \leq t \leq s - 1$.

Procedendo desta forma, encontraremos a solução global que em s vale u_s e está contida em $A(\cdot)$, dada por

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & \text{se } t \in [s, \infty) \\ \xi_{-n}(t), & \text{se } t \in [s-n, s-n+1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $A(\cdot)$ seja uma coleção de soluções globais.

Dados $t, s \in \mathbb{R}$, $t \geq s$, tomando $y \in A(s)$, temos $y = u(s)$, onde $u(\cdot)$ é uma solução global em $A(\cdot)$. Logo, $S(t, s)y = S(t, s)u(s) = u(t) \in A(t)$. Ou seja, $S(t, s)A(s) \subset A(t)$.

Seja agora $y \in A(t)$. Existe $u(\cdot)$ solução global tal que $y = u(t)$. Tome $y_s = u(s) \in A(s)$. Temos $y(t) = u(t) = S(t, s)u(s) = S(t, s)y_s$ e então, $A(t) \subset S(t, s)A(s)$. \square

Distinção da invariância nos casos autônomo e não autônomo

Considere o problema

$$\begin{cases} x'(t) = -x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \geq 0,$$

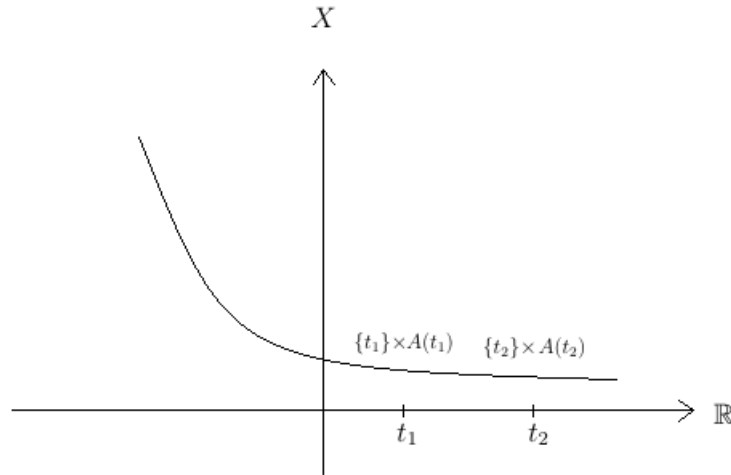


Figura 3.2: Gráfico da solução $x(t) = e^{-t}$.

A órbita completa $Y = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} e^{-t}$ é um conjunto invariante para o problema acima segundo o que foi definido no Capítulo 2.

Porém, para um problema não autônomo, a órbita completa é uma família invariante e então $A(t) = \{e^{-t}\}$, para $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.1.6. *Seja $S_T(\cdot)$ o processo associado ao semigrupo $T(\cdot)$ e denotemos por $\Gamma(E(\cdot))$, onde $E(\cdot)$ é um conjunto invariante, a união das órbitas de todas as soluções de $E(\cdot)$.*

1. Se $E(\cdot)$ é uma família invariante para um semigrupo $S_T(\cdot, \cdot)$, então $\Gamma(E(\cdot))$ é invariante para $T(\cdot)$.
2. Se $E(t) = E$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então E é invariante para $T(\cdot)$ se, e somente se, $E(\cdot)$ é invariante para $S_T(\cdot, \cdot)$.

Demonstração.

1. Devemos mostrar que $T(t)\Gamma(E(\cdot)) = \Gamma(E(\cdot))$. Sabemos que $S_T(t, s)E(s) = E(t)$. Logo,

$$T(t-s)E(s) = E(t) \Rightarrow T(t)E(0) = E(t).$$

Dado $y \in \Gamma(E(\cdot))$, existe $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $u(s) = y$. Tome $u^{+s} : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $u^{+s}(0) = u(s) = y$. Claramente, $\Gamma(u^{+s}) = \Gamma(u) \Rightarrow \Gamma(u^{+s}) \subset \Gamma(E(\cdot))$. Logo, $y \in E(0) \Rightarrow T(t)y \in E(t) \subset \Gamma(E(\cdot)) \Rightarrow T(t)\Gamma(E(\cdot)) \subset \Gamma(E(\cdot))$.

Com a mesma argumentação, vemos que $\Gamma(E(\cdot)) \subset T(t)\Gamma(E(\cdot))$.

2. Se $E(t) = E$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e a família é invariante, então pelo item acima, $\Gamma(E(\cdot)) = E$ é invariante por $T(\cdot)$.

Por outro lado, se E é invariante por $T(\cdot)$, então $S_T(t, s)E(s) = T(t-s)E = E = E(t)$.

□

Vimos, na Proposição 2.1.8, que se \mathcal{A} é o atrator de um semigrupo $T(\cdot)$, então \mathcal{A} é o conjunto formado pela união de todas as soluções globais limitadas, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{x(t), t \in \mathbb{R} : x(\cdot) \text{ é solução global e limitada}\} \\ &= \{y_0 \in X : \text{existe solução global e limitada } y : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ tal que } y(0) = y_0\}. \end{aligned}$$

Vamos generalizar o conceito de atrator para a dinâmica “pullback”, de forma a obter um resultado similar ao apresentado acima.

Definição 3.1.7. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo.*

1. Dizemos que um conjunto $K \subset X$ pullback atrai $B \subset X$ sob o processo $S(\cdot, \cdot)$ no tempo $t \in \mathbb{R}$ se

$$\text{dist}(S(t, s)B, K) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -\infty, s \leq t.$$

2. Dizemos que uma família $K(\cdot)$ pullback atrai $B \subset X$ sob o processo $S(\cdot, \cdot)$ se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{dist}(S(t, s)B, K(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -\infty, s \leq t.$$

3. Dizemos que uma família $K(\cdot)$ pullback atrai limitados de X se para cada $B \subset X$ limitado,

$$\text{dist}(S(t, s)B, K(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -\infty, s \leq t.$$

Iremos omitir o processo $S(\cdot, \cdot)$ quando formos falar de pullback atração sempre que este estiver subentendido. Definimos então o atrator pullback para um processo.

Definição 3.1.8. O atrator pullback de um processo $S(\cdot, \cdot)$ é uma família $\{\mathcal{A}(t) \subset X \mid t \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo:

1. $\mathcal{A}(t)$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. A família $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante.
3. $\mathcal{A}(\cdot)$ pullback atrai limitados de X pelo processo $S(\cdot, \cdot)$.
4. $\mathcal{A}(\cdot)$ é a família minimal de fechados que satisfaz o item (3).

Observações:

1. O atrator pullback é uma família dependente do tempo, não necessariamente um conjunto fixado em X .
2. A propriedade (4) não segue de forma natural como na definição de atrator para semigrupos. Isto ocorre pois no caso de sistemas autônomos o atrator “atrai a si mesmo”, mas no caso pullback, o atrator atrai limitados independente do tempo $t \in \mathbb{R}$, sendo que ele mesmo não se encaixa nesta categoria. O exemplo a seguir ilustra a necessidade de (4) aparecer na definição.

Exemplo 3.1.9. Considere o semigrupo $T(t) = e^{-t}$, o processo associado $S_T(t, s) = e^{-(t-s)}$ e a família $\{\mathcal{A}(t) = [-e^{-t}, e^{-t}]\}$.

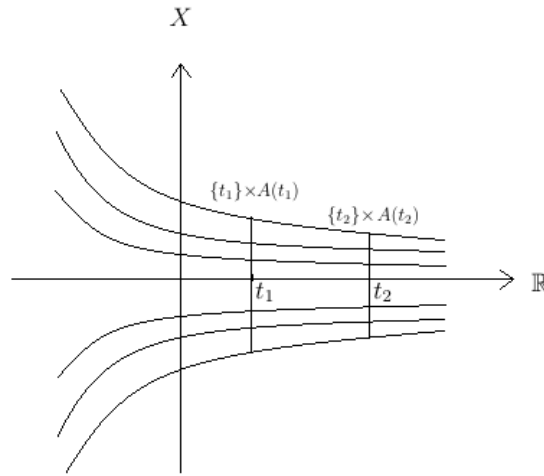


Figura 3.3: Família $\{\mathcal{A}(t)\} = [-e^{-t}, e^{-t}]$.

- $\mathcal{A}(t)$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante, pois é uma coleção de órbitas de soluções globais.
- Se $B \subset X$ é limitado, então $B \subset [-x_0, x_0]$ e, para $s \rightarrow -\infty$, $e^{-(t-s)} \rightarrow 0$ e

$$[-e^{-(t-s)}x_0, e^{-(t-s)}x_0] \subset [-e^{-t}, e^{-t}] \text{ para } s \leq s_0.$$

Logo,

$$\text{dist}(S_T(t, s)B, \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -\infty.$$

- Tal família com essas propriedades não é minimal, uma vez que $\tilde{\mathcal{A}}(\cdot)$, dada por $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, satisfaz (3) da Definição 3.1.8 e é compacta e invariante, sendo assim $\tilde{\mathcal{A}}(\cdot)$ é o atrator pullback do processo.

Definição 3.1.10.

1. Dizemos que uma solução global $\xi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X$ de um processo $S(\cdot, \cdot)$ é limitada no passado (respectivamente, limitada no futuro) se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) \mid t \leq \tau\}$ ($\{\xi(t) \mid t \geq \tau\}$) é limitado em X .
2. Dizemos que uma família de conjuntos dependente do tempo $B(\cdot)$ é limitada no passado (respectivamente, limitada no futuro) se existe $\tau \in \mathbb{R}$ e $B \subset X$ limitado tal que $B(t) \subset B$, $\forall t \leq \tau$ ($B(t) \subset B$, $\forall t \geq \tau$).

Proposição 3.1.11. Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo com atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Se $\xi(\cdot)$ é uma solução global limitada no passado, então $\xi(t) \in \mathcal{A}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\{\xi(t) \mid t \leq \tau\}$ é limitado. Como ξ é solução global, temos que $\forall t, s \in \mathbb{R}, t \geq s, S(t, s)\xi(s) = \xi(t)$.

Como $\xi(s) \in \{\xi(t) \mid t \leq \tau\}$ para s suficientemente pequeno, segue que $d(S(t, s)\xi(s), \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$, o que equivale a $d(\xi(t), \mathcal{A}(t)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty \Rightarrow d(\xi(t), \mathcal{A}(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \xi(t) \in \mathcal{A}(t), \forall t \in \mathbb{R}$. \square

Pela proposição anterior, se $\mathcal{U}(t) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é solução global limitada no passado}\}$ e $\mathcal{A}(t), t \in \mathbb{R}$, é o atrator pullback do processo $S(\cdot, \cdot)$, então

$$\mathcal{U}(t) \subset \mathcal{A}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para conseguirmos caracterizar o atrator pullback como fizemos para o atrator global, precisamos exigir hipóteses mais fortes sobre o atrator pullback.

No teorema a seguir, sob a hipótese de que o atrator pullback seja limitado no passado, vamos caracterizá-lo em termos das soluções globais limitadas no passado.

Teorema 3.1.12. *Suponha que o atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$ de $S(\cdot, \cdot)$ seja limitado no passado. Então*

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{U}(t) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é solução global limitada no passado}\}.$$

Demonstração. Basta provar que $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{U}(t)$. Dado $x \in \mathcal{A}(t)$, existe solução global $\xi(\cdot) \in \mathcal{A}(\cdot)$ tal que $x = \xi(t) \in \mathcal{A}(t)$, uma vez que $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante.

Como $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado no passado, segue que $\xi(\cdot)$ é limitada no passado. Logo, $x \in \mathcal{U}(t)$ e $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{U}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Corolário 3.1.13. *Seja $\mathcal{A}(\cdot)$ o atrator pullback de um processo $S(\cdot, \cdot)$. Se $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado, então*

$$\mathcal{A}(t) = \zeta(t) = \{\xi(t) \mid \xi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é solução global limitada}\},$$

como na caracterização de atratores globais para semigrupos.

Demonstração. Como toda solução de $\zeta(t)$ é limitada no passado, segue que $\zeta(t) \subset \mathcal{A}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dado $x \in \mathcal{A}(t)$, existe solução global $\xi(\cdot) \in \mathcal{A}(\cdot)$ tal que $\xi(t) = x$. Uma vez que $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado, $\xi(\cdot)$ é globalmente limitada e $\mathcal{A}(t) \subset \zeta(t)$. \square

3.2 Comparação entre os atratores pullback e global para problemas autônomos

Nesta seção relacionaremos o atrator global para um semigrupo $T(\cdot)$ com o atrator pullback para o processo associado $S_T(\cdot, \cdot)$.

Proposição 3.2.1. *Sejam $T(\cdot)$ um semigrupo e $S_T(t, s) = T(t - s)$ o processo associado. Então $T(\cdot)$ possui atrator global \mathcal{A} se, e somente se, $S_T(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Além disso, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponhamos que $T(\cdot)$ tenha atrator global \mathcal{A} e definamos a família dependente do tempo $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:

- $\mathcal{A}(t)$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante, pois $S_T(t, s)\mathcal{A}(s) = T(t - s)\mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$.
- $\mathcal{A}(\cdot)$ pullback atrai limitados de X , uma vez que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ e \mathcal{A} atrai limitados.
- Seja $C(t)$ uma família de fechados que atrai limitados. Como $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}$ é limitado, segue que

$$\begin{aligned} & \text{dist}(S_T(t, s)\mathcal{A}(s), C(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow & \text{dist}(S_T(t, s)\mathcal{A}, C(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow & \text{dist}(\mathcal{A}, C(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow & \mathcal{A} \subset C(t) \\ \Rightarrow & \mathcal{A}(t) \subset C(t). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}(\cdot)$ é o atrator pullback de $S_T(\cdot, \cdot)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $S_T(\cdot, \cdot)$ tenha atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$. Para $t = 0$, $\mathcal{A}(0)$ é compacto e pullback atrai limitados de X no instante 0. Logo, para qualquer $D \subset X$ limitado,

$$\text{dist}(T(-s)D, \mathcal{A}(0)) = \text{dist}(S_T(0, s)D, \mathcal{A}(0)) \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0,$$

isto é, $\mathcal{A}(0)$ é um compacto que atrai limitados de X sob o semigrupo $T(\cdot)$. Portanto, $T(\cdot)$ possui atrator global \mathcal{A} e segue da implicação anterior que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

3.3 Existência do atrator pullback

Para obter a existência de atratores pullback para processos, estenderemos as definições apresentadas para semigrupos de forma a obtermos resultados análogos aos de existência obtidos no Teorema 2.2.10. Provaremos as equivalências (1) \Leftrightarrow (3) e (1) \Leftrightarrow (4) do Teorema 2.2.10.

Inicialmente definiremos os conjuntos pullback ω -limite. Com um certo abuso de notações, denotaremos $\{s_k\} \leq t$ para indicar que $\forall k \in \mathbb{N}, s_k \leq t$, $\{s_k\} \searrow -\infty$ para indicar que $\{s_k\}$ é uma sequência decrescente que tende a $-\infty$, e $\{s_k\} \subset X$ para indicar que $\forall k \in \mathbb{N}, s_k \in X$.

Definição 3.3.1. O conjunto pullback ω -limite de um conjunto B em t é definido por

$$\omega(B, t) = \{y \in X \mid \exists \{s_n\} \leq t, \{s_n\} \searrow -\infty \text{ e } \{x_n\} \subset B \text{ tais que } S(t, s_n)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y\},$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(B, t) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)B}.$$

Observação: No caso de processos autônomos, $\omega(B) = \omega(B, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, suponha $x \in \omega(B, t) \Rightarrow \exists \{s_k\} \searrow -\infty, \{x_k\} \subset B$ tais que

$$S(t, s_k)x_k \rightarrow x \Rightarrow T(t - s_k)x_k \Rightarrow x \in \omega(B).$$

Por outro lado, se $x \in \omega(B), \exists \{t_k\} \searrow -\infty, \{x_k\} \subset B$ tais que

$$T(t - t_k)x_k \rightarrow x \Rightarrow S(t, s_k)x_k \rightarrow x \Rightarrow x \in \omega(B, t).$$

Os próximos resultados fornecerão condições suficientes para garantir a invariância e a compacidade de $\omega(B, t)$, assim como a pullback atração que esse conjunto exerce em B no tempo t . O primeiro destes resultados é referente à invariância do conjunto.

Lema 3.3.2. Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo e $B \subset X$ um subconjunto qualquer. Então

1. $\omega(B, \cdot)$ é positivamente invariante, isto é,

$$S(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t) \quad \forall t \geq s.$$

2. Se $\omega(B, s)$ é compacto e pullback atrai B no instante s , então $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$.

Demonstração.

1. Seja $x \in \omega(B, s)$. Então existem $\{s_k\} \leq s, \{s_k\} \searrow -\infty, \{x_k\} \subset B$ tal que

$$S(s, s_k)x_k \rightarrow x \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Neste caso,

$$S(t, s)S(s, s_k)x_k \rightarrow S(t, s)x \Rightarrow S(t, s_k)x_k \rightarrow S(t, s)x \Rightarrow S(t, s)x \in \omega(B, t).$$

Logo, $S(t, s)\omega(B, s) \subset \omega(B, t), \forall t \geq s$.

Veja que supusemos $\omega(B, s) \neq \emptyset$. O caso em que $\omega(B, s) = \emptyset$ é trivial.

2. mostraremos que $\omega(B, t) \subset S(t, s)\omega(B, s)$, com a hipótese adicional de que $\omega(B, s)$ é compacto e pullback atrai B no instante s .

Seja $y \in \omega(B, t)$. Existe $\{s_k\} \leq t$, $\{s_k\} \searrow -\infty$ e $\{x_k\} \subset B$ tais que

$$S(t, s_k)x_k \rightarrow y \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Como $\{s_k\} \searrow -\infty$, existe $k \geq k_0$ tal que $s_k \leq s$. Então,

$$S(t, s_k)x_k = S(t, s)S(s, s_k)x_k \rightarrow y.$$

Uma vez que $\omega(B, s)$ pullback atrai B no instante s , segue que

$$d(S(t, s_k)x_k, \omega(B, s)) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.1.9, existe subsequência $S(t, s_{k_j})x_{k_j} \rightarrow y_0 \in \omega(B, s)$. Então,

$$S(t, s)S(s, s_{k_j})x_{k_j} \rightarrow S(t, s)y_0 = y.$$

Logo, $y \in S(t, s)\omega(B, s)$ e $S(t, s)\omega(B, s) = \omega(B, t)$.

□

No lema a seguir, iremos fornecer condições sobre B para garantir que $\omega(B, t)$ seja compacto e pullback atraia B no instante t . Seguirá do Lema 3.3.2, item (2), que $S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau)$, para $\tau \geq t$.

Lema 3.3.3. *Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo e $B \subset X$ um limitado, não vazio. Suponha que exista um compacto $K \subset X$ que pullback atraia B no instante t . Então $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, pullback atrai B no instante t e $S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau)$, para todo $\tau \geq t$.*

Demonstração. Seja $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$. Como K pullback atrai B no instante t , segue que

$$d(S(t, s_n)x_n, K) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.1.9, $\{S(t, s_n)x_n\}$ possui subsequência que converge a um ponto de K . Então, $\omega(B, t)$ é não vazio.

Afirmamos que $\omega(B, t) \subset K$, pois se $x_0 \in \omega(B, t)$, existem $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $S(t, s_n)x_n \rightarrow x_0$. Por outro lado, $d(S(t, s_n)x_n, K) \rightarrow 0$ e, pelo Lema 2.1.9, existe subsequência convergindo a um ponto de K . Da unicidade do limite, tal ponto é x_0 , e então $x_0 \in K$.

Como $\omega(B, t)$ é fechado, segue que $\omega(B, t)$ é compacto.

Além disso, $\omega(B, t)$ pullback atrai B no instante t e a demonstração é análoga à feita na Proposição 2.2.3.

□

Observação: O lema anterior será de maior utilidade quando obtivermos uma família de compactos $K(\cdot)$ que pullback atrai B em cada instante t .

Uma outra forma de garantir a pullback atração que os conjuntos ω -limites exercem será fornecida a seguir.

Definição 3.3.4. Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto se para cada $t \in \mathbb{R}$, $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\}$ sequência limitada de X , $\{S(t, s_n)x_n\}$ admite subsequência convergente.

Observação: Tal definição coincide com a definição apresentada no caso autônomo, isto é, $S_T(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. De fato,

(\Rightarrow) Se $\{t_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\}$ é limitado, então

$$\{T(0 - t_n)x_n\} = \{S_T(0, t_n)x_n\},$$

o qual admite subsequência convergente.

(\Leftarrow) Por outro lado, se $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$, então

$$S(t, s_n)x_n = T(t - s_n)x_n,$$

o qual admite subsequência convergente.

Lema 3.3.5. Sejam $S(\cdot, \cdot)$ um processo e $K(\cdot)$ uma família de compactos que pullback atrai limitados de X . Então $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto.

Demonstração. Segue do Lema 2.1.9. □

Segue do lema anterior que se $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback, então $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto.

O resultado a seguir fornece condições mais fracas para garantir que $\omega(B, t)$ seja não vazio, compacto, atraia B no sentido pullback no instante t e seja invariante.

Lema 3.3.6. Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo pullback assintoticamente compacto. Então, dado $B \subset X$ limitado e não vazio, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, pullback atrai B no instante t e $S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau)$, $\forall \tau \geq t$.

Demonstração. Fixemos $t \in \mathbb{R}$ e seja $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$. Como $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto, temos que $\{S(t, s_n)x_n\}$ possui subsequência convergente. Logo, $\omega(B, t)$ é não vazio.

Com argumento análogo ao da Proposição 2.2.3, segue que $\omega(B, t)$ pullback atrai B no instante t .

Por último, mostremos a compacidade de $\omega(B, t)$. Seja $\{y_k\} \subset \omega(B, t)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k \in B$ e $s_k \leq -k$ tais que $d(S(t, s_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$. Como $S(\cdot, \cdot)$ é pullback assintoticamente compacto, $\{S(t, s_k)x_k\}$ possui subsequência convergente $S(t, s_{k_j})x_{k_j} \rightarrow x_0$. Logo, $y_{k_j} \rightarrow x_0 \in \omega(B, t)$.

Portanto, $\omega(B, t)$ é compacto.

A igualdade $S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau)$ segue do Lema 3.3.2 □

3.3.1 Existência de uma família de compactos que atrai

Generalizaremos agora o Teorema 2.2.9 para processos, isto é, mostraremos que se um processo possui uma família de compactos que pullback atrai, então tal processo possui atrator pullback.

Teorema 3.3.7. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback $\mathcal{A}(\cdot)$.
2. Existe uma família de compactos $K(\cdot)$ que pullback atrai limitados de X .

Em ambos os casos, o atrator é dado por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado}\}}$$

e tal família é a minimal que atrai limitados.

Demonstração.

(1) \Rightarrow (2) Imediato.

(2) \Rightarrow (1) Seja $\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado}\}}$. Cada $B \subset X$ limitado é pullback atraído no instante t pelo compacto $K(t)$. Mas B também é pullback atraído por $\omega(B, t)$ no instante t . Logo, $\omega(B, t) \subset K(t)$, $\mathcal{A}(t) \subset K(t)$ e, sendo $\mathcal{A}(t)$ fechado, $\mathcal{A}(t)$ é compacto.

Pelo Lema 3.3.3, $\omega(B, t)$ é não vazio, compacto, pullback atrai B no instante t e ainda

$$S(\tau, t)\omega(B, t) = \omega(B, \tau), \quad \forall \tau \geq t.$$

Temos também as seguintes propriedades para a família $\mathcal{A}(\cdot)$.

- $\mathcal{A}(t)$ atrai limitados no sentido pullback no instante t .
- $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante.

Seja $x_0 \in \mathcal{A}(s)$. Queremos mostrar que $S(t, s)x_0 \in \mathcal{A}(t)$, para $t \geq s$.

Como $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$, $B_n \subset X$ limitado, tal que $x_n \rightarrow x_0$. Dado $t \geq s$, $S(t, s)x_n \in \omega(B_n, t)$ (pois $S(t, s)\omega(B_n, s) = \omega(B_n, t)$). Logo

$$\omega(B_n, t) \ni S(t, s)x_n \rightarrow S(t, s)x_0 \Rightarrow S(t, s)x_0 \in \mathcal{A}(t).$$

Portanto, $S(t, s)\mathcal{A}(s) \subset \mathcal{A}(t)$.

Seja agora $y_0 \in \mathcal{A}(t)$. Existe $y_n \in \omega(B_n, t)$ tal que $y_n \rightarrow y_0$. Como $S(t, s)\omega(B_n, s) = \omega(B_n, t)$, existe $x_n \in \omega(B_n, s)$ tal que

$$S(t, s)x_n = y_n.$$

Logo, $S(t, s)x_n \rightarrow y_0$, com $x_n \in \omega(B_n, s) \subset K(s)$. Como $K(s)$ é compacto, $\{x_n\}$ admite subsequência convergente $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \mathcal{A}(s)$ e

$$S(t, s)x_{n_j} \rightarrow S(t, s)x_0 = y_0 \Rightarrow y_0 \in S(t, s)\mathcal{A}(s).$$

Portanto, $\mathcal{A}(t) \subset S(t, s)\mathcal{A}(s)$.

Segue então a invariância.

- Minimalidade

Suponhamos que $\tilde{\mathcal{A}}(\cdot)$ seja uma família de fechados que pullback atrai limitados de X . Dado $B \subset X$ limitado, $\text{dist}(S(t, s)B, \tilde{\mathcal{A}}(t)) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow -\infty$. Seja então $x_0 \in \omega(B, t)$. Existe $\{s_n\} \leq t$, $\{s_n\} \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $S(t, s_n)x_n \rightarrow x_0$ e

$$d(S(t, s_n)x_n, \tilde{\mathcal{A}}(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \Rightarrow x_0 \in \tilde{\mathcal{A}}(t),$$

ou seja, $\omega(B, t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(t) \subset \tilde{\mathcal{A}}(t)$.

□

Observação: Em alguns problemas práticos pode-se obter uma família de compactos que pullback absorvem limitados. Nestes casos, segue imediatamente do teorema anterior que existe atrator pullback.

A existência de uma família de compactos que atrai e família de compactos que absorvem só é equivalente em espaços com dimensão finita.

Formalizemos a definição de absorção para processos.

Definição 3.3.8. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo. Dizemos que um conjunto $B \subset X$ pullback absorve limitados no instante t se dado qualquer $D \subset X$ limitado, existe $s_0 = s_0(t, D)$ tal que*

$$S(t, s)D \subset B, \forall s \leq s_0.$$

3.3.2 Processos pullback limitado dissipativos e pullback assintoticamente compactos

O objetivo nesta seção é generalizar a equivalência (1) \Leftrightarrow (3) do Teorema 2.2.10. Precisaremos de algumas hipóteses adicionais para garantir tal generalização.

Para isso, iremos tratar processos que são *pullback assintoticamente compactos* e *pullback limitado dissipativos*, como definiremos a seguir.

Definição 3.3.9. Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ é pullback limitado dissipativo se existe uma família $B(t)$ de limitados de X que pullback atrai limitados em X para cada instante t , isto é, se $D \subset X$ é limitado, então

$$\text{dist}(S(t, s)D, B(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } s \rightarrow -\infty.$$

Teorema 3.3.10. Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo pullback assintoticamente compacto. Então a família

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado}\}}$$

é fechada, não vazia e pullback atrai limitados de X .

Além disso, $\mathcal{A}(\cdot)$ é a família minimal de fechados que pullback atrai limitados de X e, se $S(\cdot, \cdot)$ é pullback limitado dissipativo, então $\mathcal{A}(t)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.

Observação: Veja que não foi possível extrair a compacidade de $\mathcal{A}(t)$, bem como a invariância. Uma outra hipótese adicional será necessária para garantir tais fatos.

Demonstração. Segue do Lema 3.3.6 que para cada $B \subset X$ limitado e $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B, t)$ é compacto, não vazio, invariante e pullback atrai B no instante t .

Logo, $\mathcal{A}(t)$ é fechado, não vazio e pullback atrai limitados no instante t .

Quanto à minimalidade, seja $C(\cdot)$ uma família de fechados que pullback atrai limitados de X . Se $x_0 \in \omega(B, t)$, então existem sequências $\{s_n\} \leq t$, $s_n \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $S(t, s_n)x_n \rightarrow x_0$. Mas $S(t, s_n)x_n \rightarrow C(t)$, o que implica que $x_0 \in C(t)$. Consequentemente, $\mathcal{A}(t) \subset C(t)$.

Suponhamos $S(\cdot, \cdot)$ limitado dissipativo. Existe família $D(\cdot)$ de limitados que pullback atrai limitados em X . Neste caso, $\overline{D(\cdot)}$ é uma família de fechados que pullback atrai limitados e, pelo que vimos acima, $\mathcal{A}(t) \subset \overline{D(\cdot)} \Rightarrow \mathcal{A}(t)$ é limitado. \square

Processos fortemente pullback limitados dissipativos e pullback assintoticamente compactos

Para garantir a existência do atrator pullback, devemos requerer uniformidade na propriedade de dissipatividade, no seguinte sentido:

Definição 3.3.11. Dizemos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ é fortemente pullback limitado dissipativo se existe uma família de limitados $B(t) \subset X$ que pullback atrai limitados de X em qualquer instante $\tau \leq t$, isto é, dado $D \subset X$ limitado,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(\tau, s)D, B(t)) = 0.$$

Observação: A união $\bigcup_{t \leq s} B(s)$ não precisa ser limitada, mas podemos escolher os conjuntos $B(\cdot)$ de forma a obter essa limitação (é suficiente tomar conjuntos encaixantes).

O próximo teorema apresentará condições suficientes para a existência de um atrator pullback limitado no passado, isto é, um atrator $\mathcal{A}(\cdot)$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$$

é limitado.

Teorema 3.3.12. *Seja $S(\cdot, \cdot)$ um processo fortemente pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto.*

Seja ainda $B(\cdot)$ uma família de limitados tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ pullback atrai limitados para todo instante $\tau \leq t$.

Então, $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback $\mathcal{A}(t)$ dado por $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B(t)}, t)$ e $\mathcal{A}(\cdot)$ é limitado no passado.

Demonstração. Consideremos

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup \{ \omega(D, t); D \subset X \text{ e } D \text{ é limitado} \}}.$$

Precisamos apenas mostrar que $\mathcal{A}(t)$ é compacto e a família $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante, uma vez que pelo Teorema 3.3.10, $\mathcal{A}(t)$ é fechado, limitado e $\mathcal{A}(\cdot)$ é a família minimal de fechados que pullback atrai limitados de X .

Seja $D \subset X$ limitado, provaremos que $\omega(D, t) \subset \omega(\overline{B(t)}, t) \Rightarrow \mathcal{A}(t) \subset \omega(\overline{B(t)}, t)$.

Fixado $\tau \leq t$, $\omega(D, \tau) \subset \overline{B(\tau)}$. De fato, se $x_0 \in \omega(D, \tau)$, então existe $\{s_n\} \leq \tau$, $s_n \searrow -\infty$ e $\{x_n\} \subset D$ tais que

$$S(\tau, s_n)x_n \rightarrow x_0.$$

Mas como $B(t)$ atrai D em qualquer instante $\tau \leq t$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(S(\tau, s_n)x_n, \overline{B(t)}) &= 0 \\ \Rightarrow d(x_0, \overline{B(t)}) &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &\in \overline{B(t)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega(D, \tau) \subset \overline{B(\tau)}$. Logo,

$$\omega(D, t) = S(t, \tau)\omega(D, \tau) \subset S(t, \tau)\overline{B(\tau)}$$

e então,

$$\omega(D, t) \subset \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} S(t, s)\overline{B(s)}} = \omega(\overline{B(t)}, t).$$

Portanto, $\mathcal{A}(t) \subset \omega(\overline{B(t)}, t)$, o que implica que $\mathcal{A}(t)$ é compacto. Além disso, é imediato que $\omega(\overline{B(t)}, t) \subset \mathcal{A}(t)$. Portanto, $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B(t)}, t)$.

A invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$ é verificada da mesma forma que foi feito na demonstração do Teorema 3.3.7.

Vimos que para cada $\tau \leq t$, $\omega(D, \tau) \subset \overline{B(t)} \Rightarrow \mathcal{A}(\tau) \subset \overline{B(t)}$. Logo, $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s) \subset \overline{B(t)}$ e o atrator pullback é limitado no passado. □

Se supusermos que um processo $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback, então o processo é claramente pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto.

Se ainda supusermos que o atrator pullback é limitado no passado, então o processo é fortemente pullback limitado dissipativo, pois basta tomar $B(t) = \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$.

Portanto, as condições de fortemente pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto são necessárias e suficientes para a existência de um atrator pullback limitado no passado.

Corolário 3.3.13. *Um processo $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback limitado no passado se, e somente se, é fortemente pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto.*

Para processos associados a semigrupos, as propriedades de fortemente pullback limitado dissipativo e pullback limitado dissipativo coincidem. Logo, um semigrupo possui atrator global se, e somente se, é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, conforme já foi verificado.

3.4 Continuidade da família de atratores pullback

Seja Λ um espaço métrico. Consideremos uma família de processos $\{S_\lambda(\cdot, \cdot)\}_{\lambda \in \Lambda}$ e suponhamos que $S_\lambda(\cdot, \cdot)$ convirja a $S_{\lambda_0}(\cdot, \cdot)$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, em algum sentido que especificaremos adiante. Supondo que cada $S_\lambda(\cdot, \cdot)$ possua atrator pullback $\mathcal{A}_\lambda(\cdot)$, desejamos saber sobre quais condições a família $\{\mathcal{A}_\lambda(\cdot)\}$ de atratores é contínua em λ_0 .

O lema a seguir apresenta uma caracterização de semicontinuidades superior e inferior para conjuntos compactos.

Lema 3.4.1. *Seja $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos compactos de um espaço métrico X e suponhamos $\lambda \rightarrow \lambda_0$.*

1. $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se, e somente se, sempre que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$, toda sequência $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, admite uma subsequência convergente cujo limite está em \mathcal{A}_{λ_0} .
2. $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se, e somente se, sempre que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e para cada $x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, existe $\{x_n\}$ sequência, cada $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, tal que $x_n \rightarrow x_0$.

Demonstração.

1. (\Rightarrow) Suponha que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ seja semicontínua superiormente em λ_0 . Seja $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ e $\{x_n\} \subset \mathcal{A}_{\lambda_n}$.

Segue que

$$0 \leq d(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \leq \text{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0})$$

e, uma vez que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 , temos

$$\text{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 2.1.9, $\{x_n\}$ admite subsequência convergente cujo limite está em \mathcal{A}_{λ_0} .

(\Leftarrow) Suponhamos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não seja semicontínua superiormente em λ_0 . Então existem uma sequência $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que $d(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geq \varepsilon$. Esta sequência $\{x_n\}$ não admite subsequência convergente com limite em \mathcal{A}_{λ_0} .

2. (\Rightarrow) Sejam $x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ e suponhamos que $\text{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que

$$d(x_0, x_n) \leq d(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}).$$

Logo, $x_n \rightarrow x_0$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ não seja semicontínua inferiormente em λ_0 . Então existem $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $y_n \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ tal que

$$d(y_n, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \varepsilon.$$

Como \mathcal{A}_{λ_0} é compacto, podemos assumir $y_n \rightarrow x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, e então $d(x_0, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, não existe sequência $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$.

□

Investigaremos a continuidade da família de atratores pullback $\{\mathcal{A}_\lambda(\cdot)\}$, onde cada $\mathcal{A}_\lambda(\cdot)$ está associado ao processo $S_\lambda(\cdot, \cdot)$. Para isso, denotaremos $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e diremos que a família $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ é semicontínua superiormente quando $n \rightarrow \infty$ se, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathcal{A}_n(t), \mathcal{A}_\infty(t)) = 0.$$

Da mesma forma, definimos semicontinuidade inferior.

Lema 3.4.2. *Seja $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}$ uma família semicontínua superiormente quando $n \rightarrow \infty$. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$,*

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)}$$

é compacto.

Demonstração. Precisamos mostrar que toda sequência de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)$ admite subsequência convergente.

Seja $\{x_j\}$ uma sequência em $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)$. Suponhamos inicialmente que exista uma quantidade infinita de termos dessa sequência em um certo $\mathcal{A}_{n_0}(t)$. Neste caso, como $\mathcal{A}_{n_0}(t)$ é compacto, podemos então extrair subsequência convergente de $\{x_j\}$.

Se não ocorrer o caso anterior, então existe subsequência $\{x_{n_{j'}}\}$ com cada $x_{n_{j'}} \in \mathcal{A}_{n_{j'}}(t)$, $n_{j'} \rightarrow \infty$. Do Lema 2.1.9, é possível extrair uma subsequência que converge a um elemento de $\mathcal{A}_\infty(t)$. \square

O lema anterior fornece uma condição necessária para que uma família de atratores pullback seja semicontínua superiormente quando $n \rightarrow \infty$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

Hipótese 3.4.3. *Dada a família $\{S_n(\cdot, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de processos, assumimos que*

1. $S_n(\cdot, \cdot) \rightarrow S_\infty(\cdot, \cdot)$ quando $n \rightarrow \infty$, no sentido que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall K \subset X$ compacto e $T > 0$,

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \sup_{x \in K} d(S_n(t, t - \tau)x, S_\infty(t, t - \tau)x) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

2. se $\mathcal{A}_n(\cdot)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$, é o atrator pullback de $S_n(\cdot, \cdot)$, então

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)}$$

é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$.

3. os atratores pullback são limitados no passado, isto é,

$$\bigcup_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}_n(s)$$

é limitado, para cada $t \in \mathbb{R}$.

3.4.1 Semicontinuidade superior da família de atratores pullback

A semicontinuidade superior segue do seguinte lema técnico.

Lema 3.4.4. *Seja $\{S_n(\cdot, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de processos que satisfaz o item (1) das Hipóteses 3.4.3. Sejam ainda $\{a_n\}, \{b_n\}$ seqüências de números reais positivos tais que $a_n, b_n \rightarrow \infty$, $J_n = [-a_n, b_n]$ e $\xi_n : J_n \rightarrow X$ soluções de $S_n(\cdot, \cdot)$ satisfazendo*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t) \text{ é pré-compacto para todo } t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

e

$$\Xi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(J_n) \text{ é limitado.} \quad (3.4)$$

Então existe uma seqüência n_k tal que $\xi_{n_k} \rightarrow \xi_\infty$ uniformemente em subintervalos compactos de \mathbb{R} , onde $\xi_\infty : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global limitada de $S_\infty(\cdot, \cdot)$.

Demonstração. Uma vez que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(0)$ é pré-compacto, existe subsequência $n_{0,k}$ tal que $\xi_{n_{0,k}} \rightarrow z_0 \in X$.

Consideremos $\xi_\infty : [0, \infty) \rightarrow X$ dado por $\xi_\infty = S_\infty(t, 0)z_0$. Veja que

$$\begin{aligned} \xi_\infty(t) &= S_\infty(t, 0)z_0 = S_\infty(t, 0) \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_{0,k}}(0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_\infty(t, 0)\xi_{n_{0,k}}(0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_{0,k}}(t, 0)\xi_{n_{0,k}}(0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_{0,k}}(t) \end{aligned}$$

(a terceira igualdade segue do item (1) das Hipóteses 3.4.3).

Esta convergência é uniforme sobre intervalos compactos de $[0, \infty)$, devido ao item (1) das Hipóteses 3.4.3 e $\xi_\infty([0, \infty)) \subset \Xi$ por (3.4).

Suponha agora que obtivemos uma rede encaixante de subsequências $n_{j,k}$, $0 \leq j \leq m-1$, satisfazendo $\{n_{j+1,k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{n_{j,k}, k \in \mathbb{N}\}$ e $\xi_\infty : [-(m-1), \infty) \rightarrow X$ é tal que $\xi_{n_{j,k}}(t) \rightarrow \xi_\infty(t)$ uniformemente sobre compactos de $[-j, \infty)$.

Como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(-m)$ é pré-compacta, existe subsequência $n_{m,k}$ de $n_{m-1,k}$ tal que $\xi_{n_{m,k}}(-m) \rightarrow z_m \in X$ quando $k \rightarrow \infty$. Defina então $\tilde{\xi}_\infty(s) = S_\infty(s, -m)z_m$ para $s \in [-m, -(m-1)]$. Temos

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_\infty(-(m-1)) &= S_\infty(-(m-1), -m)z_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{n_{m,k}}(-(m-1), -m)\xi_{n_{m,k}}(-m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{n_{m,k}}(-(m-1)) \\ &= \xi_\infty(-(m-1)). \end{aligned}$$

(a primeira igualdade segue do item (1) das Hipóteses 3.4.3).

Redefinimos $\xi_\infty : [-m, \infty) \rightarrow X$ como $\xi_\infty|_{[-(m-1), \infty)} = \xi_\infty$ e $\xi_\infty|_{[-m, -(m-1)]} = \tilde{\xi}_\infty$. Temos $\xi_{n_m, k}(t) \rightarrow \xi_\infty(t)$ uniformemente sobre compactos de $[-m, \infty)$ e $\xi_\infty([-m, \infty)) \subset \Xi$.

Procedendo dessa forma e tomando a subsequência $n_{k, k}$ de $n_{m, k}$, temos que $\xi_{n_{k, k}}(\cdot)$ possui as propriedades desejadas, e $\xi_\infty(\cdot)$ é limitada pois está em Ξ . \square

Corolário 3.4.5. *Seja $\{S_n(\cdot, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de processos com atratores pullback $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}$ satisfazendo todos os itens da Hipótese 3.4.3. Então, dada qualquer sequência $\{\xi_n(\cdot)\}$ de soluções globais de $S_n(\cdot, \cdot)$ tais que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n(\cdot) \subset \mathcal{A}_n(\cdot)$, existe subsequência $\{\xi_{n_k}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em intervalos limitados de \mathbb{R} a uma solução global $\xi_\infty(\cdot)$ de $S_\infty(\cdot, \cdot)$ limitada no passado. Em particular, $\xi_\infty(t) \in \mathcal{A}_\infty(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração.

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)$ e, sendo $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(t)}$ compacto, segue que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(t)}$ também o é.
- $\Xi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n((-\infty, t]) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}_n(s)$ é limitado.

Segue do lema anterior que existe subsequência $\{\xi_{n_k}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a uma solução global $\xi_\infty(\cdot)$ limitada no passado, e a convergência é uniforme em compactos de \mathbb{R} .

Além disso, $\xi_\infty(\cdot) \subset \mathcal{A}_\infty(\cdot)$, uma vez que toda solução limitada no passado está contida no atrator pullback. \square

Podemos então garantir a semicontinuidade superior da família de atratores pullback.

Teorema 3.4.6. *Sejam $\{S_n(\cdot, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de processos, $\mathcal{A}_n(\cdot)$ atrator pullback de $S_n(\cdot, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, e suponhamos que todos os itens da Hipótese 3.4.3 estejam satisfeitos. Então $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}$ é semicontínua superiormente quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4.1, é suficiente mostrar que toda sequência $\{x_n\}$, com $x_n \in \mathcal{A}_n(t)$, admite subsequência convergente para um ponto de $\mathcal{A}_\infty(t)$.

Para cada $x_n \in \mathcal{A}_n(t)$, segue da invariância de $\mathcal{A}_n(t)$ que existe uma solução global $\xi_n(\cdot) \subset \mathcal{A}_n(\cdot)$ tal que $\xi_n(t) = x_n$.

Do Corolário 3.4.5, existe subsequência $\{\xi_{n_k}(\cdot)\}$ que converge uniformemente sobre compactos a uma solução $\xi_\infty(\cdot)$ de $S_\infty(\cdot, \cdot)$ contida em $\mathcal{A}_\infty(\cdot)$. Logo,

$$x_{n_k} = \xi_{n_k}(t) \rightarrow \xi_\infty(t) \in \mathcal{A}_\infty(t).$$

Portanto, $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}$ é semicontínua superiormente quando $n \rightarrow \infty$. \square

3.4.2 Semicontinuidade inferior da família de atratores pullback

No Teorema 2.3.5, foi provada a semicontinuidade inferior de uma família de atratores $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associados aos semigrupos $T_n(\cdot)$ sob certas condições. Uma das hipóteses é que o atrator \mathcal{A}_∞ possua uma estrutura da forma

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{z \in \xi} \overline{W^u(z)}, \quad (3.5)$$

chamada de estrutura *gradiente-like*.

Nesta seção vamos generalizar este resultado para processos não autônomos.

Definição 3.4.7. *Seja $\xi^*(\cdot)$ uma solução global de um processo $S(\cdot, \cdot)$. A variedade instável de ξ^* é o subconjunto de $\mathbb{R} \times X$ dado por*

$$W^u(\xi^*) = \{(\tau, y) \in \mathbb{R} \times X : \exists \text{ solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ de } S(\cdot, \cdot) \text{ tal que} \\ \xi(\tau) = y \text{ e } d(\xi(t), \xi^*(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

A variedade instável de ξ^* no instante τ é o subconjunto de X dado por

$$W^u(\xi^*)(\tau) = \{y : (\tau, y) \in W^u(\xi^*)\}.$$

A variedade instável local de ξ^* no instante τ é um subconjunto de X dado por

$$W_\delta^u(\xi^*)(\tau) = \{y \in X : \exists \text{ solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ de } S(\cdot, \cdot) \\ \text{tal que } \xi(\tau) = y, d(\xi(s), \xi^*(s)) \rightarrow 0 \\ \text{quando } s \rightarrow -\infty \text{ e } d(\xi(s), \xi^*(s)) < \delta, \forall s \leq \tau\}.$$

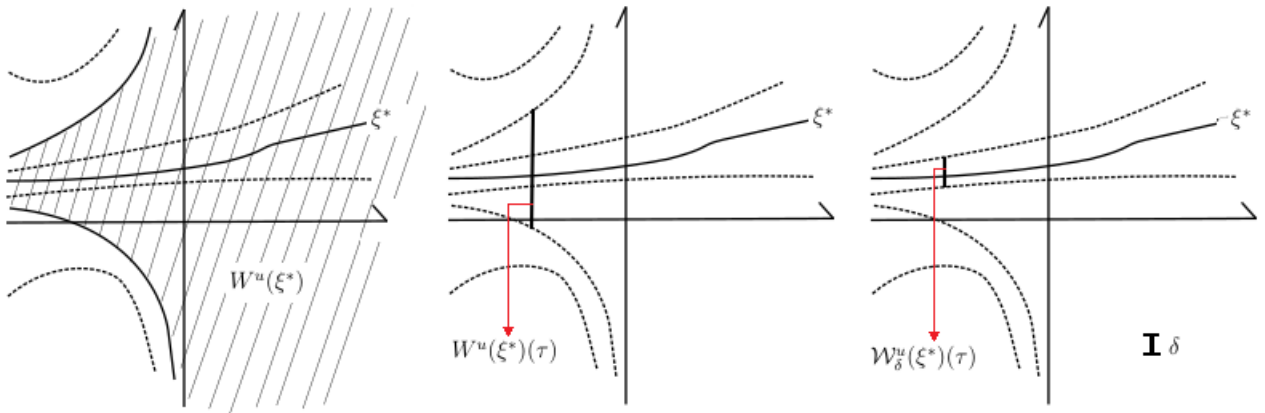


Figura 3.4: Variedades instáveis

Observações:

1. A família $\{W^u(\xi^*)(t); t \in \mathbb{R}\}$ é invariante, isto é, $S(t, s)W^u(\xi^*)(s) = W^u(\xi^*)(t), \forall t \geq s$.

De fato, seja $y \in W^u(\xi^*)(s) \Rightarrow \exists$ solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

$$\xi(s) = y \text{ e } d(\xi(\tau), \xi^*(\tau)) \rightarrow 0 \text{ quando } \tau \rightarrow -\infty.$$

Ora, $S(t, s)\xi(s) = \xi(t)$ e $d(\xi(\tau), \xi^*(\tau)) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow -\infty \Rightarrow \xi(t) \in W^u(\xi^*)(t)$. Logo, $S(t, s)W^u(\xi^*)(s) \subset W^u(\xi^*)(t)$.

Tome agora $y \in W^u(\xi^*)(t)$. Existe solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

$$\xi(t) = y \text{ e } d(\xi(\tau), \xi^*(\tau)) \rightarrow 0 \text{ quando } \tau \rightarrow -\infty.$$

Como ξ é solução global, temos que $\xi(s) = x_0$ está bem definido e $d(\xi(\tau), \xi^*(\tau)) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$. Com isso, $x_0 \in W^u(\xi^*)(s)$ e

$$y = S(t, s)\xi(s) = S(t, s)x_0 \Rightarrow y \in S(t, s)W^u(\xi^*)(s).$$

Logo, $W^u(\xi^*)(t) \subset S(t, s)W^u(\xi^*)(s)$.

2. Suponhamos ξ^* solução global limitada no passado. Segue então que toda solução global $\xi(\cdot)$ tal que $\xi(t) \in W^u(\xi^*)(t)$ é limitada no passado. Além disso, se $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback, então $W^u(\xi^*)(t) \subset \mathcal{A}(t)$ (Proposição 3.1.11)

Notemos que se duas soluções $\xi_1^*, \xi_2^* : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $S(\cdot, \cdot)$ são tais que $d(\xi_1^*(s), \xi_2^*(s)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$, então

$$W^u(\xi_1^*) = W^u(\xi_2^*).$$

Neste caso, é necessária a seguinte definição:

Definição 3.4.8. Dizemos que duas soluções globais $\xi_1^*, \xi_2^* : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $S(\cdot, \cdot)$ são separadas no passado se

$$\limsup_{s \rightarrow -\infty} d(\xi_1^*(s), \xi_2^*(s)) > 0.$$

Segue que, para encontrar as variedades instáveis das soluções globais de um processo não autônomo, é suficiente tomar um conjunto maximal de soluções separadas no passado (tal conjunto existe pelo Lema de Zorn, mas certamente não é único).

Teorema 3.4.9. Sejam $\{S_n(\cdot, \cdot), n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ uma família de processos e $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ seus atratores pullback. Suponhamos que as três hipóteses de 3.4.3 estejam satisfeitas e

1. exista uma sequência $\{\xi_j^* : \mathbb{R} \rightarrow X\}$ de soluções globais de $S_\infty(\cdot, \cdot)$ limitadas e separadas no passado tal que

$$\mathcal{A}_\infty(t) = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*)(t)}. \quad (3.6)$$

2. as variedades instáveis locais se comportem de maneira contínua, isto é, dado $z_0 \in W_\delta^u(\xi_j^*)(t_j)$, existe $\xi_{j,n}^*(\cdot)$ solução global limitada de $S_n(\cdot, \cdot)$ e $z_n \in W_\delta^u(\xi_{j,n}^*)(t_j)$ suficientemente próximo de z_0 , para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $t_j \in \mathbb{R}$.

Então, a família $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}$ é contínua quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para a semicontinuidade inferior é suficiente mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A}_\infty(t) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_n(t), \varepsilon), \quad \forall n \geq n(\varepsilon),$$

isto é, para cada $x \in \mathcal{A}_\infty(t)$, existe $x_n \in \mathcal{A}_n(t)$ que dista no máximo ε de x .

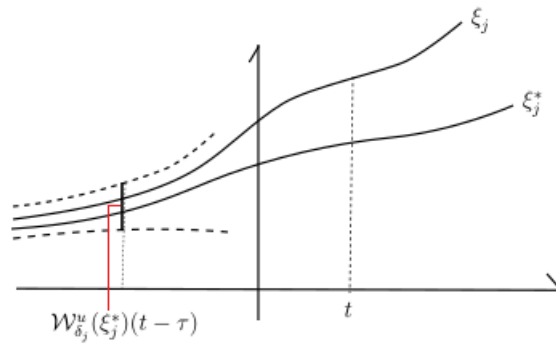
Como $x \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*)(t)}$, existe $x_\varepsilon \in \bigcup_{j=1}^{\infty} W^u(\xi_j^*)(t)$ tal que

$$d(x, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixemos $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_\varepsilon \in W^u(\xi_j^*)(t)$. Neste caso, existe uma solução global $\xi_j : \mathbb{R} \rightarrow X$ de $S_\infty(\cdot, \cdot)$ tal que

$$\xi_j(t) = x_\varepsilon \quad \text{e} \quad d(\xi_j(s), \xi_j^*(s)) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \rightarrow -\infty,$$

ou seja, ξ_j também é limitada no passado.



Seja $\delta_j > 0$ tal que as variedades instáveis locais se comportem de forma contínua. Uma vez que $d(\xi_j(s), \xi_j^*(s)) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow -\infty$, existe $\tau > 0$ tal que $\xi_j(t - \tau) \in W_{\delta_j}^u(\xi_j^*)(t - \tau)$.

Denotemos $z_0 = \xi_j(t - \tau)$. Da continuidade das variedades instáveis locais, para $n \geq n^*$, existe $z_n \in W_\delta^u(\xi_{j,n}^*(t - \tau))$ tal que $\|z_n - z_0\| < \eta$, onde tal η é tomado de forma que

$$\|x - z_0\| < \eta \rightarrow \|S_n(t, t - \tau)x - S_n(t, t - \tau)z_0\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, segue da convergência de $S_n(\cdot, \cdot) \rightarrow S_\infty(\cdot, \cdot)$ que, para $n \geq n^{**}$,

$$d(S_n(t, t - \tau)z_0, S_\infty(t, t - \tau)z_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Veja que $x_\varepsilon = \xi_j(t) = S_\infty(t, t - \tau)\xi_j(t - \tau) = S_\infty(t, t - \tau)z_0$ e que $x^* = S_n(t, t - \tau)z_n \in \mathcal{A}_n(t)$, uma vez que a solução $\xi_{j,n}^*$ é limitada no passado.

Logo,

$$\begin{aligned} d(x^*, x) &\leq d(x^*, x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, x) \\ &= d(S_n(t, t - \tau)z_n, S_\infty(t, t - \tau)z_0) + d(x_\varepsilon, x) \\ &\leq d(S_n(t, t - \tau)z_n - S_n(t, t - \tau)z_0) + d(S_n(t, t - \tau)z_0, S_\infty(t, t - \tau)z_0) + d(x_\varepsilon, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

para $n \geq n(\varepsilon) = \max\{n^*, n^{**}\}$.

Portanto, a família $\{\mathcal{A}_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é semicontínua inferiormente quando $n \rightarrow \infty$ e, portanto, contínua. \square

Capítulo 4

Atratores de trajetórias para problemas autônomos

Este capítulo tratará de problemas do tipo

$$\begin{cases} u' = f(u) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde não exigimos sobre f hipóteses que garantam a unicidade de solução, apenas existência.

Estamos interessados no comportamento das soluções em tempos grandes. Porém, o objeto que estudaremos e definiremos como atrator de trajetórias não existirá mais no espaço de fase da equação, mas sim em um espaço cujos elementos são soluções da equação em questão, o chamado espaço de trajetórias \mathcal{K}^+ .

O semigrupo de translação $T(t) : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$, $(T(t)u)(s) = T(t)u(s) = u(t+s)$ estará bem definido e o atrator global para esse semigrupo, com \mathcal{K}^+ munido de uma topologia adequada, será o atrator de trajetórias.

A fim de melhor entender tal objeto, começaremos com o estudo de um problema específico no espaço de fase \mathbb{R}^n , para, em seguida, tratarmos o caso abstrato.

4.1 Atrator de trajetórias para uma equação em \mathbb{R}^n

Consideremos o problema autônomo

$$u'(t) = -F(u(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

onde $u = (u^1, u^2, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ e $F(u) = (F^1(u), F^2(u), \dots, F^n(u)) \in \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz a seguinte condição de dissipatividade: Existem constantes $C, \delta > 0$ tais que

$$v \cdot F(v) = \sum_{i=1}^n v^i F^i(v) \geq -C + \delta \|v\|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

O Teorema de Peano 1.0.1 garante que, para qualquer $u_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema (4.2) com $u(0) = u_0$ admite solução $h : [0, \tau_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $[0, \tau_{max})$ é o intervalo máximo de existência dessa solução. Porém, não conseguimos garantir a unicidade dessa solução.

Teorema 4.1.1. *Consideremos o problema (4.2), a condição (4.3) e seja $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Então existe função $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 satisfazendo (4.2) e $u(0) = u_0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Peano, existe ao menos uma solução $u(t)$ definida em seu intervalo maximal $u : [0, \tau_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Mostraremos que a hipótese de dissipatividade irá implicar que $u(t)$ é sempre limitada em $[0, \tau_{max})$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u(t)\|^2 \right) &= \langle u(t), u'(t) \rangle = \langle u(t), -F(u(t)) \rangle \\ &= -\langle u(t), F(u(t)) \rangle \leq C - \delta \|u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + 2\delta \|u(t)\|^2 \leq 2C \quad \forall t > 0.$$

Tomando $\gamma = 2\delta$ e $\tilde{C} = 2C$, segue do Lema 1.0.6

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{\tilde{C}}{2\delta} = \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.4)$$

Segue de (4.4) que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, u é limitada e o Teorema 1.0.2 garante que u está definida para todo \mathbb{R}^+ . □

Seja então \mathcal{K}^+ o subconjunto de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ dado por

$$\mathcal{K}^+ = \{u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); u \text{ é solução de (4.2)}\}.$$

O Teorema anterior garante que \mathcal{K}^+ é não vazio e que para cada $u_0 \in \mathbb{R}^n$, existe pelo menos uma solução $u(\cdot, u_0) \in \mathcal{K}^+$. Definamos o semigrupo de translação $T(t) : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ por

$$(T(t)u)(s) = T(t)u(s) = u(t+s) \quad \forall s, t \geq 0.$$

Proposição 4.1.2. \mathcal{K}^+ é positivamente invariante por $T(t)$, isto é, $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+, \forall t \geq 0$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{K}^+$. É imediato que $T(t)u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, por se tratar apenas de uma translação. Precisamos apenas verificar que $T(t)u$ é solução de (4.2).

$$\frac{d}{ds}(T(t)u)(s) = \frac{d}{ds}T(t)u(s) = \frac{d}{ds}(u(t+s)) = -F(u(t+s)) = -F((T(t)u)(s)).$$

Portanto, $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$. □

Podemos então considerar a ação de $\{T(t)\}$ em \mathcal{K}^+ , isto é, $T(t) : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$.

4.1.1 A topologia em \mathcal{K}^+

Definiremos a seguir uma topologia em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, induziremos tal topologia em \mathcal{K}^+ e mostraremos que \mathcal{K}^+ munido desta topologia é um espaço de Banach.

Consideremos em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ a topologia da convergência uniforme local θ_{LOC}^+ dada por: $\{y_n\} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ converge para $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ se para todo $T > 0$

$$\max_{s \in [0, T]} \|y_n(s) - y(s)\| + \max_{s \in [0, T]} \|y'_n(s) - y'(s)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Observações:

1. A topologia θ_{LOC}^+ é metrizável e o espaço métrico correspondente é completo (Veja [4], p.98).
2. \mathcal{K}^+ , munido da topologia induzida θ_{LOC}^+ , recebe o nome de espaço de trajetórias.

Definição 4.1.3. Seja $K \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Definimos como a restrição de K a $[0, T]$ o conjunto

$$\begin{aligned} \Pi_{[0, T]}K &= \{u|_{[0, T]} : u \in K\} \\ &= \{\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n); \exists u \in K \text{ tal que } \phi = u|_{[0, T]}\}. \end{aligned}$$

O teorema a seguir estabelece uma equivalência para o critério de compacidade para θ_{LOC}^+ .

Teorema 4.1.4. Seja $K \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. K é compacto em θ_{LOC}^+ se, e somente se, $\Pi_{[0, T]}K$ é compacto em $\mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, para todo $T > 0$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponhamos K compacto em θ_{LOC}^+ . Seja $T > 0$ qualquer e $\{\phi_n\}$ uma sequência em $\Pi_{[0, T]}K$. Logo, existe sequência $\{u_n\} \subset K$ tal que

$$\phi_n = u_n|_{[0, T]}.$$

Como K é compacto, $\{u_n\}$ admite subsequência convergente $u_{n_j} \rightarrow u$ em θ_{LOC}^+ , isto é,

$$\begin{aligned}
& \max_{s \in [0, T]} |u_{nj}(s) - u(s)| + \max_{s \in [0, T]} |u'_{nj}(s) - u'(s)| \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty \\
\Rightarrow & \max_{s \in [0, T]} |\phi_{nj}(s) - \phi(s)| + \max_{s \in [0, T]} |\phi'_{nj}(s) - \phi'(s)| \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty \\
\Rightarrow & \|\phi_{nj} - \phi\|_{C^1([0, T], \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{\phi_n\}$ admite subsequência convergente e $\Pi_{[0, T]}K$ é compacto, $\forall T > 0$.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que para todo $T > 0$, $\Pi_{[0, T]}K$ seja compacto em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Dada $\{u_n\} \subset K$, procuramos por uma subsequência convergente na topologia θ_{LOC}^+ .

Para isso, consideremos uma sequência $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau_n \nearrow \infty$. Temos que $\Pi_{[0, \tau_1]}u_n$ é uma sequência em $\Pi_{[0, \tau_1]}K$. Sendo este compacto, é possível extrair uma subsequência $\{\Pi_{[0, \tau_1]}u_{n_1}\}$, $n_1 \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ convergente.

Considere agora $\{u_{n_1}\}$ subsequência de $\{u_n\}$. Tome $\{\Pi_{[0, \tau_2]}u_{n_1}\} \subset \Pi_{[0, \tau_2]}K$. Da compacidade deste espaço, segue que existe subsequência convergente $\{\Pi_{[0, \tau_2]}u_{n_2}\}$, $n_2 \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$.

Procedendo dessa forma, $\{\Pi_{[0, \tau_k]}u_{n(k-1)}\}$ admite subsequência convergente $\{\Pi_{[0, \tau_k]}u_{n_k}\}$ em $\Pi_{[0, \tau_k]}K$ e $\{u_{n_k}\}$ é subsequência de $\{u_{n(k-1)}\}$.

Tomemos então a subsequência diagonal $\{u_{mm}, m \in \mathbb{N}\}$. Dado qualquer $T > 0$, tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_k \geq T$. Logo, a sequência $\{u_{mm}, m \geq k\}$ converge em $[0, T] \subset [0, \tau_k]$. Como T foi tomado de forma arbitrária, segue que $\{u_{mm}\}$ converge para um limite em K .

Logo, K é compacto em θ_{LOC}^+ . □

Proposição 4.1.5. *O espaço de trajetórias \mathcal{K}^+ é fechado em $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ na topologia θ_{LOC}^+ .*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{K}^+$ com $u_n \rightarrow u$ em θ_{LOC}^+ . Logo, dado $T > 0$, $u_n \rightarrow u$ uniformemente em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, com $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Precisamos apenas verificar que u satisfaz (4.2).

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall T > 0$,

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = -F(u_n(t)) \quad \text{em } [0, T].$$

Da convergência uniforme, segue que $\frac{d}{dt}u(t) = -F(u(t))$ para $t \in [0, T]$. Como $T > 0$ é arbitrário, segue que $u \in \mathcal{K}^+$. □

A partir desta proposição, concluímos que \mathcal{K}^+ é um espaço métrico completo. Logo, faz sentido falarmos no semigrupo

$$T(t) : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+, \quad t \geq 0.$$

Proposição 4.1.6. *O semigrupo $T(t) : C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ é contínuo, $\forall t \geq 0$, quando consideramos $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ munido da topologia θ_{LOC}^+ .*

Demonstração. Suponhamos $y_n \rightarrow y$ em $(C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \theta_{LOC}^+)$. Então, para todo $T > 0$, $y_n \rightarrow y$ uniformemente em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$

Em particular, $y_n \rightarrow y$ uniformemente em $C^1([0, T+t], \mathbb{R}^n)$ e, conseqüentemente, a convergência é uniforme em $C^1([t, T+t], \mathbb{R}^n)$. Então, para todo $T > 0$,

$$\begin{aligned} y_n(\cdot) &\rightarrow y(\cdot) && \text{uniformemente em } [t, T+t] \\ y_n(\cdot + t) &\rightarrow y(\cdot + t) && \text{uniformemente em } [0, T] \\ T(t)y_n(\cdot) &\rightarrow T(t)y(\cdot) && \text{uniformemente em } [0, T] \end{aligned}$$

Portanto, $T(t)y_n \rightarrow T(t)y$ em $(C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \theta_{LOC}^+)$ e $T(t)$ é contínua. □

Temos também que o semigrupo $\{T(\cdot)\}$ satisfaz $\|T(t)u - u\| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ em θ_{LOC}^+ . Logo, $\{T(\cdot)\}$ é um C_0 -semigrupo.

Caracterizemos agora os limitados $B \subset \mathcal{K}^+$.

Consideremos o espaço das funções limitadas $C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$\|u\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)} = \max_{s \geq 0} \|u(s)\| + \max_{s \geq 0} \|u'(s)\|.$$

Este espaço é completo com tal norma, a qual é chamada *norma da convergência uniforme global*.

Teorema 4.1.7. $\mathcal{K}^+ \subset C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{K}^+$. Sabemos de (4.4) que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta} \leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} = M_1 \quad \forall t \geq 0.$$

Resta então limitar $\|u'(t)\|$. Como $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, existe uma função crescente $C_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|F(v)\| \leq C_1(R), \quad \forall v \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^n.$$

Logo, como $\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta}$, temos

$$\|u'(t)\|^2 = \|F(u(t))\| \leq C_1 \left(\|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} \right) = M_2.$$

Então

$$\max_{s \geq 0} \|u(s)\| + \max_{s \geq 0} \|u'(s)\| \leq M_1 + M_2 = M < \infty$$

e $u \in C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. □

Proposição 4.1.8. *Um subconjunto $B \subset \mathcal{K}^+$ é limitado em θ_{LOC}^+ se, e somente se, é limitado em $C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ munido da topologia da convergência uniforme global.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em θ_{LOC}^+ . Então, $\forall u \in B$ e todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &\leq \|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} \\ \|u'(t)\|^2 &\leq C_1 \left(\|u(0)\|^2 + \frac{C}{\delta} \right).\end{aligned}$$

Como B é limitado, $\exists M > 0$ tal que $\|u(0)\| \leq M, \forall u \in B$. Logo, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &\leq M^2 + \frac{C}{\delta} \\ \|u'(t)\|^2 &\leq C_1 \left(M^2 + \frac{C}{\delta} \right).\end{aligned}$$

Portanto, $\|u\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{M^2 + \frac{C}{\delta}} + \sqrt{C_1 \left(M^2 + \frac{C}{\delta} \right)}, \forall u \in B$.

(\Leftarrow) Imediato. □

Os próximos resultados caminham no sentido de construir em $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ um conjunto que seja compacto e absorvente.

Proposição 4.1.9. *O subconjunto $B_0 \subset \mathcal{K}^+$ dado por*

$$B_0 = \left\{ u \in C_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); \|u(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta} \text{ e } \|u'(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta} \right), \forall t \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathcal{K}^+ \quad (4.5)$$

é absorvente para $T(t) : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$.

Demonstração. Seja $u \in B$, B limitado em $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$. Temos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &\leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta} \\ \|u'(t)\|^2 &\leq C_1 \left(\|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta} \right).\end{aligned}$$

Existe $M > 0$ tal que $\|u(0)\| \leq M, \forall u \in B$.

Tomando h suficientemente grande tal que $\|T(h)u(t)\|^2 = \|u(t+h)\|^2 \leq M^2 e^{-2\delta(t+h)} + \frac{C}{\delta} \leq \frac{2C}{\delta}, \forall t \geq 0$, concluímos que $T(h)B \subset B_0$ e $T(s)B \subset B_0, \forall s \geq h$. Logo, B_0 é absorvente. □

Proposição 4.1.10. *O conjunto $B_0 \subset \mathcal{K}^+$ definido em (4.5) é compacto na topologia θ_{LOC}^+ .*

Demonstração. Segue da Proposição 4.1.4 que é suficiente mostrar que $\Pi_{[0,T]}B_0$ é compacto, para qualquer $T > 0$.

Seja $\{u_m\} \subset \Pi_{[0,T]}B_0$. Então

$$\max_{s \in [0,T]} \|u_m(s)\| + \max_{s \in [0,T]} \|u'_m(s)\| \leq \sqrt{\frac{2C}{\delta}} + \sqrt{C_1 \left(\frac{2C}{\delta}\right)} = M,$$

isto é, $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Além disso, segue da Desigualdade do Valor Médio que

$$\begin{aligned} \|u_m(s) - u_m(t)\| &\leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|u'_m(\theta s + (1-\theta)t)\| |s-t| \\ &\leq M|s-t| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

uma vez que $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Logo, $\{u_m\}$ é equicontínua e uniformemente limitada. Do Teorema de Arzelá-Áscoli, segue que $\{u_m\}$ admite subsequência convergente

$$u_{m_j} \rightarrow u_0 \text{ em } \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n).$$

Precisamos mostrar que $u_0 \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Já sabemos que

$$\frac{d}{dt}u_{m_j}(t) = -F(u_{m_j}(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Como $u_{m_j} \rightarrow u_0$ uniformemente em $[0, T]$, então $-F(u_{m_j}(t)) \rightarrow -F(u_0(t))$, $\forall t \in [0, T]$. Logo, $\left\{\frac{d}{dt}u_{m_j}\right\}$ é convergente em $[0, T]$.

Seja $g = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}u_{m_j}$. Como $u_{m_j} \rightarrow u_0$ uniformemente em $[0, T]$, segue que $g = \frac{d}{dt}u_0$.

Portanto, $u_0 \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Logo, $\Pi_{[0,T]}B_0$ é pré-compacto, isto é, $\overline{\Pi_{[0,T]}B_0}$ é compacto em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\forall T > 0$. Resta mostrar que $\Pi_{[0,T]}B_0$ é fechado em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Dada uma sequência $\{u_n\} \subset \Pi_{[0,T]}B_0$ tal que $u_n \rightarrow u_0$ em $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, temos que u_0 satisfaz

$$u'_0(t) = -F(u_0(t)), \quad \|u_0(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta}, \quad \|u'_0(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta}\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Procuramos por $v_0 \in B_0$ tal que $u_0 = \Pi_{[0,T]}v_0$. Uma vez que $\{u_n\} \subset \Pi_{[0,T]}B_0$, existe $\{v_n\} \subset B_0$ tal que

$$u_n = \Pi_{[0,T]}v_n.$$

Tomemos uma sequência $\{\tau_k\} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau_k \nearrow \infty$. Fixemos τ_1 e consideremos a sequência $\{u_n^1\}$, onde $u_n^1 = v_n|_{[0, T+\tau_1]}$.

Com argumentos análogos aos apresentados no início desta demonstração, temos $\{u_n^1\}$ uniformemente limitada e equicontínua. Portanto, existe subsequência convergente

$$u_{n,1}^1 \rightarrow u_1 \text{ em } \mathcal{C}^1([0, T + \tau_1], \mathbb{R}^n).$$

Além disso, $u_1|_{[0,T]} = u_0$, pela unicidade do limite, e u_1 satisfaz as limitações

$$\|u_1(t)\|^2 \leq \frac{2C}{\delta}, \quad \|u_1'(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta} \right), \quad \forall t \in [0, T + \tau_1].$$

Considerando $\{v_{n,1}\}$ agora restrita a $[0, T + \tau_2]$, podemos extrair subsequência $\{v_{n,2}\}$ tal que

$$u_{n,2}^2 := \Pi_{[0, T + \tau_2]} v_{n,2} \rightarrow u_2 \text{ em } \mathcal{C}^1([0, T + \tau_2], \mathbb{R}^n),$$

com u_2 satisfazendo as mesmas limitações acima, porém no intervalo $[0, T + \tau_2]$ e $u_2|_{[0,T]} = u_0$.

Procedendo dessa forma e tomando a sequência diagonal $v_{k,k}|_{[0, T + \tau_k]}$, obteremos uma convergência $v_{k,k} \rightarrow v_0 \in B_0$, e v_0 é tal que $v_0|_{[0,T]} = u_0$. \square

Segue dos resultados anteriores que

$$T(t) : (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+) \rightarrow (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$$

possui um subconjunto compacto e absorvente e, sendo \mathcal{K}^+ um espaço métrico completo e $\{T(t)\}$ um C_0 -semigrupo limitado, o Teorema 2.2.10 garante que $T(\cdot)$ tem atrator global em $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$.

4.1.2 Construção e caracterização do atrator de trajetórias

Definição 4.1.11. *Um subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ é um atrator de trajetórias para a equação (4.2) se:*

1. \mathcal{U} é compacto em θ_{LOC}^+ .
2. \mathcal{U} é invariante pelo semigrupo de translação $T(\cdot)$.
3. \mathcal{U} atrai limitados de $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$, isto é, se $B \subset \mathcal{K}^+$ é limitado, então

$$d_{\mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^n)}(T(t)B, \mathcal{U}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \forall T > 0.$$

Observação:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^n)}(T(t)B, \mathcal{U}) &= \sup_{v \in T(t)B} \inf_{u \in \mathcal{U}} d(v, u) \\ &= \sup_{v \in T(t)B} \inf_{u \in \mathcal{U}} \left[\max_{s \in [0, T]} |v(s) - u(s)| + \max_{s \in [0, T]} |v'(s) - u'(s)| \right]. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.12. *Se F satisfaz a condição de dissipatividade (4.3), então (4.2) admite atrator de trajetórias \mathcal{U} .*

Demonstração. Já foi provado que $T(t) : (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+) \rightarrow (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ tem atrator global $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$.

Tal atrator global satisfaz todos os itens da Definição 4.1.11. Logo, \mathcal{U} é o atrator de trajetórias de (4.2). \square

Convém ressaltar que $\mathcal{U} \subset B_0$, uma vez que \mathcal{U} atrai limitados e B_0 absorve limitados.

O atrator de trajetórias assim definido pode ser caracterizado em termos de soluções globais limitadas para (4.2).

Definição 4.1.13. *Consideremos o problema*

$$u'(t) = -F(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

1. *Uma função $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que satisfaz (4.6) é chamada trajetória completa.*
2. *Dizemos que uma trajetória completa $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é limitada se existe $C_u \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|u(t)\| \leq C_u; \quad \|u'(t)\| \leq C_u, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

isto é, $u \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

3. *O conjunto de todas as trajetórias completas e limitadas de (4.6) é chamado de núcleo e é dado por*

$$\mathcal{K} = \{u(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : u(\cdot) \text{ é trajetória completa de (4.6)}\}.$$

Observação: Veja que $\Pi_+\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^+$, mas \mathcal{K}^+ pode ser estritamente maior do que $\Pi_+\mathcal{K}$, pois pode existir $v \in \mathcal{K}^+$ tal que não existe $u \in \mathcal{K}$ onde $v = u|_{[0, \infty)}$.

Podemos munir o espaço $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ com a topologia θ_{LOC} , a qual é definida da mesma forma que a topologia θ_{LOC}^+ , mas neste caso as convergências têm que ocorrer nos compactos $[-T, T]$, $T > 0$.

Teorema 4.1.14. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1.12, temos*

$$\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}.$$

Além disso, \mathcal{K} é limitado em $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e compacto na topologia θ_{LOC} .

Demonstração. Inicialmente mostremos que $\Pi_+\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$.

Seja $u \in \mathcal{K}$. Segue da definição de \mathcal{K} que $\Pi_+u \in \mathcal{K}^+$. Ora, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\Pi_+u(\cdot + h) \in \mathcal{K}^+$.

Consideremos então o conjunto

$$B = \{\Pi_+ u(\cdot + h); h \in \mathbb{R}\}.$$

Por consistir apenas de translações de u , segue que B é limitado ($\forall h \in \mathbb{R}$, $\|\Pi_+ u(\cdot + h)\| \leq C_u$ e $\|\Pi_+ u'(\cdot + h)\| \leq C_u$). Portanto,

$$T(t)B \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{U} \quad \text{em } \theta_{LOC}^+.$$

Mas $T(t)B = B$ e, portanto, $B \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}$ em θ_{LOC}^+ . Neste caso, $B \subset \mathcal{U}$, pois \mathcal{U} é fechado em θ_{LOC}^+ e $\Pi_+ u(\cdot + 0) = \Pi_+ u \in \mathcal{U}$.

Logo, $\Pi_+ \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$.

Por outro lado, seja $u_0 \in \mathcal{U}$. Segue da invariância de \mathcal{U} que existe $u_{-1}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que

$$T(1)u_{-1}(s) = u_0(s) \Rightarrow u_{-1}(s+1) = u_0(s), \quad s \geq 0.$$

Denotemos então $\bar{u}(s) = u_{-1}(s+1)$, o qual está definido para todo $s \geq -1$. Segue que \bar{u} satisfaz (4.6) e (4.7), para todo $s \geq -1$ (pois $u_{-1} \in \mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$) e

$$\Pi_+ \bar{u}(s) = u_0(s).$$

Novamente pela invariância, existe $u_{-2}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que

$$T(1)u_{-2}(s) = u_{-1}(s), \quad s \geq -1$$

$$T(2)u_{-2}(s) = u_0(s), \quad s \geq 0.$$

Redefinimos então $\bar{u}(s) = u_{-2}(s+2)$, $s \geq -2$. Também segue que \bar{u} satisfaz (4.6) e (4.7), $\forall s \geq -2$ e

$$\Pi_+ \bar{u}(s) = u_0(s).$$

Ao continuarmos este processo, obtemos uma função $\bar{u}(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{u}(\cdot)$ é trajetória completa e limitada, isto é, $\bar{u} \in \mathcal{K}$ e $\Pi_+ \bar{u} = u_0$.

Logo, $\mathcal{U} \subset \Pi_+ \mathcal{K}$.

Provemos agora que \mathcal{K} é limitado em $C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in \mathcal{K}$. Temos $\Pi_+ u(\cdot) \in \mathcal{U}$ e, para todo $h \in \mathbb{R}$, $\Pi_+ u(h + \cdot) \in \mathcal{U}$ (pois o problema é autônomo) $\Rightarrow u|_{[-h, \infty)} \in \mathcal{U}$.

Dado $s \in \mathbb{R}$, tomemos h suficientemente grande tal que $s \in [-h, \infty)$. Logo, $\|u(s)\| \leq \frac{2C}{\delta}$ e $\|u'(s)\| \leq C_1 \left(\frac{2C}{\delta} \right)$.

Finalmente, resta mostrar que \mathcal{K} é compacto em θ_{LOC} , o que equivale a mostrar que $\Pi_{[-\tau, \tau]} \mathcal{K}$ é compacto em $C^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^n)$ para todo $\tau > 0$.

Como $\Pi_+\mathcal{K} = \mathcal{U}$ compacto em θ_{LOC}^+ , então $\Pi_{[0,2\tau]}\mathcal{K}$ é compacto em $\mathcal{C}^1([0, 2\tau], \mathbb{R}^n)$ e, sendo $T(-\tau)$ contínua,

$$T(-\tau)\Pi_{[0,2\tau]}\mathcal{K} = \Pi_{[-\tau,\tau]}\mathcal{K}$$

é compacto em $\mathcal{C}^1([-\tau, \tau], \mathbb{R}^n)$.

Logo, \mathcal{K} é compacto em θ_{LOC} . □

Corolário 4.1.15. *Dado $u \in \mathcal{K}$, as seguintes estimativas são válidas:*

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{C}{\delta}; \quad \|u'(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{C}{\delta} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Demonstração. Qualquer conjunto da forma

$$B_\varepsilon = \left\{ u \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); \quad \|u(t)\|^2 \leq \frac{C}{\delta} + \varepsilon \text{ e } \|u'(t)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{C}{\delta} + \varepsilon \right) \right\} \cap \mathcal{K}^+$$

é absorvente para $T(t) : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$ (veja a demonstração da Proposição 4.1.9).

Logo, usando o mesmo argumento apresentado no teorema anterior para provar que \mathcal{K} é limitado, segue que

$$\|u(s)\|^2 \leq \frac{C}{\delta} + \varepsilon; \quad \|u'(s)\|^2 \leq C_1 \left(\frac{C}{\delta} + \varepsilon \right), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Da arbitrariedade de ε , segue o resultado desejado. □

Suponhamos que F satisfaça (4.3) e seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ o atrator de trajetórias de (4.2). Dado qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $T > 0$ arbitrariamente grande, temos que $\Pi_{[0,T]}\mathcal{U}$ é compacto em $\mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ e existem funções

$$u_1(s), u_2(s), \dots, u_k(s) \in \mathcal{U}, \quad k = k(\varepsilon, T), \quad s \in [0, T]$$

tais que as ε -vizinhanças das funções u_i cobrem todo o $\Pi_{[0,T]}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} = \Pi_+\mathcal{K}$, sabemos que tais funções podem ser estendidas a trajetórias completas limitadas.

Seja então $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de (4.2), a qual já provamos ser limitada pela condição de dissipatividade. Temos

$$T(t)u(\cdot) = u(\cdot + t) \rightarrow \mathcal{U} \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \text{ no intervalo } [0, T].$$

Logo, existe $n_1 = n_1(\varepsilon, T)$ tal que $\forall n \geq n_1, t \geq n_1T \Rightarrow u(s+t) \in \mathcal{N}(\mathcal{U}, \varepsilon), \forall s \in [0, T]$. É possível escolher $k_n \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\|u(t+s) - u_{k_n}(s)\| < \varepsilon; \quad \|u'(t+s) - u'_{k_n}(s)\| < \varepsilon, \quad \forall s \in [0, T],$$

ou ainda

$$\|u(nt+s) - u_{k_n}(s)\| < \varepsilon; \quad \|u'(nt+s) - u'_{k_n}(s)\| < \varepsilon, \quad \forall s \in [0, T].$$

Veja que se $s > T$, escrevemos $s = pT + r$ (algoritmo da divisão Euclidiana) e então, $nT + s = (n + p)T + r$, $r \in [0, T]$. Então $u_{k(n+p)}$ será a nova função tomada.

Portanto, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.16. *Se F satisfaz a condição de dissipatividade, dada qualquer solução $\{u(s), s \geq 0\}$ de (4.2), existe um número finito de soluções de (4.2) que moram no atrator e que aproxima $u(s)$, $s \geq 0$.*

4.1.3 Comparação entre os atratores de trajetórias e global

Consideremos o problema (4.2), em que F satisfaz a condição de dissipatividade (4.3) e é *localmente Lipschitz*. Dado qualquer $u_0 \in \mathbb{R}^n$, o problema (4.2) somado à condição inicial $u(0) = u_0$ admite solução única, o que define o semigrupo

$$S(t)u_0 = u(t, 0, u_0).$$

Sabemos que

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-2\delta t} + \frac{C}{\delta}.$$

Segue então que o conjunto $P = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|^2 \leq \frac{2C}{\delta} \right\}$ é um compacto absorvente para o semigrupo $S(\cdot)$.

Logo, (4.2) admite atrator global $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ e atrator de trajetórias $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$. Além disso, sabemos que $\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}$. Denotamos por $\mathcal{K}(t)$ a seguinte seção do núcleo

$$\mathcal{K}(t) = \{u(t); u(\cdot) \in \mathcal{K}\}.$$

Teorema 4.1.17. *Suponhamos que F satisfaça (4.3) e seja localmente Lipschitz. Se \mathcal{A} é o atrator global e \mathcal{U} o atrator de trajetórias de (4.2), então*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(0) = \mathcal{U}(0).$$

Demonstração. Seja $\gamma \in \mathcal{K}$. Como $\gamma \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e é solução de (4.2), segue que o conjunto $B = \{\gamma(s); s \in \mathbb{R}\}$ é limitado e invariante por $S(\cdot)$.

Logo, $B = S(t)B \rightarrow \mathcal{A}$ quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow B \subset \mathcal{A}$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{K}(0) \subset \mathcal{A}$.

Seja agora $x \in \mathcal{A}$. Da invariância de \mathcal{A} podemos construir uma solução $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $u(0) = x$ e u é limitada, pois \mathcal{A} é compacto.

Logo, $x = u(0)$ e $u(0) \in \mathcal{K}(0)$. □

Observações:

1. Veja que $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
2. Então $\mathcal{A} = \bigcup_{u \in \mathcal{K}} \Gamma(u(\cdot))$, o que coincide com a descrição anterior do atrator global (união das órbitas das soluções globais e limitadas).

Exemplo 4.1.18. Consideremos o sistema de primeira ordem

$$\partial_t u = -Lu - f(u) + g, \quad t \geq 0, \quad (4.10)$$

onde L é uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais e positivos, $L \geq \delta_0 I$, $\delta_0 > 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua (não necessariamente Lipschitz) tal que existe $C_0 > 0$ satisfazendo

$$f(v) \cdot v = \sum_{i=1}^n f^i(v)v^i \geq -C_0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Escrevemos $F(u) = Lu + f(u) - g$. Então, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young com algum $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, temos

$$\begin{aligned} F(u) \cdot u &= Lu \cdot u + f(u) \cdot u - g \cdot u \\ &\geq L \|u\|^2 - C_0 - g \cdot u \\ &\geq \delta_0 \|u\|^2 - C_0 - \|g\| \|u\| \\ &\geq \delta_0 \|u\|^2 - C_0 - \varepsilon \|u\|^2 - \frac{\|g\|^2}{4\varepsilon} \\ &= (\delta_0 - \varepsilon) \|u\|^2 - \left(C_0 + \frac{\|g\|^2}{4\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 4.1.12 que (4.10) tem atrator de trajetória $\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}$.

Se supusermos adicionalmente que f é localmente Lipschitz, então F é localmente Lipschitz e (4.10) gera um semigrupo de soluções $\{S(\cdot)\}$ que possui atrator global $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema 4.1.17, temos

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(0) = \mathcal{U}(0).$$

4.1.4 Dependência do atrator de trajetórias com relação a um parâmetro

Trataremos agora da semicontinuidade superior do atrator de trajetórias em relação a um parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}$ pequeno.

Consideremos o problema

$$u'(t) = -F(u(t), \varepsilon), \quad t \geq 0, \quad (4.11)$$

onde $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $F : \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e satisfaz a condição de dissipatividade

$$F(u, \varepsilon) \cdot u = \sum_{i=1}^n F^i(u, \varepsilon) \cdot u^i \geq -C + \delta \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.12)$$

onde $C \geq 0$ e $\delta > 0$ são independentes de ε .

Seja $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ o espaço de trajetórias de (4.11), o qual depende de ε e está contido em $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Pelos Teoremas 4.1.12 e 4.1.14, a equação (4.11) munida da condição (4.12) possui atrator de trajetórias

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

onde $\mathcal{K}_\varepsilon = \{u(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n); u(\cdot) \text{ é trajetória completa de (4.11)}\}$.

Avaliemos agora o comportamento de \mathcal{K}_ε e \mathcal{U}_ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Teorema 4.1.19. *Sob as condições (4.11) e (4.12), temos $\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{K}_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na topologia θ_{LOC} , isto é, $\forall T > 0$,*

$$d_{\mathcal{C}_b^1([-T, T], \mathbb{R}^n)}(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que \mathcal{K}_ε é uniformemente limitado em $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Isto segue do Corolário 4.1.15 e do fato de C e δ independerem de ε .

Suponhamos $\mathcal{K}_\varepsilon \not\rightarrow \mathcal{K}_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Então existem $T_1 > 0$, $\alpha > 0$, uma sequência $\varepsilon_m \rightarrow 0^+$ e $\{u_m\}$, com $u_m \in \mathcal{K}_{\varepsilon_m}$, tais que

$$d_{\mathcal{C}_b^1([-T_1, T_1], \mathbb{R}^n)}(u_m, \mathcal{K}_0) \geq \alpha > 0.$$

Ora, a sequência $\{u_m\}$ é uniformemente limitada e equicontínua (os argumentos são os mesmos que foram dados na demonstração do Teorema 4.1.10). Logo, pelo Teorema de Arzelá-Áscoli, existe subsequência (a qual continuaremos a denotar por u_m) tal que

$$u_m \rightarrow u_0 \text{ em } \mathcal{C}([-T, T], \mathbb{R}^n), \quad \forall T > 0.$$

Logo, é imediato que $u_0 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, uma vez que a limitação

$$\|u_m(t)\| \leq \frac{C}{\delta} \text{ e } \|u'_m(t)\| \leq C_1 \left(\frac{C}{\delta}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

também é válida para u_0 .

Além disso, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d}{dt} u_m = -F(u_m, \varepsilon) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como F é contínua em ambas as variáveis, temos

$$u_m \rightarrow u_0 \text{ em } \mathcal{C}([-T, T], \mathbb{R}^n) \Rightarrow F(u_m, \varepsilon_m) \rightarrow F(u_0, 0) \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Logo, $\left\{ \frac{d}{dt} u_m \right\}$ é convergente. Segue então que $\frac{d}{dt} u_m \rightarrow u'_0$ e então

$$u'_0 = -F(u_0, 0) \quad t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $u_0 \in \mathcal{K}_0$.

Portanto,

$$d_{C^1([-T_1, T_1], \mathbb{R}^n)}(u_m, \mathcal{K}_0) \leq d_{C^1([-T_1, T_1], \mathbb{R}^n)}(u_m, u_0) \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty,$$

o que é uma contradição.

Logo, $\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{K}_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Corolário 4.1.20. *Suponhamos válidos (4.11) e (4.12). Então a família $\{\mathcal{U}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ na topologia θ_{LOC}^+ , isto é,*

$$d_{C^1([0, T], \mathbb{R}^n)}(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{U}_0) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$\forall T > 0$.

Demonstração. Segue do Teorema 4.1.19 e do fato que

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon.$$

□

Corolário 4.1.21. *Suponhamos que, além das condições (4.11) e (4.12), F satisfaz uma condição de Lipschitz local para a primeira variável. Então para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, (4.11) admite atrator global \mathcal{A}_ε , e a família $\{\mathcal{A}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$, isto é,*

$$d_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. Segue do Teorema 4.1.19 e do fato que

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon(0) = \mathcal{U}_\varepsilon(0).$$

□

Exemplo 4.1.22. *Consideremos novamente o sistema (4.10), agora com uma perturbação no termo não linear*

$$u' = -Lu - f(u) - \varepsilon f_1(u) + g, \quad t \geq 0, \quad (4.13)$$

onde $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $f_1(u) \cdot u \geq -C_1, \forall u \in \mathbb{R}^n$ e L, g e f satisfazem as mesmas condições apresentadas no Exemplo 4.1.18

Logo, a condição de dissipatividade (4.12) se verifica.

$$\begin{aligned} (Lu + f(u) + \varepsilon f_1(u) - g) \cdot u &\geq \delta_0 \|u\|^2 - C_0 - \varepsilon C_1 - \varepsilon \|u\|^2 - \frac{\|g\|^2}{4\varepsilon} \\ &\geq (\delta_0 - \varepsilon) \|u\|^2 - \left(C_0 + \varepsilon C_1 + \frac{\|g\|^2}{4\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

para algum $\varepsilon \in (0, \delta_0)$.

Pelo Teorema 4.1.12, a equação (4.13) tem atrator de trajetórias $\mathcal{U}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}_0$ em θ_{LOC}^+ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.2 Atratores de trajetórias para uma equação autônoma abstrata

Alguns conceitos básicos sobre distribuições podem ser encontrados no Apêndice A.

Consideremos o problema de evolução autônomo

$$\partial_t u = A(u(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.14)$$

onde $A(\cdot) : E_1 \rightarrow E_0$ é um operador diferenciável não linear e E_1, E_0 são espaços de Banach com $E_1 \subset E_0$.

Seja E um espaço de Banach intermediário, $E_1 \subset E \subset E_0$. Denotamos por $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}(0, T, E)$, $T > 0$, o conjunto de funções $u : [0, T] \rightarrow E$.

Hipótese 4.2.1. *Se $u \in \mathcal{F}(0, T, E_1)$, então, $A(u(t)) \in \mathcal{F}(0, T, E_0)$ e $\mathcal{F}(0, T, E) \subset \mathcal{F}(0, T, E_0)$.*

Além disso, assumiremos a seguinte hipótese;

Hipótese 4.2.2. *A derivada $\partial_t u$ é no sentido distribucional com valores em E_0 e*

$$\mathcal{F}(0, T, E_0) \subset \mathcal{D}'((0, T), E_0).$$

A hipótese acima é bem razoável, uma vez que trabalharemos em espaços onde as funções sempre serão deriváveis no sentido distribucional.

Exemplo 4.2.3.

1. *Seja $\mathcal{F}(0, T, E) = \mathcal{C}([0, T], E) = \{u : [0, T] \rightarrow E; u \text{ é contínua}\}$. Temos que este espaço é Banach com a norma*

$$\|f\|_{\mathcal{C}([0, T], E)} = \sup_{s \in [0, T]} \|f(s)\|_E$$

$$\text{e } \mathcal{C}([0, T], E) \subset L^1(0, T, E) = L^1_{LOC}(0, T, E) \subset \mathcal{D}'((0, T), E).$$

2. *Seja $\mathcal{F}(0, T, E) = L^p(0, T, E) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow E : \int_0^T \|f(s)\|_E^p ds < \infty \right\}$. Tal espaço é Banach com a norma*

$$\|f\|_{L^p(0, T, E)} = \left[\int_0^T \|f\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{e } L^p(0, T, E) \subset L^1_{LOC}(0, T, E) \subset \mathcal{D}'((0, T), E).$$

Definição 4.2.4. *Uma função $u \in \mathcal{F}(0, T, E)$ é uma solução fraca de (4.14) em $[0, T]$ se satisfaz (4.14) no sentido distribucional em $\mathcal{D}'((0, T), E_0)$.*

Consideremos então o conjunto

$$\mathcal{F}^+ = \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow E \mid \forall T > 0, \Pi_{[0, T]} u \in \mathcal{F}(0, T, E)\}.$$

Definição 4.2.5. *Uma função $u \in \mathcal{F}^+$ é uma solução fraca global de (4.14) se para todo $T > 0$, $\Pi_{[0,T]}u \in \mathcal{F}(0, T, E)$ é uma solução fraca de (4.14) em $[0, T]$.*

Denotaremos por \mathcal{K}^+ o subconjunto de \mathcal{F}^+ formado pelas soluções fracas globais de (4.14). Os elementos de \mathcal{K}^+ são denominados trajetórias.

$$\mathcal{K}^+ = \{u \in \mathcal{F}^+; u \text{ é solução de (4.14)}\}.$$

Definimos então o semigrupo de translação

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{F}^+ &\rightarrow \mathcal{F}^+ \\ u &\mapsto T(t)u(s) = u(t+s) \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Podemos considerar $T(t)$ restrito a \mathcal{F}_T , $\forall T \geq t \geq 0$. Neste caso,

$$T(t) : \mathcal{F}_T \rightarrow \mathcal{F}_{T-t}.$$

Hipótese 4.2.6.

1. A aplicação $T(t) : \mathcal{F}_T \rightarrow \mathcal{F}_{T-t}$ é contínua para todo $T \geq t \geq 0$.
2. $\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{T-t}} \leq \|u\|_{\mathcal{F}_T}$, $\forall u \in \mathcal{F}_T$, $\forall T \geq t \geq 0$.
3. $T(t)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$, $\forall t \geq 0$.

Observação: Veja que as hipóteses são bem naturais. (2) é satisfeita para os Exemplos 4.2.3, enquanto (3) é usualmente encontrado em problemas de evolução autônomos.

4.2.1 A topologia em \mathcal{F}^+

Introduziremos uma topologia em \mathcal{F}^+ a fim de estudar as propriedades de atração que o semigrupo de translação $\{T(t)\}$ exerce sobre subconjuntos de \mathcal{K}^+ .

Para isso, consideraremos as topologias de $\mathcal{F}(0, T, E)$, para $T > 0$, e a topologia em \mathcal{F}^+ será dada de forma indutiva por essas topologias locais.

Alguns conceitos e resultados de Topologia que usaremos nesta seção pode ser encontrados no Apêndice B.

Hipótese 4.2.7. *Suponhamos que \mathcal{F}_T esteja munido de uma topologia θ_T , de forma que $(\mathcal{F}_T, \theta_T)$ seja Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn.*

Como exemplos de topologias θ_T em \mathcal{F}_T podemos citar a topologia forte, fraca e fraca*.

Definição 4.2.8. Definimos a topologia θ_{LOC}^+ em \mathcal{F}^+ da seguinte forma: uma sequência $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+$ converge a $f \in \mathcal{F}^+$ em θ_{LOC}^+ se, e somente se,

$$\Pi_{[0,T]} f_m \rightarrow \Pi_{[0,T]} f \text{ em } \theta_T, \forall T \geq 0.$$

Observação: $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$ é Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn (Veja [4], p. 221).

Teorema 4.2.9. $T(t) : (\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+) \rightarrow (\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$ é contínua, $\forall t > 0$.

Demonstração. Uma vez que $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$ é Fréchet-Urysohn, é suficiente mostrar que $u_n \rightarrow u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$ então $T(t)u_n \rightarrow T(t)u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$ (Ver Teorema B.0.11 no Apêndice).

Seja então $u_n \rightarrow u$ em $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$. Então, para todo $T \geq 0$,

$$\Pi_{[0,T+t]} u_n(\cdot) \rightarrow \Pi_{[0,T+t]} u(\cdot) \text{ em } \theta_{T+t}.$$

Por hipótese, $T(t) : (\mathcal{F}_{T+t}, \theta_{T+t}) \rightarrow (\mathcal{F}_T, \theta_T)$ é contínua. Logo,

$$T(t)\Pi_{[0,T+t]} u_n(\cdot) \rightarrow T(t)\Pi_{[0,T+t]} u(\cdot) \text{ em } \theta_T$$

$$\Pi_{[0,T]} T(t)u_n(\cdot) \rightarrow \Pi_{[0,T]} T(t)u(\cdot) \text{ em } \theta_T$$

$\forall T \geq 0$. Logo,

$$T(t)u_n(\cdot) \rightarrow T(t)u(\cdot) \text{ em } \theta_{LOC}^+.$$

□

Apresentamos agora uma caracterização para os compactos de $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$.

Teorema 4.2.10. Um subconjunto $C \subset \mathcal{F}^+$ é compacto na topologia θ_{LOC}^+ se, e somente se, $\Pi_{[0,T]} C$ é compacto em $(\mathcal{F}_T, \theta_T)$, $\forall T \geq 0$.

Demonstração. Como θ_T e θ_{LOC}^+ são Hausdorff e E_2 , a compacidade e a compacidade sequencial são equivalentes (ver Teorema B.0.13), de modo que a demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema 4.1.4. □

Consideremos o seguinte espaço

$$\mathcal{F}_b^+ = \{u \in \mathcal{F}^+; \|f\|_{\mathcal{F}_b^+} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{\mathcal{F}_b^+} = \sup_{h \geq 0} \|\Pi_{[0,1]} f(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}(0,1,E)}. \quad (4.15)$$

Proposição 4.2.11. $(\mathcal{F}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\{f_n\} \subset \mathcal{F}_b^+$ tal que $f_n \rightarrow f$ na topologia gerada por $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}$. Precisamos mostrar que $f \in \mathcal{F}_b^+$. Suponha por contradição que $\|f\|_{\mathcal{F}_b^+} = \infty$. Logo, para cada $M \geq 0$, existe $h_M \geq 0$ tal que

$$\|\Pi_{[0,1]}f(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \geq M + \varepsilon,$$

onde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(0, 1, E)$. Como $f_n \rightarrow f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\varepsilon)$) tal que $\forall h \geq 0$,

$$\|\Pi_{[0,1]}f(h + \cdot) - \Pi_{[0,1]}f_{n_0}(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \leq \varepsilon.$$

Em particular, para $h = h_M$

$$\begin{aligned} & \|\Pi_{[0,1]}f(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} - \|\Pi_{[0,1]}f_{n_0}(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \leq \varepsilon \\ \Rightarrow & \|\Pi_{[0,1]}f_{n_0}(h_M + \cdot)\|_{\mathcal{F}_1} \geq M \\ \Rightarrow & \|f_{n_0}\|_{\mathcal{F}_b^+} \geq M. \end{aligned}$$

Logo, como M foi tomado de forma arbitrária, segue que $\|f_{n_0}\|_{\mathcal{F}_b^+} = \infty$ (absurdo). \square

Hipótese 4.2.12. *Suponhamos que o espaço de trajetórias \mathcal{K}^+ de (4.14) satisfaça*

$$\mathcal{K}^+ \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_b^+ \subset \mathcal{F}^+,$$

isto é, se $u(\cdot)$ é solução de (4.14), então u é limitada na norma de (4.15).

O espaço \mathcal{F}_b^+ será usado para definir os limitados que serão atraídos por $T(t)$.

Como veremos adiante, o atrator de trajetórias irá atuar em $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$, mas irá atrair $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em $(\mathcal{F}_b^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.

Exemplo 4.2.13.

1. $\mathcal{F}^+ = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, $\mathcal{F}_b^+ = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, E)$ e a norma $\|f\|_{\mathcal{F}_b^+}$ é dada por

$$\|f\|_{\mathcal{F}_b^+} = \sup_{s \geq 0} \|f(s)\|_E.$$

2. $\mathcal{F}^+ = L_{LOC}^p(\mathbb{R}_+, E)$, $\mathcal{F}_b^+ = L_b^p(\mathbb{R}_+, R)$, onde

$$L_b^p(\mathbb{R}_+, E) = \left\{ u \in L_{LOC}^p(\mathbb{R}_+, E); \sup_{h \geq 0} \left[\int_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

4.2.2 Construção e caracterização do atrator de trajetórias

As ideias apresentadas nesta seção estão baseadas no Apêndice C, o qual apresenta o conceito de atrator para semigrupos definidos em espaços de Hausdorff.

Definição 4.2.14. *Um subconjunto $P \subset \mathcal{K}^+$ é um conjunto atrator de limitados se para qualquer $B \subset \mathcal{K}^+$ limitado em \mathcal{F}_b^+ ,*

$$T(t)B \rightarrow P \text{ na topologia } \theta_{LOC}^+, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 4.2.15. *Um subconjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ é o atrator de trajetórias para a equação (4.14) se*

1. \mathcal{U} é compacto na topologia θ_{LOC}^+ e limitado em $(\mathcal{F}_b^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.
2. $T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.
3. \mathcal{U} é o minimal compacto em $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ que atrai todo $B \subset \mathcal{K}^+$, com B limitado em \mathcal{F}_b^+ .

Observação: Podemos usar a mesma nomenclatura que foi apresentada no Apêndice C, isto é, poderíamos ter chamado de

$$((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+))\text{-atrator de limitados}$$

na Definição 4.2.14 e

$$((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+))\text{-atrator de trajetórias}$$

na Definição 4.2.15. Esta notação auxilia na compreensão de qual topologia define os limitados e qual topologia exerce a atração. Não iremos usá-la o tempo todo, a fim de simplificar notação.

Escreveremos $\mathcal{B}(\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$ para indicar o conjunto de todos os subconjuntos $B \subset \mathcal{K}^+$, com B limitado em $(\mathcal{F}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.

Teorema 4.2.16. *Suponhamos que $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ seja fechado em $(\mathcal{F}^+, \theta_{LOC}^+)$. Suponha ainda que exista um subconjunto $P \subset \mathcal{K}^+$, compacto na topologia θ_{LOC}^+ e limitado em \mathcal{F}_b^+ , tal que P é um conjunto atrator de limitados de $\mathcal{B}(\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$.*

Então a equação (4.14) admite atrator de trajetórias $\mathcal{U} \subset P \subset \mathcal{K}^+$.

Demonstração. Notemos que $T(t) : (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+) \rightarrow (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ é contínua (Teorema 4.2.9) e que P é um $((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+))$ -atrator de limitados, compacto em θ_{LOC}^+ e limitado na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}$.

Portanto, pelo Teorema C.0.18, $\{T(t)\}$ admite $((\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+}), (\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+))$ -atrator \mathcal{U} , com $\mathcal{U} \subset P$ e ainda

1. \mathcal{U} é compacto em θ_{LOC}^+ e limitado em \mathcal{F}_b^+ .
2. $T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.

3. \mathcal{U} é o minimal compacto em θ_{LOC}^+ que atrai $\mathcal{B}(\mathcal{K}^+, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b^+})$,

ou seja, \mathcal{U} é o atrator de trajetórias para (4.14). \square

Caracterizaremos os atratores de trajetórias em termos das trajetórias completas. Para isso, consideremos o problema

$$\partial_t u = A(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Definição 4.2.17. *Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow E$ é uma trajetória completa de (4.16) se para todo $T \geq 0$, $\Pi_{[-T, T]}u$ é solução fraca de (4.16) no intervalo $[-T, T]$.*

Definimos, para cada $T > 0$, o espaço $\mathcal{F}(-T, T, E)$ que é um espaço de funções $u : [-T, T] \rightarrow E$ e é munido de uma topologia $\theta_{[-T, T]}$ Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn. Consideremos então

$$\mathcal{F} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow E; \Pi_{[-T, T]}u \in \mathcal{F}(-T, T, E), \forall T \geq 0\},$$

e, além disso,

$$\mathcal{F}_b = \{u \in \mathcal{F}; \|u\|_{\mathcal{F}_b} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_b} = \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{[0, 1]}u(h + \cdot)\|_{\mathcal{F}(0, 1, E)}.$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, prova-se que $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$ é um espaço Banach e \mathcal{F} é munida da topologia indutiva θ_{LOC} , isto é, $u_n \rightarrow u$ em $(\mathcal{F}, \theta_{LOC})$ se, e somente se, $\Pi_{[-T, T]}u_n \rightarrow \Pi_{[-T, T]}u$ em $\theta_{[-T, T]}$, $\forall T \geq 0$.

Analogamente, tem-se que $(\mathcal{F}, \theta_{LOC})$ é Hausdorff, E_2 e Fréchet-Urysohn.

Consideremos então o conjunto \mathcal{K} núcleo de (4.16),

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{F}_b; u \text{ é trajetória completa de (4.16)}\}.$$

Teorema 4.2.18. *Sob as condições do Teorema 4.2.16, que garantem a existência do atrator de trajetórias \mathcal{U} para (4.14), segue que*

$$\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K}.$$

Além disso, \mathcal{K} é compacto em $(\mathcal{F}, \theta_{LOC})$ e limitado em $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$.

Demonstração. A demonstração deste teorema segue as mesmas ideias da demonstração do Teorema 4.1.14. Alguns pontos, nos quais há diferenças na demonstração, devem ser destacados.

Para mostrar que $\Pi_+ \mathcal{K} \subset \mathcal{U}$, tomamos o mesmo conjunto B do Teorema 4.1.14 e da mesma forma concluímos que $B \rightarrow \mathcal{U}$ quando $t \rightarrow \infty$, na topologia θ_{LOC}^+ . Porém, aqui devemos tomar um certo cuidado ao afirmar que $B \subset \mathcal{U}$.

Suponhamos por contradição que $B \not\subset \mathcal{U}$. Logo, existe $u_0 \in B$ tal que $u_0 \notin \mathcal{U}$.

Como $(\mathcal{K}^+, \theta_{LOC}^+)$ é Hausdorff, para cada $v \in \mathcal{U}$, existem vizinhanças $V_{u_0}^v$ e V_v tais que

$$u_0 \in V_{u_0}^v, v \in V_v, V_{u_0}^v \cap V_v = \emptyset.$$

Podemos cobrir \mathcal{U} com

$$\mathcal{U} \subset \bigcup_{v \in \mathcal{U}} V_v$$

e da compacidade de \mathcal{U} , segue que $\mathcal{U} \subset V_{v_1} \cup V_{v_2} \cup \dots \cup V_{v_n} = V$. Essa vizinhança V de \mathcal{U} é tal que $u_0 \notin V \Rightarrow d(B, \mathcal{U}) > 0$, o que é uma contradição. Logo, $B \subset \mathcal{U}$.

Continuamos a demonstração de forma análoga ao Teorema 4.1.14 para concluir que $\Pi_+ \mathcal{K} = \mathcal{U}$.

Mostremos agora que \mathcal{K} é compacto na topologia θ_{LOC} .

Precisamos mostrar que $\forall \tau \geq 0$, $\Pi_{[-\tau, \tau]} \mathcal{K}$ é compacto em $\theta_{[-\tau, \tau]}$. Sabemos que $\Pi_+ \mathcal{U}$ é compacto em θ_{LOC}^+ . Logo,

$$\Pi_{[0, 2\tau]} \mathcal{U} = \Pi_{[0, 2\tau]} \mathcal{K} \text{ é compacto em } \theta_{[0, 2\tau]}.$$

Como $T(-\tau) : (\mathcal{F}(0, 2\tau, E), \theta_{[0, 2\tau]}) \rightarrow (\mathcal{F}(-\tau, \tau, E), \theta_{[-\tau, \tau]})$ é contínua, segue que

$$T(-\tau) \Pi_{[0, 2\tau]} \mathcal{K} = \Pi_{[-\tau, \tau]} \mathcal{K}$$

é compacto em $\theta_{[-\tau, \tau]}$

Resta então mostrar que \mathcal{K} é limitado em $(\mathcal{F}_b, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_b})$.

Sabemos que $\Pi_+ \mathcal{K} = \mathcal{U}$ e que \mathcal{U} é limitado. Então existe $M > 0$ tal que $\|u\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M$ para todo $u \in \mathcal{U}$.

Seja então $u \in \mathcal{K}$. Neste caso, $\Pi_+ u \in \mathcal{U}$ e, sendo o problema autônomo, $\Pi_+ u(h + \cdot) \in \mathcal{U}$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Logo, $u|_{[-h, \infty)} \in \mathcal{U} \Rightarrow \|u|_{[-h, \infty)}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M$.

Portanto,

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{[0, 1]} u(h + \cdot)\| \leq M \Rightarrow \|u\|_{\mathcal{F}_b} \leq M,$$

e concluímos que \mathcal{K} é limitado. □

Capítulo 5

Atrator global para um problema de reação-difusão

Neste capítulo e nos dois seguintes vamos considerar alguns problemas de Cauchy e aplicaremos a teoria discutida até então nestes diferentes casos.

Iniciaremos com um problema de reação-difusão com condição de Dirichlet. Estudaremos a existência e unicidade de solução para esse problema, bem como a existência do atrator global.

5.1 Um problema de reação-difusão com condição de Dirichlet

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e com fronteira suave Γ . Consideremos o problema de reação-difusão

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $d > 1$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $g \in L^2(\Omega)$. Além disso, suporemos que existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_f tais que f satisfaz as seguintes condições: para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f'(v) \geq -c_f, \quad (5.2)$$

$$f(v)v \geq c_1|v|^p - c_3, \quad (5.3)$$

$$|f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1), \quad (5.4)$$

onde $2 < p < \frac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p .

Observação: Em $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos considerar a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

a qual é equivalente à norma usual.

Consideremos o operador

$$\begin{aligned} \Delta : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto \Delta u : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \varphi, \Delta u \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx. \quad (5.5)$$

Proposição 5.1.1. *O operador Δ acima definido é contínuo e linear.*

Demonstração. A linearidade é imediata. Para a continuidade, observemos que

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |\langle \varphi, \Delta u \rangle| = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Ao longo deste capítulo e do seguinte trabalharemos com funções $u(t, x)$, onde $t \in [\tau, T]$ e $x \in \Omega$, mas frequentemente olharemos estas funções como aplicações de $[\tau, T]$ que tomam valores em um espaço de Banach E , cujos elementos são funções definidas em Ω . Por exemplo,

- $C^k([\tau, T], E) = \{u : [\tau, T] \rightarrow E; D^j u \text{ é contínua } \forall 1 \leq j \leq k\}$ e

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{1 \leq j \leq k} \{ \|D^j u(t)\|_E; t \in [\tau, T] \}.$$

- $L^p(\tau, T, E) = \left\{ u : [\tau, T] \rightarrow E; \int_{\tau}^T \|u(t)\|_E^p dt < \infty \right\}$ e

$$\|u\|_{L^p(\tau, T, E)} = \left(\int_{\tau}^T \|u(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 5.1.2. *Seja $T > 0$.*

1. *Se $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega))$, então $f(u(\cdot, \cdot)) \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$.*

2. *Se $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, então $\Delta u \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.*

Demonstração.

1. Segue de (5.4) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u)|^q dx &\leq c_2 \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + |\Omega| \right) = c_2 \left(\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\Omega| \right) \\ \Rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} |f(u)|^q dx dt &\leq c_2 \left(\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}^p dt + T|\Omega| \right) \\ \Rightarrow \|f(u)\|_{L^q(0, T, L^q(\Omega))}^q &\leq c_2 \left(\|u\|_{L^p(0, T, L^p(\Omega))}^p + T|\Omega| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $f(u) \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

2. Da demonstração da Proposição 5.1.1, concluímos

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq \|u(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \int_0^T \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))}^2 &\leq \|u\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 < \infty. \end{aligned}$$

□

Além disso, $g \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) \leftrightarrow L^q(0, T, L^q(\Omega))$. De fato, uma vez que $g \in L^2(\Omega)$,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx = \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

Proposição 5.1.3. *Se $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, então*

$$\partial_t u \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T, L^q(\Omega)) \leftrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)),$$

$$\text{onde } r = \max \left\{ 1, n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 1.0.7 que

$$L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \leftrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)) \text{ e } L^q(0, T, L^q(\Omega)) \leftrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

Concluimos que

$$L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T, L^q(\Omega)) \leftrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

□

Definição 5.1.4. Uma função $u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$ é uma solução fraca global de (5.1) se, para todo $T > 0$, $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ e u satisfaz (5.1) no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, T, L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, isto é, para todo $\varphi \in L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt} \langle u(t, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} = -d \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla \varphi(x) dx - \int_{\Omega} f(u(t, x)) \varphi(x) dx + \langle g(\cdot), \varphi(\cdot) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

Observações:

1. A expressão $\langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$ na definição acima é o produto interno em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, uma vez que $g \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, a expressão $\langle g, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ é o produto de dualidade de $H^{-1}(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$. Omitiremos os sub-índices sempre que não houver risco de confusão.

2. Se u é uma solução fraca de (5.1), então $\partial_t u \in L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$ e

$$u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

Pelo Lema 1.0.8, $u \in \mathcal{C}([0, T], H^{-r}(\Omega))$.

3. Se $u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, temos

$$H^r(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-r}(\Omega).$$

Tomando $E = L^2(\Omega)$, $E_0 = H^{-r}(\Omega)$, temos que $u : [0, T] \rightarrow E_0$ é fracamente contínua (pois é fortemente contínua). Segue então do Teorema 1.0.9 que $u \in \mathcal{C}_w([0, T], L^2(\Omega))$, isto é, $u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ é fracamente contínua.

5.2 O método de Faedo-Galerkin: existência e unicidade de solução

No próximo teorema, aplicamos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução fraca global para o Problema (5.1).

Teorema 5.2.1. Se f satisfaz as condições (5.2), (5.3) e (5.4), então o problema com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), & u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (5.6)$$

admite solução fraca global

$$u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Demonstração. O método de Faedo-Galerkin consiste nas etapas a seguir:

1. Aplicar o método das soluções aproximadas, onde projetamos o problema em espaços de dimensão finita e garantimos a existência de solução local fraca através do Teorema de Caratheodory.
2. Encontrar estimativas e limitantes para as soluções aproximadas e utilizar o Teorema 1.0.15 para garantir a extensão da solução local para o intervalo $[0, T]$.
3. Mostrar que as soluções aproximadas convergem para uma solução do problema original.
4. Verificar que a solução obtida satisfaz os dados iniciais.

Passemos então pelas etapas acima para encontrar uma solução fraca global.

Etapa 1: Segue do Teorema 1.0.10 que as autofunções $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega \\ w|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

constituem uma base para $L^2(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema de Imersão (Teorema 1.0.7) e da hipótese que $2 < p < \frac{2n}{n-2}$, segue que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, e do Corolário 1.0.11, temos $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$.

Mostremos agora que $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ forma uma base para $H_0^1(\Omega)$. Para isso, precisamos mostrar que se $((u, w_j)) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $u = 0$, onde $((\cdot, \cdot))$ representa o produto interno em $H_0^1(\Omega)$ e é dado por $((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$.

Ora,

$$\begin{aligned} ((u, w_j)) = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla w_j dx = 0 \Rightarrow -\langle u, \Delta w_j \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_j \langle u, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \\ &\Rightarrow \langle u, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é base do $L^2(\Omega)$, segue que $u = 0$ e, portanto, $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(\Omega)$. Logo, $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o espaço de dimensão finita $H_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ e seja

$$u_m(t, x) = \sum_{j=1}^m a_{jm}(t) w_j(x). \quad (5.8)$$

Queremos provar que existem coeficientes a_{jm} de forma que tal função u_m satisfaça, para $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle = \langle d\Delta u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle + \langle -f(u_m(t, \cdot)), w_j(\cdot) \rangle + \langle g(\cdot), w_j(\cdot) \rangle \\ u_m(0) = u_{0m}, \end{cases} \quad (5.9)$$

onde $u_{0m} = \sum_{j=1}^m \langle u_0, w_j \rangle w_j \rightarrow u_0$ quando $m \rightarrow \infty$.

Observe que a primeira equação em (5.9) é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \langle u_m(t, \cdot), w_j(\cdot) \rangle = -d \int_{\Omega} \nabla u_m(t, \cdot) \nabla w_j(\cdot) dx + \int_{\Omega} -f(u_m(t, \cdot)) w_j(\cdot) dx + \langle g(\cdot), w_j(\cdot) \rangle$$

e então, podemos reescrever o problema como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_{jm}(t) = F_j(t, a_{1m}(t), a_{2m}(t), \dots, a_{mm}(t)), & 1 \leq j \leq m \\ a_{jm}(0) = \langle u(0, \cdot), w_j(\cdot) \rangle = \int_{\Omega} u_0(x) w_j(x) dx. \end{cases} \quad (5.10)$$

As condições da Definição 1.0.13 são verificadas. Logo, (5.10) possui solução local $a_{jm} : [0, t_{jm}) \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Tomando $t_m = \min\{t_{1m}, t_{2m}, \dots, t_{mm}\}$ segue que

$$u_m : [0, t_m) \rightarrow H_m$$

é solução de (5.9).

Etapa 2: Uma vez que existe $u_m : [0, t_m) \rightarrow \mathbb{R}$ solução local do Problema (5.1), mostraremos que tal solução pode ser prolongada a todo intervalo $[0, T]$, $T > 0$.

De (5.9) segue que, $\forall v \in H_m$,

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m, v \rangle = \langle d\Delta u_m, v \rangle + \langle -f(u_m), v \rangle + \langle g, v \rangle \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } m \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.11)$$

Tomando $v = u_m$, temos

$$\langle \partial_t u_m, u_m \rangle = \langle d\Delta u_m, u_m \rangle + \langle -f(u_m), u_m \rangle + \langle g, u_m \rangle. \quad (5.12)$$

Além disso, do fato de u_m ser da forma (5.8) e cada a_{jm} ser solução de (5.10), segue que u_m é suficientemente regular e então $\|u_m\|^2$ é diferenciável, implicando

$$\langle \partial_t u_m, u_m \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u_m, u_m \rangle.$$

Logo, (5.12) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 dx = -d \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - \int_{\Omega} f(u_m) u_m dx + \langle g, u_m \rangle. \quad (5.13)$$

Usando que $d > 1$, (5.3) e denotando $u_m = u$, a fim de simplificar a escrita, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq - \int_{\Omega} f(u)u dx + \langle g, u \rangle \\
&\leq -c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + c_3 |\Omega| + \langle g, u \rangle.
\end{aligned}$$

Notando que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young para $\langle g, u \rangle$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \leq c_3 |\Omega| + \frac{1}{2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \leq K_0, \quad (5.14)$$

onde $K_0 = 2c_3 |\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$.

Integrando de 0 a t , $t \in [0, t_m]$, obtemos

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + 2c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |u|^p dx ds \leq K_0 t \leq K_0 T, \quad \forall T > t_m.$$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + 2c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |u|^p dx ds \leq K_1, \quad (5.15)$$

onde $K_1 = \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + K_0 T = \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_3 |\Omega| T + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 T$.

Logo, voltando para a notação u_m ,

$$\int_{\Omega} |u_m(t, \cdot)|^2 dx \leq K_1 \Rightarrow \sup_{s \in [0, t]} \int_{\Omega} |u_m(s, \cdot)|^2 dx \leq K_1, \quad (5.16)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_m|^p dx ds \leq \frac{K_1}{2c_1}, \quad (5.17)$$

$$\int_0^t \|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq K_1. \quad (5.18)$$

Pelo Teorema 1.0.15, podemos estender a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$.

Etapa 3: Mostremos agora que as soluções aproximadas convergem para uma solução do problema original.

Veja que as limitações (5.16) a (5.18) independem de t_m e de m . Logo, são válidas para todo $t \in [0, T]$ e $\forall m \in \mathbb{N}$. Portanto,

1. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ (segue de (5.16)).
2. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^p(0, T, L^p(\Omega))$ (segue de (5.17)).
3. $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ (segue de (5.18)).

Além disso,

4. $\{\Delta u_m\}$ é uniformemente limitado em $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$.

De fato, segue da demonstração da Proposição 5.1.1 que $\|\Delta u_m\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))}^2 \leq \|u_m\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2$.

5. $\{f(u_m)\}$ é uniformemente limitado em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Segue da desigualdade obtida na demonstração da Proposição 5.1.2.

Definimos o operador projeção $P_m : H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \rightarrow H_m$ dado por $P_m(h) = \sum_{j=1}^m \langle h, w_j \rangle w_j$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, as equações a seguir são satisfeitas

$$\langle \partial_t u_m, w_j \rangle = d \langle \Delta u_m, w_j \rangle - \langle f(u_m), w_j \rangle + \langle g, w_j \rangle.$$

Uma vez que $u_m = \sum_{j=1}^m a_{mj} w_j$, as equações acima equivalem a

$$\frac{d}{dt} a_{mj} + d \lambda_j a_{mj} = - \langle f(u_m), w_j \rangle + \langle g, w_j \rangle, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Multiplicando a j -ésima equação por w_j e em seguida somando as m equações obtidas, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \partial_t [a_{mj} w_j] + d \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{mj} w_j &= - \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle w_j + \sum_{j=1}^m \langle g, w_j \rangle w_j. \\ \partial_t u_m - d \Delta u_m &= - \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle w_j + \sum_{j=1}^m \langle g, w_j \rangle w_j. \end{aligned}$$

Denotemos $\tilde{P}_m f(u_m) = \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle w_j$ e $\tilde{P}_m g = \sum_{j=1}^m \langle g, w_j \rangle w_j$ (veja que isto é apenas uma notação e não significa a projeção P_m aplicada em $f(u_m)$ ou g , uma vez que P_m está definida em $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$).

Então, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\partial_t u_m = d \Delta u_m - \tilde{P}_m(f(u_m)) + \tilde{P}_m(g) \quad (5.19)$$

Dizer que u_m é uma solução fraca para (5.19) em $\mathcal{D}'(0, T, L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ significa que, para todo $\varphi \in L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\langle \partial_t u_m, \varphi \rangle - d \langle \Delta u_m, \varphi \rangle = - \langle \tilde{P}_m f(u_m), \varphi \rangle + \langle \tilde{P}_m g, \varphi \rangle.$$

Precisamos deixar claro o que significa $\langle \tilde{P}_m f(u_m), \varphi \rangle$ e $\langle \tilde{P}_m g, \varphi \rangle$. Ora,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_m f(u_m), \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle w_j, \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle \langle w_j, \varphi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), \langle \varphi, w_j \rangle w_j \rangle = \left\langle f(u_m), \sum_{j=1}^m \langle \varphi, w_j \rangle w_j \right\rangle \\ &= \langle f(u_m), P_m \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, $\langle \tilde{P}_m g, \varphi \rangle = \langle g, P_m \varphi \rangle$.

Observe que para cada $j = 1, \dots, m$, $\langle f(u_m), w_j \rangle w_j \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$, pois

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\langle f(u_m), w_j \rangle w_j\|_{L^q(\Omega)}^q dt &= \int_0^T |\langle f(u_m), w_j \rangle| \|w_j\|_{L^q(\Omega)}^q dt \\ &\leq \|w_j\|_{L^q(\Omega)}^q \int_0^T \|f(u_m)\|_{L^q(\Omega)}^q \|w_j\|_{L^p(\Omega)}^p dt \\ &= \|w_j\|_{L^q(\Omega)}^q \|w_j\|_{L^p(\Omega)}^p \int_0^T \|f(u_m)\|_{L^q(\Omega)}^q dt < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{P}_m f(u_m) = \sum_{j=1}^m \langle f(u_m), w_j \rangle w_j$ pertence a $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Além disso, $\langle g, w_j \rangle w_j \in L^q(\Omega)$, pois $\langle g, w_j \rangle \in \mathbb{R}$ e $w_j \in L^q(\Omega)$. Como $\langle g, w_j \rangle w_j$ independe de t , segue o desejado.

Portanto, $\tilde{P}_m g = \sum_{j=1}^m \langle g, w_j \rangle w_j$ pertence a $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Segue então de (5.19) que

$$\partial_t u_m \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T, L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

e, uma vez que o lado direito de (5.19) é uniformemente limitado, segue que $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitado em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Podemos então extrair subsequências (as quais continuaremos a chamar de u_m) tais que

1. $u_m \rightharpoonup u_1$ em $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ (pela reflexividade de $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ e Corolário 1.0.17).
2. $u_m \rightharpoonup u_2$ em $L^p(0, T, L^p(\Omega))$ (mesmo motivo apresentado no item anterior).
3. $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_3$ em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

Veja que $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) = [L^1(0, T, L^2(\Omega))]'$ e, uma vez que $\{u_m\}$ uniformemente limitada em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, segue do Teorema 1.0.16 que $\{u_m\}$ admite subsequência convergente na topologia fraca estrela.

Provemos que $u_1 = u_2 = u_3$. Temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ e } L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Da desigualdade (5.14),

$$\{u_m\} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \{u_m\} \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \text{ e } \{u_m\} \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$$

e $u_m \xrightarrow{*} u_1$ em $L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Por outro lado, $u_m \xrightarrow{*} u_3$ em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

Logo, $u_1 = u_3$.

Analogamente, $u_m \xrightarrow{*} u_2$ em $L^\infty(0, T, L^p(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Mas por outro lado, $u_m \xrightarrow{*} u_3$ em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Logo, $u_2 = u_3$.

Portanto, $u_1 = u_2 = u_3$.

4. $\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u$ em $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ (pela continuidade de Δ).

5. $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)) \Rightarrow \partial_t u_m \rightharpoonup h$ em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Provemos que $h = \partial_t u$.

Seja $E_1 = H^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega) \hookrightarrow E_0 = H^{-r}(\Omega)$ e

$$W_{2,q} = W_{2,q}(0, T, H^1(\Omega), H^{-r}(\Omega)) = \{\psi : \psi \in L^2(0, T, H^1(\Omega)); \psi' \in L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))\}.$$

Segue do Teorema 1.0.18 que $W_{2,q} \hookrightarrow L^2(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Uma vez que $\{u_m\} \subset L^2(0, T, H^1(\Omega))$, $\{\partial_t u_m\} \subset L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$ e $W_{2,p}$ é reflexivo, temos $u_m \rightharpoonup \alpha$ em $W_{2,q}$. Segue que $u_m \rightharpoonup \alpha$ em $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ e $\partial_t u_m \rightharpoonup \alpha'$ em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)) \Rightarrow \alpha = u$ e $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u \Rightarrow h = \partial_t u$.

6. $f(u_m) \rightharpoonup w$ em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$ (segue da reflexividade de $L^q(0, T, L^q(\Omega))$ e do Corolário 1.0.17).

Mostraremos a seguir que $\tilde{P}_m f(u_m) \rightharpoonup w$ em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$ e $\tilde{P}_m g \rightharpoonup g$ em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$. Primeiramente, observemos que dada uma função $\phi \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$, temos $\tilde{P}_m \phi \rightharpoonup \phi$, pois

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_m \phi, v \rangle - \langle \phi, v \rangle &= \langle \phi, P_m v \rangle - \langle \phi, v \rangle \\ &= \langle \phi, P_m v - v \rangle \\ &\leq \|\phi\|_{L^q(\Omega)}^q \|P_m v - v\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad \forall v \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Como P_m é a projeção em $L^p(\Omega)$, segue que $P_m v \rightarrow v$ quando $m \rightarrow \infty$. Logo,

$$|\langle \tilde{P}_m \phi, v \rangle - \langle \phi, v \rangle| \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{P}_m \phi \rightharpoonup \phi \text{ em } L^q(0, T, L^q(\Omega)).$$

Logo, $\tilde{P}_m g \rightharpoonup g$ em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$.

Para $\tilde{P}_m f(u_m)$, observemos que

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{P}_m f(u_m), v \rangle - \langle w, v \rangle| &\leq |\langle \tilde{P}_m f(u_m), v \rangle - \langle f(u_m), v \rangle| + |\langle f(u_m), v \rangle - \langle w, v \rangle| \\ &= |\langle f(u_m), P_m v - v \rangle| + |\langle f(u_m) - w, v \rangle|. \end{aligned}$$

Uma vez que $v \in L^2(\Omega)$, $P_m v \rightarrow v$. Além disso, $f(u_m) \rightarrow w$. Logo, $|\langle P_m f(u_m), v \rangle - \langle w, v \rangle| \rightarrow 0$ e $P_m f(u_m) \rightarrow w$.

Portanto, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (5.19), obtemos

$$\partial_t u = d\Delta u - w + g \quad (5.20)$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, T, L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Resta mostrar que $w = f(u)$.

Da observação que segue o Teorema 1.0.18, podemos obter subsequência $u_m \rightarrow u$ em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Pelo Lema 1.0.19, existe subsequência (que ainda continuaremos a denotar por u_m) que converge para u em qtp $[0, T] \times \Omega$. Da continuidade de f , segue

$$f(u_m(t, x)) \rightarrow f(u(t, x)) \text{ em qtp } [0, T] \times \Omega.$$

Agora, da limitação de $\{f(u_m)\}$ em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$, podemos aplicar o Lema de Lions 1.0.20 para concluir que $f(u_m) \rightarrow f(u)$.

Portanto $w = f(u)$.

Etapa 4: Verificação de que a solução obtida satisfaz os dados iniciais.

Tomemos $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T], H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$, com $\varphi(T) = 0$. Temos

$$\varphi \in L^2(0, T, H^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)).$$

Fazendo o produto das equações (5.19) e (5.20) por $\varphi(t)$, obtemos

$$\langle \partial_t u(t, \cdot), \varphi(t) \rangle - d\langle \Delta u(t, \cdot), \varphi(t) \rangle + \langle f(u) - g, \varphi(t) \rangle = 0 \quad (5.21)$$

$$\langle \partial_t u_m(t, \cdot), \varphi(t) \rangle - d\langle \Delta u_m(t, \cdot), \varphi(t) \rangle + \langle P_m(f(u_m) - g), \varphi(t) \rangle = 0 \quad (5.22)$$

Integrando por partes com relação a t em (5.21), obtemos

$$-\langle u(t), \varphi(t) \rangle|_0^T + \int_0^T [-\langle u, \varphi' \rangle - d\langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle f(u) - g, \varphi \rangle] ds = 0.$$

$$\int_0^T [-\langle u, \varphi' \rangle - d\langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle f(u) - g, \varphi \rangle] ds = \langle u(0), \varphi(0) \rangle. \quad (5.23)$$

Analogamente, para (5.22)

$$\int_0^T [-\langle u_m, \varphi' \rangle - d\langle \Delta u_m, \varphi \rangle + \langle \tilde{P}_m(f(u_m) - g), \varphi \rangle] ds = \langle u_m(0), \varphi(0) \rangle. \quad (5.24)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (5.24), concluímos que

$$\int_0^T [-\langle u, \varphi' \rangle - d\langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle f(u) - g, \varphi \rangle] ds = \langle u_0, \varphi(0) \rangle,$$

pois $u_m(0) = P_m u_0 \rightarrow u_0$ quando $m \rightarrow \infty$, pelo Lema 1.0.22. Logo, $u(0) = u_0$. \square

5.3 Existência do atrator global

Nesta seção mostraremos que o problema (5.1) possui solução única e que existe um compacto em $L^2(\Omega)$ que absorve limitados sob o semigrupo das soluções $S(t)u_0 = u(t, u_0)$. Como $S(t)$ é um C_0 -semigrupo, conforme mostraremos, a existência deste compacto absorvente implicará na existência do atrator global.

Segue do Lema 1.0.23, tomando $V = H^1(\Omega)$, $E = L^p(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, o seguinte resultado:

Proposição 5.3.1. *Se $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ é uma solução fraca de (5.1), então*

1. $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$.
2. A função $\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e, além disso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d\langle \nabla u(t), \nabla u(t) \rangle + \langle f(u) - g, u \rangle = 0, \quad (5.25)$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Corolário 5.3.2. *Seja $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ uma solução fraca de (5.1). Então, para todo $t \geq 0$,*

- 1.

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\lambda t} + R_1^2, \quad (5.26)$$

onde $R_1^2 = 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 (1 + \lambda^{-1})$ e $\lambda = \lambda_1$ (primeiro autovalor positivo do Laplaciano).

2. Além disso,

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + 2c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + R_2^2, \quad (5.27)$$

onde $R_2^2 = 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$.

3. Por último,

$$\int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 e^{\lambda s} ds \leq (1 + \lambda t) \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2R_1^2 e^{\lambda t}. \quad (5.28)$$

Demonstração. 1. De (5.14) e da Desigualdade de Poincaré segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_1 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Pela desigualdade diferencial (Lema 1.0.6), temos

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\lambda_1 t} + (2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2)(1 + \lambda_1^{-1}).$$

2. Integrando (5.14) de t a $t + 1$,

$$\begin{aligned} \|u(t+1)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + 2c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \\ \leq 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Segue então a desigualdade procurada com $R_2^2 = 2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$.

3. Multiplicando (5.26) por $\lambda e^{\lambda t}$ e integrando de 0 a t ,

$$\lambda \int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\lambda s} ds \leq \lambda t \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + R_1^2 e^{\lambda t}. \quad (5.29)$$

Além disso, a desigualdade (5.14) implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\lambda t}] + \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 e^{\lambda t} \\ \leq e^{\lambda t} \left[\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2c_1 \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \right] + \lambda e^{\lambda t} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq e^{\lambda t} [2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2] + \lambda e^{\lambda t} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Integrando a expressão acima de 0 a t e usando (5.29), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\lambda t} - \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 e^{\lambda s} ds \\ \leq e^{\lambda t} [2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2] (\lambda^{-1}) + \lambda \int_0^t e^{\lambda s} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ \leq e^{\lambda t} [2c_3|\Omega| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2] (1 + \lambda^{-1}) + \lambda t \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + R_1^2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^t \|u(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 e^{\lambda s} ds \leq (1 + \lambda t) \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2R_1^2 e^{\lambda t}.$$

□

Logo, o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x) \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

admite solução fraca global $u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\forall T > 0$. A seguir, mostramos a unicidade dessa solução.

Teorema 5.3.3. *Suponha $g \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições (5.2), (5.3) e (5.4). O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x) \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (5.30)$$

admite uma única solução fraca global $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\forall T > 0$.

Demonstração. Suponhamos que u_1, u_2 sejam soluções fracas globais do problema (5.30). Então $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t w = d\Delta w - (f(u_1) - f(u_2)) \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

com $w \in L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\forall T > 0$ e $\partial_t w \in L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$, isto é, w é solução fraca do problema (5.31). Fazendo o produto da primeira equação em (5.31) por $w(t) \in L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\langle f(u_1) - f(u_2), w \rangle \\ &\leq c_f \|w\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

onde na última passagem foi usado o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5.2). Portanto

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2c_f \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.32)$$

Usando a desigualdade (5.32), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2c_f t} \right) &= \left(\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) e^{-2c_f t} - 2c_f e^{-2c_f t} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2c_f \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2c_f t} - 2c_f e^{-2c_f t} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t ,

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2c_f t} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, $w \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

□

Provada a existência e unicidade de solução, consideremos o semigrupo $\{S(t) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$S(t)u_0 = u(t, u_0). \quad (5.33)$$

Teorema 5.3.4. *O semigrupo $\{S(t)\}$ é contínuo.*

Demonstração. Sejam $u = u(t, u_0)$ e $v = v(t, v_0)$ soluções fracas globais do problema (5.1). Defina $w(t) = u(t) - v(t)$. Tal função é uma solução fraca global de

$$\begin{cases} \partial_t w = d\Delta w - (f(u) - f(v)) \\ w(0) = u_0 - v_0 \end{cases}$$

Tomando o produto da primeira equação por $w(t)$ e procedendo como no Teorema 5.3.3, temos

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2c_f t} \\ \Rightarrow \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u(0) - v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{2c_f t} \end{aligned}$$

e o semigrupo é contínuo. □

5.3.1 Existência de um conjunto compacto absorvente em $L^2(\Omega)$

A estratégia para mostrar a existência de atrator global para o problema (5.1) consiste em mostrar a existência de um conjunto compacto absorvente em $L^2(\Omega)$ para o semigrupo $\{S(t)\}$. Para isso, iremos mostrar que

1. O semigrupo $S(t)$ possui um conjunto limitado absorvente em $L^2(\Omega)$.
2. O semigrupo $S(t)$ possui um conjunto limitado absorvente em $H_0^1(\Omega)$.
3. Como $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$, segue que o semigrupo $S(t)$ possui um compacto absorvente em $L^2(\Omega)$.

Proposição 5.3.5. *O semigrupo dado pelas soluções de (5.1) tem um conjunto absorvente em $L^2(\Omega)$, isto é, existem constante ρ_{L^2} e um tempo $t_0 = t_0(\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2)$ tal que a solução $u(t) = S(t)u_0$ satisfaz*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \rho_{L^2}^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Além disso, existe uma constante $\rho_{H_0^1}$ tal que

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \rho_{H_0^1}^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Demonstração. Segue de (5.26) que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\lambda t} + R_1^2$. Tomando t_0 tal que

$$\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\lambda t} \leq R_1^2, \text{ para todo } t \geq t_0,$$

basta considerar $\rho_{L^2}^2 = 2R_1^2$.

De (5.27), temos

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + R_2^2 \leq 2R_1^2 + R_2^2, \quad \forall t \geq t_0,$$

e então basta tomar $\rho_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2R_1^2 + R_2^2$. □

Consideremos a equação $\partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x)$ e tomemos o produto desta equação por $-\Delta u$. Observe que isto pode ser feito desde que u seja suficientemente regular, o que garantiremos adiante.

Prosseguiremos, por hora, com os cálculos de maneira informal. Temos a equação

$$\langle \partial_t u, -\Delta u \rangle + d \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle f(u), \Delta u \rangle - \langle g(x), \Delta u \rangle \quad (5.34)$$

Analisemos cada um dos termos acima:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, -\Delta u \rangle &= -\langle \partial_t u, \Delta u \rangle = \langle \nabla(\partial_t u), \nabla u \rangle = \langle \partial_t(\nabla u), \nabla u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g(x), \Delta u \rangle &= \int_{\Omega} g(x) \Delta u dx \stackrel{Young}{\leq} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |g(x)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta u|^2 \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f(u), \Delta u \rangle &= \int_{\Omega} f(u) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{\Gamma} f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial f(u)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right] \\ &\stackrel{*}{=} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = - \int_{\Omega} f'(u) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_f \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Observação: Em (*) assumimos que $f|_{\Gamma} = 0$. Se este não fosse o caso, bastaria tomar $\tilde{f}(u) = f(u) - f(0)$, $\tilde{g}(x) = g(x) - f(0)$ e o problema ficaria $\partial_t u = d\Delta u - \tilde{f}(u) + \tilde{g}(x)$, com \tilde{f} e \tilde{g} satisfazendo condições iguais às apresentadas no início da seção, mas com constantes diferentes.

Portanto, de (5.34), do item 2 do Teorema 1.0.12 e do fato que $d > 1$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2c_f \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2, \quad (5.35)$$

e se multiplicarmos a desigualdade acima por $te^{\lambda t}$,

$$\left(\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) te^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2c_f te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + te^{\lambda t} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (5.36)$$

Veja que

$$\frac{d}{dt} \left(te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) = e^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + te^{\lambda t} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Logo, somando $e^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ a ambos os lados de (5.36), temos

$$\frac{d}{dt} \left(te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq (2c_f t + 1) e^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + te^{\lambda t} \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (5.37)$$

Integrando de 0 a t

$$\begin{aligned} te^{\lambda t} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq (2c_f t + 1) \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 e^{\lambda s} ds + t \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \int_0^t e^{\lambda s} ds \\ &\stackrel{(*)}{\leq} (2c_f t + 1) [(1 + \lambda t) \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2R_1^2 e^{\lambda t}] + t \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 e^{\lambda t} \lambda^{-1} \\ &\leq (2c_f t + 2c_f \lambda t^2 + 1 + \lambda t) \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2c_f + 1)(2R_1^2 e^{\lambda t}) + (1 + t) \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 e^{\lambda t} \lambda^{-1} \\ &\leq (1 + t + t^2) c_4 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + t) [c_5 2R_1^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lambda^{-1}] e^{\lambda t} \\ &= (1 + t + t^2) c_4 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + t) R_3^2 e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

onde, $c_4 = \max\{2c_f + \lambda, 1, 2c_f \lambda\}$, $c_5 = \max\{1, 2c_f\}$, $R_3^2 = c_5 2R_1^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lambda^{-1}$ e em (*) usamos (5.28).

Segue que, para t suficientemente grande, $\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2R_3^2 = M^2$. Portanto, $B[0, M]$ é um fechado absorvente em $H_0^1(\Omega)$.

Precisamos então mostrar que u é suficientemente regular para justificar as passagens feitas acima.

A proposição a seguir pode ser encontrada em Robinson, J.C [13], Capítulo 7, Corolário 7.3, p. 193.

Proposição 5.3.6. *Se $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $\partial_t u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, então*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle \nabla(\partial_t u), \nabla u \rangle = -\langle \partial_t u, \Delta u \rangle. \quad (5.38)$$

A proposição anterior, que permite que façamos o produto interno de $\partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x)$ por $-\Delta u$, requer $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $\partial_t u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, o que não é garantido para as soluções fracas.

Porém, da unicidade de solução, segue que toda solução fraca é limite de soluções de Galerkin. Mostraremos que estas soluções de Galerkin possuem a regularidade necessária.

Segue do Corolário 1.0.11 que cada autofunção do Laplaciano w_j , $j \in \mathbb{N}$, pertence a $C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Temos então $w_j \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, uma vez que Ω é limitado.

Como u_m é da forma $u_m(t, x) = \sum_{j=1}^m a_{jm}(t)w_j(x)$, então $u_m(t, \cdot) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Além disso, cada $a_{jm}(t)$ é solução da EDO (5.10), logo é contínua em t . Portanto, $a_{jm} \in L^2(0, T)$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Então, $u_m \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e

$$\begin{aligned} \partial_t u_m &= \Delta u_m - \tilde{P}_m f(u_m) + \tilde{P}_m g(x) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{jm} \underbrace{\Delta w_j}_{\in L^2(\Omega)} - \tilde{P}_m f(u_m) + \tilde{P}_m g(x) \end{aligned}$$

$$\text{e } \sum_{j=1}^m a_{jm}(t) \Delta w_j(x) \in L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tilde{P}_m f(u_m), \tilde{P}_m g \in L^q(0, T, L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

Logo, as aproximações de Galerkin satisfazem as hipóteses da Proposição 5.3.6.

Teorema 5.3.7. *A equação de reação difusão (5.1) admite um conjunto limitado absorvente em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $M > 0$ tal que*

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M,$$

para todo $t \geq t_u$.

Demonstração. Seja u solução fraca da equação

$$\partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x).$$

Consideremos as aproximações de Galerkin da função u ,

$$u_n \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \text{ com } \partial_t u_n \in L^2(0, T, L^2(\Omega)), \forall T > 0,$$

que satisfazem

$$\partial_t u_n = d\Delta u_n - \tilde{P}_n(f(u_n)) + \tilde{P}_n(g).$$

A Proposição 5.3.6 justifica tomarmos o produto interno desta equação por $-\Delta u_n$

$$\begin{aligned} -\langle \partial_t u_n, \Delta u_n \rangle + d \|\Delta u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle \tilde{P}_n(f(u_n)), \Delta u_n \rangle - \langle \tilde{P}_n(g), \Delta u_n \rangle \\ &= \langle f(u_n), P_n \Delta u_n \rangle - \langle g, P_n \Delta u_n \rangle \\ &= \langle f(u_n), \Delta u_n \rangle - \langle g, \Delta u_n \rangle. \end{aligned}$$

Procedendo como anteriormente, temos

$$\|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (t^{-1} + 1 + t)c_4 \|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\lambda t} + (t^{-1} + 1)R_3^2,$$

onde c_4 e R_3 independem de n .

Logo, tomando $M = 2R_3^2$, existe $t_u \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq M^2, \quad t \geq t_u \\ \|u_n\|_{L^\infty(t_u, T, H_0^1(\Omega))} &\leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(t_u, T, H_0^1(\Omega))$, o Lema 1.0.21, com $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, garante que

$$\|u\|_{L^\infty(t_u, T, H_0^1(\Omega))} \leq M$$

e, uma vez que $u \in C([t_u, T], L^2(\Omega))$, segue que

$$\sup_{t \in [t_u, T]} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \Rightarrow \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M, \quad \forall t \in [t_u, T].$$

Como T é arbitrário,

$$\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M, \quad \forall t \geq t_u.$$

□

Teorema 5.3.8. *A equação de reação difusão*

$$\partial_t u = d\Delta u - f(u) + g(x),$$

com $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo (5.2), (5.3) e (5.4), $g \in L^2(\Omega)$ e $d > 1$ possui atrator global.

Demonstração. Basta notar que $B_{H_0^1(\Omega)}[0, M]$, com M obtido no Teorema 5.3.7, é um fechado absorvente em $H_0^1(\Omega)$ e, conseqüentemente, um compacto absorvente quando imerso em $L^2(\Omega)$. □

Capítulo 6

Atrator de trajetórias para um problema de reação-difusão

Neste capítulo vamos considerar um problema de Cauchy autônomo sem garantia de unicidade de solução. Aplicaremos a teoria apresentada no Capítulo 4 e estudaremos a existência do atrator de trajetórias, bem como sua semicontinuidade superior.

6.1 Um problema de reação-difusão com condição de Dirichlet: abordagem multívoca

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e com fronteira suave Γ . Consideremos o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $d > 1$, $\alpha \in (0, 1)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^1 satisfazendo as seguintes condições: existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_f tais que, para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$f'(v) \geq -c_f, \quad (6.2)$$

$$f(v) \cdot v \geq c_1|v|^p - c_3, \quad (6.3)$$

$$|f(v)|^q \leq c_2(|v|^p + 1), \quad (6.4)$$

onde $2 < p < \frac{2n}{n-1}$ e q é o expoente conjugado de p .

Observe que a abordagem deste problema não pode ser por atrator global pois a função

$$u \mapsto |u|^{\alpha-1}u$$

não é localmente Lipschitz, não havendo garantia de unicidade de solução.

Vamos considerar em $H^1(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|u|^2 + d|\nabla u|^2) dx, \quad (6.5)$$

a qual é equivalente à norma usual $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$. De fato, basta notar que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H_d^1(\Omega)} \leq d \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Denotaremos por $H_d^1(\Omega)$ o espaço $H^1(\Omega)$ munido da norma (6.5).

Consideremos o operador

$$\begin{aligned} \Delta : H_d^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto \Delta u : H_d^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde, para cada $\varphi \in H_d^1(\Omega)$,

$$\langle \varphi, \Delta u \rangle = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dv. \quad (6.6)$$

Proposição 6.1.1. *O operador Δ definido acima é contínuo e linear.*

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 5.1.1, porém a desigualdade obtida neste caso é

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

e então,

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{d} \|u\|_{H_d^1(\Omega)}.$$

□

Proposição 6.1.2. *Seja $T > 0$ e q o expoente conjugado de p . Então*

1. *Se $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega))$, então $f(u) \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$.*
2. *Se $u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$, então $\Delta u \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ e $|u|^{\alpha-1}u \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$.*

Demonstração. A prova é exatamente análoga ao que foi feito na Proposição 5.1.2. Precisamos apenas mostrar que se $u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$, então $|u|^{\alpha-1}u \in L^q(0, T, L^q(\Omega))$. Ora,

$$\begin{aligned}
\| |u|^{\alpha-1}u \|_{L^q(0, T, L^q(\Omega))}^q &= \int_0^T \| |u(t, \cdot)|^{\alpha-1}u(t, \cdot) \|_{L^q(\Omega)}^q dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} | |u(t, x)|^{\alpha-1}u(t, x) |^q dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} |u(t, x)|^{\alpha q} dx dt \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{\alpha q}{2}} |\Omega|^{\frac{2-\alpha q}{2}} dt \\
&\stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_0^T \left(\frac{\alpha q}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \left(1 - \frac{\alpha q}{2}\right) |\Omega| \right) dt \\
&\leq \frac{\alpha q}{2} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right) dt + \left(1 - \frac{\alpha q}{2}\right) T |\Omega| \\
&\leq \frac{\alpha q}{2} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u|^2 + d|\nabla u|^2 dx \right) dt + \left(1 - \frac{\alpha q}{2}\right) T |\Omega| \\
&= \frac{\alpha q}{2} \|u\|_{L^2(0, T, H_d^1(\Omega))} + \left(1 - \frac{\alpha q}{2}\right) T |\Omega| < \infty.
\end{aligned}$$

□

Proposição 6.1.3. *Se $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$, então*

$$\partial_t u \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) + L^q(0, T, L^q(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)),$$

$$\text{onde } r = \max \left\{ 1, n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Definição 6.1.4. *Uma função $u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$ é solução fraca global de (6.1) se, para todo $T > 0$, $u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ e u satisfaz (6.1) no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, T, L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$, isto é, para todo $\varphi \in L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega)$,*

$$\frac{d}{dt} \langle u(t, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle = -d \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} [-f(u(t, x)) + |u(t, x)|^{\alpha-1}u(t, x)] \varphi(x) dx.$$

Observações:

1. Se u é uma solução fraca de (6.1), então $\partial_t u \in L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$ e

$$u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)).$$

Pelo Lema 1.0.8, $u \in \mathcal{C}([0, T], H^{-r}(\Omega))$.

2. Se $u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, temos

$$H^r(\Omega) \hookrightarrow H_d^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-r}(\Omega).$$

Tomando $E = L^2(\Omega)$, $E_0 = H^{-r}(\Omega)$, temos que $u : [0, T] \rightarrow E_0$ é fracamente contínua (pois é fortemente contínua). Segue então do Teorema 1.0.9 que $u \in \mathcal{C}_w([0, T], L^2(\Omega))$, isto é, $u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ é fracamente contínua.

6.2 Existência de solução via método de Faedo-Galerkin

No próximo teorema aplicaremos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução fraca global para o Problema (6.1). Uma vez que a demonstração é muito similar à demonstração do Teorema 5.2.1, destacaremos apenas os pontos onde há particularidades e diferenças.

Teorema 6.2.1. *Se f satisfaz as condições (6.3), (6.4) e $u_0 \in L^2(\Omega)$, então existe solução fraca global de (6.1), sujeito à condição inicial $u(0) = u_0$, satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_d^1(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Demonstração. Assim como na demonstração do Teorema 5.2.1, esta está estruturada em 4 etapas. As etapas 1, 3 e 4 são exatamente iguais às apresentadas na demonstração do Teorema 5.2.1. Destacaremos a etapa 2, onde há diferenças nas limitações que obtemos para as soluções locais.

Pela etapa 1, existe solução local $u_m : [0, t_m) \rightarrow \mathbb{R}$ para o problema (6.1). Mostraremos que tal solução pode ser prolongada ao intervalo $[0, T]$, $T > 0$. Temos, $\forall v \in H_m$,

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_m, v \rangle = \langle d\Delta u_m, v \rangle + \langle -f(u_m) + |u_m|^{\alpha-1} u_m, v \rangle \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } m \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6.8)$$

Tomando $v = u_m$, temos

$$\langle \partial_t u_m, u_m \rangle = \langle d\Delta u_m, u_m \rangle + \langle -f(u_m) + |u_m|^{\alpha-1} u_m, u_m \rangle. \quad (6.9)$$

Além disso, segue do fato de u_m ser solução que tal função é suficientemente regular e então $\|u_m\|^2$ é diferenciável, implicando

$$\langle \partial_t u_m, u_m \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle u_m, u_m \rangle.$$

Logo, (6.9) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 dx = -d \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - \int_{\Omega} f(u_m) u_m dx + \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha+1} dx. \quad (6.10)$$

Somando $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ a ambos os lados de (6.10) e denotando $u_m = u$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + d \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx &= \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u) \cdot u dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + c_3 |\Omega|. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \|u\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \\ &\leq c_3 |\Omega| + \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\stackrel{Young}{\leq} c_3 |\Omega| + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p dx + \left(\frac{\varepsilon p}{(\alpha+1)} \right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}} \left(\frac{p - (\alpha+1)}{p} \right) |\Omega| + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p dx + \left(\frac{\varepsilon p}{2} \right)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega| \\ &\stackrel{\varepsilon = \frac{c_1}{4}}{\leq} c_3 |\Omega| + \frac{c_1}{4} \int_{\Omega} |u|^p dx + \left(\frac{c_1 p}{4(\alpha+1)} \right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}} \left(\frac{p - (\alpha+1)}{p} \right) |\Omega| + \frac{c_1}{4} \int_{\Omega} |u|^p dx + \left(\frac{c_1 p}{8} \right)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + 2 \|u\|_{H_d^1(\Omega)} + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \leq K_1,$$

onde

$$K_1 = 2|\Omega| \left[c_3 + \left(\frac{c_1 p}{4(\alpha+1)} \right)^{\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)-p}} \left(\frac{p - (\alpha+1)}{p} \right) + \left(\frac{c_1 p}{8} \right)^{\frac{2}{2-p}} \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] \quad (6.11)$$

Integrando de 0 a t , $t \in [0, t_m)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx - \int_{\Omega} |u(0, x)|^2 dx + 2 \int_0^t \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |u(s, x)|^p dx ds \leq K_1 t \leq K_1 T \\ &\int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + 2 \int_0^t \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |u(s, x)|^p dx ds \leq K_2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $K_2 = K_1 T + \int_{\Omega} |u(0, x)|^2 dx$.

Voltando para a notação u_m , temos as seguintes limitações

$$\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^2 dx \leq K_2 \Rightarrow \sup_{s \in [0, t]} \int_{\Omega} |u_m(s, x)|^2 dx \leq K_2, \quad (6.13)$$

$$\int_0^t \|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \frac{K_2}{2}, \quad (6.14)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u_m|^p dx ds \leq \frac{K_2}{c_1}. \quad (6.15)$$

Pelo Teorema 1.0.15, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$. Com isso, a etapa 2 está demonstrada. \square

Segue do Lema 1.0.23, tomando $V = H_d^1(\Omega)$, $E = L^p(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, o seguinte resultado:

Proposição 6.2.2. *Se $u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ é uma solução fraca de (6.1), então*

1. $u \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$.

2. A função $\|u(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e, além disso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d \langle \nabla u(t), \nabla u(t) \rangle + \langle f(u) - |u|^{\alpha-1}u, u \rangle = 0, \quad (6.16)$$

$\forall t \in [0, T]$.

Corolário 6.2.3. *Seja K_1 o número positivo dado em (6.11). Se $u \in L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega))$ é uma solução fraca de (6.1) então, para todo $t \geq 0$,*

1.

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2}. \quad (6.17)$$

2.

$$2 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}. \quad (6.18)$$

Demonstração. Segue da Proposição 6.2.2 que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + d \langle \nabla u(t), \nabla u(t) \rangle + \langle f(u) - |u|^{\alpha-1}u, u \rangle = 0$$

e, da mesma forma que foi feito em (6.10), obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + c_1 \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \leq K_1. \quad (6.19)$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K_1.$$

Pelo Lema 1.0.6, segue que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2},$$

provando o primeiro item.

Integrando agora (6.19) de t a $t + 1$, obtemos

$$\|u(t+1)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds \leq K_1.$$

Então,

$$\begin{aligned} 2 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds &\leq K_1 + \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}. \end{aligned}$$

□

Observação: Segue de (6.17) que $u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Portanto, se $u \in L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$ é solução fraca de (6.1), então $u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.

6.3 Construção do atrator de trajetórias

Consideremos o espaço de funções

$$\mathcal{F}_d^+ = \{u : u \in L_{LOC}^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap L_{LOC}^p(\mathbb{R}_+, L^p(\Omega)) \cap L_{LOC}^2(\mathbb{R}_+, H_d^1(\Omega)) \\ \text{e } \partial_t u \in L_{LOC}^q(\mathbb{R}_+, H^{-r}(\Omega))\},$$

onde $r = \max \left\{ 1, n \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Sejam $p > 1$, E um espaço de Banach e consideremos o espaço de Banach

$$L_b^p(\mathbb{R}_+, E) = \{u \in L_{LOC}^p(\mathbb{R}_+, E) \mid \|u\|_{L_b^p} < \infty\},$$

onde

$$\|v\|_{L_b^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} \|v(s)\|_E^p ds. \quad (6.20)$$

Veja que $\|\cdot\|_{L_b^\infty(\mathbb{R}_+, E)} = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, E)}$, pois

$$\|v\|_{L_b^\infty(\mathbb{R}_+, E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{s \in [0,1]} \|v(t+s)\|_E \\ = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(t)\|_E = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, E)}$$

Com a norma dada em (6.20), definimos

$$\mathcal{F}_{b,d}^+ = \{u \in \mathcal{F}_d^+; \|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} + \|u\|_{L_b^p(\mathbb{R}_+, L^p(\Omega))} + \|u\|_{L_b^2(\mathbb{R}_+, H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_b^q(\mathbb{R}_+, H^{-r}(\Omega))}.$$

Definimos então a topologia $\theta_{LOC,d}^+$ em \mathcal{F}_d^+ : $\{u_n\} \subset \mathcal{F}_d^+$ converge a u na topologia $\theta_{LOC,d}^+$ se, e somente se, $u_n \rightarrow u$ em $\theta_{[0,T],d}$, ou seja, para todo $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$,

1. $u_m \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.
2. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^p(0, T, L^p(\Omega))$.
3. $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$.
4. $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u$ em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Proposição 6.3.1. $(\mathcal{F}_d^+, \theta_{LOC,d}^+)$ é E_2 , Fréchet-Urysohn e Hausdorff.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{F}_{[0,T],d} = \{u \mid u \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T, L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \\ \text{e } \partial_t u \in L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))\}.$$

Denotemos por $\Theta_{[0,T],d}$ a topologia neste espaço, induzida pelas métricas de

$$L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), L^p(0, T, L^p(\Omega)), L^2(0, T, H_d^1(\Omega)) \text{ e } L^q(0, T, H^{-r}(\Omega)),$$

isto é,

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}} = \|u\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T,H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))}.$$

Mostraremos que $(\mathcal{F}_{[0,T],d}, \Theta_{[0,T],d})$ é E_2 , Hausdorff e Fréchet-Urysohn. Logo, $(\mathcal{F}_{b,d}^+, \theta_{LOC,d}^+)$ também é E_2 , Hausdorff e Fréchet-Urysohn.

Uma vez que $(\mathcal{F}_{[0,T],d}, \Theta_{[0,T],d})$ é métrico ($\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}$ define uma norma), segue de imediato que tal espaço é Hausdorff e Fréchet-Urysohn. Resta apenas mostrar que este espaço possui base enumerável.

Suponhamos que $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$, $\{\beta_j, j \in J\}$, $\{\Gamma_k, k \in K\}$ e $\{\xi_l, l \in L\}$ sejam bases enumeráveis de $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, $L^p(0, T, L^p(\Omega))$, $L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$ e $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Consideremos todos os conjuntos da forma

$$\mathcal{F}_{i,j,k,l} = \mathcal{A}_i \cup \beta_j \cup \Gamma_k \cup \xi_l,$$

podendo algum desses conjuntos da união ser vazio. Afirmamos que $\{\mathcal{F}_{i,j,k,l}, (i, j, k, l) \in I \times J \times K \times L\}$ forma uma base para $\Theta_{[0,T],d}$.

De fato, dados $u \in \mathcal{F}_{[0,T],d}$ e um aberto \mathcal{U} tais que $u \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$B_{\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}}(0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}.$$

Tomando $\mathcal{A}_i = B_{\|\cdot\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}}(u, \frac{\varepsilon}{4})$, $\beta_j = B_{\|\cdot\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))}}(u, \frac{\varepsilon}{4})$, $\Gamma_k = B_{\|\cdot\|_{L^2(0,T,H_d^1(\Omega))}}(u, \frac{\varepsilon}{4})$ e $\xi_l = B_{\|\cdot\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))}}(\partial_t u, \frac{\varepsilon}{4})$, segue que $u \in \mathcal{F}_{i,j,k,l} \subset B_{\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}}}(0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Da mesma forma mostramos que se $u \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, onde \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 são abertos básicos, então existe \mathcal{U}_3 aberto básico tal que $u \in \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

Resta apenas mostrar que cada um dos espaços $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, $L^p(0, T, L^p(\Omega))$, $L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$ e $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$ é E_2 .

Ora, $L^p(0, T, L^p(\Omega))$, $L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$ e $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$ são separáveis e, portanto, possuem base enumerável. Além disso, $L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Logo, possui base enumerável. \square

O espaço de trajetórias da equação (6.1) é dado por

$$\mathcal{K}_d^+ = \{u \in \mathcal{F}_d^+ \mid u \text{ é solução fraca global de (6.1)}\}.$$

Pelo Teorema 6.2.1 segue que $\mathcal{K}_d^+ \neq \emptyset$.

Proposição 6.3.2. \mathcal{K}_d^+ é um subconjunto fechado de \mathcal{F}_d^+ na topologia $\theta_{LOC,d}^+$.

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{K}_d^+$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\theta_{LOC,d}^+$. Temos $u \in \mathcal{F}_d^+$ e, $\forall T > 0$,

1. $u_n \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$.
2. $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(0, T, L^p(\Omega))$.
3. $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$.
4. $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$ em $L^q(0, T, H^{-r}(\Omega))$.

Precisamos verificar que u é solução fraca global de (6.1).

Das convergências acima, segue que

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), L^p(0, T, L^p(\Omega)), L^2(0, T, H_d^1(\Omega))$$

e $\{\partial_t u_n\}$ é limitada em $L^q(0, T, H_d^{-r}(\Omega))$.

Portanto, $\{-f(u_n) + |u_n|^{\alpha-1}u_n\}$ é uma sequência limitada e, pelo Corolário 1.0.17, admite subsequência fracamente convergentes em $L^q(0, T, L^q(\Omega))$, digamos,

$$f(u_n) - |u_n|^{\alpha-1}u_n \rightharpoonup w \text{ em } L^q(0, T, L^q(\Omega)).$$

Como u_n é solução fraca de (6.1), fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$\partial_t u = d\Delta u - w,$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'((0, T), L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$.

Com o mesmo argumento apresentado ao final da etapa 3 da demonstração do Teorema 5.2.1, provamos que

$$w = f(u) - |u|^{\alpha-1}u.$$

Logo, $u \in \mathcal{K}_d^+$.

□

Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{F}_d^+ &\rightarrow \mathcal{F}_d^+ \\ u &\mapsto (T(t)u)(s) = u(t+s) \end{aligned}$$

e o semigrupo de translação $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Do fato do problema (6.1) ser autônomo, segue que $T(t)\mathcal{K}_d^+ \subset \mathcal{K}_d^+$. Logo, podemos considerar o semigrupo restrito a \mathcal{K}_d^+ .

Proposição 6.3.3. $T(t) : (\mathcal{F}_d^+, \theta_{LOC,d}^+) \rightarrow (\mathcal{F}_d^+, \theta_{LOC,d}^+)$ é contínua.

Demonstração. A demonstração é idêntica à demonstração feita no Teorema 4.2.9. Basta observar que $T(t) : \mathcal{F}_{[0,T+t],d} \rightarrow \mathcal{F}_{[0,T],d}$ é contínua, uma vez que

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}^+} = \|u(\cdot + t)\|_{\mathcal{F}_{[0,T],d}} \leq \|u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{[0,T+t],d}}.$$

□

Teorema 6.3.4. Existem constantes positivas M_1 e M_2 tais que, $\forall u \in \mathcal{K}_d^+$,

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq M_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + M_2.$$

Demonstração. Temos

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} = \|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} + \|T(t)u\|_{L_b^p(\mathbb{R}_+, L^p(\Omega))} + \|T(t)u\|_{L^{2+b}(\mathbb{R}_+, H_d^1(\Omega))} + \|\partial_s T(t)u\|_{L_b^q(\mathbb{R}_+, H^{-r}(\Omega))}.$$

- Para limitar $\|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))}$, note que, do Corolário 6.2.3 item (1), temos

$$\begin{aligned} \|T(t)u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2}, \\ \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|T(t)u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2}, \\ \|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))}^2 &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2}. \end{aligned}$$

Segue então que

$$\|T(t)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))} \leq \left[\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{K_1}{2} + 1. \quad (6.21)$$

- Para limitarmos $\|T(t)u\|_{L_b^p(\mathbb{R}_+, L^p(\Omega))}$ e $\|T(t)u\|_{L^{2+b}(\mathbb{R}_+, H_d^1(\Omega))}$, observe que a desigualdade (6.18) continua válida se integrarmos de t a $t + T$, para qualquer $T > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 2 \int_t^{t+T} \|u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_t^{t+T} \|u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2} \\ 2 \int_0^T \|T(t)u(s)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 ds + c_1 \int_0^T \|T(t)u(s)\|_{L^p(\Omega)}^p ds &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2} \\ 2 \|T(t)u\|_{L^2(0,T,H_d^1(\Omega))}^2 + c_1 \|T(t)u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))}^p &\leq \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|T(t)u\|_{L^2(0,T,H_d^1(\Omega))} \leq \left[\frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1, \quad (6.22)$$

$$\|T(t)u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))} \leq \left[\frac{1}{c_1} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2c_1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{c_1} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2c_1} + 1. \quad (6.23)$$

• Para limitar $\|\partial_s T(t)u\|_{L_{LOC}^q(\mathbb{R}_+, H^{-r}(\Omega))}$, note que

$$\begin{aligned} \|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} &= \left(\int_0^T \|\partial_s u(t+s)\|_{H^{-r}(\Omega)}^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_t^{t+T} \|\partial_s u(s)\|_{H^{-r}(\Omega)}^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_t^{t+T} \|d\Delta u\|_{H^{-r}(\Omega)}^q ds + \int_t^{t+T} \|f(u(s))\|_{H^{-r}(\Omega)}^q ds + \int_t^{t+T} \| |u|^\alpha \|_{H^{-r}(\Omega)}^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\underbrace{k_1^q d^q \int_t^{t+T} \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}^q ds}_{(I)} + \underbrace{k_2^q \int_t^{t+T} \|f(u(s))\|_{L^q(\Omega)}^q ds}_{(II)} + \underbrace{k_3^q \int_t^{t+T} \| |u|^\alpha \|_{L^q(\Omega)}^q ds}_{(III)} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde k_1 , k_2 e k_3 são constantes de imersão.

Segue do Corolário 6.2.3 as seguintes limitações para as integrais destacadas acima:

$$\begin{aligned} (I) \int_t^{t+T} \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}^q ds &\leq \int_t^{t+T} \left[\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^q \right]^q ds = \frac{1}{d^{\frac{q}{2}}} \int_t^{t+1} \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^q ds \\ &\stackrel{1 < q < 2}{\leq} \frac{1}{dd^{\frac{q}{2}}} \left[\frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} \right], \end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade obtida na demonstração da Proposição 6.1.1.

Temos ainda

$$\begin{aligned} (II) \int_t^{t+T} \|f(u(s))\|_{L^q(\Omega)}^q ds &= \int_t^{t+T} \int_{\Omega} |f(u)|^q dx ds \leq \int_t^{t+T} \int_{\Omega} c_2(|u|^p + 1) dx ds \\ &\leq c_2 \int_t^{t+T} (\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + |\Omega|) ds \leq c_2 (\|T(t)u\|_{L^p(0,T,L^p(\Omega))}^p + |\Omega|) \\ &\leq c_2 \left(\frac{1}{c_1} \left[\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2} \right] + |\Omega| \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
(III) \int_t^{t+T} \| |u|^\alpha \|_{L^q(\Omega)}^q ds &= \int_t^{t+T} \int_\Omega |u|^{\alpha q} dx ds \\
&\stackrel{Young}{\leq} \int_t^{t+T} \int_\Omega \left[|u|^2 \left(\frac{\alpha q}{2} \right) + 2 \left(\frac{2 - \alpha q}{2} \right) \right] dx ds \\
&\int_t^{t+T} \left[\frac{\alpha q}{2} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2 - \alpha q}{2} \right) |\Omega| \right] ds \\
&\leq \frac{\alpha q}{2} \left[\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2} \right] T + \frac{2 - \alpha q}{2} |\Omega| T \\
&= \frac{\alpha q}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 T e^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4} T + \frac{2 - \alpha q}{2} |\Omega| T.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando a Desigualdade de Minkowski e as limitações obtidas anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} &\leq k_1 \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \|u(0)\|^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + k_2 c_2^{\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{c_1} \left(\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2} \right) + |\Omega| \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + k_3 \left[\frac{\alpha q}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 T e^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4} T + \frac{2 - \alpha q}{2} |\Omega| T \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\stackrel{d>1 \text{ e } \frac{1}{q}<1}{\leq} k_1 \left[\frac{1}{2} \|u(0)\|^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{4} + 1 \right] + k_2 c_2^{\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \frac{3K_1}{2}}{c_1} \right) + |\Omega| + 1 \right] \\
&\quad + k_3 \left[\frac{\alpha q}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 T e^{-2t} + \frac{3\alpha q K_1}{4} T + \frac{2 - \alpha q}{2} |\Omega| T + 1 \right] \\
&\leq \tilde{K}_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \tilde{K}_2,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_1 &= \frac{k_1}{2} + \frac{k_2 c_2^{\frac{1}{q}}}{c_1} + \frac{k_3 \alpha q}{2} T \\
\tilde{K}_2 &= k_1 \left[\frac{3K_1}{4} + 1 \right] + k_2 c_2^{\frac{1}{q}} \left[\frac{3K_1}{4c_1} + |\Omega| + 1 \right] + k_3 \left[\frac{\alpha q 3K_1}{4} T + \left(\frac{2 - \alpha q}{2} \right) |\Omega| T + 1 \right].
\end{aligned}$$

Temos então

$$\|\partial_s T(t)u\|_{L^q(0,T,H^{-r}(\Omega))} \leq \tilde{K}_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \tilde{K}_2. \quad (6.24)$$

Segue de (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24) a estimativa desejada. \square

Observação: Segue do Teorema 6.3.4 que $\mathcal{K}_d^+ \subset \mathcal{F}_{b,d}^+$. Basta notar que se $u \in \mathcal{K}_d^+$, então

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq M_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + M_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposição 6.3.5. *Se o problema (6.1) satisfaz (6.3) e (6.4), então (6.1) possui atrator de trajetórias \mathcal{U}_d e existe constante $K > 0$ tal que*

$$\mathcal{U}_d \subset \{\tilde{u} \in \mathcal{K}_d^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq K\}.$$

Demonstração. Do Teorema 6.3.4 segue que

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq M_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + M_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, o conjunto $P_d = \{\tilde{u} \in \mathcal{K}_d^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2\}$ é absorvente para o semigrupo de translação $T(t) : \mathcal{K}_d^+ \rightarrow \mathcal{K}_d^+$.

Mostraremos que P_d é compacto na topologia $\theta_{LOC,d}^+$. Seja $\{u_m\} \subset P_d$, então $\|u_m\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Tomemos uma sequência de números positivos $\tau_m \nearrow \infty$. Fixado $\tau_1 > 0$, $\{u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, \tau_1, L^2(\Omega))$, $L^p(0, \tau_1, L^p(\Omega))$, $L^2(0, \tau_1, H_d^1(\Omega))$ e $\{\partial_t u_m\}$ é uniformemente limitada em $L^q(0, \tau_1, H^{-r}(\Omega))$. Logo, com os mesmos argumentos apresentados na etapa (3) das demonstrações dos Teoremas 5.2.1 e 6.2.1, segue que existe subsequência $\{u_{m,1}\}$ que satisfaz

$$\begin{aligned} u_{m,1} &\xrightarrow{*} u_1 \text{ em } L^\infty(0, \tau_1, L^2(\Omega)) \\ u_{m,1} &\rightharpoonup u_1 \text{ em } L^p(0, \tau_1, L^p(\Omega)) \\ u_{m,1} &\rightharpoonup u_1 \text{ em } L^2(0, \tau_1, H_d^1(\Omega)) \\ \partial_t u_{m,1} &\rightharpoonup \partial_t u_1 \text{ em } L^q(0, \tau_1, H^{-r}(\Omega)) \end{aligned}$$

$$f(u_{m,1}) - |u_{m,1}|^{\alpha-1} u_{m,1} \rightharpoonup f(u_1) - |u_1|^{\alpha-1} u_1 \text{ em } L^q(0, \tau_1, L^q(\Omega))$$

e

$$\partial_t u_1 = d\Delta u_1 - f(u_1) + |u_1|^{\alpha-1} u_1 \quad \text{em } [0, \tau_1],$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, \tau_1, L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$.

Fixe agora $\tau_2 > \tau_1$. Então existe subsequência $\{u_{m,2}\}$ de $\{u_{m,1}\}$ tal que

$$\begin{aligned} u_{m,2} &\xrightarrow{*} u_2 \text{ em } L^\infty(0, \tau_2, L^2(\Omega)) \\ u_{m,2} &\rightharpoonup u_2 \text{ em } L^p(0, \tau_2, L^p(\Omega)) \\ u_{m,2} &\rightharpoonup u_2 \text{ em } L^2(0, \tau_2, H_d^1(\Omega)) \\ \partial_t u_{m,2} &\rightharpoonup \partial_t u_2 \text{ em } L^q(0, \tau_2, H^{-r}(\Omega)) \end{aligned}$$

$$f(u_{m,2}) - |u_{m,2}|^{\alpha-1} u_{m,2} \rightharpoonup f(u_2) - |u_2|^{\alpha-1} u_2 \text{ em } L^q(0, \tau_2, L^q(\Omega))$$

e

$$\partial_t u_2 = d\Delta u_2 - f(u_2) + |u_2|^{\alpha-1} u_2 \quad \text{em } [0, \tau_2],$$

no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, \tau_2, L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$.

Observe que da unicidade do limite, $u_2|_{[0, \tau_1]} = u_1$.

Procedendo dessa forma, podemos extrair a sequência diagonal $\{u_{m,m}\}$, a qual é convergente. De fato, $\forall T > 0$, tome $\tau_k \geq T$. A sequência $\{u_{m,m}; m \geq k\}$ converge em $[0, \tau_k]$ e, conseqüentemente, converge em $[0, T]$.

Se $u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_{m,m}$, então $\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2$ e u é solução de (6.1).

Portanto, P_d é um compacto na topologia $\theta_{LOC,d}^+$ e absorvente. Logo, (6.1) possui atrator de trajetórias $\mathcal{U}_d \subset P_d$. \square

Veja que

$$\mathcal{U}_d \subset P_d = \{\tilde{u} \in \mathcal{K}_d^+; \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_{b,d}^+} \leq 2M_2\}, \quad (6.25)$$

e a constante $2M_2$ independe de d .

6.4 Caracterização do atrator de trajetórias

Consideremos

$$\partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \quad (6.26)$$

Definição 6.4.1. Dizemos que uma função u é uma solução fraca completa de (6.26) se $\forall T > 0$, $u \in L^2(-T, T, H_d^1(\Omega)) \cap L^p(-T, T, L^p(\Omega))$ e u satisfaz (6.26) no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(-T, T, L^p(\Omega) \cap H_d^1(\Omega))$.

Da mesma forma que foi feito antes, segue que $\partial_t u \in L^q(-T, T, H^{-r}(\Omega))$, $\forall T > 0$ e consideramos o espaço de Banach $L_b^p(\mathbb{R}, E)$ munido da norma

$$\|v\|_{L_b^p(\mathbb{R}, E)}^p = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|v(s)\|_E^p ds.$$

Definimos os espaços

$$\mathcal{F}_d = \{u \mid u \in L_{LOC}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap L_{LOC}^p(\mathbb{R}, L^p(\Omega)) \cap L_{LOC}^2(\mathbb{R}, H_d^1(\Omega)) \text{ e } \partial_t u \in L_{LOC}^q(\mathbb{R}, H^{-r}(\Omega))\},$$

$$\mathcal{K}_d = \{u \in \mathcal{F}_d \mid u \text{ é solução fraca completa de (6.26)}\},$$

$$\mathcal{F}_{b,d} = \{u \in \mathcal{F}_d \mid \|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}} < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_{\mathcal{F}_{b,d}} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} + \|u\|_{L_b^p(\mathbb{R}, L^p(\Omega))} + \|u\|_{L_b^2(\mathbb{R}, H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_b^q(\mathbb{R}, H^{-r}(\Omega))}.$$

A topologia $\Theta_{LOC,d}$ em \mathcal{F}_d é construída de forma análoga à $\theta_{LOC,d}^+$, sendo que as convergências deverão ser em intervalos da forma $[-T, T]$, para $T > 0$.

A demonstração do teorema a seguir é análoga à demonstração do Teorema 4.2.18.

Teorema 6.4.2. Se \mathcal{U}_d é o atrator de trajetórias de (6.1) e \mathcal{K}_d é o núcleo de (6.1), então

$$\mathcal{U}_d = \Pi_+ \mathcal{K}_d.$$

Além disso, $\mathcal{K}_d \subset \mathcal{F}_{b,d}$ é limitado na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{b,d}}$ e compacto na topologia $\Theta_{LOC,d}$.

6.5 Semicontinuidade superior de uma família de atratores de trajetórias

Consideremos agora o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u - f(u) + \varepsilon|u|^{\alpha-1}u, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma \\ u(0, x) = u_0(x) & u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (6.27)$$

onde Ω é um domínio limitado e com fronteira suave Γ , $d > 1$, $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \subset [0, 1)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as condições (6.2), (6.3) e (6.4).

Queremos mostrar que para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, (6.27) possui atrator de trajetórias \mathcal{U}_ε , e que a família $\{\mathcal{U}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é s.c.s em $\varepsilon = 0$.

Sem significativas modificações, podemos replicar o Teorema 6.2.1 para a equação (6.27) a fim de provar a existência de pelo menos uma solução fraca global para o problema com dado inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Consideremos os espaços $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_d^+$, $\mathcal{F}_b^+ = \mathcal{F}_{b,d}^+$ e a topologia $\theta_{LOC}^+ = \theta_{LOC,d}^+$, isto é, abandonaremos o subíndice d uma vez que ele está fixo. Não é difícil notar que tais espaços e a topologia independem de ε .

Já o espaço de trajetórias varia conforme ε varia e, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$\mathcal{K}_\varepsilon^+ = \{u \in \mathcal{F}^+ \mid u \text{ é solução fraca global de (6.27)}\}.$$

Proposição 6.5.1. *O problema (6.27) com $\varepsilon = 0$ admite um conjunto compacto absorvente*

$$P_0 = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M_0\}$$

e, conseqüentemente, possui atrator de trajetórias $\mathcal{U}_0 \subset P_0$.

Demonstração. Se $u \in \mathcal{K}_0^+$, isto é, u é solução fraca global de (6.27) com $\varepsilon = 0$, então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = -d \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u)u dx$$

e, procedendo conforme feito em (6.10),

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2d \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + 2c_3|\Omega| + 2 \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + 2c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \stackrel{Young}{\leq} 2c_3|\Omega| + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + 2 \left(\frac{4}{c_1 p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega|.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \leq 2|\Omega| \left[c_3 + \left(\frac{4}{c_1 p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p} \right) \right] = \tilde{K}_1.$$

Então o Corolário 6.2.3 e o Teorema 6.3.4 podem ser replicados neste caso. Logo, $P_0 = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq 2\tilde{M}_2\}$ (a constante \tilde{M}_2 difere da constante M_2 obtida anteriormente) é absorvente sob a ação do semigrupo $T(t) : \mathcal{K}_0^+ \rightarrow \mathcal{K}_0^+$.

Procedendo como na Proposição 6.3.5, vemos que (6.27) possui atrator de trajetórias $\mathcal{U}_0 \subset P_0$. \square

Proposição 6.5.2. *O problema (6.27), com $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, possui atrator de trajetórias*

$$\mathcal{U}_\varepsilon \subset P = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M\},$$

onde M independe de ε .

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$. Procedendo conforme feito em (6.10), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = -d \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u)u dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx + d \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) &= \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} f(u)u dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + c_3 |\Omega|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando o fato que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + 2c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \\ \leq 2 \left[\varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right] + 2c_3 |\Omega| \\ \leq 2c_3 |\Omega| + c_1 \varepsilon_0 \int_{\Omega} |u|^p dx + 2\varepsilon_0 \left(\frac{2(\alpha+1)}{c_1 p} \right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}} \left(\frac{p-(\alpha+1)}{p} \right) |\Omega| \\ + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx + 2 \left(\frac{4}{c_1 p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p} \right) |\Omega|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)}^2 + c_1(1-\varepsilon_0) \int_{\Omega} |u|^p dx \leq \tilde{K}_1,$$

onde

$$\tilde{K}_1 = 2|\Omega| \left[c_3 + \varepsilon_0 \left(\frac{2(\alpha+1)}{c_1 p} \right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}} \left(\frac{p-(\alpha+1)}{p} \right) + \left(\frac{4}{c_1 p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p} \right) \right].$$

Veja que \tilde{K}_1 independe de ε . Podemos então replicar o Corolário 6.2.3 e o Teorema 6.3.4 para obtermos

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq \tilde{M}_1 \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2t} + \tilde{M}_2,$$

com \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 independentes de ε (para isso, substituímos ε pelo seu limitante superior ε_0 sempre que for necessário tal majoração), e isto vale para todo $u \in \mathcal{K}_\varepsilon^+, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Logo, o conjunto $P = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq 2\tilde{M}_2\}$ é absorvente para o semigrupo $T(t) : \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, além de ser compacto.

Portanto, (6.27) possui atrator de trajetórias $\mathcal{U}_\varepsilon \subset P = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq M\}$, onde $M = 2\tilde{M}_2$. \square

Tomando agora

$$P^* = \{\tilde{u} \in \mathcal{F}_b^+ \mid \|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq \max\{M_0, M\}\},$$

temos que P^* é um compacto absorvente para os semigrupos $T(t) : \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Teorema 6.5.3. *Sejam $\mathcal{U}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, os atratores de trajetórias para o problema (6.27) com $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Então a família $\{\mathcal{U}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é s.c.s. em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que a família não seja semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$. Então existem uma vizinhança $\mathcal{N}(\mathcal{U}_0)$ de \mathcal{U}_0 , e uma sequência $\varepsilon_m \rightarrow 0^+$ tais que

$$\mathcal{U}_{\varepsilon_m} \not\subseteq \mathcal{N}(\mathcal{U}_0) = \mathcal{N}(\Pi_+ \mathcal{K}_0)$$

Tomemos então uma sequência $\tau_m \nearrow \infty$. Da invariância do atrator de trajetórias, segue que

$$T(\tau_m)\mathcal{U}_{\varepsilon_m} \not\subseteq \mathcal{N}(\Pi_+ \mathcal{K}_0).$$

Logo, podemos exibir $u_m \in \mathcal{U}_{\varepsilon_m}, u_m : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\tilde{u}_m := T(\tau_m)u_m \notin \mathcal{N}(\Pi_+ \mathcal{K}_0)$$

e $\tilde{u}_m(t) = u_m(t + \tau_m)$, então $\tilde{u}_m : [-\tau_m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Fixe $\tau_1 > 0$. Consideremos então a sequência $\{\tilde{u}_m, m \geq 1\}$. Tal sequência satisfaz

$$\|\tilde{u}_m(\cdot)\|_{\mathcal{F}_b(-\tau_1, \infty)} \leq \max\{M_0, M\},$$

uma vez que $u_m(\tau_m + \cdot) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_m}$, onde

$$\|\tilde{u}_m\|_{\mathcal{F}_b(-\tau_1, \infty)} = \|\tilde{u}_m\|_{L^\infty(-\tau_1, \infty, L^2(\Omega))} + \|\tilde{u}_m\|_{L_b^p(-\tau_1, \infty, L^p(\Omega))} + \|\tilde{u}_m\|_{L_b^2(-\tau_1, \infty, H_d^1(\Omega))} + \|\partial_t \tilde{u}_m\|_{L_b^q(-\tau_1, \infty, H^{-r}(\Omega))}.$$

Portanto, podemos extrair subsequência $\{\tilde{u}_{m,1}\}$ de $\{\tilde{u}_m\}$ tal que

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{m,1} &\overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}_1 \text{ em } L^\infty(-\tau_1, \tau_1, L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}_{m,1} &\rightharpoonup \tilde{u}_1 \text{ em } L^p(-\tau_1, \tau_1, L^p(\Omega)) \\ \tilde{u}_{m,1} &\rightharpoonup \tilde{u}_1 \text{ em } L^2(-\tau_1, \tau_1, H_d^1(\Omega)) \\ \partial_t \tilde{u}_{m,1} &\rightharpoonup \partial_t \tilde{u}_1 \text{ em } L^p(-\tau_1, \tau_1, H^{-r}(\Omega)).\end{aligned}$$

Além de que

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u}_{m,1} &\rightharpoonup \Delta \tilde{u}_1 \text{ em } L^2(-\tau_1, \tau_1, H^{-1}(\Omega)) \\ f(\tilde{u}_{m,1}) - \varepsilon_{m,1} |\tilde{u}_{m,1}|^{\alpha-1} \tilde{u}_{m,1} &\rightharpoonup f(\tilde{u}_1) \text{ em } L^q(-\tau_1, \tau_1, L^q(\Omega)),\end{aligned}$$

e as convergências acima seguem pelos mesmos argumentos apresentados na etapa (3) da demonstração do Teorema 6.2.1.

Logo, \tilde{u}_1 é solução de (6.27) com $\varepsilon = 0$ no intervalo $[-\tau_1, \tau_1]$ e

$$\|\tilde{u}_1\|_{\mathcal{F}(-\tau_1, \tau_1)} \leq \max\{M_0, M\}.$$

Fixando agora τ_2 e procedendo da mesma forma, obtemos uma subsequência $\{\tilde{u}_{m,2}\} \subset \{\tilde{u}_{m,1}\}$ tal que $\tilde{u}_{m,2} \rightarrow \tilde{u}_2$ em $\Theta[-\tau_2, \tau_2]$ e \tilde{u}_2 é solução de (6.27) com $\varepsilon = 0$ no intervalo $[-\tau_2, \tau_2]$, com

$$\|\tilde{u}_2\|_{\mathcal{F}(-\tau_2, \tau_2)} \leq \max\{M_0, M\}$$

e $\tilde{u}_2|_{[-\tau_1, \tau_1]} = \tilde{u}_1$ pela unicidade do limite.

Procedendo desta forma, podemos tomar a sequência diagonal $\{\tilde{u}_{m,m}\}$ a qual converge para \tilde{u} . Observe que \tilde{u} é solução de (6.27) com $\varepsilon = 0$, pois para qualquer $T > 0$, basta tomar $\tau_m \geq T$ e $\tilde{u}_{m,m}|_{[-\tau_m, \tau_m]} \rightarrow \tilde{u}_m$ a qual é solução em $[-T, T]$. Além disso,

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{F}_b^+} \leq \max\{M_0, M\}.$$

Portanto, $\tilde{u} \in \mathcal{K}_0$ e

$$\Pi_+ \tilde{u}_{m,m} \rightarrow \Pi_+ \tilde{u} \text{ em } \theta_{LOC}^+.$$

Como $\Pi_+ \tilde{u} \in \Pi_+ \mathcal{K}_0 = \mathcal{U}_0$, segue que $\Pi_+ \tilde{u}_{m,m} \in \mathcal{N}(\mathcal{U}_0)$, para m suficientemente grande, mas isso é uma contradição com o que foi suposto inicialmente. \square

Segue da demonstração do teorema anterior o seguinte corolário:

Corolário 6.5.4. *A família $\{\mathcal{K}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é s.c.s. em $\varepsilon = 0$.*

Capítulo 7

Atrator pullback para uma equação diferencial com retardo

Muitos fenômenos físicos não dependem apenas do estado sendo analisado, mas de estados anteriores à análise. É neste contexto que as equações diferenciais com retardo são importantes.

Por exemplo, consideremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t), x(t - \rho(t))) \\ x_s = \psi \in \mathcal{CI}, \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, h]$, $h > 0$, é uma função contínua e $\mathcal{CI} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. A equação diferencial depende não apenas do valor que x assume no instante t , como também de seu valor no tempo $t - \rho(t)$.

Se $x \in \mathcal{C}([-h, T], \mathbb{R}^n)$, então denotamos por x_s a função em $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ dada por

$$x_s(\theta) = x(s + \theta), \quad (7.2)$$

para s fixo em $[0, T]$.

Trataremos inicialmente esta equação não-autônoma em um contexto mais geral, em que não está explícito o retardo, isto é, trataremos o problema da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t) \\ x_s = \psi \in \mathcal{CI}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Suporemos $f : \mathbb{R} \times \mathcal{CI} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e que f é uma aplicação limitada, isto é, leva limitados em limitados.

Segue de [7] que, para cada $(s, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{CI}$, o problema (7.3) possui uma única solução local $x(\cdot, s, \psi)$ definida em $[s - h, \alpha_{s, \psi})$, onde $\alpha_{s, \psi} > s$. Suporemos que $\alpha_{s, \psi} = \infty$, $\forall (s, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{CI}$.

Podemos então definir o processo

$$\begin{aligned} S(t, s) : \mathcal{CI} &\rightarrow \mathcal{CI}, \quad t \geq s \\ \psi &\mapsto S(t, s)\psi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta &\mapsto S(t, s)\psi(\theta) = x_t(\theta, s, \psi). \end{aligned}$$

7.1 Existência do atrator pullback

O Teorema a seguir fornece condições suficientes para garantir a existência do atrator pullback.

Teorema 7.1.1. *Suponhamos que $S(t, s)$ seja uma aplicação limitada, $t \geq s$, e que exista uma família de limitados $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que pullback absorve limitados pelo processo $S(\cdot, \cdot)$. Então (7.3) possui atrator pullback.*

Demonstração. Seja $D \subset \mathcal{CI}$ um conjunto limitado. Como $B(t)$ pullback absorve limitados no instante t , existe um instante $T_{D,t} = T_{D,t}(D, t)$ tal que

$$S(t, s)D \subset B(t), \quad \forall s \leq T_{D,t}.$$

Consideremos então os conjuntos da forma

$$K(t) = S(t, t-h)B(t-h).$$

1. $K(t)$ é limitado, pois $S(t, t-h)$ é uma aplicação limitada.
2. $K(t)$ absorve limitados através do processo $S(t, s)$. De fato, seja $D \subset \mathcal{CI}$ limitado. Então, para $s \leq \min\{t-h, T_{D,t-h}\}$,

$$S(t, s)D = S(t, t-h)S(t-h, s)D \subset S(t, t-h)B(t-h) = K(t).$$

3. $K(t)$ é compacto: seja $\{\psi_n\}$ uma sequência em $K(t)$. Como $K(t) = S(t, t-h)B(t-h)$, existe $\{\tilde{\psi}_n\} \subset B(t-h)$ tal que $\psi_n = S(t, t-h)\tilde{\psi}_n$. Veja que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\theta} \psi_n(\theta) \right\| &= \left\| \frac{d}{d\theta} S(t, t-h)\tilde{\psi}_n \right\| = \left\| \frac{d}{d\theta} x_t(\theta, t-h, \tilde{\psi}_n) \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{d\theta} x(t+\theta, t-h, \tilde{\psi}_n) \right\| = \left\| f(t+\theta, x_{t+\theta}(\cdot, t-h, \tilde{\psi}_n)) \right\| \end{aligned}$$

e $t + \theta \in [t - h, t + h]$, $\left\| x_{t+\theta}(\cdot, t - h, \tilde{\psi}_n) \right\| = \left\| S(t + \theta, t - h) \tilde{\psi}_n \right\| \leq M$, uma vez que $S(t + \theta, t - h)$ é uma aplicação limitada. Como f também é uma aplicação limitada, segue que $f([t - h, t + h], B_{\mathcal{CI}}[0, M])$ é limitado. Assim,

$$\left\| \frac{d}{d\theta} \psi_n(\theta) \right\| \leq \tilde{M},$$

o que implica que a sequência $\{\psi_n\}$ é equicontínua. Uma vez que $K(t)$ é limitado, segue que $\{\psi_n\}$ também é uniformemente limitada. Portanto, segue do Teorema de Arzlerá-Áscoli que $\{\psi_n\}$ admite subsequência convergente. \square

Assumiremos a partir daqui uma condição de dissipatividade para o termo não linear $f(\cdot, \cdot)$, a qual implicará na existência de uma família $B(\cdot)$ de conjuntos limitados que pullback absorve limitados sob o processo $S(\cdot, \cdot)$. Neste caso, o Teorema 7.1.1 garantirá a existência do atrator pullback.

A condição de dissipatividade que exigiremos pode não parecer natural inicialmente, mas veremos um caso onde ela é satisfeita.

Hipótese 7.1.2. A função f satisfaz a seguinte condição de dissipatividade: $\exists \alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ tais que

$$\langle f(t, \psi), \psi(0) \rangle \leq -\alpha |\psi(0)|^2 + \beta, \quad \forall \psi \in \phi(h)\mathcal{CI},$$

onde

$$\phi(h)\mathcal{CI} = \{\psi \in \mathcal{CI} \mid \psi = S(t + h, t)\chi, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}, \chi \in \mathcal{CI}\},$$

isto é, $\phi(h)\mathcal{CI}$ é o conjunto de todas as funções que se realizam como solução de (7.3) após um tempo h decorrido.

Teorema 7.1.3. Suponha que a Hipótese 7.1.2 seja satisfeita. Então existe uma família $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de conjuntos limitados absorventes para (7.3).

Além disso, $S(t, s)$ é uma aplicação limitada. Portanto, $S(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback.

Demonstração. Seja $D \subset \mathcal{CI}$ limitado, $\exists d \geq 0$ tal que $\|\psi\| \leq d, \forall \psi \in D$.

Tome $\psi \in D$ e considere

$$\begin{aligned} \|S(t, t - s)\psi\| &= \sup_{\theta \in [-h, 0]} |S(t, t - s)\psi(\theta)| = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x_t(\theta, t - s, \psi)| \\ &= \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x(t + \theta, t - s, \psi)| = \sup_{\tau \in [t - h, t]} |x(\tau, t - s, \psi)| \end{aligned}$$

Veja que $x(\cdot, t - s, \psi)$ está definido em $[t - s - h, \infty)$, com $s \geq 0$. Logo, $[t - h, t] \subset [t - s - h, \infty)$.

Tomando o produto interno da primeira equação em (7.3) por $x(\tau)$, temos

$$\begin{aligned} \langle x'(\tau), x(\tau) \rangle &= \langle f(\tau, x_\tau), x(\tau) \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |x(\tau)|^2 &= \langle f(\tau, x_\tau), x_\tau(0) \rangle \\ \frac{d}{dt} |x(\tau)|^2 &\leq 2[-\alpha |x_\tau(0)|^2 + \beta] \\ \frac{d}{dt} |x(\tau)|^2 &\leq -2\alpha |x_\tau(0)|^2 + 2\beta. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.0.6,

$$\begin{aligned}
 |x(\tau)|^2 &\leq |x(t-s)|^2 e^{-2\alpha(\tau-t+s)} + \frac{\beta}{\alpha} [1 - e^{-2(\tau-t+s)}] \\
 &\leq |x(t-s)|^2 e^{-2\alpha(\tau-t+s)} + \frac{\beta}{\alpha} \\
 &\leq \|\psi\|^2 e^{-2\alpha\theta} e^{-2\alpha s} + \frac{\beta}{\alpha} \\
 &\leq d^2 e^{2\alpha h} e^{-2\alpha s} + \frac{\beta}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 |x(t+\theta)|^2 &\leq d^2 e^{2\alpha h} e^{-2\alpha s} + \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x(t+\theta)|^2 \leq d^2 e^{2\alpha h} e^{-2\alpha s} + \frac{\beta}{\alpha} \\
 &\Rightarrow \|S(t, t-s)\psi\|^2 \leq 1 + \frac{\beta}{\alpha},
 \end{aligned}$$

para s suficientemente grande.

Tomemos então $B(t) = B_{C\mathcal{I}} \left[0, 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right]$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Tal família de fechados é pullback absorvente para o processo $S(\cdot, \cdot)$, conforme queríamos.

Precisamos mostrar que $S(t, s)$ é uma aplicação limitada. Seja $B(s)$ um limitado. Logo, $\forall \psi \in B(s)$, $\|\psi\| \leq d$.

Veja que $S(t, s)B(s) = S(t, t-\tilde{s})B(t-\tilde{s})$, $\tilde{s} = t-s$. Logo,

$$\|S(t, s)\psi\| = \|S(t, t-\tilde{s})\psi\| = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x(t+\theta, t-\tilde{s}, \psi)| = \sup_{\tau \in [t-h, t]} |x(\tau, t-\tilde{s}, \psi)|.$$

Procedendo da mesma forma que fizemos na primeira parte desta demonstração, temos

$$\sup_{\theta \in [-h, 0]} |x(t+\theta)|^2 \leq d^2 e^{2\alpha h} e^{-2\alpha \tilde{s}} + \frac{\beta}{\alpha} = K_s,$$

onde K_s independe de ψ , apenas de s . Logo, $S(t, s)B(s)$ é limitado. □

Suponhamos agora que $f(t, x_t) = F(x(t-\rho(t)))$ e que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaça as seguintes condições:

Hipótese 7.1.4. 1. F é globalmente limitada, isto é, existe $K \geq 0$ tal que $|F(x)| \leq K$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2. F é uniformemente contínua, isto é, existe função $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente, com $w(0) = 0$, tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq w(|x - y|).$$

3. F satisfaz a seguinte condição de dissipatividade: existem constantes $\alpha_0 > 0$ e $\beta_0 \geq 0$ tais que

$$\langle F(x), x \rangle \leq -\alpha_0 |x|^2 + \beta_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 7.1.5. *Se $f(t, x_t) = F(x(t - \rho(t)))$ e F satisfaz a Hipótese 7.1.4, então $f(\cdot, \cdot)$ satisfaz a Hipótese 7.1.2 e, conseqüentemente, o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t - \rho(t))) \\ x_s = \psi \in \mathcal{CI} \end{cases} \quad (7.4)$$

possui atrator pullback.

Demonstração. Vejamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \langle F(x(t - \rho(t))), x(t) \rangle &\leq \langle F(x(t - \rho(t))) - F(x(t)), x(t) \rangle + \langle F(x(t)), x(t) \rangle \\ &\leq |F(x(t - \rho(t))) - F(x(t))| |x(t)| + (-\alpha_0) |x(t)|^2 + \beta_0 \\ &\leq w(|x(t - \rho(t)) - x(t)|) |x(t)| + (-\alpha_0) |x(t)|^2 + \beta_0 \\ &\stackrel{\theta \in [t - \rho(t), t]}{\leq} w(|x'(\theta)| |\rho(t)|) |x(t)| + (-\alpha_0) |x(t)|^2 + \beta_0 \\ &\leq w(hk) |x(t)| - \alpha_0 |x(t)|^2 + \beta_0 \\ &\stackrel{Young}{\leq} C_\varepsilon w(hk)^2 + \varepsilon |x(t)|^2 - \alpha_0 |x(t)|^2 + \beta_0 \\ &\leq -\alpha |x(t)|^2 + \beta, \end{aligned}$$

onde $\alpha = \alpha_0 - \varepsilon$, $\beta = \beta_0 + C_\varepsilon w(hk)^2$ e $\varepsilon > 0$ é tomado de forma que $\alpha > 0$.

Logo, temos

$$\begin{aligned} \langle f(t, \psi), \psi(0) \rangle &= \langle f(t, \psi_0), \psi(0) \rangle = \langle F(\psi(0 - \rho(t))), \psi(0) \rangle \\ &\leq -\alpha |\psi(0)|^2 + \beta. \end{aligned}$$

Portanto, a Hipótese 7.1.2 está satisfeita e o problema (7.4) possui atrator pullback. \square

Convém ressaltar que o problema (7.4) não é necessariamente autônomo. Um problema autônomo é da forma

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & t \geq s \\ u(s) = u_s \end{cases}$$

e ele não depende diretamente do tempo inicial s , mas apenas do tempo transcorrido $t - s$. Uma mudança $w(t) = u(t + s)$ transforma o problema anterior em

$$\begin{cases} w'(t) = f(w(t)), & t \geq 0 \\ w(0) = u_s. \end{cases}$$

Já para o problema (7.4) não é possível fazer essa translação.

7.2 Semicontinuidade superior de uma família de atratores pullback

Consideremos uma família de equações diferenciais com retardo, parametrizada por ε :

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t - \rho_\varepsilon(t))) \\ x_s = \psi \in \mathcal{CI}_\varepsilon, \end{cases} \quad (7.5)$$

onde $\rho_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, \varepsilon]$ é uma função contínua e $\mathcal{CI}_\varepsilon = \mathcal{C}([-\varepsilon, 0], \mathbb{R}^n)$. Suponhamos ainda que F satisfaça as seguintes condições:

Hipótese 7.2.1.

1. Existe $K > 0$ tal que $|F(x)| \leq K, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. Existe $L > 0$ tal que $|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
3. Existem $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tais que

$$\langle F(x), x \rangle \leq -\alpha|x|^2 + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, pela Proposição 7.1.5, a equação em (7.5) admite atrator pullback $\mathcal{A}_\varepsilon(\cdot)$, com $\mathcal{A}_\varepsilon(t) \subset \mathcal{CI}_\varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consideremos agora o problema autônomo

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.6)$$

Podemos pensar neste problema como sendo o problema limite de (7.5) quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Proposição 7.2.2. *A equação $x'(t) = F(x(t))$ possui atrator global em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Tomando o produto interno da equação por $x(t)$, temos

$$\langle x', x \rangle = \langle F(x), x \rangle \leq -\alpha|x|^2 + \beta$$

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 \leq -2\alpha|x(t)|^2 + 2\beta.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, temos

$$|x(t)|^2 \leq |x(s)|^2 e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 + \frac{\beta}{\alpha},$$

para t suficientemente grande.

Logo, a bola $B_{\mathbb{R}^n} \left[0, 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right]$ é um compacto absorvente.
Portanto, o semigrupo

$$\begin{aligned} S(t) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\mapsto S(t)x_0 \end{aligned}$$

associado às soluções de (7.6), possui atrator global \mathbb{A} . □

Queremos avaliar a semicontinuidade superior dos atratores quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, mas temos um problema: nenhum dos atratores encontra-se no mesmo espaço. Para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{CI}_\varepsilon$ e $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$.

Vamos inicialmente considerar a equação $x'(t) = F(x(t - \rho_\varepsilon(t)))$ em $\mathcal{CI}_{\varepsilon_0} = \mathcal{C}([-\varepsilon_0, 0], \mathbb{R}^n)$ para um dado $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t - \rho_\varepsilon(t))) \\ x_s = \psi \in \mathcal{CI}_{\varepsilon_0}, \end{cases} \quad (7.7)$$

pois consideramos $\rho_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, \varepsilon] \subset [0, \varepsilon_0]$. As soluções de (7.7) estão definidas em $[s - \varepsilon_0, \infty)$, logo podemos tomar o processo

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(t, s) : \mathcal{CI}_{\varepsilon_0} &\rightarrow \mathcal{CI}_{\varepsilon_0} \\ \psi &\rightarrow S_\varepsilon(t, s)\psi(\theta) = x_t(\theta, s, \psi), \quad \theta \in [-\varepsilon_0, 0]. \end{aligned}$$

Agora, todos os \mathcal{A}_ε podem ser vistos como subconjuntos de $\mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$.

Para $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ atrator global, temos a seguinte caracterização

$$\mathbb{A} = \{u_0 \in \mathbb{R}^n : \exists \text{ solução global limitada } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x(0) = u_0\}.$$

Definimos então

$$\mathcal{A} = \{x|_{[-\varepsilon_0, 0]}; x \text{ é solução global limitada}\}. \quad (7.8)$$

Da unicidade de solução, a caracterização acima dada para \mathcal{A} equivale a

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{CI}_{\varepsilon_0}; x(t) = x(t, u_0), t \in [-\varepsilon_0, 0], u_0 \in \mathbb{A}\}.$$

Definimos também o semigrupo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) : \mathcal{CI}_{\varepsilon_0} &\rightarrow \mathcal{CI}_{\varepsilon_0} \\ \psi &\mapsto [\mathcal{L}(t)\psi](\theta) = S(t)\psi(\theta). \end{aligned}$$

Teorema 7.2.3. *Suponhamos que F satisfaça a Hipótese 7.2.1. Então, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe atrator pullback $\mathcal{A}_\varepsilon(\cdot)$ para (7.7) no espaço $\mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$ e $x'(t) = F(x(t))$ tem um atrator global \mathcal{A} em $\mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$ no sentido de (7.8).*

Além do mais, para cada $s \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$, temos

$$S_\varepsilon(t + s, s)\psi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(t)\psi,$$

uniformemente para ψ em conjuntos limitados de $\mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$ e existe um compacto $K \subset \mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), K) = 0.$$

Consequentemente, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Demonstração. A existência dos atratores pullback e global já foi discutidas. Pelo Teorema 3.4.6, é suficiente mostrar que

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall K \subset X$ compacto e $T > 0$,

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \sup_{x \in K} d(S_\varepsilon(t, t - \tau)x, \mathcal{L}(\tau)x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

- 2.

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]} \mathcal{A}_\varepsilon(t)}$$

é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$.

3. os atratores pullback são limitados no passado, isto é,

$$\bigcup_{\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]} \bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}_\varepsilon(s)$$

é limitado, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $\mathcal{L}(t) : \mathcal{CI}_{\varepsilon_0} \rightarrow \mathcal{CI}_{\varepsilon_0}$ como $[\mathcal{L}(t)\psi](\theta) = S(t)\psi(\theta)$ associado ao problema $x' = F(x)$ e comparamos com a solução de $y'(t) = F(y(t - \rho_\varepsilon(t)))$, ambos sujeitos à condição inicial $x_s = \psi$, $\|\psi\| \leq M$.

Temos

$$\frac{d}{dt}[x(t) - y(t)] = F(x(t)) - F(y(t - \rho_\varepsilon(t))).$$

Tomando o produto interno da equação acima por $(x(t) - y(t))$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t) - y(t)|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt}(x(t) - y(t)), x(t) - y(t) \right\rangle \\ &= \langle F(x(t)) - F(y(t)), x(t) - y(t) \rangle + \langle F(y(t)) - F(y(t - \rho_\varepsilon(t))), x(t) - y(t) \rangle \\ &\leq L|x(t) - y(t)|^2 + L|y(t) - y(t - \rho_\varepsilon(t))||x(t) - y(t)| \\ &\stackrel{Young}{\leq} L|x(t) - y(t)|^2 + \frac{L}{2}|y(t) - y(t - \rho_\varepsilon(t))|^2 + \frac{L}{2}|x(t) - y(t)|^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}|x(t) - y(t)|^2 \leq 3L|x(t) - y(t)|^2 + L|y'(\theta)||\rho_\varepsilon(t)| \leq 3L|x(t) - y(t)| + LK\varepsilon,$$

onde $\theta \in [t - \rho_\varepsilon(t), t]$. Aplicando a Desigualdade diferencial à desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)|^2 &\leq LK\varepsilon t e^{3Lt} \\ &= C(\varepsilon, t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\sup_{s \in \mathbb{R}} \|S_\varepsilon(t + s, s)\psi - \mathcal{L}(t)\psi\|_{C\mathcal{I}_{\varepsilon_0}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ uniformemente para a condição inicial e o primeiro item se verifica.

Note agora que o raio do conjunto absorvente B obtido no Teorema 7.1.3 depende apenas de α e β , isto é, é uniforme para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Desta forma, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, a família de conjuntos $\{S_\varepsilon(t, t - \varepsilon_0)B\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de compactos pullback absorventes.

Se denotarmos $K_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t, t - \varepsilon_0)B$ e $K = \mathcal{L}(\varepsilon_0)B$, segue do que foi provado anteriormente que

$$\text{dist}(K_\varepsilon(t), K) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Logo, $\mathcal{A}_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} K$, pois $\mathcal{A}_\varepsilon(t) \subset K_\varepsilon(t)$, uma vez que o atrator pullback é a família minimal de fechados que atrai.

Logo, $\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), K) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ e, com os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 7.1.1, segue que K é compacto.

Os itens 2 e 3 necessários para garantir a semicontinuidade superior da família de atratores pullback seguem do fato de $\mathcal{A}_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} K$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ e a família $\{\mathcal{A}_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} \cup \{\mathcal{A}\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$. \square

Apêndice A

Conceitos básicos sobre distribuições

Os resultados apresentados neste apêndice podem ser encontrados em Hounie, J. [8], e em Teles, R.S. [16].

A.1 Distribuições escalares

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. Denotamos por $\mathcal{C}(\Omega)$ o conjunto

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \varphi \text{ é contínua}\}.$$

Notação multi índice: Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e denotemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. A derivada multi índice de uma função u é dada por

$$D^\alpha u = D^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}, \quad (\text{A.1})$$

quando a derivada da direita existe. O valor $|\alpha|$ é chamado de ordem do multi índice. Quando $|\alpha| = 0$, escrevemos $D^\alpha u = u$.

Definição A.1.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; D^\alpha \varphi \text{ existe e é contínua, } \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Além disso,

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega),$$

e escrevemos

$$\mathcal{C}_C^k(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega); \varphi \text{ tem suporte compacto em } \Omega\},$$

onde $\text{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$.

Observação: O conjunto $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ é chamado de espaço das funções teste, e seus elementos são as funções teste.

Tratemos agora da convergência em $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ e da continuidade de funcionais lineares definidos em $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$.

Definição A.1.2. Dizemos que uma sequência $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ converge para φ em $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_C^\infty(K)$ e $\varphi_j \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{C}_C^\infty(K)$.

Observe que neste caso, $D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo α .

Definição A.1.3. Um funcional linear $\Lambda : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se, para todo K compacto em Ω , existe $M \in \mathbb{N}^*$, $M = M(K)$, e $C \geq 0$, $C = C(K)$, tal que

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \sup\{|D^\alpha \varphi(x)|, x \in K\} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega).$$

Definição A.1.4. Uma distribuição é um funcional linear contínuo $\Lambda : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições:

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{\Lambda : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \mid \Lambda \text{ é funcional linear contínuo}\}.$$

Vamos considerar em $\mathcal{D}'(\Omega)$ a topologia fraca $*$, $\sigma^*((\mathcal{C}_C^\infty(\Omega))', \mathcal{C}_C^\infty(\Omega))$. Então $\Lambda_j \rightarrow \Lambda$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $\langle \Lambda_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle \Lambda, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$.

Exemplo A.1.5. Seja $x_0 \in \Omega$. A aplicação

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \end{aligned}$$

é uma distribuição.

Exemplo A.1.6. (Distribuições representadas por funções $L^1_{LOC}(\Omega)$): Seja $f \in L^1_{LOC}(\Omega)$. O funcional

$$\begin{aligned} \Lambda_f : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição.

A aplicação $f \mapsto \Lambda_f$ é injetora, o que permite concluir que $L^1_{LOC}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Porém, convém ressaltar que não há igualdade entre esses espaços, isto é, existe distribuição $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que não é da forma Λ_f .

Queremos de certa forma estender um operador linear contínuo $T : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ a um operador linear contínuo $\tilde{T} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veja que $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ precisa estar identificado como subconjunto de $\mathcal{D}'(\Omega)$ para que faça sentido falarmos em extensão. O Exemplo A.1.6 ilustra como fazer isso, uma vez que $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \subset L^1_{LOC}(\Omega)$.

Suponhamos que exista um operador linear contínuo $T^X : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \langle T\psi, \varphi \rangle &= \langle \psi, T^X\varphi \rangle \\ \int_{\Omega} (T\psi)\varphi &= \int_{\Omega} \psi(T^X\varphi) \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Estendemos T à aplicação \tilde{T}

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Lambda &\mapsto \tilde{T}\Lambda : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

onde $\langle \tilde{T}\Lambda, \varphi \rangle = \langle \Lambda, T^X\varphi \rangle, \forall \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$.

Não é difícil verificar que \tilde{T} é linear e contínuo.

Operador diferenciação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$: Como motivação, sejam $f, g \in \mathcal{C}_C^2((a, b))$. Integrando por parte, obtemos

$$\int_a^n f''(x)g(x)dx = - \int_a^b f'(x)g'(x)dx = (-1)^2 \int_a^b f(x)g''(x)dx.$$

Consideremos o operador $D^\alpha : \mathcal{C}_C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$. Da integração por partes, D^α satisfaz

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega).$$

Em notação de produto interno,

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha\varphi \rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\varphi \rangle.$$

Tome $(D^\alpha)^X = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$. Podemos então estender D^α a $\mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$\begin{aligned} \tilde{D}^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Lambda &\mapsto \langle \tilde{D}^\alpha\Lambda, \varphi \rangle = \langle \Lambda, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Observações:

1. Para funções suficientemente regulares, as derivadas no sentido usual e as derivadas distribucionais coincidem.
2. $\forall \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens.
3. $L^1_{LOC} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ possuem derivadas distribucionais de todas as ordens, mas podem não ser deriváveis no sentido usual ou no sentido de Sobolev.

A.2 Distribuições vetoriais

Definição A.2.1. *Uma distribuição vetorial sobre $[0, T]$ com valores em X , onde X é um espaço de Banach, é um operador linear contínuo*

$$\Lambda : \mathcal{C}_C^\infty((0, T), \mathbb{R}) \rightarrow X.$$

Ao conjunto dessas distribuições denotamos $\mathcal{D}'((0, T), X)$.

Dado qualquer $u \in L^1_{LOC}(0, T, X)$, consideremos a distribuição vetorial

$$\begin{aligned} \Lambda_u : \mathcal{C}_C^\infty((0, T), \mathbb{R}) &\rightarrow X \\ \varphi &\mapsto \langle \varphi, \Lambda_u \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

onde a integral anterior é calculada no sentido de Bochner em X . Não é difícil notar que $\Lambda_u \in \mathcal{D}'((0, T), X)$ e a aplicação $u \mapsto \Lambda_u$ é injetora.

Proposição A.2.2. $L^p(0, T, X) \subset L^1_{LOC}(0, T, X) \hookrightarrow \mathcal{D}'((0, T), X)$.

Definição A.2.3. *Suponhamos $u, v \in L^p(0, T, X)$, onde X é um espaço de Banach. Dizemos que v é a derivada de u no sentido $\mathcal{D}'(0, T, E)$ se*

$$\int_0^T u(t)\partial_t\varphi(t)dt = - \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_C^\infty((0, T), \mathbb{R}).$$

A integral é tomada em E e denotamos $v = \partial_t u$.

Apêndice B

Alguns resultados de Topologia

Os resultados apresentados neste apêndice podem ser encontrados em Munkres, J [12].

Definição B.0.4. Uma coleção \mathcal{O} de subconjuntos abertos de um espaço topológico (X, τ) é uma base para a topologia τ se cada aberto de (X, τ) pode ser escrito como união dos elementos de \mathcal{O} .

Teorema B.0.5. \mathcal{O} é uma base para a topologia (X, τ) se

1. $\forall x \in X$, existe $G \in \mathcal{O}$ tal que $x \in G$.
2. Se $x \in G_1 \cap G_2$, com $G_1, G_2 \in \mathcal{O}$, existe $G_3 \in \mathcal{O}$ tal que $x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$.

Definição B.0.6. Um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (ou é E_2) se ele possui uma base enumerável para a topologia.

Teorema B.0.7. Se (X, τ) é E_2 , então (X, τ) é separável, isto é, (X, τ) possui um subconjunto denso e enumerável em X .

Teorema B.0.8. Seja (X, τ) um espaço topológico E_2 . Então toda cobertura por abertos de um conjunto $M \subset X$ admite subcobertura enumerável.

Definição B.0.9. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ converge a x em um espaço topológico (X, τ) se para toda vizinhança \mathcal{W} de x , existe $n_0 = n_0(\mathcal{W})$ tal que $x_n \in \mathcal{W}$, $\forall n \geq n_0$.

Em um espaço métrico X , $x \in \overline{M} \subset X \Leftrightarrow$ existe uma sequência $\{x_n\} \subset M$ que converge a x . Em espaços topológicos gerais, essa propriedade não é necessariamente verdadeira.

Definição B.0.10. Um espaço topológico X é Fréchet-Urysohn se para cada $x \in \overline{M}$, $M \subset X$, existe sequência $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$ em (X, τ) .

Teorema B.0.11. Seja (X, τ) um espaço topológico Fréchet-Urysohn. Uma função $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \Theta)$ é contínua em $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x$ em (X, τ) , $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ em (Y, Θ) .

Definição B.0.12. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é Hausdorff se dados quaisquer $x, y \in X$, existem vizinhanças V_x, V_y de x e y , respectivamente, tais que

$$x \in V_x, y \in V_y \text{ e } V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Teorema B.0.13. Se (X, τ) é Hausdorff e E_2 , então um conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, K é sequencialmente compacto.

Apêndice C

Atratores em espaços de Hausdorff

Seja X um conjunto e consideremos em X uma topologia τ e uma métrica μ , que geram os espaços topológico e métrico $\mathcal{T} = (X, \tau)$ e $\mathcal{M} = (X, \mu)$, sendo que a topologia gerada por μ pode não coincidir com τ .

No que faremos, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo em τ , isto é,

$$S(t) : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau).$$

Notação: $\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \{B \subset X; B \text{ é limitado na métrica } \mu\}$.

Definição C.0.14. Dizemos que um conjunto $P \subset X$ é um conjunto $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ -atrator de limitados se, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$,

$$S(t)B \rightarrow P \text{ na topologia } \tau, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição C.0.15. Dizemos que um conjunto $\mathcal{U} \subset X$ é o $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ -atrator do semigrupo $\{S(t)\}$ se:

1. \mathcal{U} é um compacto na topologia τ e limitado na métrica μ .
2. $S(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.
3. \mathcal{U} é o minimal compacto em (X, τ) que $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ -atrai limitados.

Definição C.0.16. Dizemos que uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma trajetória completa para o semigrupo $\{S(t)\}$ se

$$S(t)\gamma(s) = \gamma(s+t), \forall s \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Dizemos a trajetória é completa e limitada se o conjunto $\mathcal{B}_\gamma = \{\gamma(s); s \in \mathbb{R}\}$ é limitado em \mathcal{M} , isto é, $\mathcal{B}_\gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Definição C.0.17. O núcleo \mathcal{K} do semigrupo $\{S(t)\}$ é a união de todas as trajetórias completas e limitadas (em \mathcal{M}). A seção do núcleo em t é dada por

$$\mathcal{K}(t) = \{\gamma(t); \gamma \in \mathcal{K}\}.$$

O teorema a seguir pode ser encontrado em [4], p. 218, Teorema 3.1.

Teorema C.0.18. *Suponhamos que $\{S(t)\}$ seja um semigrupo contínuo atuando em um espaço de Hausdorff $\mathcal{T} = (X, \tau)$.*

Suponhamos ainda que exista um subconjunto $K \subset X$, compacto na topologia τ e limitado em \mathcal{M} , $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ -atrator de limitados.

Então $\{S(t)\}$ possui $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ -atrator $\mathcal{A} \subset K$.

Além do mais,

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(0),$$

onde \mathcal{K} é o núcleo do semigrupo $\{S(t)\}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Brézis, H. *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [2] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. e Robinson, J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, v.182, Springer, 2010.
- [3] Chepyzhov, V. V. e Vishik, M. I. *Attractors for equations of mathematical physics*. Colloquium publications, 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [4] Chepyzhov, V. V.; Vishik, M. I. e Zelik, S. V. *Strong trajectory attractor for a dissipative reaction-diffusion system*. Academician V.A. 869-873 (2010).
- [5] Cholewa, J. W. e Dlotko, T. *Global attractors in abstract parabolic problems*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Coddington, E.A. e Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, New-York, 1955.
- [7] Hale, J.K. *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [8] Hounie, J. *Teoria Elementar das Distribuições*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [9] Jost, J. *Partial Differential Equations*. Graduate texts in Mathematics 214, Springer-Verlag, Second Edition, 2007.
- [10] Lions, J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [11] Lions, J. L e Magenes, E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [12] Munkres, J. R. *Topology: A first Course*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1975.
- [13] Robinson, J. C. *Infinity dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, 2001.

- [14] Smoller, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer, New York, 1983.
- [15] Sotomayor, J. *Equações diferenciais ordinárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. - (Coleção textos universitários do IME-USP; v.4)
- [16] Teles, R.S. *Atratores de trajetórias para algumas classes de equações diferenciais parciais*. Tese (Doutorado em Matemática). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, 2012.
- [17] Triebel, H. *Interpolation theory, functional spaces, differential operators*. North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.