ENSINANDO OPERAÇÕES COM GRANDEZAS FÍSICAS VETORIAIS NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DE UMA UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA

Antônio Fernando Reis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação PPG-PROFIS-São Carlos da Universidade Federal de São Carlos no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Studart

Coorientador(a): Profa. Dra. Priscila Domingues de Azevedo

São Carlos - SP
2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R375e

Reis, Antonio Fernando
Ensinando operações com grandezas físicas vetoriais no ensino médio através de uma unidade de ensino potencialmente significativa / Antonio Fernando Reis. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
104 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Unidade de ensino potencialmente significativa. 2. Aprendizagem significativa. 3. Operações com vetores. 4. Novas tecnologias da informação e comunicação. 5. Simulações computacionais. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Antonio Fernando Reis, realizada em 03/08/2016:

NStudart

Prof. Dr. Nelson Studart Filho
UFSCar

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

MZanotello

Prof. Dr. Marcelo Zanotello
UFABC

Agradecimentos

Especialmente a minha esposa Débora pelo amor, companheirismo e motivação.

Aos meus filhos Felipe e Lucas pelo amor incondicional. A minha mãe Helena e meu irmão Paulo Cesar por todo apoio.

Agradeço a minha coorientadora Profa. Dra. Priscila Domingues de Azevedo, por todo apoio, incentivo, orientação, comprometimento e paciência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Nelson Studart, pela paciência, incentivo, orientação e principalmente pelos ensinamentos.

Ao professor e amigo Rancey Portela pela colaboração nas traduções necessárias e, aos Profs. Drs. Marcelo Zanotello e João Carlos Vieira Sampaio por todas as contribuições para melhoria deste trabalho.

Aos professores Marcel Novais, Gustavo Rojas, Paulo Camargo, Márlon Pessanha e Ducinei Garcia pela dedicação e comprometimento.

Aos meus colegas da primeira turma do MNPEF – Polo 18 UFSCar, Carina, Nivaldo, Herbert, Rodrigo, Renato, João e Bruno, pela dedicação, união e companheirismo.

Agradeço a Escola De Grau em Grau COC de São José do Rio Pardo, em especial a Diretora Pedagógica Selma Poggio Junqueira e a coordenadora Eliana Lameu pelo apoio e contribuição na execução dos trabalhos em sala de aula.

Finalmente, aos meus alunos, por me mostrarem, todos os dias, que a 25 anos eu fiz a escolha certa.

RESUMO

A aprendizagem do aluno obtida somente através da memorização das informações transmitidas pela narrativa do professor, para posterior reprodução na avaliação, mostra que a maneira clássica de ensinar, leva a uma aprendizagem mecânica e não significativa. A proposta deste trabalho é relatar o desenvolvimento e a aplicação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) proposta por Moreira, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. A mesma foi elaborada seguindo os passos da UEPS onde, num primeiro momento fez-se o levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos acerca do tema vetores através da construção de um mapa mental e, em seguida foi apresentado o conteúdo de vetores de forma mais geral, através de situações-problemas. A partir daí, cada operação com vetores foi abordada de maneira mais específica, visando à diferenciação progressiva e à reconciliação integradora. O desempenho dos alunos se deu pela participação ativa e motivação dos mesmos nas resoluções das situações-problemas, nos debates em sala, nas construções de mapas, nas simulações e na produção de vídeo, ou seja, no uso das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC). Os conceitos que foram abordados e apresentados de acordo com os passos da UEPS: grandeza escalar, grandeza vetorial, relações trigonométricas no triângulo retângulo, adição vetorial pelos métodos do polígono, do paralelogramo e das componentes, produto de escalar (número real) por um vetor, produto escalar e produto vetorial de dois vetores. A utilização dessa sequência apontou evidências da ocorrência de aprendizagem significativa por parte dos alunos e, com isso, muitas das dificuldades de compreensão dos alunos do Ensino Médio foram superadas, uma vez que agora estão familiarizados com a determinação de algumas grandezas físicas, através de operações com vetores, apresentadas na Geometria Analítica.

Palavras-chave: Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS); Operações com vetores; Simulações computacionais; Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC); Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

The student learning obtained by memorizing the information transmitted by the teacher's narrative, for further reproduction in the assessment, shows that the classic way of teaching, leads to a mechanical and not significant learning. The proposal of this study is to report the development and application of a Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU) proposed by Moreira, based on the Theory of Meaningful Learning of Ausubel. The proposal was drawn up using the PMTU steps in which, at first the survey of students' prior knowledge about the theme vectors was performed through the collective construction of a conceptual map and then the content of vectors was presented more generally through problem-situations. From that on, each vector operation was addressed more specifically, aiming the progressive differentiation and the integrative reconciliation. The students' performance was accomplished through their active participation and motivation in solving the problem-situations, in class debates, in the construction of maps, in simulations and video productions, that is with the use of The Information and Communication New Technologies of (ICNT). The concepts that were discussed and presented in accordance with the steps of PMTU: scalar greatness, vector greatness, trigonometric relationships in the triangle rectangle, vector addition by the polygon, the parallelogram and components methods, scalar product (real number) by one vector, scalar product and vector product of two vectors. The use of this sequence showed the evidence of occurrence of significant learning by the students and, therefore, many of the difficulties of high school students understanding have been overcome, since they are now familiar with the determination of some physical greatness, through operations with vectors presented in analytical geometry.
Keywords: Potentially Meaningful Teaching Units (PMTU); Vector Operations; Computer Simulations; Information and Communication New Technology (NTIC); Meaningful Learning.

Sumário

CAPÍTULO 1 - introdução ____ *1*

1.1 Motivação ____ **1**

1.2 Objetivo ____ **3**

1.3 Trabalhos Relacionados ____ **4**

CAPÍTULO 2 – VETORES ____ *7*

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DOS VETORES ____ **7**

2.1.1 O Desenvolvimento dos Números Complexos e da Análise Vetorial ____ 7

2.1.2 Os Quatérnions ____ 9

2.1.3 A Teoria de Expansão de Grassmann ____ 11

2.1.4 As Definições Axiomáticas ____ 12

2.1.5 Análise Vetorial Moderna ____ 13

2.1.6 Quatérnions X Álgebra Vetorial ____ 15

2.2 FUNÇÕES VETORIAIS ____ **16**

2.3 ALGUMAS EQUAÇÕES DA FÍSICA NA FORMA VETORIAL ____ **21**

2.2 NOÇÃO INTUITIVA PARA O ENSINO MÉDIO ____ **28**

2.3 CONCEITO GEOMÉTRICO DE VETOR ____ **29**

2.3.1 Vetores Iguais ____ 31

2.3.2 Vetor Nulo ____ 31

2.3.3 Vetores Opostos ____ 32

2.3.4 Vetor Unitário ____ 32

2.3.5 Versor ____ 32

2.3.6 Vetores Colineares ____ 33

2.3.7 Vetores Coplanares ____ 33

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES ____ **33**

2.4.1 Adição de Vetores ____ 33

2.4.2 Subtração de dois vetores ____ 37

2.4.3 Produto de um vetor por um número real ____ 38

2.4.4 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES ____ 39

2.4.4 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO ____ 41

2.4.5 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO PLANO ____ 42

2.4.5 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS ____ 44

2.4.6 DECOMPOSIÇÃO NO ESPAÇO 44
2.4.7 PRODUTOS DE VETORES 45

CAPÍTULO 3 - REFERENCIAL TEÓRICO ***51***

3.1 O cognitivismo **51**

3.2 A teoria de David Ausubel **51**

3.3 Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) **57**

CAPÍTULO 4 - O DESENVOLVIMENTO E A APLICAÇÃO DA UEPS ***60***

4.1 Estratégias Utilizadas **60**

4.1 Relato da Aplicação da UEPS **62**

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS ***71***

CONSIDERAÇÕES FINAIS ***75***

REFERÊNCIAS ***77***

APÊNDICE A: O PRODUTO EDUCACIONAL ***81***

APÊNDICE B: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS INICIAIS ***98***

APÊNDICE C: EXEMPLO DE CONFECÇÃO DE VÍDEO ***100***

APÊNDICE D: EXEMPLO DE EXERCÍCIOS DE SALA ***101***

APÊNDICE E: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS ***104***

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Linhas de Campo Elétrico Uniforme 23

Figura 2 Campo Elétrico na superfície curva 23

Figura 3 Superfície esférica contendo carga puntiforme Q 24

Figura 4 Segmento orientado AB 29

Figura 5 Segmento orientado BA, oposto de AB 29

Figura 6 Segmento orientado de comprimento 2 *u.c.* 30

Figura 7 Segmentos orientados com mesma direção em retas suportes paralelas 30

Figura 8 Segmentos orientados com mesma direção em retas suportes coincidentes 30

Figura 9 Segmentos orientados equipolentes 30

Figura 10 Conjunto de todos os segmentos orientados = vetor 31

Figura 11 Vetor unitário 32

Figura 12 Adição de vetores 34

Figura 13 Representação da propriedade comutativa na adição de vetores ... 35

Figura 14 Representação da propriedade associativa na adição de vetores ... 36

Figura 15 Representação da subtração de vetores 38

Figura 16 Representação de dois vetores com um ângulo entre eles 39

Figura 17 Representação de dois vetores com um ângulo de 180º entre eles 40

Figura 18 Representação de dois vetores com um ângulo de 0º grau entre eles 40

Figura 19 Representação de dois vetores com um ângulo de 90º entre eles .. 40

Figura 20 Representação do ângulo formado entre dois vetores 41

Figura 21 Representação de um triângulo retângulo 41

Figura 22 Representação de um par de vetores não colineares que constituem uma base no plano 42

Figura 23 Representação de uma base canônica no plano xOy 43

Figura 24 Representação de um vetor definido por dois pontos 44

Figura 25 Representação de uma base canônica no espaço 45

Figura 26 Representação da projeção de um vetor 46

Figura 27 Representação da direção de vetores no plano 48

Figura 28 Representação do sentido do produto vetorial 49

Figura 29 Representação da interpretação geométrica do módulo do produto vetorial 49

Figura 30 Uma visão esquemática do contínuo aprendizagem significativa - mecânica 54

Figura 31 Um hipotético sistema de coordenadas formado pelos eixos aprendizagem mecânica x aprendizagem significativa e aprendizagem receptiva x aprendizagem por descoberta. Fonte: MOREIRA, 2012, p. 15. 55

Figura 32 Mapa mental de um aluno 63

Figura 33 Alunos apresentando as soluções que obtiveram das situações-problemas.. 64

Figura 34 Simulação baseada na situação-problema inicial desenvolvida por um aluno 65

Figura 35 Simulação baseada na situação-problema inicial desenvolvida por um aluno 66

Figura 36 Desenvolvimento dos alunos no jogo “Corrida de Vetores” 68

Figura 37 Mapa conceitual final de um aluno 72

Figura 38 Página do simulador do PhET. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html 86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 Princípios norteadores da proposta, com base em Moreira (ibid.). .. 58

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Essa dissertação descreve o desenvolvimento e a aplicação de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para ensinar operações com grandezas físicas vetoriais a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Esta UEPS foi aplicada na Escola “De Grau em Grau COC”, situada no centro de São José do Rio Pardo - SP. Devido ao tempo de relacionamento profissional entre o professor (autor deste projeto) e a instituição, era sabido que todos os alunos tinham conhecimentos suficientes em informática, além de acesso à internet extraclasse.

A escola utiliza desde 1999 o material didático apostilado do COC, da editora Pearson. O foco da escola sempre foi uma educação de qualidade, priorizando o aprendizado do aluno e contribuindo para a formação de cidadãos conscientes e preparados para a vida. É claro que sendo uma instituição com curso pré-vestibular têm-se também como objetivo o ingresso dos alunos nas melhores universidades do país.

As salas de aula apresentam quadro branco, multimídia e internet disponibilizada a todos os alunos, facilitando assim a utilização das TIC nas próprias salas e evitando possíveis congestionamentos na sala de informática. A quase totalidade dos alunos tem *notebooks* e, a totalidade, *smartphones*. Com todos esses recursos, dentro e fora da sala de aula, o desafio dos professores, é encontrar uma estratégia para melhorar a qualidade do seu trabalho pedagógico, inovando e melhorando não só a aula como o processo de avaliação dos alunos. Os alunos vivem inseridos numa quantidade muito grande de recursos e informações que, na maior parte, desconhecidas por eles. Quando o professor consegue aproveitar todos os recursos disponíveis para tornar suas aulas mais atraentes, os próprios alunos se tornam ativos no processo de aprendizagem, corroborando assim, para uma aprendizagem significativa.

O fator isolado de maior importância na aprendizagem, segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, é aquilo que o aluno já sabe e, que serve como ancoradouro para novos conhecimentos (MOREIRA, 2009). A identificação desse conhecimento prévio não é uma atividade simples, requer tempo e estratégias por parte do professor. Um detalhe relevante para o bom desenvolvimento de uma sequência didática é o número de alunos na sala de aula que, na opinião do autor deste trabalho, deve ser entre vinte e vinte e cinco, uma vez que, a participação ativa dos mesmos é indispensável para avaliação do processo. Salas numerosas dificultam a dinâmica da aprendizagem, e isso, não contribui para evidências de uma aprendizagem significativa.

Ao se tratar de temas que necessitem de uma operacionalização matemática mais elaborada, é necessário buscar recursos e ferramentas para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico e próximo do cotidiano do aluno.

A relação entre as Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC)[1] e a Educação foram muito discutidas por Martins, Garcia e Brito (2011). É notório que a quantidade de trabalhos relacionados às NTIC nos periódicos *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *Ciência & Educação*, *Investigações em Ensino de Ciências*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* e *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, entre os anos de 2000 e 2010, é muito grande. Isso mostra a relevância das teorias de aprendizagens como referenciais teóricos para o uso de softwares voltados ao Ensino de Física.

Segundo Tavares (2008), a simulação computacional possibilita o entendimento de sistemas complexos para estudantes de diversas idades e níveis de aprendizagem, pois o mesmo soluciona os sistemas matemáticos iniciais, permitindo ao estudante aprofundar-se no momento adequado, ou seja, o aluno estabelece o seu próprio ritmo de aprendizagem.

Alguns autores, Barneto e Martín (2006), afirmam que a aprendizagem será mais efetiva quando há a interferência do professor simultaneamente ao processamento das informações pelos objetos educacionais.

Assim, Souza e colaboradores (2012) propõem que a utilização de modelos computacionais seja feita a partir de ferramentas que utilizem as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) concomitantemente com a mediação do professor.

[1] O termo NTIC é mais utilizado quando se refere a Web 2.0 ou a serviços tecnológicos relacionados ao uso da Internet, em oposição a outras tecnologias, como a televisão ou o CD e DVD por exemplo.

Para os *nativos digitais*[2], a utilização de simuladores, animações, vídeos, enfim objetos educacionais digitais (OED), facilita o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, o torna protagonista de sua aprendizagem.

Segundo De Jong, Linn e Zacharia (2013), quanto maior a necessidade de abstração por parte dos alunos, mais relevantes e eficientes se tornam as ferramentas virtuais.

Como as TIC estão cada vez mais próximas do cotidiano dos alunos é necessário que estes signos e instrumentos sejam inseridos nas escolas, de maneira a tornar o ensino de Física mais atraente e relevante.

Todos os relatos anteriores justificam a criação e desenvolvimento de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) que, baseada na Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, contribua para uma aprendizagem significativa acerca do tema vetor.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática, por meio de uma Unidade de Ensino de Potencialmente Significativa-UEPS, proposta por Marco Antônio Moreira, baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel, para ensinar operações com vetores, comumente trabalhadas na Geometria Analítica.

A UEPS é o objeto educacional e sua melhoria se faz necessária conforme a realidade dos professores, dos alunos e das instituições de ensino. A UEPS não deve ser engessada, mas seus passos devem ser obedecidos para que se tenha êxito no final do processo, ou seja, que a aprendizagem significativa seja alcançada.

O uso das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação é de alta relevância, uma vez que faz parte da realidade de muitos alunos e o tema a ser ensinado trata de operacionalização matemática de operações entre vetores.

[2] Marc Prensky nomeou como *nativos digitais* aqueles que cresceram inseridos numa cultura com acesso às tecnologias digitais, enquanto aqueles de gerações anteriores que, embora não tenham crescido nesta cultura, tiveram que interagir com estas tecnologias em algum momento, são nomeados *imigrantes digitais* (STUDART, 2015).

Para se chegar a aprendizagem significativa, novos significados devem ser incorporados, interativamente, aos já existentes e, então, reorganizados na estrutura cognitiva do aprendiz.

O uso de mapas conceituais enfatiza os conceitos e as relações entre eles, obedecendo a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, conceitos que serão tratados no capítulo 3 (p. 51). Segundo Moreira (2012), os mapas conceituais podem ser usados como recurso didático de avaliação, assim como, um instrumento de metacognição, isto é, aprender a aprender.

O processo de aprendizagem não necessita de sofrimento intelectual, mas sim do seu exercício.

1.3 Trabalhos Relacionados

O ensino de operações com vetores é um conteúdo abordado na disciplina de Geometria Analítica que, no Ensino Superior, faz parte da grade curricular das Faculdades de Engenharias. Já no Ensino Médio, nos livros didáticos e nos materiais apostilados, na disciplina de Física, a abordagem é mais teórica, ou seja, o foco é maior na relação com o cotidiano. Alguns autores como Karam (2007) constatam as interrelações dessas duas áreas e a forma desconectada com que elas são tratadas na escola:

> Estudos históricos e epistemológicos evidenciam as inter-relações entre a Matemática e a Física desde a mais remota essência do conhecimento científico, porém, dentro do contexto escolar, essas duas disciplinas têm sido tratadas de forma independente e isso tem contribuído para um distanciamento do interesse dos estudantes pelas áreas exatas (KARAM, 2007, p.1).

Para Moreira (1983), quando se pergunta ao aluno de qualquer grau de escolaridade se ele gosta de Física, a resposta parece ser sempre negativa. Conforme destaca Santos (2011), nem sempre o professor percebe, de fato, onde estão as dificuldades dos seus alunos na realização da atividade de conversão relacionada ao problema de congruência semântica, ou seja, converter da linguagem natural para a algébrica, simbólica ou gráfica. Destaca ainda, que essa falta de percepção é devida ao mal preparo dos professores.

Uma pesquisa realizada na Universidade Estadual do Pará, de autoria de Patrício e Almeida (2011), constata que a dificuldade mais significativa dos alunos quanto ao estudo dos vetores, está no registro figural, corroborando com o trabalho desenvolvido por Santos (2011), entretanto, o autor deste trabalho acredita que a maior dificuldade esteja na álgebra.

O conceito de vetor é amplamente trabalhado na Física e para Chagas (2014) deveria, também, ser abordado na Matemática do Ensino Médio. No seu trabalho, o autor supracitado, destaca algumas conclusões da análise feita do livro “Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio”, lançado em 2001 pela Sociedade Brasileira de Matemática e editado pelo Professor Elon Lages Lima. Na análise de um dos livros, é feito o comentário:

> [...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática. (LIMA, 2001, p. 130)

Analisando outro livro, consta a observação:

> Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, [...], é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física. (LIMA, 2001, p. 62)

No estudo da Álgebra Linear do Ensino Médio (Matrizes, Determinantes e Sistema Lineares), não são explorados todos os aspectos da disciplina, pois, segundo Chagas (2014), sem o conceito de vetores, o aspecto geométrico é desprezado.

Um recurso tecnológico para ensinar vetor que faz com que o aluno possa interagir com maior rapidez e precisão, estimulando-o a formular suas próprias conjecturas, é o uso de *mathlets*[3] que Marinho e colaboradores (2010) apresentaram no X Encontro Nacional de Educação Matemática. Segundo os autores do trabalho, os alunos são capazes de verificar se são válidas ou não as suas formulações.

---

[3] Mathlets: Applets Java para o Ensino de Matemática. Para saber mais acesse: http://docplayer.com.br/2204500-Mathlets-applets-java-para-o-ensino-de-matematica.html

Conforme alguns mencionados, muitos são os trabalhos acerca do tema vetor, mas com o foco voltado para o ensino de Matemática. Vale ressaltar mais um trabalho sobre vetores, mas agora com o foco em uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para tópicos de Mecânica Vetorial. No referido trabalho, Ribeiro (2014) destaca a importância dos passos de uma UEPS para o melhor desempenho na aprendizagem de mecânica vetorial, apesar que o trabalho do autor é também de um Mestrado Profissional em Matemática.

É notória a preocupação tanto da Física como da Matemática em melhorar a aprendizagem dos alunos de Ensino Médio, no que diz respeito ao conteúdo vetores. Para tal, o planejamento quanto à metodologia e recursos a serem utilizados, devem estar em foco. Algumas sequências didáticas, amparadas em teorias de aprendizagem, permitem a flexibilidade de acordo com a realidade da instituição de ensino, do professor e dos alunos.

A sequência didática proposta por Moreira (2011), amparada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, é uma estratégia de ensino relativamente nova. Muñoz (2013) propõe três UEPS para ensinar função quadrática, onde ele destaca a motivação dos alunos e do professor.

Pradella (2014), relata a aplicação da UEPS no ensino de conceitos de Termodinâmica, destacando também a motivação dos alunos e maior clareza na captação de novos conhecimentos.

O desenvolvimento de UEPS em outras áreas da Física é apresentado por Moreira (2011b) no anexo de seu trabalho onde, Tópicos de Mecânica Quântica, Física de Partículas, Imunologia Básica e Equilíbrio Químico são os temas abordados.

CAPÍTULO 2 – VETORES

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DOS VETORES

2.1.1 O Desenvolvimento dos Números Complexos e da Análise Vetorial

Inicialmente é necessário destacar que até o final do século XIX não existia um conjunto de regras que se pudesse chamar de álgebra linear. Nos séculos XVII e XVIII os matemáticos intuíam uma ligação da álgebra com a geometria e que os números complexos poderiam ser considerados como uma entidade matemática legítima.

Os estudos realizados na mecânica, hidrodinâmica, óptica teórica e na teoria eletromagnética no século XIX, contribuíram para o desenvolvimento de métodos de análise de novas entidades que atualmente chamamos “vetores”, bem como, para o conceito de campo.

Como a geometria vetorial é um método eficiente e as ideias vetoriais são representadas geometricamente, a relação entre a geometria e a teoria do espaço vetorial, para a maioria das pessoas, parecia óbvia (DORIER,1995, p. 233).

Segundo Crowe (1967) os conceitos fundamentais da álgebra linear, que são a soma e a subtração de vetores, já eram sugeridos na antiga Grécia, mas é possível que as primeiras concepções de vetores estejam relacionadas a operação da adição pelo método do paralelogramo e, possivelmente, apresentadas em um trabalho de Aristóteles (384-322 A.C.).

A análise vetorial surgiu após o ano de 1831, mas três desenvolvimentos anteriores merecem atenção. Estes três desenvolvimentos são (1) a descoberta e representação geométrica de números complexos, (2) pesquisa de Leibniz para uma geometria de posição, e (3) a ideia de um paralelogramo de forças e velocidades.

No ano de 1545 Girolamo Cardano publicou seu "*Ars Magna"*, contendo o que é geralmente considerado como sendo a primeira publicação da ideia de um número complexo, onde levou mais de dois séculos para que os mesmos fossem aceitos como legítimas entidades matemáticas. Durante esses dois séculos, muitos autores protestaram contra o uso dessas criações estranhas.

Em 1679 numa carta a Christian Huygens (1629-1695), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) critica o método analítico e, tenta sem sucesso, criar uma análise geométrica intrínseca, a qual ele chamou de "geometria da posição". Nesse mesmo ano, Leibniz conseguiu realizar os primeiros avanços na criação de um sistema que servisse como método direto para análise espacial. A principal característica desse sistema era a possibilidade de representar as entidades geométricas simbolicamente, além da possibilidade de operá-las diretamente com símbolos. Contudo, as quatro operações (adição, subtração, divisão e multiplicação) não se aplicavam a estas entidades, ou seja, ele não conseguiu desenvolver um sistema para isso, impossibilitando-o de perceber que, por exemplo, a grandeza AB poderiam ser diferente da grandeza BA.

Isaac Newton, em 1687, publicou seu "*Principia Mathematica"*, no qual ele expõe sua versão da ideia de um paralelogramo de forças, ou seja lidou com o que agora são considerados entidades vetoriais, sem ter a ideia de um vetor. Ele foi, no entanto, deduzindo que as forças que têm definidas a magnitude e direção, podem ser combinadas ou adicionados, de modo a produzir uma nova força.

Caspar Wessel (1745-1818), foi um matemático dinamarquês-norueguês que em 1799 publicou um ensaio a respeito da representação da direção, analiticamente.

Jean Robert Argand (1768-1822), foi um matemático francês que publicou, em 1806, uma interpretação geométrica dos números complexos, o Diagrama de Argand. Sua descrição foi totalmente associada ao nome de Gauss.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi matemático, astrônomo e físico alemão que em 1799 provou o Teorema Fundamental da Álgebra[4]. Sua

---

[4] Segundo o Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (DM-UFSCar), o teorema afirma que: "Todo polinômio p (z), de coeficientes complexos, de grau $n \geq 1$, possui uma raiz complexa z_0, isto é, existe $z_0 \in C$ tal que $p(z_0) = 0$"

publicação ocorreu apenas em 1831. Enquanto os outros autores não atraíram quase nenhuma atenção sobre o assunto, o seu prestígio garantiu a ampla aceitação dessa representação. Ironicamente, o próprio Gauss não aceitou plenamente a justificativa geométrica.

É também interessante destacar que Felix Klein (1849-1925), um matemático alemão que trabalhou na geometria não-euclidiana, argumentou em 1898 que Gauss tinha antecipado Hamilton na descoberta de quatérnions.

2.1.2 Os Quatérnions

Os quatérnions são números algébricos que permitem uma representação geométrica no espaço (DORIER, 1995, p. 237).

Em 1835, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) se tornou cavaleiro, devido à execução de um trabalho fundamental em óptica e na física teórica e, em 1843, mostrou a relação entre os números complexos e os pares de números reais, através da correspondência entre números complexos ($x + yj$ com x, y reais) e vetores planos. Para que um número complexo pudesse representar algo no espaço tridimensional, teria que existir uma correspondência entre os elementos do campo de tríades reais do tipo $a + bi + cj$ e os vetores no espaço, mas essa analogia não teve sucesso.

Devido a muitas frustrações, ele mudou seu ponto de vista, passou a focar na natureza geométrica da multiplicação em duas dimensões, indicando que a mesma é baseada nos comprimentos dos vetores, bem como no ângulo formado entre eles, ou seja, a rotação entre suas direções. O primeiro é um valor unidimensional (comprimento), o segundo depende da direção do eixo de rotação (um valor bidimensional) e o terceiro é o ângulo (um valor unidimensional). Sendo assim, a multiplicação representa os produtos escalar e vetorial.

Assim, com a mudança no sentido do significado geométrico da multiplicação, ficou evidente que os quatérnions foram mais adequados que os tripletos no problema de álgebra geométrica tridimensional. Foram escritos por $q = w + \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$, onde w, x, y e z eram números reais. Hamilton dividiu os quatérnions em duas partes distintas, uma que chamou de escalar (w) e a outra de vetor ($\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$), onde $\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = -ijk = -1}$, ou seja, o produto não era comutativo ($q_1q_2 = -q_2q_1$).

O desenvolvimento da análise vetorial, iniciado pelos quatérnions, teve uma forte influência na emergência da álgebra linear. A prova das relações entre a geometria e a álgebra linear está na utilização de termos geométricos na análise vetorial.

Com relação aos quatérnions, Hamilton escreveu dois livros, *Lectures on Quaternions* (1853) e *Elements of Quaternions* (1866), mostrando como poderiam ser usados em geometria, bem como, os detalhes de suas álgebras.

Hamilton não estava sozinho na criação de um sistema vetorial nesse mesmo período outros autores de quatro países desenvolveram outros sistemas de caráter vetorial, foram eles: Möbius, Bellavitis e Grassmann.

Em 1827 August Ferdinand Möbius (1790-1868), da Universidade de Leipzig publica "*Der Barycentrische Calcul*" uma nova ferramenta para o tratamento analítico de geometria. Foi um dos primeiros matemáticos a dar a noção de segmento de linha dirigida, ou seja, um segmento de linha que, partindo de um ponto A até um ponto B era dado pela notação AB e, afirmou que AB = -BA. Surpreendentemente, nessa obra supracitada, não conseguiu definir a adição de segmentos colineares.

Em 1835 Giusto Bellavitis (1803-1880) publicou a primeira composição do seu sistema de equipolência, que tem algumas características em comum com a análise vetorial já tradicional, como a aplicação geométrica. Além disso, formulou regras para a adição e a subtração de vetores. Ele dedicou um longo período de uma tentativa frustrada de estender seu sistema para três dimensões.

Entre 1865 e 1901, um discípulo de Hamilton, Peter Guthrie Tait (1831-1901) escreveu oito livros sobre quatérnions, desenvolvendo novos teoremas e aplicações físicas da teoria, como no estudo dos efeitos de correntes elétricas sobre magneto, da rotação de corpos, tensões homogêneas, entre outros.

Ao contrário de Hamilton, Tait utilizou os quatérnions separando as partes escalar e vetorial, alterando assim o significado original dos quatérnions (TAIT, 1873, pp.260-88). Sua maior contribuição foi explorar a utilidade dos quatérnions como ferramenta para a física, além do desenvolvimento no método.

Os quatérnions são usados, tanto na matemática teórica como na aplicada, em especial para os cálculos que envolvem rotações tridimensionais, como em computação gráfica tridimensional, visão computacional e análise de textura cristalográfica. Segundo Jambersi (2016), eles podem ser usados em conjunto com outros métodos, tais como ângulos de Euler e matrizes de rotação, ou como uma alternativa a elas, dependendo da aplicação. Foi a consequência dos estudos das operações aplicadas aos vetores que determinou as regras que formaram as bases da Álgebra Linear.

2.1.3 A Teoria de Expansão de Grassmann

Em 1840, Hermann Günther Grassmann (1809-1877) conclui o escrito de sua "*Theorie der Ebbe und Flut*". Este trabalho sobre a teoria das marés contém o primeiro sistema de análise espacial baseado em vetores e é razoavelmente perto do sistema moderno. Ele traçou sua ideia de um produto geométrico depois de analisar os livros escritos por seu pai e intitulados "*Teoria Space*" e "*Trigonometrie*", o primeiro tendo sido publicado em 1824 e o último em 1835.

Ao redor da mesma época que Hamilton descobriu os quatérnions, Grassmann publica sua obra-prima "*Die Lineale Ausdehnungslehre*" mais conhecido como *"Teoria Linear de Extensão"*, onde primeiramente ele expandiu o conceito de vetores a partir da segunda ou terceira dimensões para um número arbitrário, n, de dimensões; isto estendeu grandemente as ideias de espaço.

Infelizmente, o "*Ausdehnungslehre*" tinha dois pontos contra si. Primeiro, era muito abstrato, faltando exemplos explicativos e foi escrito em um estilo obscuro com uma notação extremamente complicada. Embora seu trabalho tenha sido amplamente ignorado, Grassmann promoveu sua mensagem nas décadas de 1840 e 1850 com aplicações em eletrodinâmica e geometria de curvas e superfícies, mas sem muito sucesso geral.

Em 1862, publicou uma segunda edição revisada do seu "*Ausdehnungslehre*", que antecipava grande parte da álgebra matricial e linear moderna, além da análise vetorial e tensorial, mas também era escrito de maneira obscura e era muito abstrato para os matemáticos de sua época e praticamente teve a mesma sina da primeira edição. No final de sua vida, Grassmann distanciou-se da matemática e iniciou uma segunda carreira de pesquisa muito bem sucedida, em fonética e linguística comparada. Por fim, nas décadas de 1860 e 1870, o *Ausdehnungslehre* começou vagarosamente a ser compreendido e admirado, e assim, Grassmann passou a ser reconhecido por sua matemática visionária.

2.1.4 As Definições Axiomáticas

Em 1888, Giuseppe Peano (1858-1932) publicou "*Calcolo Geométrico"* que foi considerado a primeira definição axiomática de um espaço vetorial, melhorando assim, a formulação das propriedades dos espaços vetoriais. Conseguiu também, melhorar as definições do elemento oposto e dos conceitos do zero, mas essas melhorias não foram aceitas imediatamente por seus contemporâneos.

Em parceria com Cesare Burali-Forti (1861-1931), Roberto Marcolongo (1862-1943) publicou um trabalho intitulado por *"OmografieVettorialli com Applicazioni Alle Derivate Respetto ad um Punto et Alla Física-Matemática*" que, era o primeiro a apresentar a definição axiomática na introdução. E, apesar de não ter sido relevante aos matemáticos da época, foi importante na difusão dessa definição na Itália e na França. As obras de Peano, Burali-Forti e Marcolongo não foram tão precisas nos conceitos de dimensão e base como a de Grassmann.

Hermann Weyl (1885- 1955) também usou uma definição axiomática para definir o que ele chamou de "*linear vector-manifolds"* na primeira edição de seu livro intitulado "*Raum-ZeitMaterie*", em 1918. Ele definiu seu livro como *"um trabalho que marcou época"*, onde não mencionou os trabalhos de seus antecessores italianos, mas referenciou Grassmann, pela proximidade nas definições.

A questão da dimensão foi melhor discutida na teoria dos corpos, até porque sabe-se que, a extensão de um corpo é um espaço vetorial sobre o corpo original e a ordem da extensão é a dimensão deste espaço. Alguns matemáticos como Richard Dedekind (1831-1916), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), Ernt Steinitz (1871-1928), Bartel Leendert van der Waerden (1903-

1996), Otto Schreier (1901-1929) entre outros, continuaram a contribuir com o avanço da álgebra e direcionando seus trabalhos à análise funcional, equações diferenciais, ou seja, tópicos que vão se afastando do foco deste trabalho.

2.1.5 Análise Vetorial Moderna

Segundo Silva (2002), é útil analisar o desenvolvimento da análise vetorial moderna em termos de três períodos, o primeiro que se estende até 1865, altura em que as duas tradições principais, o Hamiltoniano quatérnions e da tradição Grassmanniano tinham surgidos.

O segundo ou meio período vai de cerca de 1865 a cerca de 1880. Até o início deste período, Hamilton (por causa de sua morte) e Grassmann (que se concentrou em outras áreas) haviam deixado de ser os principais contribuintes. Outros matemáticos gradualmente assumiu posições de liderança.

No terceiro período, que começou por volta de 1880, o moderno sistema de análise vetorial veio à existência através do trabalho de Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside que, em 1910, tinha-se estabelecido como o dominante sistema, embora não sem uma luta contra o sistema hamiltoniano e os sistemas grassmannianos. As figuras relevantes neste período médio foram Peter Guthrie Tait, Benjamin Peirce, James Clerk Maxwell, e William Kingdon Clifford.

O mais proeminente matemático nos Estados Unidos, Benjamin Peirce (1809-1880) escreveu em 1855 o livro *"System of Analytical Mechanics"*, no qual não incluiu os quatérnions, apesar de se referir a Hamilton como "o monumental autor dos quatérnions". Em 1870, escreveu o livro *Linear Associative Algebra*, totalmente de álgebra abstrata.

Um escocês perspicaz e crítico foi James Clerk Maxwell (1831-1879), que começou a aprender sobre quatérnions devido a apreciação da obra "*Elementary treatise on quatérnions"* de Tait. Em 1870 publicou o "*Manuscrito sobre as aplicações dos quatérnions no eletromagnetismo".* O seu trabalho mais importante é o livro "*Treatise on Electricity and Magnetism"* (1873), pois retrata a sua visão completa sobre os quatérnions. Essencialmente, sugeriu uma análise puramente vetorial, aconselhando os cientistas a não usarem "os métodos de quatérnions".

A decomposição do produto de dois quatérnions em dois produtos vetoriais diferentes (produto escalar e produto vetorial), foi apresentada por foi Willian Kingdon Clifford (1845-1879) em 1878 na sua obra *Elements of Dynamic*. Ele era admirador da obra "*Ausdehnungslehre"* de Grassmann e a favor de vetores.

Se alguém perguntar, entre os sistemas hamiltonianos ou grassmannianos, qual foi o mais vigoroso, no período compreendido entre o início de 1840 até 1900? A resposta, certamente, é o hamiltoniano.

A álgebra vetorial que conhecemos hoje foi desenvolvida por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) num conjunto de notas de aulas feito para seus alunos da Universidade de Yale. Na mecânica estatística lançou as bases para o desenvolvimento da físico-química como uma ciência, mas as suas principais conquistas foram na termodinâmica, inclusive com o apoio de Maxwell, nas suas apresentações geométricas. Gibbs conheceu os quatérnions quando leu *Treatise on Electricity and Magnetism* de Maxwell e, também estudou o *Ausdehnungslehre* de Grassmann, concluindo que os vetores forneciam uma ferramenta mais eficiente.

Entre 1881 e 1884, Gibbs publicou o livro "*Elements of vector analysis",* que assim como Hamilton e Tait, utilizou letras gregas minúsculas para designar vetores, *i, j, k* para versores paralelos aos eixos X, Y, Z e letras romanas minúsculas para escalares (GIBBS, 1961, p. 20). Nessa obra, ele define as operações de adição, subtração e multiplicação entre vetores [produto direto $\alpha.\beta = xx' + yy' + zz'$ e produto torcido $\alpha x\beta = (yz' - zy')\, i + (zx' - xz')\, j + (xy' - yx')\, k$], o que difere do cálculo dos quatérnions que possui um único tipo de produto. O produto escalar obedece a propriedade comutativa enquanto o produto vetorial não. O sinal positivo do produto escalar e a existência de dois produtos separados eram o foco da crítica dos defensores dos quatérnions.

A Sociedade Real Britânica, em 1901, condecorou Gibbs com a Medalha Copley, na época, o prêmio internacional de ciências mais prestigiado. Sua última contribuição, foi publicada em 1902, intitulada "*Princípios Elementares em Mecânica Estatística"*. Essa obra contribuiu para o avanço da mecânica estatística e, posteriormente, ao desenvolvimento da mecânica quântica.

Uma outra relevante contribuição para o moderno entendimento e uso de vetores foi feita por Jean Frenet (1816-1990) na sua tese de doutorado, onde tratava a teoria de curvas espaciais e as fórmulas conhecidas como "*o triedro de Frenet ou fórmulas de Frenet-Serret"*, publicada no Journal de mathematique pures et apliques em 1852.

Segundo Silva (2002), em 1882, um físico autodidata, Oliver Heaviside (1850-1925), influenciado por Maxwell, elogia os quatérnions, afirmando que o formalismo das componentes eram muito mais complicados. A partir daí, publicou artigos sobre eletromagnetismo em dois volumes, os "*Eletrical Papers"*. No prefácio da publicação de 1891, fica evidente a mudança de opinião de Heaviside a respeito dos quatérnions, vai deixando de ser de admiração e passando a ser de repugnação. O livro *"Electromagnetic Theory"*, publicado em três volumes (1893, 1899, 1912), foi a sua obra mais importante, no qual contém seu extenso tratamento da análise vetorial, com exemplos de aplicação na teoria eletromagnética.

Apesar da antipatia pelos quatérnions, Heaviside em 1912, deixa claro a sua utilização conforme explicitou:

> *"Então joguei fora o quatérnion completo e mantive os escalares puros e vetores, usando uma álgebra vetorial muito simples em meus artigos de 1883 em diante" (HEAVISIDE, 1971, p. 136)*

Os vetores são a linguagem moderna de grande parte da física e da matemática aplicada, tendo seu próprio interesse matemático intrínseco.

2.1.6 Quatérnions X Álgebra Vetorial

Os relatos históricos deixam evidente que Maxwell, Gibbs e Heaviside queriam simplificar o sistema de Hamilton e não criar um novo, ou seja, a transformação do sistema de quatérnions para o vetorial, não foi proposital.

O sistema de Gibbs-Heaviside apresenta uma simplicidade maior que o de Hamilton na notação, por ser mais clara e menos geral. Porém, matematicamente, é questionável quando se compara o produto e a divisão vetorial, no sistema de quatérnions são únicas, enquanto no sistema vetorial, não.

No final do século XIX ocorreu um emocionante disputa sobre qual o sistema matemático era mais apropriado para tratar as grandezas vetoriais. De um lado Tait e outros, e do outro Gibbs e Heaviside, com Maxwell no meio deles. Esse debate se deu na revista *Nature*, uma das mais antigas revista científica do mundo.

Finalmente, comparando as notações simbólicas e as expressões matemáticas utilizadas por Gibbs (*Elements of vector analysis*), Heaviside (*Eletromagnetic theory*), Maxwell (*Treatise on Electricity and Magnetism*) e Tait (*Treatise on quatérnions*), nota-se uma semelhança incontestável.

2.2 FUNÇÕES VETORIAIS

As funções vetoriais servem como base para a utilização do cálculo vetorial. Segundo Stewart (2006), uma função é uma regra que associa cada elemento do seu domínio a um elemento de sua imagem.

A função vetorial apresenta um conjunto de números reais como seu domínio e, um conjunto de vetores como sua imagem. O limite de uma função vetorial é definido por:

Se $r(t) = [f(t), g(t), h(t)]$, então:

$\lim_{t\to a} r(t) = [\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)]$ desde que os limites das funções componentes existam.

Assim, segundo Leithold (1994), se uma função vetorial *r* é contínua em *a*, $\lim_{t\to a} r(t) = r(a)$. Toda função vetorial *r* define uma curva espacial traçada pela ponta do vetor em movimento.

Para Silva (2002), Hamilton definiu em 1847 um operador que, atualmente, chamamos de nabla e simbolizamos por ∇. A continuação do estudo deste operador se deu por Peter Tait (1831-1901).

O vetor mais simples, segundo Butkov (1988), é o vetor posição que depende do tempo e, num sistema de coordenadas fixas, suas componentes são funções do tempo: $u = u(t) = u_x(t)i + u_y(t)j + u_z(t)k$.

Assim, a operação de diferenciação de um vetor se reduz à diferenciação de suas componentes: $\frac{d}{dt}u(t)=\frac{du_x}{dt}i+\frac{du_y}{dt}j+\frac{du_z}{dt}k$.

Os vetores que dependem do tempo são muito usados na mecânica de partículas e, aqueles que dependem de coordenadas espaciais, formam campos vetoriais representados por: $u=u(x,y,z)=u_x(x,y,z)i+u_y(x,y,z)j+u_z(x,y,z)k$.

Os campos vetoriais mais comuns são os elétricos e magnéticos no espaço, os de velocidade de um fluido em movimento, entre outros. Os mais simples é o campo conservativo, também chamado de campo gradiente, que são obtidos a partir de uma única função escalar $\varphi(x,y,z)$. Como exemplo, podemos citar a distribuição de temperaturas num corpo sólido, o potencial eletrostático, entre outros.

Por intermédio das diferentes derivadas parciais, um campo escalar dá origem à várias quantidades:

- Diferencial total

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

- Derivada direcional

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Nas duas expressões, o lado direito possui aparência de produto escalar. O gradiente de um campo escalar $\varphi(x,y,z)$é definido pelo vetor: $grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j+\frac{\partial\varphi}{\partial z}k$ e $d\varphi=(grad\,\varphi.ds)$, assim como: $\frac{\partial\varphi}{\partial s}=grad\varphi\cdot s_0$, onde $ds=dxi+dyj+dzk$representa um deslocamento infinitesimal em uma certa direção e $s_0=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j+\frac{dz}{ds}k$ é o vetor unitário.

Segundo Silva (2002), Tait aplica o operador nabla a funções escalares e vetoriais. Em uma função vetorial ele interpreta a parte vetorial separada da parte escalar.

Para melhor compreensão do operador ∇, utiliza-se as derivadas direcionais juntamente com o vetor gradiente.

Conforme lembrado por Stewart (2006), se $z = f(x,y)$, as derivadas parciais f_x e f_y se definem por:

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$ e representam as taxas de variação de *z* nas direções dos versores *i* e *j.* A derivada direcional de *f* em (x_0,y_0) na direção do vetor unitário *u* é:

$$D_u f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hu_x, y_0+hu_y) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0+tu) - f(P_0)}{t}.$$

Isso mostra que as derivadas parciais de *f* com relação a *x* e *y*, são casos particulares da derivada direcional.

O vetor gradiente, que é uma função vetorial, é melhor compreendido com as definições e teoremas da derivada direcional.

Segundo Stewart (2006), a derivada direcional pode ser escrita como produto escalar de dois vetores:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \langle a,b\rangle = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot u$$

Ainda segundo o autor supracitado, se *f* é uma função de duas variáveis *x* e *y*, o gradiente de *f* é a função: $\nabla f(x,y) = [f_x(x,y) + f_y(x,y)] = \dfrac{\partial f}{\partial x} i + \dfrac{\partial f}{\partial y} j$ e assim, para a derivada direcional na direção de *u*, temos a projeção escalar do vetor gradiente sobre *u*. $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).u$. Para uma função de três variáveis, temos: $\nabla f(x,y,z) = [f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c]$ ou

$$\nabla f = [f_x, f_y, f_z] = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \quad \text{e} \quad D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).u.$$

De acordo com Leithold (1994), rotacional e divergente são duas operações essenciais nas aplicações de cálculo vetorial nas áreas da mecânica dos fluidos, na eletricidade, no magnetismo e outras.

O rotacional e o divergente lembram a derivada, porém produzem um campo vetorial e um campo escalar, respectivamente. As duas são descritas em termos do operador diferencial ∇.

O operador diferencial é definido como: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$. O vetor gradiente se obtém aplicando o operador diferencial ∇, num campo escalar f : $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$.

Se $F = Pi + Qj + Rk$ é um campo vetorial em R^3, o rotacional de *F* é o campo vetorial obtido pelo produto do operador diferencial com *F*. $rotF = \nabla x F$ ou seja,

$$rotF = \nabla x F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) x (P,Q,R) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

Para o mesmo campo vetorial *F*, o divergente dele, é o campo escalar obtido pelo produto escalar do operador diferencial com *F*.

$divF = \nabla . F$ ou seja, $divF = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Quando uma função de três variáveis apresenta derivadas parciais de segunda ordem contínuas, o rotacional do gradiente da função é o vetor nulo. $rot(\nabla f) = 0$ ou seja,

$$rot(\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) k = 0i + 0j + 0k.$$

Segundo Leithold (1994), se $F = Pi + Qj + Rk$ for um campo vetorial definido sobre todo R^3 cujas funções componentes *P, Q* e *R* tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $rotF = 0$, então *F* será um campo vetorial conservativo que, segundo Stewart (2006) é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do R^2 ou R^3 e cuja imagem é um conjunto de vetores em V^2 ou V^3.

O divergente do rotacional do campo vetorial *F* é nulo, como demonstrado: $div(rotF) = 0$.

$$div(rotF) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

O operador Laplaciano, que nada mais é que um operador diferencial de segunda ordem, para funções de três variáveis é dado por:

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ e a equação de Laplace é: $\nabla^2 \cdot f = 0$, ou seja, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

Os quatérnions de Hamilton foram a base para novas formulações de fenômenos físicos e para a noção de espaço, principalmente pela utilização do operador nabla.

Segundo Sanchez (2007), um ponto no espaço euclidiano de três dimensões, fica definido por três coordenadas que podem ser cartesianas, cilíndricas, esféricas, entre outras. A escolha do sistema de referências se dá conforme a necessidade, por exemplo, o deslocamento de um ponto sobre a esfera fica melhor determinado por coordenadas esféricas.

O fundamento da Teoria da Relatividade define o conceito de espaço-tempo e, para isso, há a necessidade de quatro dimensões, sendo três coordenadas do espaço euclidiano, mais a quarta que é a variável tempo. Isso mostra que existe a necessidade de um número maior que três dimensões e, portanto, não se trata de uma abstração matemática.

Algumas quantidades usuais, associadas a vetores podem ser definidas através de coordenadas cartesianas ortogonais, como:

1. O comprimento de um vetor: $|u| = u = \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)^{1/2}$
2. Projeção sobre eixos coordenados: $u_x = u\cos(u,i)$; $u_y = u\cos(u,j)$ e $u_z = u\cos(u,k)$
3. Projeção em uma direção arbitrária: $OP = u_s = u_x = u\cos\psi = u_x = u\cos(s,i); u_y = u\cos(s,j); u_z = u\cos(s,k)$

4. Produto escalar de dois vetores: $u \cdot v = uv\cos(u,v) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$
5. Produto vetorial: $u \times v = (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)i + (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z)j + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)k$

2.3 ALGUMAS EQUAÇÕES DA FÍSICA NA FORMA VETORIAL

São várias as equações da Física que necessitam do tratamento vetorial, mas como o foco deste trabalho é a construção e aplicação de uma UEPS no Ensino Médio, somente alguns exemplos serão citados abaixo.

A mecânica vetorial, segundo Halliday (2002), se baseia na Teoria de Newton apresentada pela primeira vez em 1687. A Primeira Lei diz que *uma partícula se move em linha reta com velocidade constante quando não há forças atuando sobre ela.* $F_R = 0 \Rightarrow \frac{d\nu}{dt} = 0$ ou $\nu = constante$. A Segunda Lei diz que *uma partícula se move de maneira tal que a força resultante a ela aplicada é igual à derivada em relação ao tempo da quantidade de movimento linear.* $F_R = \frac{d(m\nu)}{dt}$ e, se a massa é constante, $F_R = \frac{d(m\nu)}{dt} = ma$. A Terceira Lei diz que *quando duas partículas atuam uma sobre a outra, as forças de interação correspondentes situam-se sobre a linha que une estas partículas; são iguais em módulo e de sentidos contrários.* $F_{AB} = -F_{BA}$.

Segundo Leithold (1994), Newton propôs a *Lei da Atração Gravitacional*, que estabelece que o módulo da força gravitacional entre dois corpos de massas *M* e *m* unidades, é definida por: $F = \frac{GMm}{d^2}$, onde *G* é uma constante de gravitação e *d* unidades é a distância entre os corpos. Com isso, para um corpo de massa *M* unidades na origem, e o outro corpo com unidade de massa (*m*=1) num ponto *P (x, y, z)*, a força gravitacional F *(x, y, z)* no corpo em *P* é dada por: $\|F(x,y,z)\| = \frac{GM(1)}{\|R(x,y,z)\|^2}$ onde, $R(x,y,z) = xi + yj + zk$. O vetor F*(x,y,z)* deve ser definido também em direção e sentido.

A direção é radial e o sentido aponta para a origem, assim se caracteriza pelo vetor unitário $-\frac{1}{|R|}R$, e tem-se: $F(x,y,z)=\frac{GM}{\|R(x,y,z)\|^2}\left(-\frac{R(x,y,z)}{\|R(x,y,z)\|}\right)$ e, como $\|R(x,y,z)\|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ obtêm-se: $F(x,y,z)=\frac{-GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xi+yj+zk)$, que é o campo de forças central.

Se várias forças atuarem numa partícula, a Segunda Lei deve ser escrita na forma $F_R=\sum F=ma$. Agora, quando um sistema constituído de várias partículas, atuarem forças externas F e forças internas f, a Segunda Lei deve ser escrita na forma $F_i+\sum f_{ji}=m_i a_i$, onde F_i é a resultante das forças externas na partícula *i*, e f_{ji} é a força da partícula *j* sobre a partícula *i* e m_i é a massa da partícula *i*. E, para todas as partículas internas ao sistema $F_R=\sum F_i=\sum m_i a_i$.

A força resultante aplicada a uma partícula de massa *m*, num sistema inercial de referência nas coordenadas *xyz*, para Halliday (2002), pode ser escrita na forma $F_R=\sum F=\sum F_x i+\sum F_y j+\sum F_z k$ e a equação do movimento como $\sum F_x i+\sum F_y j+\sum F_z k=m(a_x i+a_y j+a_z k)$ e, esta equação vetorial pode ser substituída pelas três equações escalares $\sum F_x=ma_x$, $\sum F_y=ma_y$, $\sum F_z=ma_z$.

A equação do movimento para coordenadas cilíndricas é dada por $\sum F_r u_r+\sum F_\theta u_\theta+\sum F_z u_z=m(a_r u_r+a_\theta u_\theta+a_z u_z)$e, esta equação vetorial pode ser substituída pelas três escalares $\sum F_r=ma_r$, $\sum F_\theta=ma_\theta$, $\sum F_z=ma_z$.

Uma das equações de Maxwell, é a *Lei de Gauss*, dada por: $\oint_S E_n dA=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_{dentro}$. Para a derivação quantitativa da *Lei de Gauss*, há a necessidade de definir fluxo elétrico que, segundo Tipler (2012), é a quantidade matemática do número de linhas de campo penetrando em uma superfície. Para uma superfície perpendicular ao campo, o fluxo é dado por: $\phi=EA$.

Quando a superfície de área A_2 não é perpendicular ao campo e A_1 é normal a $\vec{E}$: $A_2 \cos\theta = A_1$, conforme a Figura 1, e o fluxo é dado por: $\phi = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA\cos\theta = E_n A$.

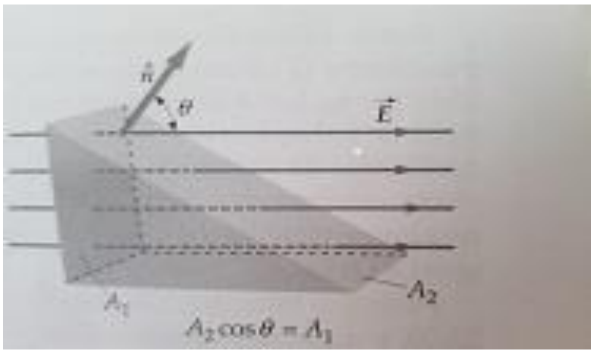


Figura 1 Linhas de Campo Elétrico Uniforme

Para uma superfície curva, conforme a Figura 2, o campo pode variar, assim a área do elemento de superfície deve ser pequena suficiente para ser considerada um plano e, com isso, a variação do campo ser desprezada, e o fluxo: $\Delta\phi_i = E_{ni}\Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$, onde $\vec{E}_i$ é o campo elétrico no elemento de superfície e $\hat{n}_i$ é o vetor unitário perpendicular ao elemento de superfície.

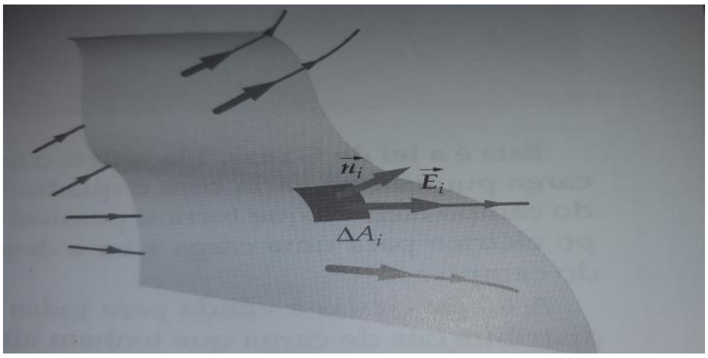


Figura 2 Campo Elétrico na superfície curva

Quando o número de elementos se aproxima do infinito, a área de cada elemento se aproxima de zero, e a soma se transforma numa integral: $\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$ (definição do fluxo elétrico), onde S representa a superfície sobre a qual se realiza a integral. Quando a superfície é fechada, o fluxo é convencionado positivo quando o $\vec{E}$ está saindo e negativo quando entrando. O fluxo resultante se determina por: $\phi_{res} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA$.

Para uma superfície esférica de raio R com uma carga Q no seu centro, segundo Tipler (2012), o campo elétrico em qualquer ponto da superfície é normal à ela e seu módulo é dado por:

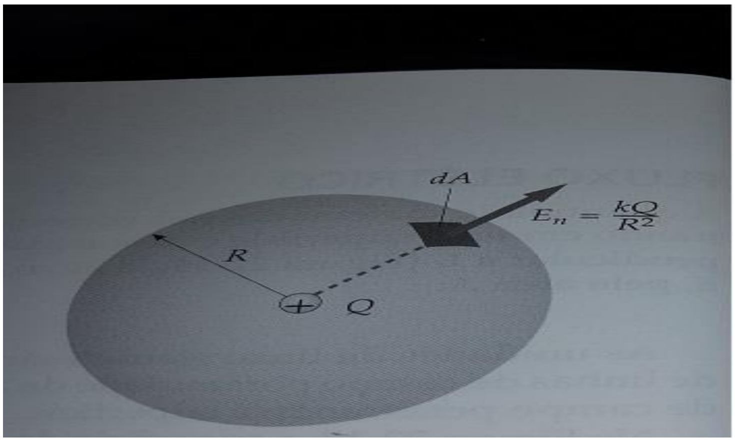


Figura 3 Superfície esférica contendo carga puntiforme Q

O fluxo resultante para fora da superfície esférica é dado por: $\phi_{res} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA$, o campo E_n é constante em qualquer ponto da superfície, por isso, se tira da integral e, a integral de dA é a área total da superfície, no caso $4\pi R^2$. Fazendo as substituições, obtém-se: $\phi_{res} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi k Q = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Assim, a *Lei de Gauss* pode ser escrita da forma: $\phi_{res} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{dentro}}{\varepsilon_0}$. Como afirma Tipler (2012), a *Lei de Gauss* é válida para todas as superfícies e distribuições de carga, e diz que o fluxo do campo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual a $\frac{1}{\varepsilon_0}$ multiplicado pela carga líquida no interior da superfície.

Segundo Keller (1999), a definição de fluxo magnético é exatamente análoga à de fluxo elétrico, substituindo $\vec{E}$ por $\vec{B}$. A diferença é que as linhas de campo elétrico começam e terminam em cargas elétricas, e as linhas de campo magnéticos formam curvas fechadas. Isso significa que, se uma superfície gaussiana[5] circunda a extremidade de um imã em forma de barra, a quantidade de linhas que penetram a superfície pelo lado de dentro é exatamente igual as que penetram pelo lado de fora, assim, o fluxo resultante do campo magnético através de qualquer superfície fechada é zero.

$\phi_{m\,res} = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \oint_S B_n dA = 0$ esta é a *Lei de Gauss* para o magnetismo.

Agora, considere *x = (x,y,z)* $\in \Omega$*, H = H(t,x) e ρ = ρ(t,x)* tais que para cada *t, H* seja um campo de vetores de classe C^1 em Ω e *ρ* uma função com valores reais de classe C^1 em Ω. Dizemos que *H* e ρ apresentam uma lei de conservação da massa se: $\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dxdydz = -\iint_{\partial\Omega} J$, em toda região $\Omega \subset R^3$ e $J = \rho H$, sendo ρ densidade de massa ou carga e H o campo de velocidade de um fluido, assim, a variação da massa total em Ω é igual a razão com que a massa flui para o interior de Ω*.* Observe que: $\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dxdydz = \iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$. Pelo Teorema de Gauss, para cada *t* fixo, a divergência de *J* é dada por: $\iint_{\partial\Omega} J = \iiint_\Omega div(J)$, e com isso, $\iiint_\Omega \left[div(J) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dxdydz = 0$. Assim em toda região $\Omega \subset R^3$, $div(J) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Essa equação é chamada de *Equação de Continuidade*. Conforme afirma Nussenzveig (1997), se a densidade for constante, $div(J) = 0$.

Se $T = T(t, x)$ for uma função de classe C^2 e, representar a temperatura de um corpo no instante *t*, o fluxo de calor será dado por: $F = -\nabla T$ A energia por unidade de volume é dada por $c\rho_0 T$, onde *c* é o calor específico e ρ_0 é a densidade de massa, considerada constante. O campo de vetores é definido por $J = \tau F$, sendo τ a constante de condutividade e o campo *J* é o fluxo de energia. Se a energia se conserva: $div(J) = div(-\tau \nabla T) = -\tau \Delta T$; e por outro lado: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho_0 T) = c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t}$, que equivale a $\frac{\partial T}{\partial t} = \sigma^2 \Delta(T)$ que é a chamada *Equação do Calor* e, $\sigma^2 = \frac{\tau}{c\rho_0}$ é a constante de difusividade térmica.

[5] É uma superfície fechada bidimensional e imaginária utilizada em Eletromagnetismo para o cálculo do Campo Elétrico e Fluxo Elétrico através da Lei de Gauss. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Superf%C3%ADcie_gaussiana

A equação do calor determina a evolução da condução do calor num sólido e, se T é estacionária, isto é, não depende do t, tem-se a *Equação de Laplace* $\Delta(\mathrm{T})=0$.

A Equação de Schrödinger diz que: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathrm{H}\Psi$, e o operador Hamiltoniano H é obtido da energia clássica: $\frac{1}{2}mv^2+V=\frac{1}{2m}\left(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2\right)+V$, segundo Griffiths (2011), pela receita-padrão, aplicada a y e a z, bem como a x, tem-se: $p_x\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},p_y\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y},p_z\to\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$ ou seja, $p\to\frac{\hbar}{i}\nabla$, assim: $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi$, onde o Laplaciano em coordenadas cartesianas é dado por: $\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. A energia potencial e a função de onda são funções de $r(x,y,z)$ e t. A probabilidade de se encontrar a partícula no volume infinitesimal e a condição de normalização diz que: $\int|\Psi|^2d^3r=1$ com a integral percorrendo todo o espaço. O conjunto completo de estados estacionários, se o potencial é independente do tempo, satisfaz a *Equação de Schrödinger* independentemente do tempo: $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi$. Para dependência do tempo: $\Psi(r,t)=\sum c_n\psi_n(r)e^{-iE_nt/\hbar}$ e, se o potencial admite estados contínuos, então a somatória se torna uma integral.

Segundo Leithold (1994), podemos resumir alguns dos resultados do cálculo vetorial por:

- O operador diferencial *del* em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}\equiv\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\quad\text{(vetor)}$$

- O operador *laplaciano* em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\equiv\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad\text{(escalar)}$$

Considerando $f(x,y,z)$ campo escalar e $\vec{F}(x,y,z)$ campo vetorial, pode-se escrever que:

- Gradiente $\vec{\nabla} f$ (vetor)
- Divergente $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ (escalar)
- Rotacional $\nabla x \vec{F}$ (vetor)
- Laplaciano $\nabla^2 f$ (escalar) e $\nabla^2 \vec{F}$ (vetor)

Algumas identidades do cálculo vetorial podem ser escritas por:

- $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} x \vec{F}) = 0$$
  $$\vec{\nabla} x (\vec{\nabla} x \vec{F}) = \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$
  $$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} x \vec{G}) = \vec{G}(\vec{\nabla} x \vec{F}) - \vec{F}(\vec{\nabla} x \vec{G})$$

Ainda, segundo o autor supracitado, os Teoremas de Gauss e Stokes, no cálculo vetorial, relacionam os formalismos integral e diferencial.

- Gauss: $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$
- Stokes: $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Assim, as equações de Maxwell são apresentadas como:

Na forma integral:

- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q$, Lei de Gauss;
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$, Lei de Gauss do Magnetismo;
- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, Lei de Faraday;
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$, Lei de Ampère-Maxwell.

Na forma diferencial:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$;

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$;

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$;

- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$.

Onde ρ é a densidade de carga e $\vec{j}$ é a densidade de corrente.

2.2 NOÇÃO INTUITIVA PARA O ENSINO MÉDIO

As grandezas que são caracterizadas por um número e a unidade correspondente são chamadas de grandezas escalares, como por exemplo, 20 cm^2 de área, 2 kg de massa, 32ºC de temperatura. No entanto, outras grandezas necessitam de orientação para serem caracterizadas, ou seja, não basta o número e a unidade correspondente (módulo), necessitam de direção e sentido. Essas grandezas são chamadas vetoriais e, como exemplo, podemos citar a velocidade, a aceleração, a força, o campo elétrico, entre outros. Uma das maneiras de se ensinar aos alunos como diferenciar uma grandeza escalar de uma vetorial e, inclusive utilizada pelo autor desse trabalho, é perguntar à informação dada, para onde? Caso caiba uma resposta, a grandeza é vetorial, caso não, escalar. Tomemos como exemplo uma informação como: 2 kg de massa, para onde? Observe que a pergunta não faz sentido e, por isso, a grandeza é escalar, já um corpo com velocidade de 5 m/s, para onde? A pergunta é relevante para informar a orientação do movimento e, sendo assim, a grandeza é vetorial.

No entanto, essa não é a definição de vetor, mas sim uma maneira de facilitar aos alunos de primeira série do Ensino Médio, a diferenciar uma grandeza física escalar de uma grandeza física vetorial. Segundo Boulos (1987), a definição de vetor segue uma formalização descrita em seguida.

2.3 CONCEITO GEOMÉTRICO DE VETOR

Um par de pontos determina um segmento orientado, onde o primeiro é chamado de origem e o segundo de extremidade. Um segmento orientado de origem A e extremidade B, representado por AB é, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento (Figura 4).

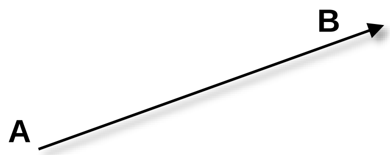


Figura 4 Segmento orientado AB

Um segmento é nulo quando sua extremidade coincide com a origem. Se AB é um segmento orientado, o segmento BA é oposto de AB (Figura 5).

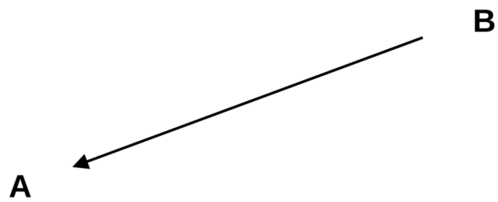


Figura 5 Segmento orientado BA, oposto de AB

A medida do segmento orientado é o comprimento ou módulo, que é um número real, não negativo e com uma unidade de comprimento fixada. O comprimento do segmento AB é indicado por $\overline{AB} = 2u.c.$ (Figura 6). Os segmentos nulos têm comprimento igual a zero e $\overline{AB} = \overline{BA}$.

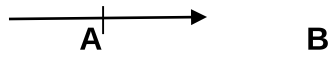


Figura 6 Segmento orientado de comprimento 2 *u.c.*

Quando dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção, suas retas suportes são paralelas (Figura 7) ou coincidentes (Figura 8).

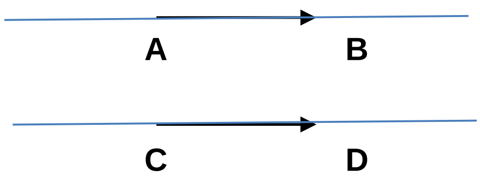


Figura 7 Segmentos orientados com mesma direção em retas suportes paralelas

Figura 8 Segmentos orientados com mesma direção em retas suportes coincidentes

Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido, podendo ou não, pertencerem à mesma reta (Figura 9). Dois segmentos nulos são sempre equipolentes. A representação da equipolência é dada por AB ~ CD.

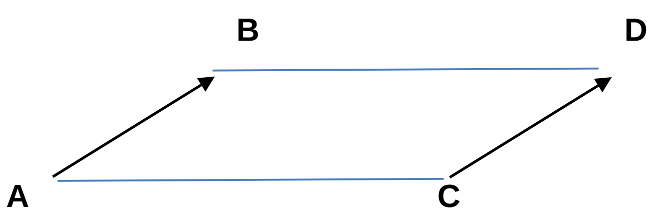


Figura 9 Segmentos orientados equipolentes

Propriedades da Equipolência:

a) Reflexiva (AB ~ AB).
b) Simétrica (AB ~ CD $\Rightarrow$ CD ~ AB).
c) Transitiva (AB ~ CD e CD ~ EF $\Rightarrow$ AB ~ EF).
d) Dado um ponto C e um segmento orientado AB, existe um único ponto D tal que AB ~ CD.

O vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB (Figura 10). O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou B-A ou $\vec{u}$.

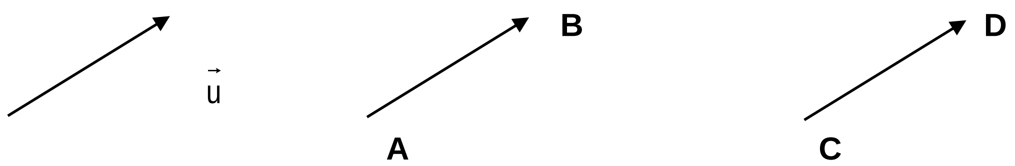


Figura 10 Conjunto de todos os segmentos orientados = vetor

2.3.1 Vetores Iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, AB ~ CD.

2.3.2 Vetor Nulo

Todos os segmentos nulos são equipolentes entre si e, determinam um único vetor chamado nulo ou zero, indicado por $\vec{0}$.

2.3.3 Vetores Opostos

Dado um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{u}$.

2.3.4 Vetor Unitário

Um vetor $\vec{u}$ é unitário se $|\vec{u}| = 1$.

2.3.5 Versor

Versor de um vetor não nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$, sendo que $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e de fato ele é unitário, pois: $|\vec{u}| = \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|} = 1$

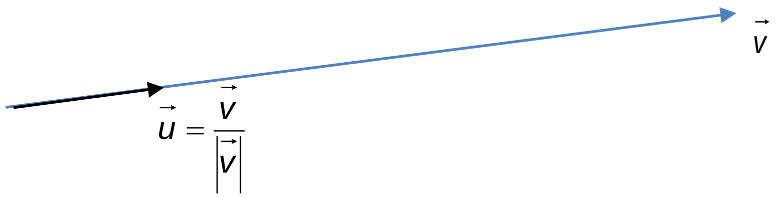


Figura 11 Vetor unitário

Daí, conclui-se que $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}$, isto é, o vetor $\vec{v}$ é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

2.3.6 Vetores Colineares

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão colineares se tiverem a mesma direção, ou seja, se os seus representantes AB e CD pertencerem a uma mesma reta ou a retas paralelas.

2.3.7 Vetores Coplanares

Dois ou mais vetores não nulos serão coplanares se seus representantes pertencerem a um mesmo plano π.

2.4 OPERAÇÕES COM VETORES

As operações com números reais diferem extraordinariamente das operações com vetores, pois operamos com medida e direção orientada.

2.4.1 Adição de Vetores

Dados dois vetores $\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{CD}$**,** chamamos soma destes vetores o vetor $\vec{S} = \overrightarrow{OP}$ que se obtém construindo, a partir de um ponto arbitrário O do espaço, os segmentos $\overrightarrow{OM}$ **e** $\overrightarrow{MP}$, respectivamente, equipolentes aos segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$**.**

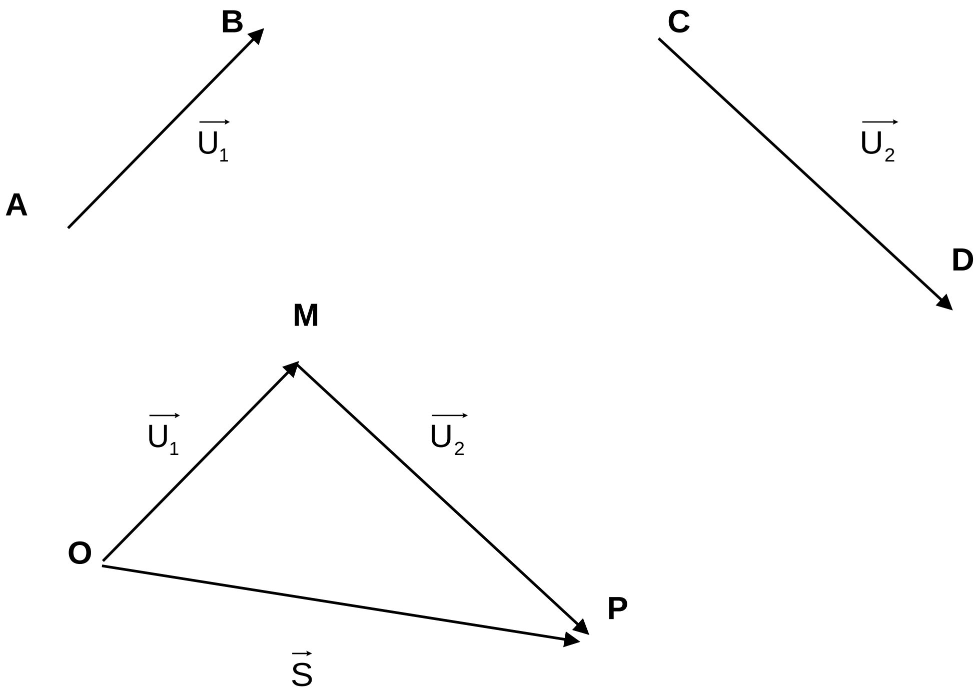


Figura 12 Adição de vetores

Fazendo as operações:

$$O + \overrightarrow{U_1} = M \Rightarrow \overrightarrow{U_1} = M - O$$

$$M + \overrightarrow{U_2} = P \Rightarrow \overrightarrow{U_2} = P - M$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = P - O$$

2.4.1.1 Propriedades da Adição

2.4.1.1.1 Comutativa

$\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_1}$ conforme a figura.

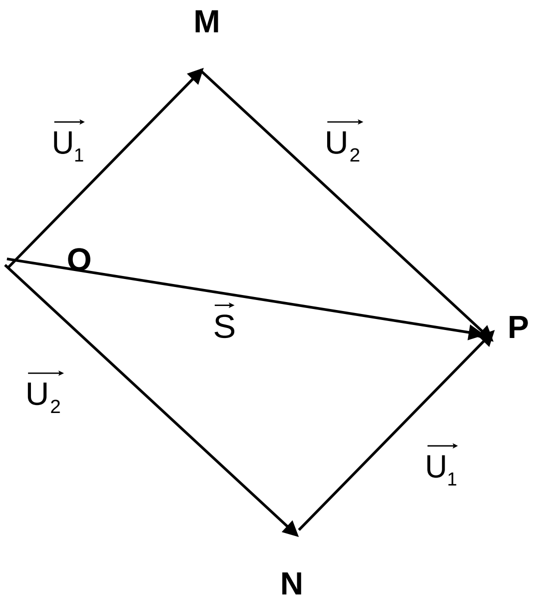


Figura 13 Representação da propriedade comutativa na adição de vetores

A partir de O temos:

$$O + \overrightarrow{U_1} = M \Rightarrow \overrightarrow{U_1} = M - O$$
$$M + \overrightarrow{U_2} = P \Rightarrow \overrightarrow{U_2} = P - M \qquad +$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} = P - O \qquad \text{e}$$

$$O + \overrightarrow{U_2} = N \Rightarrow \overrightarrow{U_2} = N - O$$
$$N + \overrightarrow{U_1} = P \Rightarrow \overrightarrow{U_1} = P - N \qquad +$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_1} = P - O$$

2.4.1.1.2 Associativa

$\left(\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}\right) + \overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_1} + \left(\overrightarrow{U_2} + \overrightarrow{U_3}\right)$ conforme a figura.

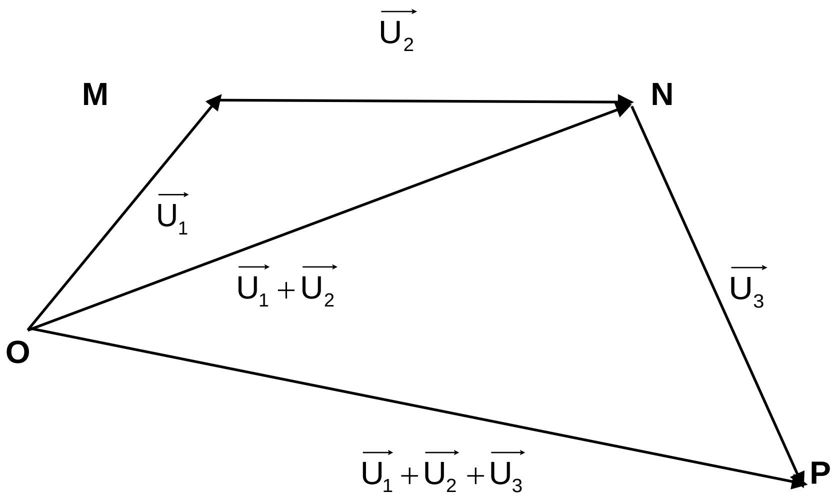


Figura 14 Representação da propriedade associativa na adição de vetores

A partir de O temos:

$$O+\left(\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2}\right)=N\Rightarrow\left(\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2}\right)=N-O$$

+

$$N+\overrightarrow{U_3}=P\Rightarrow\overrightarrow{U_3}=P-N$$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2}\right)+\overrightarrow{U_3}=P-O$$

e

$$O+\overrightarrow{U_1}=M\Rightarrow\overrightarrow{U_1}=M-O$$

+

$$M+\left(\overrightarrow{U_2}+\overrightarrow{U_3}\right)=P\Rightarrow\left(\overrightarrow{U_2}+\overrightarrow{U_3}\right)=P-M$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{U_1}+\left(\overrightarrow{U_2}+\overrightarrow{U_3}\right)=P-O$$

2.4.1.1.3 Propriedade do Elemento Neutro

$\vec{U}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{U}=\vec{U}$ e seja o vetor $\vec{U}=\overrightarrow{OP}=P-O$, então

$$
\begin{array}{ll}
O + \vec{U} = P \Rightarrow \vec{U} = P - O & \\
P + \vec{0} = P \Rightarrow \vec{0} = P - P & + \\
\hline
\Rightarrow \vec{U} + \vec{0} = P - O = \vec{U} &
\end{array}
$$

do mesmo modo:

$$
\begin{array}{ll}
O + \vec{0} = O \Rightarrow \vec{0} = O - O & + \\
O + \vec{U} = P \Rightarrow \vec{U} = P - O & \\
\hline
\vec{0} + \vec{U} = P - O = \vec{U} &
\end{array}
$$

2.4.1.1.4 Propriedade do Elemento Simétrico

$\vec{U} + \left(-\vec{U}\right) = \vec{0}$ seja $\vec{U} = \overrightarrow{OP}$ então

$$
\begin{array}{ll}
O + \vec{U} = P \Rightarrow \vec{U} = P - O & + \\
P + \left(-\vec{U}\right) = O \Rightarrow \left(-\vec{U}\right) = O - P & \\
\hline
\Rightarrow \vec{U} + \left(-\vec{U}\right) = O - O = \vec{0} &
\end{array}
$$

2.4.2 Subtração de dois vetores

A diferença entre dois vetores se obtém somando um deles com o oposto do outro. $\overrightarrow{U_1} - \overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{U_1} + \left(-\overrightarrow{U_2}\right)$

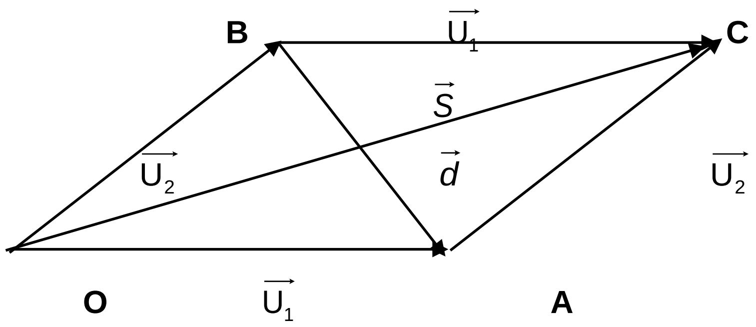


Figura 15 Representação da subtração de vetores

$$O + \overrightarrow{U_1} = A \Rightarrow \overrightarrow{U_1} = A - O$$
$$O + \overrightarrow{U_2} = B \Rightarrow \overrightarrow{U_2} = B - O \quad -$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{U_1} - \overrightarrow{U_2} = A - B = \overrightarrow{BA} = \vec{d}$$

Se sobre os dois vetores dados e aplicados ao mesmo ponto O, construirmos o paralelogramo OABCD, a diagonal ao qual o ponto O pertence, representa o vetor soma e a outra diagonal representa o vetor diferença.

2.4.3 Produto de um vetor por um número real

Considerando um número real $m \neq 0$ e o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, o produto do escalar *m* pelo vetor $\vec{v}$ é um vetor $m\vec{v}$ caracterizado por:

1. Módulo: $\left|m\vec{v}\right| = \left|m\right| . \left|\vec{v}\right|$
2. Direção: é a mesma de $\vec{v}$
3. Sentido: é o mesmo de $\vec{v}$ se *m* for positivo e, contrário ao de $\vec{v}$, se *m* for negativo.

2.4.3.1 Propriedades do Produto de um Vetor por um Número Real

2.4.3.1.1 Associativa

$$m\left(n\vec{v}\right)=\left(mn\right)\vec{v}$$

2.4.3.1.2 Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição de Escalares

$$\left(m+n\right).\vec{v}=m\vec{v}+n\vec{v}$$

2.4.3.1.3 Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição de Vetores

$$m\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right)=m\overrightarrow{v_1}+m\overrightarrow{v_2}$$

2.4.3.1.4 Identidade

$$1.\vec{v}=\vec{v}$$

2.4.4 ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

O ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB tal que $0 \le \theta \le \pi$.

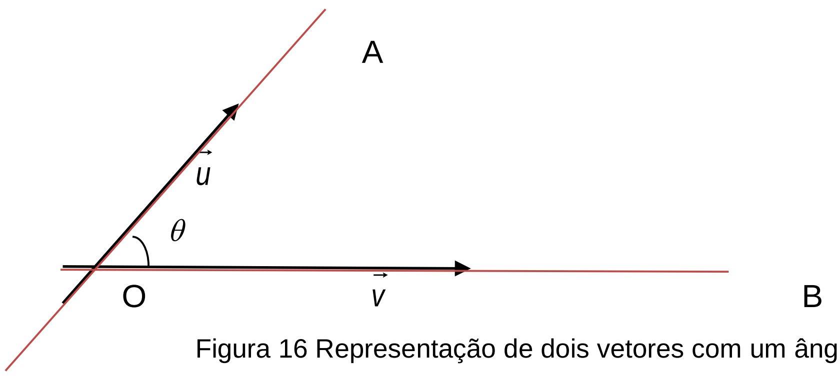


Figura 16 Representação de dois vetores com um ângulo entre eles

Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos opostos.

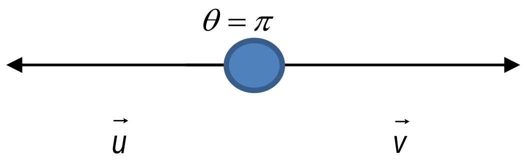


Figura 17 Representação de dois vetores com um ângulo de 180º entre eles

Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e sentido.

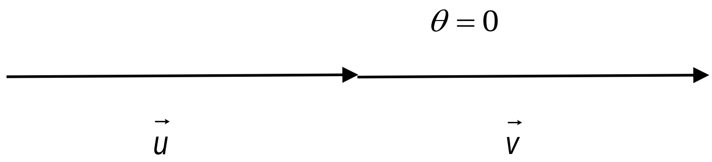


Figura 18 Representação de dois vetores com um ângulo de 0º grau entre eles

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

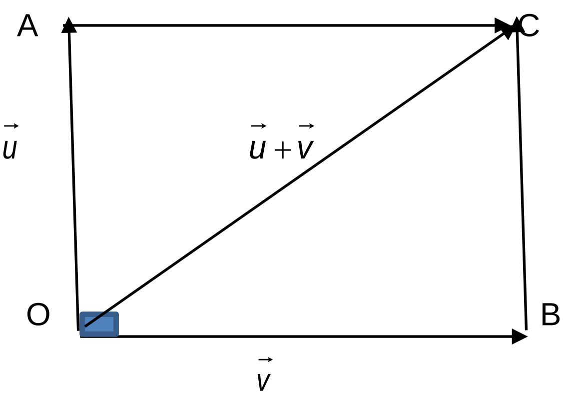


Figura 19 Representação de dois vetores com um ângulo de 90º entre eles

Neste caso, o ΔOBC permite escrever: $\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2$

O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor. Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e m é um número real qualquer, $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$.

O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

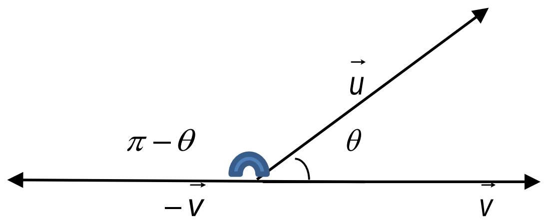


Figura 20 Representação do ângulo formado entre dois vetores

2.4.4 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo é uma figura geométrica plana, constituída por três lados e três ângulos. Cada um dos ângulos mede entre 0 π radianos e, a soma dessas medidas é π radianos.

Segundo Magalhães (2013), no triângulo retângulo, definimos as razões trigonométricas que são relações entre os lados do triângulo e que têm a propriedade de determinar a medida dos ângulos do triângulo, uma vez que seus lados sejam conhecidos.

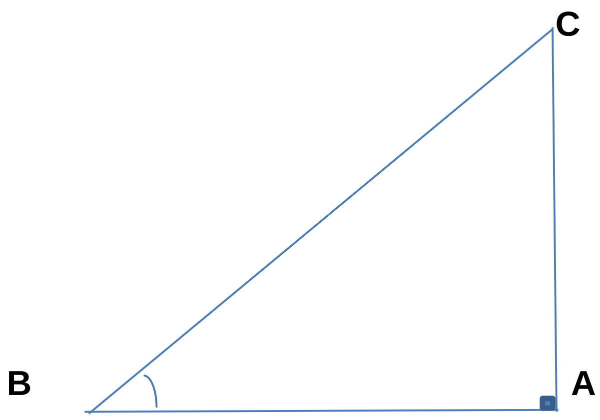


Figura 21 Representação de um triângulo retângulo

Seno de x é a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo B e o comprimento da hipotenusa. $sen x = \frac{AC}{BC}$

Cosseno de x é a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo B e o comprimento da hipotenusa. $\cos x = \frac{BA}{BC}$

Tangente de x é a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo B e o cateto adjacente ao ângulo B. $tgx = \dfrac{AC}{BA}$

Lei dos cossenos: em todo triângulo ABC valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

2.4.5 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO PLANO

Dados dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, não colineares, qualquer vetor $\vec{v}$, coplanar com $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, pode ser decomposto segundo as direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja determina-se dois números reais a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$

Nesse caso $\vec{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. O par de vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, não colineares, é chamado de base no plano. Aliás qualquer conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano. Os números a_1 e a_2 são chamados de componentes ou coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. O vetor $a_1\vec{v}_1$ é chamado de projeção de $\vec{v}$ sobre $\overrightarrow{v_1}$ segundo a direção de $\overrightarrow{v_2}$. Do mesmo modo, $a_2\vec{v}_2$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre $\overrightarrow{v_2}$ segundo a direção de $\overrightarrow{v_1}$.

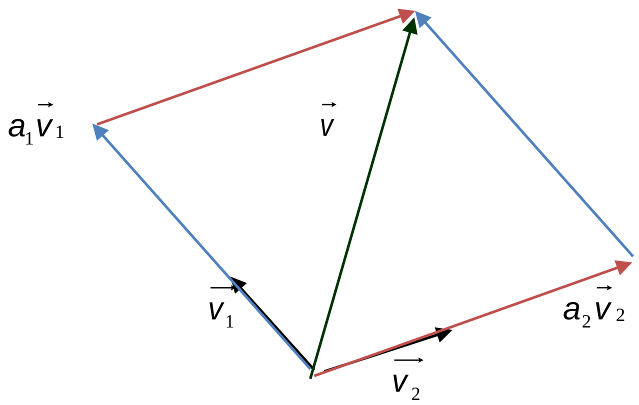


Figura 22 Representação de um par de vetores não colineares que constituem uma base no plano

Na pratica, as bases mais utilizadas são as ortonormais. Uma base $\{e_1, e_2\}$ é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}\ | = 1$.

A base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, cujos vetores são simbolizados com $\vec{i}$ e $\vec{j}$ é particularmente importante, pois trata-se de uma base ortonormal no plano xOy formada por vetores representados por segmentos orientados com origem em O e extremidade nos pontos (1,0) e (0,1).

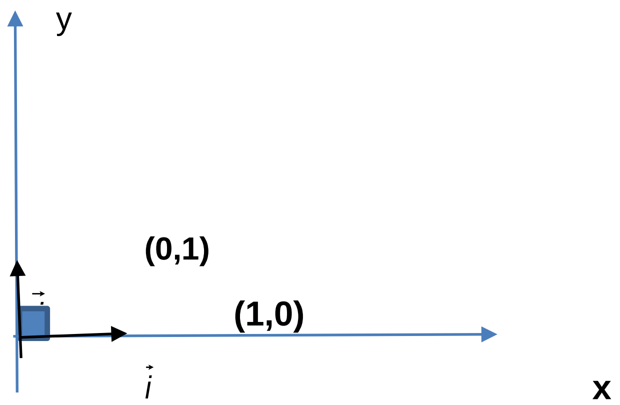


Figura 23 Representação de uma base canônica no plano xOy

Com a base fixada $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais. A cada vetor $\vec{v}$ do plano pode-se associar um par (x, y) de números reais que são suas componentes na base dada e, se representa por: $\vec{v} = (x, y)$ que é a expressão analítica de $\vec{v}$. A primeira componente x é chamada abscissa e a segunda, ordenada. Por exemplo $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ou $\vec{v} = (2{,}3)$.

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$. Quanto à soma entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pode-se afirmar que: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e quando multiplica-se um número real *a* por um vetor $\vec{v}$, obtém-se: $a.\vec{v} = (ax_1, ay_1)$.

2.4.5 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Segundo Steinbruch (1987), o vetor pode ser representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema. Se considerarmos um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. De acordo com as expressões analíticas, tem-se: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

Por outro lado, do triângulo ΔOAB da figura, vem: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ então $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ isto é, as componentes de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ são obtidas subtraindo-se da coordenadas da extremidade B as coordenadas da extremidade A, razão que se escreve: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ = B – A.

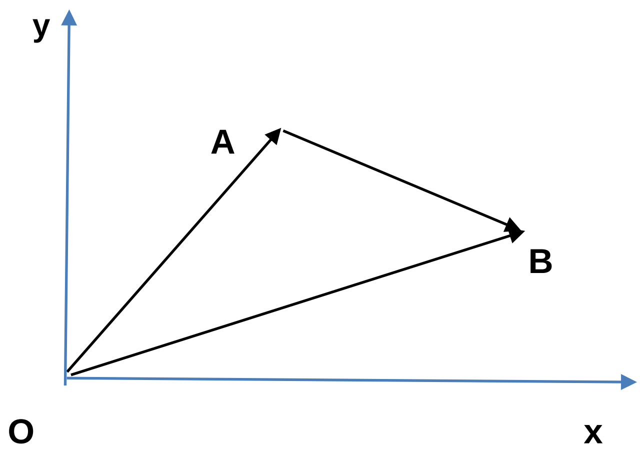
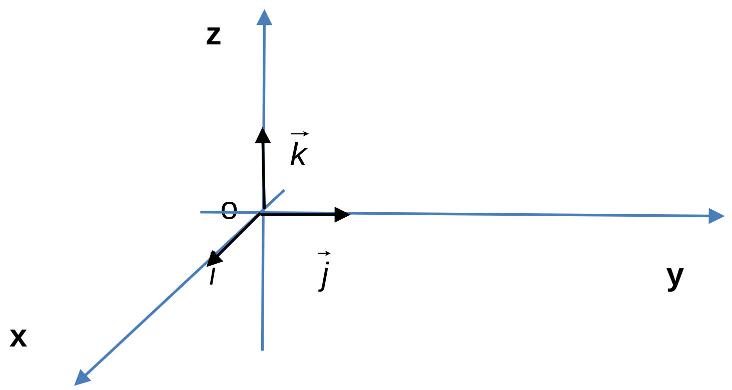


Figura 24 Representação de um vetor definido por dois pontos

2.4.6 DECOMPOSIÇÃO NO ESPAÇO

No espaço, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de três vetores não coplanares é uma base e, de forma análoga, demonstra-se que todo vetor $\vec{\mathrm{v}}$ do espaço é combinação linear dos vetores da base, isto é, sempre existem números reais a_1, a_2 e a_3 tais que: $\vec{\mathrm{v}} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$, onde a_1, a_2 e a_3 são as componentes de $\vec{\mathrm{v}}$ em relação à base considerada.

A base no espaço é ortonormal se os três vetores forem unitários e ortogonais, de dois em dois. A base canônica é representada por $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e, cada vetor com origem no mesmo ponto O. A direção de cada vetor representa as retas da abscissas, ordenadas e cotas, respectivamente.



$\vec{i} = (1,0,0) \qquad \vec{j} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$

Figura 25 Representação de uma base canônica no espaço

A correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos P (x, y, z) do espaço e o conjunto de vetores $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, permite encararmos o espaço como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores. Assim sendo, o espaço tem três dimensões (tridimensional), pois uma de suas bases tem três vetores e, portanto, o número de componentes de um vetor é três. Por exemplo o vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ que pode ser expresso por $\vec{v} = (2,3,-1)$.

2.4.7 PRODUTOS DE VETORES

2.4.7.1 Produto Escalar

Chama-se produto interno ou produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, ou $\langle \vec{u}.\vec{v} \rangle$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$" ao número real $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Como exemplo, se $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, tem-se

$\vec{u}.\vec{v}$ = 2x3 + (-5) x(-2) +8x(-1) = 6 + 10 - 8 = 8

O módulo de um vetor $\vec{v}$ = (x, y, z), representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$ ou em coordenadas $|\vec{v}| = \sqrt{(x,y,z).(x,y,z)}$ ou $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Caso seja a determinação no plano, $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se, por exemplo, $\vec{v}$ = (2,1,-2) e, como $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, teremos $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$ e, $|\vec{v}|$ = 3.

2.4.7.1.1 Interpretação Geométrica

A projeção de um vetor sobre outro é o produto escalar do vetor projetado pelo versor do vetor sobre o qual se projeta.

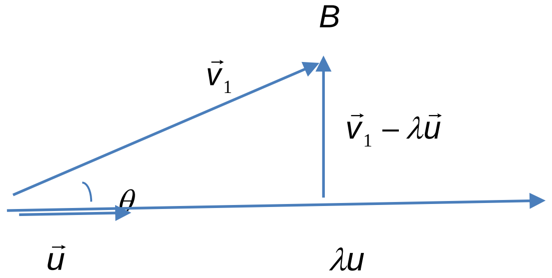


Figura 26 Representação da projeção de um vetor

1) $proj_{\vec{u}}\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{u}$
2) $(\vec{v}_1 - \lambda \cdot \vec{u}) \perp \vec{u}$

Daí, deduz-se:

$(\vec{v}_1 - \lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}$ e, $proj_{\vec{u}}\vec{v}_1 = \left(\dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$ daí.

$proj_{\vec{u}}\vec{v}_1 = \left(\dfrac{|v_1|}{|u|} \cdot \cos\theta\right)\vec{u}$.

2.4.7.1.2 Propriedades do Produto Escalar

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|\cos(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$

- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ se, e somente se, um dos vetores for nulo ou se forem ortogonais. Para:

$\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \vec{0} \cdot \vec{v}_2 = |\vec{0}| \cdot |\vec{v}_2|\cos(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = 0$ ou

$\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{0} = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{0}|\cos(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ e para:

$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|\cos\frac{\pi}{2} = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot 0 = 0$

- Propriedade Comutativa

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$ de fato, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|\cos(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ e $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_1|\cos(\vec{v}_2,\vec{v}_1)$, e como

$\cos(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \cos(\vec{v}_2,\vec{v}_1)$, então $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$

- O produto escalar de um vetor por si próprio é igual ao quadrado do seu módulo

$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}|\cos 0^o = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

- Propriedade associativa do produto escalar em relação aos escalares *m* e *n*

$(m\vec{v}_1) \cdot (n\vec{v}_2) = (mn) \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$

- Propriedade distributiva

$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$, se um dos vetores for nulo a demonstração é imediata.

2.4.7.2 Produto Vetorial

O produto vetorial de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, indicado por $\vec{v}_1 x \vec{v}_2$, lê-se v1 vetorial v2 ou v1 exterior v2 , cujas características são:

- O módulo é o produto dos módulos dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ pelo seno do ângulo destes vetores.

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1 x \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot sen(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

- A direção de $\vec{v}$ é normal ao plano determinado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

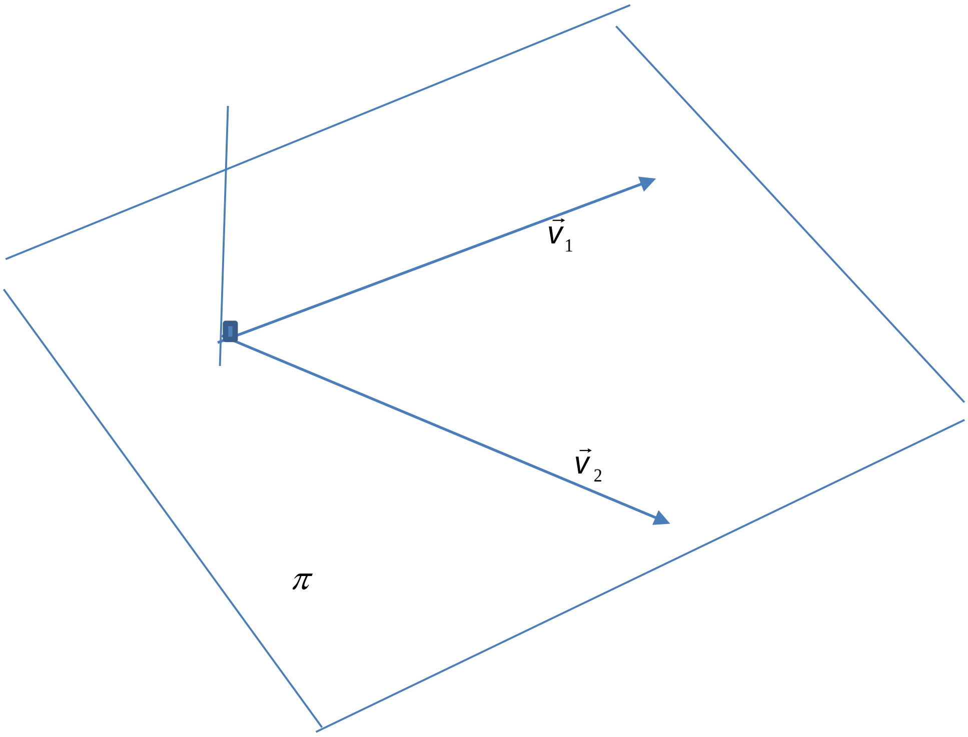


Figura 27 Representação da direção de vetores no plano

- O sentido de $\vec{v}$ é aquele em que o triedro formado pelos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}$ é orientado positivamente.

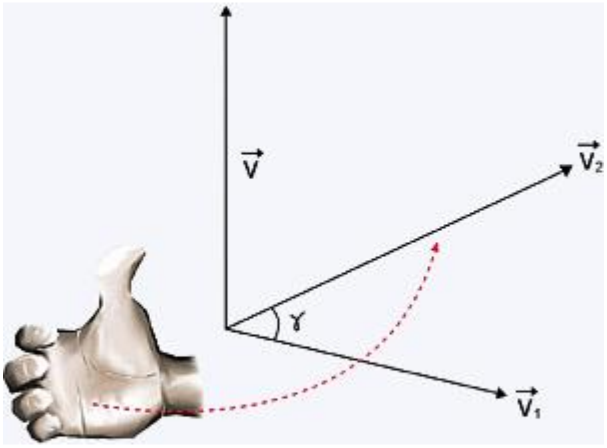


Figura 28 Representação do sentido do produto vetorial

http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/vetores/prod_vetores/

2.4.7.2.1 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial de dois Vetores

Seja os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, nesta ordem, aplicados num ponto qualquer.

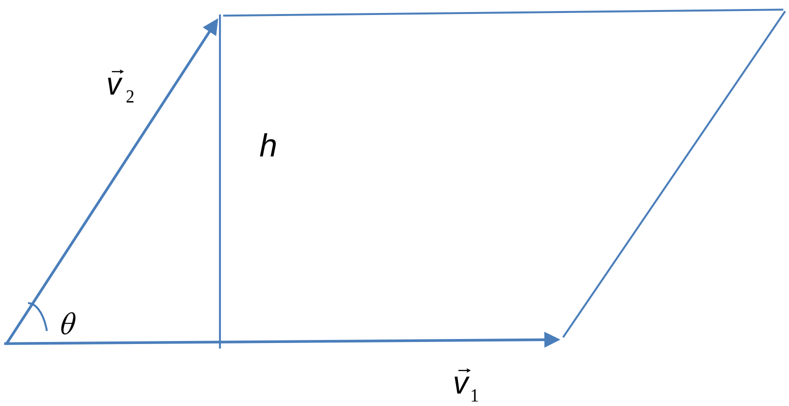


Figura 29 Representação da interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Considere o paralelogramo construído sobre os dois vetores, sua área

$A = |\vec{v}_1| . h$ **,** mas $h = |\vec{v}_2| \cdot sen\theta$, então A = $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot sen\theta \Rightarrow\Rightarrow A = |\vec{v}_1 x \vec{v}_2|$. O módulo do produto vetorial de dois vetores é igual à área do paralelogramo construído sobre eles.

2.4.7.2.2 Propriedades do Produto Vetorial

- O produto vetorial de dois vetores é nulo se um dos vetores for nulo ou se possuírem a mesma direção.

$|\vec{0} x \vec{v}_1| = |\vec{0}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot sen(\vec{0}, \vec{v}_1) = 0$ e $|\vec{v}_1 x \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot sen 0^o = 0$

- Propriedade anti-comutativa

$\vec{v}_1 x \vec{v}_2 \neq \vec{v}_2 x \vec{v}_1$, há a mudança de sentido.

- Propriedade associativa em relação aos reais *m* e *n*

$(m \cdot \vec{v}_1) x (n \cdot \vec{v}_2) = mn(\vec{v}_1 x \vec{v}_2)$

- Propriedade distributiva, o produto vetorial de dois vetores é distributiva à direita e à esquerda, em relação à adição.

$(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) x \vec{v}_1 = \vec{v}_2 x \vec{v}_1 + \vec{v}_3 x \vec{v}_1$

Vale destacar, que os materiais apostilados do Ensino Médio, não apresentam as operações produto escalar entre vetores e produto vetorial. Para o autor deste trabalho, é relevante e essencial ensinar as operações com vetores, uma vez que as mesmas facilitam a interpretação de várias grandezas físicas, promovendo assim uma aprendizagem significativa de acordo com a teoria de David Ausubel que, será apresentada no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3 - REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 O cognitivismo

Moreira e Masini, autores do livro *Aprendizagem Significativa: A Teoria de David Ausubel*, destacam na introdução da obra:

> [...] Tem origem, então, a estrutura cognitiva (os primeiros significados), constituindo-se nos pontos básicos de ancoragem dos quais derivam outros significados. (MOREIRA; MASINI, 1982, p. 3)

Para os autores supracitados, o processo pelo qual o mundo de significados se origina, i.e., a aquisição de conhecimentos, é o que se define por cognição. Esses significados, não estáticos, são o ponto inicial para concessão de outros significados.

3.2 A teoria de David Ausubel

A Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, explica o processo de aprendizagem sob uma visão cognitivista.

Para Ausubel, aprendizagem é a organização e incorporação do material na estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, a aprendizagem é significativa se for caracterizada pela interação cognitiva entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio.

Essa interação entre novas ideias e expressões simbólicas não ocorre com qualquer ideia prévia, mas sim, com o conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do ser que aprende e, além disso, a interação deve ser não-literal, ou seja, o que é incorporado é a substância do novo conhecimento e não só as palavras usadas para expressá-las. A partir dessa interação, que é um processo dinâmico, os novos conhecimentos passam a ter significado para o sujeito e os já existente adquirem novos significados.

O conhecimento pré-existente, supracitado, denominado por Ausubel, de ideia-âncora ou *subsunçor*[6], pode ser um conceito, uma imagem, um símbolo já significativo, uma proposição ou um *modelo mental*[7]. Segundo Moreira (2011), o atributo isolado, se fosse possível, mais importante para a aprendizagem significativa de novos conhecimentos, na visão de Ausubel, é o conhecimento prévio, i.e., os subsunçores já existentes na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

Porém, o conhecimento prévio não é um atributo exclusivamente facilitador, pode sim, em alguns casos, ser bloqueador, impeditivo de uma aprendizagem significativa, conforme (MOREIRA, 2008). Como exemplo, a concepção de corpúsculo como uma "bolinha" invisível, com massa muito pequena e ocupando um espaço muito pequeno, dificulta a aprendizagem significativa do que seja uma partícula elementar.

Quando o aprendiz apresenta uma deficiência de subsunçores adequados, Ausubel propõe a utilização de *organizadores prévios* que, são recursos instrucionais que precedem a apresentação do material de aprendizagem, funcionam como pontes cognitivas.

Estes recursos instrucionais devem estar no mesmo nível de abstração do conteúdo a ser aprendido, podendo ser na forma de uma pergunta, um enunciado, uma situação-problema, uma simulação, um filme, uma leitura, uma aula, et al.

Existem dois tipos de organizadores prévios: o *expositivo* que, supostamente, faz a ponte entre o que o aluno sabe e o que deveria saber, uma vez que o material de aprendizagem não é familiar e o *comparativo* que ajuda o aprendiz a agregar novos conhecimentos à estrutura cognitiva, além de diferenciá-los de outros conhecimentos que são diferentes, mas plausíveis de confusão.

Muitas vezes o aprendiz pensa que o novos materiais de aprendizagem não têm a ver com seus conhecimentos prévios, ele não percebe a relação entre eles, ressaltando assim a necessidade de utilizar os organizadores.

[6] A palavra "subsunçor" não existe em português, trata-se de uma tentativa de traduzir a palavra inglesa "subsumer" (MOREIRA, 2009, p. 8).
[7] Segundo Johnson-Laird, modelo mentais são como blocos de construção cognitivos que podem ser combinados e recombinados conforme necessário. Disponível em: http://www.if.ugrgs.br/public/ensino/N3/moreira.htm. Acesso em: 10/01/2016.

Segundo Moreira e Masini (1982), Ausubel classifica a estrutura cognitiva como uma estrutura hierárquica de conceitos, onde os elementos mais específicos são ligados e assimilados nos elementos mais gerais, ou seja, o cérebro humano é extremamente organizado. A estrutura é dinâmica e se caracteriza por dois processos principais, a *diferenciação progressiva e* a *reconciliação integradora.*

A diferenciação progressiva é o processo pelo qual os subsunçores, através de sucessivas interações, vão adquirindo novos significados, cada vez mais diferenciados e capazes de servirem como âncoras para novas aprendizagens significativas.

A reconciliação integradora consiste integrar significados, ou seja, restabelecer a hierarquia entre os subsunçores e os novos conhecimentos. Moreira (2012) destaca que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são processos da dinâmica da estrutura cognitiva e considerados como princípios programáticos do conteúdo ensinado.

Basicamente, são três as condições para aprendizagem significativa. Primeiro o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender, como já mencionado, relacionar os novos conhecimentos, de forma não-arbitrária e não-literal aos seus conhecimentos prévios. Segundo, o material, i.e., o livro, a aula, o problema, não podem ser significativos e sim potencialmente significativos, pois o significado está nas relações que as pessoas estabelecem mentalmente. Terceiro, a mediação do professor ´que, consiste em contribuir para a atuação crítica do aprendiz no processo histórico e cultural.

A aprendizagem mecânica, ainda predominante nas escolas, que segundo Moreira (2012), é conhecida como decoreba, se dá por memorização, ou seja, se relaciona com a estrutura cognitiva apenas de forma arbitrária e literal, sem significado. É importante ressaltar que aprendizagem mecânica e a significativa não são contrárias (dicotômicas). Conforme apresentado na Figura 30, o ensino potencialmente significativo se situa entre a aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa, isso não significa que a passagem de uma para outra é natural ou automática e, segundo Moreira (2012), na prática, grande parte da aprendizagem ocorre na zona intermediária do contínuo e o ensino potencialmente explicativo facilita a caminhada do aluno na zona cinza.

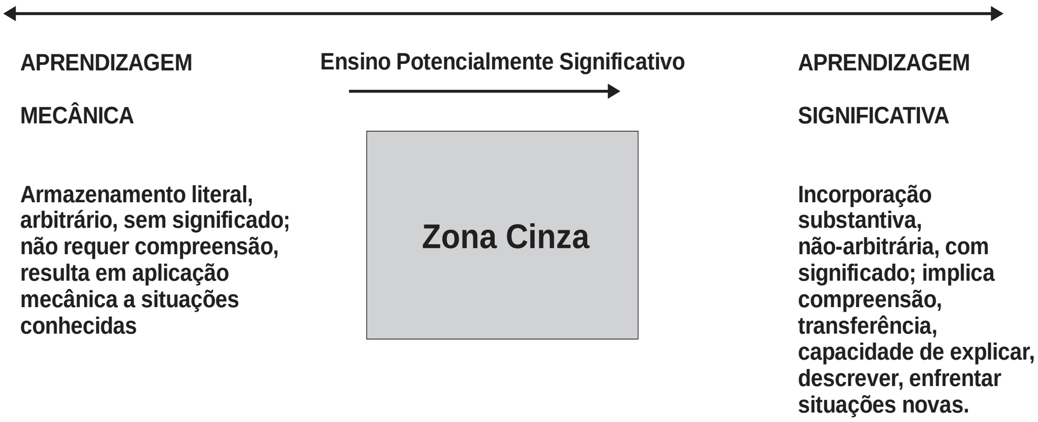


Figura 30 Uma visão esquemática do contínuo aprendizagem significativa - mecânica

Para essa passagem há a necessidade da existência de subsunçores, da predisposição do aluno para aprender, do material potencialmente significativo e principalmente da mediação do professor. A construção de um subsunçor não é um processo imediato, a aprendizagem significativa depende da captação de significados Moreira (op.cit.), ou seja, envolve uma negociação entre docente e discente, o que a torna progressiva.

Não é certo imaginar que a aprendizagem por descoberta implica em aprendizagem significativa, pois segundo Moreira (2011), não é preciso descobrir para aprender significativamente.

A aprendizagem por descoberta pressupõe que o aprendiz inicialmente descubra o que vai aprender e, para que se concretize em aprendizagem significativa, as condições de predisposição para aprender e conhecimento prévio devem ser satisfeitas.

Na aprendizagem receptiva, o próprio nome já diz, o aluno “recebe” o conhecimento a ser aprendido em sua forma final. Essa aprendizagem não é necessariamente passiva, o fato de não precisar descobrir para aprender, ou seja, a receptividade, propõe atividade cognitiva na relação interativa entre os novos conhecimentos e os já existentes. A recepção do conhecimento pode ocorrer através de uma simulação computacional, uma experiência de laboratório, um filme, um livro ou até mesmo de uma aula.

O conhecimento não é construído, necessariamente, por descoberta ou por recepção, o que implica que, assim como não há uma dicotomia entre as aprendizagens mecânica e significativa, não há também entre as aprendizagens por descoberta e por recepção.

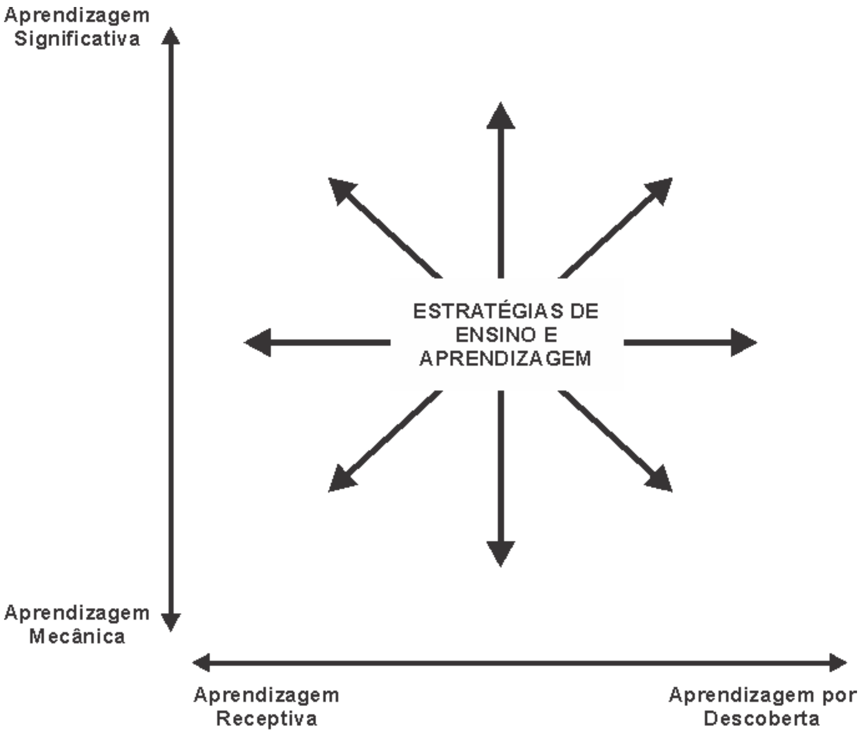


Figura 31 Um hipotético sistema de coordenadas formado pelos eixos aprendizagem mecânica x aprendizagem significativa e aprendizagem receptiva x aprendizagem por descoberta. Fonte: MOREIRA, 2012, p. 15.

A linha vertical representa um contínuo delimitado, por um lado, pela aprendizagem significativa e por outro pela aprendizagem mecânica. A distinção, por parte do aluno, estabelece ou não, relações substanciais entre os conceitos que estão presentes na sua estrutura cognitiva e o novo material que ele precisa aprender. Quanto mais o novo material se relaciona, de maneira substancial e não-arbitrária, mais próxima fica a aprendizagem significativa e, quanto menos se relaciona, mais próxima a aprendizagem mecânica.

A linha horizontal representa um continuo delimitado, por um lado, pela aprendizagem receptiva e por outro pela aprendizagem por descoberta. Aqui se estabelece a maneira como o aluno recebe os conteúdos que deve aprender.

Quanto mais se desloca para a direita, os conteúdos são recebidos de maneira não completamente acabada, devendo o aluno descobri-los antes de assimilá-los. No sentido oposto, os conteúdos a serem aprendidos são dados aos alunos na sua forma final, já acabada.

Segundo Moreira (2012), Ausubel, distingue a aprendizagem significativa em três formas e três tipos.

A aprendizagem significativa *subordinada* é caracterizada pelo processo da ancoragem cognitiva e interativa dos novos conhecimentos, que passam a ter significados, nos conhecimentos prévios relevantes mais gerais e inclusivos já existentes na estrutura cognitiva. A segunda forma é a *superordenada*, definida como um mecanismo fundamental para a aquisição de conceitos que, envolve processos de abstração, síntese e indução que levam a novos conhecimentos que passam a submeter aqueles que lhes deram origem. A terceira forma é a *combinatória*, que implica na interação de um novo conhecimento com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, nem mais inclusiva e nem específica que os já existentes.

Quanto aos tipos, a aprendizagem pode ser *representacional* que ocorre quando o símbolo representa apenas o referente que representa, ou seja, símbolos arbitrários passam a representar, em significado, determinados objetos em uma relação unívoca. A aprendizagem *conceitual* é uma aprendizagem representacional de alto nível, pois o sujeito passa a representar objetos ou eventos por determinado símbolo, não mais dependendo de um referente concreto para dar significado a esse símbolo. Tanto a aprendizagem representacional como a conceitual, são pré-requisito para a aprendizagem *proposicional* que, implica em dar significado a novas ideias na forma de uma proposição e essa, por sua vez, não representa a soma dos significados dos conceitos e palavras nela envolvidos.

Para alguns educadores a teoria de aprendizagem significativa está ultrapassada, pois foi formulada a cinquenta anos. Realmente, a teoria de Ausubel é dos anos sessenta (1963, 1968), porém, nos tempos atuais, as escolas ainda não são capazes de darem conta da premissa básica da teoria, ou seja, não levam em conta o conhecimento prévio do aluno. Segundo Moreira:

> A facilitação da aprendizagem significativa depende muito mais de uma nova postura docente, de uma nova diretriz escolar, do que de novas metodologias, mesmo as modernas tecnologias de informação e comunicação (MOREIRA, 2012, p. 23).

O autor supracitado acrescenta que há também, a necessidade de novas maneiras de se avaliar, ou seja, o professor deve rever seus conceitos de aprendizagem e, quem sabe até, utilizar uma sequência didática apropriada para uma aprendizagem significativa, conforme a proposta por Moreira e apresentada a seguir.

3.3 Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)

A Teoria da Aprendizagem Significativa, desenvolvida por Ausubel tem como filosofia o cognitivismo, ou seja, trata dos processos mentais do ser humano. A teoria ausubeliana ressalta que são necessárias duas condições para que se concretize a aprendizagem significativa, primeiro a disposição do aluno para aprender e segundo, o material deve ser potencialmente significativo para o aluno.

A partir daí, Moreira (2011) desenvolve uma sequência didática baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa, a qual denomina como Unidade de Ensino Potencialmente Significativo (UEPS) e, que têm como objetivo, facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos de conhecimento.

As etapas que constituem uma UEPS, na sequência em que são propostas, visam promover a aprendizagem significativa. Alguns passos servem como guia para a elaboração dessas Unidades, cabendo ao professor adaptá-las conforme a realidade da escola.

O conhecimento prévio, ou subsunçor, é a variável isolada que mais influencia a aprendizagem significativa;
São as situações-problema que dão sentido a novos conhecimentos;
Organizadores prévios apontam para como é possível relacionar novos conhecimentos aos subsunçores;
Situações-problema também podem funcionar como organizadores prévios;
As situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade;

A diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação devem ser consideradas na organização do ensino, continua na proposição de situações-problema e na avaliação;
A avaliação da aprendizagem significativa deve ser feita em termos de buscas de evidências;
O papel do professor é o de provedor de situações-problema, cuidadosamente selecionadas, de organizador do ensino e mediador da captação de significados de parte do aluno;
Um episódio de ensino envolve uma relação triádica entre aluno, professor e materiais educativos, cujo objetivo é levar o aluno a captar e compartilhar significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino;
A aprendizagem deve ser significativa e crítica, não mecânica;
A aprendizagem crítica é estimulada pela busca de respostas (questionamento) ao invés de memorização de respostas conhecidas, pelo uso da diversidade de materiais e estratégias instrucionais e pelo abandono de narrativa em favor de um ensino centrado no aluno.

Quadro 1 Princípios norteadores da proposta, com base em Moreira (ibid.).

Fonte: Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID327/v18_n1_a2013.pdf<Acesso em: 19/01/2016>

Primeiramente, define-se o tópico a ser trabalhado, identificando os aspectos declarativos e procedimentais que serão necessários na abordagem do tema.

Para investigar os conhecimentos prévios dos alunos, deve-se utilizar um mapa mental, um esquema conceitual ou uma entrevista por meio de questionamento sobre as ideias que os aluno tem acerca do tema. Com os conhecimentos prévios levantados, promover situações-problemas introdutórias que, devem envolver o tópico a ser ensinado. Essas situações-problemas podem ser propostas através de simulações computacionais, vídeos, problemas do cotidiano, entre outros.

Em seguida, o conhecimento a ser ensinado/aprendido deve ser apresentado, respeitando a diferenciação progressiva, podendo ser através de uma breve exposição seguida de uma atividade colaborativa com posterior discussão em grande grupo.

Como próximo passo, e da mesma maneira de apresentação, retomar os aspectos mais gerais e estruturantes do conteúdo em uma nova apresentação com nível mais alto de complexidade, ou seja, as situações-problemas deverão ser propostas em um nível crescente de complexidade. Importante ressaltar que os alunos devem interagir socialmente, negociando significados com a mediação do professor. Como atividade sugere-se a construção de mapa conceitual.

Nesse momento, recomenda-se realizar uma avaliação somativa que pode ser a construção de um mapa conceitual ou questões/situações que impliquem compreensão, evidenciem captação de significados e alguma capacidade de transferência.

A seguir, dar continuidade ao processo de diferenciação progressiva, retomando as características mais relevantes, buscando a reconciliação integradora. Como nas anteriores, pode ser feito através de uma breve exposição oral, leitura de um texto, recurso computacional, audiovisual, entre outros.

A avaliação do desempenho dos alunos deve ser feita durante toda a implementação da UEPS, através de anotações de tudo que possa evidenciar a aprendizagem significativa do conteúdo. Essa avaliação deverá ter a mesma relevância (peso) que a somativa.

O êxito da UEPS se concretizará se, na avaliação dos alunos, existir evidências de aprendizagem significativa, destacando que o foco deve estar no progresso do aluno ao longo da sequência, e não em seus resultados finais.

Vale destacar que nenhuma UEPS é engessada, pois a mesma depende do professor, dos alunos e da instituição de ensino. A seguir será descrito o desenvolvimento e a aplicação da UEPS do autor deste trabalho.

CAPÍTULO 4 - O DESENVOLVIMENTO E A APLICAÇÃO DA UEPS

4.1 Estratégias Utilizadas

Para identificar as concepções alternativas e os conhecimentos prévios dos alunos acerca do tema vetor, na situação inicial da UEPS, propõe-se a construção, individualmente, de um mapa mental. O ponto de partida para a construção é o questionamento, por parte do professor, a respeito de tudo que o aluno associa ao termo vetor. Espera-se que ao final da aplicação da UEPS os alunos possam identificar grandezas obtidas através de operações com vetores.

A utilização de simuladores e de vídeos corrobora para a interação entre os alunos e as TIC. Os simuladores facilitam a matematização inicial das operações, podendo o aluno alterar parâmetros para facilitar a compreensão das mesmas.

As situações-problemas em ordem crescente de complexidade colaboram com o processo de diferenciação progressiva, buscando uma perspectiva integradora.

Em seguida são apresentados os passos da UEPS com as justificativas das estratégias e recursos utilizados. Os passos relacionados foram aplicados em sala, resultando na UEPS contida no apêndice deste trabalho.

1. ***Atividade Inicial*:** como o conhecimento prévio é a variável que mais influencia na aprendizagem significativa, através da construção de um mapa, busca-se identificar as associações mentais feitas pelos alunos acerca do tema. O professor poderá motivar os alunos através de um questionamento.
2. ***Situação-problema inicial*:** Nessa etapa o professor deverá elaborar situações-problemas, em nível bem introdutório, que façam parte da realidade de seus alunos. Essas situações-problemas darão sentidos aos novos conhecimentos, ou seja funcionarão como organizadores prévios. O objetivo dessa etapa é a motivação do estudo do tema, ou seja, não há a necessidade imediata de ensiná-los. Para isso, aplica-se questões abertas com posterior

debate entre os alunos, mediado pelo professor, para acordarem na melhor solução, sem a necessidade de se chegar a respostas. Relacionar uma simples caminhada à escola com a grandeza vetorial deslocamento é ancorar novos conhecimentos aos prévios através de organizadores (MOREIRA, 2011). Ainda nesta etapa, os alunos utilizam os simuladores para familiarizarem com a matematização das operações iniciais com vetores.

3. ***Revisão*****:** através de uma breve exposição oral, o professor deve apresentar o conteúdo a ser ensinado/aprendido, no caso, adição vetorial, levando em conta a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

4. ***Aprofundando Conhecimentos***: em continuidade, retomar os aspectos mais gerais e promover maior complexidade entre as operações com grandezas vetoriais, ou seja, o professor deverá mediar um debate entre todos os alunos acerca do jogo corrida de vetores, de maneira a negociarem significados, além da interação social. Ainda nesta etapa, o professor promove novas situações-problemas, respeitando o nível crescente de complexidade, de modo a promover a diferenciação progressiva. Ao término desta etapa, os alunos estarão familiarizados com as operações adição e subtração de vetores.

5. ***Aprofundando e consolidando conhecimentos*****:** uma nova situação-problema de complexidade ainda maior deve ser proposta para que, através de interação e negociação de significados entre os alunos e, com a mediação do professor, haja uma captação e ancoragem de novos conhecimentos aos já existentes. Nessa etapa as operações de produto escalar e produto vetorial são apresentadas.

6. ***Avaliação individual*****:** Todas as etapas anteriores constituem a avaliação formativa, ou seja, toda a dinâmica dos alunos é avaliada, pois o aluno faz parte do processo de aprendizagem. Nessa etapa os alunos são incitados a construírem um mapa conceitual e, é na análise de cada mapa que o professor identifica a captação de novos significados por parte do aluno.

7. ***Aula expositiva dialogada integradora final*****:** nessa etapa, o professor deverá retomar todo o conteúdo da UEPS, revendo principalmente o mapa conceitual final e comparando-o com o inicial. Ressaltar a necessidade da compreensão das grandezas vetoriais bem como suas operações nas situações-

problemas reais do nosso dia a dia e, por fim, destacar as dificuldades ainda existentes.

8. *Avaliação final em sala de aula*: os alunos deverão, individualmente, confeccionar um texto avaliando as estratégias utilizadas na aplicação da UEPS.

9. *Avaliação da UEPS como Instrumento de Aprendizagem Significativa*: Deverá estar baseada nos comentários feitos pelos alunos nos debates realizados na sala de aula, nas situações-problemas, nos mapas conceituais, na lista de exercícios, na produção de vídeo, na interpretação do jogo e na avaliação individual. A mesma será exitosa se demonstrar que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora foram processos simultâneos e responsáveis pela organização hierárquica na estrutura cognitiva do aluno.

10. *Avaliação da UEPS pelo professor*: Deverá ser feita em função dos resultados obtidos nas duas etapas anteriores. Se necessário, reformular as atividades.

4.1 Relato da Aplicação da UEPS

A aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa se deu no primeiro bimestre de 2016, em turma única do primeiro ano do Ensino Médio na Escola “De Grau em Grau COC”, na cidade de São José do Rio Pardo. Essa turma tem quatro aulas semanais de Física e, no modelo tradicional e de acordo com a apostila dos alunos, o tema vetor é apresentado em oito aulas, ou seja, a UEPS não promoveu atraso de conteúdo. A frequência dos alunos é bem alta, em torno de 95%. A sala é composta por 30 alunos que, na sua grande maioria (80%), fizeram o Ensino Fundamental na própria instituição. Apesar disso, foi relatado pelos alunos que, no ano anterior a professora de Ciências do Ensino Fundamental II[8], não havia sequer comentado a respeito do tema, fato que não ocorreu nos anos anteriores.

[8] Corresponde do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental

O relato da aplicação da UEPS foi dividido por aulas que, serão descritas a seguir.

1ª aula - Atividade Inicial: Inicialmente foi explicado aos alunos as estratégias que seriam adotadas para apresentação do conteúdo sobre vetores. O professor, após uma breve explicação sobre mapa mental, solicitou que cada aluno, individualmente, fizesse a construção tendo como tema central a palavra vetor e o entregasse ao final da aula. A dificuldade por parte dos alunos foi notória e de se esperar, uma vez que, segundo eles, nunca tinham ouvido sobre o tema. Um dos mapas está representado na Figura 32 a seguir:

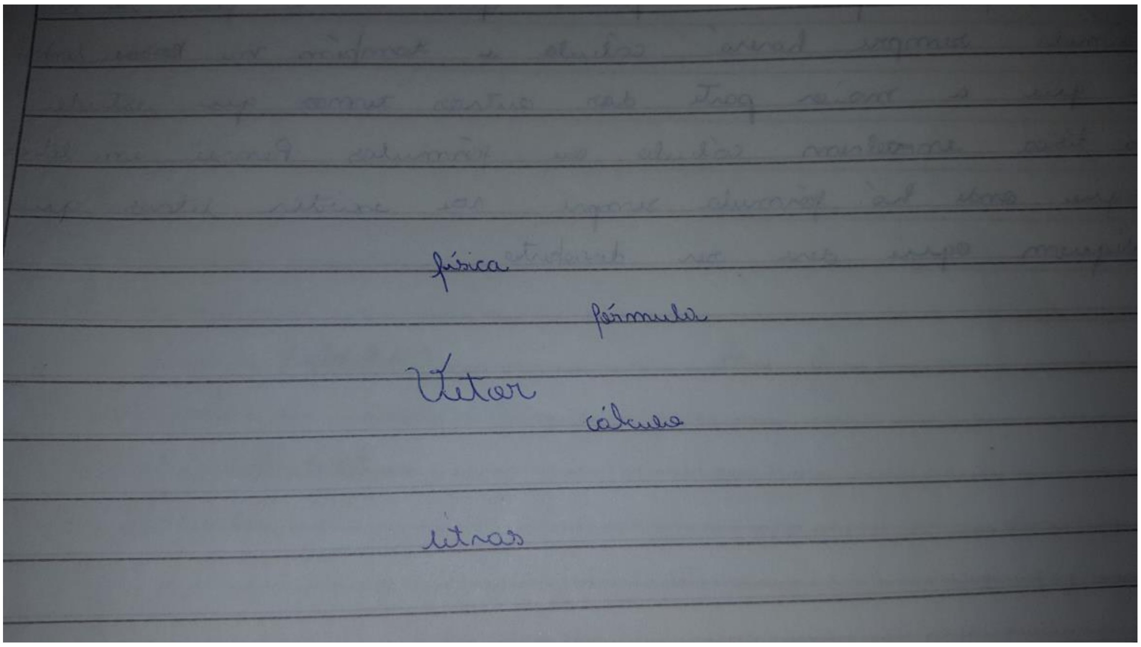


Figura 32 Mapa mental de um aluno

2ª aula – Situação-problema inicial: Essa etapa teve como objetivo motivar o estudo do tema. No início da aula, o professor solicitou que os alunos se dividissem em seis grupos de cinco alunos cada. Em seguida, entregou para cada grupo uma situação-problema, conforme exemplo no Apêndice B. Cada grupo deveria discutir a melhor solução para o seu problema. Quando todos os grupos já haviam encerrado, abriu-se um debate, mediado pelo professor, entre todos os grupos acerca das soluções que cada grupo havia chegado. Em momento algum, houve a necessidade de chegarem a uma resposta. Os alunos solicitaram fazer a apresentação de suas soluções na lousa, conforme registrado na Figura 33. No final da aula todos os grupos entregaram suas considerações acerca da situação proposta.

Figura 33 Alunos apresentando as soluções que obtiveram das situações-problemas

Como a próxima aula aconteceria na semana seguinte e a internet era acessível pela totalidade dos alunos, o professor solicitou algumas tarefas:

1.Os alunos deveriam reunir em grupos, conforme já feito na sala de aula, e assistir o vídeo: *Introdução a vetores e escalares* da Khan Academy[9]. Esse vídeo é bem sucinto e retrata os aspectos escalares e vetoriais das grandezas físicas deslocamento e velocidade.

2.Explorarem o simulador do PhET[10] *Interactive Simulations da University of Colorado,* de modo a começarem a familiarizar com a operação da adição vetorial e, como estímulo, deveriam confirmar o resultado do que foi acordado

[9] Vídeo que retrata a diferença entre grandezas escalares e vetoriais. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cTEOSRXdVG0

[10] PhET é um programa desenvolvido para aprimorar o ensino, através de simulações das disciplinas física, química, biologia e matemática. As simulações são ferramentas interativas que ajudam na compreensão dos alunos na hora de relacionar certos fenômenos estudados em livros com a vida real. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

no debate em sala de aula, referente a resolução das situações-problemas iniciais.

Exercício: A figura adiante mostra o mapa de uma cidade em que as ruas retilíneas se cruzam perpendicularmente e cada quarteirão mede 100 metros. Você caminha pelas ruas a partir de sua casa, na esquina A, até a casa de sua avó, na esquina B. Dali segue até a sua escola, situada na esquina C.

A) Qual a menor distancia que você caminha entre a sua casa e a escola?

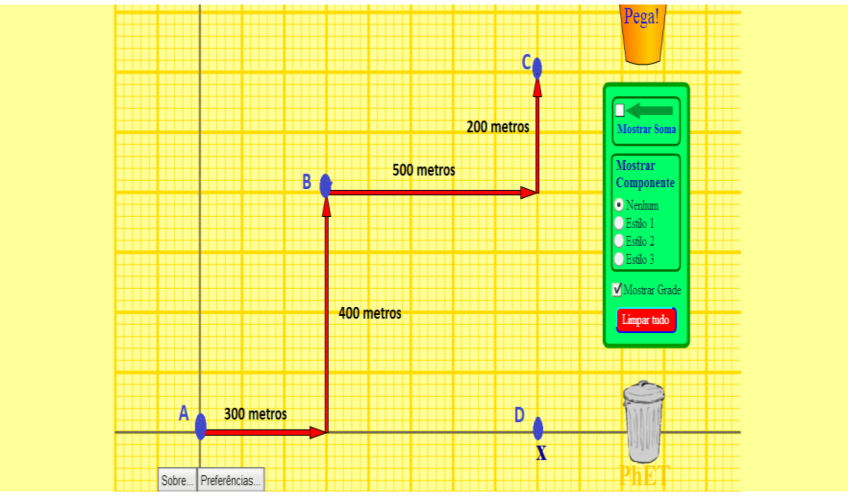


Figura 34 Simulação baseada na situação-problema inicial desenvolvida por um aluno

Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

De acordo com o problema, a pessoa sai de A, vai até B e de B, vai até C. Como não é possível caminhar por dentro dos quarteirões, é necessário seguir as delimitações destes. Portanto, a menor distância, seguindo por linhas retas ou recortadas, será de 700 metros no primeiro percurso (de A a B), como mostrado na simulação, em que as linhas retas valem 300 e 400 metros. O mesmo acontece no percurso de B para C, de modo que, novamente, a menor distância caminhada seja de 700 metros, também mostrado na simulação como linhas reta de 500 e 200 metros. Por fim, a distância total caminhada pela pessoa é de 700 metros + 700 metros = 1.400 metros ou 1,4 quilômetros.

B) E a distância em linha reta?

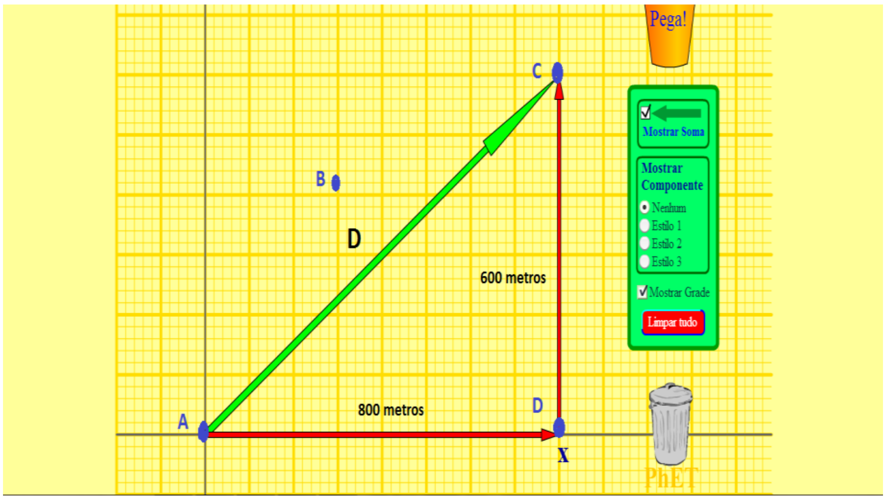


Figura 35 Simulação baseada na situação-problema inicial desenvolvida por um aluno

Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

Pedindo a distância em linha reta, a questão requer um vetor que una diretamente os pontos A e C, ou seja, a menor distância possível entre a saída do aluno e a escola, não sendo necessário levar o trajeto (A até B, B até C) em conta, uma vez que o exercício quer apenas o referente aos pontos de início e fim. Desse modo, é possível montar um triângulo de Pitágoras, de catetos 800 e 600 metros, sendo a hipotenusa o vetor que indica esta distância entre os pontos A e C, demonstrada na simulação. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que esta é igual a 1.000 metros ou 1 quilometro. Obs.: O simulador utiliza como medida para cada "quarteirão" cinco unidades, sendo que os módulos dos vetores foram dados nesta unidade. Porém, de acordo com o exercício, cada quarteirão mede 100 metros e, para efetuar as contas com os valores do exercício, multiplicamos cada unidade por 20, de modo que cada quarteirão passasse a valer 100 unidades, equivalente a 100 metros. Os 300 metros, 400 metros, 500 metros e 200 metros da primeira simulação foram dados, no simulador, como 15, 20,25 e 10, respectivamente. Na segunda simulação, os 800 metros e os 600 metros foram dados como 40 e 30, e a resultante destes, a distância de 1000 metros, foi dada com 50.

2.Colaborativamente, deveriam confeccionar um texto, justificando se as conclusões a que chegaram na sala de aula foram ou não satisfatórias. A entrega desses textos para o professor foi feita por e-mail ou entregue em mãos na aula seguinte.

3. Cada grupo deveria criar um vídeo, com atuação pessoal dos próprios alunos, para tentar solucionar a situação-problema do Apêndice C.

Os objetivos dessa etapa são que, além de servir como organizador prévio na busca de uma ponte entre os conhecimentos prévios e os conhecimentos a serem ensinados nas próximas etapas, sirva também como instrumento de interação pessoal e de estímulo à criatividade.

3ª e 4ª aulas – Revisão: Essa etapa iniciou com a apresentação e explicação, pelos alunos, da confecção dos vídeos produzidos por eles, focando a relação com o tema da UEPS. Em seguida, o professor ministrou uma miniaula expositiva, abordando os tópicos: a diferença entre grandezas escalares e vetoriais, notação, representação, produto de escalar por vetor, relações trigonométricas no triângulo retângulo, componentes de um vetor no R^2, vetor unitário, adição, vetor deslocamento e vetor velocidade. O professor destacou a importância da soma vetorial de duas grandezas, tais como a velocidade, no traçado de um avião, levando-se em conta a velocidade do avião em relação ao ar e a velocidade do vento; da mesma forma que o movimento de um barco depende da velocidade da correnteza. Além disso, ressaltou os possíveis valores da soma de dois vetores. Em seguida, o professor solicitou que em grupos, já pré determinados, os alunos resolvessem uma lista de exercícios, conforme exemplo no Apêndice D. A avaliação de desenvolvimento dessa lista, serviu para o professor identificar a aprendizagem até o momento. Como dever de casa, foi solicitado aos alunos que, em trios, jogassem o jogo C*orrida de vetores: vacina contra o raciocínio aristotélico*[11], conforme orientações contidas no artigo referenciado. Ao término dessa “brincadeira”, cada trio de jogadores (alunos) deveria confeccionar um texto correlacionando o jogo com as operações com grandezas vetoriais. O mesmo foi entregue em mãos para o professor na aula seguinte, conforme relato a seguir:

[11] Antiga brincadeira com papel quadriculado e canetas coloridas que simula uma corrida de automóveis. Artigo publicado na revista Física na Escola v.10, n. 1, 2009 por Paulo Murilo Castro de Oliveira do IF da UFF. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol10/Num1/a08.pdf

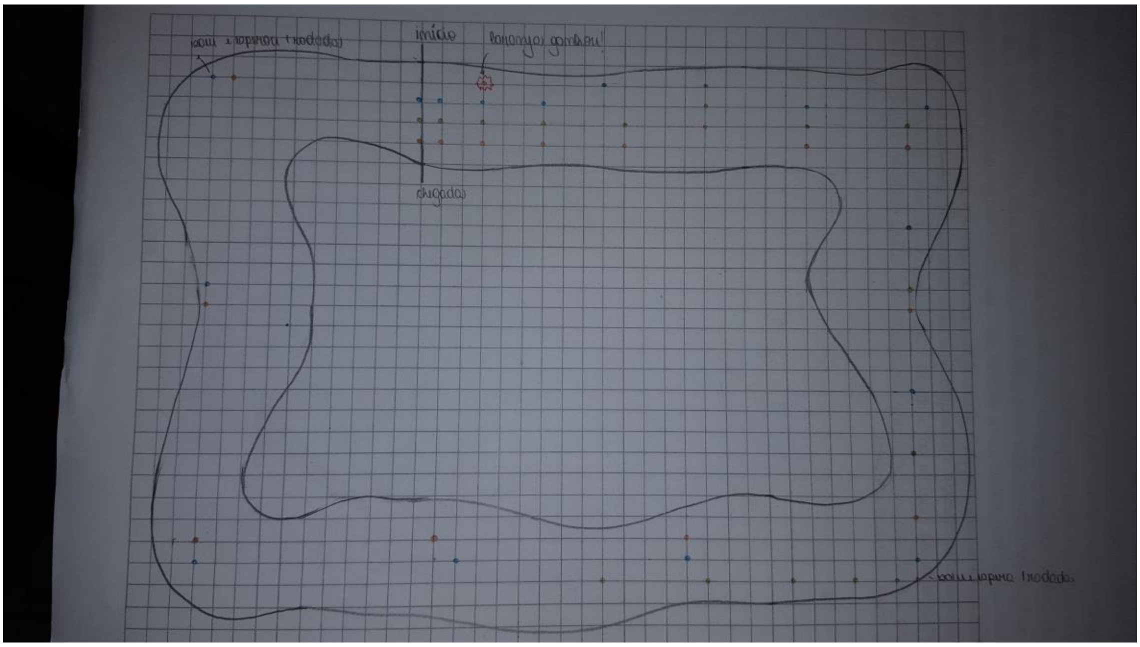


Figura 36 Desenvolvimento dos alunos no jogo “Corrida de Vetores”

“O jogo, apesar de no início ser ligeiramente complicado de entender e de se acostumar com as jogadas, é uma interessante e dinâmica maneira de familiarizar o aluno com as operações vetoriais. Após o engajamento com o jogo, este passa a se tornar quase intuitivo, assim como a utilização de vetores que representam os movimentos dos carros. Desse modo, o aluno acaba por utilizar e realizar operações com vetores quase sem perceber. Assim, o contato com esta matéria se torna mais agradável, uma vez que o aprendizado foi através de um jogo, e possibilita diversas comparações e analogias com situações cotidianas”.

Vale destacar que um dos trios foi orientado pelo professor que jogassem com seus familiares, devido a impossibilidade de se encontrarem.

5ª e 6ª aulas – Aprofundando Conhecimentos: No início, o professor mediou um debate entre todos alunos, acerca do jogo corrida de vetores, afim de relacioná-lo com o tema da UEPS e, promover a conclusão, por parte dos alunos que, uma nova operação com vetores se fez necessária, a subtração de vetores. Em seguida, o professor promoveu uma nova situação-problema, conforme exemplo no Apêndice E. Novamente um debate entre os grupos de alunos, mediado pelo professor, afim de acordarem na solução mais interessante para cada situação-problema e perceberem que na nova situação-problema existem duas grandezas relevantes, Força e Torque e que as mesmas são diferentes. Como dever de casa, o professor solicitou aos alunos que assistissem o vídeo explicativo sobre *Produto Escalar x Produto Vetorial*[12] da Khan Academy e, em seguida, que redigissem um texto explicando como se obtém o módulo (intensidade) de cada grandeza tratada na sala de aula, ressaltando as operações com vetores utilizadas. Os textos foram encaminhados via e-mail para o professor.

7ª aula – Aprofundando e Consolidando Conhecimentos: o professor iniciou a aula fazendo uma breve exposição sobre as operações produto escalar e produto vetorial. Em seguida, destacou a determinação dos módulos (intensidade) das grandezas Força[13], Trabalho[14] e Torque[15]. Não se tratou de simplesmente apresentar as expressões matemáticas (fórmulas), mas sim as operações vetoriais envolvidas: força = produto de um escalar (massa) por um vetor (aceleração); trabalho = *produto escalar* entre dois vetores (força e deslocamento) e torque = *produto vetorial* entre dois vetores (força e vetor posição ou braço). O objetivo foi destacar a importância das operações com vetores.

8ª aula – Avaliação Individual: o professor solicitou aos alunos que, individualmente, fizessem a construção de um *mapa conceitual*[16] acerca do tema central *vetor*. Para isso, poderiam fazê-lo numa folha avulsa ou utilizar o software livre *CMap Tools*[17]. Esta atividade não foi de surpresa.

---

[12] Vídeo que retrata as operações produto escalar e produto vetorial da Khan Academy. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tkILA12G5jw

[13] Força é uma ação entre corpos, que tem como função alterar o estado cinemático ou promover deformação de corpos. É uma grandeza vetorial, ou seja, apresenta módulo, direção e sentido.

[14] Trabalho é uma medida da energia transferida pela aplicação de uma força ao longo de um deslocamento

[15] Torque é a grandeza que está associada à capacidade de uma força girar um objeto. É uma grandeza vetorial, ou seja, apresenta módulo, direção e sentido.

[16] Mapas conceituais são diagramas indicando relações entre conceitos ou entre palavras. Para saber mais acesse: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf

[17] CmapTools é uma ferramenta para elaborar esquemas conceituais e representá-los graficamente, ou seja, é um programa que lhe auxilia a desenhar mapas conceituais Leia mais em: http://www.baixaki.com.br/download/cmaptools.htm#ixzz429yV8Idr

9ª aula - Aula expositiva dialogada integradora final: nessa etapa, o professor retomou todo o conteúdo da UEPS, revendo principalmente o mapa conceitual final e comparando-o com o inicial. Ressaltou a necessidade da compreensão das grandezas vetoriais bem como suas operações nas situações-problemas reais do nosso dia a dia e, por fim, destacou as dificuldades ainda existentes.

Importante destacar a participação efetiva dos alunos em todos os passos da sequência. Os mesmos se apresentaram extremamente interessados nos debates em sala de aula, bem como nas realizações das atividades solicitadas como tarefa de casa. A aplicação da UEPS foi muito satisfatória, pois não houve qualquer rejeição por parte dos alunos e, o único imprevisto, conforme já mencionado, foi a improvisação na execução do jogo por um dos trios que, devido à dificuldade de se reunirem, jogaram com seus familiares. Os resultados serão apresentados no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS

Como sabemos, só há aprendizagem significativa por parte dos alunos se os mesmos permitirem, ou seja, são eles que decidem se querem ou não aprender. Essa turma de 1ª série do Ensino Médio, da Escola De Grau em Grau – COC de São José do Rio Pardo – SP, se mostrou interessada na nova metodologia apresentada.

Os alunos foram desafiados a participarem do processo ensino-aprendizagem em todos os passos da UEPS, através da produção de materiais como mapa mental, resolução de situações-problemas, confecções de textos explicativos, produção de vídeo, utilização de simulador, participação nos debates, no jogo, e confecção de mapa conceitual.

No desenvolvimento e aplicação dessa UEPS foram respeitados alguns princípios que, segundo Moreira (2010), são essenciais para uma aprendizagem significativa crítica, como:

1. Princípio do conhecimento prévio: aprender a partir do que já sabemos. O levantamento do conhecimento acerca do tema central, foi fundamental para elaborar as situações-problemas.
2. Princípio da interação social e do questionamento: aprender ou ensinar com perguntas ao invés de respostas. As situações-problemas tiveram um papel fundamental na aquisição de novos significados pelos alunos e, o jogo e a produção de vídeo contribuiu para a interação entre os alunos.
3. Princípio da não centralidade do livro texto: aprender a partir de distintos materiais educativos. A tecnologia faz parte do cotidiano dos alunos e, por isso, se torna uma ferramenta de alto valor instrucional, quando bem utilizada.
4. Princípio do aprendiz como preceptor/representador: aprender que somos preceptores e representadores do mundo. A participação dos alunos no processo de aprendizagem é um fator motivador para a aprendizagem.
5. Princípio do conhecimento como linguagem: a linguagem está totalmente implicada em todas as tentativas humanas de perceber a realidade;
6. Princípio da não utilização do quadro de giz: aprender a partir de distintas estratégias de ensino. A utilização de jogo e conforme já citado, o uso

da tecnologia, seja na produção de vídeo, no uso de simuladores, foram muito proveitosos na contribuição para a aprendizagem.

7. Princípio do abandono da narrativa: repetir a narrativa de outra pessoa não estimula a compreensão. A importância da participação ativa dos alunos no processo como motivador e facilitador da aprendizagem.

8. Princípio da aprendizagem pelo erro: o ser humano aprende corrigindo seus erros. A participação ativa dos alunos na produção de vídeos e o uso de simuladores, contribuíram para que os possíveis erros fossem corrigidos.

Ao comparar o mapa mental solicitado na atividade inicial, cujo objetivo era que os alunos externalizassem o conhecimento já existente, com o mapa conceitual solicitado na avaliação individual, percebe-se que a aprendizagem significativa foi alcançada, ou seja, houve alterações nos significados já existentes na estrutura cognitiva do aluno. Vale destacar que o mapa mental inicial de alguns alunos ficaram apenas com o tema central, ou seja, ausência de subsunçores. O mapa mental apresentado neste trabalho mostra alguns subsunçores não diferenciados e o mapa conceitual final deixa evidente a aquisição de novos significados, conforme a Figura 37.

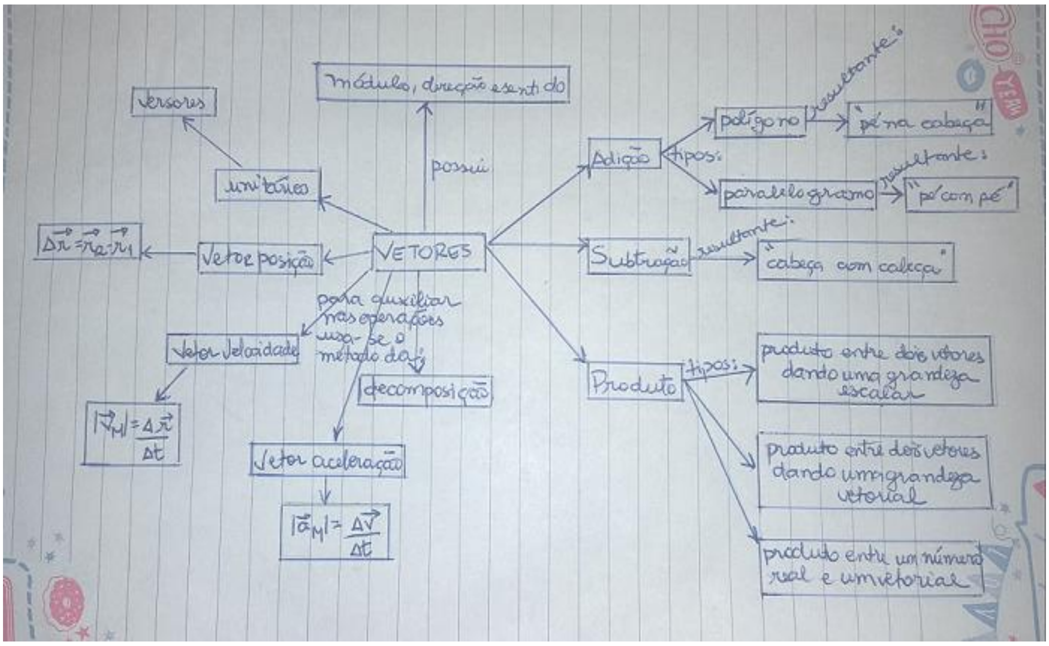


Figura 37 Mapa conceitual final de um aluno

A diferenciação progressiva e a reconciliação integradora, ficaram evidentes no decorrer da sequência, não só nas soluções das situações-problemas, como nos textos explicativos elaborados pelos alunos. O jogo e a produção de vídeo contribuíram não só para a reconciliação integradora como também para a interação social entre os alunos, fator esse, relevante para o ensino centrado no aluno.

A prática do jogo *Corrida de Vetores*, além de promover interação entre os alunos, facilitou na percepção de grandezas físicas, bem como as operações entre vetores, conforme relato do aluno A em 28/03/2016, reproduzido na íntegra:

"O jogo se baseia nos vetores da Física que, envolve noções de velocidade e aceleração. Os carros vão deixando representações de vetores idênticos, vetores opostos e até operações que formam um polígono ou um paralelogramo".

Outro ponto relevante do jogo, foi o elogio recebido pela coordenação dos pais que tiveram que jogar com o filho, os mesmos parabenizaram a estratégia do professor.

A avaliação do aluno se fez em todos os passos da sequência e qualitativamente, uma vez que a aprendizagem é um processo e não um produto final. O foco da avaliação foi a participação e desenvoltura dos alunos nas atividades propostas e na comparação de seus mapas mental e conceitual, onde se buscou evidências da aprendizagem significativa.

A sequência apresentada e aplicada foi muito bem recebida pelos alunos, todos manifestaram por escrito e, abaixo alguns relatos reproduzidos na íntegra.

"*Não é de minha preferência estes métodos alternativos, entretanto, o que nos foi aplicado surtiu efeito. Não que eu não tenha gostado, é que prefiro o tradicional." (Aluno A – 29/03/2016).*

"*O projeto proposto pelo professor, teve como função quebrar a tradição de como são dadas as aulas. Esse método é mais interessante, pois exige uma maior autonomia do aluno, ou seja, o professor aguça a criatividade dos alunos e dá as coordenadas para que os mesmo cheguem ao conhecimento. Um outro* *aspecto positivo, é fazer com que os alunos utilizem a internet para contribuir com a aprendizagem.” (Aluno B – 29/03/2016).*

“Nesse método, o professor não nos entrega a matéria pronta, e sim, nos faz pensar, raciocinar e aprendermos a partir do que já sabemos.” *(Aluno C – 29/03/2016).*

Pelos relatos, se observa que os objetivos foram alcançados, ou seja, os alunos perceberam a importância de sua atuação no processo de aprendizagem.

Quanto ao produto final, vale ressaltar que ajustes devem ser feitos de acordo com a realidade da escola, uma vez que a UEPS não é engessada. A turma em que a UEPS foi aplicada apresentou um ótimo aproveitamento acerca do tema central. A princípio o autor deste trabalho achou excessiva as atividades propostas na sequência, mas se surpreendeu com a desenvoltura dos alunos.

Um dos pontos positivos mais relevantes, foi o empenho dos alunos na participação de todas as etapas da UEPS e, com isso, o resultado foi extremamente fantástico, e as considerações finais são apresentadas a seguir.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve o objetivo de relatar o desenvolvimento e a aplicação de uma nova estratégia de ensino, aprendizagem e avaliação. A sequência seguiu os passos da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa proposta por Marco Antônio Moreira, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

A tentativa inicial foi de motivar o aluno a aprender, melhorando sua qualidade na aquisição de novos conhecimentos. Tudo que é novo promove um certo medo, pois não se sabe os resultados que serão obtidos. Com a turma trabalhada não foi diferente, inicialmente, ou seja, na primeira aula, a resistência foi grande, mas a partir da segunda a aceitação foi fantástica, muito empenho e participação nas atividades.

A diferença da aprendizagem significativa proposta neste trabalho, com a aprendizagem mecânica, é que na primeira o aluno faz parte do processo e na segunda ele é só um receptor, um dos motivos para a resistência inicial.

O fato de os alunos participarem efetivamente no processo contribui não só no seu processo de aprendizagem como também no de todo o grupo e, com isso, o educando se sente valorizado e a consequência é a motivação. Como o aluno está inserido no processo, a internalização significativa de novos conhecimentos de maneira a alterar os significados já existentes na sua estrutura cognitiva, ocorre de uma maneira perceptível não só para o aluno, como também para o professor.

Na apreciação dos mapas inicial e final, ficou evidente o êxito da UEPS, uma vez que, demonstrou a evolução na estrutura cognitiva do aprendiz, e isso foi gratificante para o professor que é o autor deste trabalho.

É importante destacar que a grande maioria das escolas ainda praticam a aprendizagem mecânica, inclusive na que foi aplicado o presente trabalho. O autor deste trabalho espera que essa sequência possa ser útil para alguns professores, ressaltando que, nenhuma UEPS é definitiva, pois a mesma deve ser moldada e alterada conforme a realidade da instituição, do professor e dos alunos.

E para finalizar, vale ressaltar que a receptividade foi fantástica não só pelos alunos como também pela instituição de ensino, e com isso, o professor adquiriu carta branca para desenvolvimento e aplicação de outras UEPS em qualquer conteúdo da disciplina de Física que achar conveniente.

REFERÊNCIAS

BARNETO, A. G.; MARTÍN, M. R. G.; **Entornos constructivistas de aprendizaje basados em simulaciones informáticas**. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. v. 5, n. 2, p. 304-322, 2006. Disponível em: <reec.uvigo.es/volumenes/volumen5/ART6_Vol5_N2.pdf>. Acesso em: 20/01/2016.

BOULOS, P.; Oliveira, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**, 2ed.- São Paulo: McGraw-Hill, 1987, p. 3 – 98.

BUTKOV, E. **Física Matemática**, Tradução de João Bosco Fernandes de Carvalho; Revisão Técnica de Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro. 1988. 725 p.

CHAGAS, A.S. **O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Vetores no Ensino Médio**. Rio de Janeiro. IMPA, 2014. 85p. Dissertação. Mestrado Nacional Profissional em Matemática, Rio de Janeiro 2014.

CROWE, M.J. **A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System**, Notre Dame: Notre Dame University Press, 1967. Disponível em: <http://worrydream.com/refs/Crowe-HistoryOfVectorAnalysis.pdf>. Acesso em: 10/01/2016.

DE JONG, T.; LINN, M. C.; ZACHARIA, Z. C. **Physical and Virtual Laboratories in Science and Engineering Education**. Science, v. 340, n. 6130, p. 305–308, 2013. Acesso em: 10/02/2016.

DORIER, J.L. **A General outline of the Genesis of vector space theory**, Hist. Math, 22, vol. 3, 1995, p. 227-261. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245>. Acesso em: 10/01/2016.

GRIFFITHS, D.J. **Mecânica Quântica**. Tradução Lara Freitas; revisão técnica Marcelo Mulato. 2ed.. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2011.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física: Mecânica,** vol.1, Tradução de André Soares de Azevedo; Revisão Técnica de Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro. 2002. 356 p.

________**Fundamentos da Física: Eletromagnetismo,** vol.3, Tradução de André Soares de Azevedo; Revisão Técnica de Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro. 2003. 227 p.

JAMBERSI, A.B.; SILVA, S. **A Sutileza dos Quatérnions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 2, e2313 (2016). <Disponível em:http://www.scielo.br/pdf/rbef/v38n2/1806-1117-rbef-38-02-e2313.pdf>. Acesso em: 10/04/2016.

KARAM, R. A. S. **Matemática como estruturante e física como motivação: uma análise de concepções sobre as relações entre matemática e física**. ANAIS do VI ENPEC Florianópolis, SC. 2007. Disponível em:<http://www.fae.ufmg.br/abrapec/viempec/entrar.html>. Acesso em: 23/03/2016.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tardução Cyro de Carvalho Patarra. Revisão Técnica Wilson Castro Ferreira, Silvio Pregnolatto. Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Campinas. 1994.1178 p.

LIMA, Elon Lages. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de janeiro, 2001.

MAGALHÃES, E.J.S. **Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?** 2013. 32 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão,2013.

MARINHO, F.C.V., et al **Análises Preliminares do uso de Mathlets no Ensino e Aprendizagem de Álgebra Vetorial.** Anais do XV ENDIPE – ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente: políticas e práticas educacionais, Belo Horizonte, 2010.

MARTINS, A. A.; GARCIA, N. M. D.; BRITO, G. S. **O ensino de Física e as novas tecnologias de informação e comunicação: uma análise da produção recente**. In: XIX SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 2011, Manaus. Anais... Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xix/sys/resumos/T0580-1.pdf>. Acesso em: 02/12/2015.

MOREIRA, M.A. & MASINI, E.A.F.S. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausube**l. São Paulo, Editora Moraes. 1982.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa: A Visão Clássica. Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências**. n. 1, 70 p., 2009. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios6.pdf>. Acesso em: 14/12/2015.

______. **O que é afinal Aprendizagem Significativa?** (Meaningful learning in concept maps). 2012. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigmapasport.pdf Acesso em: 12/02/2016.

______. **Uma abordagem cognitivista ao ensino de física; a teoria de aprendizagem de David Ausubel como sistema de referência para a organização do ensino de ciências**. Porto Alegre: Ed. Da Universidade, UFRGS, 1983.

______. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

______. **Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas - UEPS**. Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, n. 2, p. 43–63, 2011b. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acesso em: 23/10/2015.

MUÑOZ, C. M. A. **Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática.** Medelín: Universidad Nacional de Colombia, 2013. 64 p. Dissertação (Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales) - Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín - Facultad de Ciencias, Medelín, Colombia, 2013

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de Física Básica**. Vol.3. 1ed. São Paulo: Blucher, 1997. 323p.

PATRÍCIO, R.S.: ALMEIDA, M.S.L. **As Múltiplas Representações no Ensino de Vetores**. Anais do II CNEM e IX EREM Ijuí, RS. 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC43.pdf. Acesso em: 12/02/2016.

PRADELLA, M. **Estudo de conceitos de termodinâmica no ensino médio por meio de UEPS.** Porto Alegre: UFRGS, 2014. 120 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) - Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

RIBEIRO, B. N. M.; CARVALHO, C. V. A. **A Proposal of Potentially Meaningful Material for Teaching of Vector Mechanics**. Revista Creative Education, Delaware, v. 5, 1929-1935, 2014.

SANCHEZ, E. **Tensores**. Rio de Janeiro: Interciência, 2007. 293p.

SANTOS, C.A.B. **Os Registros de Representação Semiótica como Ferramenta Didática no Ensino da Disciplina de Física**. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 06, n. 1, p.1-14, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/10.5007-1981-1322.2011v6n1p1/21131. Acesso em: 14/04/2016.

SILVA, C. C. **Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético**. Campinas, 2002. 250 f. Tese (Doutorado em Ciêncas – Instituto de Física Gleb Wataghin – Universidade de Campinas, Campinas.

SOUZA, P. A. L.; OLIVEIRA, G. S.; BENITE, C. R. M.; BENITE, A. M. C. **Estudos sobre a ação mediada no ensino de Física em ambiente virtual**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 29, p. 420–447, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/23029> Acesso em: 18/10/2015.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda., 1987.302 p.

STEWART, J. **Cálculo**. vol.2, Tradução Antonio Carlos Moreti, Antonio Carlos Martins. 5ed.; Thompson Learning. São Paulo.2006

STUDART, N. Simulação, games e gamificação no ensino de Física. In: XXI SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 2015.

TAVARES, R. **Aprendizagem significativa e o ensino de ciências**. Ciências & Cognição, v. 13, p. 94-100, mar. 2008. Disponível em: <http://cienciasecognicao.tempsite.ws/revista/index.php/cec/article/download/687/464>. Acesso em: 18/01/2016.

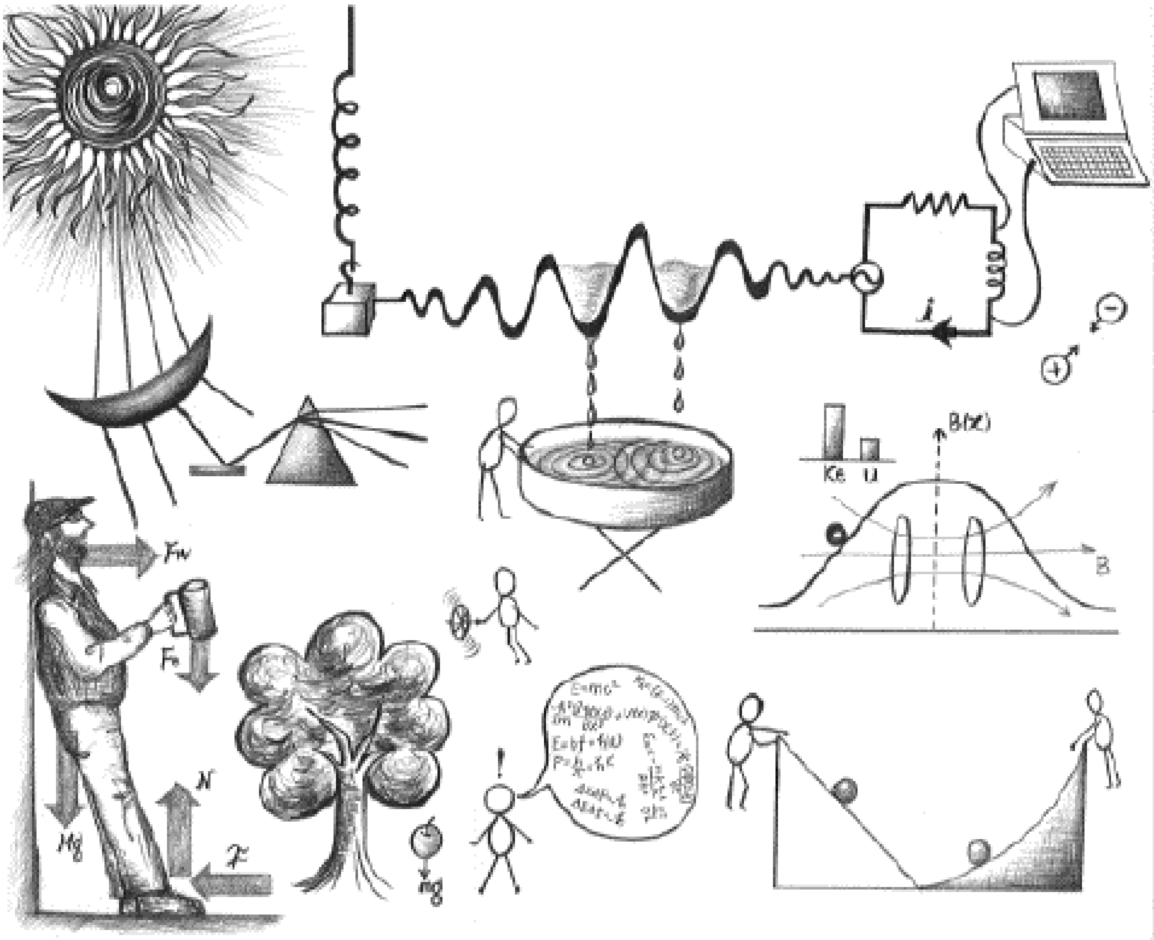
TIPLER, P.A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol.1. tradução e revisão técnica Paulo Machado Mors. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

________. **Física para Cientistas e Engenheiros.** Vol. 2. tradução e revisão técnica Paulo Machado Mors. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

APÊNDICE A: O PRODUTO EDUCACIONAL

PROPOSTA DE UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA (UEPS) PARA ENSINAR OPERAÇÕES COM GRANDEZAS FÍSICAS VETORIAIS

Antônio Fernando Reis



http://www.inape.org.br/wp-content/uploads/2012/04/Physics.gif

São Carlos – SP

2016

APRESENTAÇÃO

Este material é o resultado do trabalho desenvolvido por Antônio Fernando Reis sob a orientação do Prof. Dr. Nelson Studart e coorientação da Profa. Dra. Priscila Domingues de Azevedo no Programa de Pós-Graduação PPG-PROFIS-São Carlos da Universidade Federal de São Carlos no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a aplicação de uma sequência didática, por meio de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa, proposta por Marco Antônio Moreira, baseada na Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel, para ensinar operações com vetores, comumente trabalhadas na Geometria Analítica. A UEPS é o objeto educacional e sua melhoria se faz necessária conforme a realidade dos professores, dos alunos e das instituições de ensino.

OS VETORES

Inicialmente é necessário destacar que até o final do século XIX não existia um conjunto de regras que se pudesse chamar de álgebra linear. Nos séculos XVII e XVIII os matemáticos intuíam uma ligação da álgebra com a geometria e que os números complexos poderiam ser considerados como uma entidade matemática legítima.

Os estudos realizados na mecânica, hidrodinâmica, óptica teórica e na teoria eletromagnética no século XIX, contribuíram para o desenvolvimento de métodos de análise de novas entidades que atualmente chamamos “vetores”.

Como a geometria vetorial é um método eficiente e as ideias vetoriais são representadas geometricamente, a relação entre a geometria e a teoria do espaço vetorial, para a maioria das pessoas, parecia óbvia (DORIER,1995, p.233).

Segundo Crowe (1967) os conceitos fundamentais da álgebra linear, que são a soma e a subtração de vetores, já eram sugeridos na antiga Grécia, mas é possível que as primeiras concepções de vetores estejam relacionadas a operação da adição pelo método do paralelogramo e, possivelmente, apresentadas em um trabalho de Aristóteles (384-322 A.C.). A análise vetorial surgiu, de fato, após 1831.

A álgebra vetorial que conhecemos hoje foi desenvolvida por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) num conjunto de notas de aulas feito para seus alunos da Universidade de Yale.

As funções vetoriais servem como base para a utilização do cálculo vetorial. Segundo Stewart (2006), uma função é uma regra que associa cada elemento do seu domínio a um elemento de sua imagem. A função vetorial apresenta um conjunto de números reais como seu domínio e, um conjunto de vetores como sua imagem.

Segundo Righeto (1982), os vetores que dependem do tempo são muito usados na mecânica de partículas e, aqueles que dependem de coordenadas espaciais, formam campos vetoriais. Os campos vetoriais mais comuns são os elétricos e magnéticos no espaço, os de velocidade de um fluido em movimento, entre outros. Os mais simples é o campo conservativo, também chamado de campo gradiente, que são obtidos a partir de uma única função escalar.

Algumas quantidades usuais, associadas a vetores podem ser definidas através de coordenadas cartesianas ortogonais, como:

1. O comprimento de um vetor: $|u| = u = \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$
2. Projeção sobre eixos coordenados: $u_x = u\cos(u,i)$; $u_y = u\cos(u,j)$ e $u_z = u\cos(u,k)$
3. Projeção em uma direção arbitrária: $OP = u_s = u_x = u\cos\psi = u_x = u\cos(s,i); u_y = u\cos(s,j); u_z = u\cos(s,k)$
4. Produto escalar de dois vetores: $u \cdot v = uv\cos(u,v) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$
5. Produto vetorial: $u \times v = \left(u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y\right)i + \left(u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z\right)j + \left(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x\right)k$

MAS AFINAL, PARA QUE SERVEM OS VETORES?

Várias grandezas físicas, como por exemplo temperatura, massa, volume, área, entre outras, são descritas, completamente, pela sua magnitude (intensidade). Tais grandezas são chamadas de escalares. Porém, outras grandezas requerem para sua caracterização, além da magnitude, a orientação. Essas grandezas são chamadas de vetoriais.

Na linguagem Matemática, segundo Boulos (1987), vetor é uma classe de equipolência de V^n segmentos de retas orientados, em que V^n representa um espaço vetorial de *n* dimensões. Os vetores tem aplicação em várias áreas, tanto técnica quanto científica, como por exemplo na Física, na Engenharia, na Economia, entre outras, onde são os elementos base para construção do Cálculo Vetorial.

Na Física, os vetores descrevem um importante papel na caracterização de várias grandezas como: deslocamento, velocidade, aceleração, fluxo elétrico, campo elétrico, campo magnético, força magnética, entre outras. Vale destacar que as componentes de um vetor físico dependem do sistema de coordenadas utilizado para descrevê-lo.

No cotidiano, vale ressaltar a importância dos vetores no momento de se empurrar um móvel dentro de casa, um automóvel na rua, atravessar um rio com correnteza, descrever a trajetória de uma aeronave em voo, localização dada por um GPS (Global Positioning System), entre outros.

Como a utilização do conceito e, principalmente das operações com vetores no cotidiano é vasta, há a necessidade de se ter na sala de aula uma atenção especial à esse conteúdo e, por isso, é recomendável a utilização de uma UEPS baseada em uma Teoria de Aprendizagem Significativa, utilizando as Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC)[18].

O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (NTIC)

A relevância das teorias de aprendizagens como referenciais teóricos para o uso de softwares voltados ao Ensino de Física se deve a grande quantidade de trabalhos relacionados as NTIC nos periódicos *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *Ciência & Educação*, *Investigações em Ensino de Ciências*, *Revista Brasileira de Ensino de Física* e *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*.

[18] O termo NTIC é mais utilizado quando se refere à Web 2.0 ou a serviços tecnológicos relacionados ao uso da Internet, em oposição a outras tecnologias, como a televisão ou o CD e DVD por exemplo.

A relação entre a Educação e as NTIC tem sido investigada, segundo Martins (2011), através de diferentes perspectivas, o que favorece uma quantidade grande de enfoques.

Segundo Tavares (2008), a simulação computacional possibilita o entendimento de sistemas complexos para estudantes de diversas idades e níveis de aprendizagem, pois o mesmo soluciona os sistemas matemáticos iniciais, permitindo ao estudante aprofundar-se no momento adequado, ou seja, o aluno estabelece o seu próprio ritmo de aprendizagem.

Alguns autores, Martin et al (2006), afirmam que a aprendizagem será mais efetiva quando há a interferência do professor simultaneamente ao processamento das informações pelos objetos educacionais.

Assim, Souza et al. (2012) propõem que a utilização de modelos computacionais seja feita a partir de ferramentas que utilizem as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) concomitantemente com a mediação do professor.

Para os *nativos digitais*[19] a utilização de simuladores, animações, vídeos, enfim objetos educacionais digitais (OED), facilita o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, o torna protagonista de sua aprendizagem.

Segundo De Jong (2013), quanto maior a necessidade de abstração por parte dos alunos, mais relevantes e eficientes se tornam as ferramentas virtuais.

Como as TIC estão cada vez mais próximas do cotidiano dos alunos, é necessário que estes signos e instrumentos sejam inseridos nas escolas, de maneira a tornar o ensino de Física mais atraente e relevante.

Neste trabalho o simulador utilizado foi o do PhET[20] *Interactive Simulations da University of Colorado*, conforme figura abaixo.

[19] Marc Prensky nomeou como *nativos digitais* aqueles que cresceram inseridos numa cultura com acesso às tecnologias digitais, enquanto aqueles de gerações anteriores que, embora não tenham crescido nesta cultura, tiveram que interagir com estas tecnologias em algum momento, são nomeados *imigrantes digitais* (STUDART, 2015).

[20] PhET é um programa desenvolvido para aprimorar o ensino, através de simulações das disciplinas física, química, biologia e matemática. As simulações são ferramentas interativas que ajudam na compreensão dos alunos na hora de relacionar certos fenômenos estudados em livros com a vida real. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

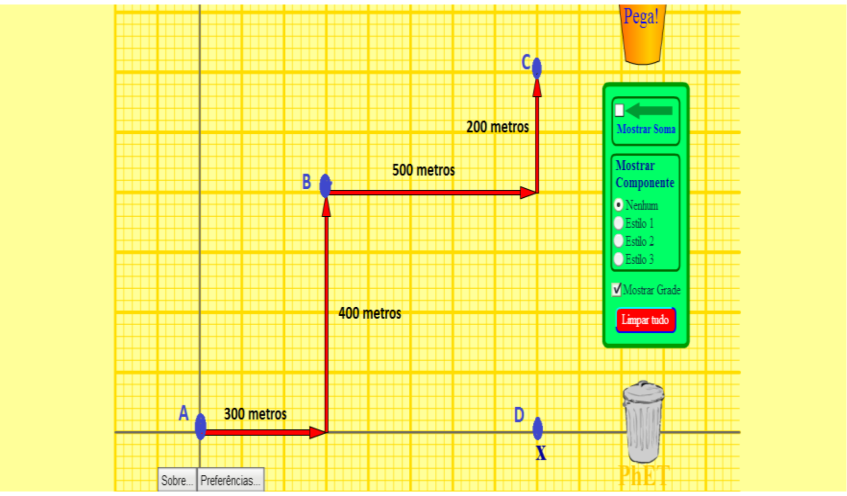


Figura 38 Página do simulador do PhET. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

As simulações do PhET envolvem os alunos através de um ambiente intuitivo, estilo jogo, podendo aprender através da descoberta e da exploração.

Outro recurso utilizado foi a criação e construção de vídeos explicativos acerca do tema central das situações-problemas. O objetivo não foi somente a interação entre os alunos, como também a utilização das tecnologias para construção do conhecimento científico, ou seja, a internet não serve apenas para participação em redes sociais. Outro recurso interessante para interação entre os alunos e compreensão da necessidade das operações vetoriais foi a prática do jogo *Corrida de Vetores*[21]. Os alunos podem necessitar de uma ajuda do professor na interpretação das regras. Esse jogo colabora com as interpretações de velocidade e aceleração vetoriais.

Para saber mais, acesse:

BARNETO, A. G.; MARTÍN, M. R. G.; **Entornos constructivistas de aprendizaje basados em simulaciones informáticas**. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. v. 5, n. 2, p. 304-322, 2006. Disponível em: <reec.uvigo.es/volumenes/volumen5/ART6_Vol5_N2.pdf>. Acesso em: 20/01/2016.

BOULOS, P.; Oliveira, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**, 2ed.- São Paulo: McGraw-Hill, 1987, p. 3 – 98.

[21] A corrida de vetores é uma antiga brincadeira com papel quadriculado e canetas coloridas que simula uma corrida de automóveis. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol10/Num1/a08.pdf

CROWE, M.J. **A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System**, Notre Dame: Notre Dame University Press, 1967. Disponível em: <http://worrydream.com/refs/Crowe-HistoryOfVectorAnalysis.pdf>. Acesso em: 10/01/2016.

DE JONG, T.; LINN, M. C.; ZACHARIA, Z. C. **Physical and Virtual Laboratories in Science and Engineering Education**. Science, v. 340, n. 6130, p. 305–308, 2013. Acesso em: 10/02/2016.

DORIER, J.L. **A General outline of the Genesis of vector space theory**, Hist. Math, 22, vol. 3, 1995, p. 227-261. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245>. Acesso em: 10/01/2016.

MARTINS, A. A.; GARCIA, N. M. D.; BRITO, G. S. **O ensino de Física e as novas tecnologias de informação e comunicação: uma análise da produção recente**. In: XIX SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 2011, Manaus. Anais... Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xix/sys/resumos/T0580-1.pdf>. Acesso em: 02/12/2015

RIGHETO, A. **Vetores e Geometria Analítica**, 3ed.- São Paulo, SP, IBEC, 1982, p. 65-128.

SOUZA, P. A. L.; OLIVEIRA, G. S.; BENITE, C. R. M.; BENITE, A. M. C. **Estudos sobre a ação mediada no ensino de Física em ambiente virtual**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 29, p. 420–447, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/23029> Acesso em: 18/10/2015.

STEWART, J. **Cálculo**. vol.2, Tradução Antonio Carlos Moreti, Antonio Carlos Martins. 5ed.; Thompson Learning. São Paulo.2006

TAVARES, R. **Aprendizagem significativa e o ensino de ciências**. Ciências & Cognição, v. 13, p. 94-100, mar. 2008. Disponível em: <http://cienciasecognicao.tempsite.ws/revista/index.php/cec/article/download/687/464>. Acesso em: 18/01/2016.

Para você aluno:

<http://efisica.if.usp.br/mecanica/ensinomedio/vetores/vetores/>

<http://brasilescola.uol.com.br/fisica/operacoes-com-vetores.htm>

<http://www.ime.unicamp.br/~marcio/hpteia/vect01/vect05.htm>

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Vetor_(matem%C3%A1tica)>

<http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Cinematica/Vetores.php>

A ESCOLHA DO TEMA

O tema escolhido para este trabalho foi o de ensinar operações vetoriais através de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). A relevância do tema está no fato de muitas grandezas físicas apresentarem magnitudes oriundas de operações com vetores.

Conforme destaca Santos (2011), nem sempre o professor percebe de fato, onde estão as dificuldades dos seus alunos na realização da atividade de conversão relacionada ao problema de congruência semântica, ou seja, converter da linguagem natural para a algébrica, simbólica ou gráfica. Destaca ainda, que essa falta de percepção é devida ao mal preparo dos professores.

Uma pesquisa realizada na Universidade Estadual do Pará, de autoria de Patrício e Almeida (2011), constata que a dificuldade mais significativa dos alunos quanto ao estudo dos vetores, está no registro figural, corroborando com o trabalho desenvolvido por Santos (2011), entretanto, o autor deste trabalho acredita que a maior dificuldade esteja na álgebra.

O conceito de vetor é amplamente trabalhado na Física e para Chagas (2014) deveria, também, ser abordado na Matemática do Ensino Médio. É notório a preocupação tanto da Física como da Matemática em melhorar a aprendizagem dos alunos de Ensino Médio, no que diz respeito ao conteúdo vetores. Para tal, o planejamento quanto a metodologia e recursos a serem utilizados, devem estar em foco. Algumas sequências didáticas, amparadas em teorias de aprendizagem, permitem a flexibilidade de acordo com a realidade da instituição de ensino, do professor e dos alunos.

FERRAMENTAS UTILIZADAS

O objeto educacional deste trabalho é a UEPS e, sua melhoria se faz necessária conforme a realidade dos professores, dos alunos e das instituições de ensino. A UEPS não deve ser engessada, mas seus passos devem ser obedecidos para que se tenha êxito no final do processo, ou seja, que a aprendizagem significativa seja alcançada.

O uso das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação é de alta relevância, uma vez que faz parte da realidade de muitos alunos e o tema a ser ensinado trata de operacionalização matemática entre vetores.

Para se chegar a aprendizagem significativa, novos significados devem ser incorporados, interativamente, aos já existentes e, então, reorganizados na estrutura cognitiva do aprendiz.

O uso de mapas conceituais enfatiza conceitos e relações entre conceitos, obedecendo a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Segundo Muller (2013), os mapas conceituais podem ser usados como recurso didático de avaliação, assim como instrumento de metacognição, isto é, aprender a aprender. O processo de aprendizagem não necessita de sofrimento intelectual, mas sim do seu exercício.

Os alunos podem apresentar dificuldade, na aplicação da UEPS, no momento da construção dos mapas e, daí a necessidade de uma instrução mais detalhada por parte do professor. Já no uso de simuladores, produção de vídeos e prática do jogo, espera-se que ao alunos tenham habilidade.

REFERENCIAL TEÓRICO

A Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, explica teoricamente, o processo de aprendizagem sob uma visão cognitivista.

Para Ausubel, aprendizagem é a organização e incorporação do material na estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, a aprendizagem é significativa se for caracterizada pela interação cognitiva entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio.

Essa interação entre novas ideias e expressões simbólicas não ocorre com qualquer ideia prévia, mas sim, com o conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do ser que aprende e, além disso, a interação deve ser não-literal, ou seja, o que é incorporado é a substância do novo conhecimento e não as palavras usadas para expressá-las. A partir dessa interação, que é um processo dinâmico, os novos conhecimentos passam a ter significado para o sujeito e os já existente adquirem novos significados.

O conhecimento pré-existente, supracitado, denominado por Ausubel, de ideia-âncora ou *subsunçor*[22], pode ser um conceito, uma imagem, um símbolo já significativo, uma proposição ou um *modelo mental*[23]. Segundo Moreira (2011), o atributo isolado, se fosse possível, mais importante para a aprendizagem significativa de novos conhecimentos, na visão de Ausubel, é o conhecimento prévio, i.e., os subsunçores já existentes na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

Segundo Moreira e Masini (1982), Ausubel classifica a estrutura cognitiva como uma estrutura hierárquica de conceitos, onde os elementos mais específicos são ligados e assimilados nos elementos mais gerais, ou seja, o cérebro humano é extremamente organizado. A estrutura é dinâmica e se caracteriza por dois processos principais, a *diferenciação progressiva e* a *reconciliação integradora.*

A diferenciação progressiva é o processo pelo qual os subsunçores, através de sucessivas interações, vão adquirindo novos significados, cada vez mais diferenciados e capazes de servirem como âncoras para novas aprendizagens significativas.

A reconciliação integradora consiste integrar significados, ou seja, restabelecer a hierarquia entre os subsunçores e os novos conhecimentos. Moreira (2012) destaca que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora são processos da dinâmica da estrutura cognitiva e considerados como princípios programáticos do conteúdo ensinado.

Basicamente, são duas as condições para aprendizagem significativa. Primeiro o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender, ou seja, relacionar os novos conhecimentos, de forma não-arbitrária e não-literal aos seus conhecimentos prévios. Segundo, o material, i.e., o livro, a aula, o problema, não podem ser significativos e sim potencialmente significativos, pois o significado está nas pessoas e não nos materiais.

A CONSTRUÇÃO DA UEPS

A construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) deve seguir os passos descritos a seguir. *Atividade Inicial*: como o conhecimento prévio é a

[22] A palavra "subsunçor" não existe em português, trata-se de uma tentativa de traduzir a palavra inglesa "subsumer" (MOREIRA, 2009, p.8).

[23] Segundo Johnson-Laird, modelo mentais são como blocos de construção cognitivos que podem ser combinados e recombinados conforme necessário. Disponível em: http://www.if.ugrgs.br/public/ensino/N3/moreira.htm. Acesso em: 10/01/2016.

variável que mais influencia na aprendizagem significativa, através da construção de um mapa, busca-se identificar as associações mentais feitas pelos alunos acerca do tema. O professor poderá motivar os alunos através de um questionamento.

Situação-problema inicial: Nessa etapa o professor deverá elaborar situações-problemas, em nível bem introdutório, que façam parte da realidade de seus alunos. Essas situações-problemas darão sentidos aos novos conhecimentos, ou seja funcionarão como organizadores prévios. O objetivo dessa etapa é a motivação do estudo do tema, ou seja, não há a necessidade imediata de ensiná-los. Para isso, aplica-se questões abertas com posterior debate entre os alunos, mediado pelo professor, para acordarem na melhor solução, sem a necessidade de se chegar a respostas. Relacionar uma simples caminhada à escola com a grandeza vetorial deslocamento é ancorar novos conhecimentos aos prévios através de organizadores (MOREIRA, 2011). Ainda nesta etapa, os alunos utilizam os simuladores para familiarizarem com a matematização das operações iniciais com vetores.

Revisão: através de uma breve exposição oral, o professor deve apresentar o conteúdo a ser ensinado/aprendido, no caso, adição vetorial, levando em conta a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Aprofundando Conhecimentos: em continuidade, retomar os aspectos mais gerais e promover maior complexidade entre as operações com grandezas vetoriais, ou seja, o professor deverá mediar um debate entre todos os alunos acerca do jogo corrida de vetores, de maneira a negociarem significados, além da interação social. Ainda nesta etapa, o professor promove novas situações-problemas, respeitando o nível crescente de complexidade, de modo a promover a diferenciação progressiva. Ao término desta etapa, os alunos estarão familiarizados com as operações adição e subtração de vetores.

Aprofundando e consolidando conhecimentos: uma nova situação-problema de complexidade ainda maior deve ser proposta para que, através de interação e negociação de significados entre os alunos e, com a mediação do professor, haja uma captação e ancoragem de novos conhecimentos aos já existentes. Nessa etapa as operações de produto escalar e produto vetorial são apresentadas.

Avaliação individual: Todas as etapas anteriores constituem a avaliação formativa, ou seja, toda a dinâmica dos alunos é avaliada, pois o aluno faz parte do processo de aprendizagem. Nessa etapa os alunos são incitados a construírem um mapa conceitual e, é na análise de cada mapa que o professor identifica a captação de novos significados por parte do aluno.

Aula expositiva dialogada integradora final: nessa etapa, o professor deverá retomar todo o conteúdo da UEPS, revendo principalmente o mapa conceitual final e comparando-o com o inicial. Ressaltar a necessidade da compreensão das grandezas vetoriais bem como suas operações nas situações-problemas reais do nosso dia a dia e, por fim, destacar as dificuldades ainda existentes.

Avaliação final em sala de aula: os alunos deverão, individualmente, confeccionar um texto avaliando as estratégias utilizadas na aplicação da UEPS.

Avaliação da UEPS como Instrumento de Aprendizagem Significativa: Deverá estar baseada nos comentários feitos pelos alunos nos debates realizados na sala de aula, nas situações-problemas, nos mapas conceituais, na lista de exercícios, na produção de vídeo, na interpretação do jogo e na avaliação individual. A mesma será exitosa se demonstrar que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora foram processos simultâneos e responsáveis pela organização hierárquica na estrutura cognitiva do aluno.

Avaliação da UEPS pelo professor: Deverá ser feita em função dos resultados obtidos nas duas etapas anteriores. Se necessário, reformular as atividades.

Para saber mais, acesse:

CHAGAS, A.S. **O Geogebra como Ferramenta de Auxílio no Ensino de Vetores no Ensino Médio**. Rio de Janeiro. IMPA, 2014. 85p. Dissertação. Mestrado Nacional Profissional em Matemática, Rio de Janeiro 2014.

MOREIRA, M.A. & MASINI, E.A.F.S. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo, Editora Moraes. 1982.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa: A Visão Clássica. Subsídios Teóricos para o Professor Pesquisador em Ensino de Ciências**. n. 1, 70 p., 2009. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios6.pdf>. Acesso em: 14/12/2015.

______. **O que é afinal Aprendizagem Significativa?** Aula Inaugural do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 2012, Aceito para publicação, Qurriculum, La Laguna, Espanha, 2012.

______. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares**. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

______. **Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas - UEPS**. Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, n. 2, p. 43–63, 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acesso em: 23/10/2015.

______. **Teorias de Aprendizagem**. 2ªed. São Paulo: Ed. EPU, 2011.

MÜLLER, A. D. E.; MOREIRA, M. A. **Uso de mapas e esquemas conceituais em sala de aula.** Textos de Apoio ao Professor de Física, 2013, v. 24. n. 4.Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/muller_moreira_v24_n4.pdf>. Acesso em: 15/01/2016.

PATRÍCIO, R.S.: Almeida, M.S.L. **As Múltiplas Representações no Ensino de Vetores**. Anais do II CNEM e IX EREM Ijuí, RS. 2011. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC43.pdf. Acesso em: 12/02/2016.

SANTOS, C.A.B. **Os Registros de Representação Semiótica como Ferramenta Didática no Ensino da Disciplina de Física**. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 06, n. 1, p.1-14, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/10.5007-1981-1322.2011v6n1p1/21131. Acesso em: 14/04/2016.

A APLICAÇÃO DA UEPS

O relato da aplicação da UEPS foi dividido por aulas, descritas a seguir.

1ª aula - *Atividade Inicial*: Inicialmente foi explicado aos alunos as estratégias que seriam adotadas para apresentação do conteúdo sobre vetores. O professor, após uma breve explicação sobre mapa mental, solicitou que cada aluno, individualmente, fizesse a construção tendo como tema central a palavra vetor e o entregasse ao final da aula. A dificuldade por parte dos alunos foi notória e de se esperar, uma vez que, segundo eles, nunca tinham ouvido sobre o tema.

2ª aula – *Situação-problema inicial*: Essa etapa teve como objetivo motivar o estudo do tema. No início da aula, o professor solicitou que os aluno se dividissem em seis grupos de cinco alunos cada. Em seguida, entregou para cada grupo uma situação-problema, conforme exemplo no Apêndice B. Cada grupo deveria discutir a melhor solução para o seu problema. Quando todos os grupos já haviam encerrado, abriu-se um debate, mediado pelo professor, entre todos os grupos acerca das soluções que cada grupo havia chegado. Em momento algum, houve a necessidade de chegarem a uma resposta. No final da aula todos os grupos entregaram suas considerações acerca da situação proposta. Como a próxima aula aconteceria na semana seguinte e a internet era acessível pela totalidade dos alunos, o professor solicitou algumas tarefas:

* Os alunos deveriam reunir em grupos, conforme já feito na sala de aula, e assistir o vídeo: *Introdução a vetores e escalares*[24] da Khan Academy, esse vídeo é bem sucinto e mostra a diferença entre grandezas escalares e grandezas vetoriais. Esse vídeo é bem sucinto e retrata os aspectos escalares e vetoriais das grandezas físicas deslocamento e velocidade.

* Explorarem o simulador do PhET[25] *Interactive Simulations da University of Colorado,* de modo a começarem a familiarizar com a operação da adição vetorial e, como estímulo, deveriam confirmar o resultado do que foi acordado no debate em sala de aula, referente a resolução das situações-problemas iniciais.

* Colaborativamente, deveriam confeccionar um texto, justificando se as conclusões a que chegaram na sala de aula foram ou não satisfatórias. A entrega desses textos para o professor foi feita por e-mail ou entregue em mãos na aula seguinte.

* Cada grupo deveria criar um vídeo, com atuação pessoal dos próprios alunos, para tentar solucionar a situação-problema do Apêndice C.

Os objetivos dessa etapa são que, além de servir como organizador prévio na busca de uma ponte entre os conhecimentos prévios e os conhecimentos a serem ensinados nas próximas etapas, sirva também como instrumento de interação pessoal e de estímulo à criatividade.

3ª e 4ª aulas – *Revisão*: Essa etapa iniciou com a apresentação e explicação, pelos alunos, da confecção dos vídeos produzidos por eles, focando a relação com o tema da UEPS. Em seguida, o professor ministrou uma miniaula expositiva, abordando os tópicos: a diferença entre grandezas escalares e vetoriais, notação, representação, produto de

---

[24] Vídeo que retrata a diferença entre grandezas escalares e vetoriais. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cTEOSRXdVG0

[25] PhET é um programa desenvolvido para aprimorar o ensino, através de simulações das disciplinas física, química, biologia e matemática. As simulações são ferramentas interativas que ajudam na compreensão dos alunos na hora de relacionar certos fenômenos estudados em livros com a vida real. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_pt_BR.html

escalar por vetor, relações trigonométricas no triângulo retângulo, componentes de um vetor no R^2, vetor unitário, adição, vetor deslocamento e vetor velocidade. O professor destacou a importância da soma vetorial de duas grandezas, tais como a velocidade, no traçado de um avião, levando-se em conta a velocidade do avião em relação ao ar e a velocidade do vento; da mesma forma que o movimento de um barco depende da velocidade da correnteza. Além disso, ressaltou os possíveis valores da soma de dois vetores. Em seguida, o professor solicitou que em grupos, já pré determinados, os alunos resolvessem uma lista de exercícios, conforme exemplo no Apêndice D. A avaliação de desenvolvimento dessa lista, serviu para o professor identificar a aprendizagem até o momento. Como dever de casa, foi solicitado aos alunos que, em trios, jogassem o jogo C*orrida de vetores: vacina contra o raciocínio aristotélico*[26]*,* conforme orientações contidas no artigo referenciado. Ao término dessa "brincadeira", cada trio de jogadores (alunos) deveria confeccionar um texto correlacionando o jogo com as operações com grandezas vetoriais. O mesmo foi entregue em mãos para o professor na aula seguinte.

5ª e 6ª aulas – *Aprofundando Conhecimentos*: No início, o professor mediou um debate entre todos alunos, acerca do jogo corrida de vetores, afim de relacioná-lo com o tema da UEPS e, promover a conclusão, por parte dos alunos que, uma nova operação com vetores se fez necessária, a subtração de vetores. Em seguida, o professor promoveu uma nova situação-problema, conforme exemplo no Apêndice E. Novamente um debate entre os grupos de alunos, mediado pelo professor, afim de acordarem na solução mais interessante para cada situação-problema e perceberem que na nova situação-problema existem duas grandezas relevantes, Força e Torque e que as mesmas são diferentes. Como dever de casa, o professor solicitou aos alunos que assistissem os vídeos explicativos sobre *Produto Escalar x Produto Vetorial*[27] da Khan Academy e, em seguida, que redigissem um texto explicando como se obtém o módulo (intensidade) de cada grandeza tratada na sala de aula, ressaltando as operações com vetores utilizadas. Os textos foram encaminhados via e-mail para o professor.

---

[26] Antiga brincadeira com papel quadriculado e canetas coloridas que simula uma corrida de automóveis. Artigo publicado na revista Física na Escola v.10, n. 1, 2009 por Paulo Murilo Castro de Oliveira do IF da UFF. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol10/Num1/a08.pdf

[27] Vídeo que retrata as operações produto escalar e produto vetorial da Khan Academy. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tkILA12G5jw

7ª aula – *Aprofundando e Consolidando Conhecimentos*: o professor iniciou a aula fazendo uma breve exposição sobre as operações produto escalar e produto vetorial. Em seguida, destacou a determinação dos módulos (intensidade) das grandezas Força[28], Trabalho[29] e Torque[30] Não se tratou de simplesmente apresentar as expressões matemáticas (fórmulas), mas sim as operações vetoriais envolvidas: força = produto de um escalar (massa) por um vetor (aceleração); trabalho = *produto escalar* entre dois vetores (força e deslocamento) e torque = *produto vetorial* entre dois vetores (força e vetor posição ou braço). O objetivo foi destacar a importância das operações com vetores.

8ª aula – Avaliação Individual: o professor solicitou aos alunos que, individualmente, fizessem a construção de um *mapa conceitual*[31] acerca do tema central *vetor*. Para isso, poderiam fazê-lo numa folha avulsa ou utilizar o software livre *CMap Tools*[32]. Esta atividade não foi de surpresa.

9ª aula - *Aula expositiva dialogada integradora final:* nessa etapa, o professor retomou todo o conteúdo da UEPS, revendo principalmente o mapa conceitual final e comparando-o com o inicial. Ressaltou a necessidade da compreensão das grandezas vetoriais bem como suas operações nas situações-problemas reais do nosso dia a dia e, por fim, destacou as dificuldades ainda existentes.

A a*valiação da UEPS como instrumento de aprendizagem significativa,* deverá estar baseada nos comentários feitos pelos alunos nos debates realizados na sala de aula, nas situações-problemas, nos mapas conceituais, na lista de exercícios, na produção de vídeo,

---

[28] Força é uma ação entre corpos, que tem como função alterar o estado cinemático ou promover deformação de corpos. É uma grandeza vetorial, ou seja, apresenta módulo, direção e sentido.

[29] Trabalho é uma medida da energia transferida pela aplicação de uma força ao longo de um deslocamento

[30] Torque é a grandeza que está associada à capacidade de uma força girar um objeto. É uma grandeza vetorial, ou seja, apresenta módulo, direção e sentido.

[31] Mapas conceituais são diagramas indicando relações entre conceitos ou entre palavras. Para saber mais acesse: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf

[32] CmapTools é uma ferramenta para elaborar esquemas conceituais e representá-los graficamente, ou seja, é um programa que lhe auxilia a desenhar mapas conceituais
Leia mais em: http://www.baixaki.com.br/download/cmaptools.htm#ixzz429yV8Idr

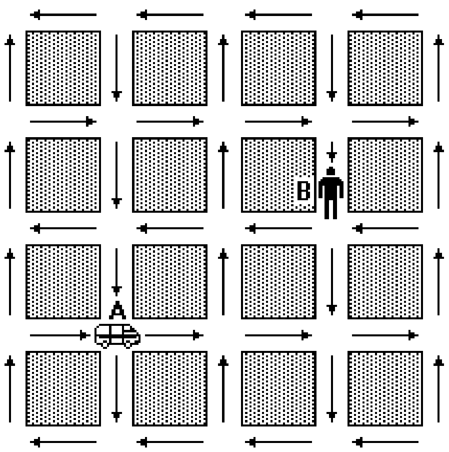
na interpretação do jogo e na avaliação individual. A mesma será exitosa se demonstrar que a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora foram processos simultâneos e responsáveis pela organização hierárquica na estrutura cognitiva do aluno.

Já a *avaliação da UEPS pelo professor*, deverá ser feita em função dos resultados obtidos nas duas etapas anteriores. Se necessário, reformular as atividades.

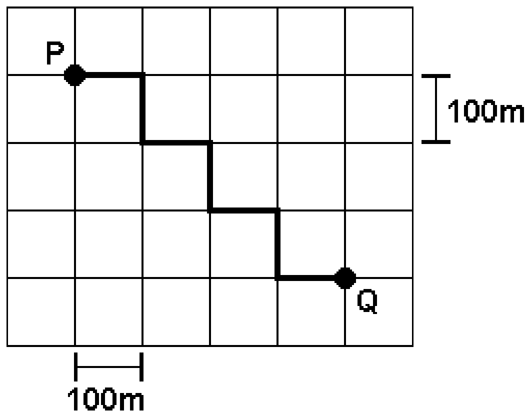
Os exemplos de situações-problemas utilizados na aplicação desta UEPS estão apresentados nos Apêndices B, C, D e E. Na semana seguinte ao término da aplicação desta UEPS, foi solicitado aos alunos que, individualmente, confeccionassem um texto relatando a opinião em relação às atividades desenvolvidas durante a aplicação desta UEPS.

APÊNDICE B: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS INICIAIS

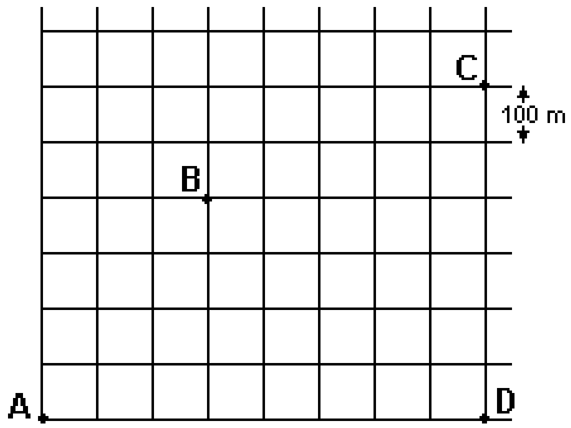
1**.** A figura a seguir representa um mapa de uma cidade com a direção das mãos do tráfego. Devido ao congestionamento, os veículos trafegam com a velocidade baixa e constante. Cada quadra desta cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro de outra rua). Uma ambulância localizada em A precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra em B, sem andar na contramão. a) Represente e determine a menor distância percorrida no percurso de A para B, obedecendo os sentidos das ruas, ou seja, a ambulância não pode trafegar na contramão b) Agora, represente e determine a menor distância entre a ambulância e o doente.



2**.** Num bairro, onde todos os quarteirões são quadrados e as ruas paralelas distam 100 m uma da outra, um aluno faz o percurso da sua casa (ponto P) até a escola (ponto Q) pela trajetória representada no esquema a seguir. a) Qual a distância percorrida pelo aluno? b) E qual seria a menor distância entre a casa do aluno e a escola?



3. A figura adiante mostra o mapa de uma cidade em que as ruas retilíneas se cruzam perpendicularmente e cada quarteirão mede 100 m. Você caminha pelas ruas a partir de sua casa, na esquina A, até a casa de sua avó, na esquina B. Dali segue até sua escola, situada na esquina C. a) Qual a menor distância que você caminha entre sua casa e a escola são? b) e a distância em linha reta?



APÊNDICE C: EXEMPLO DE CONFECÇÃO DE VÍDEO

Confeccionar um vídeo com atuação de todos os integrantes do grupo para solucionar o problema abaixo. Bom trabalho!!!!!

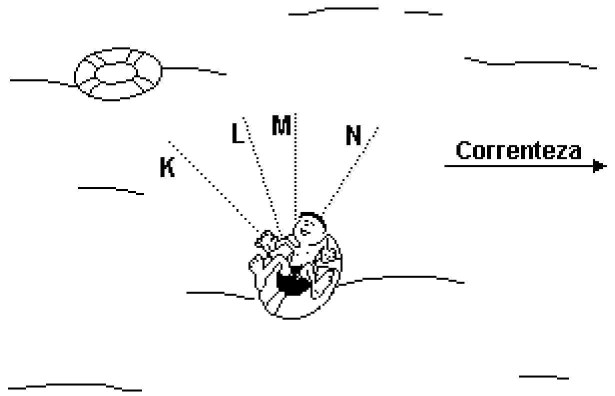
Um homem segue este itinerário: Parte de sua casa, percorre quatro quadras para leste, três quadras para o norte, três quadras para leste, seis quadras para o sul, três quadras para o oeste, três quadras para o sul, três quadras para o oeste, três quadras para o sul, duas quadras para leste, duas quadras para leste, duas quadras para leste, duas quadras para o sul, oito quadras para oeste, seis quadras o norte, e duas quadras para leste. Considerando que cada quarteirão mede 100 metros, a que distância e em que direção o homem está do seu lar?

Gabarito:

1. 583 m, sudoeste

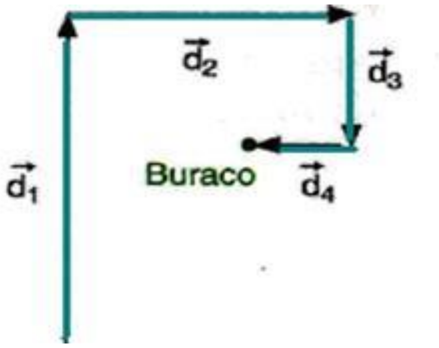
APÊNDICE D: EXEMPLO DE EXERCÍCIOS DE SALA

1. Um menino, em férias, flutua em uma boia que está se movimentando, levada pela correnteza de um rio. Num dado instante, a boia colide com uma pedra e começa a murchar. Como o menino não sabe nadar, entra em desespero até que, ao olhar para o lado avista uma outra boia, que flutua no mesmo rio a uma certa distância dele, que também está descendo com a correnteza. A posição das duas boias e o sentido da correnteza estão indicados na figura:



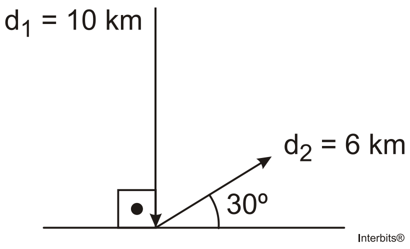
Considere que a velocidade da correnteza é a mesma em todos os pontos do rio. Nesse caso, para alcançar a segunda boia, em qual direção indicadas pelas linhas tracejadas o menino deverá nadar para não se afogar?

2. Um jogador de golfe necessita de quatro tacadas para colocar a bola no buraco. Os quatro deslocamentos estão representados na figura abaixo.



Sendo $d_1 = 15$ m, $d_2 = 6,0$ m, $d_3 = 3,0$ m e $d_4 = 1,0$ m, qual era a distância inicial da bola ao buraco, em metros?

3. Um caminhoneiro efetuou duas entregas de mercadorias e, para isso, seguiu o itinerário indicado pelos vetores deslocamentos d_1 e d_2 ilustrados na figura.



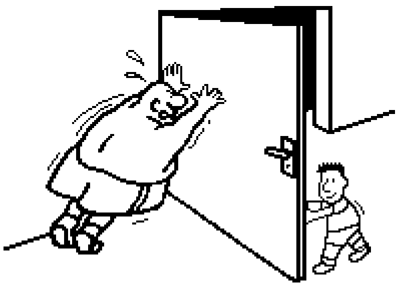
Para a primeira entrega, ele deslocou-se 10 km e para a segunda entrega, percorreu uma distância de 6 km. Ao final da segunda entrega, qual a distância que o caminhoneiro se encontra do ponto de partida?

Gabarito:

1. K
2. 13 m
3. 8,71 km

APÊNDICE E: EXEMPLOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS

1. Na figura a seguir suponha que o menino esteja empurrando a porta com uma força $\vec{F}_1$= 5N, atuando a uma distância d_1= 2 metros das dobradiças (eixo de rotação) e que o homem exerça uma força $\vec{F}_2$ de mesmo módulo, porém a uma distância de 10cm do eixo de rotação. Nestas condições, em qual sentido a porta irá se movimentar, abrindo ou fechando? Explique.



2. Para abrir uma porta, você aplica sobre a maçaneta, colocada a uma distância d da dobradiça, conforme a figura a seguir, uma força de módulo F perpendicular à porta. Para obter o mesmo efeito, qual o módulo da força que você deve aplicar em uma maçaneta colocada a uma distância d/2 da dobradiça desta mesma porta? Explique.