UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DAIANE ALICE HENRIQUE AMENT

INVARIANTES DE GERMES DE APLICAÇÕES

São Carlos
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DAIANE ALICE HENRIQUE AMENT

INVARIANTES DE GERMES DE APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática para obtenção do título de doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
Co-orientador: Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros.

São Carlos
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Daiane Alice Henrique, realizada em 19/04/2017:

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

P/

Prof. Dr. Juan Jose Nuno Ballesteros
UV

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
UEM

RGWik

Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique
USP

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
USP

Ao meu marido Andrews, com todo meu amor e minha gratidão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que guia meus caminhos e me auxilia em todos os momentos.

Agradeço ao meu marido Andrews, que sempre acreditou em mim mais do que eu mesma. Que sempre disse que meus objetivos seriam possíveis de serem alcançados e esteve ao meu lado em todos os momentos, me apoiando, me incentivando e me dando forças para continuar. Obrigada por acreditar nos meus sonhos e me ajudar a torná-los realidade. Essa conquista também é sua.

Agradeço todas as pessoas que oraram por mim para que tudo desse certo. Em especial agradeço aos meus pais José e Natalicia que me deram a vida e muito amor, aos meus irmãos Débora e Deivid que estão sempre comigo e ao meu sobrinho Henry que é a alegria da nossa família. Agradeço também a minha sogra Fátima e meu sogro Jaime (*in memoriam*) que deram a vida a uma pessoa tão especial para mim, meu marido Andrews que dá mais sentido aos meus dias, meu companheiro de todas as horas.

Agradeço ao professor João Nivaldo Tomazella por me aceitar como sua orientanda, por sempre me incentivar e por ter se tornado esse grande amigo. Obrigada por todos os ensinamentos e todos os conselhos.

Agradeço ao professor Juan José Nuño Ballesteros por ter me recebido tão bem durante minha estadia em Valência. Aprendi muito com sua forma de pesquisar, com sua forma de ensinar e com seu jeito humilde de ser.

Agradeço à professora Bruna Oréfice Okamoto pelo auxílio na realização deste trabalho e pelo cuidado na revisão.

Agradeço aos professores e funcionários da Universidade Federal de São Carlos e da Universidade de Valência.

Agradeço a todos familiares e amigos que direta ou indiretamente participaram e acreditaram na minha vitória.

Agradeço à Capes pelo auxílio financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, mostramos relações entre invariantes de germes de aplicações. Primeiro, consideramos um germe de função analítica $f:(X,0)\to(\mathbb{C},0)$ sobre uma singularidade determinantal isolada e apresentamos uma relação entre a obstrução de Euler de f e o número de Milnor determinantal de f. No caso particular em que $(X,0)$ é uma interseção completa com singularidade isolada, obtemos um modo simples de calcular a obstrução de Euler de f como a diferença entre dimensões de duas álgebras. Depois, trabalhamos com germes de aplicações $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$, onde $(X,0)$ é uma curva plana com singularidade isolada. Introduzimos o número de Milnor da imagem para estes germes de aplicações e apresentamos uma resposta positiva para a conjectura de Mond neste contexto. A conjectura de Mond propõe uma desigualdade entre outros dois invariantes, a $\mathscr{A}_e$-codimensão e o número de Milnor da imagem, para o caso de germes de aplicações $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^{n+1},0)$ quando as dimensões $(n,n+1)$ estão nas boas dimensões de Mather. A conjectura é verdadeira para $n=1,2$, e para os casos $n\geq 3$ é um problema em aberto.

Palavras-chave: obstrução de Euler de uma função, número de Milnor determinantal, singularidade determinantal isolada, $\mathscr{A}_e$-codimensão, número de Milnor da imagem, curvas singulares.

Abstract

In this work, we show relations between invariants of map germs. First, we consider an analytic function germ $f:(X,0)\to(\mathbb{C},0)$ on an isolated determinantal singularity and we present a relation between the Euler obstruction of f and the determinantal Milnor number of f. In the particular case where $(X,0)$ is an isolated complete intersection singularity, we obtain a simple way to calculate the Euler obstruction of f as the difference between the dimension of two algebras. After, we work with map germs $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$, where $(X,0)$ is a plane curve with isolated singularity. We introduce the image Milnor number to these map germs and we present a positive answer to the Mond's conjecture in this context. The Mond's conjecture proposes an inequality between two other invariants, the $\mathscr{A}_e$-codimension and the image Milnor number, in the case of map germs $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^{n+1},0)$ when the dimensions $(n,n+1)$ is in Mather's nice dimensions. The conjecture is true for $n=1,2$, and for the cases $n\geq 3$ is an open problem.

Keywords: Euler obstruction of a function, determinantal Milnor number, isolated determinantal singularity, $\mathscr{A}_e$-codimension, image Milnor number, curve singularities.

Sumário

Introdução

Em Teoria de Singularidades é comum associar invariantes a germes de aplicações e de variedades que reflitam as propriedades de tais germes. Dentre eles está um importante invariante, a saber, o número de Milnor. Este conceito foi introduzido por Milnor ([42]) para o caso de germes de hipersuperfícies com singularidade isolada, desde então, muitos autores buscam formas de generalizá-lo. H. A. Hamm ([35]) abordou o caso para interseções completas com singularidade isolada e obteve o número de Milnor neste caso. Posteriormente, Buchweitz e Greuel ([10]) definem este conceito para curvas com singularidade isolada. Recentemente, foi apresentada uma generalização do número de Milnor para o caso de singularidades determinantais isoladas, a qual foi estudada independentemente por vários autores, Damon, Pike ([15]), Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella ([50]) e Pereira, Ruas ([59]).

Muitas abordagens foram realizadas sobre este conceito, destacamos também a generalização do número de Milnor para germes de funções com singularidade isolada sobre germes de variedades. Para um germe de função finita sobre uma curva reduzida o número de Milnor foi definido por Goryunov ([27]) para curvas em $\mathbb{C}^3$ e por Mond, van Straten ([48]) para o caso geral. No caso de germes de funções sobre uma interseção completa com singularidade isolada, o número de Milnor pode ser considerado através da conhecida fórmula de Lê-Greuel (ver [39]). Lê D. T. ([61]), generaliza o número de Milnor para germes de funções analíticas sobre um germe de variedade analítica complexa satisfazendo que a profundidade homotópica retificada é igual à sua dimensão, esta generalização é conhecida como o número de Milnor-Lê. No caso de germes de funções sobre uma singularidade determinantal isolada, o número de Milnor foi definido por Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella ([50]), ao qual nos referimos como o número de Milnor determinantal de uma função.

Um invariante para um germe de variedade analítica complexa foi introduzido por

MacPherson em ([40]), a obstrução de Euler local, ou simplesmente obstrução de Euler. Para germes de funções sobre um germe de variedade analítica complexa, um outro invariante é a obstrução de Euler de uma função, definida por Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade em ([5]). Neste mesmo artigo, os autores demonstram um resultado que compara a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função.

Dados invariantes definidos para um mesmo germe, um dos objetivos na Teoria de Singularidades é buscar relações entre eles. Um exemplo disto é a relação dada por Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella ([50]) entre a obstrução de Euler e a característica de Euler evanescente (a qual é a generalização do número de Milnor para o caso de singularidades determinantais isoladas). Outro exemplo é um resultado de Seade, Tibăr e Verjovsky em ([56]), considerando germes de funções analíticas com singularidade isolada sobre uma interseção completa com singularidade isolada, os autores mostram uma relação entre a obstrução de Euler de uma função e o número de Milnor-Lê. Estas relações nos motivaram a encontrar uma relação entre o número de Milnor determinantal de uma função e a obstrução de Euler de uma função sobre uma singularidade determinantal isolada.

Novamente no caso de interseção completa com singularidade isolada, denotada por $(X, 0)$, podemos considerar, além do número de Milnor, o qual é o número de esferas na fibra de Milnor de $(X, 0)$, um outro invariante definido por Tjurina em ([63]), o número de Tjurina, o qual é o número mínimo de parâmetros necessários em uma deformação versal de $(X, 0)$. Greuel em ([29]), mostrou que o número de Tjurina é igual ao número de Milnor se, e somente se, $(X, 0)$ é quase homogênea. Looijenga e Steenbrink em ([38]), mostraram que o número de Tjurina é menor ou igual ao número de Milnor.

No caso particular em que $(X, 0)$ é um germe de hipersuperfície com singularidade isolada, também o número de Tjurina é menor ou igual ao número de Milnor, com igualdade se, e somente se, $(X, 0)$ é quase homogênea. Inspirados por esse resultado, alguns autores obtiveram uma desigualdade similar no contexto de germes de aplicações. Considerando germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ (com $(n, n+1)$ nas boas dimensões de Mather), podemos considerar para estes germes dois invariantes: a $\mathscr{A}_e$-codimensão definida e abordada nos artigos de Mather (ver [64]), a qual é o número mínimo de parâmetros necessários em uma deformação versal de f e o número de Milnor da imagem definido por Siersma ([58]) e Mond ([43]), o qual é definido considerando f_s uma estabilização de f, então X_s, a imagem de f_s, tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão real n e o número de Milnor da imagem foi definido como o número de esferas no bouquet.

Mond em ([44]) considera o caso $n = 1$ e demonstra que a $\mathscr{A}_e$-codimensão é menor ou igual ao número de Milnor da imagem com igualdade se, e somente se, f é quase homogênea. Para $n = 2$ este mesmo resultado foi demonstrado independentemente por De Jong e Van Straten ([18]) e Mond ([43]). Para $n \geq 3$, esta desigualdade é um problema em aberto, conhecida como a Conjectura de Mond.

Motivados pelo trabalho de Mond ([44]), estudamos o caso de germes de aplicações entre curvas planas. Mais precisamente, introduzimos para estes germes de aplicações, o número de Milnor da imagem e utilizando a definição de $\mathscr{A}_e$-codimensão dada por Mond e Montaldi ([46]), obtivemos uma resposta positiva para a conjectura de Mond neste contexto.

Para facilitar a compreensão deste trabalho, buscamos apresentar no Capítulo 1 algumas das definições utilizadas. Observamos que este trabalho possui duas partes independentes, ligadas apenas pelo fato de serem formas de obter relações entre invariantes de germes de aplicações.

No Capítulo 2, consideramos germes de aplicações com singularidade isolada sobre uma singularidade determinantal isolada, denotamos por $f : (X, 0) \to \mathbb{C}$. Para esses germes Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella em ([50]) definem a característica de Euler evanescente da fibra, denotada por $\nu(X \cap f^{-1}(0), 0)$. Nesse trabalho, mostraremos uma caracterização para a característica de Euler evanescente da fibra, a partir deste resultado demonstramos a seguinte igualdade

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)), \tag{1}$$

onde $Eu_{f,X}(0)$ denota a obstrução de Euler de f e $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ é uma função linear genérica.

A partir do resultado (1), mostramos uma fórmula que apresenta o número de Brasselet, definido por Dutertre e Grulha , Jr. em ([20]), em termos da característica de Euler evanescente da fibra

$$B_{f,X}(0) = (-1)^{d-1}\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + 1.$$

Também utilizando (1) e uma fórmula do tipo Lê-Greuel, dada por Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella em ([50]), demonstramos a relação entre o número de

Milnor determinantal de uma função, $\mu_D(f)$, e a obstrução de Euler de uma função, $Eu_{f,X}(0)$, a saber,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\mu_D(f) - m_d(X,0)),$$

onde $m_d(X,0)$ é a d-ésima multiplicidade polar definida neste caso por Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella em ([50]).

Como consequência dos resultados citados acima, considerando o caso particular em que $(X,0)$ é uma curva reduzida, relacionamos a obstrução de Euler de f com o número de Milnor como definido por Goryunov ([27]). E para o caso em que $(X,0)$ é uma interseção completa com singularidade isolada, obtivemos uma forma de calcular a obstrução de Euler de f a partir das dimensões de duas álgebras.

No Capítulo 3, demonstramos um resultado que estende a conjectura de Mond para o caso de germes de aplicações entre curvas planas. Fazemos primeiramente um estudo sobre a $\mathscr{A}_e$-codimensão, $\mathscr{A}_e$- $\operatorname{codim}(X,f)$, utilizando resultados dados por Mond e Montaldi ([46]) para o caso mais geral de germes de aplicações $f:(X,0)\to\mathbb{C}^p$, onde $(X,0)$ é uma interseção completa com singularidade isolada. Nosso objetivo é dar uma caracterização para a $\mathscr{A}_e$-codimensão de $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ onde $(X,0)$ é uma curva plana com singularidade isolada.

Em seguida, introduzimos o número de Milnor da imagem, $\mu_I(f)$, através da topologia da imagem de uma perturbação estável de f. A imagem de uma perturbação estável de f tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão real 1 e definimos o número de Milnor da imagem como sendo o número de esferas no bouquet.

A partir desses resultados para a $\mathscr{A}_e$-codimensão e para o número de Milnor da imagem, obtemos o resultado que generaliza a conjectura de Mond neste contexto, mais precisamente, sendo $(X,0)$ uma curva plana com singularidade isolada e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ uma aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem $(Y,0)$, então,

$$\mathscr{A}_e\text{- }\operatorname{codim}(X,f) \leq \mu_I(f),$$

com igualdade se, e somente se, $(Y,0)$ é quase homogênea.

Finalizamos o capítulo com alguns exemplos apresentando os cálculos destes invariantes.

O Apêndice A apresenta uma outra forma de demonstrar a igualdade entre a $\mathscr{A}_e$-codimensão e o número de Milnor da imagem, no caso particular em que $(X,0)$ é uma curva irredutível e ambas $(X,0)$ e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ são quase homogêneas com mesmos pesos. Observamos que a leitura deste apêndice não é necessária para a compreensão do trabalho, no entanto, resolvemos anexá-lo, pois este caso particular nos permitiu entender melhor o problema e nos preparou para o caso geral.

Ressaltamos que os resultados do capítulo 2 compõem o artigo [2] e os do capítulo 3 pertencem ao artigo [1].

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Temos como objetivo para este capítulo apresentar alguns conceitos e resultados que utilizaremos neste trabalho, buscando facilitar a compreensão do tema que abordaremos.

1.1 Anéis Cohen-Macaulay

Nesta seção, apresentamos a definição de sequência regular e de anéis Cohen-Macaulay, para mais detalhes sugerimos ([31]).

Definição 1.1.1. Dizemos que um anel A é um anel local se A tem exatamante um ideal maximal $\mathcal{M}$. Denotamos um anel local por $(A, \mathcal{M})$.

Definição 1.1.2. Sejam A um anel e M um A-módulo. Uma sequência de elementos em A, $a_1, \cdots, a_n$, é uma sequência regular com respeito à M, ou uma M-sequência, se

- a_i não é um divisor de zero de $\frac{M}{\langle a_1, \cdots, a_{i-1} \rangle M}$ para $i = 1, \cdots, n$;
- $M \neq \langle a_1, \cdots, a_n \rangle M$.

Definição 1.1.3. Sejam A um anel, $I \subset A$ um ideal e M um A-módulo. Se $M \neq IM$, então o comprimento máximo n de uma M-sequência $a_1, \cdots, a_n \in I$ é chamada a I-profundidade de M e denotada por $\operatorname{depth}(I, M)$. Se $M = IM$ então a I-profundidade de M é por convenção ∞. Se $(A, \mathcal{M})$ é um anel local, então a $\mathcal{M}$-profundidade de M é simplesmente chamada a profundidade de M, i.e., $\operatorname{depth}(M) := \operatorname{depth}(\mathcal{M}, M)$.

Definição 1.1.4. Seja A um anel. Seja $\mathcal{C}(A)$ o conjunto de todas as cadeias de ideais primos estritamente crescentes em A, ou seja,

$$\mathcal{C}(A) := \{\mathcal{P} = (P_0 \subset \cdots \subset P_m \subset A); P_i \text{ ideal primo}\}.$$

Seja $\mathcal{P} = (P_0 \subset \cdots P_m \subset A) \in \mathcal{C}(A)$, definimos $lenght(\mathcal{P}) := m$.

A dimensão de Krull de A é definida como

$$\dim(A) := \sup \{lenght(\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \mathcal{C}(A)\}.$$

Seja $P \subset A$ um ideal primo e seja $\mathcal{C}(A, P)$ o suconjunto de $\mathcal{C}(A)$ que contém todas as cadeias de ideais primos estritamente crescentes terminando em P, ou seja,

$$\mathcal{C}(A, P) := \{\mathcal{P} = (P_0 \subset \cdots \subset P_m) \in \mathcal{C}(A); P_m = P\}.$$

Definimos $ht(P) := \sup \{lenght(\mathcal{P}); \mathcal{P} \in \mathcal{C}(A, P)\}$.

Para um ideal $I \subset A$ arbitrário, $ht(I) = \inf \{ht(P); P \supset I, P \text{ primo}\}$ e a dimensão de Krull de I é definida como

$$\dim(I) := \dim(A/I).$$

Para M um A-módulo, a dimensão de Krull de M é definida por

$$\dim(M) := \dim(A/Ann(M)),$$

onde $Ann(M)$ denota o ideal anulador de M.

Definição 1.1.5. Sejam $(A, \mathcal{M})$ um anel local, M um A-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é um módulo Cohen-Macaulay se $M = 0$ ou $M \neq 0$ e

$$\operatorname{depth}(M) = \dim(M).$$

Dizemos que A é um anel Cohen-Macaulay se ele é Cohen-Macaulay como um A-módulo.

Lema 1.1.6 ([31], Proposição 7.7.9)**.** *Seja $(A, \mathcal{M})$ um anel local Cohen-Macaulay e seja $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{M}$. Então são equivalentes:*

1. *$x_1, \cdots, x_n$ é uma A-sequência;*
2. *$ht(\langle x_1, \cdots, x_i \rangle) = i$, para todo $1 \leq i \leq n$;*
3. *$ht(\langle x_1, \cdots, x_n \rangle) = n$;*
4. *$x_1, \cdots, x_n$ é parte de um sistema de parâmetros de A.*

1.2 Germes de aplicações

Nesta seção, apresentaremos algumas definições da teoria de singularidades que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Como referência para este assunto, recomendamos ([62, 64]).

Definição 1.2.1. Sejam $S = \{p_1, \cdots, p_r\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ e aplicações $f : U \to \mathbb{C}^p$ e $g : V \to \mathbb{C}^p$, definidas em $U, V \subset \mathbb{C}^n$ vizinhanças abertas de S. Dizemos que f é equivalente à g, e denotamos $f \sim g$, se e somente se, existe uma vizinhança aberta de S, $W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.

As classes de equivalência segundo esta relação são chamadas de multigermes de aplicações em S e denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, S) \to \mathbb{C}^p$ além disso, chamamos $(\mathbb{C}^n, S)$ de fonte e $\mathbb{C}^p$ de meta. Quando S consiste de um único elemento $x \in \mathbb{C}^n$ as classes são chamadas germes de aplicações em x e denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, x) \to \mathbb{C}^p$.

A coleção dos germes de aplicações analíticas em x é denotada por $\mathcal{O}_x(n, p)$. Se $x = 0$, escrevemos $\mathcal{O}(n, p)$. Além disso, se $p = 1$, escrevemos simplesmente $\mathcal{O}_n$.

Observamos que, com as operações usuais de soma e multiplicação das aplicações representantes, $\mathcal{O}_n$ é um anel comutativo com elemento unidade, noetheriano e local, cujo ideal maximal é dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$.

Dado um germe $f = (f_1, \cdots, f_p) \in \mathcal{O}(n, p)$, denotamos por $Jf(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ a matriz jacobiana de f em x, onde $(x_1, \cdots, x_n)$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{C}^n$. O ideal jacobiano de f, denotado por J_f, é o ideal gerado pelos menores de ordem máxima da matriz jacobiana de f.

Definição 1.2.2. Dizemos que $x \in \mathbb{C}^n$ é um ponto singular de f se $Jf(x)$ não tem posto máximo. Se x é o único ponto singular de f em uma vizinhança de x em $\mathbb{C}^n$, então dizemos que f tem uma singularidade isolada em x.

1.3 Germes de variedades analíticas

Nesta seção, introduzimos o conceito de germes de variedades analíticas, para mais detalhes sugerimos ([33, 30]).

Para isso, consideramos a relação de equivalência.

Definição 1.3.1. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ com $0 \in X \cap Y$. Dizemos que X e Y são equivalentes na origem se existe uma vizinhança U de 0 tal que $X \cap U = Y \cap U$. Uma classe de equivalência segundo esta relação é chamada germe de conjunto na origem e denotado por $(X, 0)$, onde X é um representante do germe.

Definição 1.3.2. Definimos um germe de variedade analítica $(X, 0)$ como o germe na origem de um conjunto da forma

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n; f_1(z) = \ldots = f_r(z) = 0\},$$

para $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Quando

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n; f(z) = 0\},$$

chamamos $(X, 0)$ um germe de hipersuperfície.

Definição 1.3.3. Dado um ideal I de $\mathcal{O}_n$, definimos a variedade de I por

$$\upsilon(I) = \{x \in \mathbb{C}^n; f(x) = 0, \forall f \in I\},$$

e definimos o ideal de um germe de variedade X por

$$\imath(X) = \{f \in \mathcal{O}_n : f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Definição 1.3.4. Dizemos que um germe de variedade X é irredutível, quando para quaisquer germes X_1 e X_2 tais que $X = X_1 \cup X_2$ então $X = X_1$ ou $X = X_2$.

Proposição 1.3.5. *Seja X um germe de variedade, então existem um inteiro positivo p e $X_1, \ldots, X_p$ variedades irredutíveis, com X_i não contida em X_j, para todo $i \neq j$, tais que $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$. Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de X.*

Definição 1.3.6. Seja X um germe de variedade analítica, dizemos que um ponto z de X é um ponto regular ou suave, se para alguma vizinhança U de z, o conjunto $V \cap X$ pode ser descrito como o conjunto dos zeros de um número finito de funções analíticas em V que possuem z como ponto regular. Um ponto de X não regular é chamado de ponto singular de X. Quando um ponto x é o único ponto singular em uma vizinhança de X, dizemos que x é uma singularidade isolada.

Definição 1.3.7. Seja $(X,0)$ um germe de variedade analítica em $(\mathbb{C}^n,0)$, definimos o anel local de $(X,0)$ por
$$\mathcal{O}_{X,0}=\frac{\mathcal{O}_n}{\imath(X)}.$$

Agora apresentamos a definição de hipersuperfície quase homogênea, para mais detalhes sugerimos ([30]).

Definição 1.3.8. Um polinômio
$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha\mathbf{x}^\alpha\in\mathbb{C}\left[\mathbf{x}\right],$$
onde $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, é quase homogêneo do tipo $(w_1,\cdots,w_n;d)$, se $w_1,\cdots,w_n,d$ são inteiros positivos satisfazendo
$$w_1\alpha_1+\cdots+w_n\alpha_n=d$$
para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$ com $a_\alpha\neq 0$. Os números w_i são chamados os pesos e d é chamado o grau de f.

Observamos que um polinômio quase homogêneo f do tipo $(w_1,\cdots,w_n;d)$ satisfaz a relação de Euler
$$d.f=\sum_{i=1}^{n}w_ix_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad\text{em}\quad\mathbb{C}\left[\mathbf{x}\right]$$
e a relação
$$f(t^{w_1}x_1,\cdots,t^{w_n}x_n)=t^d.f(x_1,\cdots,x_n)\quad\text{em}\quad\mathbb{C}\left[\mathbf{x},t\right].$$

Definição 1.3.9. Uma hipersuperfície com singularidade isolada $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ é chamada quase homogênea se existe um polinômio quase homogêneo $f\in\mathbb{C}\left[x_1,\cdots,x_n\right]$ tal que
$$\mathcal{O}_{X,0}\cong\frac{\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}}{\langle f\rangle}.$$

Observamos que se $(X,0)$ é uma hipersuperfície quase homogêna, o número de Milnor e o número de Tjurina coincidem. A recíproca foi demonstrada por Saito em ([55]), logo $(X,0)$ é uma hipersuperfície quase homogêna se, e somente se, o número de Milnor é igual ao número de Tjurina.

1.4 Curvas planas

Para mais detalhes sobre o tema abordado nesta seção, sugerimos ([30]).

Uma curva plana reduzida com singularidade isolada, é um germe de hipersuperfície 1-dimensional com singularidade isolada, dada por uma série de potências reduzida $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}\{x, y\}$.

Mais especificamente, uma curva plana $(C, 0)$ é um germe de variedade analítica dado por

$$(C, 0) := \upsilon(f) \subset (\mathbb{C}^2, 0),$$

onde $f \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ é uma série de potências e $\upsilon(f)$ denota o germe do conjunto de zeros de f, tal f é chamada uma equação local para $(C, 0)$.

Além disso, se $f = f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}$ é uma decomposição irredutível de $f \subset \mathbb{C}\{x, y\}$, então,

$$\upsilon(f) = \upsilon(f_1) \cup \cdots \cup \upsilon(f_r)$$

e para $i = 1, \cdots, r$, chamamos $(C_i, 0) = \upsilon(f_i)$ um ramo de $(C, 0)$, o qual é reduzido se $n_i = 1$. O germe $(C, 0)$ é reduzido se, e somente se, para todo $i = 1, \cdots, r$, tem-se n_i igual a 1. Temos que f é irredutível se, e somente se, $r = 1$ e $n_1 = 1$. Logo, uma série de potências irredutível f define um germe irredutível e reduzido $(C, 0)$. Para simplificar a notação, sempre que nos referirmos a um germe irredutível, estamos considerando que o germe é irredutível e reduzido.

Agora, apresentamos a definição de parametrização de uma curva plana com singularidade isolada.

Definição 1.4.1 ([30])**.** Seja $(C, 0)$ uma curva plana irredutível com singularidade isolada. Uma parametrização de $(C, 0)$ é um germe de aplicação analítica $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ dado por $t \mapsto (x(t), y(t))$, tal que $\phi(\mathbb{C}, 0) \subset (C, 0)$ e satisfaz a propriedade da fatorização universal, isto é, todo germe de aplicação analítica $\psi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\psi(\mathbb{C}, 0) \subset (C, 0)$, fatora ϕ de modo único, ou seja, existe uma única aplicação analítica $\bar{\psi} : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ satisfazendo $\phi = \psi \circ \bar{\psi}^{-1}$.

Se $(C, 0)$ se decompõe em vários ramos, então uma parametrização de $(C, 0)$ é um sistema de parametrizações dos ramos.

1.5 Interseção completa com singularidade isolada

Nesta seção apresentamos as definições de interseção completa com singularidade isolada, para mais detalhes sugerimos ([39]).

Seja $f : \mathbb{C}^{n+k} \to \mathbb{C}^k$ uma aplicação holomorfa e consideremos $X = f^{-1}(0)$.

Definição 1.5.1. Dizemos que X é uma interseção completa geométrica se $dim_{\mathbb{C}} X = n$ e X for definida como o conjunto comum de zeros de k funções analíticas. Dizemos que X é uma interseção completa se o ideal $\imath(X)$ é gerado por k funções analíticas.

Proposição 1.5.2. *Sejam $f : \mathbb{C}^{n+k} \to \mathbb{C}^k$ uma aplicação holomorfa e $X = f^{-1}(0)$. Então, X é uma interseção completa geométrica se, e somente se, é uma interseção completa.*

Quando X tem singularidade isolada, ou seja, X é uma interseção completa com singularidade isolada, abreviamos por ICIS.

1.6 Transversalidade

Segundo o Teorema da Transversalidade de Thom (ver [25, Corolário 4.12]), se X e Y são variedades suaves com W uma subvariedade de Y, o conjunto das aplicações suaves de X em Y que interseptam W transversalmente é denso em $C^\infty(X, Y)$.

Lema 1.6.1 ([25], Lema 4.6 - página 53)**.** *Sejam X, B e Y variedades suaves com W uma subvariedade de Y. Seja $j : B \to C^\infty(X, Y)$ uma aplicação e defina $\phi : X \times B \to Y$ por $\phi(x, b) = j(b)(x)$. Supondo que ϕ é suave e que ϕ é tranversal a W, o conjunto $\{b \in B; j(b)$ é tranversal a $W\}$ é denso em B.*

Lema 1.6.2 ([4], Lema 4.2)**.** *Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação e J um ideal de $\mathcal{O}_p$ tal que $\frac{\mathcal{O}_p}{J}$ é um anel regular. Seja $I = f^*(J)$ e suponhamos que $\upsilon(I)$ e $\upsilon(J)$ tenham a mesma codimensão. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- *f é tranversal a $\upsilon(J)$;*
- *$\frac{\mathcal{O}_n}{I}$ é regular;*
- *$\frac{\mathcal{O}_n}{I}$ tem multiplicidade 1.*

1.7 Aplicações finitas

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é fechada se a imagem de cada conjunto fechado em X é também fechado em Y. E dizemos que f é finita se f é contínua, fechada e $f^{-1}\{y\}$ é um conjunto finito, para todo y em Y.

Lema 1.7.1 ([17])**.** *Seja $f : (X, x) \to (Y, y)$ uma aplicação entre germes de variedades analíticas. São equivalentes:*

- *f é finita;*
- *$\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_{Y,y}$- módulo finitamente gerado;*
- *$\dfrac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathcal{M}_{Y,y}\mathcal{O}_{X,x}}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita;*
- *$f^{-1}(y) = \{x\}$.*

Lema 1.7.2 ([28])**.** *Se $V \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de variedade analítica e $\pi : V \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é uma aplicação finita, então $\pi(V)$ é uma variedade analítica.*

1.8 $\mathscr{A}_e$-codimensão

Nesta seção apresentamos resultados relacionados a $\mathscr{A}_e$-codimensão, para mais detalhes sugerimos [46, 64].

Definição 1.8.1. Dois germes $f, g : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ são $\mathscr{A}$-equivalentes se existem germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^n, S)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

O grupo $\mathscr{A}$ é o conjunto

$$\{(\varphi, \psi); \varphi : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^n, S), \psi : (\mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)\}$$

dos pares de difeomorfismos com a operação de composição.

Apresentaremos a seguir a definição de germe estável, para isto apresentamos a definição de desdobramento de um germe.

Definição 1.8.2. Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação. Um desdobramento à r-parâmetros de f é um germe de aplicação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \to (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$ dada por $F(x, u) = (f_u(x), u)$ tal que $f_0 = f$.

Na definição a seguir, damos a noção de $\mathscr{A}$-equivalência para dois desdobramentos.

Definição 1.8.3. Dizemos que dois desdobramentos $F : (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^r, S\times\{0\})\to(\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^r, 0)$ e $G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})\to(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$ são $\mathscr{A}$-equivalentes (como desdobramentos) se existem difeomorfismos $\Phi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})\to(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})$ e $\Psi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)\to(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$ as quais são desdobramentos da identidade em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$, respectivamente, tais que

$$G = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1}.$$

Dadas essas definições, podemos definir germe estável.

Definição 1.8.4. Dizemos que um desdobramento F é $\mathscr{A}$-trivial se é $\mathscr{A}$-equivalente à um desdobramento constante $f \times \mathrm{id} : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})\to(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$. O germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, S)\to(\mathbb{C}^p, 0)$ é estável se todo desdobramento é $\mathscr{A}$-trivial.

Observamos que se f é estável, então o quociente

$$T^1(f) := \frac{\left\{\frac{d}{dt} f_t|_{t=0} : f_0 = f\right\}}{\left\{\frac{d}{dt}(\psi_t \circ f \circ \phi_t^{-1})|_{t=0} : \phi_0 = \mathrm{id}, \psi_0 = \mathrm{id}\right\}},$$

é igual a 0. Em geral, $T^1(f)$ é um espaço vetorial cuja dimensão, a $\mathscr{A}_e$-codimensão de f, mede a falha da estabilidade.

Em outras palavras, se $\Theta(f)$ é o $\mathcal{O}_n$-módulo dos germes de campos de vetores ao longo de f, Θ_n é o $\mathcal{O}_n$-módulo dos campos de vetores em $(\mathbb{C}^n, 0)$, $tf : \Theta_n\to\Theta(f)$ é o morfismo de $\mathcal{O}_n$-módulos dado por $tf(\xi) = df \circ \xi$ e $\omega f : \Theta_p\to\Theta(f)$ é o morfismo de $\mathcal{O}_p$-módulos dado por $\omega f(\eta) = \eta \circ f$ (onde $\Theta(f)$ é considerado como um $\mathcal{O}_p$-módulo via $f^* : \mathcal{O}_p\to\mathcal{O}_n$). Então, a $\mathscr{A}_e$-codimensão de f é dada por

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_n) + \omega f(\Theta_p)}.$$

Dizemos que f é $\mathscr{A}$-finito se esta dimensão é finita. Denotamos

$$T\mathscr{A}_e f = tf(\Theta_n) + \omega f(\Theta_p),$$

o qual é chamado de espaço tangente estendido.

Definição 1.8.5. Dizemos que um desdobramento F é uma estabilização de f, se para todo $u \neq 0$, $f_u : (\mathbb{C}^n, S)\to(\mathbb{C}^p, 0)$ é estável .

Consideramos a definição e o resultado a seguir, para mais detalhes, sugerimos [14].

Definição 1.8.6 ([14])**.** Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação, definimos

$$Lift(f) = (\omega f)^{-1}(tf(\Theta_n)),$$

ou seja, dado $\xi \in \Theta_p$, temos $\xi \in Lift(f)$ se, e somente se, existe $\eta \in \Theta_n$ tal que $\xi \circ f = df \circ \eta$, logo, $\omega f(\xi) = tf(\eta)$, consequentemente, $\xi \in (\omega f)^{-1}(tf(\Theta_n))$.

Lema 1.8.7 ([14])**.** *Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação com $n < p$, $\mathscr{A}$-finito. Então,*

$$Lift(f) = \mathrm{Derlog}(Im\ f),$$

onde $\mathrm{Derlog}(Im\ f)$ *é o $\mathcal{O}_p$-submódulo de Θ_p consistido de todos os campos de vetores tangentes à imagem de f.*

Agora analisamos o caso em que $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação analítica e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de variedade analítica, e apresentamos resultados os quais foram adaptados da teoria clássica de Thom-Mather quando $(X, 0)$ é suave.

Definição 1.8.8. Dois germes de aplicações $f, g : (X, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ são $\mathscr{A}$-equivalentes se existem difeomorfismos ϕ e ψ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X,0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & (\mathbb{C}^p,0) \arrow[d, "\psi"] \\
(X,0) \arrow[r, "g"] & (\mathbb{C}^p,0)
\end{tikzcd}$$

Definição 1.8.9. Um desdobramento à r-parâmetros de $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é um par (F, π) onde $F : (\mathcal{X}, 0) \to (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0)$ e $\pi : (\mathcal{X}, 0) \to (\mathbb{C}^r, 0)$ é um desdobramento flat de $(X, 0)$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X},0) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p,0) \arrow[dl, "p_1"] \\
(\mathbb{C}^r,0) &
\end{tikzcd}$$

comuta e $p_2 \circ F|_X = f$, onde p_1, p_2 são as projeções naturais de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p$ a $\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^p$ respectivamente. Para simplificar, assumimos que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, 0)$ e que $\pi(u, x) = u$. Então, $F(u, x) = (u, f_u(x))$ e $f_0 = f$. Para cada $u \in \mathbb{C}^r$, escrevemos $X_u = \pi^{-1}(u)$ e $f_u = (F|_{X_u}) : X_u \to \mathbb{C}^p$.

Definição 1.8.10. Dois desdobramentos $F:(\mathcal{X},0)\to(\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0)$ e $G:(\tilde{\mathcal{X}},0)\to(\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0)$ são $\mathscr{A}$-equivalentes (como desdobramentos) se existem difeomorfismos Φ e Ψ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{X},0) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi"] & (\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0) \arrow[d, "\Psi"] \\ (\tilde{\mathcal{X}},0) \arrow[r, "G"] & (\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0) \end{tikzcd}$$

comuta e, além disso, Φ e Ψ são desdobramentos de suas respectivas aplicações identidades.

Definição 1.8.11. Dizemos que um desdobramento F é $\mathscr{A}$-trivial se é $\mathscr{A}$-equivalente à um desdobramento constante $\mathrm{id}\times f:(\mathbb{C}^r\times X,0)\to(\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0)$. O germe de aplicação $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ é estável se todo desdobramento é $\mathscr{A}$-trivial.

Definição 1.8.12. Dizemos que um desdobramento F é uma estabilização de f, se para todo $u\neq 0$, $f_u:(X_u,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ é estável, isto é, X_u é suave e f_u é estável no sentido usual.

Definição 1.8.13. Dada $F:(\mathcal{X},0)\to(\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^p,0)$ um desdobramento de f e $h:(\mathbb{C}^s,0)\to(\mathbb{C}^r,0)$ um germe de aplicação analítica, o pull-back de F por h é o desdobramento h^*F definido pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^s\times_{\mathbb{C}^r}\mathcal{X},0) \arrow[r, "h^*F"] \arrow[d, "\pi'"] & (\mathbb{C}^s\times\mathbb{C}^p,0) \arrow[dl, "p_1"] \\ (\mathbb{C}^s,0) & \end{tikzcd}$$

onde $\mathbb{C}^s\times_{\mathbb{C}^r}\mathcal{X}=\{(v,(u,x))\in\mathbb{C}^s\times\mathcal{X}:h(v)=u\}$, $\pi'(v,(u,x))=v$ e $h^*F(v,(u,x))=(v,f_{h(v)}(x))$. Dizemos que F é versal se todo desdobramento de f é $\mathscr{A}$-equivalente à h^*F para algum h.

Definição 1.8.14. A $\mathscr{A}_e$-codimensão de $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ é definida como

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0})+\omega f(\Theta_p)},$$

onde $\mathcal{O}_{X,0}=\mathcal{O}_n/I(X,0)$ é o anel local de $(X,0)$ sendo $I(X,0)$ o ideal de $\mathcal{O}_n$ das funções que se anulam em X, $\Theta(f)$ é o $\mathcal{O}_{X,0}$-módulo dos campos de vetores ao longo de f, i.e., germes holomorfos $\xi : (X,0) \to T\mathbb{C}^p$ tal que $\pi \circ \xi = f$ (onde $\pi : T\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ é a projeção canônica), $\Theta_{X,0}$ é o $\mathcal{O}_{X,0}$-módulo dos campos de vetores em $(X,0)$, i.e.,

$$\Theta_{X,0} \cong \frac{\operatorname{Derlog}(X,0)}{\imath(X,0)\Theta_n},$$

onde $\operatorname{Derlog}(X,0)$ é o $\mathcal{O}_n$-submódulo de Θ_n consistido de todos os campos de vetores tangentes à X, Θ_n é o $\mathcal{O}_n$-módulo dos campos de vetores em $(\mathbb{C}^n,0)$, $tf : \Theta_{X,0} \to \Theta(f)$ é o morfismo de $\mathcal{O}_{X,0}$-módulos dado por $tf(\xi) = df \circ \xi$ e $\omega f : \Theta_p \to \Theta(f)$ é o morfismo de $\mathcal{O}_p$-módulos dado por $\omega f(\eta) = \eta \circ f$ (onde $\Theta(f)$ é considerado como um $\mathcal{O}_p$-módulo via $f^* : \mathcal{O}_p \to \mathcal{O}_{X,0}$). Dizemos que f é $\mathscr{A}$-finito se esta dimensão é finita. Dizemos que f é do tipo finito se

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0}) + (f^*m_p)\Theta_{X,0}} < \infty.$$

Observamos que a $\mathscr{A}_e$-codimensão de $f : (X,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$, foi denotada da mesma forma que a $\mathscr{A}_e$-codimensão de $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$, por isso sempre deixaremos claro a fonte da aplicação para a qual estamos considerando a $\mathscr{A}_e$-codimensão.

No caso em que $(X,0)$ é uma ICIS também podemos considerar a $\mathscr{A}_e$-codimensão no sentido de Mond e Montaldi [46]: $\mathscr{A}_e$-codim(X,f) é igual ao número mínimo de parâmetros em um desdobramento versal (onde deformamos simultaneamente X e f), temos os seguintes resultados de Mond e Montaldi.

Observação 1.8.15. Sejam $(X,0)$ uma ICIS e $f : (X,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$ é do tipo finito. Denotamos por $h : (\mathbb{C}^{n+k},0) \to (\mathbb{C}^k,0)$ o germe de aplicação tal que $X = h^{-1}(0)$ e denotamos por $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+k},0) \to (\mathbb{C}^p,0)$ uma extensão holomorfa de f. Então, por Mond e Montaldi ([46]), existe um desdobramento estável $G : (\mathbb{C}^{n+k} \times \mathbb{C}^r,0) \to (\mathbb{C}^{k+p} \times \mathbb{C}^r,0)$ de $(h,\tilde{f}) : (\mathbb{C}^{n+k},0) \to (\mathbb{C}^{k+p},0)$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^{n+k} \times \mathbb{C}^r,0) & \xrightarrow{G} & (\mathbb{C}^{k+p} \times \mathbb{C}^r,0) \\
{\scriptstyle i}\big\uparrow & & {\scriptstyle \gamma}\big\uparrow \\
(X,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^p,0)
\end{array}$$

comuta, onde $i(x) = (x,0)$ e $\gamma(u) = (0,u,0)$. Além disso,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_p) + \gamma^* \operatorname{Derlog} D(G)},$$

onde $D(G)$ denota o discriminante do germe de aplicação G.

Teorema 1.8.16 ([46])**.** *Seja $(X,0)$ uma ICIS e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ é do tipo finito. O número mínimo de parâmetros em um desdobramento versal de f é igual ao número*

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)+\tau(X,0),$$

onde $\tau(X,0)$ é o número de Tjurina de $(X,0)$, isto é, o número mínimo de parâmetros em um desdobramento versal de $(X,0)$.

Deste teorema segue o seguinte resultado, no qual a segunda afirmação é uma generalização do critério de Mather-Gaffney (ver [64]).

Corolário 1.8.17. *Seja (X,S) uma ICIS e $f:(X,S)\to(\mathbb{C}^p,0)$ um multigerme do tipo finito.*

1. *f é estável se, e somente se, X é suave e f é estável no sentido usual.*
2. *f é $\mathscr{A}$-finito se, e somente se, f tem instabilidade isolada (i.e., existe um representante $f:X\to B_\epsilon$ tal que para todo $y\in B_\epsilon\setminus\{0\}$, o multigerme de f em $f^{-1}(y)\cap S$ é estável).*

Outra consequência do Teorema 1.8.16 é a existência de uma estabilização para germes de aplicações analíticas $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ quando f é $\mathscr{A}$-finito e (d,p) estão nas boas dimensões de Mather ($d=\dim(X,0)$).

1.9 Obstrução de Euler

O objetivo nesta seção é expor alguns resultados da obstrução de Euler. Como referência básica para esse assunto sugerimos [7].

A obstrução local de Euler, ou simplesmente obstrução de Euler, foi introduzida por MacPherson em [40] como uma de suas principais ferramentas na demonstração da conjectura de Deligne e Grothendieck sobre a existência e unicidade de classes características de variedades singulares. Uma definição equivalente deste conceito foi dada por Brasselet e Schwartz em [6] utilizando teoria de obstrução, neste trabalho os autores provaram que as classes de Schwartz de uma variedade singular coincide com as classes de MacPherson.

Usando a definição de MacPherson, a obstrução de Euler não é facilmente calculada, o que motivou a obtenção de fórmulas que facilitassem o seu cálculo. Em [8], Brasselet, Lê e Seade apresentaram uma fórmula de natureza topológica para a obstrução de Euler.

Definição 1.9.1. Uma forma linear complexa genérica (com respeito a X) é uma forma linear complexa $p : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $0 \in p^{-1}(0)$ e $Ker(p)$ é transversal a todos os limites de espaços tangentes $\{T_{x_n} V_i\}$, para todo estrato V_i e toda sequência $\{x_n\} \subset V_i$ convergindo a 0.

Teorema 1.9.2 ([8], Teorema 3.1)**.** *Sejam $(X, 0)$ um germe de variedade analítica complexa e $\{V_i\}$ uma estratificação de Whitney de X. Seja $p : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma linear genérica, onde U é uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}^n$. Temos então:*

$$Eu_X(0) = \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap p^{-1}(t_0)).Eu_X(V_i),$$

onde $\mathbb{B}_\varepsilon$ é uma pequena bola fechada em torno da origem em $\mathbb{C}^n$, $t_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $\|t_0\| << 1$ e $Eu_X(V_i)$ é a obstrução de Euler de X em qualquer ponto do estrato V_i.

Uma sequência natural deste resultado é o trabalho [5], de Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade, no qual os autores introduzem um novo conceito, a obstrução de Euler de uma função e demonstram um resultado que compara a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função pela fórmula:

$$Eu_X(0) = \left(\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)).Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0).$$

Observação 1.9.3. Algumas propriedades importantes da obstrução de Euler:

- A obstrução de Euler em um ponto regular é igual à 1.
- A obstrução de Euler em um ponto de uma curva é exatamente a multiplicidade do ponto sobre a curva [26].
- A obstrução de Euler é constante ao longo de cada estrato de uma estratificação de Whitney.
- $Eu_{X \times Y}(a, b) = Eu_X(a) \cdot Eu_Y(b)$, $\forall a \in X$, $\forall b \in Y$.

1.10 Obstrução de Euler de uma função

Como observado na seção anterior, a obstrução de Euler de uma função f foi introduzida por Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade em [5]. Em certos aspectos, a obstrução de Euler de uma função é uma generalização do importante invariante da Teoria de Singularidades, o número de Milnor. O resultado a seguir apresenta uma comparação entre a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função.

Teorema 1.10.1 ([5], Teorema 3.1)**.** *Seja $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ com singularidade isolada na origem e $\{V_i\}$ uma estratificação de Whitney de X. Então,*

$$Eu_X(0) = \left(\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)).Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0)$$

onde ε é suficientemente pequeno, $t_0 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ é tal que $\|t_0\| << 1$ e $Eu_X(V_i)$ é a obstrução de Euler de X em qualquer ponto do estrato V_i.

Observação 1.10.2 ([5], Observação 3.4)**.** Se $X = \mathbb{C}^d$ e $f : (\mathbb{C}^d,0) \to (\mathbb{C},0)$ é uma função analítica com singularidade isolada na origem e número de Milnor $\mu(f)$, então

$$Eu_{f,\mathbb{C}^d}(0) = (-1)^d \mu(f).$$

O caso em que $(X,0)$ tem uma singularidade isolada

Quando $(X,0)$ é uma variedade analítica com singularidade isolada, segue dos Teoremas 1.9.2 e 1.10.1 e da observação 1.9.3, as seguintes equações

$$Eu_X(0) = \chi(X \cap p^{-1}(t_0)) \tag{1.1}$$

e

$$Eu_{f,X}(0) = Eu_X(0) - \chi(X \cap f^{-1}(t_0)). \tag{1.2}$$

De fato, do Teorema 1.9.2 temos

$$Eu_X(0) = \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap p^{-1}(t_0)).Eu_X(V_i),$$

$(X,0)$ tem singularidade isolada, então os estratos são $\{X \setminus \{0\}, \{0\}\}$, logo

$$Eu_X(0) = \chi(\{0\} \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap p^{-1}(t_0)).Eu_X(\{0\}) + \chi(X \setminus \{0\} \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap p^{-1}(t_0)).Eu_X(X \setminus \{0\}),$$

como $p^{-1}(t_0)$ não contém a origem temos

$$\{0\} \cap p^{-1}(t_0) = \emptyset \quad \text{e} \quad \chi(\{0\} \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap p^{-1}(t_0)) = 0.$$

Também, da observação 1.9.3, segue que $Eu_X(X \setminus \{0\}) = 1$ e ainda, como $p^{-1}(t_0)$ não contém a origem então $X \setminus \{0\} \cap p^{-1}(t_0) = X \cap p^{-1}(t_0)$.

Portanto,

$$Eu_X(0) = 0.Eu_X(\{0\}) + \chi(X \cap p^{-1}(t_0)).1 = \chi(X \cap p^{-1}(t_0)).$$

Da mesma forma, do Teorema 1.10.1 temos

$$Eu_X(0) = \left(\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)).Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0),$$

das observações feitas anteriormente e do fato que $f^{-1}(t_0)$ não contém a origem, temos

$$Eu_X(0) = 0.Eu_X(\{0\}) + \chi(X \cap f^{-1}(t_0)).1 + Eu_{f,X}(0).$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = Eu_X(0) - \chi(X \cap f^{-1}(t_0)).$$

Capítulo 2

Número de Milnor determinantal e obstrução de Euler de uma função

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar uma fórmula que relaciona o número de Milnor determinantal à obstrução de Euler de uma função.

O número de Milnor determinantal foi definido por Nuño-Ballesteros, Oréfice-Okamoto, Tomazella em ([50]), para germes de funções sobre uma singularidade determinantal isolada. Neste mesmo artigo, os autores apresentam uma relação entre a obstrução de Euler e a característica de Euler evanescente. Um resultado de Seade, Tibăr e Verjovsky em ([56]), mostra uma relação entre a obstrução de Euler de uma função e o número de Milnor-Lê no caso de germes de funções analíticas com singularidade isolada sobre uma interseção completa com singularidade isolada. Estas relações nos motivaram a encontrar uma relação entre o número de Milnor determinantal e a obstrução de Euler de uma função.

Para melhor compreensão do resultado que relaciona a obstrução de Euler de uma função ao número de Milnor determinantal, começaremos este capítulo, introduzindo definições a respeito das variedades determinantais.

Uma variedade determinantal com singularidade isolada é um tipo de variedade analítica que pode ser naturalmente considerado como uma generalização para ICIS. Estes germes de variedades em $\mathbb{C}^N$ são dados como zeros de certos menores de matrizes cujos elementos são germes de função em $\mathcal{O}_N$.

Variedades determinantais aparecem de maneira natural em teoria de singularidades. Um exemplo é o conjunto dos pontos singulares, $S(f)$, de um germe de aplicação

$f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, o qual é dado pelos menores de ordem maximal da matriz jacobiana de f. Muitos autores estudaram estas variedades ([15, 22, 24, 34, 50, 59]).

Nosso objetivo é apresentar a definição de singularidade determinantal isolada (SDI), um tipo especial de variedade determinantal e apresentar alguns resultados relacionados a SDI, para mais detalhes sugerimos ([3, 50]).

Consideramos $0 < s \leq m \leq n$ números inteiros, denotamos por $M_{m,n}$ o conjunto das matrizes complexas de ordem $m \times n$ e por $M^s_{m,n}$ o subconjunto de $M_{m,n}$ que contém as matrizes com rank menor que s. O conjunto $M^s_{m,n}$ é uma subvariedade algébrica irredutível de $M_{m,n}$ com codimensão igual a $(m - s + 1)(n - s + 1)$ e é chamado a variedade determinantal genérica do tipo $(m, n; s)$. Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \to (M_{m,n}, 0)$ o germe de aplicação definido por $F(x) = (f_{ij}(x))$ com $f_{ij} \in \mathcal{O}_N$, para $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq j \leq n$. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ o germe analítico dado por $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0)$.

Dizemos que $(X, 0)$ é uma variedade determinantal do tipo $(m, n; s)$ em $(\mathbb{C}^N, 0)$ se a dimensão de $(X, 0)$ é igual a

$$N - (m - s + 1)(n - s + 1).$$

Seja $(X, 0)$ uma variedade determinantal do tipo $(m, n; s)$ em $(\mathbb{C}^N, 0)$ satisfazendo a condição

$$s = 1 \text{ ou } N < (m - s + 2)(n - s + 2). \tag{*}$$

Dizemos que tal $(X, 0)$ é uma singularidade determinantal isolada (SDI) se X é suave em x e $\operatorname{rank} F(x) = s - 1$, para todo $x \neq 0$ em uma vizinhança da origem.

Observamos que se $s = 1$, então a condição (*) é automaticamente satisfeita e neste caso $(X, 0)$ é uma SDI se, e somente se, $(X, 0)$ é uma ICIS.

Seja $(X, 0)$ uma SDI, para uma matriz $A \in M_{m,n}$, seja $F_A : (\mathbb{C}^N, 0) \to M_{m,n}$ a aplicação definida por $F_A(x) = F(x) + A$, denotamos $X_A := F_A^{-1}(M^s_{m,n})$.

A característica de Euler evanescente de $(X, 0)$ é definida em ([50]) por

$$\nu(X, 0) := (-1)^d (\chi(X_A) - 1),$$

onde $d = \dim X$ e A é tal que X_A é suave e $\operatorname{rank}(F_A(x)) = s - 1$ para todo $x \in X_A$.

Como observado em ([50]) a característica de Euler evanescente de uma SDI generaliza o número de Milnor. Porém não é possível garantir que $\nu(X, 0)$ é igual ao d-ésimo número de Betti de $(X, 0)$, o que geralmente se pede do número de Milnor $\mu(X, 0)$ para os demais casos.

Agora, considere $(X,0)$ uma SDI e $f:(\mathbb{C}^N,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe de função analítica tal que $f|X$ tem singularidade isolada na origem, a característica de Euler evanescente da fibra $(X\cap f^{-1}(0),0)$ é definida em ([50]) por

$$\nu(X\cap f^{-1}(0),0):=(-1)^{\dim X-1}(\chi(X_A\cap f_a^{-1}(c))-1),$$

com $(a,A,c)\in\mathbb{C}^N\times M_{m,n}\times\mathbb{C}$ genérico, tal que, X_A é suave e $\operatorname{rank}(F_A(x))=s-1$ para todo $x\in X_A$; f_a é função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$.

Observamos que se $(X,0)$ é uma ICIS, então $\nu(X,0)$ e $\nu(X\cap f^{-1}(0),0)$ são iguais aos números de Milnor $\mu(X,0)$ e $\mu(X\cap f^{-1}(0),0)$, respectivamente, como definido por Hamm em ([35]).

No caso em que $(X,0)$ é uma SDI e $f:(X,0)\to(\mathbb{C},0)$ é um germe de função analítica com singularidade isolada, o número de Milnor determinantal de f é definido em ([50]) por

$$\mu_D(f):=\#\Sigma\left(f_a|_{X_A}\right),$$

com $A\in M_{m,n}$ e $a=(a_1,\ldots,a_N)\in\mathbb{C}^N$ genéricos tal que $f_a|_{X_A}:X_A\to\mathbb{C}$ é uma função de Morse, onde $f_a(x_1,\ldots,x_N)=f(x_1,\ldots,x_N)+a_1x_1+\cdots+a_Nx_N$ e $\#\Sigma\left(f_a|_{X_A}\right)$ denota o número de pontos críticos da aplicação $f_a|_{X_A}$.

Em [50], aparece uma fórmula do tipo Lê-Greuel para o caso em que $(X,0)$ é uma SDI.

Teorema 2.0.3 ([50])**.** *Dada $f:(X,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe de função com singularidade isolada e $(X,0)$ uma SDI. Então,*

$$\mu_D(f)=\nu(X,0)+\nu(X\cap f^{-1}(0),0).$$

Pelo teorema 2.0.3 e pela fórmula de Lê-Greuel, se $(X,0)$ é uma ICIS definida pela aplicação $(\phi_1,\cdots,\phi_k):(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$, então

$$\mu_D(f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi_1,\cdots,\phi_k\rangle+J(\phi_1,\cdots,\phi_k,f)}.$$

Ainda no caso em que $(X,0)$ é uma ICIS, Gaffney em ([23]) define a d-ésima multiplicidade polar de $(X,0)$ (onde d é a dimensão de X) como

$$m_d(X,0)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_N}{\langle\phi_1,\cdots,\phi_k\rangle+J(\phi_1,\cdots,\phi_k,p)},$$

onde $(X,0) = ((\phi_1, \cdots, \phi_k)^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ e $p : (\mathbb{C}^N, 0) \to \mathbb{C}$ é uma aplicação linear genérica.

Seguindo isto, em ([50]), foi definida a d-ésima multiplicidade polar de uma SDI por

$$m_d(X,0) := \#\Sigma(p|_{X_A}),$$

então, $m_d(X,0) = \mu_D(p)$, onde $p : (X,0) \to \mathbb{C}$ é uma aplicação linear genérica.

Se $(X,0)$ é uma SDI por [50] existe uma relação entre a obstrução de Euler e a característica de Euler evanescente.

Teorema 2.0.4 ([50])**.** *Seja $(X,0)$ uma SDI de dimensão d. Então,*

$$Eu_X(0) + (-1)^d m_d(X,0) = 1 + (-1)^d \nu(X,0).$$

A seguir, apresentaremos o resultado que relaciona a obstrução de Euler de uma função ao número de Milnor-Lê, dado por Seade, Tibăr e Verjovsky em ([56]).

Em [61], Lê D. T. generaliza o número de Milnor para funções analíticas definidas em $(X,0)$ um germe de variedade analítica complexa tal que a profundidade homotópica retificada de X em 0, denotada por $\mathrm{rhd}(X,0)$ satisfaz

$$\mathrm{rhd}(X,0) = \dim_{\mathbb{C}}(X,0).$$

Sendo X um representante suficientemente pequeno de $(X,0)$, a fibra de Milnor da função analítica complexa f, definida em X, com singularidade isolada na origem, tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas. O número de Milnor-Lê denotado por $\mu_L(f)$ é definido como o número de esferas no bouquet.

No caso em que $(X,0)$ é uma ICIS e $f : (X,0) \to \mathbb{C}$ é um germe de função analítica com singularidade isolada, em [56], os autores mostram uma relação entre a obstrução de Euler de f e o número de Milnor-Lê de f.

Teorema 2.0.5 ([56])**.** *Sejam $(X,0)$ uma ICIS de dimensão d, $f : (X,0) \to \mathbb{C}$ um germe de função analítica com singularidade isolada e p uma forma linear genérica. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d [\mu_L(f) - \mu_L(p)].$$

Um dos objetivos na seção 2.1 é provar um resultado do tipo do teorema anterior quando $(X,0)$ é uma SDI. Para isto, observamos que a obstrução de Euler de uma função é definida para germes de função $f : (X, 0)\to\mathbb{C}$ com singularidade isolada para qualquer variedade analítica $(X, 0)$. E em [50] os autores definem um análogo ao número de Milnor-Lê do germe $f : (X, 0)\to\mathbb{C}$ quando $(X, 0)$ é uma SDI, a chamada característica de Euler evanescente da fibra $X \cap f^{-1}(0)$.

2.1 Relacionando o número de Milnor determinantal à obstrução de Euler de uma função

Nesta seção, relacionamos o número de Milnor determinantal à obstrução de Euler de uma função. Os resultados desta seção foram apresentados no artigo [2].

A característica de Euler evanescente da fibra $\nu(X \cap f^{-1}(0))$ foi definida em [50]. Com os resultados a seguir damos uma caracterização para a característica de Euler evanescente da fibra, ou seja, mostraremos que

$$\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) = (-1)^{d-1}(\chi(X \cap f^{-1}(c)) - 1),$$

onde c é um valor regular de f suficientemente próximo da origem. Utilizaremos esta caracterização, para mostrar a relação entre a obstrução de Euler de uma função e a característica de Euler evanescente da fibra.

Seja $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI. Para uma matriz $A \in M_{m,n}$, seja $F_A : (\mathbb{C}^N, 0)\to M_{m,n}$ a aplicação definida por $F_A(x) = F(x) + A$, denotamos $X_A := F_A^{-1}(M^s_{m,n})$. Seja $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de função analítica com singularidade isolada. Para $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ seja $f_a|_{X_A} : X_A\to\mathbb{C}$, definida por $f_a(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_N) + a_1x_1 + \cdots + a_Nx_N$.

Lema 2.1.1. *Sejam $(X, 0)$ uma SDI e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com singularidade isolada. Então, existe um aberto de Zariski não vazio $W \subset \mathbb{C}^N \times M_{m,n}\times\mathbb{C}$ tal que para todo $(a, A, c) \in W$ temos $X_A\cap f_a^{-1}(c)$ suave e* $\operatorname{rank}(F_A(x)) = s-1$, *para todo $x \in X_A \cap f_a^{-1}(c)$.*

Demonstração. Escolhemos uma bola aberta $B \subset \mathbb{C}^N$ tal que para todo $x \in B\backslash\{0\}$, temos X suave em x, $\operatorname{rank}(F(x)) = s - 1$ e f regular em x. Denotamos

$$\begin{aligned}\tilde{C} = \ &\{(a, A, c, x) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N : x \in X_A \cap f_a^{-1}(c) \text{ e ou } x \text{ é um} \\ &\text{ponto singular de } X_A \cap f_a^{-1}(c) \text{ ou } \operatorname{rank}(F_A(x)) < s - 1\}.\end{aligned}$$

e

$$C = \{(a,A,c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} : X_A \cap f_a^{-1}(c) \text{ não é regular ou } \text{rank}(F_A(x)) < s-1, \text{ para algum } x \in X_A \cap f_a^{-1}(c)\}.$$

Então, $\tilde{C}$ é uma subvariedade analítica de $\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$. De fato,

$$\tilde{C} = v(I_{\text{codim}X+1}(J_{a,A,c}) + \langle g_{1A}, \cdots, g_{kA}, h\rangle) \cup v(I_{s-1}(F_A(x)) + \langle g_{1A}, \cdots, g_{kA}, h\rangle),$$

onde $g_{1A}, \cdots, g_{kA} \in \mathcal{O}_{N+mn}$ são os menores de ordem s de $F+A$, $I_r(M)$ denota o ideal gerado pelos menores de ordem r da matriz M, $h : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ é definido por $h(a,c,x) = f_a(x) - c$ e

$$J_{a,A,c} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1A}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{1A}}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{kA}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{kA}}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Agora, consideramos:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & (\tilde{C}, 0) & \to & (\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}, 0) \\ & (a,A,c,x) & \mapsto & (a,A,c) \end{array}$$

Temos $\pi^{-1}(0) = \{0\}$, pois se $\text{rank}(F(x)) < s-1$ ou x é ponto singular de $X \cap f^{-1}(0)$, então $x = 0$. Assim, pelo Lema 1.7.1, π é uma aplicação finita e, pelo Lema 1.7.2, $C = \pi(\tilde{C})$ é uma subvariedade analítica de $\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$.

Tomamos o aberto de Zariski $W = \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \setminus C$. Precisamos mostrar que W é não vazio.

De fato, dado $(0,0,c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$, com c um valor regular de f suficientemente próximo da origem. Temos $X \cap f^{-1}(c)$ suave, pois $S(X \cap f^{-1}(c)) \subset S(f)$, f tem singularidade isolada na origem e $X \cap f^{-1}(c)$ não contém a origem. Temos também que $\text{rank}(F(x)) = s-1$, para todo $x \in X \cap f^{-1}(c)$, pois X é uma SDI.

Portanto, $(0,0,c)$ pertence a W e, consequentemente, W é um conjunto não vazio.

□

Lema 2.1.2. *Seja $\phi : \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \to M_{m,n} \times \mathbb{C}$ a aplicação definida por $\phi(a,A,c,x) = (F_A(x), f_a(x) - c)$. Denotamos $\phi_{a,A,c} : \mathbb{C}_N \to M_{m,n} \times \mathbb{C}$ a aplicação $\phi_{a,A,c}(x) = \phi(a,A,c,x)$. Se (a,A,c) pertence a W, o aberto de Zariski dado pelo Lema 2.1.1, então $\phi_{a,A,c}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$.*

Demonstração. Podemos identificar $M_{m,n}\times\mathbb{C}\equiv\mathbb{C}^{mn}\times\mathbb{C}$ com sistema de coordenadas $((x_{ij})_{m\times n}, z)$.

Fixamos um representante $(a, A, c)\in W$, então pelo Lema 2.1.1, $X_A\cap f_a^{-1}(c)$ é suave e posto$(F_A(x)) = s-1$, para todo $x\in X_A\cap f_a^{-1}(c)$. Mostremos que $\phi_{a,A,c}$ é transversal a $\Sigma^{s-1}\times\{0\}$.

Seja $(B, 0)\in\phi_{a,A,c}(\mathbb{C}^N)\cap(\Sigma^{s-1}\times\{0\})$. Como $\Sigma^{s-1}\times\{0\}$ é aberto em $M^s_{m,n}\times\{0\}$, então o anel local $\frac{\mathcal{O}_{(mn+1,(B,0))}}{i(\Sigma^{s-1}\times\{0\})}$ é igual ao anel local $\frac{\mathcal{O}_{(mn+1,(B,0))}}{J}$, onde

$$J = I_s((x_{ij})_{m\times n}) + < z >.$$

Assim, $\frac{\mathcal{O}_{(mn+1,(B,0))}}{J}$ é um anel regular e $\frac{\mathcal{O}_N}{I}$ é regular, onde $I=\phi^*_{a,A,c}(J)$, pois $X_A\cap f_a^{-1}(c)$ é suave e rank$(F_A(x)) = s-1$, para todo $x\in X_A\cap f_a^{-1}(c)$.

Portanto, pelo Lema 1.6.2, $\phi_{a,A,c}$ é transversal a $\Sigma^{s-1}\times\{0\}$. □

Para relacionar a obstrução de Euler de uma função à característica de Euler evanescente da fibra, precisamos mostrar que a característica de Euler evanescente da fibra pode ser escrita como

$$\nu(X\cap f^{-1}(0), 0) = (-1)^{d-1}(\chi(X\cap f^{-1}(c)) - 1).$$

Observamos que a característica de Euler evanescente da fibra foi definida em ([50]) por

$$\nu(X\cap f^{-1}(0), 0) := (-1)^{\dim X-1}(\chi(X_A\cap f_a^{-1}(c)) - 1),$$

com $(a, A, c)\in\mathbb{C}^N\times M_{m,n}\times\mathbb{C}$ genérico, tal que, X_A é suave e rank$(F_A(x)) = s-1$ para todo $x\in X_A$; f_a é função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$. Estes valores $(a, A, c)\in\mathbb{C}^N\times M_{m,n}\times\mathbb{C}$ satisfazendo essas condições, pertencem ao aberto de Zariki W dado pelo Lema 2.1.1.

Então, precisamos provar que $\chi(X_A\cap f_a^{-1}(c))$ independe de (a, A, c) no aberto de Zariski dado pelo Lema 2.1.1.

Proposição 2.1.3. *Sejam $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0)\subset(\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI e $f : (X, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com singularidade isolada. Então, $\chi(X_A\cap f_a^{-1}(c))$ não depende de (a, A, c) pertencente ao aberto de Zariski W dado pelo Lema 2.1.1.*

Demonstração. Seja W o aberto de Zariski não vazio dado pelo Lema 2.1.1. Consideramos a aplicação,

$$\begin{array}{rccc}\pi: & \phi^{-1}(\Sigma^{s-1}\times\{0\}) & \to & W\\ & (a, A, c, x) & \mapsto & (a, A, c).\end{array}$$

Então, π é uma submersão. De fato, dado $(a, A, c) \in W$, então $\phi_{a,A,c}$ é transversal a $\Sigma^{s-1} \times \{0\}$, pelo Lema 2.1.2. Logo, para cada $x \in \phi^{-1}_{a,A,c}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})$,

$$d\phi_{a,A,c}|_x(T_x\mathbb{C}^N) + T_{\phi_{a,A,c}(x)}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) = T_{\phi_{a,A,c}(x)}(M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Então,

$$d\phi|_{(a,A,c,x)}(0 \times 0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N) + T_{\phi_{(a,A,c,x)}}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) = T_{\phi(a,A,c,x)}(M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Temos

$$d\pi|_{(a,A,c,x)} : \ T_{(a,A,c,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}) \ \rightarrow \ T_{(a,A,c)}(\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T_{(a,A,c,x)}(\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N) &= (d\phi|_{(a,A,c,x)})^{-1}(T_{\phi(a,A,c,x)}\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}) \\ &= 0 \times 0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N + (d\phi|_{(a,A,c,x)})^{-1}(T_{\phi(a,A,c,x)}\Sigma^{s-1} \times \{0\}) \\ &= 0 \times 0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N + T_{(a,A,c,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\}). \end{aligned}$$

Assim,

$$d\pi|_{(a,A,c,x)}(T_{(a,A,c,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})) = T_{(a,A,c)}(\mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}).$$

Portanto, (a, A, c) é um valor regular de π. Logo, π é submersão e, consequentemente, π é uma fibração sobre o conexo W. Como,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(a, A, c) &= \{(a, A, c, x); x \in \phi^{-1}(\Sigma^{s-1} \times \{0\})\} \\ &= \{(a, A, c, x); \phi(a, A, c, x) \in \Sigma^{s-1} \times \{0\}\} \\ &= \{(a, A, c, x); \phi_{a,A,c}(x) \in \Sigma^{s-1} \times \{0\}\} \\ &= \{(a, A, c, x); x \in X_A \cap f_a^{-1}(c)\}) \\ &= \{(a, A, c) \times X_A \cap f_a^{-1}(c)\}), \end{aligned}$$

temos,

$$\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) = \chi(\{(a, A, c) \times X_A \cap f_a^{-1}(c)\}) = \chi(\pi^{-1}(a, A, c)).$$

Portanto, $\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c))$ não depende de $(a, A, c) \in W$.

Observamos que sendo W complementar de um conjunto analítico, segue que W é conexo (ver [32]). $\square$

Corolário 2.1.4. *Sejam* $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ *uma SDI e* $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ *um germe de função analítica com singularidade isolada. Dado c valor regular de f suficientemente próximo da origem, a característica de Euler evanescente da fibra* $X \cap f^{-1}(0)$ *é dada por*

$$\nu(X \cap f^{-1}(0),0) = (-1)^{d-1}(\chi(X \cap f^{-1}(c)) - 1).$$

Demonstração. Por definição, a característica de Euler evanescente da fibra $X \cap f^{-1}(0)$ é

$$\nu(X \cap f^{-1}(0),0) = (-1)^{d-1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1),$$

onde $(a,A,c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ são valores genéricos tais que X_A é suave, $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$. Então, (a,A,c) pertence ao aberto de Zariski W, dado pelo Lema 2.1.1.

Logo, pela Proposição 2.1.3, a característica de Euler evanescente da fibra $X \cap f^{-1}(0)$ não depende de (a,A,c) pertencente a W.

Assim, dado $(0,0,c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$, com c um valor regular de $f : (X,0) \to \mathbb{C}$, então $(0,0,c)$ pertence a W, logo

$$\nu(X \cap f^{-1}(c)) = (-1)^{d-1}(\chi(X \cap f^{-1}(c)) - 1).$$

□

Recordamos as equações 1.1 e 1.2, as quais são válidas quando $(X,0)$ tem singularidade isolada

$$Eu_X(0) = \chi(X \cap p^{-1}(t_0)) \quad \text{e} \quad Eu_{f,X}(0) = Eu_X(0) - \chi(X \cap f^{-1}(t_0)),$$

estas equações serão utilizadas nos próximos resultados.

Agora podemos demonstrar o principal resultado desta seção, o qual relaciona a obstrução de Euler de uma função à característica de Euler evanescente da fibra.

Teorema 2.1.5. *Sejam* $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ *uma SDI,* $f : (X,0) \to \mathbb{C}$ *um germe de função analítica com singularidade isolada e* $p : (X,0) \to \mathbb{C}$ *é uma aplicação linear genérica. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\nu(X \cap f^{-1}(0),0) - \nu(X \cap p^{-1}(0),0)).$$

Demonstração. Pelas equações 1.1 e 1.2, obtemos,

$$Eu_{f,X}(0) = \chi(X \cap p^{-1}(t_0)) - \chi(X \cap f^{-1}(t_0)).$$

Pelo Corolário 2.1.4,

$$\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) = (-1)^{d-1}(\chi(X \cap f^{-1}(t_0)) - 1)$$

e

$$\nu(X \cap p^{-1}(0), 0) = (-1)^{d-1}(\chi(X \cap p^{-1}(t_0)) - 1),$$

portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)).$$

□

Segue deste resultado, a relação entre a obstrução de Euler de uma função e o número de Milnor determinantal.

Pelo Teorema 2.0.3 e pelo Teorema 2.1.5, temos

$$\begin{aligned} Eu_{f,X}(0) &= (-1)^d(\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)) \\ &= (-1)^d(\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + \nu(X, 0) - \nu(X, 0) - \nu(X \cap p^{-1}(0), 0)) \\ &= (-1)^d(\mu_D(f) - m_d(X, 0)), \end{aligned}$$

o que demonstra o corolário a seguir.

Corolário 2.1.6. *Sejam $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com singularidade isolada. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\mu_D(f) - m_d(X, 0)).$$

Para germes $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ e $f : (X, 0) \to \mathbb{C}$, o número de Brasselet foi definido por Dutertre e Grulha Jr ([20]). Em particular, quando f tem singularidade isolada, o número de Brasselet é igual a

$$B_{f,X}(0) = Eu_X(0) - Eu_{f,X}(0).$$

Das equações 1.1 e 1.2, sabemos que

$$Eu_X(0) - Eu_{f,X}(0) = \chi(X \cap f^{-1}(c)),$$

para c um número complexo genérico. Além disso, pelo corolário 2.1.4, temos

$$\chi(X \cap f^{-1}(c)) = (-1)^{d-1}\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + 1.$$

Assim, temos a seguinte proposição, a qual relaciona o número de Brasselet à característica de Euler evanescente da fibra.

Proposição 2.1.7. *Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com singularidade isolada. Então,*

$$B_{f,X}(0) = (-1)^{d-1}\nu(X \cap f^{-1}(0), 0) + 1.$$

Podemos, também, relacionar a obstrução de Euler de uma função $Eu_{f,X}(0)$ ao número de Milnor $\mu(f)$, para um germe de função finita $f : (X, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$, onde X é uma curva reduzida e $\mu(f)$ é o número de Milnor como definido por Goryunov ([27]) e Mond, van Straten ([48]). Pelas equações 1.1 e 1.2, temos

$$Eu_{f,X}(0) = \chi(X \cap p^{-1}(c)) - \chi(X \cap f^{-1}(c)),$$

onde p é uma aplicação linear genérica e c é um número complexo genérico. Observamos que $\chi(X \cap p^{-1}(c))$ é igual a multiplicidade de $(X, 0)$, $m_0(X, 0)$ e $\chi(X \cap f^{-1}(c))$ é o grau de f, $\deg f$. Nuño-Ballesteros e Tomazella ([51]) provam que

$$\deg f = \mu(f) - \mu(X, 0) + 1,$$

onde $\mu(X, 0)$ é o número de Milnor da curva como definido por Buchweitz e Greuel ([10]). Além disso, temos (ver [51])

$$m_0(X, 0) = 1 + m_1(X, 0) - \mu(X, 0),$$

onde $m_1(X, 0)$ é a primeira multiplicidade polar como definida em [51]. Portanto,

$$\begin{aligned} Eu_{f,X}(0) &= m_0(X, 0) - \deg f \\ &= 1 + m_1(X, 0) - \mu(X, 0) - \mu(f) + \mu(X, 0) - 1 \\ &= m_1(X, 0) - \mu(f) \\ &= (-1)[\mu(f) - m_1(X, 0)]. \end{aligned}$$

Obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.8. *Seja $f : (X, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ um germe de função finita com singularidade isolada em uma curva reduzida $(X, 0)$. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)[\mu(f) - m_1(X, 0)] \quad e \quad B_{f,X}(0) = \deg(f).$$

2.2 Alguns exemplos e aplicações

Exemplo 2.2.1. Seja $F : (\mathbb{C}^4, 0) \to M_{2,3}$ o germe de aplicação definido por

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$$

e considere $(X, 0) = F^{-1}(M_{2,3}^2)$. Seja também $f : (X, 0) \to \mathbb{C}$ dado por $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + zw$.

Considerando, por exemplo,

$$A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$p = 2x - 3y + 4z - w$ e fazendo os cálculos com o Mathematica, obtemos

$$m_2(X, 0) = \#\Sigma(p|_{X_A}) = 3 \text{ e } \mu_D(f) = 10.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = 10 - 3 = 7.$$

Exemplo 2.2.2. Seja $F : (\mathbb{C}^4, 0) \to M_{2,3}$ o germe de aplicação definido por

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$$

e considere $(X, 0) = F^{-1}(M_{2,3}^2)$. Seja também $f : (X, 0) \to \mathbb{C}$ dado por $f(x, y, z, w) = x^4 + y^2 + w$.

Fazendo os cálculos com o Mathematica, obtemos

$$m_2(X, 0) = 3 \text{ e } \mu_D(f) = 9.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = 9 - 3 = 6.$$

Observação 2.2.3. No exemplo 2.2.2, $(X, 0)$ é uma superfície tórica. Dalbelo, Grulha Jr. e Pereira ([13]) provam uma fórmula para calcular $m_2(X, 0)$ neste caso. Também, de acordo com [13, Exemplo 5.1], a obstrução de Euler de f, no exemplo 2.2.2, pode ser calculada usando a fórmula $Eu_{f,X}(0) = n^2 - n$, com $n = 3$.

Exemplo 2.2.4. Seja $F:(\mathbb{C}^5,0)\to M_{2,4}$ o germe de aplicação definido por

$$F(x,y,z,w,v)=\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ y & z & w & v \end{pmatrix}$$

e considere $(X,0)=F^{-1}(M_{2,4}^2)$. Seja também $f:(X,0)\to\mathbb{C}$ dado por $f(x,y,z,w,v)=x^3+v+yz$.

Considerando, por exemplo,

$$A=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -1 & 9 & -7 & -4 \\ -4 & 7 & -8 & -5 \end{pmatrix},$$

$p=4x+6y-5z+8w-8v$ e fazendo os cálculos com o Mathematica, obtemos

$$m_2(X,0)=\#\Sigma(p|_{X_A})=4 \text{ e } \mu_D(f)=12.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0)=12-4=8.$$

Exemplo 2.2.5. Seja $F:(\mathbb{C}^5,0)\to M_{2,3}$ o germe de aplicação definido por

$$F(x,y,z,w,v)=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & w & v \end{pmatrix}$$

e considere $(X,0)=F^{-1}(M_{2,3}^2)$. Seja também $f:(X,0)\to\mathbb{C}$ dado por $f(x,y,z,w,v)=x^2+y^2+z^2+w^2+v^2$.

Fazendo os cálculos com o Mathematica, obtemos

$$m_3(X,0)=0 \text{ e } \mu_D(f)=10.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0)=-10.$$

Quando $(X,0)$ é uma ICIS definida pela aplicação $\phi:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^k,0)$, então

$$\mu_D(f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi\rangle+J(\phi,f)}$$

e

$$m_d(X,0)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_n}{\langle\phi\rangle+J(\phi,p)}.$$

Portanto, no caso em que $(X,0)$ é uma ICIS, aplicamos o Corolário 2.1.6 e obtemos uma maneira fácil de calcular a obstrução de Euler de um germe de função com singularidade isolada definida em uma ICIS.

Teorema 2.2.6. *Seja* $(X,0) = (\phi^{-1}(0),0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ *uma ICIS e seja* $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ *um germe de função com singularidade isolada. Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d \left(\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi \rangle + J(f,\phi)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \phi \rangle + J(p,\phi)} \right),$$

onde $p : (X,0) \to \mathbb{C}$ *é uma aplicação linear genérica.*

Exemplo 2.2.7. Considere $(X,0) \subset \mathbb{C}^3$ o germe definido como os zeros da função $\phi(x,y,z) = x^2 + y^3 - z^5$ e $f : (X,0) \to \mathbb{C}$ o germe de função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^{10}$.

Podemos calcular a obstrução de Euler de f usando o teorema anterior. Para isto, tomamos uma aplicação linear genérica, por exemplo, $p(x,y,z) = 2x + 3y - 2$. Usando o software Singular [19], calculamos as dimensões das álgebras

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle \phi \rangle + J(f,\phi)} = 25 \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle \phi \rangle + J(p,\phi)} = 10.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^2(25 - 10) = 15.$$

Exemplo 2.2.8. Considere $(X,0) \subset \mathbb{C}^4$ o germe definido como os zeros da função $\phi(x,y,z,w) = x^2 + y^3 - z^5 + w^2$ e $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ o germe de função $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - wx$.

Tomamos uma aplicação linear genérica $p(x,y,z) = x + y + 7z - 5w$. Usando o software Singular, calculamos as dimensões das álgebras

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{\langle \phi \rangle + J(f,\phi)} = 21 \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{\langle \phi \rangle + J(p,\phi)} = 10.$$

Portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^3(21 - 10) = -11.$$

Também, podemos aplicar o resultado

$$Eu_{f,X}(0) = (-1)^d(\mu_D(f) - m_d(X,0)),$$

para mostrar que o número de Milnor determinantal ser constante para uma família é equivalente a obstrução de Euler de uma função ser constante para a família.

Proposição 2.2.9. *Seja* $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ *uma SDI e* $G : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^r, 0) \to \mathbb{C}$ *uma família de funções com singularidade isolada, denote* $G(x,u) = g_u(x)$*. Então são equivalentes:*

1. *$Eu_{g_u,X}(0)$ é constante para a família;*

2. *$\mu_D(g_u)$ é constante para a família.*

Observamos que no caso em que $(X,0)$ é ICIS, o resultado anterior foi provado por Grulha Jr. ([16]).

Capítulo 3

Conjectura de Mond para aplicações entre curvas planas

A conjectura de Mond propõe uma desigualdade entre dois invariantes definidos para germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ quando $(n, n+1)$ estão nas boas dimensões de Mather. Estes invariantes são a $\mathscr{A}_e$-codimensão, $\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)$, a qual é o número mínimo de parâmetros necessários em uma deformação versal de f e o número de Milnor da imagem, $\mu_I(f)$, definido por Siersma ([58]) e Mond ([43]), o qual é definido considerando f_s uma estabilização de f, então X_s, a imagem de f_s, tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas e o número de Milnor da imagem foi definido como o número de esferas no bouquet.

A conjectura foi inspirada pela desigualdade entre dois invariantes definidos para germes de hipersuperfície com singularidade isolada $(X, 0)$, o número de Tjurina, o qual é o número mínimo de parâmetros necessários em uma deformação versal de $(X, 0)$ e o número de Milnor, o qual é o número de esferas na fibra de Milnor de $(X, 0)$. Neste caso, o número de Tjurina é menor ou igual ao número de Milnor, com igualdade se, e somente se, $(X, 0)$ é quase homogênea.

Seguindo isto, a conjectura de Mond sugere a seguinte desigualdade,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) \leq \mu_I(f),$$

com igualdade se, e somente se, f é quase homogênea.

Mond em ([44]) demonstra a conjectura no caso $n = 1$. Para $n = 2$, foi demonstrada independentemente por De Jong e Van Straten ([18]) e Mond ([43]). Para $n \geq 3$, ainda é um problema em aberto, a qual é suportada por muitos exemplos e em alguns casos particulares foi resolvida (por exemplo, [11, 12, 36, 37, 49, 53, 57]). Para mais detalhes sobre a conjectura de Mond, sugerimos [45].

Motivados pelo trabalho de Mond ([44]), estudamos o caso de germes de aplicações entre curvas planas. Neste capítulo, introduzimos o número de Milnor da imagem para germes de aplicações $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, onde $(X, 0)$ uma curva plana com singularidade isolada. Damos uma caracterização, baseados em [44], para a $\mathscr{A}_e$-codimensão e finalizamos o capítulo apresentando o teorema que responde afirmativamente a conjectura de Mond neste contexto.

3.1 $\mathscr{A}_e$-codimensão para aplicações entre curvas planas

Nesta seção, consideramos germes de aplicações entre curvas planas e mostramos uma relação para a $\mathscr{A}_e$-codimensão, isto nos permitirá relacionar a $\mathscr{A}_e$-codimensão com o número de Milnor da imagem, o que será feito na seção seguinte. Observamos que a relação para $\mathscr{A}_e$-codimensão dada por Mond na demonstração do Teorema 2.3 ([44]) nos motivou a obtermos um resultado similar. A fórmula dada por Mond para germes de aplicações $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ é a seguinte,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_1}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}},$$

onde $(Y, 0)$ é a imagem de f, a qual é definida pelo germe de função $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$, ou seja, $(Y, 0) = (g^{-1}(0), 0)$, denotando por (u, v) as coordenadas na meta de f, temos $J_g = \langle \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v} \rangle$ o ideal jacobiano de g e

$$ev : \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_1) + \omega f(\Theta_2)} \to \frac{J_g \mathcal{O}_1}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}},$$

é definida por $ev([\alpha]) = [\alpha(g)]$, onde $\alpha = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial v} \in \Theta(f)$ e $\alpha(g) = \alpha_1 \frac{\partial g}{\partial u} \circ f + \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial v} \circ f \in J_g \mathcal{O}_1$.

A partir deste ponto, consideramos nesta seção $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ onde $(X, 0)$ é uma curva plana com singularidade isolada. Consideramos $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem $(Y, 0)$, onde o grau da aplicação é o número de imagens inversas de um valor genérico. Observe que pelo Corolário

1.8.17, f é estável se, e somente se, X é suave e f é uma imersão com somente pontos duplos transversais, chamados nós. Consequentemente, f é $\mathscr{A}$-finito se, e somente se, f é finita e tem grau 1 sobre sua imagem.

Denotamos por (x, y) e (u, v) as coordenadas em $\mathbb{C}^2$ na fonte e na meta, respectivamente. Assumimos que f é a restrição de um germe de aplicação holomorfa $\tilde{f} = (f_1, f_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Consideramos $g, h \in \mathcal{O}_2$ tais que $g(u, v) = 0$ e $h(x, y) = 0$ são as equações reduzidas de $(Y, 0)$ e $(X, 0)$, respectivamente. Se f é $\mathscr{A}$-finito, então X é suave e f é regular fora da origem. Então,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{J(h, f)} < \infty,$$

onde $J(h, f)$ é o ideal jacobiano de (h, f), i.e., é o ideal em $\mathcal{O}_{X,0}$ generado pelos menores de ordem 2 da matriz jacobiana de (h, f_1, f_2). Denotamos estes menores por,

$$J_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Seja J_g o ideal jacobiano de g. Consideramos a aplicação avaliação

$$ev : \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)} \to \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}}$$

definida por $ev([\xi]) = [\xi(g)]$, para cada campo de vetor $\xi \in \Theta(f)$. Temos $\xi = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$, com a, $b \in \mathcal{O}_{X,0}$, então $\xi(g) = a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f$.

Recordamos, ver seção 1.8, a definição da $\mathscr{A}_e$-codimensão de f neste caso,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)}.$$

Proposição 3.1.1. *Sejam $(X, 0)$ uma curva plana e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de aplicação finita. Então, a aplicação ev está bem definida e é sobrejetora, logo*

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}}.$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que $J_g \mathcal{O}_{Y,0} \subset J_g \mathcal{O}_{X,0}$. De fato,

$$J_g \mathcal{O}_{X,0} = \left\{ a\left(\frac{\partial g}{\partial u} \circ f\right) + b\left(\frac{\partial g}{\partial v} \circ f\right);\ a, b \in \mathcal{O}_{X,0} \right\}.$$

Considerando $\bar{f} : X \to Y$ a restrição de f à imagem, logo $\bar{f}^* : \mathcal{O}_{Y,0} \to \mathcal{O}_{X,0}$. E consideramos a inclusão $i : Y \to \mathbb{C}^2$, logo $i^* : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_{Y,0}$. Então,

$$J_g \mathcal{O}_{Y,0} = \left\{ (a \circ \bar{f})\left(\left(\frac{\partial g}{\partial u} \circ i\right) \circ \bar{f}\right) + (b \circ \bar{f})\left(\left(\frac{\partial g}{\partial v} \circ i\right) \circ \bar{f}\right);\ a, b \in \mathcal{O}_{Y,0} \right\}.$$

Portanto $J_g\mathcal{O}_{Y,0} \subset J_g\mathcal{O}_{X,0}$.

A aplicação ev está bem definida. De fato, seja $\xi \in tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)$.

Se $\xi \in tf(\Theta_{X,0})$, então $\xi = tf(\eta)$, $\eta \in \Theta_{X,0} = \mathrm{Derlog}(X,0)/(\langle h\rangle\, \Theta_2)$, com $\eta(h) = 0$ em $\mathcal{O}_{X,0}$. Lembramos que g é a equação que define $Y = f(X)$ e esta satisfaz $g \circ \tilde{f} = \mu h$, para alguma função $\mu \in \mathcal{O}_2$. Assim,

$$\xi(g) = tf(\eta)(g) = (d\tilde{f} \circ \eta)(g) = \eta(g \circ \tilde{f}) = \eta(\mu h) = 0.$$

Se $\xi \in \omega f(\Theta_2)$, então $\xi = \zeta \circ f$, $\zeta \in \Theta_2$. Escrevemos $\zeta = \tilde{a}\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{b}\frac{\partial}{\partial v}$, com $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{O}_2$. Logo,

$$\xi = \zeta \circ f = (\tilde{a} \circ f)\, \frac{\partial}{\partial u} + \left(\tilde{b} \circ f\right) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\xi(g) &= (\tilde{a} \circ f)\, \frac{\partial g}{\partial u} \circ f + \left(\tilde{b} \circ f\right) \frac{\partial g}{\partial v} \circ f = \\
&= \left((\tilde{a} \circ i) \circ \bar{f}\right) \left(\left(\frac{\partial g}{\partial u} \circ i\right) \circ \bar{f}\right) + \left(\left(\tilde{b} \circ i\right) \circ \bar{f}\right) \left(\left(\frac{\partial g}{\partial v} \circ i\right) \circ \bar{f}\right),
\end{aligned}$$

com $(\tilde{a} \circ i)\,, \left(\tilde{b} \circ i\right) \in \mathcal{O}_{Y,0}$.

Portanto, se $\xi \in tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)$, então $\xi(g) \in J_g\mathcal{O}_{Y,0}$. Logo, a aplicação ev está bem definida.

Agora, seja

$$a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f \in J_g\mathcal{O}_{X,0},$$

Logo, tomando $\xi = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} \in \Theta(f)$, obtemos

$$\xi(g) = a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f.$$

Portanto, ev é sobrejetora. $\square$

A aplicação avaliação não é injetiva em geral. Então precisamos conhecer seu núcleo para obter uma caracterização para a $\mathscr{A}_e$-codimensão de f. No Teorema 3.1.4, mostraremos um isomorfismo entre $\ker(ev)$ e $\ker(\widetilde{ev})$, onde a aplicação

$$\widetilde{ev} : \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0})} \to J_g\mathcal{O}_{X,0},$$

é definida por $\widetilde{ev}([\xi]) = \xi(g)$. Observamos que pela prova do Lema 3.1.1 segue que $\widetilde{ev}$ está bem definida e é sobrejetora. A vantagem de se trabalhar com $\widetilde{ev}$ é o fato da aplicação ser um morfismo de $\mathcal{O}_{X,0}$-módulos.

Para mostrar o isomorfismo, necessitamos de alguns lemas.

Da observação 1.8.15, existe G uma deformação estável da aplicação

$$(h, \tilde{f}) : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0),$$

denotamos por $(Z, 0)$ a imagem de G e o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^r, 0) & \xrightarrow{G} & (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^r, 0) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle \gamma}\uparrow \\ (X, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^2, 0) \end{array}$$

onde $i(x) = (x, 0)$ e $\gamma(u, v) = (0, u, v, 0)$.

Seja $C(G)$ o ideal condutor de $\mathcal{O}_{2+r}$ em $\mathcal{O}_{Z,0}$, o qual é o maior ideal de $\mathcal{O}_{Z,0}$ que também um ideal em $\mathcal{O}_{2+r}$. Por R. Piene ([54]), $C(G)$ é gerado em $\mathcal{O}_{2+r}$ por λ_G tal que

$$\frac{\partial H}{\partial w_i} \circ G = (-1)^i \lambda_G \det(dG_1, \cdots, dG_{i-1}, dG_{i+1}, \cdots, dG_{3+r}),$$

onde $H : \mathbb{C}^{3+r} \to \mathbb{C}$ é a equação implícita de $(Z, 0)$ e $i = 1, \cdots, 3 + r$.

Definimos $\lambda_f = \lambda_G \circ i \in \mathcal{O}_{X,0}$ e denotamos por $C(f)$ o ideal gerado por λ_f em $\mathcal{O}_{X,0}$.

Lema 3.1.2. *Com estas notações, temos*

$$\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = \lambda_f J_2 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -\lambda_f J_1.$$

Demonstração. Da observação 1.8.15, $\gamma \circ f = G \circ i$, então,

$$\frac{\partial H}{\partial w_2} \circ G \circ i = \frac{\partial H}{\partial w_2} \circ \gamma \circ f = \frac{\partial g}{\partial u} \circ f \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial w_3} \circ G \circ i = \frac{\partial H}{\partial w_3} \circ \gamma \circ f = \frac{\partial g}{\partial v} \circ f.$$

Logo,

$$\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = (\lambda_G \circ i) \det(dG_1, dG_3, \cdots, dG_{3+r}) \circ i$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -(\lambda_G \circ i) \det(dG_1, dG_2, dG_4, \cdots, dG_{3+r}) \circ i.$$

Por outro lado,

$$\det(dG_1, dG_3, \cdots, dG_{3+r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_3}{\partial x} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_3}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial s_1} & \frac{\partial G_3}{\partial s_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial s_r} & \frac{\partial G_3}{\partial s_r} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\frac{\partial G_3}{\partial x}$$

e

$$\det(dG_1, dG_2, dG_4, \cdots, dG_{3+r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial x} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial s_1} & \frac{\partial G_2}{\partial s_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial s_r} & \frac{\partial G_2}{\partial s_r} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det(dG_1, dG_3, \cdots, dG_{3+r}) \circ i &= \frac{\partial G_1}{\partial x} \circ i \ \frac{\partial G_3}{\partial y} \circ i - \frac{\partial G_1}{\partial y} \circ i \ \frac{\partial G_3}{\partial x} \circ i = \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} = J_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(dG_1, dG_2, dG_4, \cdots, dG_{3+r}) \circ i &= \frac{\partial G_1}{\partial x} \circ i \ \frac{\partial G_2}{\partial y} \circ i - \frac{\partial G_1}{\partial y} \circ i \ \frac{\partial G_2}{\partial x} \circ i = \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x} = J_1. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = (\lambda_G \circ i)J_2 = \lambda_f J_2$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -(\lambda_G \circ i)J_1 = -\lambda_f J_1.$$

□

Lema 3.1.3. *Seja $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ finita e de grau 1 sobre sua imagem $(Y, 0)$. Então,*

$$\omega f(\mathrm{Derlog}(Y, 0)) \subseteq tf(\Theta_{X,0}).$$

Demonstração. Consideramos $\alpha : (\mathbb{C}, S) \to (X, 0)$ uma parametrização de $(X, 0)$, então a composição $f \circ \alpha : (\mathbb{C}, S) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ é também finita e tem grau 1 sobre sua imagem $(Y, 0)$, logo é $\mathscr{A}$-finita. Aplicamos o Lema 1.8.7 para $f \circ \alpha$, como $Lift(f \circ \alpha) = \mathrm{Derlog}(Y, 0)$, temos

$$t(f \circ \alpha)(\Theta_1) \supseteq \omega(f \circ \alpha)(\mathrm{Derlog}(Y, 0)).$$

Para cada $\xi \in \mathrm{Derlog}(Y, 0)$, existe $\eta \in \Theta_1$ tal que $t(f \circ \alpha)(\eta) = \omega(f \circ \alpha)(\xi)$, ou seja, $d(f \circ \alpha) \circ \eta = \xi \circ (f \circ \alpha)$ e pela regra da cadeia,

$$df \circ d\alpha \circ \eta = \xi \circ f \circ \alpha.$$

Definimos σ em $\Theta_{X,0}$ por $\sigma_x = d\alpha(\eta_t)$, onde $x = \alpha(t)$, i.e., $d\alpha \circ \eta = \sigma \circ \alpha$. Obtemos, $df \circ \sigma \circ \alpha = \xi \circ f \circ \alpha$, consequentemente,

$$tf(\sigma) = d\tilde{f} \circ \sigma = \xi \circ f = \omega f(\xi).$$

Então, $\omega f(\xi) \in tf(\Theta_{X,0})$. $\square$

Teorema 3.1.4. *Seja $(X,0)$ uma curva plana e seja $f : (X,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação $\mathscr{A}$-finito. Então,*

$$\ker(ev) \cong \ker(\widetilde{ev}).$$

Demonstração. Definimos o morfismo $\ker(\widetilde{ev}) \to \ker(ev)$ por $[\xi] \mapsto [\xi]$, onde as classes são consideradas nos seus respectivos quocientes. Como $tf(\Theta_{X,0}) \subseteq tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)$, o morfismo está bem definido e é sobrejetor. Para ver que o morfismo é injetor, temos que provar que se $[\xi] \in \ker(\widetilde{ev})$ é tal que $\xi \in tf(\Theta_{X,0}) + \omega f(\Theta_2)$, então $\xi \in tf(\Theta_{X,0})$. De fato, seja $\xi = \xi_1 + \xi_2$, com $\xi_1 \in tf(\Theta_{X,0})$ e $\xi_2 \in \omega f(\Theta_2)$. Consequentemente, $0 = \xi(g) = \xi_1(g) + \xi_2(g)$ e como $\xi_1(g) = 0$, segue que $\xi_2(g) = 0$. Consideramos $\zeta \in \Theta_2$ tal que $\xi_2 = \omega f(\zeta)$, onde $\zeta = \alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}$, para algum $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_2$. Então,

$$0 = \xi_2(g) = \alpha \circ f \frac{\partial g}{\partial u} \circ f + \beta \circ f \frac{\partial g}{\partial v} \circ f = \left(\alpha\frac{\partial g}{\partial u} + \beta\frac{\partial g}{\partial v}\right) \circ f.$$

Assim, $\zeta(g) \circ f = 0$, o que implica que $\zeta(g) = \kappa g$, para algum $\kappa \in \mathcal{O}_2$. Por definição, segue que $\zeta \in \mathrm{Derlog}(Y,0)$ e pelo Lema 3.1.3,

$$\xi_2 = \omega f(\zeta) \in tf(\Theta_{X,0}).$$

Portanto, $\xi \in tf(\Theta_{X,0})$. $\square$

Pelo Teorema 3.1.4, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(\widetilde{ev}).$$

Usando a igualdade acima mostraremos que,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = \tau(X,0),$$

onde $\tau(X,0)$ é o número de Tjurina de $(X,0)$ definido por Tjurina em ([63]).

Para isto, necessitamos dos seguintes lemas.

Lema 3.1.5. *Seja* $(X,0)$ *uma curva plana e seja* $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ *um germe de aplicação* $\mathscr{A}$*-finito. Então,* λ_f *não é um divisor de zero de* $\mathcal{O}_{X,0}$.

Demonstração. Observamos que $\mathcal{O}_2$ é Cohen-Macaulay, pois é regular. Logo, podemos aplicar Lema 1.1.6.

Mostraremos que $ht(\langle h,\lambda_f\rangle)=2$. Então, pelo Lema 1.1.6, teremos que h,λ_f é uma sequência regular em $\mathcal{O}_2$. Consequentemente, λ_f não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_{X,0}=\frac{\mathcal{O}_2}{\langle h\rangle}$. Temos $ht(\langle h,\lambda_f\rangle)=2$, de fato, segue de ([31], Corolário 7.7.10) que,

$$\dim\mathcal{O}_2=ht(\langle h,\lambda_f\rangle)+\dim\frac{\mathcal{O}_2}{\langle h,\lambda_f\rangle},$$

como $\dim\mathcal{O}_2=2$, basta mostrar que $\dim\frac{\mathcal{O}_2}{\langle h,\lambda_f\rangle}=0$. Observamos que $\dim\frac{\mathcal{O}_2}{\langle h,\lambda_f\rangle}=0$ se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_2}{\langle h,\lambda_f\rangle}<\infty$. Agora veremos que $\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle\lambda_f\rangle}<\infty$. Isto é equivalente a mostrar que λ_f não é identicamente nulo em cada ramo $(X_i,0)$ de $(X,0)$. Seja $\alpha:(\mathbb{C},0)\to(X_i,0)$ uma parametrização do ramo. Aplicamos o resultado de Piene à α, então o ideal condutor de $\mathcal{O}_{X_i,0}$ em $\mathcal{O}_1$ é gerado por λ_α em $\mathcal{O}_1$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial x}\circ\alpha=\lambda_\alpha\alpha_2',\quad \frac{\partial h}{\partial y}\circ\alpha=-\lambda_\alpha\alpha_1'.$$

Por outro lado, como $g\circ\tilde{f}=\mu h$ para alguma função $\mu\in\mathcal{O}_2$, pela regra da cadeia,

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial(g\circ\tilde{f})}{\partial x}=\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ f\right)\frac{\partial f_1}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ f\right)\frac{\partial f_2}{\partial x}=\lambda_f\left(J_2\frac{\partial f_1}{\partial x}-J_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\right).$$

Compondo com α,

$$(\mu\circ\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}\circ\alpha=(\lambda_f\circ\alpha)\left(J_2\frac{\partial f_1}{\partial x}-J_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\circ\alpha=(\lambda_f\circ\alpha)\left(J_0\frac{\partial h}{\partial x}\right)\circ\alpha.$$

Mas isto implica que $\lambda_f\circ\alpha$ não pode ser identicamente nulo. $\square$

Para simplificar a notação, usaremos as coordenadas na fonte e na meta para identificar $\Theta_{X,0}\subset\mathcal{O}^2_{X,0}$ e $\Theta(f)\cong\mathcal{O}^2_{X,0}$. Com estas identificações, o morfismo $tf:\Theta_{X,0}\to\Theta(f)$ é identificado com a restrição do morfismo $tf:\mathcal{O}^2_{X,0}\to\mathcal{O}^2_{X,0}$, cuja matriz na base canônica é a matriz jacobiana de f.

Lema 3.1.6. *Seja* $(X,0)$ *uma curva plana e seja* $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ *um germe de aplicação* $\mathscr{A}$*-finito. Denotamos por* E *o epimorfismo* $E:\mathcal{O}^2_{X,0}\to\langle J_2,-J_1\rangle$ *dado por* $E(a,b)=aJ_2-bJ_1$*. Então,*

$$\ker(ev)\cong\frac{\ker(E)}{tf(\Theta_{X,0})}.$$

Demonstração. Considere a aplicação, $\phi : \mathcal{O}^2_{X,0} \to J_g\mathcal{O}_{X,0}$, dada por

$$(a,b) \mapsto a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f.$$

Do Teorema 3.1.4, temos $\ker(ev) \cong \ker(\widetilde{ev})$, então,

$$\ker(ev) \cong \frac{\ker(\phi)}{tf(\Theta_{X,0})}.$$

Resta mostrar que $\ker(\phi) = \ker(E)$. Seja $(a,b) \in \ker(E)$, então $aJ_2 - bJ_1 = 0$. Pelo Lema 3.1.2, temos

$$\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = \lambda_f J_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -\lambda_f J_1.$$

Como $aJ_2 - bJ_1 = 0$, então,

$$0 = \lambda_f(aJ_2 - bJ_1) = a\lambda_f J_2 - b\lambda_f J_1 = a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f,$$

portanto, $(a,b) \in \ker(\phi)$. Por outro lado, seja $(a,b) \in \ker(\phi)$, logo $a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = 0$. Então,

$$0 = a\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + b\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = a\lambda_f J_2 - b\lambda_f J_1 = \lambda_f(aJ_2 - bJ_1).$$

Pelo Lema 3.1.5, λ_f não é um divisor de zero em $\mathcal{O}_{X,0}$, portanto, $aJ_2 - bJ_1 = 0$. Logo, $(a,b) \in \ker(E)$. □

Observação 3.1.7. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0 \rangle} < \infty. \tag{3.1}$$

Consequentemente, J_0 não é um divisor de zero em $\mathcal{O}_{X,0}$.

De fato, como $\mathcal{O}_{X,0}$ é 1-dimensional e (J_0, J_1, J_2) é um ideal de definição, para valores genéricos $a, b, c \in \mathbb{C}$, a combinação linear $aJ_0 + bJ_1 + cJ_2$ define um ideal de parâmetros, i.e.,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{(aJ_0 + bJ_1 + cJ_2)} < \infty,$$

(ver [41, Teorema 14.14]). Sendo verdade para valores genéricos a, b, c, podemos escolher tais valores com a condição adicional $a \neq 0$. Agora definimos

$$\hat{f} = (\lambda_{11}f_1 + \lambda_{12}h, \lambda_{21}f_2 + \lambda_{22}h),$$

para $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. A restrição de $\hat{f}$ à $(X,0)$ é um germe de aplicação o qual é $\mathscr{A}$-equivalente à f. Agora, o determinante Jacobiano $\tilde{J}_0$ de $\hat{f}$ é

$$\tilde{J}_0 = \lambda_{11}\lambda_{21}J_0 - \lambda_{11}\lambda_{22}J_1 + \lambda_{12}\lambda_{21}J_2,$$

então é suficiente tomar $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{21} = a$, $\lambda_{22} = -b$ e $\lambda_{12} = c/a$.

Lema 3.1.8. *Seja $f : (X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação satisfazendo (3.1). Então,*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(tf) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0\rangle}.$$

Demonstração. Consideramos primeiramente o caso em que $(X,0)$ é suave e f é regular. Isto implica que $J(h,f) = \mathcal{O}_{X,0}$ e assim, um dos geradores J_i, $i = 0,1,2$ deve ser uma unidade em $\mathcal{O}_{X,0}$. Se J_0 é uma unidade, então $\mathcal{O}_{X,0} = \langle J_0\rangle$, mas tf é um isomorfismo, então $\operatorname{coker}(tf) = 0$ e temos a igualdade. Suponha agora que J_1 é uma unidade, o caso para J_2 será análogo. Então, $J_1(0) \neq 0$ e então, (f_1,h) tem posto 2. Depois de uma mudança de coordenadas holomorfa em $(\mathbb{C}^2,0)$, podemos assumir que $(f_1,h)(x,y) = (x,y)$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}^2_{X,0}}{tf\left(\mathcal{O}^2_{X,0}\right)} = \frac{\mathcal{O}^2_{X,0}}{\mathcal{O}_{X,0}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}\right\}} \cong \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle\frac{\partial f_2}{\partial y}\rangle} = \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0\rangle}.$$

Agora, provamos a igualdade no caso geral. Seja $F : (\mathcal{X},0)\to(\mathbb{C}^3,0)$ uma estabilização de f. Denotamos $F = (f_t,t)$, assim $f_0 = f$ e $f_t : X_t\to\mathbb{C}^2$ é estável para todo $t \neq 0$. Em particular, X_t é suave e f_t é regular se $t \neq 0$. A existência de tal estabilização é garantida pelo Teorema 1.8.16.

Denotamos por $\tilde{t}F : \mathcal{O}^2_{\mathcal{X},0}\to\mathcal{O}^2_{\mathcal{X},0}$ o morfismo de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$-módulos induzido pela matriz Jacobiana de f_t (com respeito as variáveis x,y). Seja $M = \operatorname{coker}(\tilde{t}f)$ então, por hipótese

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{M}{\langle t\rangle M} = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(tf) < \infty,$$

consequentemente M tem dimensão ≤ 1. Desde que $(\mathcal{X},0)$ é Cohen-Macaulay de dimensão 2 e M tem uma representação sobre $\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}$ por uma matriz 2×2, M é um módulo determinantal no sentido de Buchsbaum-Rim [9]. Portanto, M é Cohen-Macaulay e temos a propriedade da conservação da multiplicidade. Isto significa que para todo $t \neq 0$:

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(tf) = \sum_{x\in X_t} \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(\{tf_t : \mathcal{O}^2_{X_t,x}\to\mathcal{O}^2_{X_t,x}\}).$$

Mas, o mesmo argumento pode ser aplicado ao módulo $N = \mathcal{O}_{\mathcal{X},0}/\langle J_0(f_t)\rangle$, onde $J_0(f_t)$ é o determinante Jacobiano de f_t. Por um lado,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{N}{\langle t\rangle N} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0\rangle} < \infty,$$

então N tem dimensão ≤ 1. Por outro lado, assuma que $(\mathcal{X},0)=V(H)$ para algum $H\in\mathcal{O}_3$, então $N\cong\mathcal{O}_3/\langle H,J_0(f_t)\rangle$ e assim, N é uma interseção completa. Novamente, N é Cohen-Macaulay e temos a coservação da multiplicidade:

$$\dim_C\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0\rangle}=\sum_{x\in X_t}\frac{\mathcal{O}_{X_t,x}}{\langle J_0(f_t)\rangle},$$

para todo $t\neq 0$. O resultado segue então da primeira parte da prova. □

Teorema 3.1.9. *Seja $(X,0)$ uma curva plana e seja $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação $\mathscr{A}$-finito. Então,*

$$\dim_{\mathbb{C}}\ker(ev)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1,J_2\rangle}-\tau(X,0).$$

Demonstração. Pela observação 3.1.7, podemos supor que f satisfaz a condição (3.1). Definimos a aplicação $F:\mathcal{O}^2_{X,0}\to\langle\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\rangle$ dada por

$$F(a,b)=a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(F) & \longrightarrow & \mathcal{O}^2_{X,0} & \xrightarrow{F} & \langle\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\rangle & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle tf}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}^2_{X,0} & \xrightarrow{E} & \langle J_2,-J_1\rangle & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde α é a restrição de tf e $\gamma(a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y})=J_0(a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y})$. Veremos que o diagrama é comutativo. Primeiramente, temos $\gamma\circ F=E\circ tf$, de fato,

$$\begin{aligned}
E(tf(1,0)) &= E\left(\frac{\partial f_1}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial f_1}{\partial x}J_2-\frac{\partial f_2}{\partial x}J_1\\
&=\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)-\frac{\partial f_2}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\\
&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}=J_0\frac{\partial h}{\partial x}\\
&=\gamma\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\gamma(F(1,0)),
\end{aligned}$$

e analogamente para $(0,1)$. Portanto, $\gamma\circ F=E\circ tf$.

Além disso, temos $tf(\ker(F)) \subset \ker(E)$. De fato, se $F(a,b)=0$, temos

$$\begin{aligned}0 &= a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}\\ &= a\lambda_f\left(J_2\frac{\partial f_1}{\partial x}-J_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)+b\lambda_f\left(J_2\frac{\partial f_1}{\partial y}-J_1\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\\ &= \lambda_f\left[\left(a\frac{\partial f_1}{\partial x}+b\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)J_2-\left(a\frac{\partial f_2}{\partial x}+b\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)J_1\right]\\ &= \lambda_f E(tf(a,b)).\end{aligned}$$

Como λ_f não é divisor de zero (Lema 3.1.5), $E(tf(a,b))=0$ então $tf(a,b)\in\ker(E)$.

As filas são sequências exatas e o diagrama é comutativo, então pelo Lema da Serpente (ver, por exemplo, [31]), temos a sequência exata:

$$0\longrightarrow\ker(\alpha)\longrightarrow\ker(tf)\longrightarrow\ker(\gamma)\longrightarrow\operatorname{coker}(\alpha)\longrightarrow\operatorname{coker}(tf)\longrightarrow\operatorname{coker}(\gamma)\longrightarrow 0.$$

Temos que γ é injetora. De fato, dado $a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}\in\ker(\gamma)$,

$$\gamma\left(a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}\right)=J_0\left(a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}\right)=0,$$

J_0 não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_{X,0}$ pela condição 3.1, portanto, $a\frac{\partial h}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}=0$.

Então, obtemos a sequência exata curta

$$0\longrightarrow\operatorname{coker}(\alpha)\longrightarrow\operatorname{coker}(tf)\longrightarrow\operatorname{coker}(\gamma)\longrightarrow 0.$$

Temos

$$\operatorname{coker}(\alpha)=\frac{\ker(E)}{tf(\Theta_{X,0})},\quad \operatorname{coker}(tf)=\frac{\mathcal{O}^2_{X,0}}{tf(\mathcal{O}^2_{X,0})},\quad \operatorname{coker}(\gamma)=\frac{\langle J_2,-J_1\rangle}{J_0\langle\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\rangle}.$$

Agora, pelo Lema 3.1.6 e pelo Lema 3.1.8, temos

$$\ker(ev)=\frac{\ker(E)}{tf(\Theta_{X,0})}=\operatorname{coker}(\alpha)\quad\text{e}\quad\operatorname{coker}(tf)=\frac{\mathcal{O}^2_{X,0}}{tf(\mathcal{O}^2_{X,0})}=\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0\rangle}.$$

Dessas observações, obtemos

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) &= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(\alpha) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(tf) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(\gamma) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0 \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\langle J_2, -J_1 \rangle}{J_0 \langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0 \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{J_0 \langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_2, -J_1 \rangle} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0 \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0 \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_2, -J_1 \rangle} \\
&= -\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_2, -J_1 \rangle} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} - \tau(X,0).
\end{aligned}$$

□

Do Teorema 3.1.9, segue uma fórmula para a $\mathscr{A}_e$-codimensão.

Corolário 3.1.10. *Seja $(X,0)$ uma curva plana e seja $f : (X,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação $\mathscr{A}$-finito. Então,*

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle}.$$

Demonstração. Do Teorema 1.8.16, do Lema 3.1.1 e do Teorema 3.1.9, segue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) &= \mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) + \tau(X,0) \\
&= dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}} + \tau(X,0) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle}.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.1.11. Quando $(X,0)$ é suave, podemos assumir $X = \mathbb{C}$, logo $J_1 = f_1'$ e $J_2 = f_2'$. Neste caso, o ideal gerado por J_1, J_2 é igual ao ideal de ramificação de f. Para germes de aplicações $f : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^2,0)$, Mond na demonstração do Teorema 2.3 ([44]) mostra o seguinte isomorfismo,

$$\ker(ev) \cong \frac{\mathcal{O}_1}{\langle f_1', f_2' \rangle},$$

sendo $ev : \frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_1)+\omega f(\Theta_2)} \to \frac{J_g\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}$. Logo, para germes de aplicações $f : (\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}^2, 0)$, Mond obtém a seguinte fórmula para a $\mathscr{A}_e$-codimensão,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_1}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{\langle f_1', f_2'\rangle}.$$

Portanto, para o caso em que $(X, 0)$ é suave, a fórmula dada no Corolário 3.1.10,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle}.$$

coincide com o resultado de Mond citado acima.

No caso em que $(X, 0)$ é singular, o ideal de ramificação de f é gerado por J_0, J_1, J_2, mas não é verdade em geral que este é igual ao ideal gerado por J_1, J_2 (ver Exemplo 3.1.12).

Exemplo 3.1.12. Seja $(X, 0)$ uma curva plana definida por $h(x, y) = x^2 - y^4$ e considere $f : (X, 0)\to(\mathbb{C}^2, 0)$ a aplicação dada por $f(x, y) = (x, y^3)$. Então a imagem $(Y, 0)$ é a curva definida por $g(u, v) = u^6 - v^4$.

Mostraremos que,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle}.$$

Para isto, considere $G : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3, 0)\to(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3, 0)$, dada por

$$G(x, y, s, p, q) = (x^2 - y^4 + py^2 + sy, x, y^3 + qy, s, p, q),$$

uma deformação estável de $(h, \tilde{f}) : (\mathbb{C}^2, 0)\to(\mathbb{C}^3, 0)$.

Segundo Mond e Montaldi (ver Observação 1.8.15),

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2) + \gamma^* \operatorname{Derlog} D(G)}.$$

Usando o software Singular [19], obtemos

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = 9.$$

Por outro lado,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{X,0}} = 6 + 15 - 17 = 4.$$

Neste caso, $J_1 = 4y^3$ e $J_2 = 6xy^2$, assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2 - y^4, y^3, xy^2\rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2, xy^2, y^3\rangle} = 5.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = 9 = 4 + 5 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle}.$$

Para completar, temos $J_0 = 3y^2$, logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_0, J_1, J_2\rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2 - y^4, y^2, y^3, xy^2\rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2, y^2\rangle} = 4 \neq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle}.$$

Exemplo 3.1.13. Seja $f : (X, 0)\to(\mathbb{C}^2, 0)$ o germe de aplicação dado por $f(x, y) = (x, y^3)$, onde $(X, 0)$ é a curva plana definida por $h(x, y) = x^5 + y^6 + x^2y^2$. A imagem $(Y, 0)$ tem equação

$$g(u, v) = u^{15} + 3u^{10}v^2 + 3u^5v^4 + u^6v^2 + v^6.$$

Como no exemplo 3.1.12, usamos o mesmo método para calcular $\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f)$. Neste caso, a deformação estável G é dada por

$$G(x, y, s, p, q) = (x^5 + y^6 + x^2y^2 + sy^2 + py, x, y^3 + qy, s, p, q),$$

e obtemos $\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = 24$.

Temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{X,0}} = 17 + 41 - 48 = 10.$$

Neste exemplo, $J_1 = -6y^5 - 2x^2y$ e $J_2 = 15x^4y^2 + 6xy^4$, logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle} = 14.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X, f) = 24 = 10 + 14 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle}.$$

3.2 Número de Milnor da imagem para aplicações entre curvas planas

Para obtermos o número de Milnor da imagem para aplicações entre curvas planas, precisamos de dois conceitos: o número de Milnor para uma curva plana e o delta invariante da aplicação.

A definição de número de Milnor para curva plana com singularidade isolada foi definida por Milnor em ([42]), observando que a curva plana é um caso particular de hipersuperfície. O seguinte resultado foi apresentado por Milnor em ([42]) para curvas planas, uma generalização pode ser encontrada em ([10]).

Proposição 3.2.1 ([42])**.** *Seja $(X, 0)$ uma curva plana com singularidade isolada. Então,*

$$\mu(X, 0) = 2\delta(X, 0) - r(X, 0) + 1,$$

onde $\delta(X, 0)$ é o delta invariante de $(X, 0)$ e $r(X, 0)$ é o número de componentes irredutíveis de $(X, 0)$.

O delta invariante de f foi introduzido em [52] para aplicações de grau 1 entre curvas.

Definição 3.2.2. Seja $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ uma aplicação analítica de grau 1 entre curvas $(X, 0)$ e $(Y, 0)$. O *delta invariante* de f é a dimensão

$$\delta(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{f^*(\mathcal{O}_{Y,0})}.$$

Observamos que o delta invariante de f satisfaz

$$\delta(Y, 0) = \delta(X, 0) + \delta(f).$$

Nuño-Ballesteros e Tomazella em ([52]), demonstram o seguinte resultado sobre o delta invariante.

Teorema 3.2.3 ([52])**.** *Seja $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ uma aplicação analítica de grau 1 entre curvas irredutíveis. Então,*

$$\mu(Y, 0) = \mu(X, 0) + 2\delta(f).$$

Em ([47]), Mond e Pellikaan apresentam o seguinte resultado.

Teorema 3.2.4 ([47])**.** *Seja $(X,0)$ um germe de curva reduzida e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ finita e de grau 1 sobre sua imagem $(Y,0)$. Então,*

$$\delta(Y,0)=\delta(X,0)+\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_2}{\mathcal{F}_1(f)},$$

onde $\mathcal{F}_1(f)$ é o primeiro ideal de Fitting da representação de $\mathcal{O}_{X,0}$ como um $\mathcal{O}_2$-módulo via f^*.

Deste resultado obtemos que, quando $(Y,0)$ é uma curva plana

$$\delta(f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_2}{\mathcal{F}_1(f)}.$$

Agora, seja $(X,0)$ uma curva plana e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem $(Y,0)$. Como observado anteriormente, pelo Corolário 1.8.17, f é estável se, e somente se, X é suave e f é uma imersão com somente pontos duplos transversais, chamados nós. Consequentemente, f é $\mathscr{A}$-finito se, e somente se, f é finita e tem grau 1 sobre sua imagem. Suponha também que f é do tipo finito. Segue do Teorema 1.8.16 que f admite uma estabilização $F:(\mathcal{X},0)\to(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2,0)$, dada por $F(s,x)=(s,f_s(x))$, com $f_s:X_s\to B_\epsilon$ estável, para todo $s\neq 0$ suficientemente pequeno, onde B_ϵ é uma pequena bola centrada na origem em $\mathbb{C}^2$. Assim, a imagem $Y_s=f_s(X_s)$ tem o tipo de homotopia de um buquê de 1-esferas.

Definição 3.2.5. Definimos o número de Milnor da imagem $\mu_I(f)$ como o número de 1-esferas em Y_s.

Com o resultado a seguir, demonstramos que $\mu_I(f)$ está bem definido, isto é, independe da estabilização e do representante escolhidos.

Teorema 3.2.6. *Seja $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ uma aplicação finita de grau 1 sobre a sua imagem $(Y,0)$, onde $(X,0)$ é uma curva plana. Então,*

$$\mu_I(f)=\mu(Y,0)-\delta(f).$$

Demonstração. Por resultados de Buchweitz e Greuel ([10]), temos

$$\mu_I(f)=\dim_{\mathbb{C}}H^1(Y_s,\mathbb{C})=\mu(Y,0)-\sum_{y\in S(Y_s)}\mu(Y_s,y),$$

onde $H^1(Y_s, \mathbb{C})$ denota o primeiro grupo de cohomologia de Y_s e $S(Y_s)$ denota o conjunto dos pontos singulares de Y_s. Mas, Y_s tem somente singularidades do tipo nó, então a soma $\sum_{y \in S(Y_s)} \mu(Y_s, y)$ é o número de nós de Y_s. Segue de Mond e Pellikaan [47], que o número de nós em Y_s é igual à $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathcal{F}_1(f)}$. Lembramos que este número é igual à $\delta(f)$ quando $(Y, 0)$ é uma curva plana. Portanto,

$$\mu_I(f) = \mu(Y, 0) - \delta(f).$$

□

Observação 3.2.7. Se $(X, 0)$ é uma curva irredutível, então pelo Teorema 3.2.3,

$$\mu(Y, 0) = \mu(X, 0) + 2\delta(f).$$

Logo, do Teorema 3.2.6,

$$\mu_I(f) = \mu(Y, 0) - \delta(f) = \mu(X, 0) + \delta(f).$$

Observação 3.2.8. Quando $(X, 0)$ é suave, podemos assumir $X = \mathbb{C}$. Para germes de aplicações $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, Mond no Lema 2.2 em ([44]) demonstra o seguinte resultado,

$$\mu_I(f) = \delta(Y, 0) - r(Y, 0) + 1,$$

onde $(Y, 0)$ é a imagem de f.

Logo, no caso em que $(X, 0)$ é suave, a igualdade

$$\mu_I(f) = \mu(Y, 0) - \delta(f),$$

do Teorema 3.2.6, coincide com o resultado de Mond citado acima.

Para o próximo resultado, lembramos que denotamos por $C(f)$ o ideal gerado por λ_f em $\mathcal{O}_{X,0}$ e segundo o Lema 3.1.2, λ_f satisfaz,

$$\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = \lambda_f J_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -\lambda_f J_1.$$

Lema 3.2.9. *Sejam $(X, 0)$ uma curva plana e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ uma aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem. Então, $\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle}$ e $\frac{C(f)}{J_g \mathcal{O}_{X,0}}$ são isomorfos.*

Demonstração. A multiplicação por λ_f define um isomorfismo $\phi : \mathcal{O}_{X,0} \to C(f)$, já que λ_f não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_{X,0}$ (ver Lema 3.1.5). Além disso, do Lema 3.1.2, segue que $\phi(\langle J_1, J_2\rangle) = J_g\mathcal{O}_{X,0}$ e portanto, ϕ induz um isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle} \longrightarrow \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}.$$

□

Após introduzirmos a definição de número de Milnor da imagem para aplicações entre curvas planas e considerando a fórmula para a $\mathscr{A}_e$-codimensão dada na seção 3.1, apresentamos uma resposta positiva para a conjectura de Mond neste contexto.

Teorema 3.2.10. *Seja $(X,0)$ uma curva plana e $f : (X,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ uma aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem. Então,*

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) + \mu(Y,0) - \tau(Y,0) = \mu_I(f).$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.10 e pelo Lema 3.2.9,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}.$$

Como $J_g\mathcal{O}_{Y,0} \subset J_g\mathcal{O}_{X,0} \subset C(f)$, temos a sequência exata,

$$0 \longrightarrow \frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} \longrightarrow \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} \longrightarrow \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}} \longrightarrow 0,$$

logo,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}.$$

Agora, seja $\mathscr{C}$ a pré-imagem de $C(f)$ em $\mathcal{O}_2$ com respeito a projeção quociente $\pi : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_{Y,0}$. Então, por Mond e Pellikaan [47] e pelo Teorema 3.2.6,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{C}}{J_g} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{J_g} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathscr{C}} = \mu(Y,0) - \delta(f) = \mu_I(f).$$

Observamos que $C(f)/(J_g\mathcal{O}_{Y,0}) = \mathscr{C}/(\langle g\rangle + J_g)$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{C}}{\langle g\rangle + J_g} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle g\rangle + J_g} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathscr{C}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)-\tau(Y,0)=-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_2}{\mathscr{C}}$$

e

$$\mu_I(f)-\mu(Y,0)=-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_2}{\mathscr{C}}.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)+\mu(Y,0)-\tau(Y,0)=\mu_I(f).$$

□

Observação 3.2.11. Observamos que se $(Y,0)$ é quase homogênea, então $\tau(Y,0)=\mu(Y,0)$ e temos a igualdade $\mathscr{A}_e$- $\operatorname{codim}(X,f)=\mu_I(f)$.

Corolário 3.2.12. *Seja* $(X,0)$ *uma curva plana e* $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ *uma aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem. Então,*

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)\leq\mu_I(f),$$

com igualdade se, e somente se, $(Y,0)$ *é quase homogênea.*

Demonstração. Da demonstração do Teorema 3.2.10,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathscr{C}}{\langle g\rangle+J_g}\leq\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathscr{C}}{J_g}=\mu_I(f).$$

Além disso, a igualdade segue se, e somente se, $g\in J_g$, o qual é equivalente à $(Y,0)$ ser quase homogênea por Saito [55]. □

Observação 3.2.13. Observamos que se $(X,0)$ e f são quase homogêneas com os mesmos pesos, então $(Y,0)$ é quase homogênea e temos a igualdade no corolário.

Exemplo 3.2.14. Seja $(X,0)$ uma curva plana definida por $h(x,y)=x^2-y^4$ e considere $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ a aplicação dada por $f(x,y)=(x,y^3)$. Então a imagem $(Y,0)$ é a curva definida por $g(u,v)=u^6-v^4$. No exemplo 3.1.12, obtemos,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)=9.$$

Observamos que $(X,0)$ é quase homogênea de pesos $(2,1)$ e grau 4. Também, f é quase homogênea de pesos $(2,1)$ e graus $(2,3)$. Então $(X,0)$ e f são quase homogêneas com os mesmos pesos, logo $(Y,0)$ é quase homogênea. Mostraremos que,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f)=\mu_I(f).$$

Temos $\mu(X,0)=3$, $\mu(Y,0)=15$ e $\delta(f)=6$. Pelo Teorema 3.2.6,

$$\mu_I(f)=\mu(Y,0)-\delta(f)=15-6=9.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=9=\mu_I(f).$$

Exemplo 3.2.15. Seja $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ o germe de aplicação dado por $f(x,y)=(x,y^3)$, onde $(X,0)$ é a curva plana definida por $h(x,y)=x^5+y^6+x^2y^2$. A imagem $(Y,0)$ tem equação

$$g(u,v)=u^{15}+3u^{10}v^2+3u^5v^4+u^6v^2+v^6.$$

No Exemplo 3.1.13, obtemos,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=24.$$

Neste exemplo, $\mu(X,0)=12$, $\tau(X,0)=11$ e $\mu(Y,0)=46$, $\tau(Y,0)=41$, logo $(X,0)$ e $(Y,0)$ não são quase homogêneas. Temos, $\delta(f)=17$ e pelo Teorema 3.2.6,

$$\mu_I(f)=\mu(Y,0)-\delta(f)=46-17=29.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=24<29=\mu_I(f).$$

3.3 Exemplos

Nesta seção, apresentamos exemplos com os detalhes dos cálculos utilizando o software Singular [19].

Exemplo 3.3.1. Seja $(X,0)\subset(\mathbb{C}^2,0)$ uma curva definida por $h(x,y)=x^2-y^3$ e $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ uma aplicação definida por $f(x,y)=(x,y^2)$. Então, $(X,0)$ é quase homogênea do tipo $(3,2;6)$. Considerando $(Y,0)$ a imagem de f, então $(Y,0)$ é uma curva plana definida por $g(u,v)=u^4-v^3$.

Temos $\mu(X,0)=2$ e $\mu(Y,0)=6$, então $\delta(f)=2$ e $\mu_I(f)=\mu(Y,0)-\delta(f)=6-2=4$. Veremos que $\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=\mu_I(f)$.

Lembrando que (observação 1.8.15),

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2)+\gamma^*(\operatorname{Derlog}D(G))},$$

onde $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ é dada por $G(x, y, s) = (x, y^2, x^2 - y^3 + sy, s)$ é estabilização da aplicação $(\tilde{f}, h) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, dada por $(\tilde{f}, h)(x, y) = (x, y^2, x^2 - y^3)$. Observamos que neste caso, $D(G) = Im(G)$, pois G não é sobrejetora, então Derlog $D(G)$ = Derlog $Im(G)$.

Para calcular $\mathscr{A}_e$- codim(X, f), devemos encontrar $H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}(G) = H^{-1}(0)$. Para isto usaremos o software Singular. Método para encontrar H:

```
ring r = 0, (x, y, s, u, v, z, w), ds;
ideal i = u - x, v - y2, z - x2 + y3 - sy, w - s;
ideal i1 = eliminate(i, xys);
ring r1 = 0, (u, v, z, w), ds;
ideal i2 = imap(r, i1);
poly H = i2[1];
H;
z2 - v3 - 2u2z + 2v2w - vw2 + u4
```

Portanto, $H(u, v, z, w) = z^2 - v^3 - 2u^2z + 2v^2w - vw^2 + u^4$.

Agora encontramos Derlog $Im(G)$ usando H:

```
ideal j = jacob(H);
module m = syz(j);
print(m);
1, 0, 0, 0,
0, 2v, 0, 2z - 2u2,
2u, 0, -v2 + vw, 3v2 - 4vw + w2,
0, 3v - w, z - u2, 0
```

Obtemos uma matriz 4×4. Temos, $\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ definida por $\gamma(u, v) = (u, v, 0, 0)$. Então

$$t\gamma(\Theta_2) = \left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, 0, 0 \right\}$$

e

$$\Theta(\gamma) = \left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right\}.$$

Agora, para calcular

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2) + \gamma^*(\mathrm{Derlog}\, Im(G))},$$

basta considerar as duas últimas linhas de Derlog $Im(G)$ e fazer $z = 0$ e $w = 0$.

$module\ mt = transpose(m);$

$module\ m1t = mt[3], mt[4];$

$module\ m1 = transpose(m1t);$

$print(m1);$

$2u, 0, -v2 + uw, 3v2 - 4vw + w2,$

$0, 3v - w, z - u2, 0$

$module\ m2 = subst(m1, z, 0, w, 0);$

$ring\ r2 = 0, (u, v), ds;$

$module\ m3 = imap(r1, m2);$

$print(m3);$

$2u, 0, -v2, 3v2,$

$0, 3v, -u2, 0$

$vdim(std(m3));$

4

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2) + \gamma^*(\operatorname{Derlog} Im(G))} = 4 = \mu_I(f).$$

Temos também

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_Y} = \mathscr{A}_e\text{- codim}(X, f).$$

Podemos calcular $\dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_Y}$, usando o Singular. Para isto, vamos calcular

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{C(f)} \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{J_g\mathcal{O}_Y}.$$

$LIB\ "Presmatrix.lib";$

$ring\ r = 0, (x, y), ds;$

$ring\ R = 0, (u, v), ds;$

$setring\ r;$

$map\ f = R, x, y2;$

$ideal\ i = x2 - y3;$

$presmatrix(f, i);$

$//Generators = 1, y, y2$

$//R^h \xrightarrow{PM} R^h \longrightarrow Ox \longrightarrow 0; h = 3, R = R$

$v, 0, -1,$

$-u2, v, 0,$

$0, -u2, v$

//To access the presentation matrix PM, type: setring $RTPr; PM;$

$setring\ RTPr;$

$poly\ g = \det(PM);$

$g;$

$v3 - u4$

$ideal\ j = minor(PM, 2);$

$j = std(j);$

$j;$

$j\,[1] = v$

$j\,[2] = u2$

$qring\ q = std(g);$

$ideal\ j1 = u2, v;$

$ideal\ j2 = u3, v2;$

$vdim(std(j1));$

2

$vdim(std(j2));$

6

Portanto, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{C(f)} = 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{J_g\mathcal{O}_Y} = 6$. Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_Y} = 6 - 2 = 4 = \mathscr{A}_e\text{- codim}(X, f) = \mu_I(f).$$

Exemplo 3.3.2. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ uma curva definida por $h(x, y) = x^5 + y^6 + x^2y^2$ e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ uma aplicação definida por $f(x, y) = (x, y^3)$, então $(Y, 0)$ é uma curva plana definida por $g(u, v) = u^{15} + 3u^{10}v^2 + 3u^5v^4 + u^6v^2 + v^6$. Assim, $\mu(X, 0) = 12$, $\tau(X, 0) = 11$ e $\mu(Y, 0) = 46$, $\tau(Y, 0) = 41$, logo $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ não são quase-homogêneas. Temos $\delta(f) = 17$ e $\mu_I(f) = \mu(Y, 0) - \delta(f) = 46 - 17 = 29$.

Para calcular no Singular $\tau(X, 0)$ e $\mu(X, 0)$:

$ring\ r = 0, (x, y), ds;$

$poly\ h = x5 + y6 + x2y2;$

$ideal\ j = jacob(h);$

$ideal\ i = j + ideal(h);$

$vdim(std(i));$

11

$vdim(std(j));$

12

Temos

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(X, f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g \mathcal{O}_Y}.$$

$LIB\ ''Presmatrix.lib'';$

$ring\ r = 0, (x, y), ds;$

$ring\ R = 0, (u, v), ds;$

$setring\ r;$

$map\ f = R, x, y3;$

$ideal\ i = x5 + y6 + x2y2;$

$presmatrix(f, i);$

$//Generators\ = 1, y, y2, y3, y4, y5$

$//R^h \xrightarrow{PM} R^h \longrightarrow Ox \longrightarrow 0; h = 6, R = R$

$v, 0, 0, -1, 0, 0,$

$0, v, 0, 0, -1, 0,$

$0, 0, v, 0, 0, -1,$

$u5, 0, u2, v, 0, 0,$

$0, u5, 0, u2, v, 0,$

$0, 0, u5, 0, u2, v$

//To access the presentation matrix PM, type: setring $RTPr; PM;$

$setring\ RTPr;$

$poly\ g = \det(PM);$

$g;$

$v6 + u6v2 + 3u5v4 + 3u10v2 + u15$

$ideal\ j = minor(PM, 5);$

$j = std(j);$

$j;$

$j\,[1] = u2v2 + u7$

$j\,[2] = v4 + 2u5v2$

$j\,[3] = u4v$

$j\,[4] = u9$

$qring\ q = std(g);$

$ideal\ j1 = u9, u4v, v4 + 2u5v2, u2v2 + u7;$

$ideal\ j2 = 15u14 + 30u9v2 + 15u4v4 + 6u5v2, 6u10v + 12u5v3 + 2u6v + 6v5;$

$vdim(std(j1));$

17

$vdim(std(j2));$

41

Então, $C(f) = \langle u^9, u^4v, v^4 + 2u^5v^2, u^2v^2 + u^7\rangle$, logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{C(f)} = 17 \ \text{ e } \ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{J_g\mathcal{O}_Y} = \tau(Y) = 41$$

assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_Y} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{J_g\mathcal{O}_Y} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_Y}{C(f)} = 41 - 17 = 24.$$

Para calcular $\mathcal{A}_e$-codim(X, f).

Temos $\hat{f} = (h, \tilde{f})(x, y) = (x^5 + y^6 + x^2y^2, x, y^3)$ e

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 5x^4 + 2xy^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 6y^5 + 2x^2y \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{f}\mathcal{M}_3 = I(\hat{f}) = \langle x, y^3\rangle$$

$$T\mathcal{K}_e(\hat{f}) = \mathcal{O}_2 \left\{ \begin{pmatrix} 5x^4 + 2xy^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6y^5 + 2x^2y \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix} \right\} + \langle x, y^3\rangle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Então, $\frac{\Theta(\hat{f})}{T\mathcal{K}_e(\hat{f})}$ tem base sobre $\mathbb{C}$ dada por

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Os cálculos no Singular.

$ring\ r = 0, (x, y), ds;$

$module\ m1 = [5x4 + 2xy2, 1, 0], [6y5 + 2x2y, 0, 3y2];$

$ideal\ i = x, y3;$

$module\ m2 = [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1];$

$module\ m3 = i * m2;$

$module\ m4 = m1 + m3;$

$kbase(std(m4));$

$\_[1] = y2 * gen(1)$

$\_[2] = y * gen(1)$

$\_[3] = gen(1)$

$\_[4] = y * gen(3)$

$\_[5] = gen(3)$

Assim, $G(x, y, s, p, q) = (x^5 + y^6 + x^2y^2 + sy^2 + py, x, y^3 + qy, s, p, q)$.

Observamos que se $G : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^r$, $H : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $H^{-1}(0) = Im\ G$, temos

$$Derlog(Im\ G) = \{\xi \in \Theta_{r+3}; \xi(H) \in \langle H \rangle\},$$

e

$$Derlog(H) = \{\xi \in \Theta_{r+3}; \xi(H) = 0\}.$$

Quando H é quase-homogênea, temos

$$Derlog(Im\ G) = Derlog(H) \oplus \langle \epsilon \rangle,$$

onde ϵ denota o campo de Euler de H.

Fazendo os cálculos com o Singular.

$ring\ r = 0, (x, y, s, p, q, u, v, z, w, k, l), ds;$

$ideal\ i = z - x5 - y6 - x2y2 - sy2 - py, u - x, v - y3 - qy, w - s, k - p, l - q;$

$ideal\ i1 = eliminate(i, xyspq);$

$ring\ r1 = 0, (u, v, z, w, k, l), ds;$

$ideal\ i2 = imap(r, i1);$

$poly\ H = i2[1];$

$H;$

$z3 - 3v2z2 - 3vzwk - vk3 + 2z2wl + zk2l + 3v4z - v2w3 - 3u2vzk + 3v3wk + 2u2z2l +$
$2v2zwl - vw2kl + 5v2k2l + zw2l2 - 7vzkl2 + 2z2l3 - v6 - 3u2v2w2 + 3u2v3k +$

$2u2v2zl - 4v4wl - 2u2vwkl + 2u2zwl2 - 2v2w2l2 - 5v3kl2 + 6v2zl3 - 2vwkl3 + 2zwl4 - 3u5z2 - 3u4v2w - 4u2v4l - u4vkl + u4zl2 - 4u2v2wl2 - 2u2vkl3 + 2u2zl4 - v2wl4 - vkl5 + zl6 - u6v2 + 6u5v2z + 3u5vwk - 4u5zwl - u5k2l - 2u4v2l2 - u2v2l4 - 3u5v4 + 3u7vk - 4u7zl - 2u5v2wl - u5w2l2 + 7u5vkl2 - 4u5zl3 - 2u7v2l - 2u7wl2 - 6u5v2l3 - 2u5wl4 + 3u10z - u9l2 - 2u7l4 - u5l6 - 3u10v2 + 2u10wl + 2u12l + 2u10l3 - u15$

$ideal\ j = jacob(H);$

$ideal\ i3 = j + ideal(H);$

$module\ m = syz(i3);$

$print(m);$

$0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, -2l2, 3v, m[2, 5], 0, 0, m[2, 8],$

$-z + v2 + u5, 5u4, m[3, 3], 6v2, m[3, 5], m[3, 6], m[3, 7], m[3, 8],$

$-w - u2 - l2, -2u, 3k - 24vl, m[4, 4], m[4, 5], -k + 2vl, m[4, 7], m[4, 8],$

$-k + 2vl, 0, m[5, 3], -k + 12vl, m[5, 5], m[5, 6], m[5, 7], m[5, 8],$

$0, 0, 9v, 2l, m[6, 5], 0, 0, 27k,$

$3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

$module\ m1 = transpose(m);$

$module\ m2 = m1[3..6];$

$module\ m3 = transpose(m2);$

$module\ m4 = subst(m3, z, 0, w, 0, k, 0, l, 0);$

$ring\ r2 = 0, (u, v), ds;$

$module\ m5 = imap(r1, m4);$

$vdim(std(m5));$

24

Logo,

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(X, f) = 24.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(X, f) = 24 < 29 = \mu_I(f).$$

Apêndice A

O caso de curvas irredutíveis quase homogêneas

Neste apêndice, consideramos o caso particular em que $(X, 0)$ é uma curva plana com singularidade isolada, irredutível e quase homogênea. O germe $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem $(Y, 0)$ é também quase homogêneo com os mesmos pesos.

Nosso objetivo é obter a igualdade

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X, f) = \mu_I(f),$$

onde $\mathscr{A}_e$- codim(X, f) foi dada por Mond e Montaldi (ver Teorema 1.8.16) e $\mu_I(f)$ é o número de Milnor da imagem como na Definição 3.2.5.

Todos os resultados foram demonstrados de forma diferente da apresentada no capítulo 3, pois usamos em todos os resultados o fato da curva plana ser irredutível e/ou o fato de ser quase homogênea.

Além disso, usando os resultados de D. Mond para aplicações de $(\mathbb{C}, 0)$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$ (ver [44]), mostraremos que

$$\mu_I(f) = \mu_I(\alpha) + \mu_I(f \circ \alpha)$$

e

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \mathscr{A}_e\text{- codim}(f \circ \alpha) - \mathscr{A}_e\text{- codim}(\alpha),$$

onde $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é uma parametrização de $(X, 0)$.

Como $(X,0)$ é uma curva irredutível e quase homogênea, então $(X,0)$ é definida pela equação $h(x,y)=0$ em $\mathbb{C}^2$, para algum germe quase homogêneo $h\in\mathcal{O}_2=\mathbb{C}\{x,y\}$. Denotamos por n,m os pesos das variáveis x,y respectivamente, com $\mathrm{mdc}(n,m)=1$. Desconsiderando o caso em que $(X,0)$ é suave (o qual é um caso trivial), segue que $(X,0)$ pode ser parametrizada por uma aplicação monomial $\alpha:(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ da forma

$$\alpha(t)=(\alpha_1t^n,\alpha_2t^m),\quad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

O anel local de $(X,0)$ neste caso é $\mathcal{O}_{X,0}=\mathbb{C}\{t^n,t^m\}$, o qual é um subanel de $\mathcal{O}_2$. Denotamos por Γ_X o semigrupo associado, isto é, $\Gamma_X=\langle n,m\rangle=\{an+bm:\ a,b\in\mathbb{N}\}$. O principal invariante de $(X,0)$ é o delta invariante, o qual é neste caso $\delta_X=(n-1)(m-1)/2$. Como $(X,0)$ é irredutível, o número de Milnor é $\mu_X=2\delta_X=(n-1)(m-1)$, pela fórmula de Milnor.

Seja $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ um germe de aplicação finita de grau 1 sobre sua imagem $(Y,0)$, tal que f é também quase homogênea com os mesmos pesos. Isto significa que f é a restrição de um germe de aplicação $\tilde{f}=(f_1,f_2):(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$, onde f_1,f_2 são polinômios quase homogêneos. Denotamos por d_1,d_2 os graus de f_1,f_2 respectivamente, com respeito aos pesos (n,m). Então, $(Y,0)$ é também uma curva plana irredutível quase homogênea com pesos (d_1,d_2) e admite uma parametrização da forma

$$f(\alpha(t))=(\beta_1t^{d_1},\beta_2t^{d_2}),\quad \beta_1,\beta_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Temos $\mathcal{O}_{Y,0}=\mathbb{C}\{t^{d_1},t^{d_2}\}\subset\mathcal{O}_{X,0}$, $\Gamma_Y=\langle d_1,d_2\rangle\subset\Gamma_X$ e $\delta_Y=(d_1-1)(d_2-1)/2$. Finalmente, assumimos que $(Y,0)$ é definida pela equação $g(u,v)=0$, onde $g\in\mathbb{C}\{u,v\}$ é quase homogênea e $g\circ\tilde{f}=\mu h$, para algum germe de função $\mu\in\mathcal{O}_2$.

Através de uma mudança de coordenadas na fonte e na meta, podemos assumir, por simplicidade, que $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=1$. Então, $h(x,y)=x^m-y^n$ e $g(u,v)=u^{d_2}-v^{d_1}$.

Para obter os resultados citados anteriormente, mostraremos que a $\mathscr{A}_e$-codimensão satisfaz algumas relações. Para isto, utilizando o Lema 3.1.1, obteremos uma caracterização para $\ker(ev)$. Lembramos que a aplicação avaliação

$$ev:\frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0})+\omega f(\Theta_2)}\to\frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}$$

é definida por $ev([\xi])=[\xi(g)]$, para cada campo de vetor $\xi\in\Theta(f)$.

Teorema A.0.3. *Consideramos a aplicação*

$$\widetilde{ev}:\frac{\Theta(f)}{tf(\Theta_{X,0})}\rightarrow J_g\mathcal{O}_{X,0},$$

dada por $\widetilde{ev}([\xi])=\xi(g)$. *Então,*

$$\ker(ev)\cong\ker(\widetilde{ev}).$$

Demonstração. Pela demonstração do Lema 3.1.1, a aplicação $\widetilde{ev}$ está bem definida e é sobrejetora.

Definimos o morfismo $\ker(\widetilde{ev})\rightarrow\ker(ev)$ dado por $[\xi]\mapsto[\xi]$, onde as classes são consideradas em seus respectivos quocientes.

Observamos que se $[\xi]\in\ker(ev)$, existe um representante ξ tal que

$$\xi(g)=a\frac{\partial g}{\partial u}\circ f+b\frac{\partial g}{\partial v}\circ f=0.$$

Pois, se $[\xi]\in\ker(ev)$, escolhemos um representante $\xi=a\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}$, a, $b\in\mathcal{O}_{X,0}$, assim, $\xi(g)=a\frac{\partial g}{\partial u}\circ f+b\frac{\partial g}{\partial v}\circ f$. Por outro lado, como $[\xi]\in\ker(ev)$, temos $\xi(g)\in J_g\mathcal{O}_{Y,0}$, logo,

$$\xi(g)=\left(\tilde{a}\circ i\circ\bar{f}\right)\left(\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ i\right)\circ\bar{f}\right)+\left(\tilde{b}\circ i\circ\bar{f}\right)\left(\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ i\right)\circ\bar{f}\right),$$

com $\tilde{a}\circ i,\tilde{b}\circ i\in\mathcal{O}_{Y,0}$. Obtemos,

$$\left(a-\tilde{a}\circ i\circ\bar{f}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ f\right)+\left(b-\tilde{b}\circ i\circ\bar{f}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ f\right)=0.$$

Definimos $\bar{a}=a-\tilde{a}\circ i\circ\bar{f}$, $\bar{b}=b-\tilde{b}\circ i\circ\bar{f}$ e $\bar{\xi}=\bar{a}\frac{\partial}{\partial u}+\bar{b}\frac{\partial}{\partial v}$, assim,

$$\begin{aligned}\xi-\bar{\xi}&=a\frac{\partial}{\partial u}+b\frac{\partial}{\partial v}-\left(\bar{a}\frac{\partial}{\partial u}+\bar{b}\frac{\partial}{\partial v}\right)=\left(\tilde{a}\circ i\circ\bar{f}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\tilde{b}\circ i\circ\bar{f}\right)\frac{\partial}{\partial v}\\&=\left(\tilde{a}\circ f\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\tilde{b}\circ f\right)\frac{\partial}{\partial v}=\tilde{\zeta}\circ f,\end{aligned}$$

onde $\tilde{\zeta}=\tilde{a}\frac{\partial}{\partial u}+\tilde{b}\frac{\partial}{\partial v}$, com $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathcal{O}_2$. Portanto, $\xi-\bar{\xi}\in wf(\Theta_2)$, i.e., $[\xi]=[\bar{\xi}]$ com $\bar{\xi}(g)=0$.

Agora, mostraremos que o morfismo está bem definido. De fato, seja $[\xi]=[\tilde{\xi}]\in\ker(ev)$, i.e., $\xi+T\mathscr{A}_ef=\tilde{\xi}+T\mathscr{A}_ef$, então $\xi-\tilde{\xi}\in T\mathscr{A}_ef$, com $\xi(g)=\tilde{\xi}(g)=0$. Mostraremos que $\xi-\tilde{\xi}\in tf(\Theta_{X,0})$.

Como $\xi-\tilde{\xi}\in T\mathscr{A}_ef$, então $\xi-\tilde{\xi}=df\circ\eta+\rho\circ f$, $\eta\in\Theta_{X,0}$, $\rho\in\Theta_2$, com $0=\xi(g)-\tilde{\xi}(g)=df\circ\eta(g)+\rho\circ f(g)$, sendo $df\circ\eta(g)=0$, então $\rho\circ f(g)=0$.

Temos $\rho = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathcal{O}_2$, assim, $\rho \circ f = \begin{pmatrix} a \circ f \\ b \circ f \end{pmatrix}$ tal que $(a \circ f)\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + (b \circ f)\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = 0$. Logo,

$$\left(a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v}\right) \circ f = 0, \text{ em } \mathcal{O}_Y$$

i.e.,

$$a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v} = \lambda g, \ \lambda \in \mathcal{O}_2.$$

Como g é quase homogênea,

$$g = d_1 u\frac{\partial g}{\partial u} + d_2 v\frac{\partial g}{\partial v},$$

logo,

$$a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v} = \lambda g = \lambda\left(d_1 u\frac{\partial g}{\partial u} + d_2 v\frac{\partial g}{\partial v}\right),$$

$$(a - \lambda d_1 u)\frac{\partial g}{\partial u} + (b - \lambda d_2 v)\frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

então,

$$(a \circ f - (\lambda \circ f)d_1 f_1)\frac{\partial g}{\partial u} \circ f + (b \circ f - (\lambda \circ f)d_2 f_2)\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = 0.$$

Logo,

$$a \circ f - (\lambda \circ f)d_1 f_1 = -\frac{\partial g}{\partial v} \circ f$$

e

$$b \circ f - (\lambda \circ f)d_2 f_2 = \frac{\partial g}{\partial u} \circ f$$

Portanto,

$$\rho \circ f = \begin{pmatrix} a \circ f \\ b \circ f \end{pmatrix} = \lambda \circ f \begin{pmatrix} d_1 f_1 \\ d_2 f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial v} \circ f \\ \frac{\partial g}{\partial u} \circ f \end{pmatrix}.$$

Como ambas $(X, 0)$ e f são quase homogêneas, temos

$$\lambda \circ f \begin{pmatrix} d_1 f_1 \\ d_2 f_2 \end{pmatrix} \in tf(\Theta_X),$$

mostraremos que

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial v} \circ f \\ \frac{\partial g}{\partial u} \circ f \end{pmatrix} \in tf(\Theta_X).$$

Como $\frac{\partial g}{\partial u} \circ f = \lambda_f J_2$ e $\frac{\partial g}{\partial v} \circ f = -\lambda_f J_1$, então

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial v} \circ f \\ \frac{\partial g}{\partial u} \circ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_f J_1 \\ \lambda_f J_2 \end{pmatrix} \in tf(\Theta_X),$$

também usando o fato de ambas $(X,0)$ e f serem quase homogêneas.

Portanto, $\rho \circ f \in tf(\Theta_X)$ e, consequentemente,

$$\xi - \tilde{\xi} = df \circ \eta + \rho \circ f \in tf(\Theta_X).$$

Logo, obtemos que a aplicação está bem definida. Além disso, como

$$tf(\Theta_X) \subseteq tf(\Theta_X) + \omega f(\Theta_2),$$

a aplicação é injetiva e sobrejetiva. $\square$

Podemos identificar $\Theta(f)$ com $\mathcal{O}^2_{X,0} = \mathcal{O}_{X,0} \oplus \mathcal{O}_{X,0}$. O módulo $\Theta_{X,0}$ pode ser visto como o submódulo de $\mathcal{O}^2_{X,0}$ dos elementos (a,b), tais que $ah_x + bh_y = 0$. Como $(X,0)$ é quase homogênea, $\Theta_{X,0}$ é um submódulo livre de posto 2 gerado pelo campo de Euler $\epsilon = (nx, my)$ e por $\mathcal{H}(h) = (-h_y, h_x)$. Com estas identificações, o morfismo $tf : \Theta_{X,0} \to \Theta(f)$ é a restrição da aplicação $tf : \mathcal{O}^2_{X,0} \to \mathcal{O}^2_{X,0}$, cuja matriz na base canônica é a matriz Jacobiana de f.

Usando o fato de $(X,0)$ ser irredutível e ambas $(X,0)$ e f serem quase homogêneas, é possível descrever os elementos em $\ker(\widetilde{ev})$.

Lema A.0.4. *Seja $k = d_2 - d_1$. Então,*

$$\ker(\widetilde{ev}) \cong \frac{\mathbb{C}\left\{(d_1 t^r, d_2 t^{r+k}) : \ (t^r, t^{r+k}) \in \mathcal{O}^2_{X,0}, r \in \mathbb{N}\right\}}{\langle (d_1 t^{d_1}, d_2 t^{d_1+k}), (d_1 t^{d_1+\mu_X-1}, d_2 t^{d_1+\mu_X-1+k}) \rangle}.$$

Demonstração. Para cada $(a,b) \in \mathcal{O}^2_{X,0}$, temos:

$$\widetilde{ev}([(a,b)]) = ag_u \circ f + bg_v \circ f = ad_2 t^{d_1 d_2 - d_1} - bd_1 t^{d_1 d_2 - d_2}.$$

Então, $[(a,b)] \in \ker(\widetilde{ev})$ se,e somente se, $(a,b) = c(d_1 t^{d_1 d_2 - d_2}, d_2 t^{d_1 d_2 - d_1})$ para algum $c \in \mathcal{O}_{X,0}$. Segue que $\ker(\widetilde{ev})$ é gerado por pares de monômios da forma $(d_1 t^r, d_2 t^{r+k})$, para algum $r \in \mathbb{N}$ tal que $(t^r, t^{r+k}) \in \mathcal{O}^2_{X,0}$.

Desde que $\Theta_{X,0}$ é gerado em $\mathcal{O}_{X,0}$ por $\{\epsilon, \mathcal{H}(h)\}$ então, $tf(\Theta_X)$ é gerado em $\mathcal{O}_{X,0}$ por $\{df \circ \epsilon, df \circ \mathcal{H}(h)\}$, onde

$$\left\{\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} nx \\ my \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -h_y \\ h_x \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} (f_1)_x nx + (f_1)_y my \\ (f_2)_x nx + (f_2)_y my \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(f_1)_x h_y + (f_1)_y h_x \\ -(f_2)_x h_y + (f_2)_y h_x \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} d_1 f_1 \\ d_2 f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}\right\},$$

a última igualdade segue da fórmula de Euler para polinômios quase homogêneos.

Além disso, temos

$$J_1 = \begin{vmatrix} mx^{m-1} & -ny^{n-1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} = mx^{m-1}\frac{\partial f_1}{\partial y} + ny^{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Como $\nu(x^{m-1}) = n(m-1)$, $\nu(y^{n-1}) = m(n-1)$, $\nu(\frac{\partial f_1}{\partial x}) = d_1 - n$ e $\nu(\frac{\partial f_1}{\partial y}) = d_1 - m$, então $\nu(J_1) = d_1 + mn - m - n = d_1 + \mu_X - 1$. Analogamente, $\nu(J_2) = d_2 + mn - m - n = d_1 + \mu_X - 1 + k$. $\square$

Teorema A.0.5. *Denotamos por s o número de elementos da forma (t^r, t^{r+k}) em $\mathcal{O}^2_{X,0}$ tal que $0 \leq r < \mu_X$. Então,*

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = d_1 - \delta_X + s - 1$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2\rangle} = d_1 + \delta_X + s - 1.$$

Demonstração. Pelo Teorema A.0.3 e pelo Lema A.0.4,

$$\ker(ev) \cong \frac{\mathbb{C}\left\{(d_1 t^r, d_2 t^{r+k}) : \ (t^r, t^{r+k}) \in \mathcal{O}^2_{X,0}, r \in \mathbb{N}\right\}}{\langle (d_1 t^{d_1}, d_2 t^{d_1+k}), (d_1 t^{d_1+\mu_X-1}, d_2 t^{d_1+\mu_X-1+k})\rangle}.$$

Consideramos o conjunto $\Gamma = \{d_1 + i : \ i \in \Gamma_X\} \cup \{d_1 + \mu_X - 1\}$ o qual é um subconjunto de Γ_X. Denotamos por $\Gamma_X \oplus \Gamma_X$ o semigrupo associado a $\mathcal{O}^2_{X,0}$ e tomamos os seguintes conjuntos:

$$\Gamma_k = \{(r, r+k) \in \Gamma_X \oplus \Gamma_X\} \quad \text{e} \quad \Gamma_\Theta = \{(l, l+k) : \ l \in \Gamma\} \subset \Gamma_k$$

Podemos identificar os elementos de $\ker(ev)$ com os elementos de $\Gamma_k \setminus \Gamma_\Theta$. Portanto, vamos calcular o número de elementos em $\Gamma_k \setminus \Gamma_\Theta$.

Observamos que Γ_k é igual a

$$\underbrace{\{(r, r+k) :\ 0 \leq r < \mu_X\}}_{s \text{ elementos}} \cup \underbrace{\{(\mu_X, \mu_X + k), (\mu_X + 1, \mu_X + 1 + k), \cdots\}}_{\text{todos os elementos}}$$

e Γ_Θ é igual a

$$\begin{aligned} &\overbrace{\{(d_1 + p, d_1 + p + k) :\ 0 \leq p < \mu_X,\ p \in \Gamma_X\}}^{\delta_X \text{ elementos}} \\ \cup &\underbrace{\{(d_1 + \mu_X - 1, d_1 + \mu_X - 1 + k), (d_1 + \mu_X, d_1 + \mu_X + k), \cdots\}}_{\text{todos os elementos}}. \end{aligned}$$

Caso 1: $d_1 \geq \mu_X + 1$.

Neste caso, $\Gamma_k \setminus \Gamma_\Theta$ é igual a

$$\begin{aligned} &\overbrace{\{(r, r+k) :\ 0 \leq r < \mu_X\}}^{s \text{ elementos}} \cup \overbrace{\{(\mu_X, \mu_X + k), \cdots, (d_1 - 1, d_1 - 1 + k)\}}^{d_1 - \mu_X \text{ elementos}} \\ \cup &\underbrace{\{(d_1 + q, d_1 + q + k) :\ 1 \leq q < \mu_X - 1 :\ q \notin \Gamma_X\}}_{\delta_X - 1 \text{ elementos}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = s + d_1 - \mu_X + \delta_X - 1 = d_1 - \delta_X + s - 1.$$

Caso 2: $d_1 = \mu_X$.

Neste caso, $\Gamma_k \setminus \Gamma_\Theta$ é igual a

$$\begin{aligned} &\underbrace{\{(r, r+k) :\ 0 \leq r < \mu_X\}}_{s \text{ elementos}} \\ \cup &\underbrace{\{(\mu_X + q, \mu_X + q + k) :\ 1 \leq q < \mu_X - 1 :\ q \notin \Gamma_X\}}_{\delta_X - 1 \text{ elementos}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = s + \delta_X - 1 = d_1 - \delta_X + s - 1.$$

Caso 3: $d_1 < \mu_X$.

Neste caso, descrevemos $\Gamma_k \setminus \Gamma_\Theta$ como

$$\overbrace{\{(r, r+k) : r \in \Gamma_X\}}^{s \text{ elementos}} \cup \overbrace{\{(\mu_X, \mu_X + k), \cdots, (d_1 + \mu_X - 2, d_1 + \mu_X - 2 + k)\}}^{d_1 - 1 \text{ elementos}}$$

$$\setminus \underbrace{\{(d_1+p, d_1+p+k):\ 0\leq p<\mu_X,\ p\in\Gamma_X\}}_{\delta_X \text{ elementos}}.$$

Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}}\ker(ev) = s+d_1-1-\delta_X = d_1-\delta_X+s-1.$$

Agora, calculamos a dimensão de $\mathcal{O}_X/\langle J_1, J_2\rangle$. Consideramos os conjuntos

$$\Gamma_{J_1} = \{d_1+\mu_X-1+i:\ i\in\Gamma_X\}$$

e

$$\Gamma_{J_2} = \{d_1+\mu_X-1+k+j:\ j\in\Gamma_X\}$$

os quais são subconjuntos de Γ_X. Podemos identificar os elementos de $\mathcal{O}_X/\langle J_1, J_2\rangle$ com os elementos de $\Gamma_X\setminus(\Gamma_{J_1}\cup\Gamma_{J_2})$. Portanto, calculamos o número de elementos em $\Gamma_X\setminus(\Gamma_{J_1}\cup\Gamma_{J_2})$.

Observamos que existem elementos comuns nos conjuntos Γ_{J_1} e Γ_{J_2}, então precisamos conhecer estes elementos. Temos que todos os elementos após $d_1+\mu_X+\mu_X+k$ são elementos comuns em Γ_{J_1} e Γ_{J_2}. Então, consideramos os subconjuntos

$$A = \{d_1+\mu_X-1+i:\ 0\leq i\leq\mu_X+k, i\in\Gamma_X\}$$

e

$$B = \{d_1+\mu_X-1+k+j:\ 0\leq j<\mu_X, j\in\Gamma_X\}.$$

Dados r e $r+k$ em Γ_X tais que $0\leq r<\mu_X$, os elementos comuns em A e B são os elementos da forma:

$$d_1+\mu_X-1+(r+k) = d_1+\mu_X-1+k+r.$$

Como s é o número de elementos $r\in\Gamma_X$, $0\leq r<\mu_X$, tal que $r+k\in\Gamma_X$, então $A\cap B$ contém s elementos. Temos que A contém δ_X+k+1 elementos e B contém δ_X elementos, então $A\cup B$ contém $\mu_X+k+1-s$ elementos.

Assim, $\Gamma_X\setminus(\Gamma_{J_1}\cup\Gamma_{J_2})$ é equivalente à

$$\overbrace{\{j\in\Gamma_X; 0\leq j<\mu_X\}}^{\delta_X \text{ elementos}}\cup\overbrace{\{\mu_X,\cdots,d_1+\mu_X+\mu_X+k-1\}}^{d_1+\mu_X+k \text{ elementos}}$$

$$\setminus\underbrace{\{d_1+\mu_X-1+i:\ 0\leq i\leq\mu_X\}\cup\{d_1+\mu_X+j:\ 0\leq j<\mu_X\}}_{\mu_X+k+1-s \text{ elementos}}.$$

Portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} = \delta_X + d_1 + \mu_X + k - (\mu_X + k + 1 - s) = d_1 + \delta_X + s - 1.$$

□

Corolário A.0.6. *Nestas condições, obtemos*

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} - \mu_X + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}}.$$

E pelo Teorema A.0.5,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} - \dim_{\mathbb{C}} \ker(ev) = d_1 + \delta_X + s - 1 - (d_1 - \delta_X + s - 1) = \mu_X.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} - \mu_X + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}}.$$

□

Exemplo A.0.7. Seja $(X, 0)$ uma curva quase homogênea definida por $h(x, y) = x^2 - y^3$ e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ uma aplicação dada por $f(x, y) = (x, y^2)$. Então, $(Y, 0)$ é uma curva plana quase homogênea definida por $g(u, v) = u^4 - v^3$. Temos $\mu_X = 2$, $\mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{t^2, t^3\}$, $J_1 = 3t^4$ e $J_2 = 4t^5$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} = 3.$$

Por outro lado, $J_g = \langle u^3, v^2 \rangle$, então $J_g \mathcal{O}_{X,0} = \langle t^9, t^8 \rangle \mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, \cdots\}$. Temos $\mathcal{O}_Y = \mathbb{C}\{t^3, t^4\}$, logo $J_g \mathcal{O}_{Y,0} = \langle t^9, t^8 \rangle \mathcal{O}_{Y,0} = \mathbb{C}\{t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, \cdots\}$. Assim,

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}} = 1.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1, J_2 \rangle} - \mu_X + \dim_{\mathbb{C}} \frac{J_g \mathcal{O}_{X,0}}{J_g \mathcal{O}_{Y,0}} = 3 - 2 + 1 = 2.$$

Lema A.0.8. *Denotamos* $\lambda_f = t^{\mu_Y - \mu_X}$ *em* $\mathcal{O}_{X,0}$*, então* λ_f *satisfaz*

$$g_u \circ f = \lambda_f J_2 \quad e \quad g_v \circ f = -\lambda_f J_1.$$

Demonstração. Por definição, obtemos

$$g_u \circ f = d_2 t^{d_1(d_2-1)} \quad \text{e} \quad J_2 = d_2 t^{d_2+mn-m-n}$$

$$g_v \circ f = -d_1 t^{d_2(d_1-1)} \quad \text{e} \quad J_1 = d_1 t^{d_1+mn-m-n}.$$

Portanto,

$$\lambda_f = t^{d_1 d_2 - d_1 - d_2 - (mn-m-n)} = t^{\mu_Y - \mu_X}.$$

□

Consideramos $C(f)$ o ideal gerado por λ_f em $\mathcal{O}_{X,0}$. Na Proposição A.0.12, mostraremos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y,0}/C(f) = \delta(f)$. Para isto, utilizamos a definição e resultados sobre semigrupos numéricos (ver [21]).

Definição A.0.9. Sejam $s_1, \cdots, s_n$ números naturais. Um semigrupo númerico é o conjunto das combinações lineares $\{\sum_{i=1}^{n} a_i s_i; a_i \in \mathbb{N}\}$, denotado por $S = \langle s_1, \cdots, s_n\rangle$. O maior inteiro não pertencente à S, é chamado o número de Frobenius de S e denotado por $g(S)$.

Lema A.0.10 ([60])**.** *Sejam* s_1 *e* s_2 *dois números naturais primos entre si. Então,* $g(S) = s_1 s_2 - s_1 - s_2$*. Além disso, o intervalo* $[0, g(S)]$ *contém exatamente tantos elementos pertencentes à* S *quanto não pertencentes* S*. Quando* S *satisfaz esta propriedade é chamado simétrico.*

Lema A.0.11 ([21])**.** *Seja* S *um semigrupo numérico. Então* S *é simétrico se, e somente se, para cada* $x \in \mathbb{Z}$ *temos* $x \in S$ *ou* $g(S) - x \in S$*.*

Proposição A.0.12. *Seja* $C(f)$ *o ideal gerado por* λ_f *em* $\mathcal{O}_{X,0}$*. Então,*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{C(f)} = 2\delta(f) \quad e \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{C(f)} = \delta(f).$$

Demonstração. Suponha $\deg(\lambda_f) = D$, então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{C(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle \lambda_f \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle h, \lambda_f \rangle} = \frac{mnD}{mn} = D.$$

Então, precisamos mostrar que $\deg(\lambda_f) = D = 2\delta(f)$. De fato, pelo Lema A.0.8 temos,

$$\lambda_f = t^{\mu_Y - \mu_X} = t^{2\delta(f)}.$$

Portanto, $\deg(\lambda_f) = D = 2\delta(f)$ e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{C(f)} = 2\delta(f).$$

Agora, precisamos mostrar que $C(f) \subset \mathcal{O}_{Y,0}$. Para isto precisamos mostrar que $\sigma t^{2\delta(f)}$ pertence à $\mathcal{O}_{Y,0}$ para todo σ pertencente à $\mathcal{O}_{X,0}$. Consideramos os semigrupos numéricos Γ_X e Γ_Y. Temos $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$ e $\mathrm{mdc}(d_1, d_2) = 1$, então pelo Lema A.0.10, Γ_X e Γ_Y são simétricos, além disso,

$$g(\Gamma_X) = mn - m - n = \mu(X,0) - 1 \quad \text{e} \quad g(\Gamma_Y) = d_1 d_2 - d_1 - d_2 = \mu(Y,0) - 1.$$

Mostraremos que $2\delta(f)$ pertence à Γ_Y assim $t^{2\delta(f)}$ pertence à $\mathcal{O}_{Y,0}$. De fato, pelo Lema A.0.11, como Γ_Y é simétrico temos $2\delta(f)$ em Γ_Y ou $\mu(Y,0)-1-2\delta(f)$ em Γ_Y. Suponha $\mu(Y,0) - 1 - 2\delta(f)$ em Γ_Y, então

$$\mu(Y,0) - 1 - 2\delta(f) = \mu(Y,0) - 1 - \mu(Y,0) + \mu(X,0) = \mu(X,0) - 1 \in \Gamma_Y \subset \Gamma_X.$$

Mas, $\mu(X,0) - 1$ é o número de Frobenius, então $\mu(X,0) - 1$ não pertence à Γ_X. Portanto, $2\delta(f)$ pertence à Γ_Y, portanto $t^{2\delta(f)}$ pertence à $\mathcal{O}_{Y,0}$.

Agora, seja $\sigma = t^{am+bn}$ em $\mathcal{O}_{X,0}$ com a, b inteiros positivos, então $2\delta(f) + am + bn$ pertence à Γ_Y. De fato, pelo Lema A.0.11 temos $2\delta(f) + am + bn$ em Γ_Y ou $\mu(Y,0) - 1 - (2\delta(f) + am + bn)$ em Γ_Y. Se $\mu(Y,0) - 1 - (2\delta(f) + am + bn)$ pertence à Γ_Y, então

$$\mu(Y,0) - 1 - \mu(Y,0) + \mu(X,0) - (am + bn) = \mu(X,0) - 1 - (am + bn) \in \Gamma_Y \subset \Gamma_X.$$

Pelo Lema A.0.11 aplicado à Γ_X, temos $am + bn$ não pertencente à Γ_X, mas $\sigma = t^{am+bn}$ pertence à $\mathcal{O}_{X,0}$. Assim, $\mu(Y,0) - 1 - (2\delta(f) + am + bn)$ não pertence à Γ_Y e consequentemente, $2\delta(f) + am + bn$ pertence à Γ_Y. Portanto, $C(f) \subset \mathcal{O}_{Y,0}$. Obtemos,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{C(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{C(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{f^*\mathcal{O}_{Y,0}} = 2\delta(f) - \delta(f) = \delta(f).$$

□

Lema A.0.13. *Sejam* $(X,0)$ *uma curva plana irredutível e* $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ *um germe de aplicação finita de grau 1 sobre a sua imagem* $(Y,0)$*, com ambas* $(X,0)$ *e* f *quase homogêneas (com os mesmos pesos). Então,* $\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1,J_2\rangle}$ *e* $\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}$ *são isomorfos.*

Demonstração. A multiplicação por λ_f define um isomorfismo $\phi:\mathcal{O}_{X,0}\to C(f)$. Além disso, do Lema A.0.8, segue que $\phi(\langle J_1,J_2\rangle)=J_g\mathcal{O}_{X,0}$ e portanto, ϕ induz um isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1,J_2\rangle}\longrightarrow\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}.$$

□

Teorema A.0.14. *Sejam* $(X,0)$ *uma curva plana irredutível e* $f:(X,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ *um germe de aplicação finita de grau 1 sobre a sua imagem* $(Y,0)$*, com ambas* $(X,0)$ *e* f *quase homogêneas (com os mesmos pesos). Então,*

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)=\delta(f)$$

consequentemente,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=\mu_I(f).$$

Demonstração. Pelo Corolário A.0.6 e pelo Lema A.0.13, obtemos

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\langle J_1,J_2\rangle}-\mu_X+\dim_{\mathbb{C}}\frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}\\&=\dim\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}-\mu_X+\dim_{\mathbb{C}}\frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}.\end{aligned}$$

Temos a sequência exata,

$$0\to\frac{J_g\mathcal{O}_{X,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}\to\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}\to\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{X,0}}\to 0,$$

usando esta sequência exata e a Proposição A.0.12, segue que

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{C(f)}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}-\mu_X\\&=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{J_g\mathcal{O}_{Y,0}}-\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{Y,0}}{C(f)}-\mu_X\\&=\mu_Y-\delta(f)-\mu_X=\delta(f).\end{aligned}$$

Como $(X,0)$ é quase homogênea, temos $\mu_X=\tau(X,0)$, e usando o Teorema 3.2.6, obtemos,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(X,f)=\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)+\mu_X=\delta(f)+\mu_X=\mu_I(f).$$

□

No teorema a seguir, utilizaremos o resultado de Mond ([44]) para o número de Milnor da imagem de germes de aplicações $f:(\mathbb{C},S)\to(\mathbb{C}^2,0)$ $\mathscr{A}$-finito, a saber,

$$\mu_I(f)=\delta_X-r(X,0)+1,$$

onde $r(X,0)$ é o número de ramos da curva $(X,0)$ definida por f. Além disso, também por Mond ([44]), no caso em que $f:(\mathbb{C},S)\to(\mathbb{C}^2,0)$ é quase homogênea temos a igualdade,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)=\mu_I(f).$$

Teorema A.0.15. *Seja* $\alpha:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$ *uma parametrização de* $(X,0)$*. Então,*

$$\mu_I(f)=\mu_I(\alpha)+\mu_I(f\circ\alpha)$$

e

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)=\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f\circ\alpha)-\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(\alpha).$$

Demonstração. Utilizando os resultados de Mond citados acima para $\alpha:(\mathbb{C},0)\to(X,0)$ e $f\circ\alpha:(\mathbb{C},0)\to(Y,0)$ e utilizando o fato que $(X,0)$ e $(Y,0)$ são irredutíveis, ou seja, $r(X,0)=1$ e $r(Y,0)=1$. Obtemos,

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(\alpha)=\mu_I(\alpha)=\delta_X$$

e

$$\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f\circ\alpha)=\mu_I(f\circ\alpha)=\delta_Y.$$

Pelo Teorema 3.2.6,

$$\begin{aligned}\mu_I(f)&=\mu_X+\delta(f)=\mu_X+\delta_Y-\delta_X\\&=\delta_X+\delta_Y=\mu_I(\alpha)+\mu_I(f\circ\alpha).\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema A.0.14,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f)&=\delta(f)=\delta_Y-\delta_X\\&=\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(f\circ\alpha)-\mathscr{A}_e\text{-}\operatorname{codim}(\alpha).\end{aligned}$$

□

Exemplo A.0.16. Consideramos $(X,0)$ e f como no Exemplo A.0.7. Temos, $\mu_X = 2$, $\delta_X = 1$, $\mu_Y = 6$ e $\delta_Y = 3$, então $\delta(f) = 2$ e $\mu_I(f) = \mu(Y,0) - \delta(f) = 6 - 2 = 4$.

Por Mond e Montaldi (ver Observação 1.8.15),

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2) + \gamma^*(\operatorname{Derlog} D(G))},$$

onde $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ definida por $G(x,y,s) = (x, y^2, x^2 - y^3 + sy, s)$ é uma estabilização da aplicação $(h,\bar{f}) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, dada por $(h,\bar{f})(x,y) = (x^2 - y^3, x, y^2)$. Observamos que, $D(G) = Im(G)$, pois G não é sobrejetiva, então $\operatorname{Derlog} D(G) = \operatorname{Derlog} \operatorname{Im}(G)$. Para calcular $\mathscr{A}_e$- codim(X,f), encontramos $H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im}(G) = H^{-1}(0)$. Fazemos isto usando o software Singular [19],

$$H(z,u,v,w) = z^2 - v^3 - 2u^2z + 2v^2w - vw^2 + u^4.$$

Usamos a aplicação H para calcular $\operatorname{Derlog} \operatorname{Im}(G)$ e então podemos calcular

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\Theta(\gamma)}{t\gamma(\Theta_2) + \gamma^*(\operatorname{Derlog} \operatorname{Im}(G))} = 4.$$

Portanto,

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f) = 4 = \mu_I(f).$$

e

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \mathscr{A}_e\text{- codim}(X,f) - \mu_X = 4 - 2 = 2 = \delta(f).$$

Agora, consideramos $\alpha : (\mathbb{C},0) \to (X,0)$, dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, a parametrização de $(X,0)$. Então, $\mathscr{A}_e$- codim$(\alpha) = \mu_I(\alpha) = \delta_X = 1$ e $\mathscr{A}_e$- codim$(f \circ \alpha) = \mu_I(f \circ \alpha) = \delta_Y = 3$. Portanto,

$$\mu_I(f) = \mu_I(\alpha) + \mu_I(f \circ \alpha).$$

e

$$\mathscr{A}_e\text{- codim}(f) = \mathscr{A}_e\text{- codim}(f \circ \alpha) - \mathscr{A}_e\text{- codim}(\alpha).$$

Referências Bibliográficas

[1] D. A. H. Ament and J. J. Nuño Ballesteros. Mond's conjecture for maps between curves. *to appear in Mathematische Nachrichten.*

[2] D. A. H. Ament, J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, and J. N. Tomazella. The Euler obstruction of a function on a determinantal variety and on a curve. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 47(3):955–970, 2016.

[3] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] C. Bivià-Ausina and J. J. Nuño-Ballesteros. The deformation multiplicity of a map germ with respect to a Boardman symbol. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 131(5):1003–1022, 2001.

[5] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran, and J. Seade. *Euler obstruction and defects of functions on singular varieties. J. London Math. Soc. (2)*, 70(1):59–76, 2004.

[6] J.-P. Brasselet and M.-H. Schwartz. *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe.* In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 82 of *Astérisque*, pages 93–147. Soc. Math. France, Paris, 1981.

[7] J.-P. Brasselet, J. Seade, and T. Suwa. *Vector fields on singular varieties*, volume 1987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[8] J.-P. Brasselet, Lê D. T., and J. Seade. *Euler obstruction and indices of vector fields. Topology*, 39(6):1193–1208, 2000.

[9] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim. A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111:197–224, 1964.

[10] R.-O. Buchweitz and G.-M. Greuel. The Milnor number and deformations of complex curve singularities. *Invent. Math.*, 58(3):241–281, 1980.

[11] C. Casonatto and R. Oset Sinha. A note on the Mond conjecture and crosscap concatenations. *J. Singul.*, 12:19–26, 2015.

[12] T. Cooper, D. Mond, and R. Wik Atique. Vanishing topology of codimension 1 multi-germs over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$. *Compositio Math.*, 131(2):121–160, 2002.

[13] T. M. Dalbelo, N. G. Grulha, Jr., and M. S. Pereira. Toric surfaces, vanishing Euler characteristic and Euler obstruction of a function. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 24(1):1–20, 2015.

[14] J. Damon. $\mathscr{A}$-equivalence and the equivalence of sections of images and discriminants. In *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, volume 1462 of *Lecture Notes in Math.*, pages 93–121. Springer, Berlin, 1991.

[15] J. Damon and B. Pike. Solvable groups, free divisors and nonisolated matrix singularities II: Vanishing topology. *Geom. Topol.*, 18(2):911–962, 2014.

[16] N. De Góes Grulha, Jr. The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number. *Q. J. Math.*, 60(3):291–302, 2009.

[17] T. de Jong and G. Pfister. *Local analytic geometry.* Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. Basic theory and applications.

[18] T. de Jong and D. van Straten. Disentanglements. In *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, volume 1462 of *Lecture Notes in Math.*, pages 199–211. Springer, Berlin, 1991.

[19] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. Singular 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations. `http://www.singular.uni-kl.de`, 2016.

[20] N. Dutertre and N. G. Grulha, Jr. Lê-Greuel type formula for the Euler obstruction and applications. *Adv. Math.*, 251:127–146, 2014.

[21] R. Fröberg, C. Gottlieb, and R. Häggkvist. On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35(1):63–83, 1987.

[22] A. Frühbis-Krüger and A. Neumer. Simple Cohen-Macaulay codimension 2 singularities. *Comm. Algebra*, 38(2):454–495, 2010.

[23] T. Gaffney. Multiplicities and equisingularity of ICIS germs. *Invent. Math.*, 123(2):209–220, 1996.

[24] T. Gaffney and A. Rangachev. Pairs of modules and determinantal isolated singularities. *arXiv:1501.00201*.

[25] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.

[26] G. González-Sprinberg. *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson*. In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 83 of *Astérisque*, pages 7–32. Soc. Math. France, Paris, 1981.

[27] V. V. Goryunov. Functions on space curves. *J. London Math. Soc. (2)*, 61(3):807–822, 2000.

[28] H. Grauert and R. Remmert. *Theory of Stein spaces*, volume 236 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. Translated from the German by Alan Huckleberry.

[29] G.-M. Greuel. Dualität in der lokalen kohomologie isolierter singularitäten. *Mathematische Annalen*, 250:157–173, 1980.

[30] G.-M. Greuel, C. Lossen, and E. Shustin. *Introduction to singularities and deformations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[31] G.-M. Greuel and G. Pfister. *A* **Singular** *introduction to commutative algebra*. Springer, Berlin, extended edition, 2008. With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann, With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[32] R. C. Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables, v. 1. Function Theory.* Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics series, 1990.

[33] R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.

[34] S. M. Guseĭn-Zade and V. Èbeling. On the indices of 1-forms on determinantal singularities. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 267(Osobennosti i Prilozheniya):119–131, 2009.

[35] H. Hamm. *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume.* *Math. Ann.*, 191:235–252, 1971.

[36] K. Houston. Bouquet and join theorems for disentanglements. *Invent. Math.*, 147(3):471–485, 2002.

[37] K. Houston and N. Kirk. On the classification and geometry of corank 1 map-germs from three-space to four-space. In *Singularity theory (Liverpool, 1996)*, volume 263 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages xxii, 325–351. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[38] E. Looijenga and J. Steenbrink. Milnor number and Tjurina number of complete intersections. *Math. Ann.*, 271(1):121–124, 1985.

[39] E. J. N. Looijenga. *Isolated singular points on complete intersections*, volume 77 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[40] R. D. MacPherson. Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 100:423–432, 1974.

[41] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[42] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces.* Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1968.

[43] D. Mond. Vanishing cycles for analytic maps. In *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, volume 1462 of *Lecture Notes in Math.*, pages 221–234. Springer, Berlin, 1991.

[44] D. Mond. Looking at bent wires—$\mathscr{A}_e$-codimension and the vanishing topology of parametrized curve singularities. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 117(2):213–222, 1995.

[45] D. Mond. Some open problems in the theory of singularities of mappings. *J. Singul.*, 12:141–155, 2015.

[46] D. Mond and J. Montaldi. Deformations of maps on complete intersections, Damon's $\mathscr{K}_V$-equivalence and bifurcations. In *Singularities (Lille, 1991)*, volume 201 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 263–284. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[47] D. Mond and R. Pellikaan. Fitting ideals and multiple points of analytic mappings. In *Algebraic geometry and complex analysis (Pátzcuaro, 1987)*, volume 1414 of *Lecture Notes in Math.*, pages 107–161. Springer, Berlin, 1989.

[48] D. Mond and D. van Straten. Milnor number equals Tjurina number for functions on space curves. *J. London Math. Soc. (2)*, 63(1):177–187, 2001.

[49] D. Mond and R. G. Wik Atique. Not all codimension 1 germs have good real pictures. In *Real and complex singularities*, volume 232 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 189–200. Dekker, New York, 2003.

[50] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice-Okamoto, and J. N. Tomazella. The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity. *Israel J. Math.*, 197(1):475–495, 2013.

[51] J. J. Nuño-Ballesteros and J. N. Tomazella. The Milnor number of a function on a space curve germ. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(1):129–138, 2008.

[52] J. J. Nuño-Ballesteros and J. N. Tomazella. Equisingularity of families of map germs between curves. *Math. Z.*, 272(1-2):349–360, 2012.

[53] R. Oset Sinha, M. A. S. Ruas, and R. Wik Atique. Classifying codimension two multigerms. *Math. Z.*, 278(1-2):547–573, 2014.

[54] R. Piene. Ideals associated to a desingularization. In *Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978)*, volume 732 of *Lecture Notes in Math.*, pages 503–517. Springer, Berlin, 1979.

[55] K. Saito. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. *Invent. Math.*, 14:123–142, 1971.

[56] J. Seade, M. Tibăr, and A. Verjovsky. Milnor numbers and Euler obstruction. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 36(2):275–283, 2005.

[57] A. A. Sharland. Examples of finitely determined map-germs of corank 2 from n-space to $(n+1)$-space. *Internat. J. Math.*, 25(5):1450044, 17, 2014.

[58] D. Siersma. Vanishing cycles and special fibres. In *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, volume 1462 of *Lecture Notes in Math.*, pages 292–301. Springer, Berlin, 1991.

[59] M. A. Soares Ruas and M. S. Pereira. Codimension two determinantal varieties with isolated singularities. *Math. Scand.*, 115(2):161–172, 2014.

[60] J. J. Sylvester. *Mathematical questions with their solutions*. Education Times 41, 1884.

[61] Lê D. T. *Complex analytic functions with isolated singularities*. *J. Algebraic Geom.*, 1(1):83–99, 1992.

[62] F. Tari. Singularidades de aplicações diferenciáveis. São Carlos: Notas didáticas nº 34, ICMC-USP, 1999.

[63] G. N. Tjurina. Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 3(5):967, 1969.

[64] C. T. C. Wall. Finite determinacy of smooth map-germs. *Bull. London Math. Soc.*, 13(6):481–539, 1981.