
Distribuições preditiva e implícita para ativos
financeiros

Natália Lombardi de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

NATÁLIA LOMBARDI DE OLIVEIRA

**DISTRIBUIÇÕES PREDITIVA E IMPLÍCITA PARA ATIVOS
FINANCEIROS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística - DEs/UFSCar e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Alves Diniz

São Carlos
Junho de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA INTERINSTITUCIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

NATÁLIA LOMBARDI DE OLIVEIRA

PREDICTIVE AND IMPLIED DISTRIBUTIONS OF A STOCK PRICE

Master dissertation submitted to the Departamento de Estatística - DEs/UFSCar and the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Statistics.

Advisor: Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos

Coadvisor: Prof. Dr. Márcio Alves Diniz

São Carlos
Junho de 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a defesa de dissertação de mestrado da candidata Natália Lombardi de Oliveira realizada em 01/06/2017:

Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos
UFSCar

Dr. Hellinton Hatsuo Takada
Itaú-Unibanco

Profa. Dra. Verónica Andrea González López
UNICAMP

Certifico que a sessão de defesa foi realizada com a participação à distância dos membros Dr. Hellinton Hatsuo Takada e Profa. Dra. Verónica Andrea González López e, depois das arguições e deliberações realizadas, os participantes à distância estão de acordo com o conteúdo do parecer da comissão examinadora redigido no relatório de defesa do(a) aluno(a) Natália Lombardi de Oliveira.

Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos
Presidente da Comissão Examinadora
UFSCar

*Para meus amados Gatão, Rai, Manquinha e
Petúnia, estrelas que o céu ganhou
nos últimos anos.*

Agradecimentos

Primeiramente ao meu orientador Adriano Polpo de Campos, pelo conhecimento, paciência, apoio, amizade e por me ajudar a olhar para desafios e problemas de forma simples.

Ao meu coorientador, Márcio Alves Diniz, pelas ideias, contribuições e discussões.

Aos membros da banca Verónica Andrea González López e Hellinton Hatsuo Takada, pela atenção e dedicação nos comentários e correções. Suas contribuições enriqueceram muito meu trabalho.

À minha família Ana Teresa Lombardi, Cesar Rogério de Oliveira e Daniel Lombardi de Oliveira, pelo apoio constante, conversas e orientações.

Ao meu namorado Rafael Catoia Pulgrossi pelo companheirismo, paciência, por sempre acreditar em mim e por dar um jeito de colocar um sorriso no meu rosto em qualquer situação.

A todos os professores, alunos e funcionários do Departamento de Estatística da UFSCar e do Programa Interinstitucional em Estatística UFSCar/USP pela amizade e por proporcionarem um ambiente enriquecedor para minha formação profissional e pessoal. Em especial à Isabel, secretária do programa na UFSCar, sempre muito agradável e prestativa.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Apresentamos duas abordagens para obter uma densidade de probabilidades para o preço futuro de um ativo: uma densidade preditiva, baseada em um modelo Bayesiano para série de tempo e uma densidade implícita, baseada na fórmula de precificação de opções de Black & Scholes. Considerando o modelo de Black & Scholes, derivamos as condições necessárias para obter a densidade implícita do preço do ativo na data de vencimento. Baseando-se nas densidades de previsão, comparamos o modelo implícito com a abordagem histórica do modelo Bayesiano. A partir destas densidades, calculamos probabilidades de ordem e tomamos decisões de vender/comprar um ativo. Como exemplo, apresentamos como utilizar estas distribuições para construir uma fórmula de precificação.

Palavras-chave: volatilidade implícita, *smile* da volatilidade, função densidade de probabilidade implícita, função densidade de probabilidade preditiva, modelo autorregressivo Bayesiano.

Abstract

We present two different approaches to obtain a probability density function for the stock's future price: a predictive distribution, based on a Bayesian time series model, and the implied distribution, based on Black & Scholes option pricing formula. Considering the Black & Scholes model, we derive the necessary conditions to obtain the implied distribution of the stock price on the exercise date. Based on predictive densities, we compare the market implied model (Black & Scholes) with a historical based approach (Bayesian time series model). After obtaining the density functions, it is simple to evaluate probabilities of one being bigger than the other and to make a decision of selling/buying a stock. Also, as an example, we present how to use these distributions to build an option pricing formula.

Keywords: implied volatility, volatility smile, implied probability density function, predictive probability density function, autorregressive Bayesian model.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelo de Black & Scholes e derivações	3
2.1	Modelo de Black & Scholes	3
2.2	<i>Smile</i> da volatilidade implícita	4
2.3	Densidade implícita	5
2.4	Restrições à função de precificação para que exista densidade implícita	6
3	Densidade preditiva	11
3.1	Modelo autorregressivo Bayesiano	11
3.2	Densidade preditiva para um passo à frente	12
3.3	Preditiva para m passos à frente	13
3.4	Escolha do grau p do modelo autorregressivo via CPO*	14
4	Resultados e aplicações	17
4.1	Comparação de densidades implícita e preditiva para um instante t	17
4.2	Comparação de densidades implícita e preditiva ao longo do tempo	20
4.3	Comparação de densidades implícita e preditiva dos preços das opções	20
5	Comentários finais	25
A	Derivadas para construção da densidade implícita	27
B	Lista de distribuições	29
B.1	Distribuição Normal Multivariada	29
B.2	Distribuição Gama	29
B.3	Distribuição t	29

Capítulo 1

Introdução

Uma opção europeia de compra ou venda é um derivativo que dá ao seu proprietário o direito de comprar ou vender um determinado ativo por um preço e em uma data pré-estabelecidos (Hull, 1997). Quando não especificado no texto o tipo de opção, entenda por opção europeia de compra, uma vez que existem outros tipos de opção (americana, asiática...) e também opções de venda. Nas opções temos o preço de exercício, que é o valor a ser pago para realizar o contrato de opção, a data de vencimento, que o portador da opção tem como último dia para executar ou desistir do contrato e o prêmio da opção, que é o preço de mercado da opção. Este tipo de contrato é por si só um ativo financeiro negociado em bolsas de valores e demandado por muitos investidores. Analisando as oscilações dos preços das opções e dos ativos sobre os quais elas se baseiam (ativos-base), os agentes de mercado procuram saber se é ou não interessante comprar esse tipo de opção. Esta é uma análise complexa, pois envolve o tempo até o vencimento do contrato, o comportamento do preço do ativo-base neste período e suas oscilações.

A partir da suposição de um modelo e de ferramentas de cálculo estocástico, Black & Scholes (1973) construíram a fórmula de precificação de opções mais conhecida e utilizada no mercado de opções. Baseado nesta função de precificação, Malz (1993) discute o *smile* da volatilidade, comportamento diferente da volatilidade constante que Black & Scholes assumiram que poderia ser estimada pelo desvio padrão do preço histórico do ativo base. Entretanto, a partir do *Crash* de 1987 (Hull, 1997), passou a ser usado uma função para a volatilidade que, em geral, tinha o aspecto de uma parábola convexa, similar a um sorriso e, por isso, foi nomeado como *smile* da volatilidade. Malz (1993), utilizando da definição de preço justo como valor esperado da opção, apresenta a função de densidade implícita para o preço do ativo na data de vencimento. Esta densidade expressa a distribuição de probabilidade do preço do ativo na data de vencimento e, portanto, traduz o comportamento e conhecimento instantâneo do ativo implícito ao mercado.

Entretanto, a partir dos cálculos apresentados por Malz (1993), nem sempre cons-

guíamos obter uma função de densidade implícita. Considerando este fato, apresentamos algumas condições necessárias para que a função de precificação garanta a existência da função de densidade implícita.

Sendo a densidade implícita resultante do modelo de Black & Scholes uma tradução do comportamento instantâneo do preço futuro do ativo, é interessante compará-la ao comportamento de previsão do ativo a partir de seu comportamento passado, traduzido pela densidade preditiva Bayesiana. A função de densidade preditiva é estimada utilizando a abordagem Bayesiana via modelo autorregressivo. Apesar de ser um modelo relativamente simples, entendemos que este respeita dependência temporal entre as realizações da série de preços. Assim, com a construção da densidade preditiva, podemos comparar as densidades implícita e preditivas. Aplicaremos as técnicas às séries de preços de ativos e opções disponíveis na BM&F BOVESPA.

Alguns termos recorrentes ao longo do texto necessitam esclarecimento. Como taxa de juros livre de risco, r , optamos pela taxa Selic dada pela média de juros diária anualizada com base em 252 dias úteis. Outra possibilidade seria utilizar o CDI como taxa de juros livre de risco. Sempre que escrito “opções”, nos referimos a opções européias de compra. Tempo de vencimento, T , é o momento em que a opção vence, ou seja, deve ou não ser executada. Preço do ativo base no tempo t , S_t , é o preço do ativo ao qual a opção está vinculada no tempo t . O preço de exercício X é o valor pelo qual o detentor opção tem o direito de comprar o ativo-base na data de vencimento. Preço de mercado da opção será denotado por c e o preço justo (livre de arbitragem e neutro ao risco) resultante da função de precificação por p .

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos a função de precificação de Black & Scholes, a volatilidade implícita, o *smile* da volatilidade, a densidade implícita e as condições necessárias para que exista a função de densidade implícita. No Capítulo 3, apresentamos como construir uma densidade preditiva m passos à frente a partir de um modelo Bayesiano para séries de tempo, no caso para o modelo autorregressivo. A comparação das densidades implícita e preditiva encontra-se no Capítulo 4. Por fim, propostas futuras e algumas questões relevantes para a continuidade do trabalho são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo de Black & Scholes e derivações

Black & Scholes (1973) construíram um modelo de precificação neutra ao risco (de ganho esperado zero) de opções europeias. No mesmo período, Merton (1973, 1976) apresentou uma formulação muito similar. Muitos autores referem-se à fórmula como Black-Scholes-Merton (Haug & Taleb, 2011), entretanto, por simplicidade, utilizaremos apenas Black & Scholes, que é também a forma mais conhecida para a fórmula de precificação de opções (Belitsky, 2000; Cox et al., 1979, entre outros). Os resultados envolvendo esta fórmula de precificação foram baseados em Malz (1993).

2.1 Modelo de Black & Scholes

O modelo de Black & Scholes supõe que o preço de um ativo (que pode ser vendido ou comprado em quaisquer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$, sendo T a data de vencimento do contrato) segue o processo estocástico

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, t \in [0, T],$$

em que S_t é o valor do ativo-base no tempo t , S_0 é o valor inicial do ativo-base, μ é a taxa média de retorno do ativo e σ a volatilidade do preço do ativo, ambos constantes. W_t , $t \in [0, T]$ é um processo de Wiener. A partir desta suposição e utilizando ferramentas de cálculo estocástico, Black & Scholes (1973) obtiveram uma fórmula de precificação de opções que é baseada na ideia de preço justo da opção, ou seja, o preço que resulta em lucro esperado nulo.

Definição 2.1.1 - Função de precificação de Black & Scholes

Seja uma opção de compra com data de vencimento T , data atual t , preço do ativo-base no instante atual S_t , preço de exercício X , taxa de juros livre de risco r e volatilidade σ ,

seu preço livre de risco segundo Black & Scholes é dado por

$$p_{BS}(S_t, t, T, X, \sigma, r) = S_t \Phi(d_1) - X e^{r(t-T)} \Phi(d_2) \quad (2.1)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição da normal padrão e

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/X) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad e$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/X) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

Na hipótese de volatilidade constante, a fórmula de Black & Scholes não descreve satisfatoriamente os preços das opções praticados no mercado. Um problema deste modelo é que ele considera a volatilidade de uma opção constante em relação ao preço de exercício. Todos os valores necessários para a precificação são conhecidos, exceto a volatilidade, que precisa ser estimada. Usualmente estima-se a volatilidade pelo desvio padrão histórico da série de preços do ativo e muitas vezes considerando diferentes janelas de tempo (últimos 30 dias, 60 dias, entre outros). Entretanto, tais estimativas são as mesmas para os diferentes preços de exercício.

2.2 *Smile* da volatilidade implícita

A suposição de que a volatilidade é a mesma (constante) para diferentes preços de exercício é considerada irrealista. Malz (1993) apresenta o comportamento da volatilidade implícita, praticado pelo mercado em um instante de tempo como uma função do preço de exercício, $\sigma_t(X)$ — “implícita” refere-se ao uso dos preços de mercado instantâneos de diferentes opções com um mesmo ativo-base para obter a volatilidade. Segundo as suposições do modelo, esta função deveria ser constante em relação ao preço de exercício. Porém, na prática, o que se observa é um gráfico em formato de “U”.

Definição 2.2.1 - Volatilidade implícita

Seja $c(t, X, T)$ o preço de mercado no instante t de uma opção com preço de exercício X e data de vencimento T . A volatilidade implícita para esta opção é o valor σ_X tal que

$$c(t, X, T) = p_{BS}(S_t, t, T, X, \sigma_X, r). \quad (2.2)$$

Definição 2.2.2 - *Smile* da volatilidade implícita

Considere opções com mesmo ativo-base e mesma data de vencimento. Seja $c(t, X, T)$ o preço de mercado destas opções e $p_{BS}(S_t, t, T, X, \sigma_t, r)$ o preço de Black & Scholes. A

função $\sigma_t(X)$ que satisfaz

$$c(t, X, T) = p_{BS}(S_t, t, T, X, \sigma_t(X), r). \quad (2.3)$$

para todo X é chamada de *smile* da volatilidade implícita.

Para obter a volatilidade implícita inverte-se a função de precificação em relação à volatilidade ao igualá-la ao preço de mercado da opção. A função que traduz o comportamento da volatilidade implícita para qualquer preço de exercício é o *smile* da volatilidade. Esta função pode ser interpretada como o comportamento da volatilidade para a situação em que o custo de mercado é igualado à precificação de Black & Scholes.

Como o mercado tem regras para a existência de opções que dependem das oscilações do preço do ativo-base, há um número limitado de pontos para a construção do *smile*. Para obtermos um *smile* definido para qualquer preço de exercício, utilizamos o método dos mínimos quadrados para ajustar curvas suaves a estes pontos, podendo ser polinômios, funções exponenciais ou outro tipo de função de interesse. Estas curvas são denotadas por $\tilde{\sigma}_t(X)$. Existem outras técnicas para obtenção do *smile* da volatilidade, as quais não são o foco deste trabalho.

2.3 Densidade implícita

Através do *smile* da volatilidade implícita é possível derivar a função de densidade implícita do preço do ativo no tempo de vencimento. Note que o preço justo de uma opção de compra em T é $\max(S_T - X, 0)$. Podemos escrever o preço da opção no tempo presente como

$$c(t, X, T) = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - X, 0)] \quad (2.4)$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_X^\infty (S_T - X) f_{S_T}(S_T) dS_T, \quad (2.5)$$

em que E é a esperança em relação a medida de probabilidade $f_{S_T}(S_T)$. Esta densidade de probabilidade é a segunda derivada do custo de mercado da opção em relação ao preço de exercício multiplicada por $e^{-r(T-t)}$:

$$\frac{\partial c(t, X, T)}{\partial X} = e^{-r(T-t)} [1 - F_{S_T}(X)] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 c(t, X, T)}{\partial X^2} = e^{-r(T-t)} f_{S_T}(X). \quad (2.7)$$

Sendo F_{S_T} a função distribuição implícita do preço do ativo em T , queremos obter

densidade implícita equivalente f_{S_T} . Por (2.2), $c(t, X, T) = p_{BS}(S_t, t, T, X, \sigma_t, r)$ para um X fixo. Para variar X , utilizamos o *smile* contínuo $\tilde{\sigma}_t(X)$ e escrevemos $c(t, X, T) = p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)$. Com isso podemos calcular (2.6) e obter a densidade implícita \tilde{f}_{S_T} , dada por

$$\tilde{F}_{S_T}(X) = \frac{\partial p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X} e^{r(T-t)} + 1, \quad (2.8)$$

$$\tilde{f}_{S_T}(X) = \frac{\partial^2 p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X^2} e^{r(T-t)}. \quad (2.9)$$

As derivadas analíticas para obtenção da densidade implícita encontram-se no Apêndice A.

A função densidade de probabilidade implícita de S_T traduz o comportamento instantâneo de S_T no mercado; indica a plausibilidade de valores que S_T assume segundo as condições atuais. Em um contexto de tomada de decisão de um investidor sobre comprar ou vender este ativo, é interessante saber como este comportamento instantâneo se compara a um comportamento previsto baseado nas informações históricas disponíveis do ativo. Isto permite entender melhor o funcionamento do mercado, indicando possíveis tendências de movimentos de preços.

2.4 Restrições à função de precificação para que exista densidade implícita

A partir de (2.8), derivamos algumas condições necessárias para que seja possível obter a função de densidade implícita a partir da função de Black & Scholes.

- *Pertencer à classe \mathcal{C}^2 em relação ao argumento X* — Para que a segunda derivada exista e seja contínua, resultando na densidade implícita, a função $p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)$ deve pertencer à classe \mathcal{C}^2 em relação a X .
- *Ser não crescente em X* — A imagem de toda função distribuição deve ser o intervalo $[0, 1]$. Logo,

$$\tilde{F}(X) = \frac{\partial p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X} e^{r(T-t)} + 1 \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X} e^{r(T-t)} \in [-1, 0].$$

Como $e^{r(T-t)} > 0$, segue que $\frac{\partial p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X} \leq 0$, ou seja, $p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)$ é não crescente em relação a X .

- *Ser convexa em X* — Toda função densidade de probabilidades é positiva. Logo,

$$\tilde{f}_{BS}(X) = \frac{\partial^2 p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X^2} e^{r(T-t)} \geq 0.$$

Como $e^{r(T-t)} > 0$, $\frac{\partial^2 p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)}{\partial X^2} \geq 0$. Assim, $p_{BS}(S_t, t, T, X, \tilde{\sigma}_t(X), r)$ é convexa em X .

Estas restrições matemáticas são coerentes. A função de precificação pertencer à classe \mathcal{C}^2 e ser convexa são necessárias para que exista a função de densidade de probabilidades implícita. Já a função de precificação ser não crescente é razoável para o mercado financeiro; se tratando de uma opção de compra, quanto maior o preço de exercício desta opção, menor deve ser seu custo.

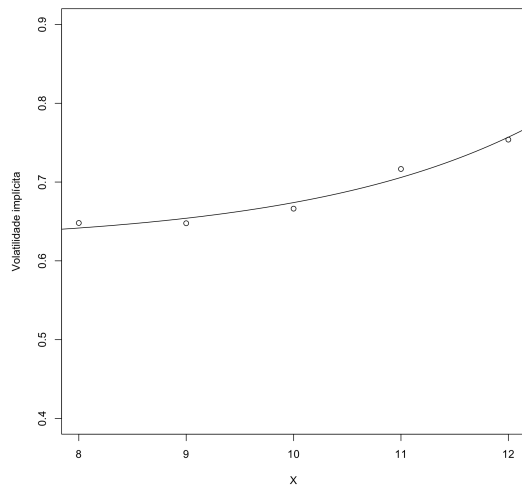
Se utilizarmos uma curva qualquer para $\tilde{\sigma}_t(X)$ sem levar em consideração estas condições, existe a possibilidade de não obtermos uma função densidade de probabilidades. Para ilustrar os problemas decorrentes da não imposição das restrições necessárias temos o Exemplo 2.4.1.

Exemplo 2.4.1 *Para ajustar os smiles da volatilidade e densidades implícitas, tanto sob as restrições impostas à função de precificação quanto sem estas restrições, utilizaremos opções de compra de ações da Petrobrás na data 23/05/2016 com vencimento para 20/06/2016. O intervalo de tempo até o vencimento era 0,076712 anos, o preço do ativo-base no instante t (23/05/2016) era R\$8,52 e a taxa de juros livre de risco 14,25% ao ano. Os preços das opções e os preços de exercício disponíveis no mercado são apresentados na Tabela 2.1. Os pontos do smile da volatilidade foram obtidos pela inversão numérica da fórmula de precificação e, para traçar a curva, foi utilizado uma função exponencial da forma $a + e^{b+cx}$.*

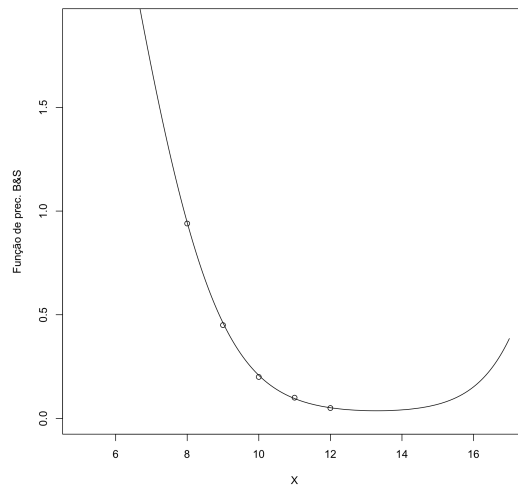
O smile, a função de precificação, a função distribuição implícita e a função densidade implícita do preço do ativo sem utilizar as restrições acima citadas são apresentados nas figuras 2.1(a), 2.1(b), 2.2(a) e 2.2(b), respectivamente. Note que estas funções não satisfazem as condições para serem consideradas funções distribuição e densidade. Já ao utilizar as restrições, temos as figuras 2.3(a), 2.3(b), 2.4(a) e 2.4(b), das quais as duas últimas são efetivamente funções distribuição e densidade.

Tabela 2.1: Preços de exercício e das opções vigentes.

Preço de exercício	Preço da opção
R\$8,00	R\$0,94
R\$9,00	R\$0,45
R\$10,00	R\$0,20
R\$11,00	R\$0,10
R\$12,00	R\$0,05

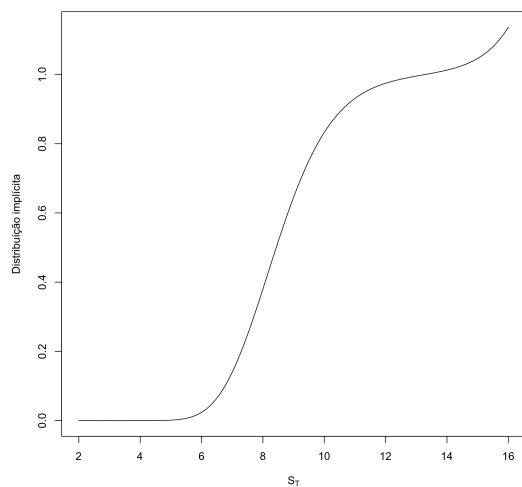


(a)

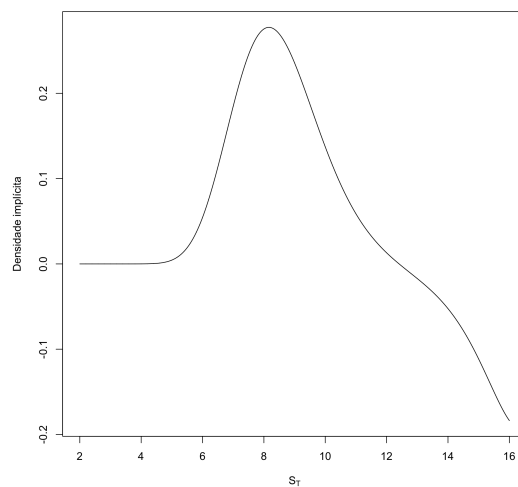


(b)

Figura 2.1: Smile da volatilidade implícita: (a) curva ajustada por mínimos quadrados utilizando uma função exponencial sem restrições e (b) função de precificação implícita a partir deste *smile*. Os pontos em ambos os gráficos são as opções existentes no mercado.



(a)



(b)

Figura 2.2: Cálculo que resultaria em funções de (a) distribuição e (b) densidade implícitas do preço do ativo-base em T .

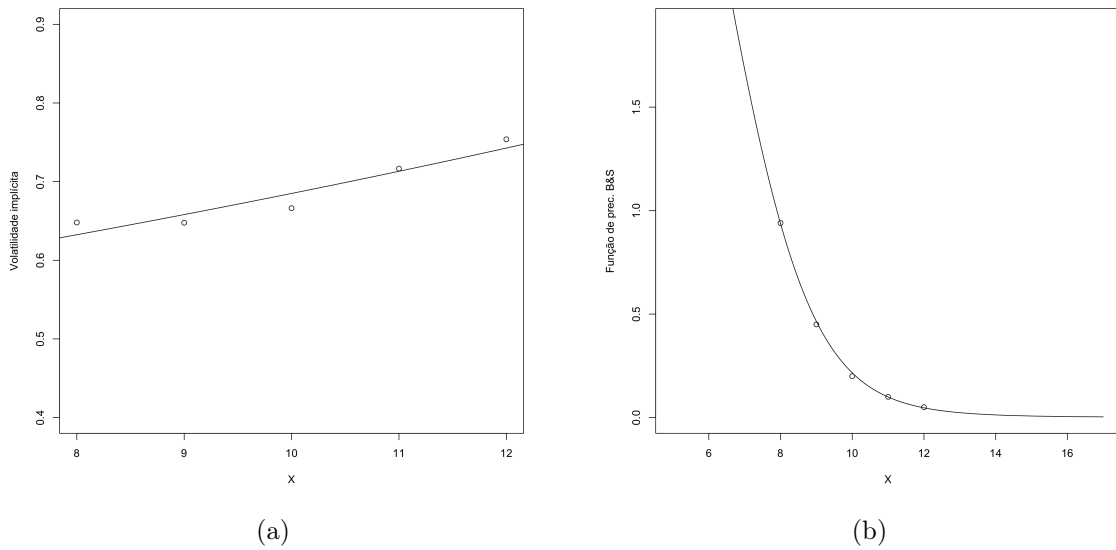


Figura 2.3: Smile da volatilidade implícita: (a) curva ajustada por mínimos quadrados utilizando uma função exponencial com restrições e (b) função de precificação implícita a partir deste *smile*. Os pontos em ambos os gráficos são as opções existentes no mercado.

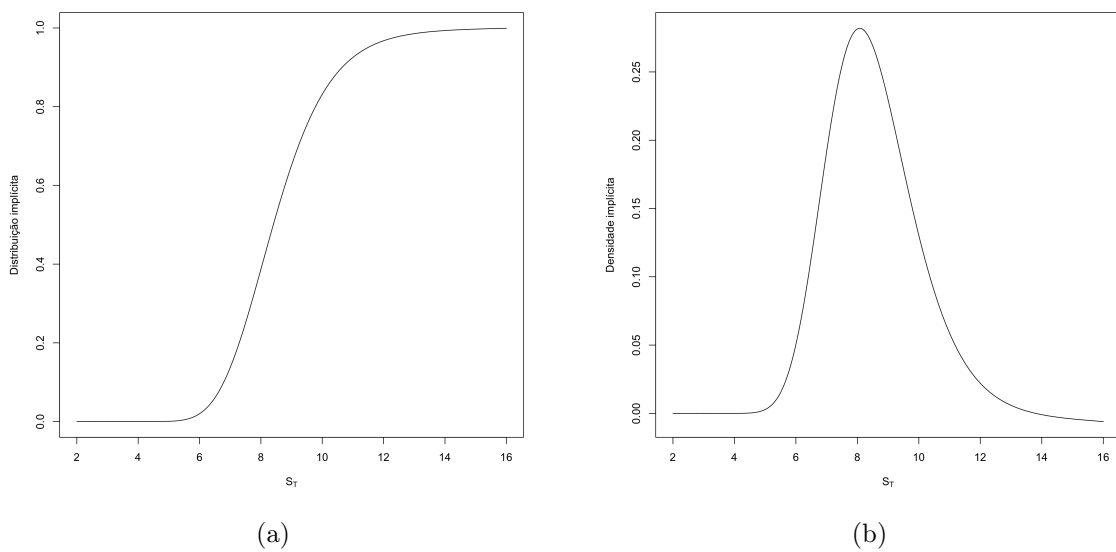


Figura 2.4: Funções de distribuição e densidade implícitas do preço do ativo-base em T .

Capítulo 3

Densidade preditiva

Como comportamento de previsão, construímos uma densidade dos preços utilizando a distribuição preditiva a partir de um modelo Bayesiano para série de tempo. Utilizamos o modelo autorregressivo.

3.1 Modelo autorregressivo Bayesiano

Seja Z_t um processo estocástico autorregressivo de ordem p ($AR(p)$). Então

$$Z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p} \sim \text{Normal}(\beta_0 + \beta_1 z_{t-1} + \beta_2 z_{t-2} + \dots + \beta_p z_{t-p}, \xi^{-1})$$

em que $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \xi)^t$ é um vetor de parâmetros e ξ é um parâmetro de precisão. Há restrição nos parâmetros para que o processo seja fracamente estacionário: as raízes do polinômio característico devem estar fora do círculo unitário. Para mais detalhes, veja Morettin (2006). Para ajustar este modelo a uma série de tempo Z_t com t observações, $t \geq p$, definimos alguns termos:

$$Z_{a:b} = \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_{a+1} \\ \vdots \\ Z_{b-1} \\ Z_b \end{bmatrix}, Z_{b:a} = \begin{bmatrix} Z_b \\ Z_{b-1} \\ \vdots \\ Z_{a+1} \\ Z_a \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1_{t-p} & | & Z_{p:t-1} & | & Z_{p-1:t-2} & | & \cdots & | & Z_{1:t-p} \end{bmatrix},$$

em que $a < b$ e 1_k é um vetor coluna unitário de dimensão k . Por questão de notação, denotamos $b = (W^t W)^{-1} W^t X_{p+1:t}$ e $SSE = (Z_{p+1:t} - Wb)^t (Z_{p+1:t} - Wb)$ (Koop et al., 2007), sendo A^t o transposto de A . Temos que, a partir de uma família de distribuições

conjugadas, as distribuições a priori são

$$\begin{aligned}\xi &\sim \text{Gama}(\alpha_0, \gamma_0), \alpha_0, \gamma_0 > 0, \\ \beta|\xi &\sim N_{p+1}(\mu_0, (hK_0)^{-1}), \mu_0 \in \mathbb{R}_{p+1}\end{aligned}$$

e as distribuições a posteriori,

$$\begin{aligned}\xi|Z_{1:t} &\sim \text{Gama}(\alpha_n, \gamma_n), \alpha_n, \gamma_n > 0, \\ \beta|\xi, Z_{1:t} &\sim N_{p+1}(\mu_n, (hK_n)^{-1}), \mu_n \in \mathbb{R}_{p+1}\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \alpha_0 + 1/2, \\ K_n &= K_0^{-1} + W^t W, \\ \mu_n &= K_n^{-1}(K_0 \mu_0 + W^t W b) \text{ e} \\ \gamma_n &= \gamma_0 + \frac{1}{2} SSE + \frac{1}{2}(b - \mu_0)^t W^t W K_n^{-1} K_0 (b - \mu_0).\end{aligned}$$

A parametrização das densidades utilizadas encontra-se no Apêndice B.

3.2 Densidade preditiva para um passo à frente

A densidade preditiva um passo a frente é a distribuição de probabilidade de uma variável ainda não observada condicional à toda a informação coletada até o momento e, ao estender esta idéia para o modelo autorregressivo, temos uma densidade para um preço futuro que carrega consigo o comportamento histórico do preço do ativo.

$$f_{Z_{t+1}}(z_{t+1}|Z_{1:t}) = \int \cdots \int f(z_{t+1}|\beta_0, \dots, \beta_p, \xi, Z_{t:t-(p-1)}) \pi(\beta_0, \dots, \beta_p, \xi|Z_{1:t}) d\beta_0 \cdots d\beta_p d\xi,$$

sendo $\pi(\beta_0, \dots, \beta_p, \xi|Z_{1:t})$ a densidade *a posteriori* dos parâmetros do modelo. Segundo Lad (1996),

$$Z_{t+1}|z_{1:t} \sim t(\nu, \mu, \sigma), \quad (3.1)$$

em que

$$\begin{aligned}\nu &= 2\alpha_n, \\ \mu &= (1, Z_{t:t-(p-1)}^t)^t \mu_n, \\ \sigma &= \frac{\alpha_n}{\gamma_n} [I - (1, Z_{t:t-(p-1)}^t)^t (K_n + (1, Z_{t:t-(p-1)}^t)(1, Z_{t:t-(p-1)}^t)^t)^{-1} (1, Z_{t:t-(p-1)}^t)],\end{aligned}$$

sendo t a distribuição t de Student com parâmetro de locação μ , escala σ e graus de liberdade ν (função densidade encontra-se no Apêndice B).

3.3 Preditiva para m passos à frente

Devido a complexidade de problemas com dependência entre observações, a obtenção da densidade preditiva analítica m passos a frente é inviável. Porém, partindo de uma amostra da preditiva um passo a frente, é possível gerar uma amostra da preditiva m passos a frente utilizando o método de Gibbs (Gelman et al., 2003) uma vez que conhecemos as densidades condicionais das quais desejamos gerar.

Suponha que estamos em t e desejamos gerar uma amostra de tamanho k da preditiva da variável no passo $t + m$ condicional aos anteriores. O modelo é aquele ajustado com as t primeiras observações, então a preditiva que queremos amostrar é $Z_{t+m} | z_1, \dots, z_t$. Primeiramente, devemos gerar uma amostra de tamanho k da preditiva $Z_{t+1} | z_{1:t}$, que é a densidade especificada em (3.1). Denotaremos esta amostra por $z_{t+1}^{(1)}, z_{t+1}^{(2)}, \dots, z_{t+1}^{(k)}$. A partir disto, temos o seguinte algoritmo:

1. Faça $i = 1$; i é o índice referente à amostra.
2. Faça $j = 2$; j é o índice referente ao tempo.
3. Seja $z^* = (z_1, z_2, \dots, z_t, z_{t+1}^{(i)}, z_{t+2}^{(i)}, \dots, z_{t+j-1}^{(i)})^t = (z_{1:t}, z_{t+1:t+j-1}^{(i)})^t$.
4. Geramos $z_{t+j}^{(i)}$ a partir de $Z_{t+j}^{(i)} | z_{1:t+j-1}^* \sim t(\nu = 2\alpha_n, \mu = (1, z_{t+j:t+j-(p-1)}^{*t})^t \mu_n, \sigma = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} [I - (1, z_{t+j:t+j-(p-1)}^{*t})^t (K_n + (1, z_{t+j:t+j-(p-1)}^{*t})(1, z_{t+j:t+j-(p-1)}^{*t})^t)^{-1} (1, z_{t+j:t+j-(p-1)}^{*t})])$.
5. $j = j + 1$. Repetir os passos 3-4 até $j = m$.
6. $i = i + 1$. Repetir os passos 2-5 até $i = k$.

Com isso, temos uma amostra $z_{t+m}^{(1)}, z_{t+m}^{(2)}, \dots, z_{t+m}^{(k)}$, ou seja, uma amostra da preditiva $Z_{t+m} | z_{1:t}$.

3.4 Escolha do grau p do modelo autorregressivo via CPO*

Para determinar o grau p do modelo autorregressivo utilizaremos o CPO*, uma adaptação para séries de tempo da medida de adequabilidade preditiva CPO, ou *Conditional Predictive Ordinate* (Corberán-Vallet & Lawson, 2011). O CPO é uma quantidade baseada em validação cruzada, retirando uma observação por vez e realizando a previsão da mesma. Usualmente, medidas que não levam isto em consideração são problemáticas pois superestimam a capacidade preditiva de um modelo.

O CPO é calculado para cada i -ésima observação, denotado por CPO_i , e, para obter um índice geral, somamos o logaritmo dos CPO_i 's para todo i . Para tornar este valor positivo, utilizamos seu oposto.

Cada CPO_i é a densidade preditiva da i -ésima observação aplicada ao ponto observado z_i , ou seja, indica se o ponto observado é de alta ou baixa densidade preditiva. A ideia do CPO é calcular, para cada observação,

$$CPO_i = p(z_i | z_{[i]}) = \int p(z_i | \Theta) p(\Theta | z_{[i]}) d\Theta, \quad (3.2)$$

em que z_i , é o i -ésimo valor observado de z , $z_{[i]}$ é o vetor z sem a i -ésima observação e $\Theta = (\beta, \xi)$.

Uma medida para comparação de modelos, consideramos a soma do \ln dos CPOs

$$\ell \text{ CPO} = - \sum_{i=1}^n \ln(CPO_i).$$

Como estamos calculando menos a log densidade das previsões aplicada aos pontos observados, quanto menor o ℓ CPO melhor o modelo.

Em modelos de séries de tempo, devemos tomar cuidado com a dependência no momento de construção da densidade preditiva. Além disso, podemos ter problemas com a qualidade dos CPO_i 's calculados para i 's iniciais. Por exemplo, em um contexto de regressão com n observações, para calcular CPO_1 , construiremos a preditiva com $n - 1$ observações. Com um modelo de séries temporais, não teremos dados anteriores à i -ésima observação para construir a preditiva, utilizando apenas a distribuição a priori.

Não é adequado avaliar a qualidade preditiva de um modelo utilizando uma previsão tão crua como a das primeiras observações da série. Assim, propõe-se um CPO alternativo, denotado por CPO*. A ideia do CPO* é fixar uma janela de tempo recente para calcular o CPO, tendo disponível uma quantia razoável de dados até o cálculo do primeiro $CPO*_i$.

Seja z uma série temporal com n observações e seja m o tamanho da janela de tempo

desejada para calcular o CPO* ($m \ll n$).

$$CPO_i^* = p(z_i | z_{[i]}) = \int p(z_i | \Theta) p(\Theta | z_{1:i-1}) d\Theta. \quad (3.3)$$

O ℓ CPO* geral é dado por

$$\ell CPO^* = - \sum_{i=n-m+1}^n \ln(CPO_{*i}). \quad (3.4)$$

Capítulo 4

Resultados e aplicações

Com as duas distribuições dos preços (implícita e preditiva) definidas, aplicaremos as técnicas desenvolvidas a séries de preços da petrobrás (PETR4) fornecidas pela BM&F-BOVESPA (BM&F-BOVESPA, 2015). Neste Capítulo, vamos apresentar três resultados que decorrem dos conceitos apresentados e desenvolvidos nos capítulos anteriores. Primeiramente, na Seção 4.1 apresentaremos uma comparação das densidades implícita e preditiva via probabilidades de ordem. Na Seção 4.2, apresentamos como intervalos de credibilidade construídos a partir da preditiva e da implícita comportam-se ao longo do tempo em relação ao valor observado de S_T , o qual no momento deste trabalho é conhecido e igual a R\$15,92. Por fim, na Seção 4.3 apresentamos uma forma de, a partir das distribuições implícita e preditiva de S_T , obter a função quantil do preço das opções com diferentes preços de exercício em t . Em todos os casos, utilizamos a série original, o que gerou melhores resultados do que utilizar o logaritmo do preço.

4.1 Comparação de densidades implícita e preditiva para um instante t

Considerando a implícita e a preditiva de duas variáveis aleatórias independentes, podemos compará-las via probabilidades de ordem (probabilidade do preço implícito ser superior ao preço predito, por exemplo), medidas resumo e gráficos das densidades. Este tipo de resultado pode auxiliar na tomada de decisão de entidades envolvidas no mercado. Por exemplo, caso a esperança do preço do ativo calculado por meio da densidade preditiva seja maior que a esperança do preço do ativo calculada por meio da densidade implícita, um investidor poderia tomar a decisão de comprar o ativo, pois historicamente sua média tende a ser superior à média atual praticada pelo mercado, ou seja, o mercado estaria subvalorizando o ativo. Analogamente, se o mercado está praticando um preço abaixo do

Tabela 4.1: Modelos com diferentes graus e ℓCPO^* 's correspondentes. Apresentação dos modelos com menor ℓCPO^* em ordem crescente (o maior valor de p considerado foi 30).

ℓCPO^*	p	ℓCPO^*	p	ℓCPO^*	p
8.87	10	9.31	17	10.14	12
8.98	7	9.48	18	10.14	20
8.99	8	9.52	15	10.44	23
9.08	2	9.61	19	10.47	24
9.09	3	9.63	14	10.54	25
9.10	1	9.67	16	10.66	29
9.12	9	9.88	13	10.90	28
9.17	4	9.97	11	11.09	26
9.19	6	10.00	22	11.20	30
9.21	5	10.02	21	11.34	27

histórico, o ativo está sobrevalorizado e o investidor deve vendê-lo.

Utilizamos séries de preços da Petrobrás fornecidas pela BM&F-BOVESPA (2015) e selecionamos apenas as opções com negociação. A data de vencimento é 20 de fevereiro de 2017 e o preço do ativo nesta data era R\$15,92. A densidade preditiva foi calculada utilizando como dados os preços de fechamento diários de 26 de novembro de 2015 a 2 de fevereiro de 2017 e são apresentados na Figura 4.1. O modelo utilizado foi o autor-regressivo de ordem 10, uma vez que este apresentou menor ℓCPO^* dentre os modelos considerados (grau 1 a 30), apresentados na Tabela 4.1. Para o cálculo do ℓCPO^* , utilizamos os últimos 40 dias, equivalente a aproximadamente 2 meses de negociação. O tempo para previsão utilizado foi 20 de fevereiro de 2017, o que é equivalente a utilizar 12 dias de negociação até o vencimento do contrato.

No caso da construção da preditiva no tempo T para a série de preços S_t seguindo a notação do Capítulo 3, basta considerarmos

- $Z_t = S_t$;
- $t + m = T$.

Para o cálculo da densidade implícita, utilizamos os dados de opções da Petrobrás de 2 de fevereiro de 2017. O tempo até o vencimento era de 12 dias de negociação, a taxa de juros livre de risco 13% ao ano e o preço do ativo no instante t (02/02/2017) era R\$14,89. As cotações e preços de exercício das opções de compra vigentes e com negociação encontram-se na Tabela 4.2. Para o *smile* contínuo utilizamos um polinômio quadrático.

As funções de densidade preditiva e implícita são apresentadas na Figura 4.2. Consideramos estas duas variáveis aleatórias independentes para calcular probabilidades de ordem. A probabilidade da implícita ser maior que a preditiva é de 0.534 (calculada com

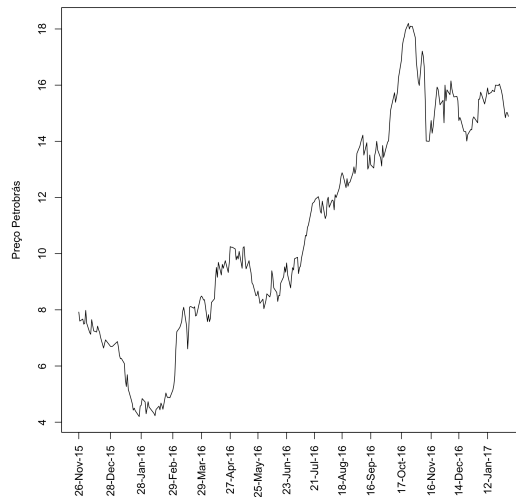


Figura 4.1: Série diária de preços da Petrobrás de 20 de novembro de 2015 a 2 de fevereiro de 2017.

Tabela 4.2: Preços de exercício e das opções vigentes.

Preço de exercício	Preço da opção
R\$14,00	R\$1,17
R\$15,00	R\$0,54
R\$16,00	R\$0,18
R\$17,00	R\$0,07

o método de Monte Carlo, baseado na amostra da distribuição a posteriori obtida por amostrador de Gibbs). Isto significa que o preço que o mercado está praticando é muito próximo, porém ligeiramente superior, ao que prevemos com base em dados históricos. As medidas descritivas de cada variável aleatória (Tabela 4.3) reforçam esta característica, uma vez que, apesar de próximas, a média e a mediana da implícita são superiores aos da preditiva. Vale destacar que a variabilidade da densidade preditiva é bem menor que da densidade implícita, característica detectada tanto no desvio padrão quanto na distância interquartil.

Tabela 4.3: Medidas descritivas para a densidade preditiva e a densidade implícita de S_T .

	Preditiva	Implícita
Média	R\$14.79	R\$14.96
D.P.	R\$0.90	R\$1.45
Q1	R\$14.21	R\$13.98
Mediana	R\$14.75	R\$14.92
Q3	R\$15.42	R\$15.90

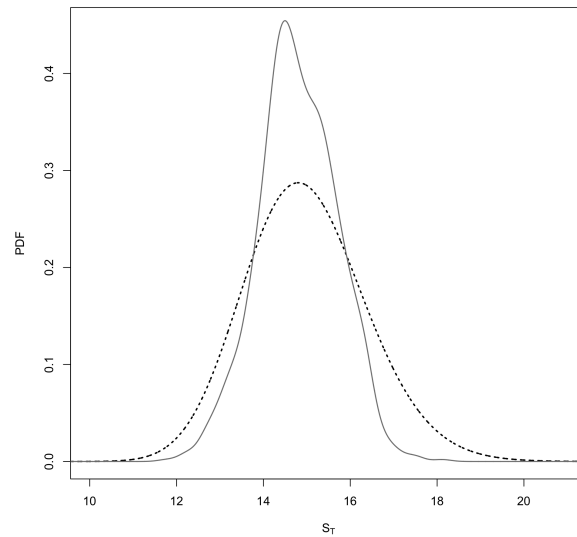


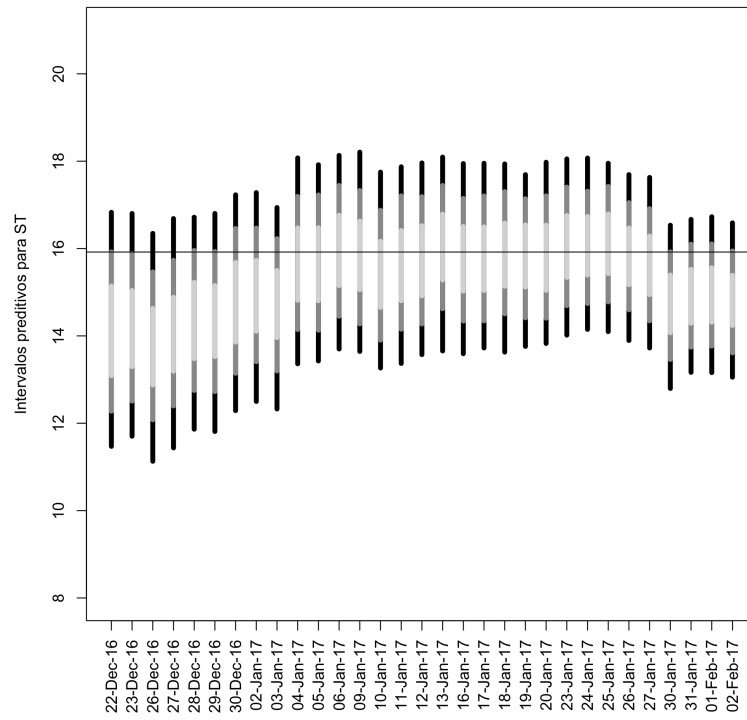
Figura 4.2: Funções de densidade preditiva (linha contínua cinza) e implícita (linha pontilhada preta) do preço do ativo-base em $T = 2$ de fevereiro de 2017.

4.2 Comparação de densidades implícita e preditiva ao longo do tempo

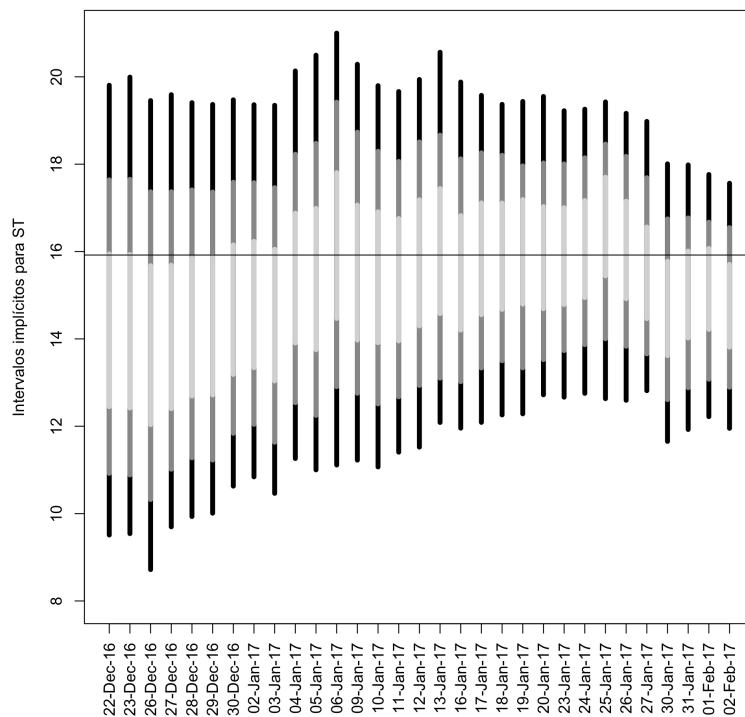
Para verificar o comportamento das densidades implícita e preditiva ao longo do tempo, calculamos as densidades considerando como tempo presente de 20 de dezembro de 2016 a 2 de fevereiro de 2017. Para as preditivas, continuamos utilizando dados históricos a partir de 26 de novembro de 2015 e o modelo utilizado foi o AR(10), obtido na Seção 4.1. Para cada dia de negociação, calculamos a probabilidade da densidade implícita estar acima da preditiva (Figura 4.4), intervalos de credibilidade HPD de 50%, 80% e 95% para as duas densidades (figuras 4.3(a) e 4.3(b)) e comparamos com o valor observado de S_T . Em geral, tanto os intervalos preditivos quanto os implícitos contém S_T . Os intervalos preditivos tem amplitude menor que os implícitos. Na Figura 4.4 temos as probabilidades da implícita ser maior que a preditiva ao longo do tempo considerado. Na maioria das vezes, a implícita mostrou-se maior que a preditiva, indicando uma possível supervalorização do ativo.

4.3 Comparação de densidades implícita e preditiva dos preços das opções

A partir de uma densidade para S_T , é possível calcular a função quantil do preço de uma opção no tempo t , $t < T$. Como visto no Capítulo 2, o preço justo de uma opção de



(a)



(b)

Figura 4.3: Intervalos de credibilidade densidades (a) preditiva e (b) implícita. 95% em preto, 80% em cinza médio e 50% em cinza claro. A reta horizontal preta é o valor observado de S_T .

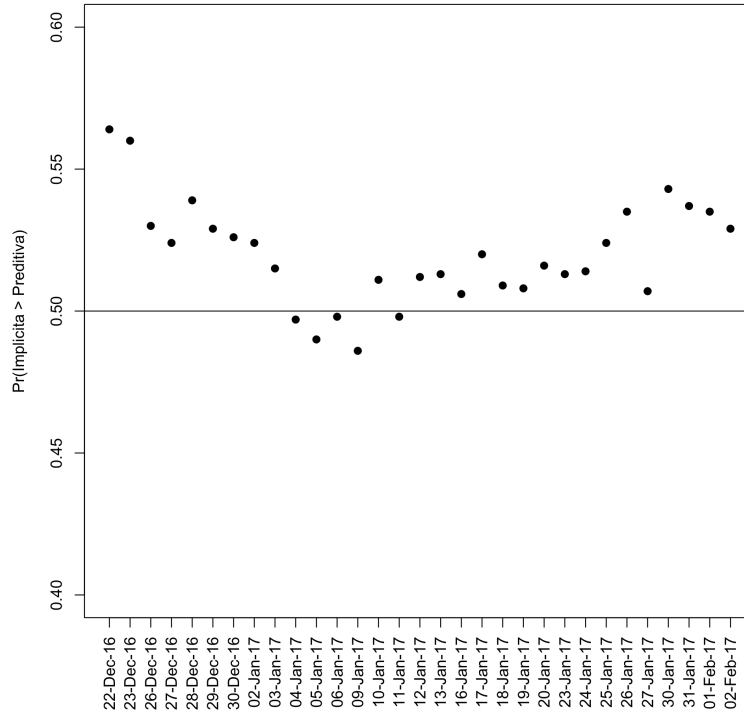


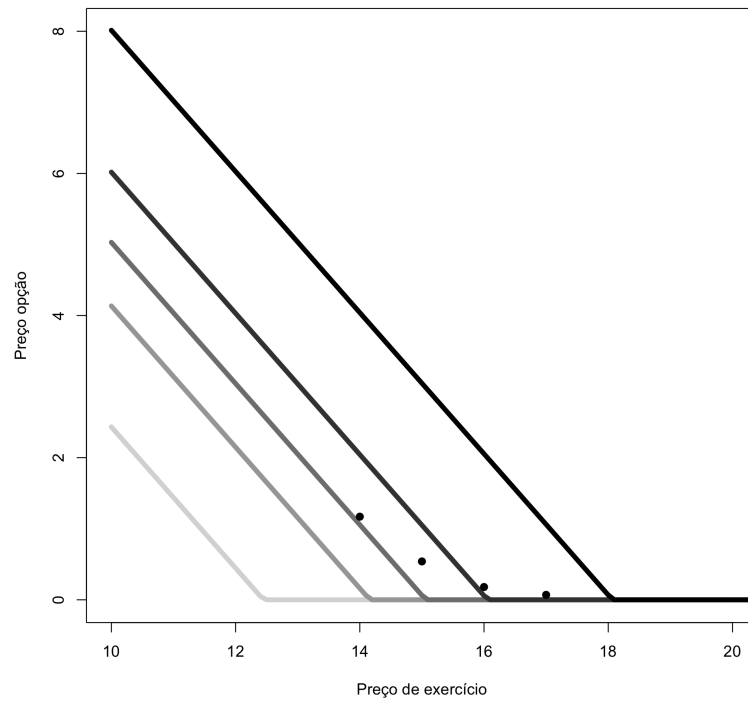
Figura 4.4: Probabilidades da implícita ser maior que a preditiva ao longo do tempo. A reta horizontal preta é em 0.5.

compra em t é $\max(S_T - X, 0)e^{-r(T-t)}$. Note que em $t < T$, S_T é uma variável aleatória e, em T , S_T é um valor observado.

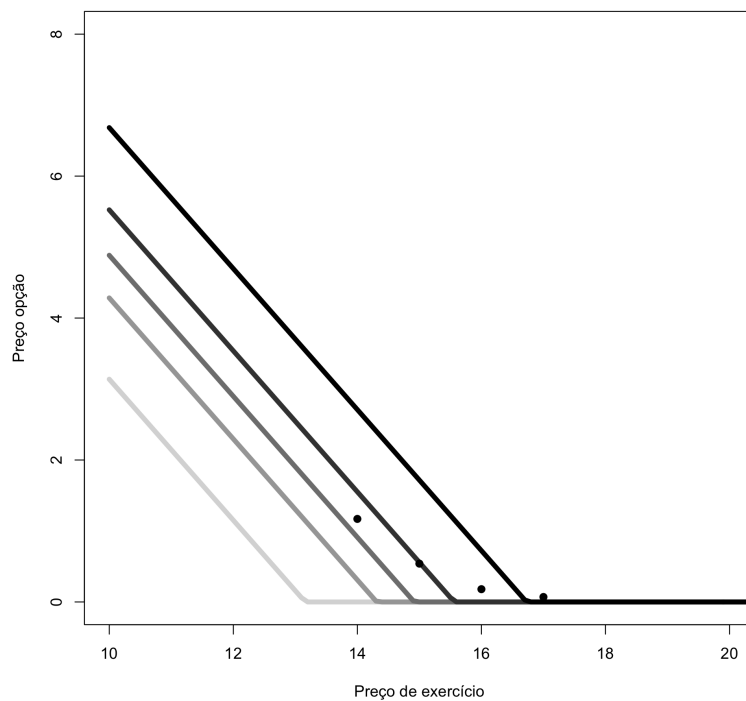
Definimos esta quantidade como $U = \max(S_T - X, 0)e^{-r(T-t)}$. Tanto a função máximo quanto a função quantil de uma distribuição são funções de ordem; logo, a função quantil de U pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} q_\alpha(U) &= q_\alpha(\max(S_T - X, 0)e^{-r(T-t)}) = q_\alpha(\max(S_T - X, 0))e^{-r(T-t)} & (4.1) \\ &= \max(q_\alpha(S_T - X), 0)e^{-r(T-t)} = \max(q_\alpha(S_T) - X, 0)e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Assim, a partir dos quantis de S_T , podemos determinar os quantis de $U(X)$ para cada X . As figuras 4.5(a) e 4.5(b) apresentam os quantis 2,5%, 25%, 50%, 75% e 97,5% para os preços das opções baseados nas densidades implícita e preditiva para S_T calculados com os dados até 1 de fevereiro de 2017 e visualizados com os preços de mercado destas opções do dia 2 de fevereiro de 2017. A ideia é precificar as opções em 3 de fevereiro utilizando os dados até 1 de fevereiro. As funções implícita e preditiva possuem amplitude muito distinta, sendo que a implícita tem variabilidade maior. Porém, em ambos os casos os valores de mercado das opções estão sempre acima da mediana, indicando que os preços praticados no dia 2 de fevereiro estão acima do esperado.



(a)



(b)

Figura 4.5: Quantis implícitos (a) e preditivos (b) de 2,5%, 25%, 50%, 75% e 97,5% para os preços de opções com diferentes preços de exercício. Quanto maior o quantil, mais escuro o tom de cinza. Os pontos são os valores de mercado das opções no dia 2 de fevereiro de 2017.

Capítulo 5

Comentários finais

A fórmula de precificação de Black & Scholes é muito utilizada no mercado de opções, assim como o *smile* da volatilidade. A partir disto, obtemos a densidade implícita do preço do ativo-base na data de vencimento, que descreve o comportamento instantâneo de S_T . Comparamos o comportamento implícito com o comportamento de previsão baseado em dados históricos, representado pela densidade preditiva baseada em um modelo autorregressivo Bayesiano para séries de tempo. Esta densidade preditiva é a densidade da variável aleatória S_T no tempo t condicional apenas aos dados observados e, como foi utilizado um modelo para série de tempo, levamos em consideração as relações de dependência características de dados financeiros. Utilizamos o modelo autorregressivo, um modelo que permite a construção da densidade preditiva no tempo desejado e que respeita a condição de dependência temporal. Com a distribuição preditiva calculada, comparamos as densidades implícita e preditiva via probabilidades de ordem e medidas resumo, verificamos como estas densidades mudam ao longo do tempo e também obtivemos a função quantil para o preço da opção.

As principais contribuições deste trabalho são:

- comparar a densidade implícita de Black & Scholes com a densidade preditiva Bayesiana de preços de ativos;
- encontrar restrições da função de precificação para garantir a existência da função densidade de probabilidade implícita;
- construção do CPO*, adaptação da medida CPO para séries de tempo;
- uma maneira de precificar opções a partir da mediana (e qualquer outra função quantil).

Para dar continuidade a este trabalho, é interessante construir funções de densidade preditivas a partir modelos Bayesianos diferentes e mais completos do que o autorregres-

sivo, como modelos ARCH e GARCH Bayesianos. Estes modelos se adequam à volatilidade estocástica comumente detectada em dados financeiros. Outro aspecto que também pode ser explorado em trabalhos futuros é comparar formas funcionais diferentes para o *smile* e suas consequências na densidade implícita. Por fim, é importante estudar a precificação de opções com a mediana e outros quantis e aplicar as técnicas a outros conjuntos de dados.

Apêndice A

Derivadas para construção da densidade implícita

Para apresentar as derivadas de $p_{BS}(S_t, t, T, X, \hat{\sigma}_t(X), r)$, utilizaremos algumas notações:

$$\begin{aligned}\tau &= T - t \\ g(X) &= \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \tau r + \frac{(\hat{\sigma}(X))^2 \tau}{2} \\ d_1 &= g(X) / (\hat{\sigma}(X) \sqrt{\tau}) \\ d_2 &= d_1 - \hat{\sigma}(X) \sqrt{\tau} \\ g'(X) &= -\frac{1}{X} + \hat{\sigma}(X) \hat{\sigma}'(X) \tau \\ h(X) &= g'(X) \hat{\sigma}(X) - \hat{\sigma}'(X) g(X) \\ d'_1 &= \frac{h(X)}{\hat{\sigma}(X)^2 \sqrt{\tau}} \\ d'_2 &= d'_1 - \hat{\sigma}'(X) \sqrt{\tau} \\ h'(X) &= g''(X) \hat{\sigma}(X) - \hat{\sigma}''(X) g(X) \\ d''_1 &= \frac{h'(X) \hat{\sigma}(X) - 2 \hat{\sigma}'(X) h(X)}{\hat{\sigma}(X)^3 \sqrt{\tau}} \\ d''_2 &= d''_1 - \hat{\sigma}''(X) \sqrt{\tau} \\ \phi'(X) &= -X \phi(X)\end{aligned}$$

$\phi(X)$ é a densidade da normal padrão e $\Phi(X)$ a função de distribuição da normal padrão.

- Primeira derivada

$$\frac{\partial p_{BS}(S_t, t, T, X, \hat{\sigma}_t(X), r)}{\partial X} = S \phi(d_1) d'_1 - e^{-r\tau} [\Phi(d_2) + X \phi(d_2) d'_2]$$

- Segunda derivada

$$\frac{\partial^2 p_{BS}(S_t, t, T, X, \hat{\sigma}_t(X), r)}{\partial X^2} = S[\phi'(d_1)(d_1')^2 + d_1''\phi(d_1)] \\ - e^{-r\tau}[2\phi(d_2)d_2' + X\phi'(d_2)(d_2')^2 + Xd_2''\phi(d_2)].$$

Apêndice B

Lista de distribuições

B.1 Distribuição Normal Multivariada

Diz-se que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p) \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ se sua função de densidade é dada por

$$f_Y(\mathbf{y}) = |\Sigma|^{-1/2} (2\pi)^{p/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^t \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu} \in R_p, \Sigma \text{ matriz positiva semi-definida.}$$

com $\boldsymbol{\mu}$ o vetor de médias e Σ a matriz de variâncias e covariâncias positiva definida.

B.2 Distribuição Gama

Diz-se que $Y \sim Gama(\alpha, \beta)$ se sua função de densidade é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}}, y, \alpha, \beta > 0,$$

em que Γ é a função Gama.

B.3 Distribuição t

Diz-se que a variável Y segue distribuição $t_{\nu, \mu, \sigma}$ se

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{(\nu\pi)^{1/2} \sigma} \left(1 + \frac{(y-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}},$$

$$\nu > 0, \mu \in R, \sigma > 0.$$

em que ν é o número de graus de liberdade, μ parâmetro de localização, σ parâmetro de escala e Γ a função Gama.

Referências Bibliográficas

- Belitsky, V. (2000). *Métodos probabilísticos em precificação de derivativos*. Associação Brasileira de Estatística.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- BM&F-BOVESPA (2015). Cotações históricas. <http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/cotacoes-historicas/FormSeriesHistoricas.asp> - Acesso em 2 de fevereiro de 2017.
- Corberán-Vallet, A. & Lawson, A. B. (2011). Conditional predictive inference for online surveillance of spacial disease incidence. *Statistics in medicine.*, 30(26), 3095–3116.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229–263.
- Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. S., & B., R. D. (2003). *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall.
- Haug, E. G. & Taleb, N. N. (2011). Option traders use (very) sophisticated heuristics, never the Black-Scholes-Merton formula. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 77, 97–106.
- Hull, J. C. (1997). *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall, 3rd edition edition.
- Koop, G., Poirier, D. J., & L., T. J. (2007). *Bayesian Econometric Methods*. Cambridge University Press.
- Lad, F. (1996). *Operational Subjective Statistical Methods*. John Wiley & Sons.
- Malz, A. M. (1993). *Option-implied probability distributions and currency excess returns*. Technical Report 32, Reserve Bank of New York.
- Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183.

- Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Morettin, P. A. (2006). *Análise de Séries Temporais*. Projeto Fisher. Edgard Blucher, 2a edição.