UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

MARLON FREITAS MENDES

A CURVA CATENÁRIA COMO APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Sorocaba
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

A CURVA CATENÁRIA COMO APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Marlon Freitas Mendes

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Magda da Silva Peixoto

Sorocaba

2017

A CURVA CATENÁRIA COMO APLICAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marlon Freitas Mendes, realizada em 28/03/2017:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

José Arnaldo

Prof. Dr. José Arnaldo Frutuoso Roveda
UNESP

Rogério Pires

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires
UFU

Este trabalho é dedicado a todos que direta ou indiretamente contribuiram para minha formação pessoal e profissional. Em especial, à Magda da Silva Peixoto, pela dedicação em me orientar.

AGRADECIMENTOS

O primeiro agredecimento é a Deus, pois foi por Ele, para Ele e com Ele que é o Mestre dos mestres.

À minha orientadora Magda da Silva Peixoto, por ter me acompanhado no desenvolvimento desse trabalho, e por me ajudar a entender melhor meu caminho de formação.

Aos professores Wladimir Seixas, Silvia M. Carvalho, Antônio Luiz Venezuela, Renato F. Cantão e Paulo César Oliveira, que durante esses anos foram fundamentais para minha formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeimento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao PROFMAT pela bolsa de mestrado.

À toda turma do mestrado, que lutou, sofreu e se alegrou, me fazendo perceber que juntos somos mais. Torço pelo sucesso de cada um.

À minha família e amigos, que me apoiam, estando sempre ao meu lado.

Gratidão!

O Eterno entra no tempo,
o Tudo esconde-se no fragmento,
Deus assume o rosto do homem.
São João Paulo II

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é elaborar uma sequência didática para estudo da curva catenária, utilizando geometria dinâmica. Para isso, foi feito um estudo sobre seu desenvolvimento histórico, notação, construção e propriedades. Destacar a importância do uso de software/aplicativo para melhor compreensão da função e sua representação gráfica. Por fim, aplicar um plano de aula sobre a curva com alunos do Ensino Médio, coletar, analisar e discutir os resultados baseando-se nos relatos dos alunos envolvidos.

Palavras-chaves: Catenária, Exponencial, Cosseno Hiperbólico, Geogebra.

ABSTRACT

The current study aims to elaborate a didactic sequence to study the catenary curve through the dynamic geometry perspective. In onder to highlight the importance of using software/application to better understand the function and its graphical representation, a study has been made on its historical development, notation, construction as well as its properties. Therefore, a lesson plan on the curve will be applied to High School students. Based on their reports, we intend to analyze and discuss these results.

Key-words: Catenary, Exponential, Hyperbolic cossene, Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema catenária foi apresentado pelo professor de Geometria Analítica durante o PPGECE, em aula, na qual se estudava as características das curvas e suas respectivas funções. Nessa aula foi argumentado sobre a diferença entre a parábola e a catenária, estruturando a função do cosseno hiperbólico como a representação da curva catenária. O tema foi abordado de forma breve, porém suficiente para despertar o interesse em conhecer o assunto de forma peculiar e detalhada. Tornou-se objeto de estudo neste trabalho. Os próximos passos foram ampliar o olhar, pesquisar, descobrir e registrar.

O objetivo principal do trabalho é apresentar uma curva desconhecida pelos alunos do Ensino Básico e analisar os resultados da aplicação da catenária com alunos do Ensino Médio. Para tanto será necessário: conhecer a curva em sua concepção histórica, construir teoricamente as características que definem a catenária, fazer uso do software de geometria dinâmica como um recurso visual que auxilia na compreensão dos alunos, aplicar a pesquisa com um grupo de alunos do Ensino Médio.

A pesquisa teve início com a parte histórica e como resultado deste estudo e organização dos dados, é apresentado o primeiro capítulo desta dissertação, que relata desde os primeiros registros da catenária por Galileu Galilei (1564 - 1642), no qual o matemático observa a catenária e a confunde com uma parábola. Anos mais tarde, os matemáticos Huygens (1629 - 1695), Leibniz (1646 - 1716) e Bernoulli (1667 - 1748), se debruçaram para demonstrar de maneira geométrica e algébrica. Após 111 anos das primeiras notações da catenária, o matemático italiano, Riccati (1707 - 1775), escreve a expressão algébrica.

Foi realizada uma pesquisa sobre a curva catenária nos periódicos da CAPES e site de pesquisa de trabalhos acadêmicos, no qual o segundo capítulo apresenta um breve resumo dos trabalhos encontrados. Posteriormente, foi feito um estudo da equação catenária, para enfim, fazer uso do software de geometria dinâmica, com o intuito de auxiliar no conhecimento da representação gráfica da função representada por exponenciais e, também, pelo cosseno hiperbólico, finalizando o capítulo 2.

Visando ampliar o entendimento matemático, a curva foi aplicada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola situada na cidade de Sorocaba/SP, abordando a catenária como uma aplicação da função exponencial e, também, uma função do cosseno hiperbólico com 3 encontros de 1h30min cada, para desenvolvimento da pesquisa de campo. Os alunos tiveram contato com a parte histórica, aplicações e representação gráfica com software. Os registros da aplicação da pesquisa compõem o terceiro capítulo.

As considerações finais fazem menção aos resultados obtidos com a pesquisa, tendo em vista os aspectos evidenciados durante o processo, registrando de forma condensada as contribuições que o trabalho apresenta.

Dessa forma, o trabalho está organizado em 3 capítulos, contexto histórico, a curva catenária, aplicação em sala de aula, introdução e considerações finais.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

> "O Universo é um grande livro que não pode ser compreendido a menos que antes se aprenda a entender a linguagem e a ler as letras nas quais ele está composto. Ele está escrito na linguagem da Matemática" [Galileu Galilei, retirado de (GARBI, 2006), p.127]

O estudo da curva atualmente conhecida como catenária teve início com o matemático italiano, Galileu Galilei, (1564 – 1642) apontado como um grande astrônomo, matemático e físico dos séculos XVI e XVII. Formado em Medicina pela Universidade de Pisa, teve uma passagem breve por essa profissão, pois movido pela sua paixão pela Matemática e a Física, em pouco tempo Galileu já estava inserido no contexto desse mundo, e contribuindo com sua visão e modo de pensamento sobre o Universo. (GARBI, 2006)

Uma de suas primeiras descobertas foi relacionada ao período de oscilação de um pêndulo e, também é atribuída a ele, a descoberta de uma balança com grande precisão no ano de 1586. Em 1589, na Universidade de Pisa, realizou seus estudos sobre a ação da gravidade. Já em 1592 deixou a cátedra da Universidade de Pisa e assume a cátedra da Universidade de Pádua onde chegou a resultados importantes sobre a Lei da Inércia que tornar-se-ia referência para o desenvolvimento da teoria de Newton décadas depois. Galileu foi, por toda vida, um homem religioso e católico devoto, porém angustiava-se ao pensar em pontos que contrariavam as escrituras da igreja, sentia-se compelido a conceber as relações entre a ciência e a religião. (EVES, 2004)

Sobre o estudo das curvas:

> Galileu, erradamente supôs ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou corrente (catena) flexível, mas mais tarde, ainda no mesmo século, os matemáticos demonstraram que essa curva, a catenária, não só não é uma parábola como nem sequer é álgebra. [(BOYER, 2012), p. 232]

Não foi exclusividade da catenária ser estudada por Galileu Galilei. Ele também estudou a curva, hoje conhecida por ciclóide, no qual tentou definir a área gerada no arco, mas não obteve êxito. O melhor que conseguiu fazer foi traçar, recortar e pesar o papel gerado pela curva. Em um dos últimos trabalhos deparou-se com a propriedade fundamental de um conjunto infinito. "Galileu chegou a avistar a terra prometida, mas não pode entrar nela." (BOYER, 2012)

Costuma-se citar a frase dita por Galileu Galilei: "No que se refere à ciência, a autoridade de mil pessoas não vale o simples raciocínio de um indivíduo apenas". Não demorou muito para que os estudos de Galileu Galilei fossem revistos e recolocados em pauta de discussão dos matemáticos da época, corroborando seu pensamento.

O francês, frade, minimita, Marin Mersenne (1588 – 1648) manteve correspondência constante com os maiores matemáticos de seu tempo, no qual funcionou de uma maneira admirável em uma época que não existiam revistas científicas para publicações. Em uma espécie de câmara de compensação de ideias, editou muitos trabalhos dos matemáticos gregos sobre assuntos diversos. Com suas idas a Itália, Mersenne, que admirava as obras de Galileu, as trouxe para serem estudadas em Paris. Existia um grupo de matemáticos que faziam reuniões para discutir novas visões da Matemática e Física no qual Mersenne, que realizava os registros, copiava-os para enviar para todo o grupo. (EVES, 2004)

Logo depois de sua morte, foram encontradas cartas com 78 correspondentes diferentes. No século XVII , os matemáticos recebiam desafios para serem solucionados, com isso contribuindo para o crescimento intelectual e acadêmico. Tais desafios, por diversas vezes, eram acompanhados de premiações. Foi dessa maneira que o problema da catenária foi apresentado, ou melhor, reapresentado (pois Galileu já o havia citado) à sociedade matemática. O problema proposto por Galileu em 1646 que pensava ser uma parábola foi revisto e solucionado simultaneamente 44 anos depois por cinco matemáticos: os Irmãos Bernoulli (Jacques e Jean), Leibniz, Huygens e Newton. Porém apenas três das soluções estavam corretas: as de Jean Bernoulli, Leibniz e Huygens (cujas contribuições matemáticas – principalmente seu envolvimento com a curva catenária serão apresentadas posteriormente).

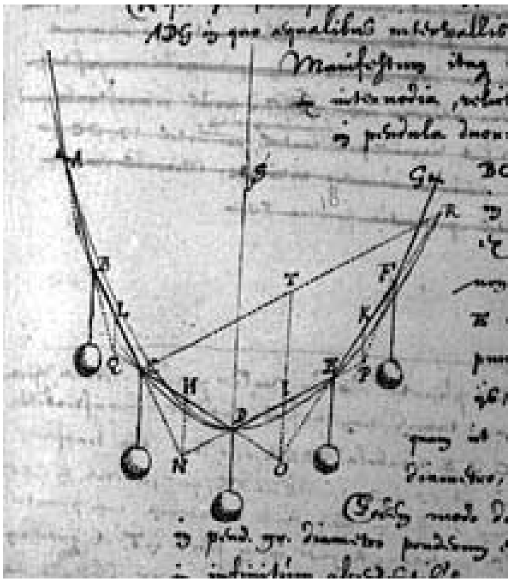
2.1 CHRISTIAAN HUYGENS

O holandês Christiaan Huygens (1629 – 1695), filho do diplomata Constantin Huygens, ingressou na Universidade de Leiden em 1645, onde cursou Matemática e Direito.

Endereçou inúmeras cartas a Mersenne,o qual o tinha como pai e educador. Este, por sua vez, orientava trabalhos, sugeria temas para investigações e caminhos para os êxitos em suas pesquisas. Possivelmente recebeu de Mersenne o desafio da catenária, provado aos 17 anos, que a afirmação de Galileu era falsa, pois a curva não se tratava de uma parábola. (BOYER, 2012)

> "... investigou a geometria da catenária (a curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, pendurada em dois ganchos não situados na mesma vertical)" [(EVES, 2004), p. 399]

Figura 1 – Anotação sobre a catenária de Huygens



Fonte: (NUNES, 2016)

Huygens apresentava um pensamento geométrico em suas anotações (Figura 1), evidenciando sua maneira de observar a curva catenária, mas esse não foi seu principal trabalho, tão pouco o único relacionado a curvas. Sua maior publicação foi feita em Paris no ano de 1673, como o nome *Horologium oscillatorium*. O trabalho apresentava cinco capítulos, cujos assuntos eram relacionados ao relógio de pêndulo, corpo em queda livre no vácuo, a prova da propriedade do cicloide invertida ou tautócrona evoluta de uma curva plana e evoluta da parábola semicúbica. É comum ver seu nome lembrado na teoria ondulatória da luz, pela observação aos anéis de saturno e pela invenção do relógio de pêndulo. (EVES, 2004)

> “Durante toda sua vida conservou grande interesse por tudo que era matemática, mas especialmente por curvas planas de grau superior. Enquanto Galileu julgava ser uma catenária uma parábola, Huygens mostrou que ela é uma curva não algébrica. Em 1956, tinha aplicado uma análise infinitesimal às cônicas, reproduzindo a retificação da parábola à quadratura da hipérbole (isto é, a achar um logaritmo) “ [(BOYER, 2012), p. 262].

2.2 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

“O grande gênio universal do século XVII” o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi filósofo, teólogo, cientista, matemático e diplomata. Como diplomata viajava muito e em 1972, foi para Paris onde encontrou Huygens (EVES, 2004), que lhe sugeriu tornar-se um matemático, indicando-lhe a leitura dos tratados de Pascal de 1658 – 1659 (BOYER, 2012). “Foi Huygens quem o introduziu no reino da Rainha das Ciências e, algum tempo depois de começar a ensinar-lhe Matemática, propôs a Leibniz o cálculo da soma da série infinita”. (GARBI, 2006)

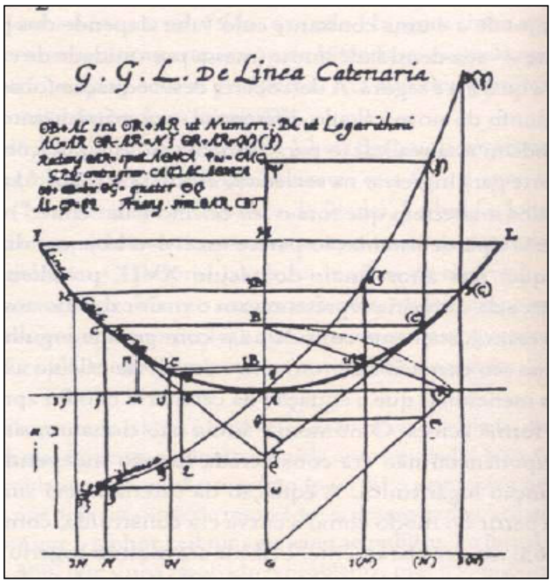
Não se pode afirmar de quem foi o privilégio, se foi de Huygens de orientar Leibniz ou o inverso. O que é fato: um "jovem diplomata convence o cientista a dar-lhe aulas de matemática". (EVES, 2004)

Suas missões políticas permitiram que conhecesse muitos matemáticos da época e que lhes apresentassem sua invenção (ainda em construção): uma máquina que calculava. Levou-a em 1673 para Paris, onde a Real Academia de Ciências pôde apreciar se a máquina servia para somar, subtrair, dividir e multiplicar. Nessa mesma época foi admitido na academia de Ciências de Paris, onde teve contato com os trabalhos de Isaac Newton, considerado seu rival na invenção do Cálculo. Diz-se que Leibniz morre em Hanover, em 1716, abandonado e entristecido por conta a disputa da invenção do cálculo. (EVES, 2004)

> "Fechando nossos comentários sobre Leibniz com uma espécie de hino ao seu talento único. A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda a história da matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz." [(EVES, 2004), p. 445]

Pode-se ver um pouco desse talento e dessa mente fascinante em seus registros da catenária (Figura 2), publicada em 1961. Esta é uma das inúmeras descobertas e contribuições desse matemático, que impressiona todo o mundo, até hoje, pela sua genialidade.

Figura 2 – Construção da catenária por Leibniz

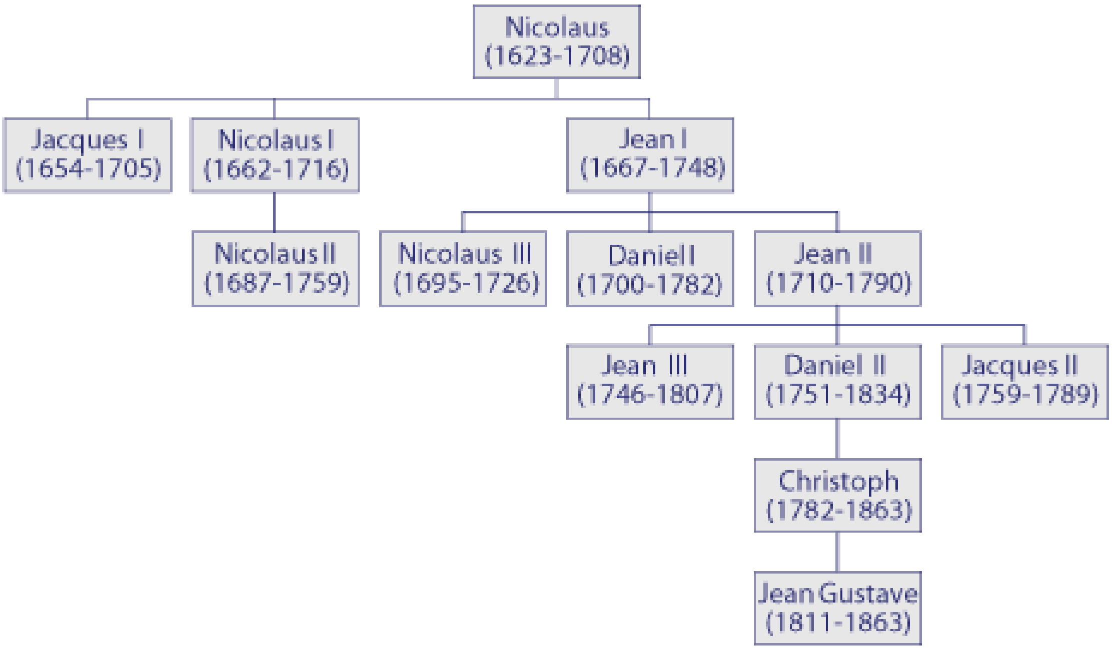


Fonte: (MAOR, 2004),p.186

2.3 FAMÍLIA BERNOULLI

Dois irmãos suíços Jacques Bernoulli (1654–1705) e Jean Bernoulli (1667–1748) contribuiram para a descoberta da catenária. Não se trata de dois irmãos matemáticos, mas de uma grande família do qual "nenhuma família na história da Matemática produziu tantos matemáticos céleres quanto a família Bernoulli". Muitos membros da família tiveram êxito em seus trabalhos desenvolvidos na área de Matemática e Física (Figura 3), alguns chegaram a ser sócios estrangeiros da Académie des Sciences em Paris. (BOYER, 2012)

Figura 3 – Árvore genealógica da família Bernoulli.



Fonte: (BOYER, 2012), p.292

Tudo começou no final do século VII, quando dois dos irmãos Bernoulli, Jean e Jacques, decidiram estudar Matemática, deixando outros interesses da família para se empenharem no desenvolvimento e conhecimento dos números. (EVES, 2004)

O primeiro da família a conseguir prestígio na Matemática foi Jacques Bernoulli, "Jacques tornar-se matemático profissional e o fez às custas de muito esforço e talento, pois precisou aprender quase tudo por si mesmo, de maneira autodidata". Ele assume uma função expressiva na vida de seu irmão Jean Bernoulli, pois teve seu irmão por aluno e lhe ensinou todos os segredos da Matemática. Os irmãos tinham sérios atritos intelectuais sobre questões científicas, Jacques era dotado de um ego descomunal e abominava a sombra do irmão e Jean por sua vez era um matemático muito ciumento e invejoso. (GARBI, 2006)

"Jacques Bernoulli tinha fascinação por curvas". Com essa fascinação, ele estudou entre tantas outras, a catenária, definida pela extensão de um fio de densidade variável e sob a ação de uma força central. (BOYER, 2012)

A catenária é descoberta e apresentada ao mundo por correspondências e esse fato fica evidente no trecho:

> "Correspondendo-se frequentemente com outros matemáticos de seu tempo, Jacques Bernoulli estava a par dos problemas populares, muitos

> dos quais ele resolveu independentemente. Entre esses estava os de achar as equações da catenária da tratiz e da isócrona, todos os problemas tratados por Huygens e Leibniz" [(BOYER, 2012), p.292].

Jacques nasceu e morreu na Basileia, entretanto fez diversas viagens, em uma delas conheceu Leibniz, onde trocaram conhecimentos sobre os infinitésimos e sugeriu o nome "integral". Os irmãos mantiveram um intercâmbio de ideias quase que constante com Leibniz e também entre si, o que contribuiu muito para o desenvolvimento do Cálculo. (BOYER, 2012)

> Jean foi o primeiro a determinar a equação catenária (a curva formada por uma corda suspensa pelas extremidades), desafio que seu irmão Jacques não conseguiu vencer, mostrando que, ao contrário do que conjecturara Galileu, ela não é uma parábola. [(GARBI, 2006), 2006. p.179]

Jean Bernoulli contribui tanto quanto seu irmão. Embora ciumento e perverso, foi um dos professores mais inspiradores de seu tempo. Isso fica evidente na publicação das correspondências Bernoulli – L'Hospital, ao qual muito se deve às descobertas de Jean, que escreveu prolificamente sobre vários aspectos avançados da análise – a isócrona, sólidos de resistência mínima, a catenária, a tratiz, trajetórias, curvas cáusticas, problemas isoperimétricos - conquistando uma reputação, graças à qual foi chamado a Basileia, em 1705, para ocupar a cadeira que ficara vaga por morte de seu irmão. (EVES, 2004)

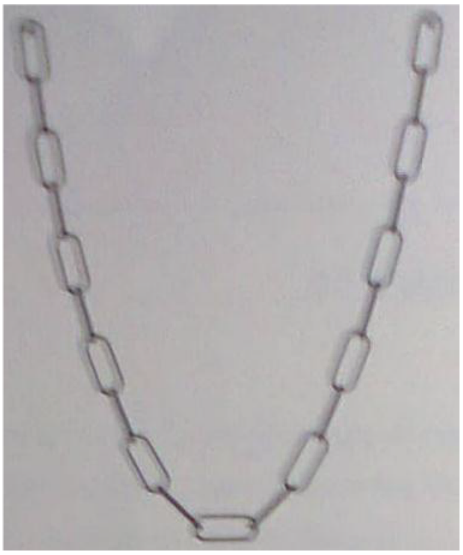
2.4 SÉCULO DAS CURVAS

Aparentemente, as peças do quebra-cabeça encaixam-se: os irmãos Bernoulli conheciam e comunicavam-se com Leibniz, que por sua vez tinha como professor, ninguém menos que Huygens, que tinha Mersenne como pai e orientador. Este que era fascinado pelas obras de Galileu Galilei e as trouxe da Itália para serem estudadas em Paris.

O século VII é conhecido como, século das Curvas (BOYER, 2012). É nesse período da história que houve o maior progresso no estudo de curvas em que as instigações matemáticas eram comuns entre os matemáticos. Foram muitos os avanços nos estudos das curvas que passaram por tais desafios. O da catenária foi lançado em uma dessas publicações no jornal fundado por Leibniz. Em maio de 1690, a provocação que Jacque Bernoulli fez foi o seguinte: "E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos" (Figura 4). (MAOR, 2004)

Foram 44 anos entre a primeira solução de Galileu Galilei e a solução correta proposta por Jean Bernoulli, cuja descoberta trouxe uma instabilidade ainda maior na relação com seu irmão e propulsor do desafio da catenária.

Figura 4 – O problema da catenária

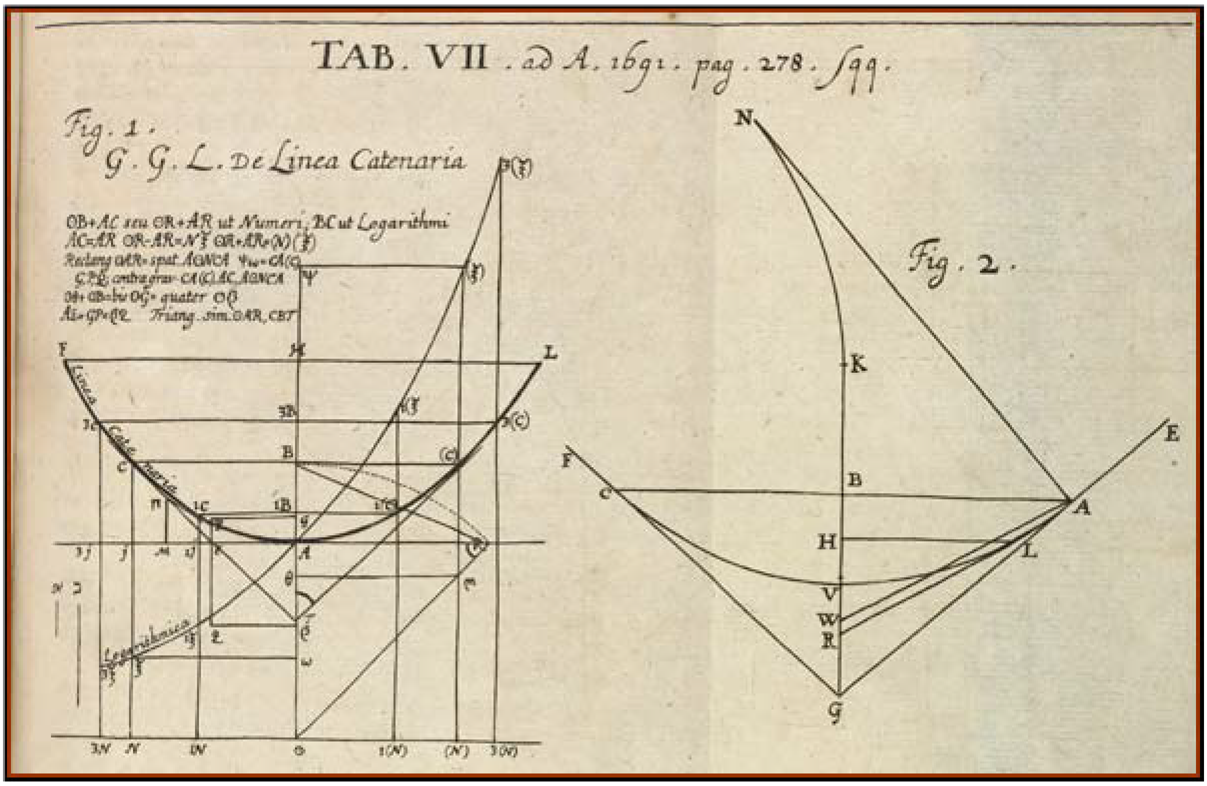


Fonte: (MAOR, 2004), p.184

> *Os esforços de meu irmão formam inúteis. Quanto a mim, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isto sem me gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo imediatamente. [...] Na manhã seguinte cheio de alegria, fui encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar à parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, por que ela é inteiramente falsa. [(MAOR, 2004), p. 184]*

Além dos irmãos Bernoulli, Leibniz também solucionou o desafio, relata no *Acta Eruditorum*, em julho de 1690: "Portanto, eu ataquei (o problema da catenária), que ainda não tinha tentado, e com minha chave (o Cálculo Diferencial) alegremente abri seu segredo". Outro prodígio que resolveu o problema da catenária foi Huygens, o único que a resolveu de forma geométrica, pois Leibniz e os irmãos Bernoulli resolveram de forma analítica (Figura 5). Havia grande rivalidade entre os participantes do concurso, ficando difícil definir a quem pertenceu a primazia da descoberta. (MAOR, 2004)

Figura 5 – Solução remetida por Leibniz e Huygens a Bernoulli, publicada na obra Acta Eruditorum em 1961



Fonte: (CURVEBANK, 2016)

A equação da catenária era simplesmente subentendida a partir do modo como a curva era construída, como o desenho de Leibniz . Considerando a forma analítica e geométrica, as curvas permitem que suas resoluções acontecessem por equações. Sendo assim, qualquer curva poderia ser expressa por uma equação. Com isso, houve um grande avanço no estudo das curvas, e começou a surgir uma grande demanda destas para serem estudadas. (MAOR, 2004)

> No final do século VII, o interesse explosivo pela catenária e por outras curvas expressas por funções trigonométricas e logarítmicas conferia respeitabilidade a uma grande gama de problemas muito mais amplos. [(BOYER, 2012), p.292]

Outro ponto relevante da história, foi o surgimento do nome catenária. A palavra tem origem latina: *catena*, que significa cadeia. A curva estudada era uma cadeia suspensa por dois pontos. Huygens foi o primeiro matemático a fazer uso do termo catenária em uma carta a Leibniz em 1690. Leibniz a batiza de catenária, que aparece como sinônimos de “alysoid”, “funicular” e “chainette”.

A descoberta da equação da catenária pode ser considerada como uma importante solução dos problemas desafiadores da história do cálculo. A equação que a catenária gerou, veio ao encontro aos desafiadores cálculos, tais como o Cálculo Diferencial, além de uma forte influência para o desenvolvimento das funções hiperbólicas. (TALAVERA, 2008)

A equação hiperbólica que definiria a curva catenária foi criada apenas em 1757 pelo matemático Vincenzo Riccati (1707 – 1775), jesuíta italiano, que foi professor de Matemática e se empenhou no desenvolvimento das equações diferenciais, séries infinitas, quadraturas e funções hiperbólicas. (EVES, 2004)

Com essa visão histórica da catenária, pode-se observar o caminho percorrido entre a observação da curva no ano de 1646 por Galileu e chegar a uma expressão algébrica no ano de 1757 por Riccati. Foram 111 anos de empenho, descobertas, desafios, conflitos, discordâncias e concordâncias, com grandes nomes associados a essa pesquisa e muitas contribuições que a catenária deixou para história da Matemática.

3 A CURVA CATENÁRIA

> "Portanto eu ataquei [o problema da catenária]
> que ainda não tinha tentado, e com minha chave
> [o cálculo diferencial] alegremente abri seu segredo
> - [GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ,
> no *Acta eruditorum* (Julho de 1690)" (MAOR, 2004), p.183]

3.1 TRABALHOS SOBRE A CATENÁRIA

Nessa pesquisa foi feito um levantamento sobre trabalhos científicos relacionados a curva catenária. A busca foi feita por palavras chaves nos periódicos da CAPES e site de trabalhos acadêmicos. Foram encontrados alguns trabalhos que falam sobre ou fazem menção em um de seus capítulos. Com base nesse levantamento de dados, será feito um breve relato sobre os trabalhos encontrados e a essência de suas pesquisas, que servirá como parâmetro para relatos posteriores.

O trabalho realizado por Márcio de Castro Alhadas, na Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), traz o tema: funções hiperbólicas no Ensino Médio. A pesquisa foi realizada para obtenção do título de mestre em Matemática no ano de 2013. O foco do trabalho foi definir e comparar a trigonometria hiperbólica com a trigonometria e as funções hiperbólicas com as funções trigonométricas, mencionando em um de seus capítulos a curva catenária como resultante e aplicação do cosseno hiperbólico. (ALHADAS, 2013)

A dissertação de Rejeane Alexandre Coelho da Universidade Estadual Paulista, em 2008 na sua dissertação trabalha o tema: A história dos Problemas da Tautócrona e da Braquistócrona. Esse trabalho define duas importantes curvas do século VII e, por consequência, alguns dos descobridores da curva catenária, o que evidencia os trabalhos dos matemáticos da época. Embora o trabalho não fale sobre catenária explicitamente, ele faz o mesmo percurso histórico de outras curvas o que é relevante para pesquisa. (COELHO, 2008)

Para obtenção do título no mestrado profissional em rede nacional (PROFMAT), Maria do Bom Conselho da Silva Beserra Freitas, no ano de 2015 na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), trata o tema: As funções hiperbólicas e suas aplicações. A autora aborda o assunto, fazendo uma pesquisa em alguns livros de Cálculo para analisar o que eles apresentam, constatando assim a superficialidade sobre o assunto. A catenária é apresentada no final do trabalho, como uma aplicação do cosseno hiperbólico, exemplos e exercícios. (BESERRA, 2015)

Na Universidade Federal do Amazonas, no ano de 2013 no Programa de Pós Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Jerry Gleison Salgueiro Fidanza Vasconcelos, trabalha o tema: Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação. Na dissertação o autor apresenta o comportamento análogo das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas, faz uso da catenária para aplicar o cosseno hiperbólico e exercícios de aplicações. (FIDAZA, 2013)

No ano de 2008, na Universidade de São Paulo (USP), para obtenção do título de mestre, Leda Maria Bastoni Talavera apresenta o tema: Parábola e catenária: história e aplicações. Um dos poucos trabalhos que a catenária aparece como protagonista, a autora faz alguns comparativos entre a parábola e a curva catenária, traz uma abordagem história consistente e relata a aplicabilidade das curvas. (TALAVERA, 2008)

Na monografia de Sirlene Resende de Faria pela Universidade de Minas Gerais (UFMG), no ano de 2011, foi realizado um trabalho sobre a catenária. A monografia tinha por objetivo realizar aplicações de integral, considerando a parte histórica do Cálculo e da catenária. No trabalho a autora faz demonstrações algébricas da catenária e, por fim, realiza algumas aplicações na rede de transmissão de energia elétrica. (FARIA, 2011)

Com o tema: "Da catenária a Trigonometria Hiperbólica", Stephany Glaucia de Oliveira Paulo da Universidade do Estado do Pará (UEPA), no ano de 2014, apresenta sua monografia cujo trabalho trouxe a parte histórica com os precursores que contribuíram para o desenvolvimento da curva catenária e da trigonometria hiperbólica. Além disso, realizou um estudo sobre a trigonometria hiperbólica e comparações entre as funções hiperbólicas e as funções circulares, apresentando aplicações da Matemática na engenharia e arquitetura. (PAULO, 2014)

Os artigos encontrados tinham como temas: Modelagem da catenária através de equações diferenciais ordinárias, produzido por: Tiago Cavalcante de Barros, Fernando Tiago Nascimento Medeiros e Márcia Pragana Dantas. O Problema da catenária, publicado na Revista Matemática Universitária, número 29, produzido por: P. Ruffino. Curva de um cabo suspenso, realizado pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal de Vale do Aracajú, produzido por: João Vianey Vasconcelos Rios e Maria Isangela Silva.

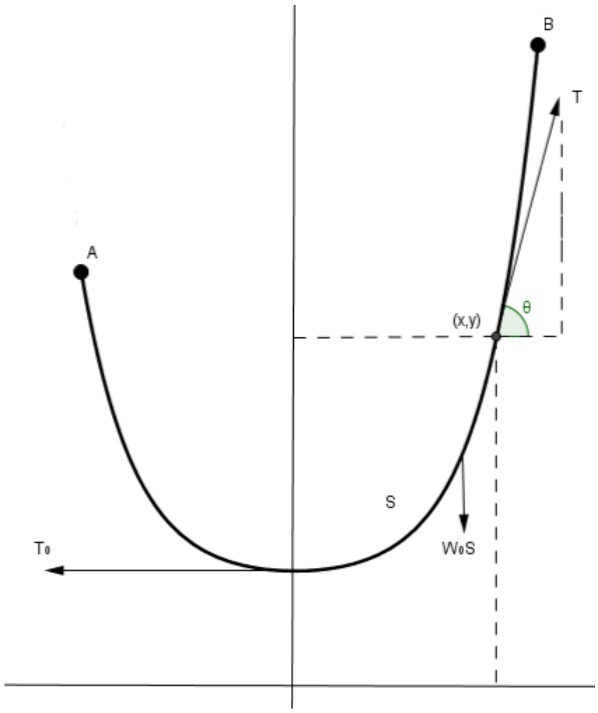
Existem tantos outros trabalhos que tratam da catenária, mas com foco na área de engenharia e arquitetura. Sendo assim, observa-se que os trabalhos mais recentes ligados à Matemática e Educação que falam direta ou indiretamente sobre a curva catenárias, são: 5 dissertações, 2 monografias e 3 artigos científicos.

3.2 CONSTRUÇÃO DA CATENÁRIA

No número de maio de 1690 do *Acta eruditorum*, o jornal que Leibniz tinha fundado oito anos antes, Jakob escreveu: “E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos". O famoso problema da catenária. (MAOR, 2004)

Para resolver o problema da catenária é preciso levar em consideração um fio flexível de densidade uniforme, apoiado em dois pontos e com isso sustentando o próprio peso. Com essas informações, considera-se que o eixo y passa pelo ponto mais baixo do fio, como monstra a Figura 6. (SIMMONS, 1987)

Figura 6 – Demonstração catenária



(SIMMONS, 1987)

Considerando que S é o comprimento entre esse ponto e um ponto qualquer (x, y) e W_0 representa a densidade linear do fio, para obtenção da equação diferencial deve-se levar em consideração que entre o ponto (x, y) e ponto mais baixo da curva está em equilíbrio estático sob a ação de três forças:

T_0 = Tensão no ponto mais baixo;

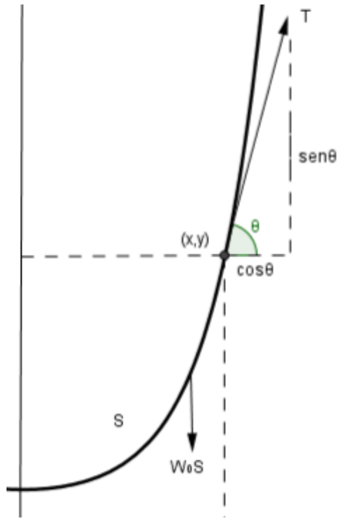
T = Tensão variável em (x, y) que age na direção tangente devido a flexibilidade do fio;

W_0S = Força para baixo, igual ao peso do fio entre esses pontos.

Estabelecendo uma relação de igualdade às componentes horizontais de T com T_0 e a componente vertical de T com peso da corrente, obtém-se:

$$\begin{cases} Tcos\theta = T_0 \\ Tsen\theta = W_0S \end{cases}$$

Figura 7 – Curva catenária



Fonte: Produzida pelo autor

Por definição, $tg\theta = \dfrac{sen\theta}{cos\theta}$, substituindo temos: $tg\theta = \dfrac{W_0 S}{T_0}$ ou $\dfrac{dy}{dx} = aS$, sendo $a = \dfrac{W_0}{T_0}$.

Derivando em relação a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Esta é a equação diferencial da catenária. Para resolver essa equação por integrações sucessivas, utiliza-se a variável auxiliar $p = \dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1 + p^2}$$

Separando as variáveis e integrando em relação a x:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a dx$$

Para resolver a integral da esquerda, utiliza-se a substituição trigonométrica $p = tg\phi$, e obtem-se $dp = sec^2\phi d\phi$ e $\sqrt{1 + p^2} = sec\phi$.

$$\int \frac{sec^2\phi d\phi}{sec\phi} = \int adx$$
$$\int sec\phi d\phi = \int adx$$

Integrando ambos os lados

$$ln(sec\phi + tg\phi) = ax + c_1$$
$$ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax + c_1$$

Se $x = 0$ e $p = 0$, portanto $c_1 = 0$. Assim,

$$ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax$$

Resolvendo a equação em p.

$$ln(\sqrt{1+p^2} + p) = ax$$
$$\sqrt{1+p^2} + p = e^{ax}$$
$$(\sqrt{1+p^2})^2 = (e^{ax} - p)^2$$
$$1 + p^2 = p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax}$$
$$1 = -2pe^{ax} + e^{2ax}$$
$$1 - e^{2ax} = -2pe^{ax}$$
$$\text{p} = \frac{1 - e^{2ax}}{-2e^{ax}}$$
$$\text{p} = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{1}{2e^{ax}}$$
$$\text{p} = \frac{(e^{ax} - e^{-ax})}{2}.$$

Como $p = \dfrac{dy}{dx}$, integrando em relação a x, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$
$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c_2$$

Colocando a figura na origem do sistema de coordenadas, com $y = \frac{1}{a}$ quando $x = 0$, temos $c_2 = 0$ e portanto:

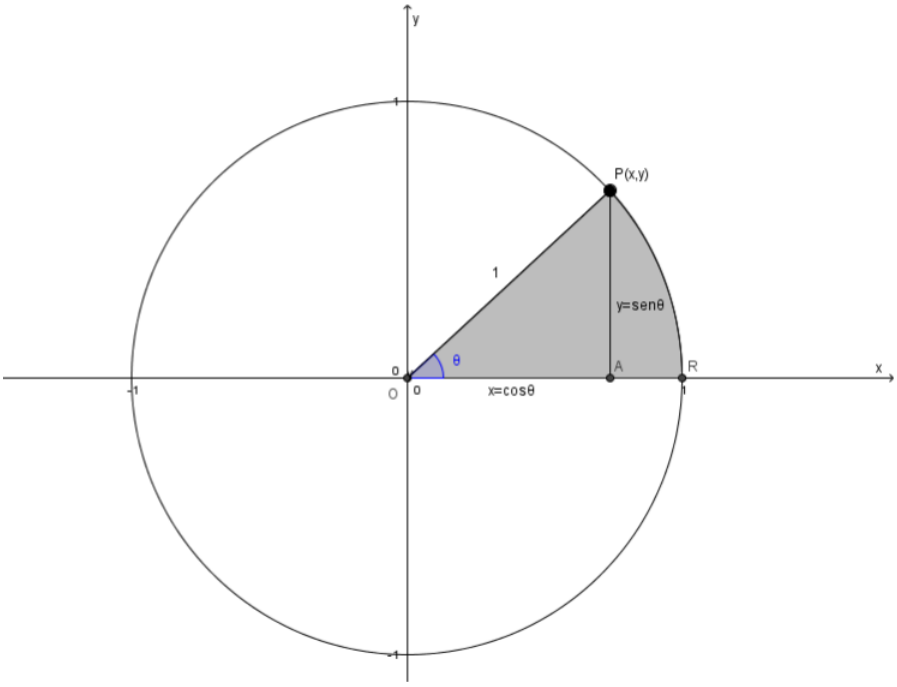
$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \tag{3.1}$$

A catenária revelou-se a curva cuja equação, na notação moderna, é (3.1), onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente - sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura. "A descoberta desta equação foi anunciada como um grande triunfo do novo Cálculo Diferencial, e os praticantes aproveitaram o mais que podiam esta realização para aumentar suas reputações" [(MAOR, 2004), p.185]

Uma outra opção para definir a equação da catenária seria denotar essa curva como a função hiperbólica de x. Para tanto é necessário expandir o raciocínio de funções hiperbólicas.

Considere o círculo unitário com centro na origem e raio igual a 1, cuja equação é expressa por $x^2 + y^2 = 1$. Definindo um ponto qualquer no primeiro quadrante da circunferência $P(x, y)$ onde θ é o ângulo definido por AÔP (medido no sentido anti horário), as funções trigonométricas seno e cosseno são definidas como as coordenadas de x e y de P (Figura 8). Portanto, $x = cos\theta$ e $y = sen\theta$, o ângulo θ pode ser interpretado como duas vezes a área do setor circular RÔP, cuja área dada pela fórmula $A = \frac{r.\theta}{2}$. Uma vez que $r = 1$, $A = \frac{\theta}{2}$, conclui-se que $\theta = 2.A$

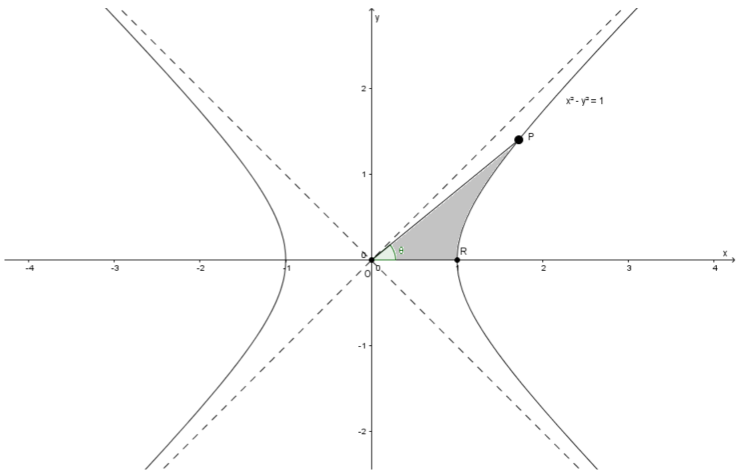
Figura 8 – Circunferência trigonométrica



Fonte: Produzido pelo autor

De modo semelhante à circunferência trigonométrica, as funções hiperbólicas são definidas pela hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$, para a qual as assíntotas são perpendiculares, formando um ângulo de 45° (no sentindo anti horário) com relação a um dos eixos, tendo por equações: $y = \pm x$. Com um ponto P qualquer na hiperbóle (Figura 9).

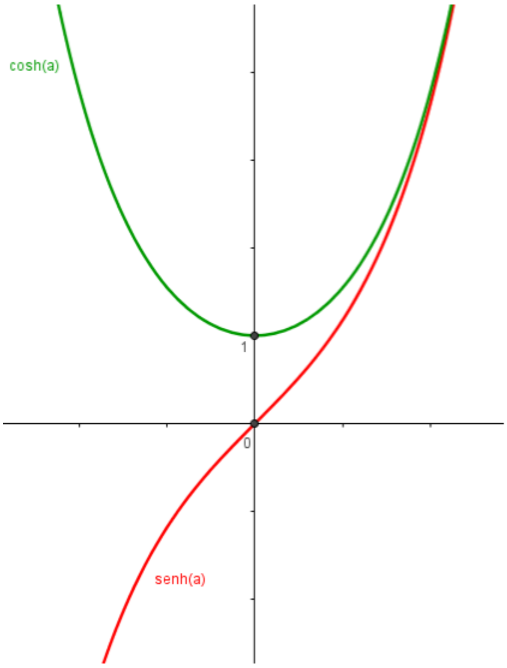
Figura 9 – Hipérbole equilátera



Fonte: Produzido pelo autor

Portanto $x = cosh\theta$ e $y = senh\theta$, onde $cosh(a) = \dfrac{e^a + e^{-a}}{2}$ e $senh(a) = \dfrac{e^a - e^{-a}}{2}$. (Figura 10) (DELGADO, 2013)

Figura 10 – Seno hiperbólico e cosseno hiperbólico



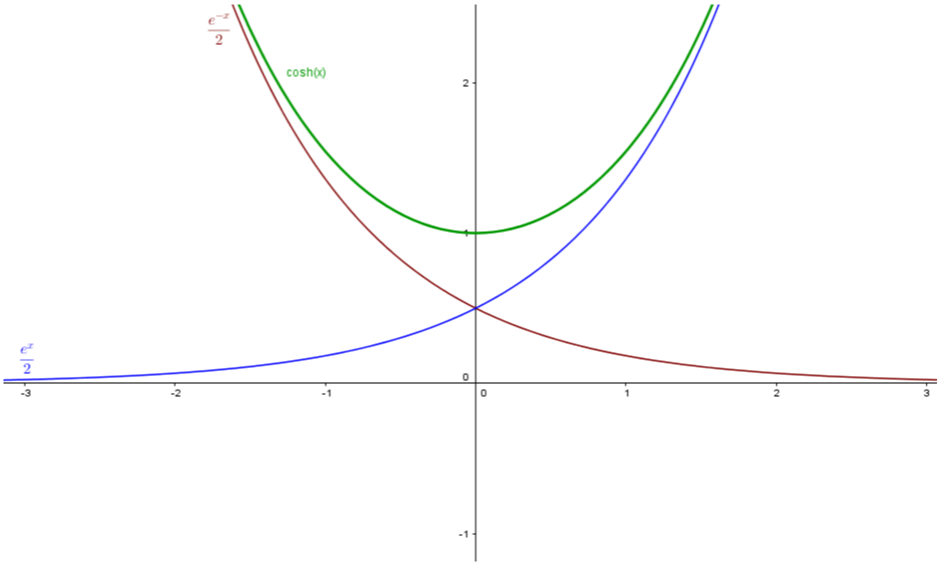
Fonte: Produzido pelo autor

Os pontos $(cosh(a), senh(a))$ e $(-cosh(a), senh(a))$ pertencem à hipérbole, pois:

$$\cosh^2(a) - senh^2(a) =$$
$$(\frac{e^a + e^{-a}}{2})^2 - (\frac{e^a - e^{-a}}{2})^2 =$$
$$\frac{e^{2a} + 2 + e^{-2a}}{4} - \frac{e^{2a} - 2 + e^{-2a}}{4} = 1$$

A função do cosseno hiperbólico $y = cosh(x)$ tem domínio o conjunto dos números reais e imagem da função como $]1, +\infty[$, como mostra na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico da função cosseno hiperbólico de x



Fonte: Produzido pelo autor

Uma função é dita ímpar se o gráfico for simétrico em relação a origem ou, em outras palavras, quando $f(x) = -f(x)$. Uma função será chamada par se o seu gráfico for simétrico com relação ao eixo y ou a função satisfaz à igualdade $f(x) = f(-x)$. Com isso nota-se que a função cosseno hiperbólico de x é par, pois:

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh(x)$$

Logo, $cosh(x)$ é simétrico em relação ao eixo y. Observando o gráfico da função cosseno hiperbólico, a relação entre a soma das funções: $g(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$ que resulta na função: $f(x) = cosh(x)$

3.3 O ESTUDO DA CATENÁRIA PELA GEOMETRIA DINÂMICA

O uso do computador tem se tornado cada vez mais comum na escola, onde a tecnologia porta-se como instrumento de motivação e valorização dos estudos. É uma via de aproximação entre professores e alunos, uma vez que os *softwares*, programas, pacotes e aplicativos somam forças no desenvolvimento das competências e habilidades dos educandos. O computador é considerado propiciador de potentes ambientes de ensino/aprendizagem, mas isto somente acontecerá se durante o processo ocorrerem os três componentes principais para aprendizagem: competência, aquisição e intervenção. Logo, o ambiente tecnológico deverá permitir o desenvolvimento de capacidades (competência), a aquisição de processos de aprendizagem (aquisição) e a aplicação dos métodos e estratégias (intervenção). (COELHO, 2000)

> O impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. [(BRASIL, 1999), p.41]

Considerando os avanços tecnológicos e a insegurança de desenvolver um trabalho com alunos nativos tecnologicamente, os professores se deparam com o desafio do ensinar, mas perpassando os algozes é notável a real necessidade de uma mudança nos procedimentos pedagógicos. A prática significativa e a utilização de novas formas de ensinar são necessárias e urgentes. Não tem sentindo renovações de conteúdos sem mudanças de procedimentos. (SACRISTÁN, 2000)

> Nos últimos anos, a partir de projetos governamentais, tem aumentado consideravelmente o equipamento tecnológico, as TIC, nas salas de aula. Assim, há a necessidade de capacitação de professores, em atividades, de todos os níveis, do primário ao secundário, para que se familiarizem com os novos recursos e especialmente para que utilizem uma metodologia que fundamente e justifique a aplicação de programas específicos para alcançar a aquisição de conteúdos e processos sugeridos nas propostas curriculares de cada nível. [(ABAR, 2014), p.05]

Almejando articular melhor os conteúdos matemáticos, fazendo uso de tecnologia, visando o desenvolvimento dos educandos, foi escolhido o $software$ de matemática dinâmica Geogebra (GEOmetria e álGEBRA), um $software$ gratuito com interface fácil e intuitiva , disponível como aplicativo para celulares e tabletes Android e iOS em diversos idiomas.

A Tabela 1 mostra os principais aspectos do $software$ Geogebra.

Tabela 1 – Vantagens do Geogebra

Os estudantes adoram porque...	
Ele torna a matemática tangível.	O Geogebra cria uma conexão entre geometria e álgebra de um modo inovador e visual - os estudantes podem finalmente ver, tocar e experimentar a matemática.
Ele torna a matemática dinâmica, interativa e divertida.	O Geogebra oferece aos estudantes uma maneira nova e prazerosa de se aprender matemática que vai além do quadro e giz.
Ele torna a matemática acessível e disponível.	O Geogebra permite que os estudantes se conectem com a matemática a qualquer hora e em qualquer lugar - na escola, em casa, onde quer que se esteja.
Ele torna a matemática mais fácil de aprender.	O Geogebra cria as interações que os alunos precisam para "absorver"os conceitos matemáticos.
Os professores o adoram porque...	
Ele permite que os professores continuem a ensinar.	O Geogebra não substitui os professores. Ele os ajuda a fazer o que fazem de melhor - ensinar.
Ele potencializa o trabalho do professor.	O Geogebra dá aos professores a liberdade e a autonomia para criarem aulas que eles sabem que os alunos acharão interessantes.
Ele permite que os professores se conectem uns com os outros.	Os professores que usam o Geogebra fazem parte de uma comunidade global.

Fonte: (GEOGEBRA, 2016)

Com a abordagem apresentada na Tabela 1, nota-se as contribuições que o *software* traz para a educação, destacando as vantagens que os educandos encontram ao fazer uso e os motivos que tornam o *software* aplicável ao grupo discente. Em outra perspectiva, o *software* tem uma diferente proposta didática para o professor, ampliando o acervo de aula dos docentes, atribuindo a visualização da Matemática, deixando as aulas mais dinâmicas, explorando e enriquecendo conceitos.

> Escolhemos o *software* livre e gratuito Geogebra, por seu manuseio simples e dinâmico que dá aos alunos a possibilidade de explorar, visualizar, elaborar conjecturas, analisar, verificar ideias, redescobrir e construir novos conhecimentos sem limites para a sua curiosidade e criatividade. [(ABAR, 2014), p.05]

A utilização do *software* de geometria dinâmica nas aulas de Matemática faz com que os alunos tenham melhores condições de aprendizado, conseguindo manipular as figuras, alterar as expressões e observar as mudanças, permite uma melhor visualização das propriedades estudadas, possibilitando construir uma aprendizagem visual e contextualizada, tomando como base as teorias previamente trabalhadas.

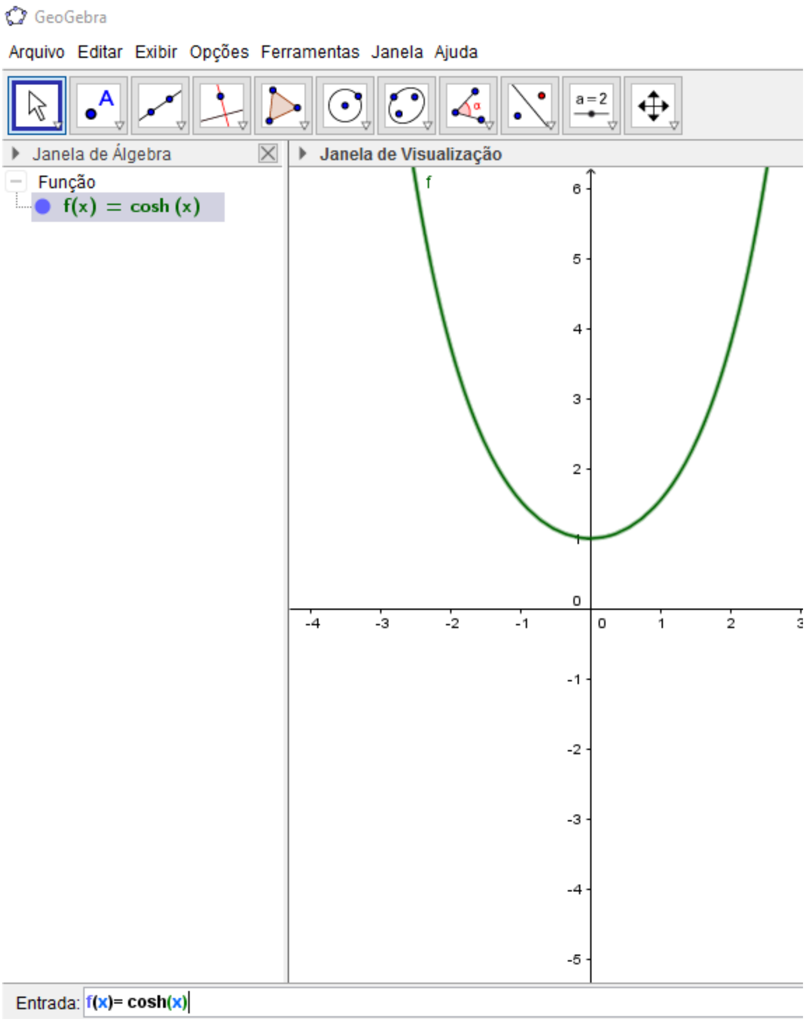
A concepção que os alunos podem obter com o uso de construções no *software*, desperta um grande interesse e, com isso, os métodos gráficos de aplicações matemáticas tornam-se extremamente importantes no processo do ensino da catenária, como uma aplicação da função exponencial e da função cosseno hiperbólico.

> Habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações. [(BRASIL, 1999), p.41]

As habilidades a serem trabalhadas, por consequência, desenvolvidas no processo de ensino da curva catenária devem ser pautadas na análise das características gráficas das funções do cosseno hiperbólico, explorando a representação gráfica da função exponencial e seu comportamento. A partir da mudança do seu coeficiente, possibilitando aos alunos a capacidade da adesão da tecnologia em diferentes situações, como prevê os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. (BRASIL, 1999)

Instalado o *software*, será inserida a função cosseno hiperbólico, $f(x) = cosh(x)$, (no campo de entrada na parte inferior da imagem), sendo representado graficamente pela curva catenária (Figura 12).

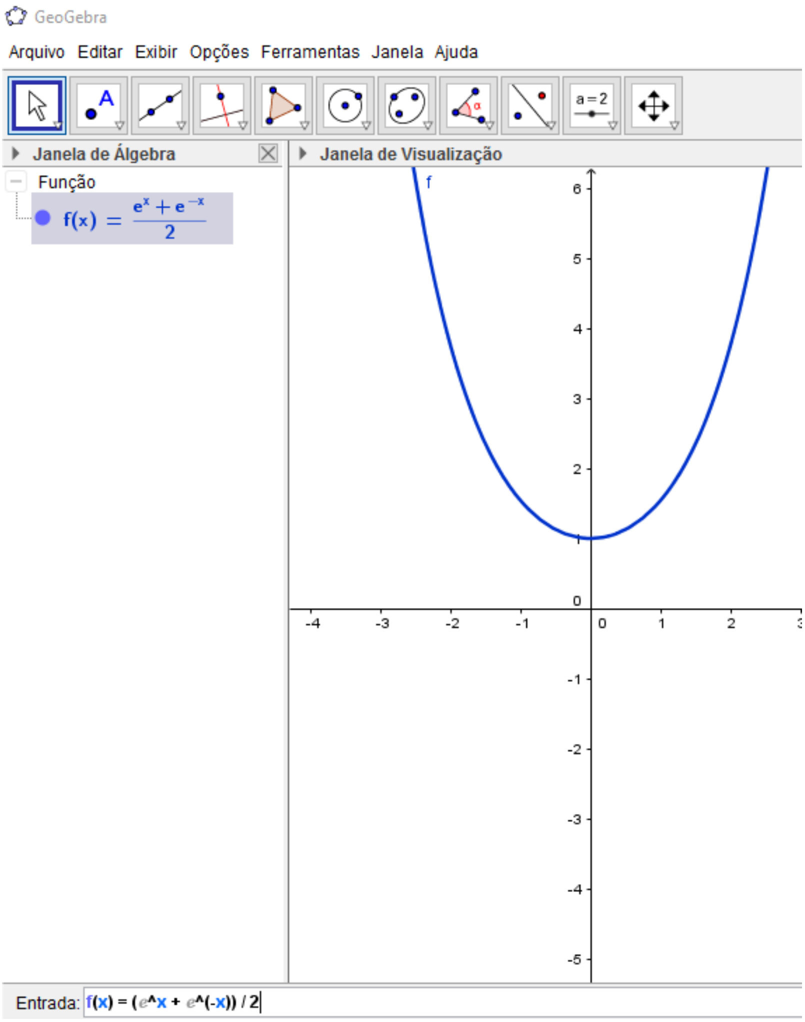
Figura 12 – Representação gráfica do cosseno hiperbólico



Fonte: Produzido pelo autor

Do mesmo modo, a representação gráfica da função $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ (inserida no campo entrada), gerando o gráfico na janela de visualização (Figura 13), no qual tem-se a mesma representação da função cosseno hiperbólico. Dessa forma, os educandos conseguem através do *software* verificar que as duas funções, embora com notações diferentes, têm um único gráfico que as representa.

Figura 13 – Representação gráfica da função cosseno hiperbólico



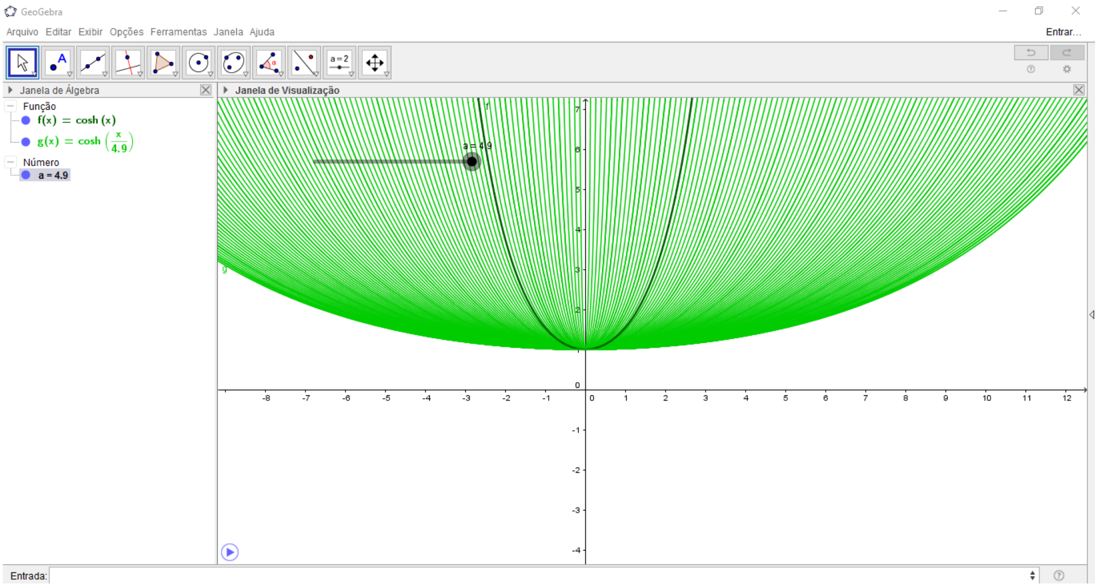
Fonte: Produzido pelo autor

> Ao apresentarmos uma abordagem gradual para o conhecimento das ferramentas do programa Geogebra e ao uso de estratégias e metodologias apropriadas para otimizar o processo educativo e induzir a produzir novas construções ou adaptações das realizadas. [(ABAR, 2014), p.06]

Não deve-se perder de vista que os estudantes estão em processo de aprendizagem, por conta disso a aula sobre o ensino da catenária tem que ser gradual, ou seja, explorando os recursos tecnológicos de uma forma crescente, aumentando o nível de dificuldade das construções e as diversas formas de investigações.

O Geogebra tem um recurso chamado "controle deslizante" que permite uma variação dos coeficientes, gerando as famílias da catenária, analisando as regularidades. A Figura 14 foi construída pela digitação no campo de entrada da função $f(x) = cosh(x/a)$ onde "a" é o coeficiente alterado pelo controle deslizante. Após clicar com o botão direito no controle deslizante, seleciona-se o item animar, além disso, é preciso habilitar o rastro da função.

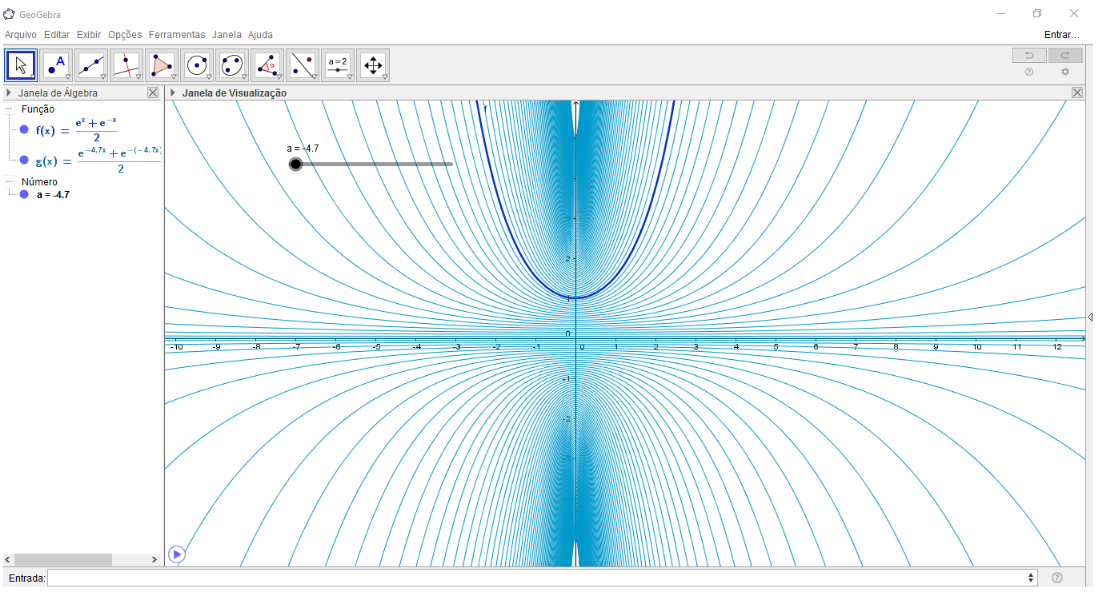
Figura 14 – Representação gráfica da família do cosseno hiperbólico



Fonte: Produzido pelo autor

Esse é um tipo de construção que causa certo fascínio nos alunos, pelo fato de verem a curva catenária se mover, tomando como base o valor do coeficiente “a” que está se deslocando no controle deslizante. Na Figura 15 foi digitado no campo de entrada a função exponencial da catenária $f(x) = (e^{ax} + e^{-ax})/2a$, onde “$a$” é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente. O mesmo processo de incluir o controle deslizante, habilitando o rasto e animação da construção anterior, se faz para realizar essa construção.

Figura 15 – Representação gráfica da família da função exponencial que gera a curva catenária



Fonte: Produzido pelo autor

> A representação gráfica de funções por gráficos no plano cartesiano é um recurso importante para seu estudo e por meio do Geogebra a manipulação dinâmica dos parâmetros das equações das curvas, podem permitir uma melhor compreensão destes conteúdos. [(ABAR, 2014), p.132]

Dessa forma, o ensino da catenária é beneficiada pelos recursos que o Geogebra oferece, com maior alcance, instintividade na compreensão e clareza na ligação entre teoria e prática, saindo da lousa, causada pelas restrições de representações de curvas no quadro. Com a intenção de levar aos alunos a conhecerem um grupo maior de curvas e suas alterações por meio de mudanças nas funções, no qual conseguem observar os parâmetros, tendo uma visão ampliada do conteúdo trabalhado, resultando assim em um processo mais visual e manipulável.

4 ATIVIDADES E RESULTADOS

"Quem forma se forma e reforma ao formar. E quem é formado forma-se e forma ao ser formado." [(FREIRE, 1996), p.25]

Para o desenvolvimento da proposta de estudo da curva catenária, foi selecionado um grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Uirapuru (Sorocaba/SP), uma vez que já tiveram contato com funções no 1º ano e haviam estudado trigonometria no primeiro semestre do 2º ano, garantindo pré-requisitos para o bom desenvolvimento dos trabalhos.

Inicialmente, foi realizada uma reunião com a coordenadora do Ensino Médio para apresentação do plano de aula e das habilidades/competências que seriam trabalhadas com os alunos. Foi também entregue o Termo de consentimento (anexo I) para a instituição e, em seguida, a professora da turma selecionou um grupo de 12 alunos, que tinham interesse em aprofundar seus conhecimentos matemáticos. Na sequência em uma reunião com o grupo, em que foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo II) com o cronograma dos encontros Tabela 2.

Tabela 2 – Cronograma de aplicação

Data	Horário	Tema
11/10	14h00 - 15h30	- História da catenária - Curva do cosseno hiperbólico - Aplicações
18/10	14h00 - 15h30	- *Software* de geometria dinâmica catenária
01/11	14h00 - 15h30	- O uso da catenária - Socialização - Pesquisa

A instituição de ensino tem um total de 283 alunos matriculados no Ensino Médio do ano letivo de 2016, sendo 91 alunos cursando o 2º ano. Desde 1992 o colégio trabalha com o Ensino Médio, além disso, dispõe de uma infraestrutura de excelente qualidade, com projetores, computadores e caixa de som em todas as salas de aula, tem também um gabinete móvel com 40 notebooks o qual auxilia o trabalho com tecnologia em sala de aula.

Sobre o colégio:

> Há duas formas de se contar a história do Colégio Uirapuru. Cronologicamente, pode-se tomar a data de início das atividades em 23 de fevereiro de 1989, quando as primeiras turmas de alunos iniciaram suas aulas. Mas a história de uma escola é também a história de suas ideias e dos seus educadores. Desse ponto de vista, o Uirapuru é fruto das discussões, das tensões e dos avanços que marcaram a educação no século XX. (UIRAPURU, 2016)

4.1 PLANO DE AULA

PLANO DE AULA

Nível de Ensino: Ensino Médio.

Série: 2º Ano.

Tempo Previsto: 6 aulas

Tema da Aula: Estudo da catenária

Competências

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidades

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Objetivos a serem alcançados:

- Conhecer a história da curva catenária.
- Associar a curva catenária a função do cosseno hiperbólico.
- Reconhecer a curva catenária no cotidiano e suas aplicações.
- Resolver exercícios que envolvam a curva catenária.
- Construir gráficos de funções hiperbólicas com o *software* Geogebra.

- Analisar as características gráficas da função do cosseno hiperbólico.
- Aplicar o conhecimento sobre catenária na resolução de problemas

Conteúdo ministrado:

- História da catenária.
- Definição de cosseno hiperbólico.
- Funções hiperbólicas.
- Representação gráfica.
- Catenária no cotidiano.
- Exercícios.

Metodologia:

1º e 2º Encontros: Apresentação da catenária.

Apresentação em *PowerPoint* sobre a história da curva catenária, mencionando os matemáticos que contribuíram historicamente para a definição da curva. Exibição dos vídeos: Isto é Matemática: A Catenária e Matemática em Toda Parte. Definir algebricamente a curva catenária por uma função cosseno hiperbólico. Exercícios

3º e 4º Encontros: *Software* de geometria dinâmica.

Com o auxílio do *software* Geogebra, construir e definir junto aos alunos: Hipérbole; Seno hiperbólico; Cosseno hiperbólico; Função cosseno hiperbólico; Curva catenária; Comparar a curva catenária com uma parábola.

5º e 6º Encontros: Catenária no cotidiano.

A Turma foi dividida em grupos, cada grupo recebe um dos desafios:

1º Roda quadrada;

2º Ovo;

3º Pontes suspensas;

4º Lata de refrigerante.

Apresentação dos resultados obtidos pelos grupos e coleta de depoimento, sobre a aplicação da curva catenária nas aulas.

Recursos didáticos: Lousa, computador com *software* Geogebra instalado, Datashow e som.

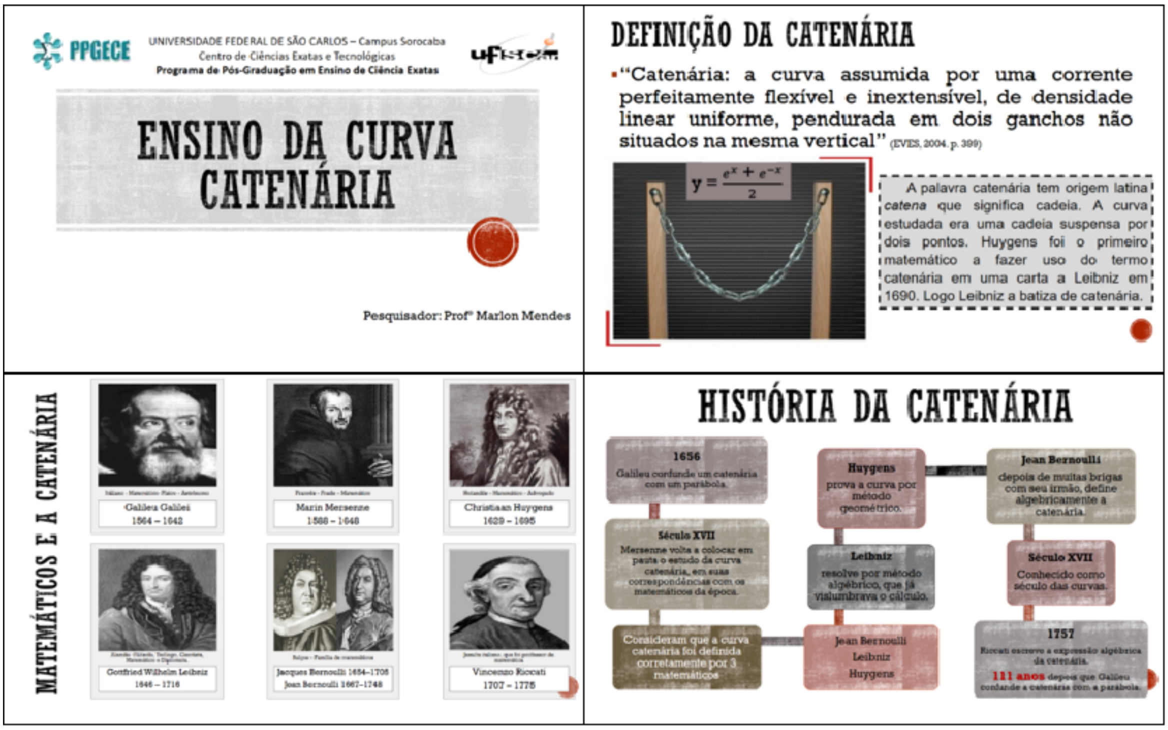
Avaliação: Resolução dos exercícios em aula, produções gráficas no *software* Geogebra, apresentação do desafio da catenária e relatório com depoimento sobre as aulas.

Material usado em aula:

• 1º e 2º Encontro

Apresentação em *PowerPoint* usada nas aulas 1 e 2:

Figura 16 – Slides da aula



Fonte: Produzido pelo autor

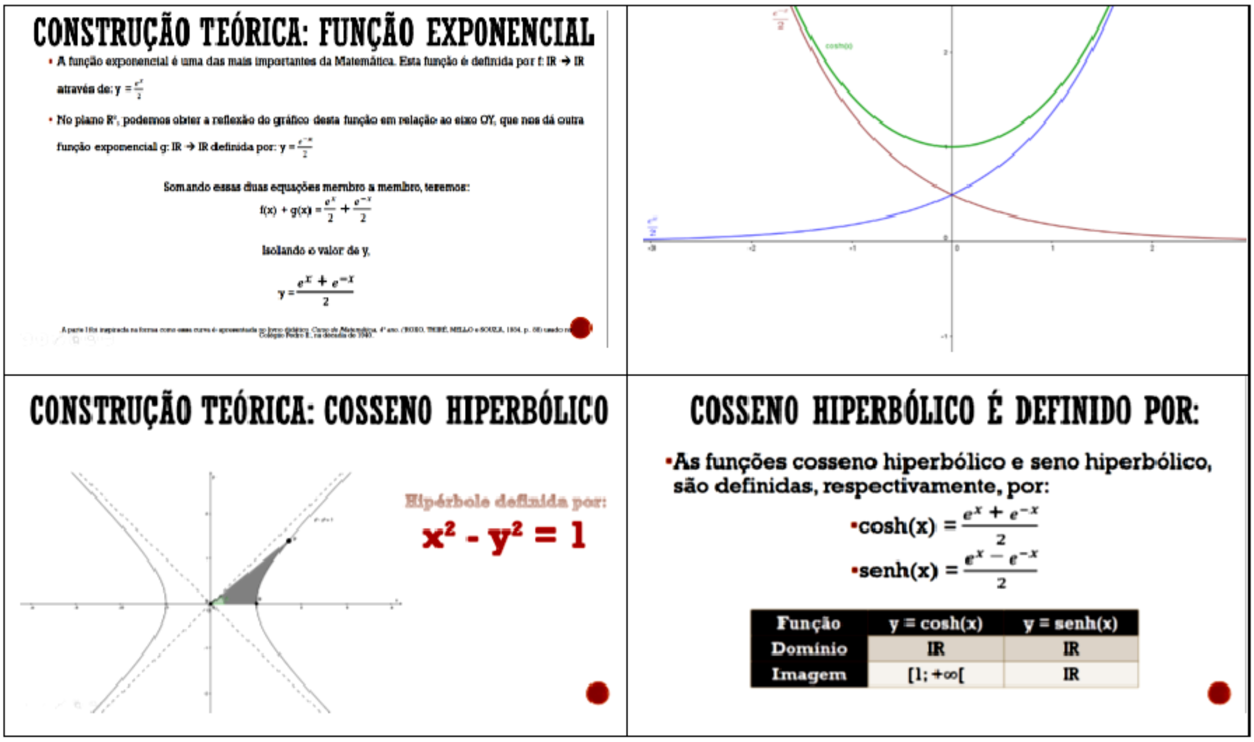
O 1º Capítulo deste trabalho faz referência a parte história da curva catenária. Isto auxilia no desenvolvimento da aula que traz o contexto de descoberta e estudo da curva.

Figura 17 – Vídeos passados para os alunos

	
Vídeo disponível: https://www.youtube.com/watch?v=yBH5ezzY_-0 O matemático Rogério Martins fala da curva catenária. Dando alguns exemplos de aparições tais como: ponte suspensa, cabos de alta tensão, cúpulas e uso na arquitetura.	Vídeo disponível: https://www.youtube.com/watch?v=xXyuQCjtVCw Usado apenas dos 2:02 à 4:21 minutos. O professor Leo Akio Yokoyama investiga a aparição da catenária e faz comparações com a parábola.

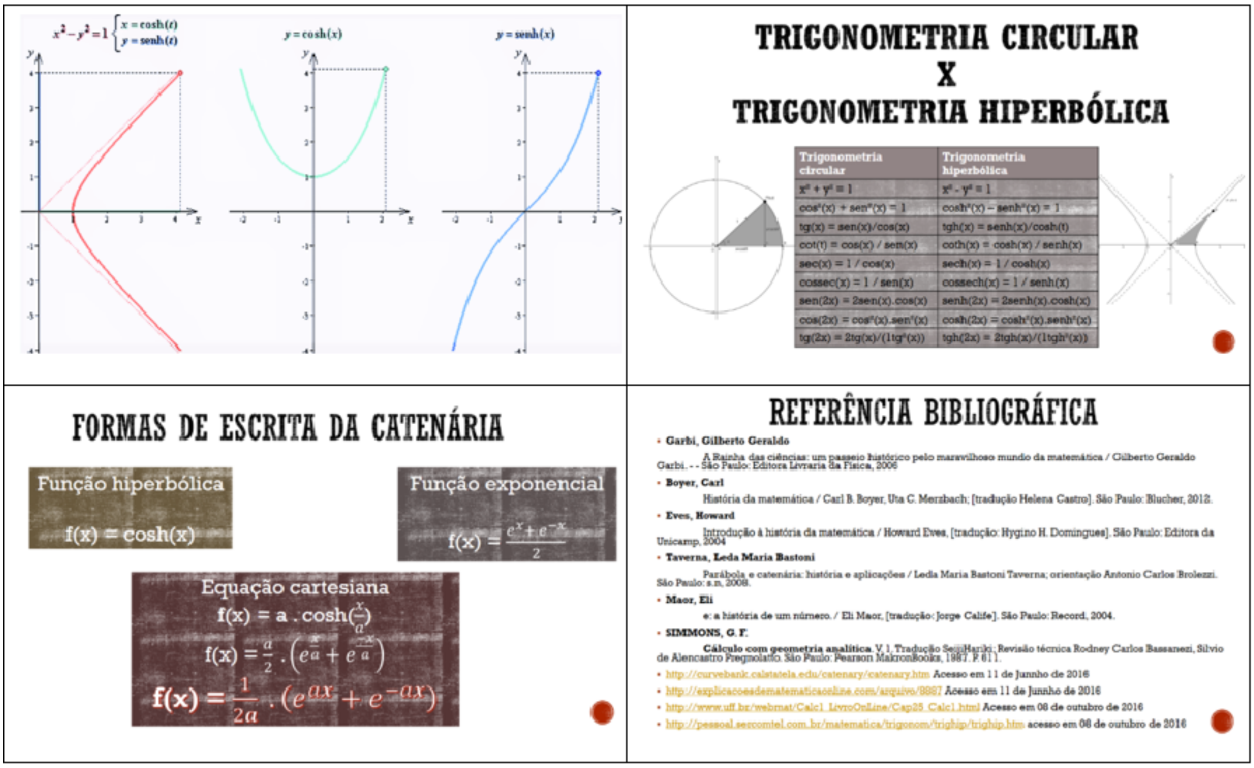
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 18 – Slides da aula



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 19 – Slides da aula



Fonte: Produzido pelo autor

Lista de exercícios resolvidos

1. Demonstre que $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$

Solução: Sabendo que

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Temos:

$$(\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 =$$

$$\frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^{x-x} - e^{-2x}}{4} =$$

$$\frac{2e^0 + 2e^0}{4} =$$

$$\frac{2.1 + 2.1}{4} =$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

2. Encontre o valor numérico de cada expressão a) $senh(0)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\text{senh(x)} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\text{senh}(0) &= \frac{e^0 - e^{-0}}{2} \\
\text{senh}(0) &= \frac{1 - 1}{2} \\
\text{senh}(0) &= \frac{0}{2} \\
\text{senh}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

b) $senh(2)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\text{senh(x)} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\text{senh}(2) &= \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \\
\text{senh}(2) &= \frac{e^2 - \frac{1}{e^2}}{2} \\
\text{senh}(2) &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{e^2}.\frac{1}{2} \\
\text{senh}(2) &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} \\
\text{senh}(2) &= \frac{e^4 - 1}{2e^2}
\end{aligned}
$$

c) $cosh(0)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\text{cosh(x)} &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\text{cosh}(0) &= \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \\
\text{cosh}(0) &= \frac{1 + 1}{2} \\
\text{cosh}(0) &= \frac{2}{2} \\
\text{cosh}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

d) $cosh^{-1}(2)$

Solução:

$$\cosh(\text{x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$cosh^{-1}(2) = \frac{2}{e^2 + e^{-2}}$$
$$cosh^{-1}(2) = \frac{2}{e^2 + \frac{1}{e^2}}$$
$$cosh^{-1}(2) = \frac{2}{\frac{e^4+1}{e^2}}$$
$$cosh^{-1}(2) = \frac{2e^2}{e^4 + 1}$$

3. Demonstre a identidade (Isso demonstra que o cosh é uma função par)

cosh(-x) = cosh(x).

Solução:

$$cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh(x)$$

Aqui conclui-se que é simétrica em relação ao eixo y.

4. Se $tgh(x) = \frac{12}{13}$, encontre x.

Solução:

Como, tgh(x) $= \frac{senh(x)}{cosh(x)}$, então:

$$\frac{12}{13} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$12(e^x + e^{-x}) = 13(e^x - e^{-x})$$

$$12e^x + 12e^{-x} = 13e^x - 13e^{-x}$$

$$12e^{-x} + 13e^{-x} = 13e^x - 12e^x$$

$$25e^{-x} = e^x$$

$$25.\frac{1}{e^x} = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{25}{e^x} = \mathrm{e}^x$$

$$25 = \mathrm{e}^x.e^x$$

$$25 = \mathrm{e}^{2x}$$

$$\ln 25 = \ln \mathrm{e}^{2x}$$

$$\ln 5^2 = 2xlne$$

$$2\ln 5 = 2x$$

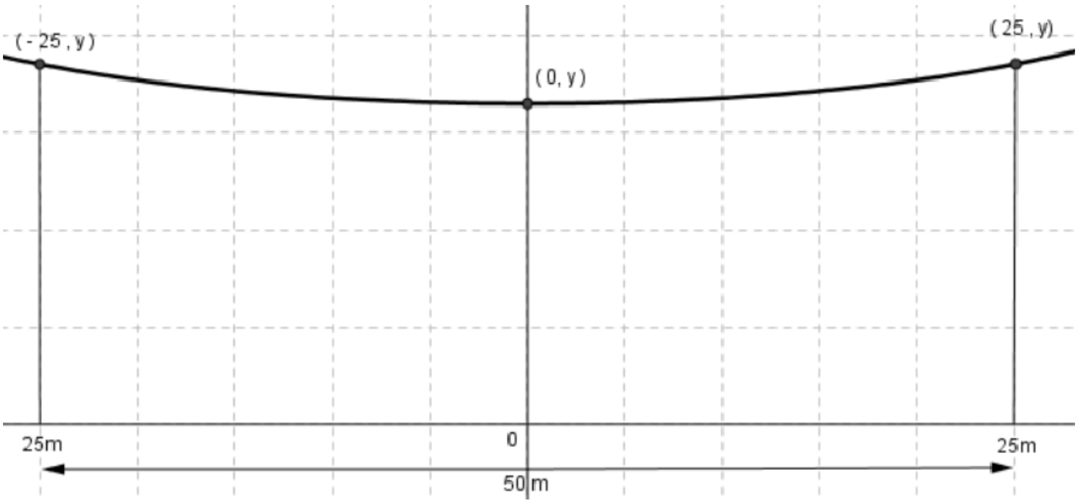
$$x = \ln 5$$

5. Dois postes de altura igual e afastados de 50m suportam um cabo que descreve uma catenária, $f(x) = \frac{1}{2a}.(e^{ax} + e^{-ax})$ em que $a = 0,08$.

a)Qual a distância mínima do cabo ao solo?

Solução:

Figura 20 – $f(x) = \frac{1}{2a}.(e^{ax} + e^{-ax})$



Fonte: Produzido pelo autor

$$\text{f(x)} = \frac{1}{2a}.(e^{ax} + e^{-ax})$$
$$\text{f(0)} = \frac{1}{2.0,08}.(e^{0,08.0} + e^{-0,08.0})$$
$$\text{f(0)} = \frac{1}{0,016}.(e^{0} + e^{0})$$
$$\text{f(0)} = \frac{1}{0,016}.(1 + 1)$$
$$\text{f(0)} = \frac{1}{0,016}.2$$
$$\text{f(0)} = \frac{2}{0,016}$$
$$\text{f(0)} = 12{,}5$$

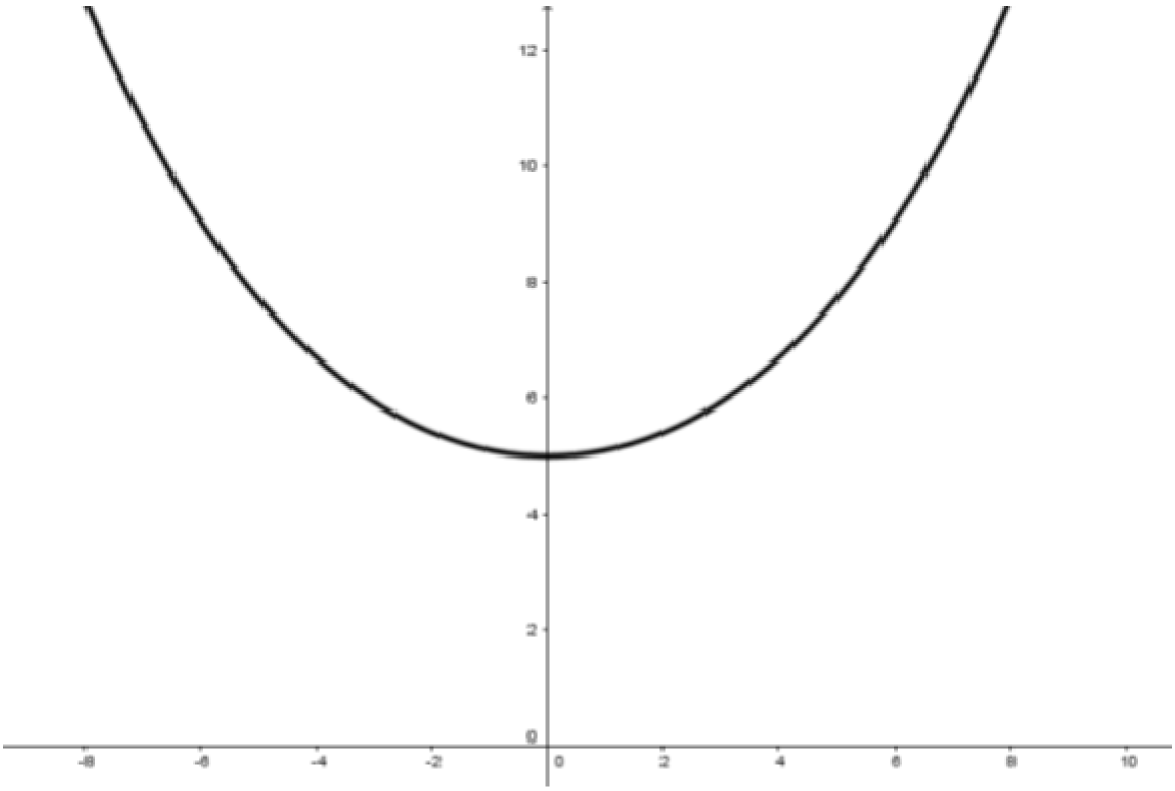
b)Qual é a altura dos postes?

Solução:

$$\text{f}(x) = \frac{1}{2a}.(e^{ax} + e^{-ax})$$
$$\text{f}(25) = \frac{1}{2.0,08}.(e^{0,08.25} + e^{-0,08.25})$$
$$\text{f}(25) = \frac{1}{0,016}.(e^{2} + e^{-2})$$
$$\text{f}(25) = \frac{1}{0,016}.(7,38 + 0,13)$$
$$\text{f}(25) = \frac{1}{0,016}.7,51$$
$$\text{f}(25) = \frac{7,51}{0,0160}$$
$$\text{f}(25) \cong 47,02$$

6. Na Figura 21 observe o gráfico da função $f(x) = 5.cosh(\frac{x}{5})$ e determine o domínio e a imagem da função.

Figura 21 – $f(x) = 5.cosh(fracx5)$



Fonte: Produzido pelo autor

Solução:

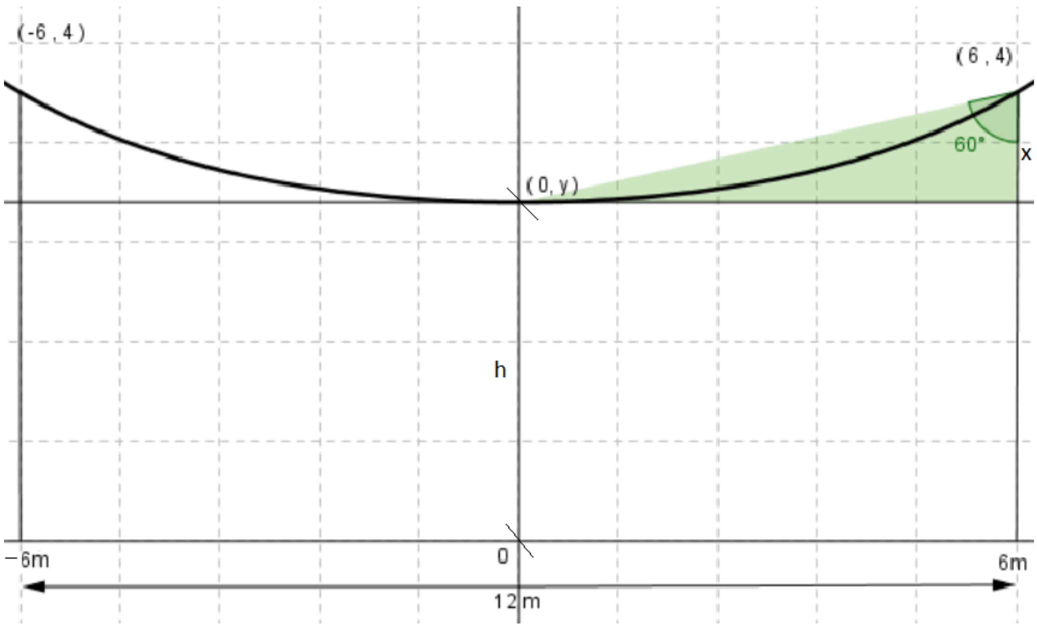
$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \{y \epsilon \mathbb{R} / y \geq 5\}$$

7. Considere um fio que liga dois postes de energia a uma distância de 12 metros e uma altura de 4 metros. Entre os pontos de suspensão e o ponto mais baixo do fio faz um ângulo de 60° (Figura 22). Calcule a altura aproximada do ponto mais baixo do fio.

Solução:

Figura 22 – Imagem do exercício 7



Fonte: Produzido pelo autor

$$tg(60°) = \frac{6}{x}$$

$$\sqrt{3}.x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

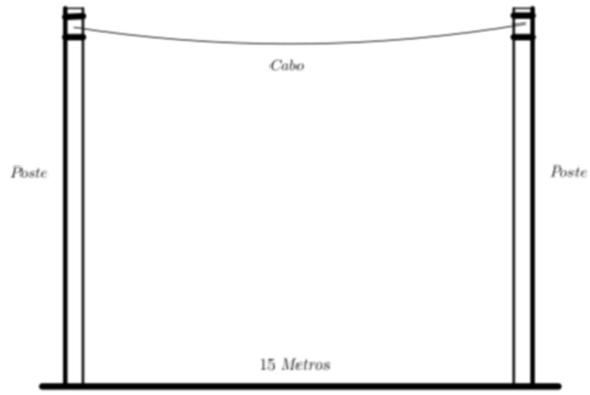
A altura será determinada por:

$$h = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$h = 2(2 - \sqrt{3}) \simeq 0,6m$$

8. Para uma rede elétrica urbana, é preciso de postes de mesma altura, com 5,5 metros de altura a uma distância de 15 metros. Sabendo que a altura do ponto mais baixo desse fio é 5 metros, determine o valor do coeficiente "a", sendo f(x) $= \frac{1}{2a}.(e^{a.x} + e^{-a.x})$ (Figura 23).

Figura 23 – $f(x) = \frac{1}{2a}.(e^{a.x} + e^{-a.x})$



Fonte: Produzido pelo autor

Solução:

$$f(x) = cosh(ax)$$

$$f(x) = \frac{1}{2a}.(e^{a.x} + e^{-a.x})$$

$$f(0) = \frac{1}{2a}.(e^{a.0} + e^{-a.0})$$

$$f(0) = \frac{1}{2a}.(e^{0} + e^{0})$$

$$f(0) = \frac{1}{2a}.(1 + 1)$$

$$f(0) = \frac{1}{2a}.2$$

$$f(0) = \frac{2}{2a}$$

$$f(0) = \frac{1}{a}$$

Considerando $f(0) = 5$, temos:

$$5 = \frac{1}{a}$$
$$5\text{a} = 1$$
$$\text{a} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

•3º e 4º Encontro.

Atividade com *software* Geogebra

1º Construção (Figura 24)

Digite no campo “Entrada” as funções: $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$

Selecione “ponto” e marque o ponto A sobre o eixo x (em qualquer lugar)

Selecione “reta perpendicular” em seguida click no eixo x e depois no ponto A.

Selecione “interseção de Dois Objetos” marque um ponto onde cruza a reta perpendicular e o gráfico da função $f(x)$ e depois marque outro ponto onde cruza a reta perpendicular e a função $g(x)$.

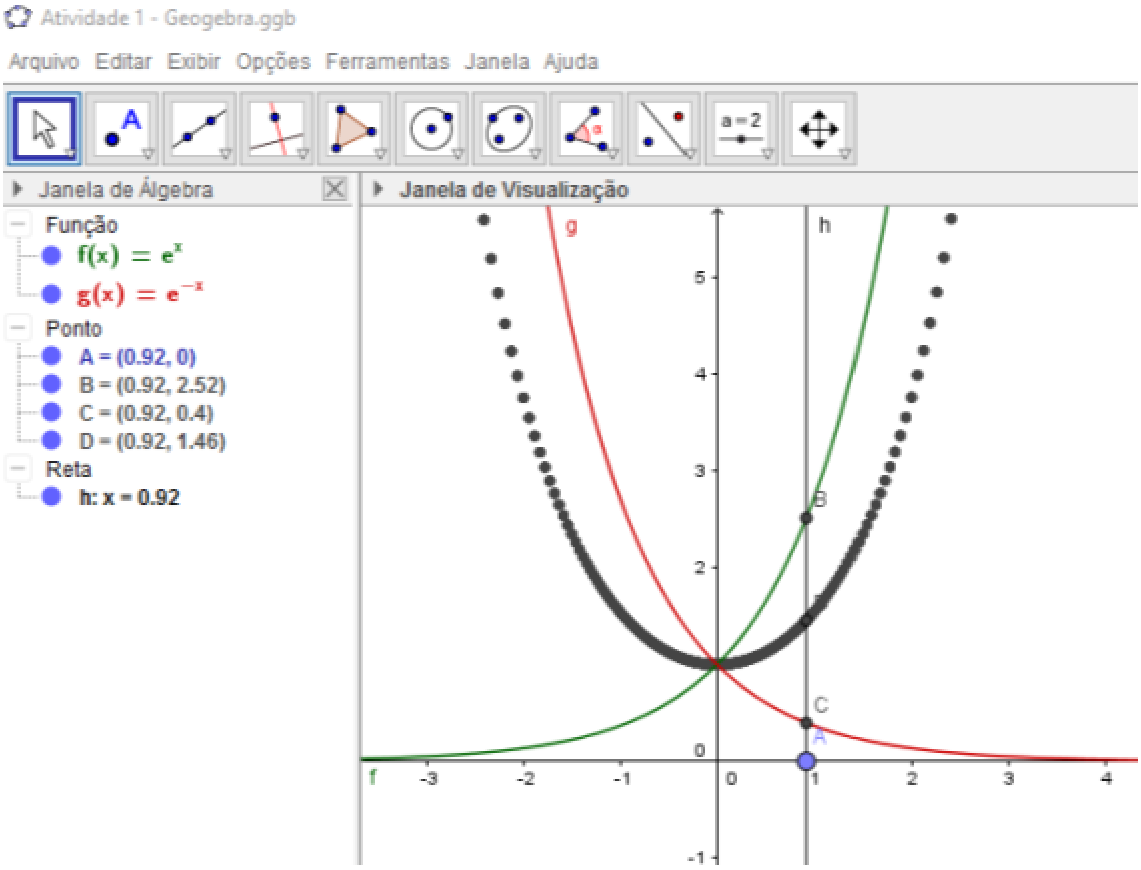
Selecione “ponto médio” e click sobre os pontos de interseção gerando anteriormente.

Click com o botão direito no ponto médio que foi criado e click em “habilitar rastro”.

Mova o ponto sobre o eixo x, depois click no mesmo ponto com o botão direito e selecione “animar”.

Digite no campo “Entrada” a função $h(x) = cosh(x)$ e compare o gráfico da função cosseno hiperbólico com o rastro gerado pela soma das exponenciais divido por 2.

Figura 24 – 1º construção



Fonte: Produzido pelo autor

2º Construção (Figura 25)

Digite no campo "Entrada" a função da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Selecione "controle deslizante" inclua na construção o controle "a" de -5 a 5.

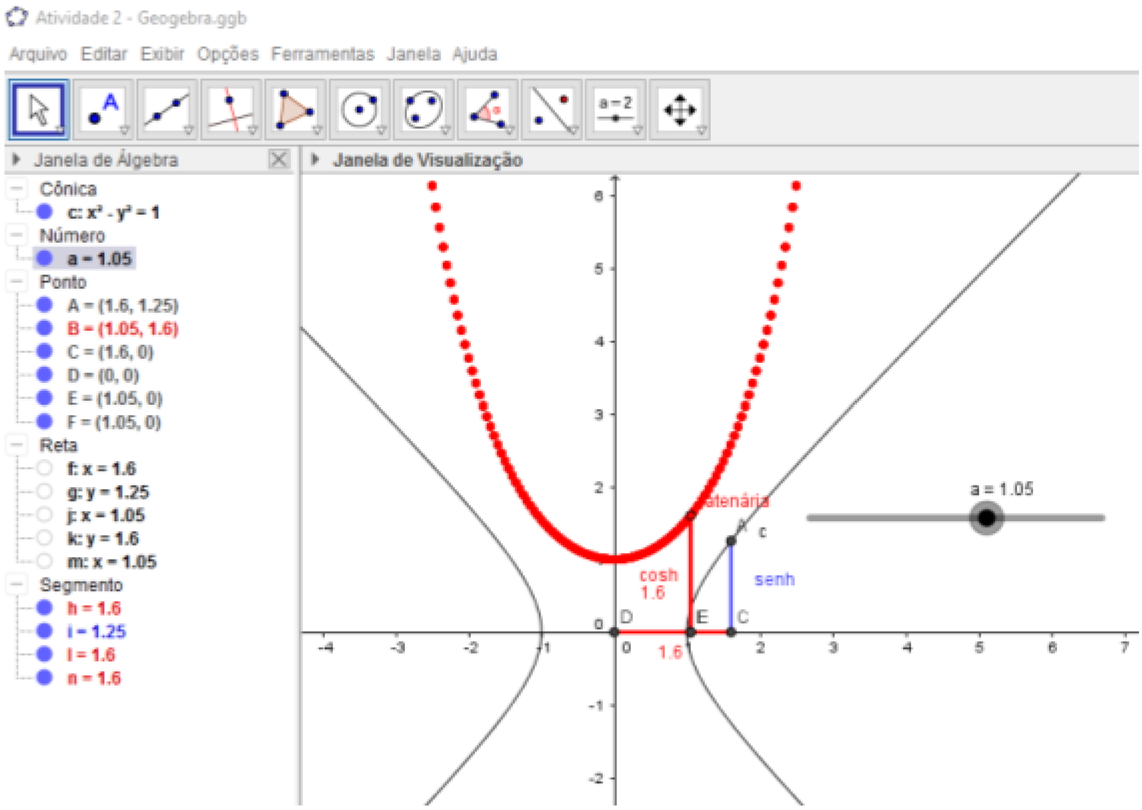
Digite no campo "Entrada" as coordenadas do ponto $(cosh(a), senh(a))$.

Digite no campo "Entrada" as coordenadas do ponto $(a, x(A))$.

Habilite o rastro do ponto B.

Mova o controle deslizante ou click com o botão direito no controle deslizante, depois selecione "animar".

Figura 25 – 2º construção



Fonte: Produzido pelo autor

3º Construção: Analisando o coeficiente "a" na forma cartesiana da catenária. (Figura 26)

Click em "controle deslizante" coloque o nome de "a" e no intervalo de -5 a 5 (padrão)

Digite no campo "Entrada" a função cartesiana da catenária, $f(x) = (1/2a) * (e^{ax} + e^{-ax})$

Mova o controle deslizante e verifique o que acontece com a catenária.

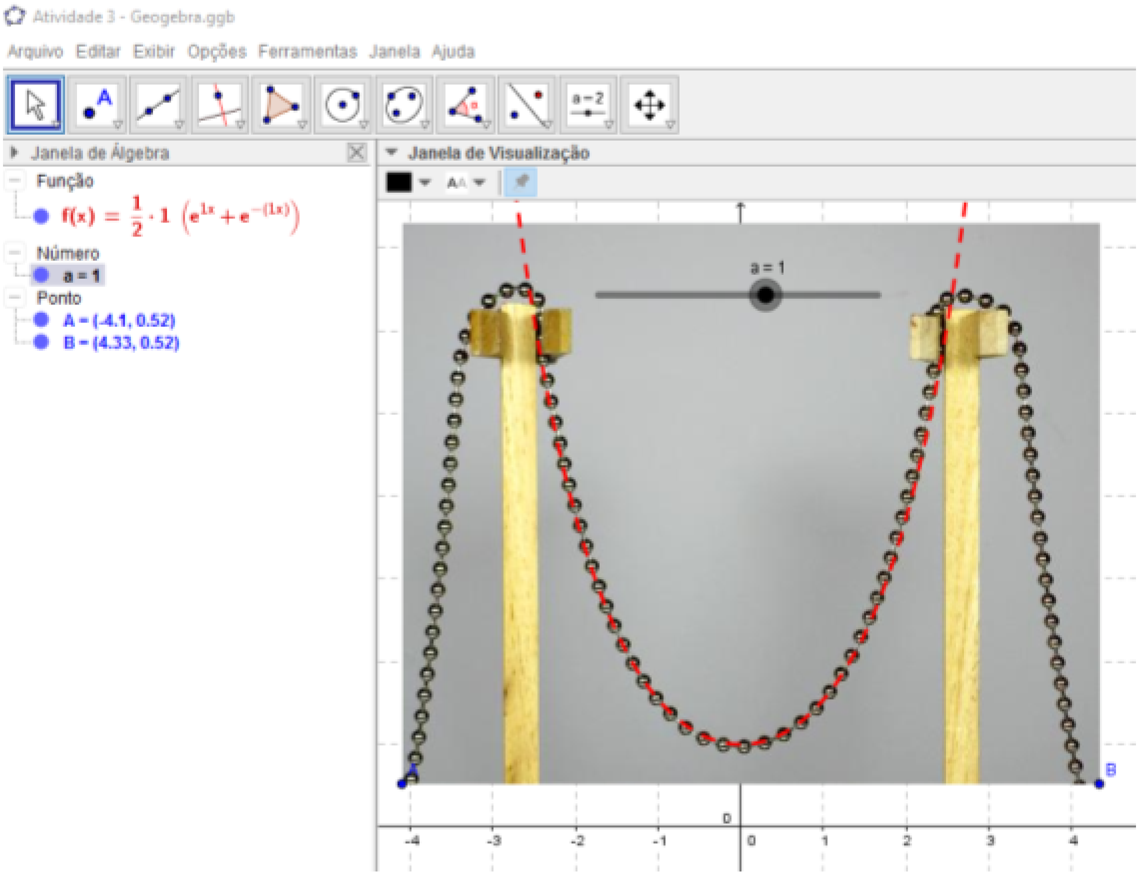
Salve a imagem da catenária que está disponível no link:

http://utenti.quipo.it/base5/analisi/catenaria.htm

Cole a figura usando o ícone "inserir imagem", coloque o ponto mais baixo no ponto (0,1).

Defina a equação catenária na qual essa curva foi gerada.

Figura 26 – 3º construção



Fonte: Produzido pelo autor

4º Construção: Comparando a catenária com a parábola. (Figura 27)

Click em “controle deslizante”, coloque o nome de “a” e no intervalo de 0 a 100.

Digite no campo “Entrada” a função da catenária: $f(x) = cosh(x/a)$.

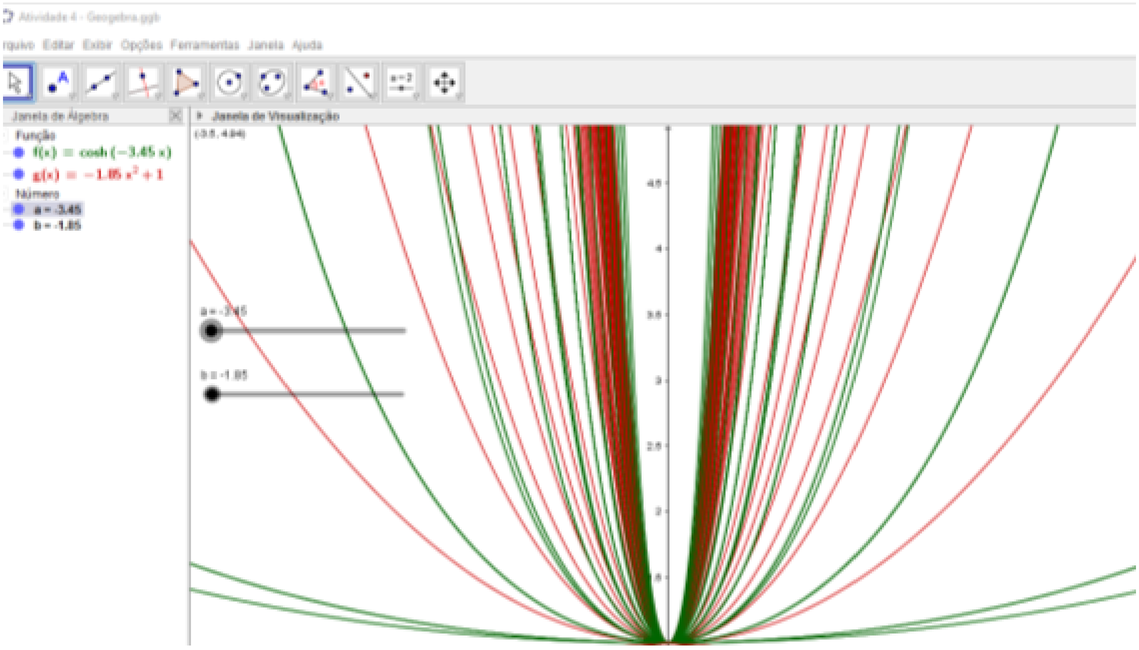
Click em “controle deslizante” coloque o nome de “b” e no intervalo de 0 a 100.

Digite no campo “Entrada” a função da catenária: $f(x) = bx^2 + 1$.

Analise as curvas da parábola e da catenária.

Habilite o rastro das duas curvas e observe se tem uma curva catenária igual a uma parábola.

Figura 27 – 4º construção



Fonte: Produzido pelo autor

●5º e 6º Encontro.

Na aula anterior foi apresentado uma proposta de pesquisa para o grupo de alunos com as seguintes instruções:

○ Dividir a turma em 4 grupos;

○ Escolher uma aplicação;

○ Pesquisar sobre a curva catenária;

○ Produzir a curva, terminar a equação, fazendo uso do Geogebra;

○ Apresentar e socializar com a turma no último encontro.

Os temas inicialmente propostos para aplicações da curva catenária foram:

○ Roda Quadrada;

○ Fundo da lata;

○ Ovo;

○ Rede de transmissão;

○ Pontes suspensas.

Os grupos tiveram duas semanas para realização da pesquisa e preparação da apresentação. Após, ou seja, no dia do último encontro presencial, os grupos fizeram suas apresentações. E assim, com essa socialização foi finalizado o projeto de aplicação da catenária.

4.2 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nessa sessão destaca-se o desenvolvimento da pesquisa com um relato das atividades realizadas pelos alunos, com intuito de pontuar as relevâncias da aplicação.

Figura 28 – Aula 1

Fonte: Arquivo do autor

No primeiro encontro, uma aula mais teórica, apresentando a definição da curva catenária, passando pelos matemáticos que contribuiram para a descoberta, evidenciando a importância histórica no desenvolvimento de um novo conceito matemático e observando o trabalho interligado dos matemáticos. Dessa forma, destaca-se a relevância de iniciar um conceito pelo seu estudo histórico, possibilitando uma compreensão significativa. Foram exibidos dois vídeos para melhor exemplificar a catenária em situações do dia-a-dia.

Na sequência, foi apresentada uma notação da catenária definida a partir da função exponencial. Prosseguindo, foi observada a hipérbole, fazendo um comparativo da trigonometria circular com a trigonometria hiperbólica, chegando nas funções hiperbólicas, para enfim definir a catenária com a função cosseno hiperbólico. Depois dessa parte introdutória da aula, foi entregue uma lista de exercícios aos alunos, para ser resolvida em sala de aula. Essa etapa teórica foi necessária, pois era um tema desconhecido dos participantes, porém já familiarizados com a função exponencial .

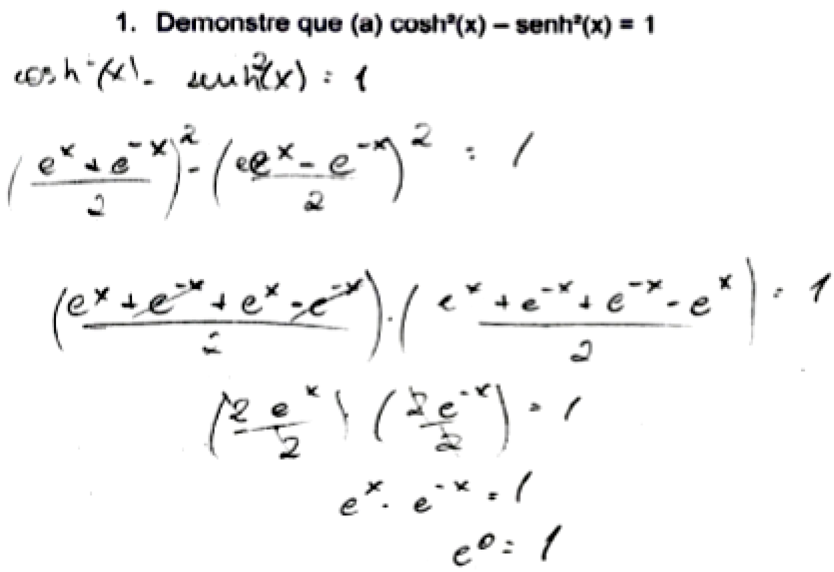
Figura 29 – Resolução da lista

Fonte: Arquivo do autor

A seguir, serão apresentadas e comentadas algumas resoluções feitas pelos alunos.

1º Exercício resolvido pelo aluno R.S.E.S, o qual tem como objetivo observar que a soma do $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$, associando assim ao Teorema de Pitágoras e observando os eixos que representam o cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. O aluno demonstra fazendo a substituição do $senh(x)$ e do $cosh(x)$ pela notação em exponenciais, depois prosseguiu com operações algébricas até concluir o exercício (Figura 30).

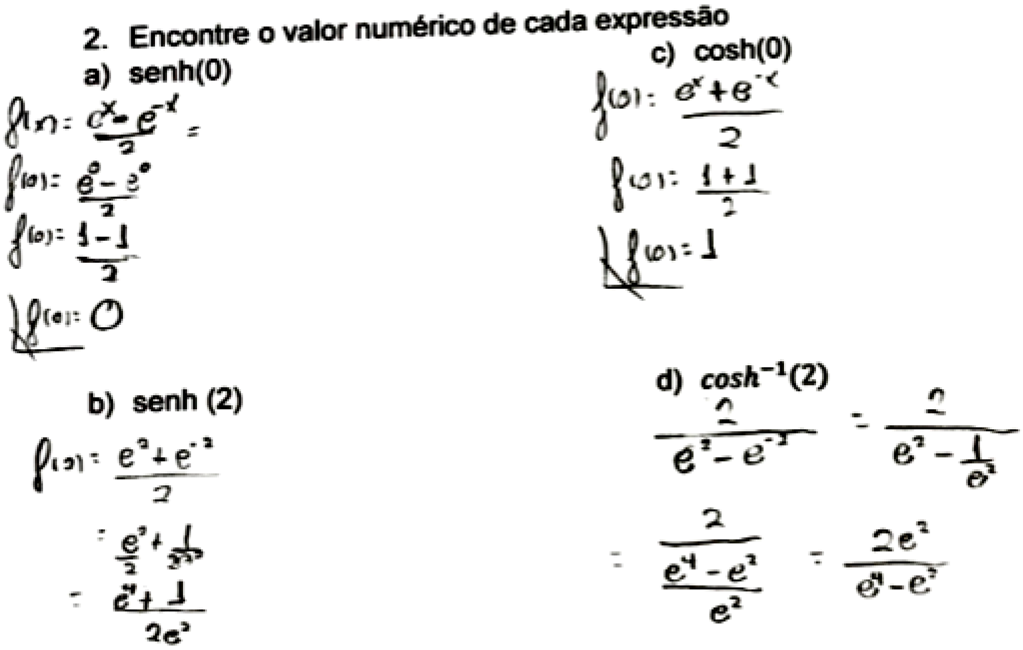
Figura 30 – Exercício 1



Fonte: Produzido pelo aluno R.S.E.S.

2º Exercício resolvido pelo aluno C.L.V.C, visa substituir o valor de x na função $senh(x)$ e $cosh(x)$, para determinar o valor de $f(x)$ (Figura 31).

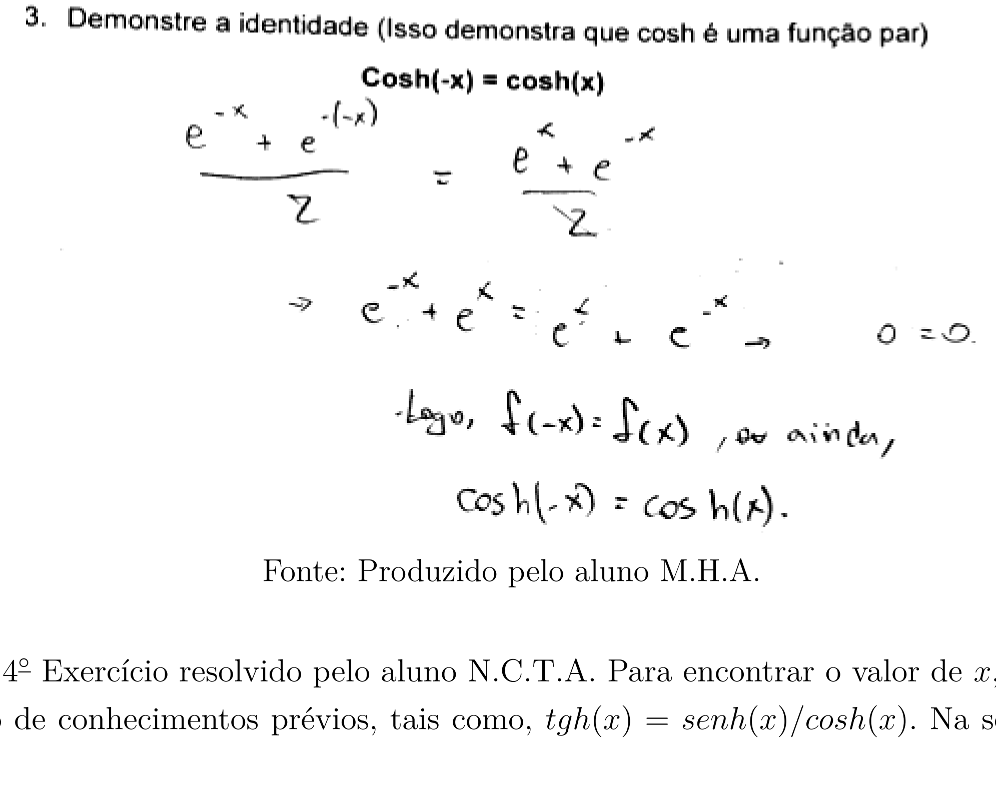
Figura 31 – Exercício 2



Fonte: Produzido pelo aluno C.L.V.C.

3º Exercício resolvido pelo aluno M.H.A, propunha que o aluno provasse que a função $cosh(x)$ é par. Primeiro foi substituito o $cosh(x)$ por sua notação em exponenciais já realizando a substituição por x e ˘x. Optou por substituir ambos os lados da igualdade e chegar a uma simetria verdadeira. Nas próximas etapas, os exercícios foram desenvolvidos de maneira algébrica até chegar ao resultado final (Figura 32).

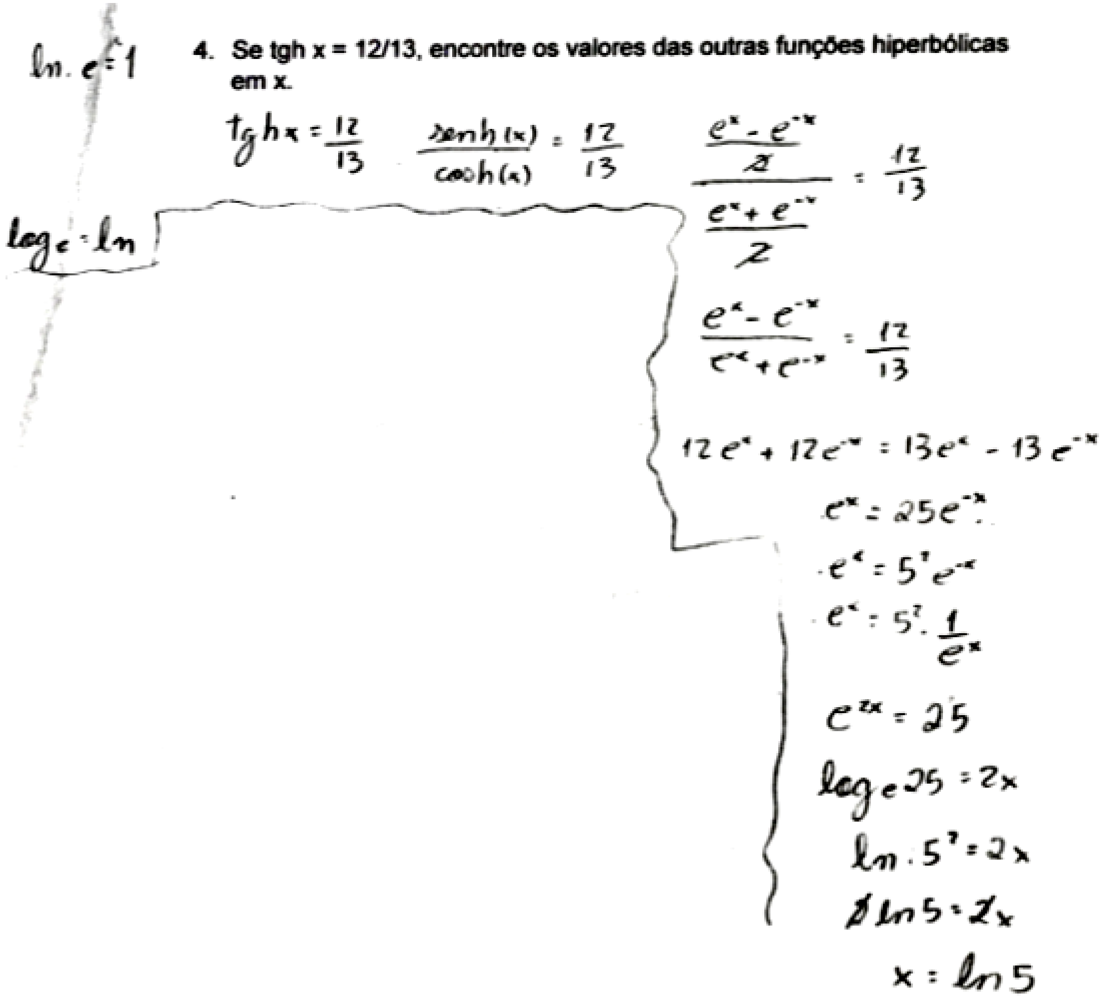
Figura 32 – Exercício 3



Fonte: Produzido pelo aluno M.H.A.

4º Exercício resolvido pelo aluno N.C.T.A. Para encontrar o valor de x, o aluno faz uso de conhecimentos prévios, tais como, $tgh(x) = senh(x)/cosh(x)$. Na sequência substitui a escrita do $senh(x)$ e $cosh(x)$ por suas representações em exponenciais, realiza as operações até chegar no resultado (Figura 33).

Figura 33 – Exercício 4


$\ln . e = 1$

4. Se tgh x = 12/13, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

$\log_e = \ln$

$tgh\,x = \frac{12}{13}$ $\quad \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{12}{13}$ $\quad \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}}}{\frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}}} = \frac{12}{13}$

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{12}{13}$

$12e^x + 12e^{-x} = 13e^x - 13e^{-x}$

$e^x = 25e^{-x}$

$e^x = 5^2 e^{-x}$

$e^x = 5^2 . \frac{1}{e^x}$

$e^{2x} = 25$

$\log_e 25 = 2x$

$\ln . 5^2 = 2x$

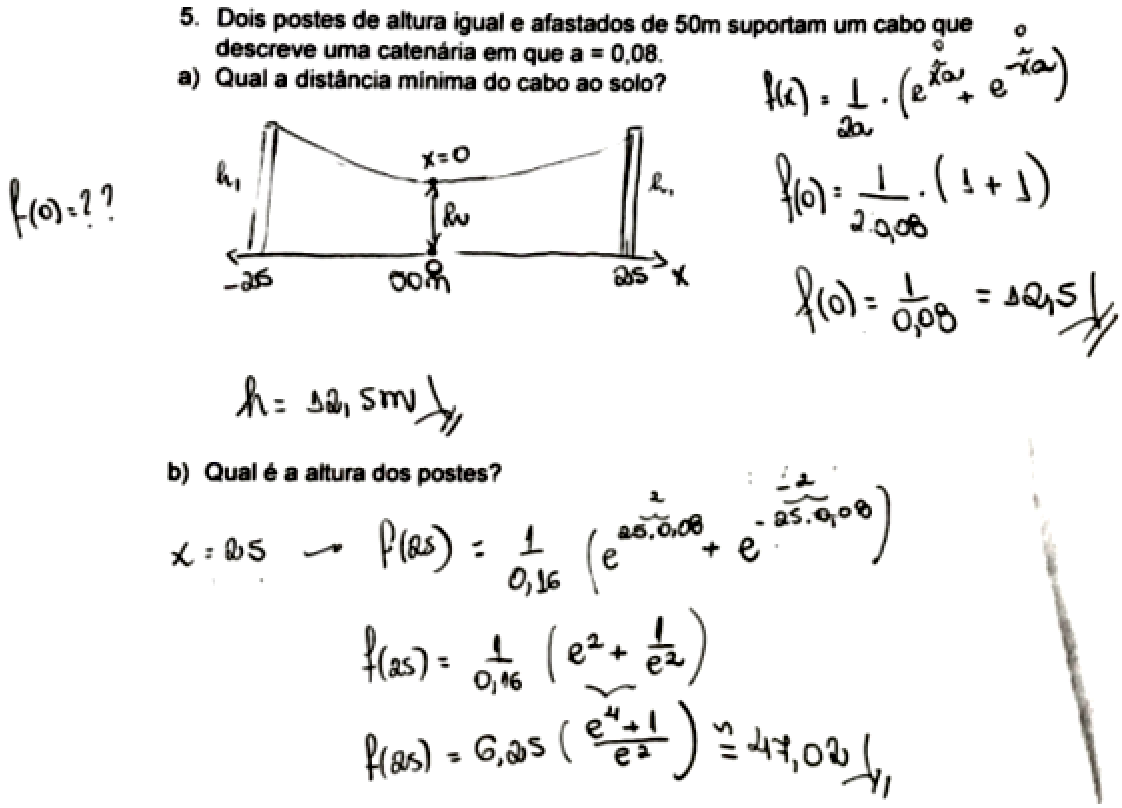
$\cancel{2} \ln 5 = \cancel{2}x$

$x = \ln 5$

Fonte: Produzido pelo aluno N.C.T.A.

5º Exercício resolvido pelo aluno V.L., faz uso da função cartesiana da catenária, com o auxílio do desenho para melhor visualizar o exercício. O aluno, no item “a” substitui o valor de x por 0, para com isso definir o valor de $f(0)$. No item “b”, para encontrar o ponto máximo x é substituido por 25, determinando assim, o valor de $f(25)$ (Figura 34).

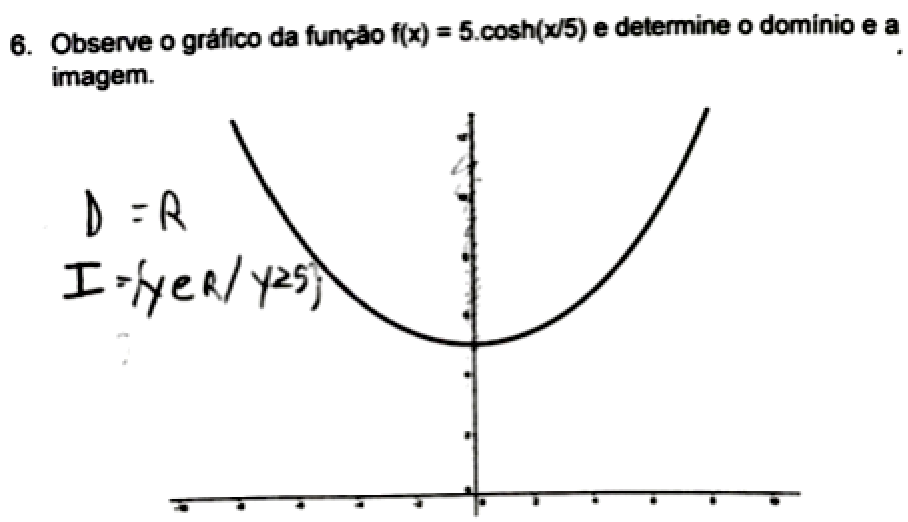
Figura 34 – Exercício 5



Fonte: Produzido pelo aluno V.L.

6º Exercício resolvido pelo aluno L.F.A.A, domínio e imagem encontrados a partir da observação do gráfico (Figura 35).

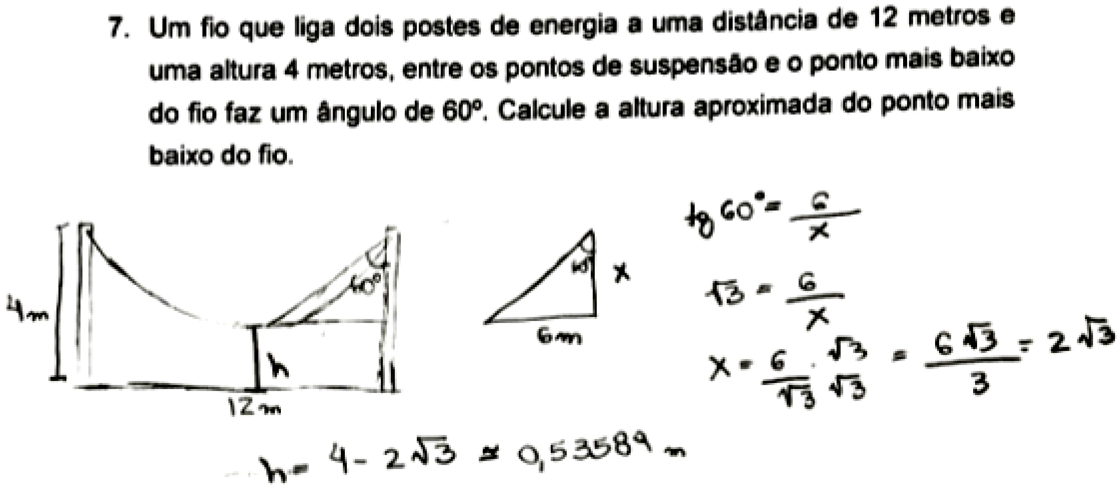
Figura 35 – Exercício 6



Fonte: Produzido pelo aluno L.F.A.A.

7º Exercício resolvido pelo aluno B.P.S.. O conteúdo desta questão faz referência à trigonometria. Sendo assim, o aluno observa o triângulo retângulo presente na descrição do enunciado e resolve fazendo uso da tangente de 60°, para em seguida subtrair da altura, chegando assim no ponto mais baixo do fio (Figura 36).

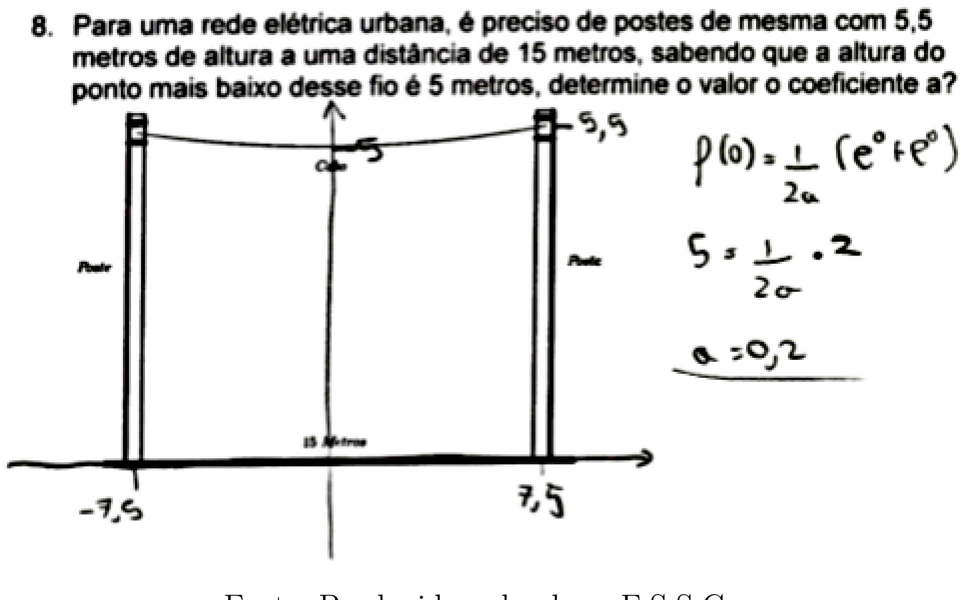
Figura 36 – Exercício 7



Fonte: Produzido pelo aluno B.P.S.

8º Exercício resolvido pelo aluno F.S.S.C, usa a forma cartesiana, para encontrar o valor do coeficiente "*a*" em relação ao ponto mais baixo. Logo, x valendo 0 (Figura 37).

Figura 37 – Exercício 8



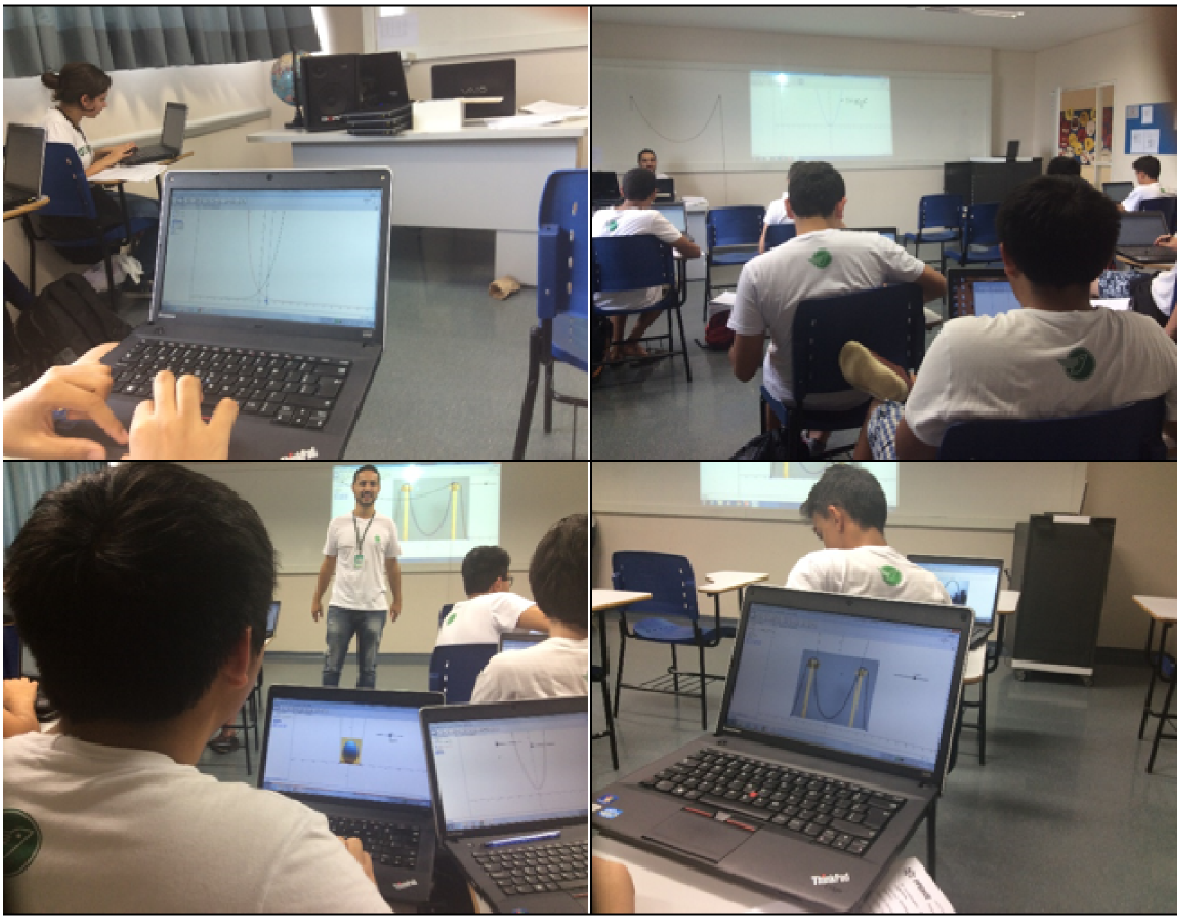
Fonte: Produzido pelo aluno F.S.S.C.

Os exercícios apresentados até aqui são apenas uma amostragem do todo. De modo geral, a maioria dos alunos apresentou resoluções acertivas, com um raciocínio claro e consistente, mostrando que mesmo com um contato breve sobre o assunto, tiveram condições de solucionar e desenvolver o que era proposto.

No primeiro dia a professora responsável pela turma participou do encontro (Figura 38) e fez um registro sobre o conteúdo abordado.

> "Achei ótimo você começar contanto um pouco da história no início. O vídeo que passou ilustrou bem e deixou bem claro o que é a catenária, que é uma curva formada por uma corrente suspensa, presa em dois pontos e sob influência exclusiva da gravidade. Foi interessante mostrar a diferença entre a catenária e a parábola, porque os alunos sempre ouvem falar de parábola, mas a catenária, nunca tinham ouvido falar. Então, foi bom para eles conhecerem que ao construir uma ponte pênsil, ou observar os cabos de alta tensão, entre outros exemplos, podemos observar uma curva catenária. A lista de exercícios preparada para fazerem em sala, foi bem legal. Eles conseguiram desenvolver e entender um pouco mais de Matemática. Foi ótimo porque mesclou conteúdos já vistos com novos, mostrando que a Matemática está toda interligada e que está mais presente em nossas vidas do que imaginávamos."(Fonte: Arquivo do Pesquisador)

Figura 38 – Aula 2



Fonte: Arquivo do autor

No segundo encontro, a prioridade era identificar, justificar e argumentar algumas características da curva catenária. Para isso foi utilizado o *software* Geogebra que auxiliou a visualização dos alunos. Foram realizadas quatro construções no *software*, com objetivos diferentes. Em um dos procedimentos, os alunos receberam orientações com o passo a passo das construções. Em seguida, fizeram um registro com o questionamento: "o que observei" para que, o olhar do aluno fosse destacado na aplicação da pesquisa.

Na primeira construção, os alunos representaram de forma gráfica as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$, onde depois, com recursos geométricos, somaram as duas medidas e dividiram por dois. Animando o ponto e habilitando o rastro, observou-se a curva catenária sendo desenhada.

Podemos destacar algumas observações feitas pelos alunos:

> "achei muito interessante isso de somar exponenciais, porque são duas funções iguais, a única diferença é "o lado". É realmente muita coincidência a média dessas funções resultar a catenária" [F. S. S. C]
>
> "através dessa 1º construção ficou muito mais fácil de entender os passos para construção da curva" [W. R]
>
> "foi possível observar que, ao somar as duas funções exponenciais $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$, dividido por 2, formou-se uma função parecida com uma parábola, mas, que na verdade é a catenária" [M. H. A.]
>
> "a catenária por exponenciais obtida pela soma das exponenciais dividida por 2 é semelhante à formada pelo cosh." [V. L]. (Fonte: Arquivo do autor)

A segunda construção buscou aprofundar mais a compreensão da hipérbole, onde a catenária se dá pela notação da função cosseno hiperbólico. Novamente de forma visual e dinâmica os educandos puderam verificar o que acontecia com a função, registrando as observações:

> "mesmo meu conhecimento sendo breve, achei que me ajudou bastante a observar as propriedades do cosseno hiperbólico e entender um pouco mais" [L. F. A. A]
>
> "pode-se observar a formação da catenária em função movimento do ponto "a" no plano cartesiano, semelhante a movimentação dos pontos no círculo trigonométrico" [V. L]
>
> "não sabia o que era senh e cosh, agora tenho uma ideia. Achei muito interessante e mágico esse método de achar catenária." [F. S. S. C] (Fonte: Produzido pelo autor)

Com a terceira construção, esperava-se que os alunos pudessem reconhecer diferentes curvas como catenária, através da escrita cartesiana, fazendo uso do coeficiente "a". Alterando seu valor com um controle deslizante, os alunos conseguiram observar e fazer diferentes curvas catenárias, para comprovar sua veracidade. Alguns buscaram imagens de catenárias na internet, colaram no *software* e, com o controle deslizante, foi possível determinar a função que representaria aquela curva. Observações dos alunos:

> “Isso explica bastante, que várias curvas diferentes são catenárias ” [F. S. S. C]
>
> “me mostrou com a catenária pode ser utilizada, existe a catenária até em organismos orgânicos como o ovo” [L.F.A.A]
>
> “quanto menor “a”, mais aberto fica a catenária. Quanto maior, mais fechada. Caso a < 0, a função “inverte”, obtendo uma catenária “para baixo” [M. H. A.]
>
> “é realmente mais fácil de observar a formação e movimentação da catenária através da mudança dos valores de “a”. ” [V. L.]. (Fonte: Arquivo do autor)

A principal pretensão da quarta construção é confrontar e comparar a curva catenária com a parábola, conduzindo os alunos a terem condições de diferenciá-las de maneira clara, aproveitando os recursos visuais do $software$. As observações feitas pelos alunos foram:

> “a catenária ela tem uma curvinha mais suave que a parábola” [F. S. S. C]
>
> “conseguir ver a real diferença entre a catenária e a parábola, mesmo já tendo a diferença física, não via a diferença entre as imagens” [L. F. A. A]
>
> “as diferenças entre a curva catenária e a parábola foram evidenciadas nessa construção. A catenária aparenta ser mais orgânica, sofrendo ação da gravidade, enquanto a parábola aparenta ser sintética, com ênfase no vértice” [W. R]
>
> “por mais próxima que estejam, a catenária e a parábola nunca formam a mesma curva” [R. S. E. S.]
>
> “a curva da catenária é “mais aberta”, não é “fixa” em um ponto como a parábola” [C. L. V. C.]
>
> “elas têm alguns pontos em comum, mas possuem estruturas diferentes. A catenária tem uma característica de peso natural, tem uma curva formada naturalmente (mais redonda). Já a parábola, é mais pontuda, possui um vértice e que ela, na prática, seria uma catenária com um peso (não permite a curva natural) “ [M. H. A.] (Arquivo do autor)

Esse foi o encontro de maior progresso e aproximação dos alunos com a curva catenária. Os comentários em aula eram de entusiasmo e descobertas, evidenciando que os resultados com as construções alcançados. Ao ler as observações dos alunos verifica-se que existe uma base teórica e visual se entrelaçando, criando um ambiente de aprendizagem real e apropriado.

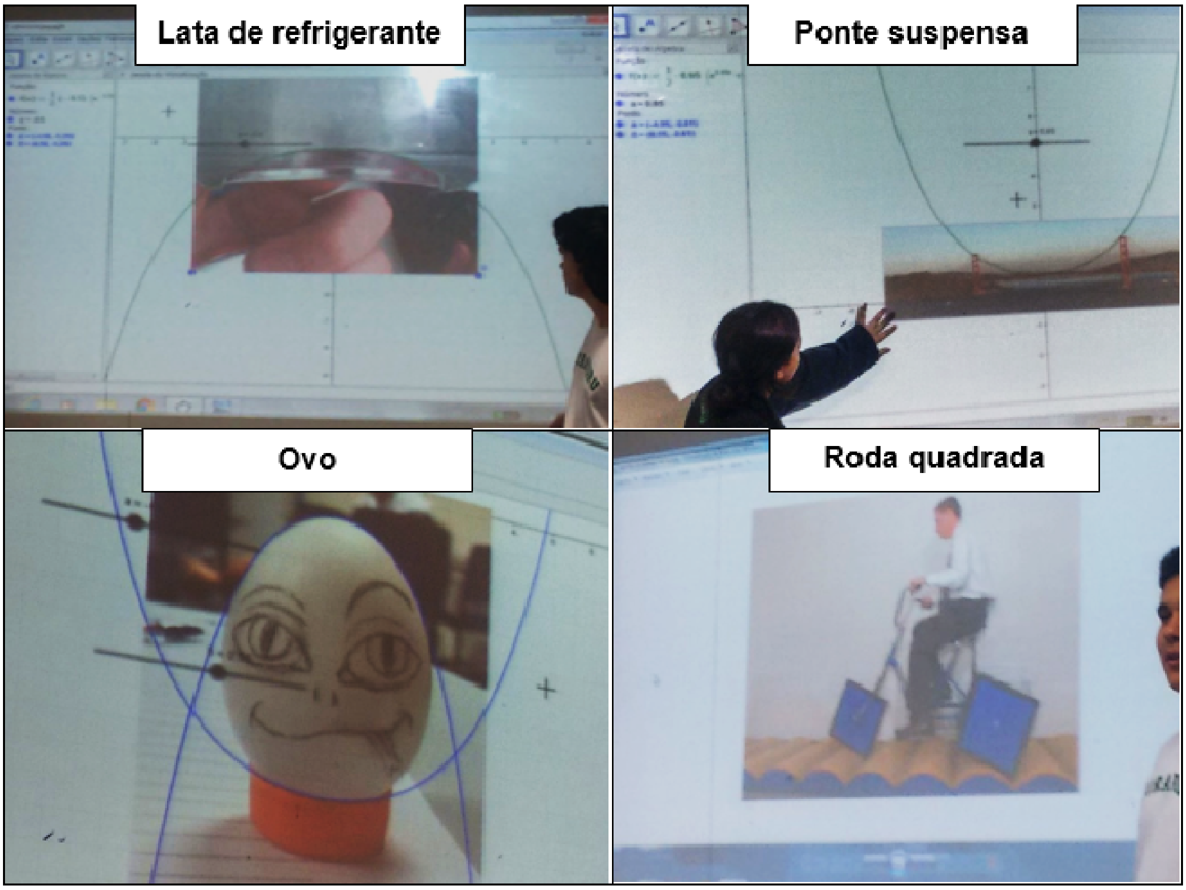
A professora assessora de Matemática no colégio participou do segundo encontro, relatando seu ponto de vista sobre o trabalho, dizendo:

> “A oficina realizada pelo Professor Marlon Mendes aos alunos do Ensino Médio, utilizando como objeto de estudo/reflexão a curva Catenária foi uma experiência bem-sucedida que demonstra ser possível trilhar diferentes caminhos na perspectiva da Educação Matemática, rompendo

> com alguns paradigmas que têm dificultado o progresso da educação como um todo e especialmente o ensino da matemática. As imagens para a representação da inteligência como a noção de espectro de competências, onde o equilíbrio e a totalidade dos componentes importam mais que hipertrofias localizadas, e para representação do conhecimento, como rede de significações com seus feixes de relações, causais ou não causais em permanente transformação substituindo a ideia de cadeia, representam os novos paradigmas que podem contribuir para uma melhor formação escolar. Nesse sentido, quando o Professor Marlon se propõe a apresentar o estudo de uma curva, a Catenária, que não consta na lista de conteúdo dos livros escolares daquele segmento, mas que traz uma série de referências e relações como História da Matemática, aplicações diversas na engenharia, arte, tecnologia e também mobiliza o conhecimento que o estudante já possui sobre parábola, trigonometria, função e representações geométricas, certamente esse trabalho está muito mais em harmonia com as novas concepções de epistemologia e didática. Corroborando os fundamentos acima, a oficina criou um ambiente de reflexão repleto de interesse, atenção, trocas, descobertas, surpresas e satisfação. Vivenciamos nessa oportunidade o que Paulo Freire conceitua como práxis e a experiência de reconhecer que a teoria dos campos conceituais de Gèrard Vergnaud fundamenta essa prática." (Fonte: Arquivo do autor)

A aplicação do trabalho não poderia acabar antes de deixar que os alunos protagonizassem seu próprio aprendizado. Depois da fundamentação teórica, da argumentação dinâmica com o *software* separados em grupos e temas, pesquisaram e apresentaram para os demais grupos os resultados de suas pesquisas. É importante ressaltar que cada grupo, fazendo uso do *software* Geogebra, definiu a função cartesiana da aplicação da catenária que pesquisou.

Figura 39 – Aula 3



Fonte: Arquivo do autor

O aluno F.S.S.C afirma: "muito bom saber a importância dessa função no cotidiano e nas construções", juntamente com o aluno P.E.P.B que diz: "a catenária é muito útil para obras, pois distribui todo peso em todos os pontos da curva". Essas afirmativas levam a crer que os alunos começam a dar importância àquilo que concretiza a catenária, que seriam suas aplicações. "Um dos pontos mais interessantes foi descobrir que algo que eu não fazia ideia do que era está presente em praticamente todos os lugares" diz R.S.E.S, garantindo assim, que ao fazer conexões com o cotidiano, a curva catenária assume um papel de relevância, como se aquela teoria saísse do papel e criasse vida.

Alguns alunos descreveram sobre o que vivenciaram nas apresentações:

> "aprendi sobre a curva catenária, que se refletirmos no cotidiano, vemos que ela está praticamente em todo lugar, desde uma corrente no estacionamento, até uma rede elétrica inteira, inclusive, podemos encontra-las até em certas pontes, nas chamadas "pontes suspensas" [R.A.A.D]
>
> "além disso, gostei muito de ver como a catenária está presente no nosso cotidiano, que não é apenas um desenho que só existe no papel. Ver a função dela na ponte, que as mantém firmes por distribuir o peso, até o ovo, o qual por possuir duas catenárias, uma em cima e outra embaixo nos impede de quebrá-la" [N.C.T.A.]

> “Ao pesquisar sobre a catenária e as pontes suspensas, percebi que não há muito conteúdo disponível sobre o assunto” [B.P.S]
>
> “a presença da catenária no ovo e o seu uso para a criação de uma roda quadrada foram os exemplos mais interessantes. “ [W.R] (Fonte: Arquivo do autor)

Para finalizar, alguns comentários feitos pelos alunos, na pesquisa de aplicação da catenária.

> “A história ajudou um pouco na compreensão sobre a curva, entretanto, com a ajuda do Geogebra, me tirou todas as dúvidas. A catenária é algo do nosso cotidiano, e apesar de que, para compreendê-la por completo precisa-se saber sobre o cosseno hiperbólico, achei a curva uma coisa tão útil, que vale muito a pena ser trazido esse conhecimento para o Ensino Médio. Para isso, uma ideia seria trazer a curva para os alunos, por meio da soma das funções exponenciais.” [C. L. V. C.]
>
> “A catenária poderia sim ser compreendida por alunos do Ensino Médio até por que serviria como complemento do estudo de trigonometria. Além de compreender como funciona e quais são as aplicações da catenária, eu aprendi um pouco mais sobre o *software* Geogebra.” [R. S. E. S.]
>
> “Eu achei a história da catenária muito interessante, como a catenária é muito usada em construções, ela em minha opinião, é altamente relevante e tem grande importância no cotidiano e por isso penso que deveria ser ensinada no Ensino Médio. ” [V. G. R. R.]
>
> “Identificar as aplicações e também ter conhecimento necessário para diferenciar a curva catenária à parábola e forma simplificada é algo amplamente aplicável ao conteúdo do Ensino Médio. “ [V. L.]
>
> “Na minha opinião, a catenária não demonstra algo impossível, poderia, sim, ser ensinada no Ensino Médio. É um tema muito interessante e que podia ser mais explorado nas escolas.Gostei muito do curso, que mostrou ter um ótimo fundamento. “ [R. A. A. D]
>
> “Achei interessante e muito legal começar a ver a catenária a partir da história, ver que Galileu tinha confundido ela com uma parábola, e depois, aos poucos, ir vendo a diferença entre as duas, sendo ela mais perceptível para mim quando usamos o Geogebra. ” [N. C. T. A.]
>
> “Essas aulas me mostram que a catenária está muito presente no nosso cotidiano e poucos falam sobre ela. Os exercícios exigiam conhecimentos que alunos do Ensino Médio já possuem, além de poucos conhecimentos a mais para aplicar a catenária.Ao pesquisar sobre a catenária e as pontes suspensas, percebi que não há muito conteúdo disponível sobre o assunto. Além disso, muitos confundem catenária com a parábola, e ter este conhecimento pode ser muito viável. As aulas foram muito legais, didáticas, empolgantes, mas isso dependeu dos materiais utilizados, o uso do *software*, o método de ensino, etc. Sem esses recursos, talvez esse aprendizado não teria sido tão interessante. Ainda assim, acredito que a catenária seja um aprendizado muito valioso, aplicável para o Ensino Médio, a fim de trazer conhecimentos não apenas físicos ou matemáticos, mas olhar o mundo à nossa volta e entender o funcionamento de mais coisas do cotidiano. ” [B. P. S.] (Fonte: Arquivo do autor)

Essa foi a realização da pesquisa, planejada e desenvolvida pensando no melhor aproveitamento dos alunos, pois são eles a prioridade de tudo que se faz na Educação.

Observa-se que os resultados foram atingidos e que, a curva catenária foi devidamente apresentada para um pequeno grupo, mas com pretensões otimistas e estruturadas para o desenvolvimento desse trabalho com um grupo maior de alunos.

4.3 ANÁLISE QUANTITATIVA DOS RESULTADOS

No último encontro presencial, foi feito um trabalho para levantamento de dados, com base nos assuntos desenvolvidos durante as aulas, no qual os alunos puderam avaliar e pontuar itens relevantes para observação dos resultados. A Figura 40 mostra o questionário que foi entregue os alunos.

Figura 40 – Questionário

Pesquisa de Aplicação da catenária:

Classificando de 1 a 5

1 Péssimo	2 Ruim	3 Regular	4 Bom	5 Ótimo

História da catenária:	1	2	3	4	5
Lista de exercícios sobre a catenária:	1	2	3	4	5
Construções com software de geometria dinâmica:	1	2	3	4	5
Aplicações da catenária no cotidiano:	1	2	3	4	5
Relevância da curva catenária:	1	2	3	4	5
Compreensão do cosseno hiperbólico:	1	2	3	4	5
Vídeos sobre a catenária:	1	2	3	4	5
Desenvolvimento e aplicação da pesquisa	1	2	3	4	5
Seu aproveitamento	1	2	3	4	5

Você acha que a curva catenária poderia ser compreendida por allunos do ensino médio.

SIM	NAO

Fonte: Produzido pelo autor

Os resultados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Tabulação dos resultados

	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Ótimo
História da catenária	0	0	8,3%	49,8%	41,5%
Lista de exercícios	0	0	0	66,6%	33,3%
Construção com *software* de geometria dinâmica	0	0	0	33,3%	66,6%
Aplicação da catenária	0	0	0	33,3%	66,6%
Relevância da curva	0	0	8,3%	58,1%	33,3%
Compreensão do cosseno hiperbólico	0	8,3%	24,9%	58,1%	8,3%
Vídeos sobre a catenária	0	0	8,3%	58,1%	33,3%
Desenvolvimento da pesquisa	0	0	0	58,1%	49,8
Aproveitamento	0	0	8,3%	66,6%	24,9%

De modo geral, pode-se observar que os alunos tiveram uma avaliação positiva do projeto, respondendo na maioria dos itens Bom e Ótimo, representando assim, um alto nível de satisfação com a metodologia usada na pesquisa. É importante destacar as construções com *software* de geometria dinâmica, uma aula com um ótimo aproveitamento, muito esclarecedora e construtiva.

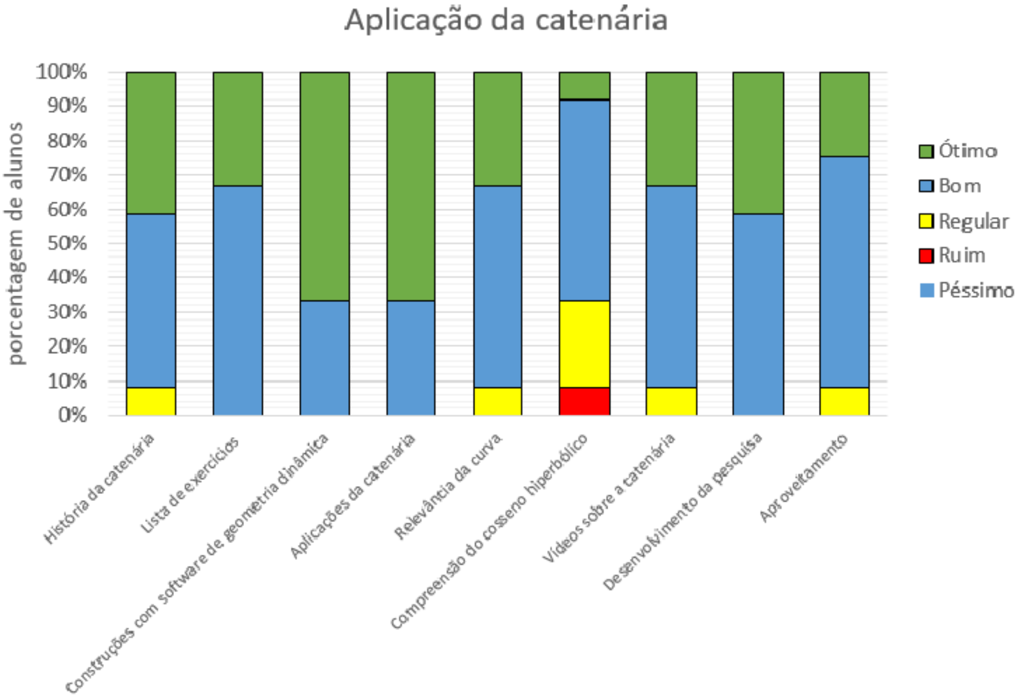
Outro dado positivo na pesquisa foi a aplicação da curva catenária, no qual a aula foi construída, de maneira colaborativa e realizada pelos alunos, observando que o protagonismo é um excelente recurso para o aproveitamento e apropriação dos conteúdos trabalhados.

A pergunta com o menor índice de aproveitamento faz referência à compreensão do cosseno hiperbólico, um assunto novo, que os alunos tiveram o primeiro contato durante as aulas de aplicação da pesquisa. Ainda assim tivemos 66,4% alunos que compreenderam de forma ótima/boa e por se tratar de algo inédito os resultados ainda se apresentam satisfatórios.

Observando a pesquisa, percebe-se que seu desenvolvimento foi bem sucedido e a maioria dos alunos consideram que tiveram um aproveitamento Bom ou Ótimo sobre todo os temas abordados, isso faz com que se tivesse um olhar otimista para o ensino e desenvolvimento da curva catenária.

Na Figura 41 os resultados do questionário, visualmente mostra que a maioria dos alunos respondeu de forma positiva aos itens. Sendo assim, os objetivos propostos no plano de aula foram atingidos. Importante destacar o interesse e comprometimento do grupo com a pesquisa, que foi de extrema importância para alcançar esse nível de satisfação dos alunos.

Figura 41 – Gráfico dos resultados



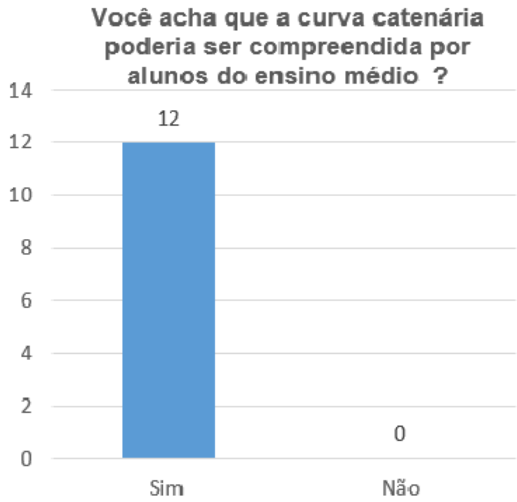
Fonte: Produzido pelo autor

Analisando os dados, principalmente o gráfico, chama a atenção a positividade dos resultados, levando em consideração que se trata de um grupo novo, selecionado apenas para participar da pesquisa. Além disso, um assunto novo e complexo ter conseguido resultados tão expressivos, com contribuições intelectuais e ampliando a visão da matemática, descobrindo e ressignificando o ensino/aprendizagem de funções e trigonometria.

O processo de aplicação da pesquisa foi uma oportunidade de aprimorar a prática, que o dia-a-dia proporcionou para o aperfeiçoamento da metodologia, que por opção, foi aplicada seguindo um roteiro de parte histórica e teórica, que aproxima mais da vivência escolar do grupo de alunos, para em seguida, no outro encontro, ser aplicada e discutida através do *software* de geometria dinâmica, podendo ser melhor compreendida, pelo fato dos alunos já estarem em processo, logo os resultados positivos da aplicação se consolidaram por esse processo em particular.

A última pergunta do questionário, requisita a opinião dos alunos sobre a compreensão ou não da curva catenária no Ensino Médio, pensando na proposta inicial da aplicação que seria a de ampliar o olhar para a Matemática e aprofundar conceitos de funções e trigonometria, juntamente com aplicações no cotidiano, para todo um grupo, não restrito apenas aos alunos selecionados. A aplicação foi um ponto de partida para analisar possíveis caminhos didáticos e metodológicos para tornar acessível, no Ensino Básico, a curva catenária.

Figura 42 – Gráfico: Aplicação da catenária para o Ensino Médio



Fonte: Produzido pelo autor

Por unanimidade, o grupo entende que a curva catenária poderia ser entendida por todos os alunos do Ensino Médio (Figura 42). O mais relevante de tudo é que esses são os olhares dos próprios alunos em processo de aprendizagem, percebendo as contribuições intelectuais que a curva catenária pode oferecer para os estudantes do Ensino Médio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização do estudo da catenária teve como objetivo sua implementação no Ensino Médio, possibilitando aos alunos o reconhecimento matemático da curva, mostrando diversas possibilidades de aplicações presentes no dia-a-dia. Tendo em vista que o estudo da catenária se interliga com a função exponencial, denotada como função cosseno hiperbólico, cujas essas representações gráficas geram a curva catenária, que foi o objeto de pesquisa deste trabalho.

Levando a abordagem para o ensino da Matemática, de forma com que os alunos pudessem tratar do tema de forma tranquila e motivadora, fazendo uso dos pré-requisitos como função exponencial e trigonometria circular, transpondo esses conhecimentos e aplicando-os como caráter investigativo. Assim, foi possível desenvolver o conhecimento e aplicações da curva catenária de maneira formativa, sendo o desenvolvimento intelectual a prioridade.

Foi essencial que a parte teórica fosse trabalhada antes da parte gráfica, definindo a curva catenária a partir da função exponencial. Dessa forma, migrar para a escrita do cosseno hiperbólico e a representação gráfica foi mais tranquila e segura para esse grupo de alunos.

Assim, a prática em sala de aula de aplicação do trabalho transitou por temas que construiu de modo significativo a aprendizagem, tais como: contexto histórico, fundamentação teórica, lista de exercícios, analise gráfica com software de geometria dinâmica e aplicações. Tal metodologia obteve resultados satisfatórios ressaltados pelos alunos participantes, garantindo e evidenciando as contribuições fornecidas com a abordagem do tema.

Os recursos tecnológicos assumem um papel de grande importância no estudo da catenária, por meio da representação gráfica da função exponencial e do cosseno hiperbólico, os alunos podem gerar a curva e manipular seus coeficientes, a teoria criar forma, construindo com os educandos uma melhor compreensão do que é discutido algebricamente.

Aos docentes interessados em desenvolver este assunto com seus discentes, o trabalho desenvolve teoricamente os temas antes da aplicação para que o professor possa conhecer melhor a temática. Pensando na aplicação, a aula foi dada de forma visual com slides, exercícios resolvidos e passo a passo das construções no $software$. Tudo isso para tornar mais prático e efetivo o trabalho do professor na sala de aula.

Aprofundando o estudo das funções no Ensino Médio, percebe-se a motivação nos alunos e professores ao olhar as funções de uma forma diferente do que se vem trabalhando, principalmente porque as funções que resultam na curva catenária, são aplicações de funções exponenciais, ampliando o olhar em relação a aplicações que aparecem com frequência no cotidiano representando uma função hiperbólica.

Após a aplicação da pesquisa, o colégio criou uma disciplina eletiva para os alunos do Ensino Médio, que tem por objetivo aprofundar os conhecimentos geometricos, fazendo uso do $software$ Geogebra.

Desta forma, não se encerra a aplicação nem o estudo de funções, pois há diversas formas de se estudar as funções hiperbólicas e maneiras de se aplicar funções na Matemática. Entrego este trabalho com a expectativa de continuidade e progressos na área destinada ao aprofundamento matemático no Ensino Básico.

REFERÊNCIAS

ABAR, N. S. C. C. A. A. P. *Geobegra: na produção do conhecimento matemático. São Paulo: Iglu.* [S.l.], 2014.

ALHADAS, M. de C. *Funções hiperbólicas no ensino médio. Dissertação, Orietador: Prof. Rigoberto Sanabria Castro. UENF.* [S.l.], 2013.

BESERRA, M. do Bom Conselho da S. *As funções hiperbólicas e suas aplicações. Dissertação, Orietador: Prof. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro. UFPB/CCEN.* [S.l.], 2015.

BOYER, U. C. M. C. B. *História da matemática. Editora Bluche.* [S.l.], 2012.

BRASIL. *, Ministério da educação, Secretária da educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* [S.l.], 1999.

COELHO, M. J. S. M. I. *Tecnologia no ensino - Aprendizagem da Geometria. Fundão (Portugal). Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/MIC.pdf>.* [S.l.], 2000.

COELHO, R. A. *A história dos problemas da tautócrona e da braquisócrona. Orietador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira. UNESP - Rio Claro.* [S.l.], 2008.

CURVEBANK. *http://curvebank.calstatela.edu/catenary/catenary.htm (Acesso em 11 de Junnho de 2016).* [S.l.], 2016.

DELGADO, J. *Geometria analitíca. Rio de Janeiro: SBM.* [S.l.], 2013.

EVES, H. *Introdução á história da matemática. Editora da Unicamp.* [S.l.], 2004.

FARIA, S. R. *A catenária. Orietador: Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado. UFMG.* [S.l.], 2011.

FIDAZA, J. G. S. *Funções hiperbólicas: História, conceito e aplicação. Dissertação, Orietador: Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos. UFA.* [S.l.], 2013.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia. São Paulo: Paz e Terra.* [S.l.], 1996.

GARBI, G. G. *A Rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. Editora Livraria da Fisica.* [S.l.], 2006.

GEOGEBRA. *http://www.colegiouirapuru.com.br/site/index.php/o-colegio/sobre-nos (Acesso em 26 de Dezembro de 2016).* [S.l.], 2016.

MAOR, E. *e: a história de um número. Editora Record.* [S.l.], 2004.

NUNES, F. *http://explicacoesdematematicaonline.com/arquivo/8887 (Acesso em 11 de Junnho de 2016).* [S.l.], 2016.

PAULO, S. G. de O. *Da catenária a trigonometria hiperbólica. Orietador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá. UEPA.* [S.l.], 2014.

SACRISTÁN, J. G. *O currículo: uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: ArtMed.* [S.l.], 2000.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica. V.1. Tradução SeijiHariki; Reviso técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alescastro Pregnolatto. São Paulo: Pearson MakronBooks.* [S.l.], 1987.

TALAVERA, L. M. B. *Parábola e catenária: história e aplicações. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.* [S.l.], 2008.

UIRAPURU, S. C. *http://www.colegiouirapuru.com.br/site/index.php/o-colegio/sobre-nos (Acesso em 30 de Novembro de 2016).* [S.l.], 2016.

Anexos

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, ____, portadora do RG nº _________________________, responsável pela instituição ___________________________________ aceito fazer parte, como instituição voluntária, do desenvolvimento da pesquisa, cujo título provisório "O ensino da curva catenária" Esta pesquisa é parte integrante para obtenção do título de Mestre, orientado pela Professora Doutora Magda da Silva Peixoto, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos.

Assim ando este termo de consentimento, estou ciente de que, o pesquisador Marlon Freitas Mendes irá desenvolver sua pesquisa em funções hiperbólicas com os alunos de diferentes turmas e apresentará o produto final aos professores desta instituição. Tenho clareza que professores e estudantes envolvidos nesta pesquisa serão mantidos anônimos. Também sei que os resultados obtidos no âmbito desta instituição serão utilizados unicamente para fins de divulgação científica, preservando o anonimato já assinalado acima.

Assinatura: _____________________________________

Local e data.

ANEXO B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: “O ensino da curva catenária”, desenvolvido por Marlon Freitas Mendes

Fui informado (a) que:

a) A pesquisa é orientada pela Professora Doutora Magda da Silva Peixoto, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário através do e-mail: magdapeixoto@yahoo.com.br;
b) O uso das informações por mim fornecidas está submetido às normas éticas destinadas à pesquisa envolvendo seres humanos;
c) A minha colaboração se fará de forma anônima, por meio das respostas dadas nos instrumentos de pesquisa elaborados pesquisador, a ser respondido a partir da assinatura desta autorização;
d) O acesso e a análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pela sua orientadora;
e) Posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem qualquer prejuízo, sem sofrer quaisquer sansões ou constrangimento.

Por fim, fui esclarecido (a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é propor aos professores de Matemática uma sequência didática que favoreça a aprendizagem da função do cosseno hiperbólico e suas aplicações pelo mundo, fazendo uma abordagem desde sua primeira aparição histórica até o seu uso nos dias de hoje.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada desde Termo de Consentimento Livre Esclarecido, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP)

Sorocaba, ____ de outubro de 2016

Assinatura do (a) participante: ____

Assinatura do pesquisador: ____

Assinatura do(a) testemunha: _______________________________________