



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



# Imersões de variedades de Dold e de Wall em espaços euclidianos

**Autor:** *Renato Monteiro de Moraes*

**Orientador:** *Pedro Luiz Queiroz Pergher*

São Carlos, 4 de setembro de 2017.



# Imersões de variedades de Dold e de Wall em espaços euclidianos

**Autor:** *Renato Monteiro de Moraes*

**Orientador:** *Pedro Luiz Queiroz Pergher*

**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

São Carlos, 4 de setembro de 2017.

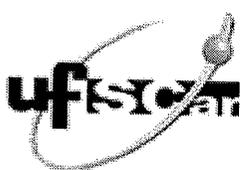
---

Nome do Autor (aluno)

---

Nome do Orientador (orientador)



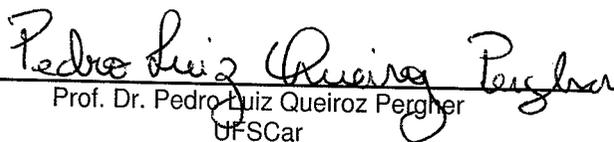


---

**Folha de Aprovação**

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Renato Monteiro de Moraes, realizada em 10/03/2017:

  
Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher  
UFSCar

  
Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos  
UFSCar

  
Prof. Dra. Denise de Mattos  
USP



# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador Pedro Luiz Queiroz Pergher, pela confiança, paciência e disposição, como orientador e também como professor, de suma importância em minha formação acadêmica. Agradeço aos meus familiares pelo apoio durante toda a minha formação e agradeço aos meus colegas de trabalho, Wagner, Dalton, Karina, Bárbara, Tiago, Flávia, Renan, Lucas, entre outros, pelo apoio durante todo o mestrado.



# Resumo

Dada uma variedade  $M^n$  fechada, suave e de dimensão  $n$ , resolver o “problema da imersão” para  $M^n$  significa encontrar o número  $i(M^n)$ , tal que  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{i(M^n)}$  e não imerge em  $\mathbb{R}^{i(M^n)-1}$ . Sabemos, devido a um refinamento do famoso Teorema da imersão de Whitney, feito por Ralph Cohen, que dada uma tal  $M^n$  arbitrária, esta imerge em  $\mathbb{R}^p$  com  $p = 2n - \alpha(n)$ , em que  $\alpha(n)$  é o número de potências de 2 distintas, que compõe a expansão binária de  $n$ . É também conhecido que qualquer tal  $M^n$  não imerge em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, de maneira geral temos  $n + 1 \leq i(M^n) \leq 2n - \alpha(n)$ ; mais ainda, esta estimativa não pode ser melhorada com tal grau de generalidade.

Neste trabalho, daremos uma contribuição (original) nesta direção, computando  $i(M^n)$  para algumas específicas variedades de Dold e de Wall (vide definição nas páginas 31 e 45). Tal computação será efetuada calculando-se a inversa da classe tangencial de tais variedades e juntando tais cálculos com o Teorema de Cohen (página 238 em [[7]]).



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xi</b>
<b>1 Fibrados</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação para a definição de fibrado . . . . .	1
1.2 O grupo de um fibrado . . . . .	2
1.3 Ação de grupos em conjuntos . . . . .	3
1.4 Decodificação e reconstrução de um fibrado . . . . .	6
1.5 Pull back . . . . .	10
1.6 Fibrado Restrição . . . . .	11
1.7 Fibrados Vetoriais . . . . .	12
1.8 Soma de Whitney . . . . .	13
<b>2 Variedades Diferenciáveis</b>	<b>15</b>
2.1 Os problemas da imersão e do mergulho . . . . .	18
<b>3 Cohomologia</b>	<b>21</b>
3.1 Homomorfismo induzido em homologia . . . . .	21
3.2 Produto Cup . . . . .	22
3.3 Produto Cross . . . . .	24
<b>4 Construções importantes</b>	<b>27</b>
4.1 Os espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	27
4.2 O fibrado-linha (ou “fibrado de Hopf”) associado a uma involução suave sem pontos fixos . . . . .	28
4.3 As variedades de Dold $P(m, n)$ . . . . .	29
4.4 O Fibrado Universal $\nu^n \rightarrow BO(n)$ . . . . .	30
<b>5 Classes Características</b>	<b>35</b>
5.1 Classes tangenciais de algumas variedades . . . . .	41
<b>6 Exemplos de não imersão</b>	<b>45</b>
6.1 Alguns exemplos de não imersão . . . . .	48

Referências Bibliográficas	51
Referências Bibliográficas	51

# Introdução

No capítulo 1, veremos o conceito geral de fibrado, uma noção de equivalência entre fibrados e um teorema, que basicamente nos diz quais ingredientes são essenciais para definir um fibrado a menos de equivalência. Posteriormente veremos algumas construções úteis, como o conceito de pullback e fibrado restrição. Então nos restringiremos aos fibrados vetoriais, terminando o capítulo comentando sobre a soma de Whitney de dois fibrados vetoriais.

O capítulo 2 é dedicado a dar alguns conceitos básicos em relação a variedades diferenciáveis, algumas construções como soma conexa e cartesiano de variedades, construções de algumas variedades quocientes, que serão usadas posteriormente para definirmos as variedades de Wall e de Dold. E por fim, alguns comentários sobre o problema da classificação de variedades fechadas suaves e, em seguida, apresentamos o famoso problema da imersão.

No capítulo 3, daremos uma noção básica de cohomologia, produto cup, produto cross, veremos a construção do anel de cohomologia  $H^*(X, R)$ , de um espaço topológico  $X$  com coeficientes em um anel  $R$ , e em seguida, comentamos algumas consequências de se trabalhar com  $R = \mathbb{Z}_2$ , feito isso, suporemos no restante do trabalho que  $R = \mathbb{Z}_2$ , a menos de menção contrária.

No capítulo 4, faremos a construção de alguns objetos importantes deste trabalho, como as variedades de Dold, o fibrado linha associado a uma involução suave e sem pontos fixos, o fibrado universal sobre o espaço  $BO(n)$ , que é de suma importância no modo como vamos definir as classes de Stiefel-Whitney (não faremos de maneira axiomática), e por fim comentaremos sobre o teorema da classificação de fibrados vetoriais sobre um espaço paracompacto.

Finalmente, no capítulo 5, introduzimos o principal objeto deste trabalho, as classes de Stiefel-Whitney, em seguida faremos alguns comentários sobre seu cômputo, em alguns exemplos conhecidos, que em geral é um problema difícil e foge do escopo desta monografia.

Por fim, no capítulo 6 veremos o resultado que relaciona a classe de Stiefel-Whitney do fibrado normal a uma variedade fechada e suave, com sua não imersão em um determinado espaço euclidiano, em seguida mostraremos alguns exemplos em que tal resultado é aplicado de maneira bastante eficiente, solucionando o problema da imersão para alguns exemplos de variedades de Dold e Wall. E também alguns exemplos de espaços projetivos,

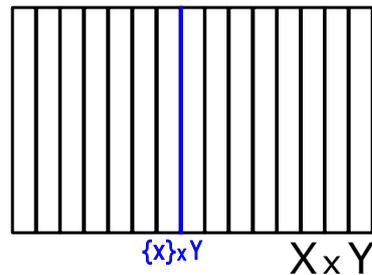
em que o problema da imersão é parcialmente solucionado, restando dúvida quanto sua imersão em algumas dimensões.

# Capítulo 1

## Fibrados

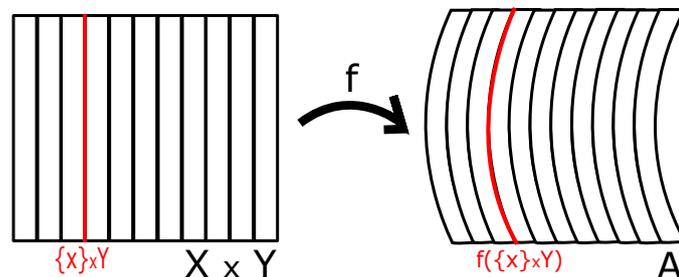
### 1.1 Motivação para a definição de fibrado

O fibrado mais simples é o produto  $X \times Y$ , em que  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos,  $X \times Y$  tem a topologia produto e  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  é a projeção  $(x, y) \mapsto x$



$X \times Y$  é a união de "fatias"  $\{x\} \times Y$  indexadas em  $X$ , tais fatias serão chamadas de "fibras".

Observe a seguinte situação:



Existe um homeomorfismo  $f$ , de  $X \times Y$  em  $A$ , que leva cada fibra de  $X \times Y$  homeomorficamente em sua fibra correspondente em  $A$  sobre  $f(x)$ , esta é basicamente a noção de equivalência entre fibrados que definiremos depois.

Ainda informalmente, esperamos do objeto fibrado como sendo um espaço  $E$ , o qual é uma união disjunta de subespaços  $F_x$ , isto é,  $E = \sqcup_{x \in X} F_x$  em que para cada  $x \in X$   $F_x$  é homeomorfo a um espaço topológico  $Y$  fixado, denominado **fibra**.

Neste caso, temos a função  $p : E \rightarrow X$  dada por: dado  $y \in E$ ,  $\exists! x \in X$  tal que  $y \in F_x$ , então definimos  $p(y) = x$  e esperamos que  $p$ , denominada **projeção**, seja contínua.

**Definição 1.1.** [Primeira definição de fibrado] *Um fibrado é um espaço topológico  $E$  com os seguintes ingredientes:*

- (i) Um espaço topológico  $X$ , denominado **espaço base** ou **espaço indexador**
- (ii) Uma aplicação contínua e sobrejetora  $p : E \rightarrow X$  chamada **projeção**
- (iii) Um espaço topológico  $Y$  chamado fibra
- (iv) Uma cobertura aberta de  $X$ ,  $X = \{V_i\}_{i \in J}$ , denominada uma **cobertura localmente trivial** de  $X$ , que satisfaz:  $\forall i \in J$ , existe homeomorfismo  $h_i : p^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times Y$  tal que o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V_i) & \xrightarrow{h_i} & V_i \times Y \\ & \searrow p & \downarrow p_1 \\ & & V_i \end{array}$$

é comutativo, ou seja,  $p_1 \circ h_i = p$ . Intuitivamente isso diz que o homeomorfismo  $h_i$  preserva as fibras.

É fácil verificar, usando a comutatividade do diagrama e o fato de  $h_i$  ser homeomorfismo, que  $h_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times Y$ . As vizinhanças  $V_i$  são chamadas **vizinhanças localmente triviais**. Note que se  $V \subset V_i$  é um aberto de  $X$ , então  $V$  também satisfaz a propriedade de trivialidade local, basta restringir o homeomorfismo  $h_i$ .

## 1.2 O grupo de um fibrado

Seja  $Y$  qualquer espaço topológico, considere  $H(Y) = \{f : Y \rightarrow Y \mid f \text{ é homeomorfismo}\}$ ,  $H(Y)$  é um grupo com a operação de composição de funções.

Seja  $(E, X, p, Y, \{V_i\}_{i \in J}, \{h_i\}_{i \in J})$  um fibrado como na definição 1.1. O fibrado dado determina um subgrupo de  $H(Y)$ , o qual, nesse momento, será denominado **grupo do fibrado**.

De fato, seja  $(i, j) \in J \times J$  tal que  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Temos a composição:

$$\begin{array}{ccccc} (V_i \cap V_j) \times Y & \xrightarrow{h_j^{-1}} & p^{-1}(V_i \cap V_j) & \xrightarrow{h_i} & (V_i \cap V_j) \times Y \\ \uparrow i_x & & & & \downarrow p_2 \\ Y & & & & Y \end{array}$$

na qual fixamos um  $x \in U_i \cap U_j$  arbitrário,  $i_x(y) = (x, y)$  e  $p_2(x, y) = y$ . Portanto podemos definir  $g_{ij}(x) : Y \rightarrow Y$  como  $g_{ij}(x)(y) = p_2 \circ h_i^{-1} \circ h_j \circ i_x(y)$ . Com isso obtemos

uma coleção de homeomorfismos de  $Y$  em  $Y$  (um subconjunto de  $H(Y)$ ) definida por  $G = \{g_{ij}(x) : Y \rightarrow Y | V_i \cap V_j \neq \emptyset \text{ e } x \in V_i \cap V_j\}$ . Tais funções  $g_{ij}$  são chamadas **funções de transição** do fibrado.

**Afirmção 1.1.** (i) se  $(i, i) \in J \times J$  então  $\forall x \in V_i \cap V_i$  temos  $g_{ii}(x) = Id_Y$

(ii) se  $(i, j) \in J \times J$  é tal que  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , então  $\forall x \in V_i \cap V_j$  vale:  $g_{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$  (homeomorfismo inverso)

(iii) se  $x \in V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$  então  $g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$

**Definição 1.2.** [Primeira definição de grupo do fibrado]  $\acute{E}$  o subgrupo de  $H(Y)$  gerado pelo conjunto  $\{g_{ij}(x) | (i, j) \in J \times J, V_i \cap V_j \neq \emptyset \text{ e } x \in V_i \cap V_j\}$

**Exemplo 1.1.** O produto cartesiano  $X \times Y$  (munido da topologia produto) de dois espaços topológicos  $X, Y$  é um fibrado com espaço total  $X \times Y$ , espaço base  $X$ , fibra  $Y$ , projeção  $p : X \times Y \rightarrow X$  definida por  $p(x, y) = x$ , cobertura localmente trivial  $\{X\}$  e homeomorfismo  $h : p^{-1}(X) = X \times Y \rightarrow X \times Y$  dado por  $h = Id_{X \times Y}$ . Nesse caso o grupo do fibrado é  $\{Id_Y\} \subset H(Y)$ .

## 1.3 Ação de grupos em conjuntos

Sejam  $G$  grupo e  $X$  um conjunto. Uma **ação** de  $G$  em  $X$  é uma função  $\phi : G \times X \rightarrow X$  (denotamos  $\phi(g, x) = g \cdot x$ ) que satisfaz:

(i)  $e \cdot x = x \forall x \in X$ , em que  $e$  é o elemento neutro de  $G$ .

(ii)  $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \forall g, h \in G \text{ e } x \in X$

Nesse caso, definimos a **órbita** de  $x$  por  $Orb(x) = \{g \cdot x | g \in G\}$  e é fácil ver que:

**Proposição 1.1.** A coleção de todas as órbitas de  $X$  é uma partição de  $X$

Estaremos interessados em ações efetivas e contínuas de grupos topológicos em espaços topológicos. Um grupo topológico é um grupo  $G$ , munido de uma topologia, de modo que as funções  $(g, h) \mapsto g \cdot h$ , de  $G \times G$  em  $G$  (operação do grupo), e  $g \mapsto g^{-1}$ , de  $G$  em  $G$ , sejam contínuas e uma ação  $\phi : G \times X \rightarrow X$  é **efetiva** se  $\phi(g, x) = x \forall x \in X$  implicar em  $g = e$ .

**Exemplo 1.2.** (i)  $G = S^1 \subset \mathbb{C}$  com a topologia euclidiana, munido da multiplicação em  $\mathbb{C}$ . Então temos uma ação  $S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada pela multiplicação complexa  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ . Tal ação é contínua pois é restrição da multiplicação em  $\mathbb{C}$ , que é uma função contínua.

(ii) Sejam  $X$  qualquer espaço topológico e  $T : X \rightarrow X$  qualquer aplicação contínua de grau  $n \geq 2$ , ou seja,  $T^n = Id_X$  (lembrando que  $T^n = T(T^{n-1})$  é definido recursivamente, convencioando que  $T^1 = T$  e  $T^0 = Id_X$ ).

Por exemplo,  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $A(x) = -x$  é contínua e tem grau 2 e  $T : \prod_{i=1}^n X \rightarrow \prod_{i=1}^n X$ , em que  $\prod_{i=1}^n X$  é produto cartesiano e  $T(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1)$  é aplicação contínua de grau  $n$ .

Se  $T$  é aplicação contínua de grau  $n$ , então é homeomorfismo, pois  $T \circ T^{n-1} = T^{n-1} \circ T = Id$  e assim determina uma ação contínua do grupo topológico  $\mathbb{Z}_n$ , munido da topologia discreta, em  $X$ , por  $(\bar{j}, x) \mapsto T^j(x)$

(iii)  $\forall n \geq 2$  considere  $T_{\frac{2\pi}{n}} : S^1 \rightarrow S^1$  a aplicação rotação de ângulo  $\frac{2\pi}{n}$  no sentido anti-horário, especificamente  $T(x) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot x$ .

$T$  é um exemplo de aplicação de grau  $n$  e portanto determina ação de  $\mathbb{Z}_n$  em  $S^1$ .

(iv) Seja  $X$  qualquer espaço topológico e  $f : X \rightarrow X$  qualquer homeomorfismo. Suponha que  $f$  não tenha grau finito (por exemplo  $x \mapsto x^n$ ,  $n$  ímpar) e considere  $\mathbb{Z}$  com a topologia discreta. Então  $f$  determina uma ação efetiva de  $\mathbb{Z}$  em  $X$  dada por  $(n, x) \mapsto f^n(x)$ , convencioando que  $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$  para  $n$  positivo. Reciprocamente uma ação efetiva  $\phi$  de  $\mathbb{Z}$  em  $X$  dá origem a um homeomorfismo  $f$  de grau infinito em  $X$ , definido por  $f(x) = \phi(1, x)$ .

(v) Seja  $GL(n) = \{A \in M(n \times n), \mathbb{R} | A \text{ é inversível} \}$  munido do produto matricial, com a topologia euclidiana (induzida de  $\mathbb{R}^{n^2}$ ).  $GL(n)$  atua em  $\mathbb{R}^n$  por  $(A, x) \mapsto A \cdot [x]_{nx1}$  em que  $[x]_{nx1}$  é o vetor coluna com as coordenadas de  $x$ .

Considere  $\phi : G \times X \rightarrow X$  ação contínua do grupo topológico  $G$  no espaço topológico  $X$ . Fixe  $g \in G$ , podemos definir  $\psi_g : X \rightarrow X$  por  $\psi_g(x) = \phi(g, x)$ . Note que  $\psi_g$  é homeomorfismo com inversa  $\psi_{g^{-1}}$ . Isso determina uma função  $\Psi : G \rightarrow H(X)$  dada por  $\Psi(g) = \psi_g$ , a qual é fácil ver, usando a definição de ação, que é um homomorfismo de grupos.

Note que a ação  $\phi$  é efetiva se, e somente se  $\Psi$  for injetora. Nesse caso,  $\Psi$  é um isomorfismo sobre a imagem, portanto  $\Psi(G)$  é uma cópia algébrica de  $G$  contida em  $H(X)$ . Essa cópia algébrica se torna também uma cópia topológica se colocarmos em  $\Psi(G)$  a topologia induzida de  $G$ , que torna  $\Psi$  um homeomorfismo.

**Observação 1.1.** Fixado  $G$ , sua cópia topológica  $\Psi(G) \subset H(X)$ , embora seja topologicamente e algebricamente semelhante a  $G$ , pode assumir diferentes subconjuntos de  $H(X)$ , visto que os elementos de  $\Psi(G)$  dependem da ação  $\phi$ .

**Exemplo 1.3.** Considere  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  com a topologia discreta. É fácil ver que uma ação  $\phi$  de  $\mathbb{Z}_2$  em  $X$  determina um homeomorfismo  $T : X \rightarrow X$  de grau  $n$  definido por  $T(x) = \phi(\bar{1}, x)$ , cuja inversa é  $T^{-1}(x) = \phi(\overline{n-1}, x)$ . Sejam  $X = \mathbb{R}^n$  e  $J \subset \{1, \dots, n\}$ ,

$J \neq \emptyset$ . Defina  $T_J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$  em que  $y_i = x_i$  se  $i \neq J$  e  $y_i = -x_i$  se  $i \in J$ . Note que, para cada  $J$  a aplicação  $T_J$  é homeomorfismo de grau 2 que determina uma ação de  $\mathbb{Z}_2$  em  $X$ . Com isso determinamos  $2^n - 1$  ações distintas de  $\mathbb{Z}_2$  em  $X$  (uma para cada  $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\}$ ).

**Definição 1.3.** [Segunda definição de fibrado] Um fibrado com espaço base  $X$ , fibra  $Y$  e grupo  $G$  (topológico) é um objeto matemático com os seguintes ingredientes:

1. Um espaço topológico  $E$ , chamado **espaço total**.
2. Uma função  $p : E \rightarrow X$  contínua e sobrejetora, chamada **projecção**.
3. Uma ação contínua efetiva  $\phi : G \times Y \rightarrow Y$  (o que define um grupo  $\bar{G} \subset H(Y)$  homeomorfo e isomorfo a  $G$ ).
4.  $\forall x \in X$  existe aberto  $U$  de  $X$  e homeomorfismo  $h_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times Y$  de modo que o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h_U} & U \times Y \\ & \searrow p & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

é comutativo. Nesse caso,  $U$  é denominado um **aberto localmente trivial** e novamente, se  $V \subset U$  é aberto em  $X$ ,  $V$  também é localmente trivial.

5. Se  $U$  e  $V$  são abertos de  $X$  tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , então  $\forall x \in U \cap V$  o homeomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times Y & \xrightarrow{h_U^{-1}} & p^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{h_V} & (U \cap V) \times Y \\ \uparrow i_x & & & & \downarrow p_2 \\ Y & & & & Y \end{array}$$

pertence a  $\bar{G}$ , o que equivale a dizer que  $\Psi^{-1}(p_2 \circ h_V \circ h_U^{-1} \circ i_x) \in G$ , em que  $\Psi$  é o isomorfismo que define  $\bar{G}$ .

6. Se  $U, V \subset X$  são abertos localmente triviais com  $U \cap V \neq \emptyset$ , a função  $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G$ , que leva  $x \in U \cap V$  no homeomorfismo  $g_{UV}(x)$ , deve ser contínua.

Usualmente dizemos um fibrado  $\eta$ , se já estiver subentendido todos os ingredientes em questão, ou então um fibrado  $\eta \rightarrow X$  para explicitar que  $X$  é o espaço base.

**Definição 1.4.** [Equivalência de fibrados] Sejam  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  e  $\eta' = (E', p', X, Y, G, \phi)$  (fibrados com mesmo espaço base  $X$ , mesma fibra  $Y$ , mesmo grupo  $G$  e mesma ação  $\phi$ ). Dizemos que  $\eta$  e  $\eta'$  são equivalentes se existe homeomorfismo  $F : E \rightarrow E'$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E' \\
 & \searrow p & \downarrow p' \\
 & & B
 \end{array}$$

é comutativo, o que equivale a pedir que  $F$  preserve fibras, e se  $U$  e  $V$  são abertos localmente triviais para  $\eta$  e  $\eta'$  respectivamente,  $U \cap V \neq \emptyset$ , então  $\forall x \in U \cap V$  o homeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc}
 (U \cap V') \times Y & \xrightarrow{h_U^{-1}} p^{-1}(U \cap V') \xrightarrow{F} p'^{-1}(U \cap V') \xrightarrow{h_{V'}'} & (U \cap V') \times Y \\
 \uparrow i_x & & \downarrow p_2 \\
 Y & & Y
 \end{array}$$

pertence a  $\overline{G}$ , em que  $h_U$  e  $h_{V'}$  são homeomorfismos trivializantes para  $\eta$  e  $\eta'$  respectivamente.

Adiante, veremos um resultado, que nos possibilita concluir, de uma maneira mais prática, quando dois fibrados são equivalentes.

## 1.4 Decodificação e reconstrução de um fibrado

Comece com um fibrado  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$ . Tome  $\{U_j\}_{j \in J}$  uma cobertura localmente trivial de  $X$ . Já sabemos que para qualquer  $(i, j) \in J \times J$  com  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  existe função  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  (podemos supor que o contradomínio de  $g_{ij}$  é  $G$ , basta compor  $g_{ij}$  com o homomorfismo inverso ao que define  $\overline{G}$ ). É simples verificar que tais funções satisfazem a condição de compatibilidade:

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \text{ se } x \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

**Observação 1.2.** (i) decorre da condição de compatibilidade, apenas colocando  $k = i = j$ , que  $g_{ii}(x) = e \forall x \in U_i$

(ii) também decorre, fazendo  $i = j$  e  $x \in U_i \cap U_j$  na condição de compatibilidade, que

$$g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1} \text{ (inverso em } G)$$

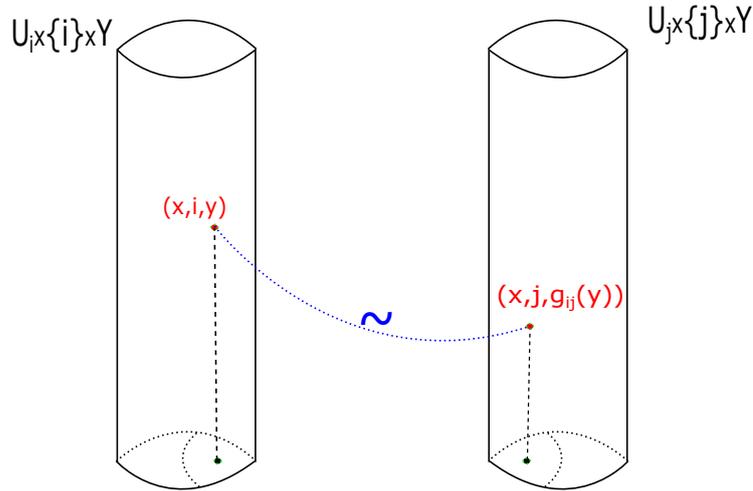
Veremos agora que podemos dispensar  $E$  e  $p$ , e a partir dos ingredientes restantes, reconstruir um espaço total  $E'$  e uma projeção  $p'$  de modo que este novo fibrado  $(E', p', X, Y, G, \phi)$  seja equivalente ao fibrado anterior  $(E, p, X, Y, G, \phi)$ . De fato, dado um fibrado  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$ , dispensando  $E$  e  $p$  temos os seguintes ingredientes:

1. espaço base  $X$
2. fibra  $Y$

3. grupo topológico  $G$  e ação  $\phi : G \times Y \rightarrow Y$  contínua
4. uma cobertura aberta  $\{U_j\}_{j \in J}$
5.  $\forall (i, j) \in J \times J$  com  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , funções contínuas  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  que satisfazem a condição de compatibilidade

Inicialmente, vamos descrever a topologia da união disjunta: seja  $\{Z_i\}_{i \in J}$  uma família arbitrária de espaços topológicos. Considere o conjunto  $W = \bigcup_{i \in J} (Z_i \times \{i\})$  com a seguinte topologia,  $A \subset W$  é aberto se, e somente se,  $A \cap Z_i \times \{i\}$  for aberto em  $Z_i \times \{i\}$   $\forall i \in J$ , equivalentemente, se  $p_1(A \cap Z_i \times \{i\})$  é aberto em  $Z_i$   $\forall i$ , em que  $p_1$  é a projeção na primeira coordenada  $(x, y) \mapsto x$ . Tal espaço  $W$  é chamado de **soma topológica dos  $Z_i$ 's**.

Considere o conjunto  $\{U_i \times Y\}$  e sua soma topológica  $E'' = \bigcup_{i \in J} (U_i \times \{i\} \times Y)$

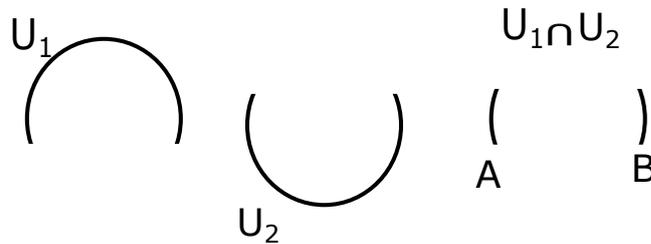


Em  $E''$ , introduzimos a seguinte relação de equivalência, simbolizada pela ilustração acima, a qual intuitivamente visa identificar a fibra  $(x, i) \times Y$  com a fibra  $(x, j) \times Y$  quando  $x \in U_i \cap U_j$ , através do homeomorfismo de  $Y$  em  $Y$  que corresponde ao elemento  $g_{ij}(x) \in G$ . A relação é:  $(x, i, y) \sim (x', j, y')$  se  $x = x'$ ,  $x \in U_i \cap U_j$  e  $g_{ij}(x) \cdot y = y'$ , a qual pode-se provar ser relação de equivalência, basta usar a condição de compatibilidade e a observação 1.2. Podemos então considerar o espaço quociente  $E' = \frac{E''}{\sim} = \{[x, i, y] \mid x \in U_i, i \in J \text{ e } y \in Y\}$ . Podemos também definir  $q : E' \rightarrow X$  por  $q([x, i, y]) = x$ , a qual é sobrejetora e é contínua pela definição de topologia quociente. Além disso,  $\forall x \in X$ ,  $q^{-1}(\{x\})$  é homeomorfo a  $Y$ . Pode-se provar que  $q : E' \rightarrow X$  determina um fibrado  $(E', q, X, Y, G, \phi)$  que é equivalente ao fibrado inicial  $(E, p, X, Y, G, \phi)$ . A cobertura  $\{U_i\}_{i \in J}$  é localmente trivial também para esse novo fibrado. Tal construção leva ao seguinte:

**Teorema 1.1.** [Teorema, vide [1]] *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos,  $G$  um grupo topológico e  $\phi : G \times Y \rightarrow Y$  uma ação efetiva e contínua. Seja  $\{U_j\}_{j \in J}$  uma cobertura aberta de  $X$  e suponha que,  $\forall i, j \in J$  com  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  existe função contínua  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$*

de tal sorte que tais funções  $g_{ij}$  satisfaçam a condição de compatibilidade. Então tais ingredientes determinam um único fibrado, a menos de equivalência, com espaço base  $X$ , fibra  $Y$ , grupo  $G$ , ação  $\phi$  e tal que a cobertura  $\{U_j\}_{j \in J}$  é localmente trivial e dá origem as funções  $g_{ij}$ .

**Exemplo 1.4.** Usando o teorema acima, podemos construir grande variedade de exemplos de fibrados. Como exemplo, tome  $X = S^1$ ,  $Y = \mathbb{R}$  ambos com a topologia euclidiana e  $G = \mathbb{Z}$  com a topologia discreta. Tome a ação efetiva  $\phi : G \times Y \rightarrow Y$  definida por  $\phi(n, r) = n + r$ , e a cobertura:



Defina  $g_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$  por  $g_{12}(x) = n \forall x \in A$  e  $g_{12}(x) = 0 \forall x \in B$  e  $g_{21} : U_2 \cap U_1 \rightarrow G$  por  $g_{21}(x) = -(g_{12}(x)) = -n$  se  $x \in A$  e  $g_{21}(x) = 0$  se  $x \in B$  e  $g_{11} = 0 = g_{22}$ . É fácil ver que tais funções satisfazem a condição de compatibilidade determinando portanto um fibrado  $\eta_n$ . Com isso, para cada  $n \in \mathbb{N}$  associamos o fibrado  $\eta_n$ , e a seguir, mostraremos que  $\eta_n$  é equivalente a  $\eta_m$  se e somente se  $n = m$ .

**Exemplo 1.5.** Seja  $X$  espaço topológico arbitrário e  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1, U_2$  abertos de  $X$  com  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Seja  $Y$  outro espaço topológico e  $G$  grupo topológico atuando efetivamente em  $Y$  via  $\phi : G \times Y \rightarrow Y$ . Seja  $g_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$  qualquer função contínua. Defina  $g_{21} : U_2 \cap U_1 \rightarrow G$  por  $g_{21}(x) = g_{12}(x)^{-1}$ , a qual é contínua por  $G$  ser grupo topológico ( $g \mapsto g^{-1}$  é contínua). Defina também  $g_{11} : U_1 \rightarrow G$  e  $g_{22} : U_2 \rightarrow G$  como  $g_{11}(x) = e$ ,  $g_{22}(x) = e \forall x \in U_1$  e  $x \in U_2$  respectivamente, em que  $e$  é o elemento neutro de  $G$ . É fácil ver que tais funções satisfazem a condição de compatibilidade, originando assim um fibrado com cobertura localmente trivial  $\{U_1, U_2\}$ , espaço base  $X$ , fibra  $Y$  e grupo  $G$ .

**Exemplo 1.6.** Tome  $X = S^1$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $G = GL(1) = \mathbb{R} - \{0\}$  com a multiplicação usual. Seja  $\phi : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi(x, y) = x \cdot y$  que é uma ação efetiva. Seja  $S^1 = U_1 \cup U_2$ , com  $U_1 \cap U_2 = A \cup B$  como no exemplo anterior. Seja  $r \in \mathbb{R} - \{0\}$  então defina  $g_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  por  $g_{12}(x) = r$  se  $x \in A$  e  $g_{12}(x) = 1$  se  $x \in B$ . Então para cada  $r \in \mathbb{R}$  fica determinado um fibrado  $\eta_r$  e vamos provar que  $\eta_r$  é equivalente a  $\eta_s$  se, e somente se  $r \cdot s > 0$ , isto é, se  $r, s$  pertencem a mesma componente conexa de  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Em particular, isso prova o fato conhecido, de que o fibrado determinado por  $r = -1$ , chamado **fibrado linha canônico** não é trivial, uma vez que ele não é equivalente ao determinado por  $r = 1$ .

Para provar as afirmações feitas nos exemplos 1.4 e 1.6, precisaremos do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser consultada em [1], página 11, lema 2.8.

**Lema 1.1.** *Sejam  $\eta$  e  $\eta'$  fibrados com mesmos espaço base, fibra, grupo. Sejam  $\{V_i\}_{i \in J}$  e  $\{V'_i\}_{i \in J'}$  coberturas localmente triviais e funções de transição  $\{g_{ij}\}$  e  $\{g'_{ij}\}$  para  $\eta$  e  $\eta'$  respectivamente. Então,  $\eta$  é equivalente a  $\eta'$  se, e somente se, existirem funções contínuas  $\bar{g}_{ij} : V'_i \cap V_j \rightarrow G$  tais que:*

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ik}(x) &= \bar{g}_{ij}(x)g_{jk}(x) & x \in V_k \cap V_j \cap V'_i \\ \bar{g}_{lj}(x) &= g'_{li}(x)\bar{g}_{ij}(x) & x \in V_j \cap V'_i \cap V'_l \end{aligned}$$

**Afirmção do Exemplo 1.4:** Se  $n = m$ ,  $\eta_n$  e  $\eta_m$  são iguais, portanto equivalentes. Reciprocamente, suponha que  $\eta_n$  e  $\eta_m$  sejam equivalentes, para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{Z}$  arbitrários, vamos mostrar que  $n = m$ . Denotemos por  $\{U_1, U_2\}$  a cobertura localmente trivial de  $\eta_n$  e  $\eta_m$ , e por  $\{g_{ij}\}_{i,j \in \{1,2\}}$  e  $\{g'_{ij}\}_{i,j \in \{1,2\}}$  as funções de transição para  $\eta_n$  e  $\eta_m$  respectivamente, definidos conforme o exemplo, ou seja,  $g_{12}(x) = n$  e  $g'_{12}(x) = m$  se  $x \in A$  e  $g_{12}(x) = 0 = g'_{12}(x)$  se  $x \in B$ . Pelo lema 1.1, existem funções  $\{\bar{g}_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{i,j \in \{1,2\}}$  que satisfazem:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11}(x) &= \bar{g}_{12}(x) - n \\ \bar{g}_{22}(x) &= \bar{g}_{21}(x) + n \\ \bar{g}_{11}(x) &= m + \bar{g}_{21}(x) \\ \bar{g}_{22}(x) &= -m + \bar{g}_{12}(x) \end{aligned}$$

quando  $x \in A$ , e

$$\bar{g}_{11}(x) = \bar{g}_{12}(x) - 0 \quad \bar{g}_{22}(x) = \bar{g}_{21}(x) + 0 \quad \text{e} \quad \bar{g}_{11}(x) = 0 + \bar{g}_{21}(x) \quad \bar{g}_{22}(x) = -0 + \bar{g}_{12}(x)$$

se  $x \in B$ . Mas como os domínios de  $\bar{g}_{11}$  e  $\bar{g}_{22}$  são conexos ( $U_1$  e  $U_2$  respectivamente) segue que  $\bar{g}_{11}$  e  $\bar{g}_{22}$  são funções constantes, em particular são iguais quando  $x \in A$ , usando esta informação nas equações para  $x \in A$ , obtemos  $m + \bar{g}_{21}(x) = \bar{g}_{11}(x) = \bar{g}_{22}(x) = \bar{g}_{21}(x) + n$ , então  $m = n$ , como queríamos. ■

**Afirmção do Exemplo 1.6:** Considere fibrados  $\eta_r$  e  $\eta_s$  definidos como no exemplo 1.6, com cobertura localmente trivial  $\{U_1, U_2\}$  e funções de transição  $\{g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}\}$  e  $\{g'_{11}, g'_{12}, g'_{21}, g'_{22}\}$  para  $\eta_r$  e  $\eta_s$  respectivamente, ou seja,  $g_{12}(x) = r$  e  $g'_{12}(x) = s$  se  $x \in A$  e  $g_{12}(x) = 1 = g'_{12}(x)$  se  $x \in B$ .

Vamos mostrar, inicialmente, que  $\eta_r$  é equivalente a  $\eta_s$  quando  $r \cdot s > 0$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $r, s \in (0, +\infty)$ . Pelo lema, é necessário e suficiente encontrarmos funções contínuas  $\{\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{21}, \bar{g}_{22}\}$  que satisfaçam:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= \bar{g}_{12} + \frac{1}{r} \\ \bar{g}_{22} &= \bar{g}_{21} + r \\ \bar{g}_{11} &= s \cdot \bar{g}_{21} \\ \bar{g}_{22} &= \frac{1}{s} + \bar{g}_{12} \end{aligned}$$

se  $x \in A$ , e

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \bar{g}_{22}$$

se  $x \in B$ .

Para isso, basta definirmos, para algum  $k \in (0, +\infty)$  fixado:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} &= k \\ \bar{g}_{12} &= r \cdot k \\ \bar{g}_{21} &= \frac{k}{s} \\ \bar{g}_{22} &= k\end{aligned}$$

se  $x \in A$ , e

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \bar{g}_{22} = k$$

se  $x \in B$ . É simples verificar que tais funções satisfazem as hipóteses do Lema 1.1, portanto  $\eta_r$  e  $\eta_s$  são equivalentes.

Agora vamos mostrar que dados  $r$  e  $s$  com sinais distintos,  $\eta_r$  e  $\eta_s$  não são equivalentes. Suponha, por absurdo, que  $\eta_r$  e  $\eta_s$  são equivalentes. Com isso, pelo Lema 1.1, existem funções contínuas  $\{\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{21}, \bar{g}_{22}\}$  que satisfazem:

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} &= \bar{g}_{12} + \frac{1}{r} \\ \bar{g}_{22} &= \bar{g}_{21} + r \\ \bar{g}_{11} &= s \cdot \bar{g}_{21} \\ \bar{g}_{22} &= \frac{1}{s} + \bar{g}_{12}\end{aligned}$$

se  $x \in A$ , e

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = \bar{g}_{22}$$

se  $x \in B$ .

multiplicando a primeira e a terceira equação para  $x \in A$ , obtemos:

$$\bar{g}_{11}^2 = \bar{g}_{12}(x) \cdot \bar{g}_{21}(x) \cdot \frac{s}{r} \implies \bar{g}_{12}(x) \cdot \bar{g}_{21}(x) < 0$$

por outro lado, multiplicando as duas primeiras equações para  $x \in A$ , obtemos:

$$\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} = \bar{g}_{12}(x) \cdot \bar{g}_{21}(x) < 0$$

ou seja,  $\bar{g}_{11}$  e  $\bar{g}_{22}$  tem sinais opostos em  $a$ . Por outro lado,  $\bar{g}_{11}$  e  $\bar{g}_{22}$  são iguais em  $B$ , em particular, tem o mesmo sinal. Suponha sem perda de generalidade que  $\bar{g}_{11}(x) > 0 > \bar{g}_{22}(x)$  para  $x \in A$  e  $\bar{g}_{11}(x) = \bar{g}_{22}(x) > 0$ . Mas como  $U_2$  é conexo e  $\bar{g}_{22}$  é contínua,  $\bar{g}_{22}(U_2)$  deveria ser conexo, absurdo pois  $\bar{g}_{22}(x) < 0$  se  $x \in A$ ,  $\bar{g}_{22}(x) > 0$  se  $x \in B$  e  $0 \notin \bar{g}_{22}(U_2)$ , portanto  $\eta_r$  e  $\eta_s$  não são equivalentes. ■

## 1.5 Pull back

Sejam  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  um fibrado,  $Z$  um espaço topológico arbitrário e  $f : Z \rightarrow X$  uma função contínua qualquer. Então os três ingredientes  $\eta$ ,  $Z$  e  $f : Z \rightarrow X$  determinam, a menos de equivalência, um novo fibrado  $f^!(\eta) = (E', q : E' \rightarrow Z, Z, Y, G, \phi)$  chamado "pullback de  $\eta$  via  $f$ ". Existem duas maneiras equivalentes de construí-lo:

- (i) Usando o teorema de existência: considere  $\{V_j\}_{j \in J}$  cobertura de  $X$  localmente trivial para  $\eta$ . Temos então as funções de transição  $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G$  (quando  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ ) satisfazendo a condição de compatibilidade. Para cada  $j \in J$  podemos considerar  $W_j := f^{-1}(V_j)$  e como  $f$  é contínua, segue que  $\{W_j\}_{j \in J}$  é cobertura aberta de  $Z$ . Se  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ , temos  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  e então podemos definir a composição:

$$h_{ij} := g_{ij} \circ f : W_i \cap W_j \rightarrow G$$

Daí, se  $W_i \cap W_j \cap W_k \neq \emptyset$  segue  $h_{ij}(x)h_{jk}(x) = g_{ij}(f(x))g_{jk}(f(x)) = g_{ik}(f(x)) = h_{ik}(x)$ , ou seja, tais  $h_{ij}$  satisfazem as condições de compatibilidade. Portanto, pelo teorema de existência, existe um único fibrado, a menos de equivalência, com base  $Z$ , fibra  $Y$ , grupo  $G$ , mesma ação de  $\eta$ , cobertura localmente trivial  $\{W_j\}_{j \in J}$  e funções de transição  $h_{ij}$ . Esse é o pullback mencionado.

- (ii) Uma outra maneira, mais intuitiva, é a seguinte: considere o subespaço  $E' \subset Z \times E$  definido por

$$E' = \{(z, v) \in Z \times E \mid f(z) = p(v)\} = \{(z, v) \in Z \times E \mid v \in p^{-1}(f(z))\}$$

e a função  $q : E' \rightarrow Z$  dada por  $q(x, y) = x$ , a qual é contínua e sobrejetora. Então prova-se que isso é um fibrado, equivalente ao do item (i) e tem espaço base  $Z$ , espaço total  $E'$ , projeção  $q$ , fibra  $Y$ , grupo  $G$ , mesma ação de  $\eta$  e cobertura localmente trivial  $\{W_j\}_{j \in J}$  (a mesma obtida na construção (i)).

## 1.6 Fibrado Restrição

Seja  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  um fibrado e  $A \subset X$  um subespaço. Considere  $E' := p^{-1}(A) \subset E$  e  $q := p|_{E'} : E' \rightarrow A$  a restrição. Isso define um novo fibrado  $\eta' = (E', q, A, Y, G, \phi)$  o qual é chamado "fibrado restrição".

Outra forma de apresentar tal fibrado é via o teorema de existência. Seja  $\{V_j\}_{j \in J}$  cobertura localmente trivial de  $\eta$ , com funções de transição  $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ . Considere a cobertura aberta  $\{V'_j\}_{j \in J}$  de  $A$ , em que  $V'_j = V_j \cap A \forall j \in J$ . Tome  $i, j \in J$  tais que  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ . Como  $\emptyset \neq V'_i \cap V'_j \subset V_i \cap V_j$  temos definida  $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G$  e podemos considerar sua restrição  $g'_{ij} : V'_i \cap V'_j \rightarrow G$ . É fácil observar que tais funções satisfazem

a condição de compatibilidade e portanto tais ingredientes, via o teorema de existência, determinam um novo fibrado, que é equivalente ao fibrado restrição prévio.

**Teorema 1.2.** [vide [3]] *Seja  $X$  um espaço topológico localmente contrátil. Considere o fibrado  $\eta = (E, p, X \times I, Y, G, \phi)$ , em que  $I = [0, 1]$  com a topologia euclidiana. Então  $\forall t, s \in I$ , os fibrados  $\eta_t$  e  $\eta_s$ , restrições de  $\eta$  a  $X \times \{t\}$  e  $X \times \{s\}$  respectivamente, são equivalentes.*

**Observação 1.3.** 1. *Qualquer variedade ou CW-complexo é localmente contrátil.*

2. *Lembre que um espaço  $X$  é contrátil se possui o mesmo tipo de homotopia do ponto  $\{pt\}$ , ou equivalentemente, tomando  $a \in X$ , as aplicações  $Id_X$  e  $f : X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = a$  são homotópicas.*

Veremos duas consequências interessantes do teorema acima.

- (i) Seja um fibrado  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  e sejam  $f, g : Z \rightarrow X$  funções contínuas homotópicas com  $Z$  localmente contrátil. Então os pullbacks  $f!(\eta)$  e  $g!(\eta)$  são equivalentes. Tome  $H : Z \times I \rightarrow X$  homotopia entre  $f$  e  $g$ , com  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . Então basta considerar  $F!(\eta)$ , o qual restrito a  $X \times \{0\}$  é igual a  $f!(\eta)$  e restrito a  $X \times \{1\}$  é  $g!(\eta)$ .
- (ii) Se  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  é um fibrado em que  $X$  contrátil, então  $\eta$  é trivial. Por hipótese, tomando  $x_0 \in X$ , as funções  $Id_X$  e  $f : X \rightarrow X$ ,  $f(x) = x_0$  são homotópicas. Segue do teorema então que  $Id_X!(\eta)$  e  $f!(\eta)$  são equivalentes. Mas sabemos, das propriedades de pullback, que  $(h_1 \circ h_2)!(\eta) = h_2!(h_1!(\eta))$  e  $f : X \rightarrow X$  pode ser fatorada como:

$$X \xrightarrow{h} \{x_0\} \xrightarrow{i} X$$

em que  $i$  é a inclusão de  $x_0$  em  $X$  e  $h$  a aplicação constante  $x \mapsto x_0$ , então

$$f!(\eta) = (i \circ h)!(\eta) = h!(i!(\eta))$$

mas  $i!(\eta)$  é trivial, pois a base é um ponto, e qualquer pullback do fibrado trivial também é trivial, segue que  $f!(\eta)$  é trivial. E como  $f$  é homotópica a  $Id_X$ , e  $Id_X!(\eta) = \eta$ , o resultado segue.

## 1.7 Fibrados Vetoriais

**Definição 1.5.** *Um fibrado vetorial é um fibrado  $\eta = (E, p, X, Y, G, \phi)$  com características especiais:*

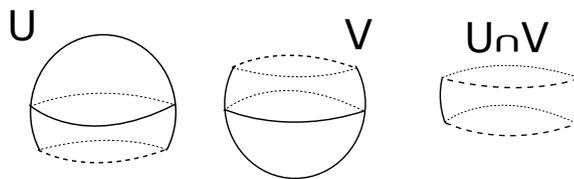
1. O espaço base  $X$  continua sendo um espaço topológico arbitrário, mas futuramente iremos pedir que  $X$  seja paracompacto, isso permite que certas construções possam inicialmente ser feitas em abertos de  $X$ , onde o fibrado é trivial, e posteriormente estendidas para todo  $X$  via partições da unidade.
2.  $Y = \mathbb{R}^n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , com a topologia euclidiana.
3.  $G = GL(n)$  é o grupo multiplicativo das matrizes  $n \times n$  reais e inversíveis, ou seja, com determinante não nulo, munido da topologia euclidiana, ou equivalentemente, induzida de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .
4. A ação  $\phi : GL(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $\phi(A, x) = A \cdot [x]_{n \times 1}$  em que  $[x]_{n \times 1}$  é o vetor coluna  $n \times 1$  com as coordenadas de  $x$ .

**Definição 1.6.** Um fibrado vetorial  $\eta$  é dito ser  $n$ -dimensional se tem fibra  $Y = \mathbb{R}^n$ . Caso  $n = 1$  o fibrado é dito ser um **fibrado linha**. Nesse caso, o grupo é  $GL(1)$ , que é isomorfo a  $\mathbb{R} - \{0\}$  multiplicativo, e os homeomorfismos lineares, de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , são da forma  $x \mapsto a \cdot x$  a  $\neq 0$  fixo.

**Observação 1.4.** Já vimos exemplos de fibrados-linha sobre  $S^1$  e exibimos um fibrado-linha não trivial, chamado **fibrado-linha canônico**.

Provaremos depois que, sobre  $S^1$ , a menos de equivalência, só existem 2 fibrados-linha, o fibrado linha-canônico e o fibrado-linha trivial.

**Exemplo 1.7.** Exibiremos alguns fibrados vetoriais sobre  $S^2$  usando o teorema de existência. Cubra  $S^2$  com duas calotas abertas  $U$  e  $V$  de maneira que  $U \cap V$  seja homeomorfo a  $S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$ :



Fixe  $A \in GL(2)$  e então já vimos que existe um único fibrado, a menos de equivalência, determinado por  $f : U \cap V \rightarrow G$ ,  $f(x) = A \forall x \in U \cap V$ , e isso é um fibrado vetorial por definição.

Pode-se usar o mesmo argumento para construir fibrados vetoriais  $n$ -dimensionais sobre  $S^2$  ou, mais geralmente, sobre  $S^n$

## 1.8 Soma de Whitney

Sejam  $\eta$  e  $\mu$  fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base  $X$ , com dimensões  $n$  e  $m$  respectivamente. Sejam  $E$  e  $W$  os respectivos espaços totais com projeções  $p : E \rightarrow X$

para  $\eta$  e  $q : W \rightarrow X$  para  $\mu$ . Vamos construir um novo fibrado sobre  $X$  com dimensão  $n + m$  chamado **soma de Whitney** de  $\eta$  e  $\mu$ , denotado por  $\eta \oplus \mu$ . Considere o subespaço  $P$  de  $E \times W$  definido por:

$$P = \bigcup_{x \in X} (p^{-1}(x) \times q^{-1}(x)) = \{(e, w) \in E \times W \mid p(e) = q(w)\}$$

então  $t : P \rightarrow X$ ,  $f(e, w) = p(x)$  (ou  $= q(w)$ ) define um novo fibrado, cuja fibra sobre o ponto  $x \in X$  é  $p^{-1}(x) \times q^{-1}(x)$ , a qual é isomorfa a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{n+m}$ .

Para se obter os abertos localmente triviais para  $\eta \oplus \mu$ , sejam  $\{U_j\}_{j \in J}$  e  $\{V_i\}_{i \in I}$  coberturas localmente triviais de  $X$  para  $\eta$  e  $\mu$  respectivamente. Então tome a família  $\{U_i \cap V_i\}$  de abertos tais que  $U_j \cap V_i \neq \emptyset$ , e como  $U_j \cap V_i$  é subconjunto de  $U_j$  e  $V_i$  simultaneamente, segue que tal família também é cobertura localmente trivial de  $X$  para  $\eta$  e  $\mu$ , denotemos tal cobertura por  $\{B_k\}_{s \in T}$ . Então existem homeomorfismos trivializantes

$$\phi_s : p^{-1}(B_s) \rightarrow B_s \times \mathbb{R}^n \quad (\text{para } \eta) \quad \text{e} \quad \psi_s : q^{-1}(B_s) \rightarrow B_s \times \mathbb{R}^m \quad (\text{para } \mu)$$

tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(B_s) & \xrightarrow{\phi_s} & B_s \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p & \downarrow p_1 \\ & & B_s \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} q^{-1}(B_s) & \xrightarrow{\psi_s} & B_s \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow q & \downarrow p_1 \\ & & B_s \end{array}$$

são comutativos. Então podemos definir

$$\phi_s \times \psi_s|_{P \cap (p^{-1}(B_s) \times q^{-1}(B_s))} : P \cap (p^{-1}(B_s) \times q^{-1}(B_s)) \longrightarrow \Delta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{p_1 \times Id} B_s \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

em que  $\Delta \subset B_s \times B_s$  é a diagonal  $\Delta = \{(b, b) \mid b \in B_s\}$ , que é homeomorfo a  $B_s$  via qualquer projeção. Tais  $\phi_s \times \psi_s$  são os homeomorfismos trivializantes para  $\eta \oplus \mu$ , observando que

$$t^{-1}(B_s) = P \cap (p^{-1}(B_s) \times q^{-1}(B_s))$$

Com tais ingredientes, podemos redefinir o fibrado  $\eta \oplus \mu$  via o teorema de existência. De fato, notemos inicialmente que dados dois espaços topológicos quaisquer  $Y$  e  $Z$ , existe aplicação:

$$\theta_{Y,Z} : H(Y) \times H(Z) \rightarrow H(Y \times Z)$$

dado por  $\theta_{Y,Z}(f, g) = f \times g$ . É fácil ver que tal aplicação é monomorfismo de grupos. Em particular, temos  $\theta_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} : H(\mathbb{R}^n) \times H(\mathbb{R}^m) \rightarrow H(\mathbb{R}^{n+m})$  e este último restrito a  $GL(n) \times GL(m)$  coincide com o monomorfismo:

$$\Gamma : GL(n) \times GL(m) \rightarrow GL(n + m)$$

definido por:

$$\Gamma(A, B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Então considere os fibrados anteriores  $\eta$  e  $\mu$ , já vimos que podemos tomar uma cobertura  $\{U_j\}_{j \in J}$  de  $X$  localmente trivial em ambos fibrados, com funções de transição  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então basta considerar

$$\theta_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n) \times GL(m) \xrightarrow{\Gamma} GL(n+m)$$

definida por  $\theta_{ij} = \Gamma(g_{ij} \times h_{ij})$ . Vejamos que tais funções  $\theta_{ij}$  satisfazem a condição de compatibilidade:

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(x)\theta_{jk}(x) &= \Gamma(g_{ij}, h_{ij})\Gamma(g_{jk}, h_{jk}) = \\ &= \begin{bmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & h_{ij}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{jk}(x) & 0 \\ 0 & h_{jk}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij}(x)g_{jk}(x) & 0 \\ 0 & h_{ij}(x)h_{jk}(x) \end{bmatrix} \\ &= \Gamma(g_{ik}, h_{ik}) = \theta_{ik}(x) \end{aligned}$$

Então, pelo teorema de existência, existe um único fibrado, a menos de equivalência, com base  $X$ , fibra  $\mathbb{R}^{n+m}$ , grupo  $GL(n+m)$ , cobertura localmente trivial  $\{U_j\}_{j \in J}$  e funções de transição  $\theta_{ij}$ . Tal fibrado, por definição, é o  $\eta \oplus \mu$  e é equivalente ao previamente construído (via  $t : P \rightarrow X$ )

É usual denotar  $\eta \oplus \cdots \oplus \eta$  ( $k$  vezes) por  $\bigoplus_k \eta$



## Capítulo 2

# Variedades Diferenciáveis

**Definição 2.1.** Um espaço topológico  $X$  Hausdorff e de base enumerável é dito ser uma variedade de classe  $C^\infty$  de dimensão  $n$  se:

1. Para todo  $x \in X$  deve existir um aberto  $U \subset M$ , com  $x \in U$ , e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , em que  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  ( $V$  pode ser suposto como uma bola aberta). O par  $(U, \varphi)$  é chamado uma carta local.
2. Dadas duas cartas locais  $(U, \varphi), (V, \psi)$  tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , as composições  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  e  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$  devem ser de classe  $C^\infty$ .

Estamos interessados em variedades  $C^\infty$  que adicionalmente são compactas. Neste caso as variedades são ditas **fechadas** (closed smooth manifold).

**Definição 2.2.** Se  $X$  e  $Y$  são variedades fechadas de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente, então uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita ser diferenciável em  $x$  se, dadas cartas locais  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$ ,  $x \in U$  e  $f(U) \subset V$ , a aplicação

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \subset \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em  $\varphi(x)$ .

Pode-se mostrar que a definição acima independe das cartas escolhidas.

**Definição 2.3.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é homeomorfismo  $C^\infty$  com inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também  $C^\infty$ , então  $f$  é dita ser um difeomorfismo.

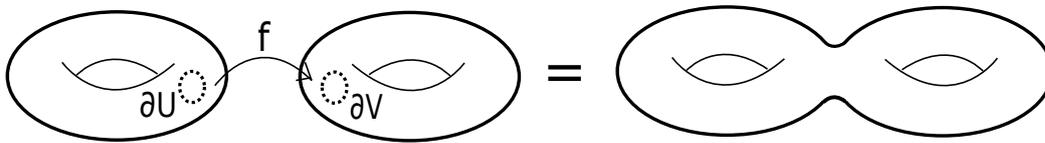
Note que se  $f : X \rightarrow Y$  é homeomorfismo, obrigatoriamente as dimensões de  $X$  e  $Y$  são iguais. No âmbito da teoria de variedades, duas variedades difeomorfas são consideradas iguais (equivalentes).

As seguintes construções nos permitem, a partir de variedades conhecidas, construir novas variedades:

- (i) Soma Conexa: Sejam  $X$  e  $Y$  variedades  $n$ -dimensionais fechadas. Da definição temos que, dados  $x \in X$  e  $y \in Y$  existem abertos  $x \in U$  e  $y \in V$  de modo que suas fronteiras  $\partial U$  e  $\partial V$  sejam homeomorfas a esfera  $S^{n-1}$ . Escolhe-se então um homeomorfismo  $f : \partial U \rightarrow \partial V$  e considera-se o espaço quociente

$$\frac{(X - U) \sqcup (Y - V)}{\sim}$$

em que a relação  $\sim$  identifica  $p \in \partial U$  com  $f(p) \in \partial V$ . Pode-se provar que tal espaço quociente admite estrutura de variedade fechada  $C^\infty$ , chamada "soma conexa" de  $X$  com  $Y$ , denotado por  $X \# Y$ . Por exemplo, veja a soma conexa de dois toros:



- (ii) Seja  $M^n$  variedade fechada  $C^\infty$ . Seja  $T : M^n \rightarrow M^n$  difeomorfismo  $C^\infty$  de grau 2, isto é,  $T \circ T = Id_{M^n}$  (ou seja, uma involução suave) e sem pontos fixos, ou seja,  $T(x) \neq x \forall x \in M^n$  (por exemplo,  $T = A : S^n \rightarrow S^n, A(x) = -x$ ).

Neste caso, temos a relação de equivalência  $\sim$  em  $M^n$  que identifica  $x$  com  $T(x) \forall x \in M^n$ , e por  $T$  ter grau 2 segue que a classe de equivalência de  $x$  é  $\{x, T(x)\}$ . Considere o espaço quociente  $\frac{M^n}{\sim}$ . Dado  $\bar{x} = \{x, t(x)\} \in \frac{M^n}{\sim}$ , sendo  $M^n$  Hausdorff verifica-se que existe um aberto  $U$  de  $M^n$  contendo  $x$ , homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $U \cap T(U) \neq \emptyset$  (por  $T$  ser homeomorfismo é claro que  $T(U)$  também é homeomorfa a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ ) e ainda de modo que  $U$  e  $T(U)$  sejam domínios de cartas locais em torno de  $x$  e  $T(x)$  respectivamente. Prova-se então que  $\frac{U \sqcup T(U)}{\sim}$  é um aberto de  $\frac{M^n}{\sim}$  contendo  $\bar{x}$ , homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ , o qual serve como carta local para  $\bar{x}$ . Em suma, conclui-se que  $\frac{M^n}{\sim}$  é variedade fechada  $C^\infty$   $n$ -dimensional.

Por exemplo, considerando  $A : S^n \rightarrow S^n, A(x) = -x$ , a variedade fechada  $n$ -dimensional  $C^\infty$   $\frac{S^n}{\sim}$ , determinada por  $A$  da maneira acima, é chamado "espaço projetivo  $n$ -dimensional", denotado por  $\mathbb{R}P^n$ .

- (iii) Se  $M^n$  e  $N^m$  são variedades fechadas  $C^\infty$ , então  $M^n \times N^m$  tem uma estrutura natural de variedade fechada  $C^\infty$   $(n+m)$ -dimensional, dado  $(x, y) \in M^n \times N^m$ , existem duas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  com  $x \in U$  e  $y \in V$  e então  $(U \times V, \varphi \times \psi)$  é carta local de  $M^n \times N^m$  em torno de  $(x, y)$ .

**Observação 2.1.** *Suponho que  $X$  seja uma variedade fechada,  $n$ -dimensional e supondo também ser conexa, sabe-se que, a menos de difeomorfismo:*

- (i) Se  $n = 0$  então  $X = \{pt\}$
- (ii) Se  $n = 1$  então  $X = S^1$
- (iii) Se  $n = 2$  ocorre um dos seguintes casos:
- (a)  $X = S^2$
  - (b)  $X = S^1 \times S^1$ , também denotado por  $T^2$ , chamado toro bidimensional
  - (c)  $X = \mathbb{R}P^2$
  - (d)  $X$  é uma soma conexa de  $n$  cópias de  $T^2$ ,  $n \geq 2$ , e neste caso, para cada  $n$  tem-se uma variedade distinta das demais (não difeomorfa).
  - (e)  $X$  é uma soma conexa de  $n$  cópias de  $\mathbb{R}P^2$ , e novamente quantidades de cópias distintas resultam em variedades não difeomorfas.
- (iv) Alguns exemplos de variedades fechadas  $C^\infty$  tridimensionais são:  $S^3$ ,  $\mathbb{R}P^3$ ,  $M^2 \times S^1$ , em que  $M^2$  é qualquer variedade fechada  $C^\infty$  bidimensional. O grupo fundamental mostra que tais variedades não são difeomorfas (na verdade não tem nem o mesmo tipo de homotopia, lembre que o grupo fundamental de um produto cartesiano é o produto cartesiano dos grupos fundamentais). Uma classificação completa das variedades fechadas  $C^\infty$  tridimensionais ainda não é conhecida.
- (v) Se  $n > 3$  é par, então produtos distintos de variedades fechadas  $C^\infty$  bidimensionais geram exemplos não difeomorfos de variedades fechadas  $C^\infty$   $n$ -dimensionais, e se  $n > 4$  é ímpar os mesmos produtos multiplicados por  $S^1$  geram exemplos distintos. Em adição,  $\forall n \geq 3$   $S^n$  e  $\mathbb{R}P^n$  são exemplos distintos dos exemplos prévios.
- No caso de  $n = 4$  foi provado que não é possível uma classificação completa das variedades fechadas  $C^\infty$ , e com isso  $\forall n \geq 4$  o mesmo ocorre.

**Teorema 2.1.** [Whitney] Se  $M^n$  é variedade fechada  $C^\infty$  então existe um espaço  $V^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  (com a topologia euclidiana) que é difeomorfo a  $M^n$ . Em outras palavras, podemos pensar que toda variedade fechada  $C^\infty$  é um subespaço euclidiano.

**Observação 2.2.** O resultado acima nos permite, dada variedade  $M^n$  fechada e  $C^\infty$ , supor que  $M^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Seja  $p \in M^n$  e seja  $(U, \varphi)$  uma carta local em torno de  $p$ , ou seja,  $\varphi : U \subset M^n \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Então o teorema da forma local das imersões garante que  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{2n}$  é uma aplicação  $C^\infty$  e sua derivada em cada ponto é injetora. Isto nos permite redefinir uma variedade fechada,  $n$ -dimensional,  $C^\infty$  da seguinte maneira:

**Definição 2.4.** Um subespaço euclidiano compacto  $X \subset \mathbb{R}^p$  é dito ser uma variedade fechada  $n$ -dimensional  $C^\infty$  ( $n < p$ ) se  $\forall z \in X$  existe aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e aplicação  $\varphi : U \rightarrow X \subset \mathbb{R}^p$  tal que  $z \in \varphi(U)$ ,  $\varphi$  é homeomorfismo  $C^\infty$  sobre a imagem e  $\varphi'(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  é injetora  $\forall y \in U$ . Tal  $\varphi$  é dita ser uma parametrização  $C^\infty$  em torno de  $z$ .

Informalmente,  $X$  pode ser coberto por abertos de  $X$  que são imagens de parametrizações  $C^\infty$ . Note que, neste contexto, pedir que  $X$  seja compacto equivale a pedir que seja limitado e fechado. A partir de agora,  $M^n$  denotará, a menos de menção contrária, uma variedade fechada,  $C^\infty$  e  $n$ -dimensional, e sempre que escrevermos  $M^n \subset \mathbb{R}^p$  fica subentendido que  $n < p$ .

**Definição 2.5.** Considere  $M^n \subset \mathbb{R}^p$  e  $x \in M^n$ . Tome parametrização  $C^\infty$   $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , com  $\varphi(z) = x$ . Com isso, como  $\varphi'(y)$  é injetora  $\forall y \in U$  segue que  $\varphi'(\mathbb{R}^n)$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^p$  de dimensão  $n$ . Tal espaço é chamado **espaço tangente** a  $M^n$  em  $x$  e é denotado por  $T(M^n)_x$ .

Prova-se que tal espaço independe da escolha de  $\varphi$ .

**Definição 2.6.** [Fibrado Tangente a  $M^n$ ] Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^p$ . Considere  $E \subset M^n \times \mathbb{R}^p$  definido por

$$E = \{(x, v) | x \in M^n \text{ e } v \in T(M^n)_x\}$$

e defina  $p : E \rightarrow M^n$  por  $p(x, v) = x$ . Então prova-se que isso define um fibrado vetorial  $n$ -dimensional com base  $M^n$  chamado **fibrado tangente** a  $M^n$ .

**Definição 2.7.** [Fibrado Normal a  $M^n$ ] Seja  $M^n \subset \mathbb{R}^p$ . Considere  $W \subset M^n \times \mathbb{R}^p$  definido por

$$W = \{(x, v) | x \in M^n \text{ e } v \in T(M^n)_x^\perp\}$$

em que  $T(M^n)_x^\perp \subset \mathbb{R}^p$  é o complemento ortogonal de  $T(M^n)_x$  em  $\mathbb{R}^p$  detectado pelo produto interno usual (euclideo). Defina  $q : W \rightarrow M^n$  por  $q(x, v) = x$ . Então prova-se que isso define um fibrado vetorial  $(p - n)$ -dimensional com base  $M^n$  chamado "fibrado normal de  $M^n$  em  $\mathbb{R}^p$ ".

**Observação 2.3.** Seja novamente  $M^n \subset \mathbb{R}^p$ . Temos então dois fibrados vetoriais sobre  $M^n$  atrás mencionados, o fibrado tangente, o qual denotaremos por  $T(M^n) \xrightarrow{p} M^n$  e o fibrado normal que será denotado por  $T(M^n)^\perp \xrightarrow{q} M^n$ . Podemos então considerar a soma de Whitney  $T(M^n) \oplus T(M^n)^\perp$  que já vimos que é um fibrado vetorial sobre  $M^n$ . Para cada  $x \in M^n$  a fibra em  $x$  do fibrado soma de Whitney pode ser materializada como  $T(M^n)_x \oplus T(M^n)_x^\perp$ , uma vez que a interseção dos dois subespaços,  $n$  e  $(p - n)$  dimensionais, é  $\{\vec{0}\}$  (vetor nulo de  $\mathbb{R}^p$ ). Mas o espaço vetorial acima é, para todo  $x$ , igual a  $\mathbb{R}^p$ . Ora mas então o fibrado soma de Whitney destes dois fibrados é equivalente ao fibrado produto  $M^n \times \mathbb{R}^p \xrightarrow{p} M^n$

## 2.1 Os problemas da imersão e do mergulho

Novamente,  $M^n$  designará uma variedade fechada,  $n$ -dimensional de classe  $C^\infty$ . Uma imersão  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma aplicação  $C^\infty$  tal que, para todo  $y \in M^n$ , existe parametrização  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de tal sorte que  $\varphi'(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é injetora. Prova-se que tal condição independe de  $\varphi$ . Prova-se ainda, que o subespaço vetorial  $T_f(M^n)_x = (f \circ \varphi)'(x)(\mathbb{R}^n)$  de  $\mathbb{R}^p$  independe de  $\varphi$ .

Considere o subespaço  $P \subset M^n \times \mathbb{R}^p$  definido por:

$$P = \{(x, v) | x \in M^n \text{ e } v \in T_f(M^n)_x\}$$

e  $p : P \rightarrow M^n$  dada por  $p(x, v) = x$ . Então prova-se que isso define um fibrado vetorial  $(p - n)$ -dimensional, chamado "fibrado tangente da imersão  $f$ ". Analogamente, podemos definir o "fibrado normal da imersão  $f$ ", o qual é fibrado vetorial cujo espaço total  $Q \subset M^n \times \mathbb{R}^p$  é definido por

$$Q = \{(x, v) | x \in M^n \text{ e } v \in T_f(M^n)_x^\perp\}$$

e sua projeção é  $q : Q \rightarrow M^n$  é definida por  $q(x, v) = x$ . Note que, todo mergulho é, em particular, uma imersão, então pelo Teorema de Whitney (2.1) podemos supor  $p \leq 2n$  e neste caso pode-se provar que,  $\forall x \in M^n$ :

$$T_f(M^n)_x \oplus T_f(M^n)_x^\perp = \mathbb{R}^p$$

Isso significa que, denotando o fibrado normal da imersão  $f$  por  $T_f(M^n)^\perp$ , e o fibrado tangente da imersão  $f$  por  $T_f(M^n)$ , a soma de Whitney  $T(M^n)_f \oplus T_f(M^n)^\perp$  equivale ao fibrado produto  $p$ -dimensional com base  $M^n$ , ou seja, é trivial.

**Observação 2.4.** *Toda imersão é um difeomorfismo local, tal fato decorre da forma local das imersões.*

Um resultado importantíssimo, no âmbito da teoria de imersões, é o seguinte

**Teorema 2.2.** [Teorema de Imersão de Whitney] *Toda  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{2n-1}$*

O teorema acima foi provado na década de 40. Na década de 80, um matemático chamado Ralph Cohen provou uma conjectura célebre, melhorando o teorema acima:

**Teorema 2.3.** [Ralph Cohen (página 238 em [[7])] *Toda  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ , em que  $\alpha(n)$  é o número de 2's (com potências distintas) que participam da representação binária de  $n$ .*

**Exemplo 2.1.** (i) *Se  $n$  é uma potência de 2, então os teoremas de Ralph e Whitney coincidem.*

(ii) Se  $n = 2^m - 1$  então  $n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}$ , o que implica, nesse caso que toda  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{2n-m}$ . Por exemplo, toda  $M^{15}$  imerge em  $\mathbb{R}^{26}$ , toda  $M^{63}$  imerge em  $\mathbb{R}^{120}$ .

No entanto, a correspondente conjectura para mergulhos (Toda  $M^n$  mergulha em  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)+1}$ ) ainda não foi provada.

O resultado dá origem ao chamado "problema da imersão" da seguinte maneira:

- pode-se provar que  $M^n$  não imerge em  $\mathbb{R}^n$ .
- O Teorema 2.3 garante que  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ .
- Existem exemplos de  $M^n$  que não imergem em  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)-1}$  mostrando que o resultado não pode ser melhorado de maneira geral.
- Por outro lado existem  $M^n$  que mergulham, e portanto imergem, em  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $S^n$  por exemplo)
- Então, dada  $M^n$  específica, existe  $m \in \{n+1, \dots, 2n-\alpha(n)\}$  de modo que  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^m$  e não imerge em  $\mathbb{R}^{m-1}$

Então, dada  $M^n$  específica, encontrar tal  $m$  é resolver o problema da imersão para a tal  $M^n$ . O problema do mergulho é análogo, com  $m \in \{n+1, \dots, 2n\}$ .

Neste trabalho, na direção do que J. Milnor fez para  $\mathbb{R}P^{2^r}$  com  $r \in \mathbb{N}$ , ilustraremos esse problema, usando algumas variedades especiais, a saber, as variedades de Dold e as variedades de Wall, com o uso de classes características.

# Capítulo 3

## Cohomologia

Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade 1 e  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 0$ , o  $n$ -simplexo padrão. Sejam  $C_n(X) = \{f : \Delta_n \rightarrow X \mid f \text{ é contínua}\}$ , e  $S_n(X, R)$  o  $R$ -módulo livre gerado pelos elementos de  $C_n(X)$ , ou seja, todo elemento de  $S_n(X, R)$  é da forma  $r_1\phi_1 + \cdots + r_p\phi_p$  (soma formal), em que  $0 \neq r_i \in R$  e  $\phi_i \in C_n(X)$ ,  $0 \leq i \leq p$ . Tal soma rigorosamente significa uma função  $C_n(X) \rightarrow R$  tal que  $\phi_i \mapsto r_i \neq 0$  para  $0 \leq i \leq p$  e  $\phi \mapsto 0$  para qualquer  $\phi \notin \{\phi_1, \dots, \phi_p\}$ .

Existe um  $R$ -homomorfismo  $\partial : S_n(X, R) \rightarrow S_{n-1}(X, R)$ , denominado operador bordo, que satisfaz  $\partial \circ \partial = 0$ , gerando então um complexo de cadeias:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{n+1}(X, R) \xrightarrow{\partial} S_n(X, R) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

A homologia desse complexo de cadeias é denominada "homologia de  $X$  com coeficientes em  $R$ ". Especificamente, no nível  $n$  tal homologia é  $H_n(X, R)$  definido por:

$$H_n(X, R) = \frac{\text{Ker}\{\partial : S_n(X, R) \rightarrow S_{n-1}(X, R)\}}{\text{Img}(\partial : S_{n+1}(X, R) \rightarrow S_n(X, R))} =: \frac{Z_n(X, R)}{B_n(X, R)}$$

Considere a dualização do complexo de cadeias prévio, ou seja,  $S^n(X, R) := \text{hom}(S_n(X, R), R)$  e  $\delta : S^n(X, R) \rightarrow S^{n+1}(X, R)$  definido por  $\delta = \partial^\#$ , isto é,  $\delta(\sigma) = \sigma \circ \partial$ ,  $\sigma \in S^n(X, R)$ . Isso define um complexo de cocadeias cuja cohomologia é denominada cohomologia de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

### 3.1 Homomorfismo induzido em homologia

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  contínua,  $R$  anel comutativo com unidade e  $n \geq 0$  natural. Então existe  $R$ -homomorfismo  $f_* : H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, R)$  descrito como: inicialmente temos  $f_\# : S_n(X, R) \rightarrow S_n(Y, R)$  definido por  $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma \forall \sigma \in C_n(X)$  e estendido por linearidade para  $S_n(X, R)$ . Prova-se que  $f_\#(Z_n(X, R)) \subset Z_n(Y, R)$  e  $f_\#(B_n(X, R)) \subset B_n(Y, R)$  (é aplicação de cadeias) e portanto define, por restrição a  $Z_n(X, R)$  e passagem ao quociente por  $B_n(X, R)$ , um  $R$ -homomorfismo

$$f_* : H_n(X, R) = \frac{Z_n(X, R)}{B_n(X, R)} \rightarrow H_n(Y, R) = \frac{Z_n(Y, R)}{B_n(Y, R)}$$

Dualizando o processo acima, obtemos um  $R$ -homomorfismo  $f^* : H^n(Y, R) \rightarrow H^n(X, R)$ . Especificamente, temos o homomorfismo transposto:

$$f_{\#}^t : \text{hom}(S_n(Y, R), R) = S^n(Y, R) \rightarrow \text{hom}(S_n(X, R), R) = S^n(X, R)$$

isto é,  $f_{\#}^t(g) = g \circ f_{\#}$ . Prova-se também que tal  $R$ -homomorfismo é aplicação de cocadeias e portanto induz, novamente por restrição e quociente, o  $R$ -homomorfismo:  $f^* : H^n(Y, R) \rightarrow H^n(X, R)$ .

**Observação 3.1.** *Se  $R$  é anel comutativo com unidade e  $n \geq 0$  é um natural fixado, então as associações:*

$$\begin{cases} X & \longmapsto H_n(X, R); \\ f : X \rightarrow Y & \longmapsto f : H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, R) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} X & \longmapsto H^n(X, R); \\ f : X \rightarrow Y & \longmapsto f : H^n(Y, R) \rightarrow H^n(X, R) \end{cases}$$

são funtores, covariante e contravariante respectivamente, da categoria dos espaços topológicos e funções contínuas, na categoria dos  $R$ -módulos com  $R$ -homomorfismos.

**Observação 3.2.** *Se  $M, N$  são  $R$ -módulos, existe um  $R$ -módulo associado, denotado por  $\text{Ext}(M, N)$ , daí o seguinte resultado é conhecido:*

$$H^n(X, R) \simeq H_n(X, R) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X), R)$$

e se  $R$  é corpo, prova-se que  $\text{Ext}(H_{n-1}(X), R)$  é nulo e portanto  $H^n(X, R) \simeq H_n(X, R)$ . Mesmo quando  $R$  não é corpo, existem propriedades de  $\text{Ext}$  que torna relativamente simples sua computação, com isso, a partir da homologia, o cômputo da cohomologia em cada nível  $n$  é uma tarefa algébrica relativamente simples.

**Exemplo 3.1.** *Se  $R = \mathbb{Z}_2$  (corpo), temos:*

$$(i) \ H^j(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2 \text{ se } 0 \leq j \leq n \text{ e } H^j(\mathbb{R}P^n) \simeq \{0\} \text{ se } j > n.$$

$$(ii) \ H^j(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2 \text{ se } j = 0 \text{ ou } j = n \text{ e } H^j(S^n) \simeq \{0\} \text{ caso contrário.}$$

## 3.2 Produto Cup

Considere  $R$  anel arbitrário. Se  $X$  é um espaço topológico,  $\alpha \in H^n(X, R)$  e  $\beta \in H^m(X, R)$ ,  $\alpha$  é representado por um cociclo  $f : S_n(X, R) \rightarrow R$  e  $\beta$  é representado por um cociclo

$g : S_m(X, R) \rightarrow R$ . É possível decompor o simplexo padrão  $\Delta_{n+m}$  em dois simplexos standards, chamados “ $n$ -front face”  $\Delta'_n$  e “ $m$ -back face”  $\Delta'_m$  (vide [4]). Com isso,  $f$  e  $g$  definem funções  $f : \Delta'_n \rightarrow R$ ,  $g : \Delta'_m \rightarrow R$ . Podemos então definir uma função  $f' \cup g' : \Delta_{m+n} \rightarrow R$  dada por:  $(f' \cup g')(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

Estendendo por linearidade, obtemos o homomorfismo  $f \cup g : S_{n+m}(X, R) \rightarrow R$  e prova-se que  $f \cup g$  é um  $m+n$  cociclo, cuja classe de cohomologia depende somente de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Ou seja, isso define um produto  $H^n(X, R) \times H^m(X, R) \rightarrow H^{n+m}(X, R)$  dado por  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta = \alpha \cup \beta = [f] \cup [g] = [f \cup g]$  chamado ”produto cup”. Embora  $\alpha \cup \beta$  seja uma notação padrão na literatura, por simplicidade denotaremos simplesmente por  $\alpha \cdot \beta$ .

Prova-se que o produto cup define estrutura, de anel graduado, no grupo abeliano:

$$H^*(X, R) = H^0(X, R) \oplus H^1(X, R) \oplus \cdots \oplus H^n(X, R) \oplus \cdots$$

especificamente, vale:

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$  elementos de  $H^m(X, R)$ ,  $H^n(X, R)$  e  $H^p(X, R)$  respectivamente
- se  $\alpha \in H^n(X, R)$  e  $\beta_1, \beta_2 \in H^m(X, R)$  então  $\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha \cdot \beta_1 + \alpha \cdot \beta_2$
- impõe-se a seguinte distributividade em  $H^*(X, R)$ :
 
$$(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_t}) \cdot (\beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \cdots + \beta_{j_k}) = \sum_{s=1}^t \sum_{l=1}^k \alpha_{i_s} \cdot \beta_{j_l}$$
 tais somas são somas formais, em que  $\alpha_{i_s} \in H^{i_s}(X, R)$  e  $\beta_{j_l} \in H^{j_l}(X, R)$ .

Esta é a estrutura de anel, mencionada anteriormente, em  $H^*(X, R)$ . Se  $X$  for conexo, sabemos da topologia algébrica que  $H_0(X, R) \simeq R$ , e como  $H_{-1}(X, R) = \{0\}$ , segue que  $H^0(X, R) \simeq H_0(X, R) \simeq R$ . Então existe  $\alpha \in H^0(X, R)$  que corresponde ao elemento unidade  $1 \in R$  pelo isomorfismo acima. Por simplicidade, denotamos tal  $\alpha$  por  $1 \in H^0(X, R)$  e então prova-se que  $1$  é um elemento unidade para o produto cup. Porém  $H^*(X, R)$  não é comutativo, mas vale o seguinte, se  $\alpha \in H^p(X, R)$  e  $\beta \in H^q(X, R)$ :

$$\alpha \cdot \beta = (-1)^{p+q} \beta \cdot \alpha$$

Então, se  $R = \mathbb{Z}_2$ , segue que  $1 = -1$  em  $R$ , e portanto  $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ , munido do produto cup, é anel graduado comutativo com unidade.

Daqui em diante assumiremos, a menos de menção contrária, que  $R = \mathbb{Z}_2$  e vamos denotar  $H^n(X, \mathbb{Z}_2)$  simplesmente por  $H^n(X)$ . Aditivamente, como  $\mathbb{Z}_2$  é corpo, segue que  $H^n(X, R) \simeq H_n(X, R)$ . No entanto, a computação do anel  $H^*(X)$  pode ser muito mais complicada devido ao comportamento do produto cup.

Mais especificamente, sabemos que  $\forall n \geq 0$ ,  $H^n(X)$  sempre é um produto direto (finito ou não) de cópias de  $\mathbb{Z}_2$  (uma vez que  $H^n(X)$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -módulo livre, por  $\mathbb{Z}_2$  ser corpo).

Se  $X$  é um  $CW$ -complexo finito em cada dimensão, então produto direto é finito para cada  $n \geq 0$  (em particular, se  $X$  é uma variedade conexa). Porém o comportamento do produto cup não é tão simples de descrever, por exemplo suponha  $X$  tal que:

$$H^3(X) = \mathbb{Z}_2(a) \oplus \mathbb{Z}_2(b) \oplus \mathbb{Z}_2(c) = \{0, a, b, c, a + b, a + c, b + c, a + b + c\}$$

$$H^4(X) = \mathbb{Z}_2(v) \oplus \mathbb{Z}_2(w) = \{0, v, w, v + w\}$$

$$H^7(X) = \mathbb{Z}_2(t) \oplus \mathbb{Z}_2(s) = \{0, t, s, t + s\}$$

então dados  $\alpha \in H^3(X)$  e  $\beta \in H^4(X)$  sabemos que  $\alpha \cdot \beta \in H^7(X)$ , mas o problema é saber quem é  $\alpha \cdot \beta$ . Neste exemplo, supondo que  $H^n(X) = \{0\} \forall n \notin \{0, 3, 4, 7\}$ , para solucionar tal problema é suficiente determinar quem são  $a \cdot v, a \cdot w, b \cdot v, b \cdot w, c \cdot v, c \cdot w$  por causa da distributividade do produto cup. Em geral este é um problema difícil, ainda desempenhando um papel relevante na literatura. Algumas técnicas famosas (sequência espectral, sequência de Bredon, sequência de Gysin) são ferramentas efetivas nesse contexto. Porém, neste trabalho, não vamos nos preocupar com esse problema pois iremos usar apenas anéis conhecidos.

**Definição 3.1.** Uma **base aditiva** para  $H^*(X)$  é uma união de bases de cada  $H^n(X)$ ,  $n \geq 0$ . Em outras palavras, uma base aditiva  $\beta^*$  para  $H^*(X)$  é uma união  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \beta_i$ , em que  $\beta_i$  é base de  $H^i(X)$

**Observação 3.3.** Se  $A \subset H^*(X)$  é base aditiva, o cômputo do anel  $H^*(X)$  se resume a determinar quem é  $a \cdot b \forall a, b \in A$ .

**Exemplo 3.2** (Anel de cohomologia de  $S^n$ ). O anel de cohomologia de  $S^n$  é muito simples pois  $H^n(S^n) = \mathbb{Z}_2$  e  $H^j(S^n) = \{0\}, \forall j \notin \{0, n\}$ . Portanto, os únicos elementos não nulos do anel são  $1 \in H^0(S^n)$  e o elemento não nulo  $\alpha$  em  $H^n(S^n) = \mathbb{Z}_2$ . Mas  $1$  é o elemento unidade e, portanto, o único produto não trivial a ser determinado é  $\alpha \cdot \alpha$ , mas este pertence a  $H^{2n}(S^n) = \{0\}$ , portanto  $\alpha \cdot \alpha = 0$ .

### 3.3 Produto Cross

Se  $\alpha \in H^p(X)$  e  $\beta \in H^q(Y)$ , definimos o "produto cross" de  $\alpha$  e  $\beta$ , denotado por  $\alpha \times \beta$ , da seguinte maneira:

$$\alpha \times \beta = p_1^*(\alpha) \cup p_2^*(\beta) = p_1^*(\alpha) \cdot p_2^*(\beta)$$

em que  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  e  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  são as projeções  $p_1(x, y) = x$  e  $p_2(x, y) = y$ . O teorema a seguir decorre da fórmula de Künneth para cohomologia e do fato de  $\mathbb{Z}_2$  ser um corpo:

**Teorema 3.1.** *Se  $A \subset H^*(X)$  e  $B \subset H^*(Y)$  são bases aditivas, então  $A \times B = \{a \times b | a \in A \text{ e } b \in B\}$  é base aditiva para  $H^*(X \times Y)$ .*

**Observação 3.4.** *Veja que  $(a \times b) \cdot (c \times d) = (p_1^*(a) \cdot p_2^*(b)) \cdot (p_1^*(c) \cdot p_2^*(d)) = (p_1^*(a) \cdot p_1^*(c)) \cdot (p_2^*(b) \cdot p_2^*(d)) = p_1^*(a \cdot c) \cdot p_2^*(b \cdot d) = (a \cdot c) \times (b \cdot d)$  (lembrando que se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, a induzida em cohomologia  $f^* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$  preserva o produto cup). Tal fato, junto com o teorema acima, nos dizem que se conhecermos as estruturas multiplicativas dos anéis de cohomologia de  $X$  e  $Y$ , então conhecemos a de  $X \times Y$ .*

**Exemplo 3.3.** *Considere  $S^n \times S^m$  com  $n \neq m$ . Uma base aditiva para  $H^*(S^n)$  é  $\{1, \alpha\}$  em que  $\alpha$  é o gerador de  $H^n(S^n)$ , e  $\{1, \beta\}$  para  $H^*(S^m)$ , sendo  $\beta \in H^m(S^m)$  o gerador. Pelo teorema, segue que  $A \times B = \{1 \times 1, \alpha \times 1, 1 \times \beta, \alpha \times \beta\}$  é uma base aditiva para  $H^*(S^n \times S^m)$ . Note que:*

$$1 \times 1 = 1 \in H^0(S^n \times S^m)$$

$$\alpha \times 1 \in H^n(S^n \times S^m)$$

$$1 \times \beta \in H^m(S^n \times S^m)$$

$$\alpha \times \beta \in H^{n+m}(S^n \times S^m)$$

sendo portanto, os respectivos geradores desses grupos. Para determinar o anel de cohomologia, basta verificar que:

- $(\alpha \times 1) \cdot (\alpha \times 1) = (\alpha \cdot \alpha) \times (1 \cdot 1) = p_1^*(\alpha^2) \cdot p_2^*(1)$  mas  $\alpha \cdot \alpha \in H^{2n}(S^n)$  que é nulo, portanto  $p_1^*(\alpha^2) = 0$  o que implica  $(\alpha \times 1)^2 = 0 \in H^{2n}(S^n \times S^m)$
- com um argumento análogo, obtemos  $(\beta \times 1)^2 = 0 \in H^{2m}(S^n \times S^m)$
- finalmente,  $(\alpha \times 1) \cdot (1 \times \beta) = (\alpha \cdot 1) \times (1 \cdot \beta) = \alpha \times \beta$ , que é o gerador de  $H^{n+m}(S^n \times S^m)$

No caso  $n = m$ ,  $\{1 \times 1, \alpha \times 1, 1 \times \beta, \alpha \times \beta\}$  é base aditiva para  $H^*(S^n \times S^n)$  e, nesse caso:

$$H^n(S^n \times S^n) = \mathbb{Z}_2(\alpha \times 1) \oplus \mathbb{Z}_2(1 \times \beta)$$

Usando o mesmo argumento anterior obtemos  $(\alpha \times 1)^2 = 0$  e  $(1 \times \beta)^2 = 0$  e  $(\alpha \times 1) \cdot (1 \times \beta) = \alpha \times \beta$  o gerador de  $H^{2n}(S^n \times S^n)$

**Observação 3.5.** *É usual denotar  $\alpha \times 1 = \alpha$ , pois  $\alpha \times 1 = p_1^*(\alpha) \cdot p_2^*(1) = p_1^*(\alpha)$ .*

**Exemplo 3.4.** Generalizando o exemplo anterior, tome um produto de esferas  $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_k} = X$ . Então, se  $\alpha_i \in H^{n_i}(S^{n_i})$  é o gerador, uma base aditiva para  $H^*(X)$  é constituída pelo elemento unidade 1 de  $H^0(X)$ , e todos os produtos da forma:  $\alpha_{i_1} \times \alpha_{i_2} \times \dots \times \alpha_{i_j}$ , com  $i_t \neq i_l$  se  $t \neq l$ ,  $j \leq n$ .

Além disso, tomando dois básicos  $x = \alpha_{i_1} \times \alpha_{i_2} \times \dots \times \alpha_{i_j}$  e  $y = \beta_{k_1} \times \beta_{k_2} \times \dots \times \beta_{k_u}$  temos:

$$x \cdot y = \alpha_{i_1} \times \alpha_{i_2} \times \dots \times \alpha_{i_j} \times \beta_{k_1} \times \beta_{k_2} \times \dots \times \beta_{k_u} \text{ se } \{i_1, \dots, i_j\} \cap \{k_1, \dots, k_u\} = \emptyset,$$

e  $x \cdot y = 0$  se  $t \in \{i_1, \dots, i_j\} \cap \{k_1, \dots, k_u\} \neq \emptyset$  pois nesse caso,  $\alpha_t = \beta_t$  é o gerador de  $H^t(X)$  o que implica  $\alpha_t \cdot \beta_t = \alpha_t^2 \in S^{2t}(S^t) = \{0\}$ .

**Exemplo 3.5.** Sabe-se, por [4], que  $H^j(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2 \forall 0 \leq j \leq n$  e  $= \{0\}$  se  $j > n$ . Da literatura, sabe-se que, se  $0 < j \leq n$  e  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$  é o elemento não nulo, então  $\alpha^j \in H^j(\mathbb{R}P^n)$  é não nulo, e se  $j > n$ , obviamente  $\alpha^j = 0$

**Exemplo 3.6.** Seja  $X = \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ . Uma base aditiva para  $H^*(\mathbb{R}P^n)$  é  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^n\}$  e para  $H^*(\mathbb{R}P^m)$  é  $\{1, \beta, \dots, \beta^m\}$ . Segue do Teorema 3.1 que uma base aditiva para  $H^*(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m)$  é  $\{1\} \cup \{\alpha_i \times \beta_j \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, (i, j) \neq (0, 0)\}$  convencionando que  $\alpha^0 = \beta^0 = 1$ .

Além disso,  $(\alpha^i \times \beta^j) \cdot (\alpha^t \times \beta^l) = \alpha^{i+t} \times \beta^{j+l}$  é não nulo se  $i+t \leq n$  e  $j+l \leq m$ , isso descreve totalmente o anel  $H^*(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m)$ . Por exemplo, se  $X = \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^2$ ,  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^3)$  e  $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^2)$  geradores temos:

$$H^1(X) = \mathbb{Z}_2(\alpha \times 1) \oplus \mathbb{Z}_2(1 \times \beta)$$

$$H^2(X) = \mathbb{Z}_2(1 \times \beta^2) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha \times \beta) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha^2 \times 1)$$

$$H^3(X) = \mathbb{Z}_2(\alpha \times \beta^2) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha^2 \times \beta) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha^3 \times 1)$$

$$H^4(X) = \mathbb{Z}_2(\alpha^2 \times \beta^2) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha^3 \times \beta)$$

$$H^5(X) = \mathbb{Z}_2(\alpha^3 \times \beta^2)$$

## Capítulo 4

# Construções importantes

### 4.1 Os espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^n$

Considere o grupo de Lie  $(S^1, \cdot)$  com a multiplicação complexa. Considere  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$  e a ação de  $S^1$  em  $\mathbb{C}^{n+1}$  dada pela restrição da multiplicação:  $(z, (w_1, w_2, \dots, w_{n+1})) \mapsto (z \cdot w_1, \dots, z \cdot w_{n+1})$ .

Tal ação pode ser restrita a  $S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$  e nesse caso, é uma ação livre, isto é, se  $z \cdot w = w$  para algum  $w \in S^{2n+1}$  então  $z = 1$ . Em outras palavras, uma ação é livre se, todo homeomorfismo  $\varphi_z : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$  induzido pela ação, com  $z \neq 1$  não tem ponto fixo. De fato se  $z \cdot (w_1, \dots, w_{n+1}) = (w_1, \dots, w_{n+1})$ , como  $(w_1, \dots, w_{n+1}) \in S^{2n+1}$  segue que  $w_i \neq 0$  para algum  $i$ , então  $z \cdot w_i = w_i$  o que implica  $z = 1$ .

Seja  $w \in S^{2n+1}$  e considere a órbita  $orb(w) = \{z \cdot w | z \in S^1\}$ , então  $S^1 \rightarrow S^{2n+1}$  dado por  $z \mapsto z \cdot w$  é um mergulho analítico de  $S^1$  em  $S^{2n+1}$  com imagem  $orb(w)$ , que é portanto uma cópia analítica de  $S^1$  contida em  $S^{2n+1}$ .

Isso determina uma partição de  $S^{2n+1}$  em órbitas. Considere o espaço quociente  $\frac{S^{2n+1}}{\sim}$  em que cada órbita é identificada a 1 ponto. Pode-se provar que  $\frac{S^{2n+1}}{\sim}$  é variedade fechada de dimensão  $2n$ . E ainda,  $S^{2n+1}$  é o espaço total de um fibrado, com espaço  $\frac{S^{2n+1}}{\sim}$ , fibra  $S^1$  e a projeção quociente  $p : S^{2n+1} \rightarrow \frac{S^{2n+1}}{\sim}$ .

O espaço  $\frac{S^{2n+1}}{\sim}$  é denominado "espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional" e é denotado por  $\mathbb{C}P^n$ .

**Exemplo 4.1.** *Pode-se provar que  $H_1(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) = \{0\}$  e  $H_2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , daí como  $\mathbb{C}P^n$  tem dimensão 2, do teorema de classificação de superfícies segue que  $\mathbb{C}P^1$  é homeomorfo a  $S^2$ .*

Pode-se provar, usando homologia celular, que  $H_j(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  se  $0 < j \leq 2n$  é par e  $H_j(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \{0\}$  se  $j$  é ímpar ou  $j > 2n$ . Isto implica, pelo teorema de mudança de coeficientes, que  $H_j(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  se  $0 < j \leq 2n$  é par e  $\mathbb{Z}_2 = \{0\}$  se  $j > 2n$  ou  $j$  é ímpar.

O anel de cohomologia  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  é conhecido, mas sua computação requer algo mais do que topologia algébrica básica. Se  $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$  é o gerador, então  $\alpha^j \in H^{2j}(\mathbb{C}P^n)$  é o gerador se  $j \leq n$ , e obviamente  $0 = \alpha^j \in H^{2j}(\mathbb{C}P^n)$  se  $j > n$ .

**Exemplo 4.2.** Considere  $X = \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{C}P^3$ . Uma base aditiva para  $H^*(\mathbb{R}P^3)$  é  $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$  e uma para  $H^*(\mathbb{C}P^3)$  é  $\{1, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ , em que  $\alpha$  é o gerador de  $H^1(\mathbb{R}P^3)$  e  $\beta$  o gerador de  $H^2(\mathbb{C}P^3)$ . Então:

$$H^1(X) = Z_2(\alpha \times 1)$$

$$H^2(X) = Z_2(1 \times \beta) \oplus Z_2(\alpha^2 \times 1)$$

$$H^3(X) = Z_2(\alpha \times \beta) \oplus Z_2(\alpha^3 \times 1)$$

$$H^4(X) = Z_2(1 \times \beta^2) \oplus Z_2(\alpha^2 \times \beta)$$

$$H^5(X) = Z_2(\alpha \times \beta^2) \oplus Z_2(\alpha^3 \times \beta)$$

$$H^6(X) = Z_2(1 \times \beta^3) \oplus Z_2(\alpha^2 \times \beta^2)$$

$$H^7(X) = Z_2(\alpha \times \beta^3) \oplus Z_2(\alpha^3 \times \beta^2)$$

$$H^8(X) = Z_2(\alpha^2 \times \beta^3)$$

$$H^9(X) = Z_2(\alpha^3 \times \beta^3)$$

## 4.2 O fibrado-linha (ou “fibrado de Hopf”) associado a uma involução suave sem pontos fixos

Seja  $M^n$  variedade fechada  $C^\infty$ , e seja  $T : M^n \rightarrow M^n$  uma involução  $C^\infty$  sem pontos fixos, isto é,  $T \circ T = Id$  e  $T(x) \neq x \forall x \in M^n$ .

Se  $x \in M^n$ , usando que  $M^n$  é Hausdorff e que  $T$  é difeomorfismo  $C^\infty$ , pode-se provar que existe aberto  $U$  de  $M^n$ , homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ , que contém  $x$  e que  $U$  e  $T(U)$  sejam disjuntos e ambos sejam domínios de cartas locais. Considere o espaço quociente  $\frac{M^n}{T}$  obtido pela identificação  $x \sim T(x) \forall x \in M^n$ . Então pode-se provar que

$\frac{U \cup T(U)}{T}$  é homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ , o que torna  $\frac{M^n}{T}$  uma variedade  $n$ -dimensional, fechada e  $C^\infty$ .

**Exemplo 4.3.** Considere  $A : S^n \rightarrow S^n$  a antipodal ( $A(x) = -x$ ). Nesse caso,  $\frac{S^n}{A}$  é o espaço projetivo real  $\mathbb{R}P^n$ .

Seja  $T : M^n \rightarrow M^n$  involução  $C^\infty$  sem pontos fixos. Em  $M^n \times \mathbb{R}$  considere a relação  $\sim$ , que identifica  $(x, r)$  com  $(T(x), -r)$ . Então

$$\frac{M^n \times \mathbb{R}}{\sim} = \{[(x, r)] \mid x \in M^n \text{ e } r \in \mathbb{R}\}$$

é uma variedade fechada  $C^\infty$  de dimensão  $n + 1$  (pois  $(x, r) \mapsto (T(x), -r)$  é involução  $C^\infty$  sem pontos fixos). Pode-se provar que a aplicação  $p : \frac{M^n \times \mathbb{R}}{\sim} \rightarrow \frac{M^n}{T}$ ,  $p([(x, r)]) = [x] = \{x, T(x)\}$  é  $C^\infty$  e ainda,  $\forall [x] \in \frac{M^n}{T}$ ,  $p^{-1}([x])$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Isso determina um fibrado vetorial de dimensão 1, denominado "fibrado-linha associado a involução  $(M^n, T)$ ", ou "fibrado de Hopf associado a  $\frac{M^n}{T}$ ".

**Exemplo 4.4.** O fibrado de Hopf  $\eta \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , associado a involução antipodal  $(S^n, A)$ , é denominado "fibrado-linha canônico" sobre  $\mathbb{R}P^n$ .

### 4.3 As variedades de Dold $P(m, n)$

Em  $\mathbb{C}P^n = \{[(z_0, \dots, z_{n+1})] \mid (z_0, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}\}$  considere a aplicação de conjugação  $C : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , dada por  $C([(z_0, \dots, z_{n+1})]) = [(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{n+1})]$ .  $C$  é bem definida, pois se  $\lambda \in S^1$ :

$$[(\overline{\lambda z_0}, \dots, \overline{\lambda z_{n+1}})] = [(\bar{\lambda} \bar{z}_0, \dots, \bar{\lambda} \bar{z}_{n+1})] = [\bar{\lambda}(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{n+1})] = [(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_{n+1})]$$

a última igualdade segue da definição de  $\mathbb{C}P^n$ , pois  $\bar{\lambda} \in S^1$ . Como  $\bar{\bar{z}} = z$  segue que  $C$  é involução e pode-se provar que é também  $C^\infty$ .

Por azar,  $C$  tem pontos fixos, especificamente, para  $w \in \mathbb{C}P^n$ ,  $C[w] = [w]$  se, e somente se, a classe  $[w]$  tem um representante com todas as coordenadas reais, e tal subconjunto é a imagem do mergulho  $C^\infty$ , de  $\mathbb{R}P^n$  em  $\mathbb{C}P^n$  dado por  $[(z_0, \dots, z_{n+1})] \mapsto [(z_0, \dots, z_{n+1})]$

Em outras palavras, o conjunto dos pontos fixos de  $C$  é uma cópia difeomorfa de  $\mathbb{R}P^n$ . Considere  $S^m \times \mathbb{C}P^n$  que é variedade fechada,  $C^\infty$  de dimensão  $n + 2m$ . Considere a aplicação  $T = A \times C$ , sendo  $A : S^m \rightarrow S^m$  a antipodal, e  $C : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  a conjugação citada acima.

Então  $T : S^m \times \mathbb{C}P^n \rightarrow S^m \times \mathbb{C}P^n$ ,  $T(x, y) = (A(x), C(y))$  é involução,  $C^\infty$ . E mais,  $T$  não tem pontos fixos, pois  $T(x, y) = (x, y)$  implicaria  $A(x) = x$  o que é absurdo. Portanto, pela construção da seção anterior, podemos considerar

$$\frac{S^m \times \mathbb{C}P^n}{T}$$

que é variedade fechada,  $C^\infty$  e  $(m + 2n)$ -dimensional.

**Definição 4.1.** [Variedade de Dold] A variedade  $\frac{S^m \times \mathbb{C}P^n}{T}$ , definida acima, é denominada **variedade de Dold** e é denotada por  $P(m, n)$ .

A homologia e cohomologia de  $P(m, n)$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$  pode ser descrita da seguinte forma: existe um mergulho canônico  $S^1 \rightarrow S^m \rightarrow S^m \times \mathbb{C}P^n$  (no segundo,  $S^1$  se realiza como parte de uma fatia  $S^m \times w$ ,  $w \in \mathbb{C}P^n$  fixo), o qual dá origem a uma classe de homologia  $c' \in H_1(P(m, n), \mathbb{Z}_2)$ , a qual é não nula.

Existe também um mergulho canônico similar  $S^2 \equiv \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n \rightarrow S^m \times \mathbb{C}P^n$  o qual, via passagem ao quociente, dá origem a uma classe de homologia  $d' \in H_2(P(m, n), \mathbb{Z}_2)$ , a qual também é não nula. Como aditivamente  $H_1(P(m, n)) \equiv H^1(P(m, n))$  e  $H_2(P(m, n)) \equiv H^2(P(m, n))$ , podemos tomar os correspondentes a  $c'$  e  $d'$ ,  $c \in H^1(P(m, n))$ ,  $d \in H^2(P(m, n))$ .

Note que,  $c'$  sendo o quociente do mergulho mencionado anteriormente, se transforma no gerador da cópia  $\frac{S^1 \times \bar{w}}{\sim} \subset \frac{S^1 \times \bar{w}}{\sim} = \frac{S^m}{A_1} \times \bar{w} = \mathbb{R}P^m$  e portanto, pode-se provar que  $c^j \in H^j(P(m, n))$  é não nulo se  $j \leq m$  e  $c^j = 0$  se  $j > m$ . Da mesma forma, pode-se provar que  $d^j \in H^{2j}(P(m, n))$  é não nulo se  $j \leq n$  e  $d^j = 0$  se  $j > n$ .

**Teorema 4.1** (vide [5]).  $H^*(P(m, n), \mathbb{Z}_2)$  é um anel polinomial graduado nas variáveis  $c$  e  $d$ , truncado pelas relações  $c^{m+1} = 0$  e  $d^{n+1} = 0$

**Corolário 4.1.** Uma base aditiva para  $H^*(P(m, n), \mathbb{Z}_2)$  é  $\{c^i d^j, 0 \leq i \leq m \text{ e } 0 \leq j \leq n, \text{ convencioando que } c^0 d^0 = 1\}$

**Exemplo 4.5.** Vamos descrever, como exemplo,  $H^*(P(4, 3))$ :

$$\begin{aligned} H^1(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c) \\ H^2(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^2) \oplus \mathbb{Z}_2(d) \\ H^3(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^3) \oplus \mathbb{Z}_2(cd) \\ H^4(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^4) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 d) \oplus \mathbb{Z}_2(d^2) \\ H^5(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^3 d) \oplus \mathbb{Z}_2(cd^2) \\ H^6(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^4 d) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(d^3) \\ H^7(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^3 d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(cd^3) \\ H^8(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^4 d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 d^3) \\ H^9(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^3 d^3) \\ H^{10}(P(4, 3)) &= \mathbb{Z}_2(c^4 d^3) \end{aligned}$$

## 4.4 O Fibrado Universal $\nu^n \rightarrow BO(n)$

Veremos agora a construção de um espaço muito importante, denotado por  $BO(n)$  (espaço base do fibrado vetorial universal de dimensão  $n$ ).

**Definição 4.2.** [Topologia Fraca] Se  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  é uma união enumerável de subespaços  $A_n$ , tais que  $A_n \subset A_{n+1}$  podemos definir uma topologia em  $X$  da seguinte maneira,  $F \subset X$

é fechado se  $F \cap A_i$  é fechado em  $A_i$  para todo  $i$ . Essa topologia é denominada "topologia fraca" (weak topology).

**Exemplo 4.6.**  $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$ , para cada  $n$ , uma cópia de  $S^n$  é subespaço de  $S^{n+1}$ . Então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$  com a topologia fraca é chamada "esfera infinita", denotada por  $S^{\infty}$

**Exemplo 4.7.**  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ , novamente, para cada  $n$ ,  $\mathbb{R}^n$  é subespaço de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , todos com a topologia euclidiana. Então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^i$$

com a topologia fraca é denotado por  $\mathbb{R}^{\infty}$ . O espaço  $\mathbb{R}^{\infty}$  também pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i \text{ e } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n_0} \neq 0 \text{ e } x_n = 0 \text{ se } n > n_0\}$$

ou seja, o conjunto das sequências reais "quase nulas". Esse é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão infinita, com base  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ , em que  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  (vale 1 na posição  $i$  e 0 nas outras posições)

Fixando  $n \in \mathbb{N}$ , o exemplo anterior é útil para definirmos um espaço muito importante, o qual denotamos por  $BO(n)$  e em seguida descreveremos seu anel de cohomologia  $H^*(BO(n), \mathbb{Z}_2)$ .

Primeiramente, considere o conjunto

$$Y = \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \times \dots \times \mathbb{R}^{\infty} \text{ (} n \text{ cópias)}$$

munido da topologia produto. A seguir, considere o subespaço  $\overline{BO(n)}$  do espaço  $Y$  acima, definido por:

$$\overline{BO(n)} = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in Y \mid \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset \mathbb{R}^{\infty} \text{ é l.i.}\}$$

Note que, por definição, cada elemento de  $\overline{BO(n)}$  é uma base para um subespaço vetorial  $\pi$  de  $\mathbb{R}^{\infty}$  de dimensão  $n$  ( $n$ -plano) em  $\mathbb{R}^{\infty}$ . Definimos em  $\overline{BO(n)}$  a seguinte relação de equivalência:

$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \sim (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$  se ambos geram o mesmo subespaço vetorial  $\pi \subset \mathbb{R}^{\infty}$ . É fácil ver que  $\sim$  é relação de equivalência e finalmente,  $\frac{\overline{BO(n)}}{\sim}$  com a topologia quociente é o espaço denotado por  $BO(n)$ , chamado "espaço classificante para fibrados  $n$ -dimensionais", pela seguinte razão; podemos pensar em  $BO(n)$  como a coleção de todos os  $n$ -planos contidos em  $\mathbb{R}^{\infty}$ . Podemos definir um fibrado vetorial  $\nu^n$ , muito importante, cuja base é  $BO(n)$ . Seu espaço total  $E$  é definido por

$$E = \{(\Pi, v) \in BO(n) \times \mathbb{R}^{\infty} \mid \Pi \in BO(n) \text{ e } v \in \Pi\}$$

com a topologia induzida de  $BO(n) \times \mathbb{R}^\infty$ . A projeção  $p : E \rightarrow BO(n)$  é dada por  $p(\Pi, v) = \Pi$ . E note que, dado  $\Pi \in BO(n)$  temos

$$p^{-1}(\Pi) = \{\Pi\} \times \mathbb{R}^\infty \simeq \Pi \simeq \mathbb{R}^n$$

(note que no primeiro fator do produto cartesiano acima,  $\Pi$  é apenas "um ponto" de  $BO(n)$ , no segundo fator, é o subconjunto  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^\infty$ ). Tal fibrado é denominado "fibrado universal  $n$ -dimensional" e é de grande importância pelo seguinte;

**Teorema 4.2.** [Teorema da Classificação] *Seja  $\eta \rightarrow X$  um fibrado vetorial  $n$ -dimensional arbitrário, em que o espaço base  $X$  é paracompacto. Então existe função contínua  $f : X \rightarrow BO(n)$  tal que o fibrado pullback  $f^!(\nu^n)$  é equivalente ao  $\eta$ . Tal função  $f$  chama-se função classificante para  $\eta$ . E mais,  $g : X \rightarrow BO(n)$  é função classificante para  $\eta$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  são homotópicas.*

**Corolário 4.2.** *A coleção de fibrados  $n$ -dimensionais, a menos de equivalência, sobre um espaço paracompacto  $X$ , está em correspondência biunívoca com a coleção das classes de homotopia de  $X$  em  $BO(n)$ .*

Denotamos a coleção das classes de homotopia de um espaço  $X$  em um espaço  $Y$  por  $[X, Y]$

**Exemplo 4.8.** *Vamos considerar todos os fibrados vetoriais unidimensionais sobre  $S^1$ , os quais pelo corolário acima, estão em correspondência biunívoca com  $[S^1, BO(1)]$ . Mas note que,*

$$BO(1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ \text{retas em } \mathbb{R}^i \text{ que passam pela origem} \} \simeq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}P^i$$

o qual é denotado por  $\mathbb{R}P^\infty$ . Disso temos

$$[S^1, BO(1)] = [S^1, \mathbb{R}P^\infty] \simeq \Pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$$

mas  $\Pi_1$  de um CW-complexo é igual ao  $\Pi_1$  de seu 2-esqueleto, o que implica  $\Pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \Pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ . Portanto, como mencionado anteriormente, só existem 2 fibrados vetoriais unidimensionais não equivalentes sobre a  $S^1$ , o fibrado trivial e o fibrado-linha canônico, já apresentados anteriormente.

O teorema a seguir é provado em [[3], página]

**Teorema 4.3.** *Seja  $n > 0$  fixado. Para cada  $j$ ,  $0 < j \leq n$  existe  $v_j \in H^j(BO(n))$  não nulo, de tal sorte que  $H^*(BO(n))$  é  $\mathbb{Z}_2$ -anel polinomial gerado por  $v_1, \dots, v_n$ , sem truncamentos.*

**Exemplo 4.9.** (i)  $H^5(BO(3)) = \mathbb{Z}_2(v_1^5) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1^3 v_2) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1^2 v_3) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1 v_2^2) \oplus \mathbb{Z}_2(v_2 v_3)$

(ii)  $\forall n \geq 1, H^n(BO(1)) = \mathbb{Z}_2(v_1^n)$

$$(iii) \ H^n(BO(n)) = \bigoplus_{a,b \in \mathbb{N} \mid a+2b=n} \mathbb{Z}_2(v_1^a v_2^b)$$

$$(iv) \ H^4(B(10)) = \mathbb{Z}_2(v_1^5) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1^3 v_2) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1^2 v_3) \oplus \mathbb{Z}_2(v_1 v_4) \oplus \mathbb{Z}_2(v_5)$$

$$(v) \ H^n(BO(4)) = \bigoplus_{a,b,c,d \mid a+2b+3c+4d=n} \mathbb{Z}_2(v_1^a v_2^b v_3^c v_4^d)$$



## Capítulo 5

### Classes Características

Dado um fibrado vetorial  $\eta \rightarrow X$  de dimensão  $k > 0$ , em que  $X$  é paracompacto, vamos definir um objeto algébrico residindo em  $H^*(X)$ , o qual será denotado por  $W(\eta)$  e terá a forma (como soma formal)

$$W(\eta) = 1 + w_1(\eta) + \dots + w_k(\eta)$$

o qual será denominado **classe total de Stiefel-Whitney** de  $\eta$ , em que para cada  $j$ ,  $w_j(\eta) \in H^j(X)$  é denominado " $j$ -ésima classe de Stiefel-Whitney de  $\eta$ ". Os termos **classe de Stiefel-Whitney** podem ser substituídos por **classe característica**. Os  $w_i$  são construídos da seguinte maneira; tome  $f : X \rightarrow BO(k)$  uma aplicação classificante para  $\eta$ . Lembre que, do teorema 4.2,  $BO(k)$  é  $\mathbb{Z}_2$ -anel graduado polinomial gerado por certos  $v_i \in H^i(BO(k))$ , para  $0 < i \leq k$ . Considere a induzida em cohomologia  $f^* : H^i(BO(k)) \rightarrow H^i(X)$ , então defina para cada  $0 < i \leq k$ ,  $w_i(\eta) = f^*(v_i)$ , daí o objeto desejado é

$$1 + f^*(v_1) + \dots + f^*(v_k)$$

E tal objeto não depende da escolha da aplicação classificante  $f$ , pois qualquer outra aplicação classificante  $g$  para  $\eta$  é homotópica a  $f$ , e com isso sabe-se, da topologia algébrica básica, que  $f^* = g^*$ .

**Definição 5.1.** [Classe Tangencial] *Se  $M^n$  é uma variedade suave, denotamos a classe característica do seu fibrado tangente por  $W(T(M^n)) = W(M^n)$ , a qual é também chamada **classe tangencial** de  $M^n$ .*

A seguir, descreveremos algumas propriedades importantes das classes de Stiefel-Whitney:

1. Sejam  $X, Y$  paracompactos,  $f : X \rightarrow Y$  contínua e  $\eta \rightarrow Y$  um fibrado vetorial  $k$ -dimensional. Seja  $W(\eta) = 1 + v_1 + \dots + v_k$  a classe de Stiefel-Whitney de  $\eta$ , então  $W(f!(\eta)) = f^*(W(\eta))$ , em que  $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ , em outras palavras,  $W(f!(\eta)) = 1 + b_1 + \dots + b_k$  na qual  $b_i = f^*(v_i)$ ,  $\forall 0 \leq i \leq k$ .

2. Se  $\eta$  e  $\mu$  são fibrados vetoriais,  $k$  e  $r$  dimensionais respectivamente, então  $W(\eta \oplus \mu) = W(\eta) \cdot W(\mu)$  (produto cup). Em outras palavras, sejam

$$W(\eta) = 1 + v_1 + \dots + v_k$$

$$W(\mu) = 1 + w_1 + \dots + w_r$$

então

$$W(\eta \oplus \mu) = (1 + v_1 + \dots + v_k) \cdot (1 + w_1 + \dots + w_r) = 1 + b_1 + \dots + b_{k+r}$$

$$\text{em que } b_j = \sum_{t+s=j} v_t \cdot w_s$$

3. Seja  $\xi \rightarrow \mathbb{R}P^1$  o fibrado-linha canônico (lembrando que  $\mathbb{R}P^1$  é homeomorfo a  $S^1$ ). Seja  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1)$  o elemento não nulo, então:

$$W(\xi) = 1 + \alpha$$

**Observação 5.1.** *Alguns autores usam a alternativa de definir as classes de Stiefel-Whitney usando as propriedades acima como axiomas, adicionando a condição, se  $\eta$  é  $k$ -dimensional, então  $w_j(\eta) = 0$  se  $j > k$ .*

Ou seja, as classes de Stiefel-Whitney é uma teoria que associa, a cada fibrado vetorial  $\eta$ ,  $k$ -dimensional sobre um espaço paracompacto  $X$ , um objeto  $1 + w_1(\eta) + \dots \in H^*(X)$  que satisfaz os 4 axiomas:

- (i) se  $j > k$  então  $w_j(\eta) = 0$
- (ii) se  $\eta$  e  $\mu$  são fibrados vetoriais sobre  $X$ , então  $W(\eta \oplus \mu) = W(\eta) \cdot W(\mu)$
- (iii) Se  $\eta$  é um fibrado vetorial sobre  $Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, então  $W(f!(\eta)) = f^*(W(\eta))$
- (iv)  $W(\xi \rightarrow \mathbb{R}P^1) = 1 + \alpha$

Prova-se que, considerando apenas a categoria dos fibrados vetoriais sobre espaços paracompactos, tal teoria é única. Via de regra, primeiro introduz-se o que é uma tal teoria, depois prova-se sua unicidade e ao final mostra-se sua existência. Conforme visto, optamos pela existência em primeiro plano.

A seguir, provaremos as propriedades 1 e 3 e daremos um sketch da prova da propriedade 2, detalhes podem ser vistos, por exemplo, em [3].

**Prova da propriedade 1 :** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  função contínua e  $\eta$  um fibrado vetorial  $k$ -dimensional sobre  $Y$ . Denotemos, como antes,  $H^*(BO(k)) = \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_k]$ . Seja  $g : Y \rightarrow BO(k)$  aplicação classificante para  $\eta$  e  $\nu^k \rightarrow BO(k)$  o fibrado universal.

Por definição de  $g$ ,  $g!(\nu^k)$  é equivalente a  $\eta$ . Mas  $(g \circ f)!(\nu^k) = f!(g!(\nu^k)) = f!(\eta)$  e portanto  $g \circ f$  é função classificante para  $f!(\eta)$ .

Novamente, por definição

$$W(f!(\eta)) = (g \circ f)^*(1 + v_1 + \dots + v_k) = f^*(g^*(1 + v_1 + \dots + v_k)) = f^*(1 + w_1(\eta) + \dots + w_k(\eta))$$

o que prova a propriedade 1. ■

Antes de dar um sketch sobre a propriedade 2, observemos que, se  $\eta$  e  $\mu$  são fibrados vetoriais sobre os espaços paracompactos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, então o fibrado produto  $\eta \times \mu \rightarrow X \times Y$  é equivalente a  $p_1!(\eta) \oplus p_2!(\mu)$  em que  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  e  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  são as projeções  $(x, y) \mapsto x$  e  $(x, y) \mapsto y$  respectivamente.

**Sketch da propriedade 2 :** Considere então, como no enunciado da propriedade 2, que  $\eta$  e  $\mu$  tenham dimensões  $k$  e  $r$  respectivamente, e que sejam fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço paracompacto  $X$ . Tome aplicações classificantes  $f : X \rightarrow BO(k)$  e  $g : X \rightarrow BO(r)$ , para  $\eta$  e  $\mu$  respectivamente.

Temos então a aplicação contínua  $h : X \rightarrow BO(k) \times BO(r)$ , definida por  $h(x) = (f(x), g(x))$ . Considere  $\nu^k \rightarrow BO(k)$  e  $\nu^r \rightarrow BO(r)$  os fibrados universais. Temos então o fibrado produto  $\nu^k \times \nu^r = p_1!(\nu^k) \oplus p_2!(\nu^r) \rightarrow BO(k) \times BO(r)$ , o qual é fibrado vetorial de dimensão  $k + r$ .

Existe então aplicação classificante  $F : BO(k) \times BO(r) \rightarrow BO(k + r)$  para  $\nu^k \times \nu^r$ , ou seja,  $F!(\nu^{k+r}) = p_1!(\nu^k) \oplus p_2!(\nu^r)$  segue então que  $(F \circ h)!(\nu^{k+r}) = h!(F!(\nu^{k+r})) = (f, g)!(p_1!(\nu^k) \oplus p_2!(\nu^r)) = (f, g)!(p_1!(\nu^k)) \oplus (f, g)!(p_2!(\nu^r)) = (p_1 \circ (f, g))!(\nu^k) \oplus (p_2 \circ (f, g))!(\nu^r) = f!(\nu^k) \oplus g!(\nu^r) = \eta \oplus \mu$ . Ou seja,  $F \circ h$  é aplicação classificante para  $\eta \oplus \mu$ . Em [3] é provado que

$$(F \circ h)^*(1 + v_1 + \dots + v_{k+r}) = (1 + w_1(\eta) + \dots + w_k(\eta)) \cdot (1 + w_1(\mu) + \dots + w_r(\mu))$$

Segue que  $W(\eta \oplus \mu) = W(\eta) \cdot W(\mu)$ , como desejado. ■

**Prova da propriedade 3 :** Sabemos que  $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}P^n$ . Considere então  $i : \mathbb{R}P^1 \rightarrow BO(1)$  a inclusão natural. Seja  $b$  um 1-ciclo que representa o elemento não nulo de  $H_1(\mathbb{R}P^1) \simeq \mathbb{Z}_2$  (na verdade  $b$  pode ser tomado como o caminho que dá uma volta completa em  $\mathbb{R}P^1 = S^1$  em qualquer sentido). Então  $i_* : H_1(\mathbb{R}P^1) \rightarrow H_1(BO(1))$  é tal que  $i_*[b] = [i(b)] \in H_1(BO(1))$  é o elemento não nulo. Transpondo, concluímos que  $i^* : H^1(BO(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1)$  é isomorfismo; segue, lembrando que  $H^*(BO(1)) = \mathbb{Z}_2[v_1]$

com  $v_1 \in H^1(BO(1))$ , que  $i^*(v_1) = \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1)$ , o gerador. Por outro lado, considere o fibrado universal  $\nu^1 \rightarrow BO(1)$ , temos que o espaço total de  $\nu^1$  restrito a  $\mathbb{R}P^1 \subset BO(1)$  pode ser visto como  $E = \{(\pi, v) | \pi \text{ é uma reta em } \mathbb{R}^2 \text{ e } v \in \pi\}$ . E também, o espaço total do fibrado-linha canônico  $\xi^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  é  $\frac{S^1 \times \mathbb{R}}{\sim}$ , em que  $\sim$  identifica  $(x, r)$  com  $(-x, -r)$ . Pode-se mostrar que a aplicação

$$f : \frac{S^1 \times \mathbb{R}}{\sim} \rightarrow E$$

$f([x, r]) = (\pi, rx)$ , em que  $\pi$  é a reta que passa pela origem e por  $x$  (e portanto por  $-x$ ), é uma equivalência entre  $\xi^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$  e  $\nu^1|_{\mathbb{R}P^1}$ , note que  $f([-x, -r]) = (\pi, -r(-x) = rx)$  dá a boa definição e é fácil ver que  $f$  comuta com as respectivas projeções. Agora,  $i!(\nu^1) = \nu^1|_{\mathbb{R}P^1}$  que é equivalente a  $\xi^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ . Portanto,  $i : \mathbb{R}P^1 \rightarrow BO(1)$  é uma aplicação classificante para  $\xi^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ . Segue que  $W(\xi^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1) = i^*(1 + v_1) = 1 + i^*(v_1) = 1 + \alpha$ , como queríamos. ■

**Observação 5.2.** *É claro que  $Id : BO(n) \rightarrow BO(n)$  é uma aplicação classificante para o fibrado universal  $\nu^n \rightarrow BO(n)$ . Segue que  $W(\nu^n) = Id^*(1 + v_1 + \dots + v_n) = Id(1 + v_1 + \dots + v_n) = 1 + v_1 + \dots + v_n$ . Isso justifica porque  $1 + v_1 + \dots + v_n \in H^*(BO(n))$  é chamada “classe característica universal”.*

*A Seguir, descreveremos alguns fatos sobre classes características.*

1. *Seja  $X$  paracompacto. Denote por  $n\mathbb{R} \rightarrow X$  o fibrado vetorial trivial  $n$ -dimensional, o qual, a menos de equivalência, tem espaço total  $X \times \mathbb{R}^n$ . Sabemos que, se  $f : X \rightarrow BO(n)$  é uma aplicação constante, então  $f!(\nu^n)$  é equivalente a  $n\mathbb{R} \rightarrow X$ , e portanto  $f$  é uma aplicação classificante para  $n\mathbb{R} \rightarrow X$ . Seja  $f(x) = \pi \in BO(n)$ , então  $f$  se fatora como  $f = i \circ j$*

$$X \xrightarrow{j} \{\pi\} \xrightarrow{i} BO(n)$$

*em que  $i$  é a inclusão. Portanto, se  $r \geq 1$ , como  $H^r(\{\pi\}) = \{0\}$  ( $\{\pi\}$  é um ponto), temos  $f^* = j^* \circ i^* : H^r(BO(n)) \rightarrow H^r(X)$  é o homomorfismo nulo. Segue que  $W(n\mathbb{R} \rightarrow X) = f^*(1 + v_1 + \dots + v_n) = 1$ , ou seja,  $w_j(n\mathbb{R}) = 0$  se  $1 \leq j \leq n$ .*

2. *Denotemos por  $\xi_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$  o fibrado linha canônico. Seja  $i : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$  a inclusão natural. Da topologia algébrica básica, sabemos que  $i_* : H_1(\mathbb{R}P^1) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^n)$  leva o elemento não nulo de  $H_1(\mathbb{R}P^1)$  no elemento não nulo de  $H_1(\mathbb{R}P^n)$ . Segue que  $i^* : H^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1)$  é tal que  $i^*(\beta) = \alpha$ , em que  $\beta$  é o elemento não nulo de  $H^1(\mathbb{R}P^n)$  e  $\alpha$  o elemento não nulo de  $H^1(\mathbb{R}P^1)$ .*

*Por outro lado, o espaço total de  $\xi_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$  é  $\frac{S^n \times \mathbb{R}}{\sim}$ , em que  $\sim$  identifica  $(x, r)$  a  $(-x, -r)$ . Portanto, o espaço total de  $\xi_n^1$  restrito a  $\mathbb{R}P^1$  é*

$$\frac{S^1 \times \mathbb{R}}{\sim} \subset \frac{S^n \times \mathbb{R}}{\sim}$$

aqui

$$\frac{S^1 \times \mathbb{R}}{\sim} = \frac{\{(x, y, 0, \dots, 0), r\}}{\sim}$$

Segue que a restrição de  $\xi_n^1$  a  $\mathbb{R}P^1$  é equivalente a  $\xi_1^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ , o que implica  $i!(\xi_n^1) = \xi_1^1$ . Então pela propriedade 1 de classes características, temos que

$$W(\xi_1^1) = i^*(W(\xi_n^1)) = 1 + i^*(w_1(\xi_n^1))$$

Dai, pela propriedade 3, concluímos que

$i^*(w_1(\xi_n^1)) = \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^1)$ . Mas  $i^* : H^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1)$  é, em particular, injetora o que implica, lembrando que  $i^*(\beta) = \alpha$ ,  $w_1(\xi_n^1) = \beta$ . Portanto  $W(\xi_n^1) = 1 + \beta$

3. É conhecido que o espaço total do fibrado tangente a  $S^n$ ,  $T(S^n)$  é o espaço  $\{(p, v) | p \in S^n \text{ e } v \in [p]^\perp\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ , em que  $[p]$  é a reta em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passa por  $p$  e pela origem. Prova-se que o espaço total do fibrado tangente a  $\mathbb{R}P^n$  é o espaço quociente  $\frac{T(S^n)}{\sim}$ , em que  $\sim$  identifica  $(p, v)$  com  $(-p, -v)$ . Agora, o espaço total do fibrado linha-canônico  $\xi_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n$  é  $\frac{S^n \times \mathbb{R}}{\sim'}$  em que  $\sim'$  identifica  $(p, r)$  com  $(-p, -r)$ , e portanto se tomarmos a soma de Whitney  $\bigoplus_m \xi_n^1$  seu espaço total será

$$\frac{S^n \times \mathbb{R}^m}{\sim}$$

na qual  $\sim$  identifica  $(p, w)$  com  $(-p, -w)$ . Considere então a soma de Whitney

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

em que  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  é o fibrado trivial unidimensional. Seu espaço total é então

$$\frac{T(S^n)}{\sim} \times \mathbb{R}$$

ou seja, classes  $[(p, v, r)] = \{(p, v, r), (-p, -v, r)\}$ .

Por outro lado, a soma de Whitney  $\bigoplus_{n+1} (\xi_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n)$  é

$$\frac{\{(p, w) | p \in S^n, w \in \mathbb{R}^{n+1}\}}{\sim}$$

em que  $\sim$  identifica  $(p, w)$  com  $(-p, -w)$ . Então, dado  $[(p, w)]$  neste último espaço,  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$  e como  $\mathbb{R}^{n+1} = T(S^n)_p \oplus [p]$ ,  $w$  se decompõe de forma única como

$w = v + u$ , em que  $x \in T(S^n)_p$  e  $u \in [p]$ , ou seja,  $u = r \cdot p$  par algum  $r \in \mathbb{R}$ . A aplicação  $[(p, w)] \mapsto [(p, v, r)]$  é bem definida, pois  $w \sim -w$  acarreta, se  $w = x + u$ ,  $-w = -v - u$  e  $-u = r(-p)$ , ou seja,  $(p, w) \sim (-p, -w)$  acarreta  $(p, v, r) \sim (-p, -v, r)$ . Pode-se mostrar que tal associação é uma equivalência entre  $T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{R}$  e a soma de Whitney  $\bigoplus_{n+1}(\xi_n^1 \rightarrow \mathbb{R}P^n)$ .

Segue então que

$$W(T(\mathbb{R}P^n)) = W(T(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{R}) = W((n+1) \oplus \xi_n^1) = W(\xi_n^1)^{n+1} = (1 + \alpha)^{n+1}$$

Em particular, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $w_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} \alpha^i \pmod{2}$ .

**Exemplo 5.1.**  $W(\mathbb{R}P^3) = (1 + \alpha)^4$ , logo

$$w_1(\mathbb{R}P^3) = \binom{4}{1} \alpha = 0$$

$$w_2(\mathbb{R}P^3) = \binom{4}{2} \alpha^2 = 0$$

$$w_3(\mathbb{R}P^3) = \binom{4}{3} \alpha^3 = 0$$

**Exemplo 5.2.**  $W(\mathbb{R}P^2) = (1 + \alpha)^3$ , logo

$$w_1(\mathbb{R}P^2) = \binom{3}{1} \alpha = \alpha$$

$$w_2(\mathbb{R}P^2) = \binom{3}{2} \alpha^2 = \alpha^2$$

**Exemplo 5.3.** O fibrado normal da esfera  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tem espaço total  $\{(p, v) | p \in S^n \text{ e } v \in [p]\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $v \in [p]$ ,  $v = rp$  para um único  $r \in \mathbb{R}$ . A aplicação  $(p, v) \mapsto (p, r) \in S^n \times \mathbb{R}$  é uma equivalência entre tal fibrado normal e o fibrado trivial unidimensional  $\mathbb{R} \rightarrow S^n$ . A soma de Whitney  $T(S^n) \oplus \mathbb{R}$  é equivalente ao fibrado trivial  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n$ . Segue que  $W(T(S^n) \oplus \mathbb{R}) = 1$  o que implica  $W(S^n) = 1$ , pois  $W(\mathbb{R}) = 1$ .

4. Sejam  $M^n, V^m$  variedades fechadas  $C^\infty$ . Juntando a definição do fibrado tangente a uma variedade com o fato de que uma carta local em torno de um ponto  $(p, v) \in M^n \times V^m$  pode ser tomara como um produto de cartas locais em torno de  $p \in M^n$  e  $v \in V^m$ , conclui-se então que

$$T(M^n \times V^m) = T(M^n) \times T(V^m)$$

o qual já foi visto ser equivalente a  $p_1!(T(M^n)) \oplus p_2!(T(V^m))$ , em que  $p_1$  e  $p_2$  são as projeções  $(x, y) \mapsto x$  e  $(x, y) \mapsto y$  respectivamente. Segue que

$$\begin{aligned} W(T(M^n \times V^m)) &= W(M^n \times V^m) = W(p_1!(T(M^n))) \cdot W(p_2!(T(V^m))) = \\ &= p_1^*(W(M^n)) \cdot p_2^*(W(V^m)) = W(M^n) \times W(V^m) \text{ (produto cross)} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.4.** *Sejam  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^4)$  e  $\beta \in H^1(\mathbb{R}P^5)$  os geradores. Então*

$$W(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = W(\mathbb{R}P^4) \times W(\mathbb{R}P^5) = (1+\alpha)^5 \times (1+\beta)^6 = (1+\alpha+\alpha^4) \times (1+\beta^2+\beta^4) = (1 + (1 \times \beta^2) + (1 \times \beta^4) + (\alpha \times 1) + (\alpha \times \beta^2) + (\alpha \times \beta^4) + (\alpha^4 \times 1) + (\alpha^4 \times \beta^2) + (\alpha^4 \times \beta^4))$$

e portanto,

$$w_1(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = \alpha \times 1$$

$$w_2(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = 1 \times \beta^2$$

$$w_3(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = \alpha \times \beta^2$$

$$w_4(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = (1 \times \beta^4) + (\alpha^4 \times 1)$$

$$w_5(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = \alpha \times \beta^4$$

$$w_6(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = (\alpha^4 \times \beta^2)$$

$$w_7(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = 0$$

$$w_8(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = \alpha^4 \times \beta^4$$

$$w_9(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5) = 0$$

**Observação 5.3.**  $1 \times \beta^4 + \alpha^4 \times 1 \neq 0$  uma vez que vimos previamente que  $1 \times \beta^4$  e  $\alpha \times 1$  participam de uma base aditiva de  $H^*(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^5)$ .

## 5.1 Classes tangenciais de algumas variedades

Veremos agora a noção de dois fibrados vetoriais serem estavelmente equivalentes, útil para o cálculo da classe característica de um determinado fibrado.

**Definição 5.2.** *Sejam  $\eta$  e  $\mu$  dois fibrados vetoriais com dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, onde  $m \leq n$ . Dizemos que  $\eta$  e  $\mu$  são estavelmente equivalentes se existem fibrados vetoriais triviais  $\eta'$  e  $\mu'$  com dimensões  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$ , onde  $m + r = n + s$ , de tal sorte que a soma de Whitney  $\eta \oplus \eta'$  é equivalente a  $\mu \oplus \mu'$ .*

Note que, para que dois fibrados vetoriais sejam equivalentes, as dimensões devem ser iguais, o mesmo não é necessário para que sejam estavelmente equivalentes.

**Proposição 5.1.** *Se  $\eta$  e  $\mu$  são estavelmente equivalentes, então  $W(\eta) = W(\mu)$ .*

**Demonstração:** Com as notações da definição acima, existem  $\eta'$  e  $\mu'$  fibrados triviais, de modo que  $\eta \oplus \eta'$  é equivalente a  $\mu \oplus \mu'$ , o que implica

$$W(\mu) = W(\mu) \cdot 1 = W(\mu \oplus \mu') = W(\eta \oplus \eta') = W(\eta) \cdot 1 = W(\eta)$$

■

Em [6] Dold apresentou a classe tangencial de  $P(m, n)$ , mostrando que o fibrado tangente a  $P(m, n)$  é estavelmente equivalente a  $\bigoplus_m \xi \oplus \bigoplus_{n+1} \eta$  em que  $\xi \rightarrow P(m, n)$  é o fibrado unidimensional dado pelo pullback do fibrado-linha canônico sobre  $\mathbb{R}P^m$ , via a aplicação  $[x, z] \rightarrow [x]$  de  $P(m, n)$  em  $\mathbb{R}P^m$ , cuja induzida em cohomologia  $H^1(\mathbb{R}P^m) \rightarrow H^1(P(m, n))$  leva o gerador  $\alpha$  em  $c$ , o que acarreta em  $W(\xi) = 1 + c$ . Por outro lado, o

fibrado  $\eta \rightarrow P(m, n)$  é um fibrado bidimensional real, "herdado" do fibrado linha canônico complexo  $\mu \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , o qual possui espaço total

$$\frac{S^{2n+1} \times \mathbb{C}}{\sim}$$

em que a relação  $\sim$  identifica cada órbita da ação de  $S^1$  em  $S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ , dada por

$$\lambda \cdot (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, z_{n+2}) = (\lambda \cdot z_1, \lambda \cdot z_2, \dots, \lambda \cdot z_{n+1}, \lambda \cdot z_{n+2})$$

e projeção  $\frac{S^{2n+1} \times \mathbb{C}}{\sim} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  dada por  $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, z_{n+2}] \mapsto [z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]$ , cuja fibra é homeomorfa a  $\mathbb{C}$ .

É conhecido, da literatura, que  $W(\mu) = 1 + \beta$ , em que  $\beta \in H^2(\mathbb{R}P^n)$  é o gerador.

Ao passar  $S^m \times \mathbb{C}P^n$  ao quociente pela involução que origina  $P(m, n)$  (antipodal  $\times$  conjugação),  $\mu$  passa por um processo de "tensorialização" por  $\xi$ , originando  $\eta \rightarrow P(m, n)$ , de tal sorte que  $W(\eta) = 1 + c + d$ , e então segue que

$$W(P(m, n)) = (1 + c)^m \cdot (1 + c + d)^{n+1}.$$

Em [5] C.T.C. Wall introduziu as variedades  $Q(m, n)$ , as quais chamaremos de "variedades de Wall" (ao contrário das variedades de Dold, tais variedades foram pouco exploradas posteriormente, por isso não possuem um nome específico) e detalhemos a seguir sua construção. Considere a involução suave  $T \times Id : S^m \times \mathbb{C}P^n \rightarrow S^m \times \mathbb{C}P^n$ , em que  $T : S^m \rightarrow S^m$  é dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_m, -x_{m+1}).$$

**Lema 5.1.** *Considere as involuções  $S : M \rightarrow M$  e  $T : M \rightarrow M$ , em que  $M$  é um conjunto arbitrário. Se  $T \circ S = S \circ T$  então as aplicações*

$$T : \frac{M}{S} \rightarrow \frac{M}{S} \text{ e } S : \frac{M}{T} \rightarrow \frac{M}{T}$$

são involuções suaves.

Usando o lema, vamos verificar que  $T \times Id$  comuta com  $A \times C$  (antipodal  $\times$  conjugação, da definição de  $P(m, n)$ ) a fim de obtermos a boa definição da aplicação  $T \times Id : P(m, n) \rightarrow P(m, n)$ . Temos

$$\begin{aligned} (T \times Id) \circ (A \times C)(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, [z_1, \dots, z_{n+1}]) &= \\ (T \times Id)(-x_1, -x_2, \dots, -x_m, -x_{m+1}, [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n+1}]) &= \\ (-x_1, -x_2, \dots, -x_m, x_{m+1}, [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n+1}]) & \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} (A \times C) \circ (T \times Id)(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, [z_1, \dots, z_{n+1}]) = \\ (A \times C)(x_1, x_2, \dots, x_m, -x_{m+1}, [z_1, \dots, z_{n+1}]) = \\ (-x_1, -x_2, \dots, -x_m, x_{m+1}, [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n+1}]) \end{aligned}$$

Desta forma,  $T \times Id : S^m \times \mathbb{C}P^n \rightarrow S^m \times \mathbb{C}P^n$  define, por passagem ao quociente, uma involução suave em  $P(m, n)$ , a qual denotamos por  $\phi : P(m, n) \rightarrow P(m, n)$ .

**Observação 5.4.** *Seja  $M^n$  qualquer variedade fechada e suave, e seja  $f : M^n \rightarrow M^n$  um difeomorfismo suave. Denote  $I = [0, 1]$  com a topologia euclidiana, e em  $M^n \times I$  considere a relação de equivalência  $\sim$  definida pela partição que individualiza os pontos da forma  $(m, t)$  com  $0 < t < 1$  e contém os subconjuntos binários  $\{(m, 0), (f(m), 1)\}$ , para todo  $m \in M^n$ . Informalmente, identificamos o conjunto  $\{(m, 0) | m \in M^n\}$ , que é uma componente de bordo difeomorfa a  $M^n$ , ao conjunto  $\{(f(m), 1) | m \in M^n\}$  que é a outra componente de bordo de  $M^n \times I$ , também difeomorfa a  $M^n$ . Dado  $(m, 0)$ , seja  $(W, \theta)$  uma carta local (de bordo) em torno de  $(m, 0)$ , considere o difeomorfismo  $\Gamma : M^n \times I \rightarrow M^n \times I$  dado por  $\Gamma(m, t) = (f(m), 1 - t)$ , a escolha de  $(W, \theta)$  pode ser feita suficientemente pequena, de tal sorte que  $W$  é difeomorfa a uma semi-bola de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e com  $\Gamma(W) \cap W = \emptyset$ . Dessa forma,  $\frac{W \cup \Gamma(W)}{\sim}$  é difeomorfa a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$  e é domínio de uma carta local interior (não de bordo) de  $\frac{M^n \times I}{\sim}$ . Mais ainda, como  $M^n$  é compacta, segue  $M^n \times I$  compacta e com isso  $\frac{M^n \times I}{\sim}$  é variedade suave fechada de dimensão  $n + 1$ . Podemos denotar  $\frac{M^n \times I}{\sim}$  por  $W(M^n, T)$ .*

Usando a construção acima podemos definir:

**Definição 5.3.** [Variedade de Wall] *Considere a involução suave  $\phi : P(m, n) \rightarrow P(m, n)$  mencionada anteriormente. Pela construção acima temos a variedade fechada e suave  $W(P(m, n), \phi)$  de dimensão  $m + 2n + 1$ ; essa é, por definição, a variedades de Wall denotada por  $Q(m, n)$ .*

Em [5], Wall, usando seqüências espectrais e outras técnicas finas, determinou o anel de cohomologia  $H^*(Q(m, n))$ , o qual é polinomialmente gerado por elementos  $x, c \in H^1(Q(m, n))$  e  $d \in H^2(Q(m, n))$ , truncado pelas relações  $x^2 = 0$ ,  $d^{n+1} = 0$  e  $c^{m+1} = c^m \cdot x$ . Mais ainda, Wall provou que a classe tangencial de  $Q(m, n)$  é

$$W(Q(m, n)) = (1 + c + d) \cdot (1 + c)^{m-1} \cdot (1 + c + d)^{n+1}$$

**Exemplo 5.5.** *Considere  $M = Q(3, 2)$ ,  $H^*(M)$  é gerado polinomialmente por  $c, x \in H^1(M)$  e  $d \in H^2(M)$  truncado por  $x^2 = 0$ ,  $d^3 = 0$  e  $c^4 = c^3 \cdot x$ , com isso  $c^5 = c^4 \cdot x = c^3 \cdot x^2 = 0$ .  $M$  tem dimensão 8 e*

$$H^1(M) = \mathbb{Z}_2(c) \oplus \mathbb{Z}_2(x)$$

$$H^2(M) = \mathbb{Z}_2(c \cdot x) \oplus \mathbb{Z}_2(d)$$

$$H^3(M) = \mathbb{Z}_2(c^3) \oplus \mathbb{Z}_2(c \cdot d)$$

$$H^4(M) = \mathbb{Z}_2(c^4) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 \cdot d) \oplus \mathbb{Z}_2(c \cdot x \cdot d)$$

$$H^5(M) = \mathbb{Z}_2(c^3 \cdot d) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 \cdot d \cdot x) \oplus \mathbb{Z}_2(c \cdot d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(x \cdot d^2)$$

$$H^6(M) = \mathbb{Z}_2(c^4 \cdot d) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 \cdot d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(c \cdot x \cdot d^2)$$

$$H^7(M) = \mathbb{Z}_2(c^3 \cdot d^2) \oplus \mathbb{Z}_2(c^2 \cdot d^2 \cdot x)$$

$$H^8(M) = \mathbb{Z}_2(c^4 \cdot d^2)$$

*Além disso,*

$$W(M) = (1 + c + x)(1 + c)^2(1 + c + d)^3 = (1 + c + d)(1 + c^2)(1 + c + d)(1 + c^2 + d^2) = (1 + c + x + c^2 + xc^2 + c^3)(1 + c + c^2 + d + c^3 + d^2 + dc^2 + cd^2). \text{ segue que}$$

$$w_1(M) = x$$

$$w_2(M) = c^2 + d + c^2 + xc = d + cx$$

$$w_3(M) = c^3 + c^3 + cd + xc^2 + xd + c^3 + xc^2 + c^3 = cd + xd$$

$$w_4(M) = d^2 + dc^2 + c^4 + xc^3 + c^4 + c^2d + xc^3 + c^4 = d^2 + c^4$$

$$w_5(M) = cd^2 + cd^2 + dc^3 + cd^2 + xdc^2 = dc^3 + xd^2 + xdc^2$$

$$w_6(M) = c^2d^2 + xcd^2 + c^2d^2 + dc^4 = xcd^2 + dc^4$$

$$w_7(M) = c^3d^2 + xc^2d^2 + c^3d^2 = xc^2d^2$$

$$w_8(M) = xc^3d^2 + c^4d^2 = 0$$

## Capítulo 6

### Exemplos de não imersão

Conforme comentado anteriormente, se  $M^n$  é uma variedade suave e fechada, existe associado a ela um número  $i(M^n)$ , relacionado ao “problema da imersão de  $M^n$ ”; especificamente,  $n + 1 \leq i(M^n) \leq 2n - \alpha(n)$  em que  $\alpha(n)$  é o número de potências de 2 que participam da expansão binária de  $n$ , e  $i(M^n)$  é tal que  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^{i(M^n)}$  e não imerge em  $\mathbb{R}^{i(M^n)-1}$ .

Classes características fornecem um método para detectar não imersões, através dos seguintes resultados.

**Teorema 6.1.** *Suponha que  $M^n$  imerge em  $\mathbb{R}^p$ , com  $n + 1 \leq p \leq 2n - \alpha(n)$ . Seja  $\eta'$  o fibrado normal desta imersão. Então  $W(\eta') = 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{p-n}$  não depende da imersão e é igual a  $\frac{1}{W(\tau)}$ , em que  $\tau$  é o fibrado tangente a  $M^n$ .*

**Demonstração:** Recordemos que  $\eta'$  é equivalente ao fibrado normal de  $M^n$ , o qual denotaremos por  $\eta$ , e  $\eta \oplus \tau$  é o fibrado trivial de dimensão  $\mathbb{R}^p$ . Com isso  $W(\eta \oplus \tau) = 1$  o que implica  $W(\eta) = \frac{1}{W(\tau)}$  e portanto  $W(\eta') = \frac{1}{W(\tau)}$ . ■

**Corolário 6.1.** *Se a classe característica de dimensão  $j$  do fibrado normal da imersão ( $u_j$  do enunciado acima) é não nulo, então  $M^n$  não imerge em  $\mathbb{R}^{n+j-1}$ .*

**Demonstração:** Se  $M^n$  imergisse em  $\mathbb{R}^{n+j-1}$ , seu fibrado normal da imersão teria dimensão  $(n + j - 1) - n = j - 1$  o que implicaria  $u_j = 0$ , contrariando a hipótese. ■

**Observação 6.1.** *Note que a prova do fato acima só depende do fato de que  $u_j \neq 0$  para algum  $j$ , no entanto, o maior tal  $j$  é o mais interessante, pois dá o melhor resultado de não imersão.*

Precisamos explicar tecnicamente o teorema acima e descrever algumas técnicas computacionais que viabilizam alguns cálculos na direção pretendida.

Dado um anel de cohomologia  $H^*(M)$ , considere  $B' \subset H^*(M)$  a coleção de elementos do tipo  $1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ , em que  $p > 0$ ,  $x_i$  tem grau  $i$  e  $x_p \neq 0$  (evidentemente, algum  $x_i$  pode ser nulo para  $i < p$ ). Então  $B = B' \cup \{1\}$  é um grupo multiplicativo. De fato,

tal coleção é fechada sob o produto cup e todo elemento  $1 + x_1 + \cdots + x_p$  tem inverso  $1 + y_1 + \cdots + y_l$  em  $B$ , o qual é obtido recursivamente através da equação

$$(1 + x_1 + \cdots + x_p)(1 + y_1 + \cdots + y_l) = 1$$

comparando as partes homogêneas dos dois lados da igualdade. Dessa forma, obtemos  $x_1 + y_1 = 0$  e então  $y_1 = x_1$  (coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ ),  $x_2 + x_1 y_1 + y_2 = 0$  implica  $y_2 = x_1^2 + x_2$ . Indutivamente, se conhecemos  $y_1, \dots, y_{j-1}$  então obtemos  $y_j$  fazendo:

$$\sum_{i=0}^j x_i y_{j-i} = 0 \implies y_j = \sum_{i=1}^j x_i y_{j-i}$$

Em particular, se  $M^n$  é uma variedade suave e fechada,  $W(M^n) = 1 + w_1 + \cdots + w_n \in B \subset H^*(M^n)$ , segue que existe  $\frac{1}{W(M^n)}$ , a qual é a classe característica do fibrado normal de qualquer imersão de  $M^n$  em um espaço euclidiano. Portanto, se  $j$  é o maior natural tal que a classe de dimensão  $j$  de  $\frac{1}{W(M^n)}$  é não nula, então  $M^n$  não imerge em  $\mathbb{R}^{n+j-1}$ . A seguir, descreveremos alguns resultados que facilitam o cálculo de  $\frac{1}{W(M^n)}$ .

O primeiro deles, muito importante computacionalmente, é o teorema de Lucas, o qual facilita a tarefa de detectar a paridade de coeficientes binomiais

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

Tal teorema é relacionado com o fato de que todo número natural  $n > 0$  possui sua expansão binária de forma única, ou seja,  $n$  pode ser escrito como uma soma de potências de 2

$$n = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_p}$$

em que  $x_1 \geq 0$  e  $x_i > x_{i-1}$  para  $i = 2, \dots, p$ . Com isso, se  $x_1 = 0$ ,  $n$  é ímpar e se  $x_1 > 0$ ,  $n$  é par.

**Exemplo 6.1.**  $56 = 2^3 + 2^4 + 2^5$

$$86 = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6$$

Dados naturais  $n, m$  dizemos que "a expansão binária de  $n$  está contida na expansão binária de  $m$ ", se cada potência de 2 que participa da expansão de  $n$ , também participa da expansão de  $m$ , nesse caso, obviamente  $n \leq m$ .

**Teorema 6.2** (Teorema de Lucas). *Dados naturais  $n, m$  com  $n \leq m$ ,  $\binom{m}{n}$  é ímpar, se e somente se, a expansão binária de  $n$  está contida na expansão binária de  $m$ .*

**Exemplo 6.2.**  $\binom{85}{56}$  é par

**Corolário 6.2.** *Se  $n$  é ímpar e  $m$  é par, com  $n < m$ , segue que  $\binom{m}{n}$  é par.*

Considere a seguir um  $\mathbb{Z}_2$ -módulo  $M$ , o qual adicionalmente é um anel comutativo com unidade.

**Lema 6.1.** *Considere um elemento de  $M$  da forma  $1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ ,  $\alpha_p \neq 0$  e  $\alpha_i \neq \alpha_j$  para todo  $i \neq j$  (pois caso contrário  $\alpha_i + \alpha_j = 0$ ). Então*

$$(1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_p)^{2^s} = 1 + \alpha_1^{2^s} + \cdots + \alpha_p^{2^s}$$

**Demonstração:** Faremos indução sobre  $p \geq 2$ . Se  $p = 2$ ,

$$(\alpha + \beta)^{2^s} = \sum_{i=0}^{2^s} \binom{2^s}{i} \alpha^i \beta^{2^s-i}$$

Como  $M$  é  $\mathbb{Z}_2$ -módulo  $\binom{2^s}{i} \neq 0$  se, e somente se, for ímpar. Note que  $\binom{2^s}{0} = 1 = \binom{2^s}{2^s}$ , portanto  $\alpha^0 \beta^{2^s}$  e  $\alpha^{2^s} \beta^0$  sobrevivem. Para  $0 < i < 2^s$ , a expansão binária de  $i$  não contém  $2^s$ , e pelo teorema de Lucas segue que  $\binom{2^s}{i}$  é par. Logo

$$(\alpha + \beta)^{2^s} = \alpha^{2^s} + \beta^{2^s}$$

e segue o resultado para  $p = 2$ . Indutivamente, suponha válido para  $p - 1 \geq 2$ . Então  $p \geq 3$  e

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)^{2^s} = ((\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}) + \alpha_p)^{2^s} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1})^{2^s} + \alpha_p^{2^s} = \alpha_1^{2^s} + \cdots + \alpha_p^{2^s} \text{ o que conclui a demonstração.}$$

■

Tomemos agora  $M$  variedade suave  $n$ -dimensional, e considere o grupo multiplicativo  $B \subset H^*(M)$  previamente definido.

**Lema 6.2.** *Tome  $\alpha \in B$ ,  $\alpha = 1 + x_1 + \cdots + x_p$ . Seja  $2^s$  a menor potência de 2 tal que  $x_i^{2^s} = 0 \forall 1 \leq i \leq p$  (por exemplo se  $n < 2^s$ , em que  $n$  é a dimensão de  $M$ ). Então, para qualquer natural  $0 < r < 2^s$  temos*

$$\frac{1}{\alpha^r} = \frac{1}{(1 + x_1 + \cdots + x_p)^r} = \alpha^{2^s-r} = (1 + x_1 + \cdots + x_p)^{2^s-r}$$

**Demonstração:**

$(1 + x_1 + \cdots + x_p)^r \cdot (1 + x_1 + \cdots + x_p)^{2^s-r} = (1 + x_1 + \cdots + x_p)^{2^s} = 1 + x_1^{2^s} + \cdots + x_p^{2^s} = 1$  uma vez que o  $\mathbb{Z}_2$ -módulo  $H^*(M)$  é um anel comutativo com unidade e para  $\alpha \in H^*(M)$ , temos  $\alpha^t = 0$  se  $t > n = \dim(M)$ . ■

**Observação 6.2.** *Se  $r \geq 2^s$ ,  $r = 2^s + l$ ,  $l \geq 0$ ,  $\alpha^r = \alpha^{2^s} \cdot \alpha^l = \alpha^l$  e portanto o teorema só é relevante para  $0 < r < 2^s$*

## 6.1 Alguns exemplos de não imersão

O exemplo abaixo é famoso e pode ser visto em [2], e mostra, em particular, que o Teorema de Cohen não pode ser melhorado.

**Teorema 6.3.**  $i(\mathbb{R}P^{2^t}) = 2(2^t) - 1$

**Demonstração:** Pelo Teorema de Cohen,  $\mathbb{R}P^{2^t}$  imerge em  $\mathbb{R}^{2 \cdot 2^t - \alpha(2^t)} = \mathbb{R}^{2 \cdot 2^t - 1}$ . Por outro lado,  $W(\mathbb{R}P^{2^t}) = (1 + \alpha)^{2^t + 1}$ , em que  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^{2^t})$  é o gerador, então a menor potência de 2 maior que  $\dim(\mathbb{R}P^{2^t}) = 2^t$  é  $2^{t+1}$ , portanto

$$\frac{1}{W(\mathbb{R}P^{2^t})} = (1 + \alpha)^{2^{t+1} - (2^t + 1)} = (1 + \alpha)^{2^t - 1}$$

e o coeficiente de  $\alpha^{2^t - 1}$  nessa classe é  $\binom{2^t - 1}{2^t - 1} \equiv 1 \pmod{2}$ . Segue que  $W_{2^t - 1}(\eta) = \alpha^{2^t - 1}$ , em que  $\eta$  é o fibrado normal de qualquer imersão de  $\mathbb{R}P^{2^t}$  em um espaço euclidiano. Com isso, pelo Teorema 6.1  $\mathbb{R}P^{2^t}$  não imerge em  $\mathbb{R}^{2^t + (2^t - 1) - 1} = \mathbb{R}^{2^{t+1} - 2}$ , como queríamos. ■

Quando o teorema acima foi apresentado, no livro do Milnor, o Teorema de Cohen ainda não tinha sido provado. Entretanto, já observamos anteriormente que, para o caso em que a dimensão  $n$  da variedade em questão é uma potência de 2, os teoremas de Whitney e Cohen coincidem, pois nesse caso  $\alpha(n) = 1$ .

Nossa contribuição, nessa dissertação, será resolver o problema da imersão para algumas variedades de Dold e de Wall, utilizando algumas ferramentas algébricas, que facilitam o cálculo de  $\frac{1}{W(M^n)}$ , a saber, os lemas 6.1 e 6.2, decorrentes do teorema de Lucas. Também será fortemente utilizada a melhora fornecida pelo Teorema de Cohen em relação ao de Whitney, ou seja, com o Teorema de Whitney não seria possível obter tais soluções.

Também apresentaremos alguns cálculos para outros exemplos de tais variedades, nos quais  $i(M^n)$  é calculado a menos de poucos "gaps" de dimensão.

**Teorema 6.4.**  $i(P(2^s, 2^t)) = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 2$  em que  $1 \leq 2^s \leq 2^t$

**Demonstração:** Conforme visto anteriormente (seção 5.1),  $W(P(2^s, 2^t)) = (1 + c)^{2^s} (1 + c + d)^{2^t + 1}$ , com isso:

$$\frac{1}{W(P(2^s, 2^t))} = (1 + c)^{2^{s+1} - 2^s} (1 + c + d)^{2^{t+1} - (2^t + 1)} = (1 + c^{2^s})(1 + c + d)^{2^t - 1}$$

então, o elemento de maior dimensão  $c^{2^s} \binom{2^t - 1}{2^t - 1} d^{2^t - 1}$  sobrevive e, portanto, do Corolário 6.1, segue que  $P(2^s, 2^t)$  não imerge em  $\mathbb{R}^p$  com  $p = (2^s + 2^{t+1}) + (2^s + 2(2^t - 1)) - 1 = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 3$ .

Por outro lado, pelo Teorema de Cohen,  $P(2^s, 2^t)$  imerge em  $\mathbb{R}^p$  com  $p = 2^{s+1} + 2^{t+1} - 2$ , portanto  $i(P(2^s, 2^t)) = 2^{s+1} + 2^{t+1} - 2$ , como queríamos. ■

**Teorema 6.5.**  $i(Q(2^s, 2^t)) = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 1$  em que  $1 \leq 2^s \leq 2^t$

**Demonstração:** Sabemos que  $W(Q(2^s, 2^t)) = (1 + c + x)(1 + c)^{2^s-1}(1 + c + d)^{2^{t+1}}$ , o que implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(Q(2^s, 2^t))} &= (1 + c + x)^{2^s-1}(1 + c)^{2^{s+1}-(2^s-1)}(1 + c + d)^{2^{t+1}-(2^{t+1})} = \\ &= (1 + c + x)^{1+2+\dots+2^{s-1}}(1 + c)^{2^s+1}(1 + c + d)^{2^t-1} = \\ &= (1 + c + x)(1 + c)^2(1 + c)^{2^2} \dots (1 + c)^{2^{s-1}}(1 + c)^{2^s+1}(1 + c + d)^{2^t-1} = \\ &= (1 + c + x)(1 + c^{2^s})(1 + c + d)^{2^t-1} = \\ &= (1 + c + x)((1 + c)^{2^s-1} + c^{2^s})(1 + c + d)^{2^t-1} = \\ &= ((1 + c)^{2^s-1} + c^{2^s} + c((1 + c)^{2^s-1} + c^{2^s}) + x((1 + c)^{2^s-1} + c^{2^s}))(1 + c + d)^{2^t-1} \end{aligned}$$

com isso, a classe de dimensão  $2^s + 2(2^t - 1)$ , é:

$$w_{2^s+2^{t+1}-2} = (c^{2^s} + c^{2^s} + xc^{2^s-1})d^{2^t-1} = xc^{2^s-1}d^{2^t-1}$$

que é não nulo, portanto  $Q(2^s, 2^t)$  não imerge em  $\mathbb{R}^p$  com  $p = (2^s + 2^{t+1} + 1) + (2^s + 2(2^t - 1)) - 1 = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 2$ . Por outro lado, o Teorema de Cohen nos diz que  $Q(2^s, 2^t)$  imerge em  $2(2^s + 2^{t+1} + 1) - \alpha(2^s + 2^{t+1} + 1) = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 1$ , portanto  $i(Q(2^s, 2^t)) = 2^{s+1} + 2^{t+2} - 1$ , como queríamos. ■

Note que, se tivéssemos usado o Teorema de Whitney, em vez do Teorema de Cohen, concluiríamos, no teorema 6.4, que  $i(P(2^s, 2^t)) \in \{2^{s+1} + 2^{t+2} - 2, 2^{s+1} + 2^{t+2} - 1\}$ , restando dúvida em relação a dimensão  $2^{s+1} + 2^{t+2} - 2$ . E também, no teorema 6.5 obteríamos  $i(Q(2^s, 2^t)) \in \{2^{s+1} + 2^{t+2} - 2, 2^{s+1} + 2^{t+2} - 1\}$ , ou seja, restaria dúvida quanto à dimensão  $2^{s+1} + 2^{t+2} - 2$ , nesses casos, dizemos que o problema da imersão foi solucionado a menos de um gap (uma dimensão).

Mostraremos agora, alguns exemplos de não imersão de espaços projetivos, em que o problema é solucionado a menos de alguns gaps.

**Teorema 6.6.**  $2^{t+1} - 1 \leq i(\mathbb{R}P^{2^t+k}) \leq 2^{t+1} - 1 + 2k - \alpha(k)$  em que  $1 \leq k \leq 2^t - 1$  e  $\alpha$  é o gerador de  $H^1(\mathbb{R}P^{2^t+k})$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $W(\mathbb{R}P^{2^t+k}) = (1 + \alpha)^{2^t+k+1}$ , então:

$$\frac{1}{W(\mathbb{R}P^{2^t+k})} = (1 + \alpha)^{2^{t+1}-(2^t+k+1)} = (1 + \alpha)^{2^t-(k+1)}$$

com isso, o elemento não nulo de maior dimensão é  $\alpha^{2^t-(k+1)}$  e portanto, do corolário 6.1 segue que  $\mathbb{R}P^{2^t+k}$  não imerge em  $\mathbb{R}^p$  com  $p = 2^t + k + 2^t - (k + 1) - 1 = 2^{t+1} - 2$ . Pelo Teorema de Cohen,  $\mathbb{R}P^{2^t+k}$  imerge em  $2(2^t + k) - \alpha(2^t + k) = 2^{t+1} - 1 + 2k - \alpha(k)$ . ■

Os exemplos mais interessantes de aplicação do Teorema 6.6, os quais deixam os menores gaps (um, três e quatro respectivamente) são:

**Corolário 6.3.**  $W(\mathbb{R}P^{2^t+1}) \in \{2^{t+1} - 1, 2^{t+1}\}$

**Corolário 6.4.**  $W(\mathbb{R}P^{2^t+2}) \in \{2^{t+1} - 1, 2^{t+1}, 2^{t+1} + 1, 2^{t+1} + 2\}$

**Corolário 6.5.**  $W(\mathbb{R}P^{2^t+3}) \in \{2^{t+1} - 1, 2^{t+1}, 2^{t+1} + 1, 2^{t+1} + 2, 2^{t+1} + 3\}$



## Referências Bibliográficas

- [1] STEENROD, N., The topology of fibre bundles, Princeton university press, new jersey, 1951.
- [2] MILNOR, J.W.; Characteristic Classes, Princeton University Press and University of Tokyo, New Jersey, 1974.
- [3] OSBORN, H.; Vector bundles, Foundations and Stiefel-Whitney classes; Academic Press, 1982.
- [4] GREENBERG, M.J.;HARPER, J.R.; Algebraic Topology, The benjamin/Cummings Publishing Company; , 1981.
- [5] WALL, C.T.C., Determination of the Cobordism Ring, Annals of Mathematics, 72 (1960), páginas 292-311.
- [6] DOLD, A., Erzeugende der Thomschen Algebra R, Math Zeit., 65(1956) 25-35.
- [7] COHEN, R.L., The immersion conjecture for differentiable manifolds, Annals of Mathematics, 122 (1985), páginas 237-328.