UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA.

LEANDRO ALEX LINCK

A História da Matemática no Ensino da Geometria: Uma contextualização pela Razão Áurea

SOROCABA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA.

LEANDRO ALEX LINCK

A História da Matemática no Ensino da Geometria: Uma contextualização pela Razão Áurea

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Noel Filho

SOROCABA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Leandro Alex Linck, realizada em 22/12/2017:

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Prof. Dr. William Vieira
IFSP

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

A meus Pais pela dedicação e incentivo.

“Eu deveria tentar tratar o vício e a loucura dos humanos geometricamente...
as paixões causadas por ódio, raiva, inveja, e assim por diante,
consideradas em si, seguem a necessidade e a eficácia da natureza...
tratarei, portanto, a natureza e a força da emoção exatamente da mesma
maneira, como se eu estivesse preocupado com linhas, planos e sólidos”.

Baruch Spinoza (1632-1677)

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, sustentada pela confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Noel Filho pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior) pelo auxílio financeiro.

E a todos os meus amigos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, com um agradecimento especial à Luciana Baia Lopes pelos momentos de diversão e descontração, à Lina Flávia Morete de Queirós Maia pelas horas de estudo em sua casa e à Eduardo Rodrigues Franceschini por todo o apoio, o meu muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho pretende ampliar o conhecimento sobre um tema bastante interessante e instigante que é a Razão Áurea, resgatar sua história e sua importância principalmente dentro da Geometria, argumentar sobre a importância dessa Razão na construção do conhecimento matemático, identificando as possíveis conexões com geometria e as mais diferentes áreas do conhecimento. Não deixando de lado o levantamento sobre a História da Matemática como forma de Metodologia de ensino, pois se tem a consciência de que todo processo de ensino deve estar pautado na sua história, e não poderia ser diferente na Matemática. Realizar também um levantamento sobre quais são as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e o do Currículo do Estado de São Paulo para o ensino da Geometria e a partir dessas informações desenvolver atividades que envolvam a Razão Áurea e a Geometria, visando levar o aluno, através de atividades diferenciadas, a construir o seu conhecimento matemático. As cinco atividades propostas neste trabalho foram elaboradas de tal forma que fossem interdisciplinares, visando mostrar aos alunos que a matemática pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento que façam uso da Geometria e desta forma propor a seguinte questão de pesquisa: “Que contribuições a história da matemática contextualizada pela razão áurea pode trazer para o ensino da geometria?”. Trata-se de uma pesquisa de revisão bibliográfica. A análise realizada no que se diz respeito ao ensino da geometria pressupõe que muitas são as contribuições nas diferentes séries escolares, apresentadas pela contextualização da Matemática com a utilização da Razão Áurea. O estudo realizado através da contextualização pode despertar no aluno uma maior motivação, pois podem relacionar situações do cotidiano com a teoria aprendida em sala de aula, e consequentemente, auxilia na construção do conhecimento.

Palavras Chave: Geometria, Ensino, Razão Áurea.

ABSTRACT

The present work intends to extend the knowledge about a very interesting and instigating theme that is the Golden Ratio, to recover its history and its importance mainly within Geometry, to argue about the importance of this Ratio in the construction of mathematical knowledge, identifying the possible connections with geometry and the most different areas of knowledge. Not leaving aside the survey on the History of Mathematics as a form of teaching methodology, because one has the awareness that every teaching process should be based on its history, and could not be different in Mathematics. Also perform a survey on what are the guidelines of the National Curricular Parameters and the Curriculum of the State of São Paulo for the teaching of Geometry and from this information to develop activities involving the Golden Ratio and Geometry, aiming to lead the student through different activities, to build their mathematical knowledge. The five activities proposed in this work were designed in such a way as to be interdisciplinary in order to show students that mathematics can be applied in several areas of knowledge that make use of Geometry and thus propose the following research question: "What contributions do the history of mathematics contextualized by golden reason can bring to the teaching of geometry?" This is a bibliographic review research. The analysis carried out regarding the teaching of geometry presupposes that many are the contributions in the different school series, presented by the contextualization of Mathematics with the use of the Golden Ratio. The study carried out through the contextualization can awaken in the student a greater motivation, since they can relate everyday situations to the theory learned in the classroom, and consequently helps in the construction of knowledge.

Keywords: Geometry, Teaching, Golden Reason.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na atual conjuntura da educação brasileira o ensino da Matemática apresenta um déficit muito grande, os alunos não conseguem realizar muitas vezes os conhecimentos básicos exigidos na escola. Muitos são os fatores que contribuem para essa triste realidade, como despreparo do professor, aulas desestimulantes, falta de recursos adequados, desinteresse do aluno, enfim, segue um ciclo vicioso desde as séries iniciais até as séries finais, aonde o aluno deixa de ter a base e, por isso, não consegue aprender os conteúdos subsequentes (REBOUÇAS, 2014).

A Matemática está presente nas diferentes áreas do conhecimento seja ele escolar ou social, portanto não pode ser tratado como algo isolado, mas sim como um conhecimento interdisciplinar. Mas, para que isso ocorra é necessário que os professores tenham essa visão de que a escola hoje possui uma função social e que a sua pedagogia deve ser adequada a essa realidade, para que assim possibilitem aos alunos a aplicação de suas aprendizagens em contextos diferentes daqueles que foram aprendidos, na expectativa de que o trabalho escolar extrapole a sala de aula.

Diante deste contexto, propomos o estudo da Razão Áurea como mais uma ferramenta de auxílio à aprendizagem da Geometria, conteúdo muitas vezes esquecido em sala de aula e que possui papel de extrema importância no desenvolvimento do raciocínio lógico, na construção da cidadania, pois na medida em que a sociedade amplia a utilização de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, há a necessidade das pessoas se aprimorarem. A intencionalidade deste trabalho parte de aspectos históricos da Razão Áurea, de suas aplicações na Geometria e no dia a dia, procurando desta forma, promover o ensino da Matemática por meio da curiosidade que este tema apresenta.

Com base nas referências estudadas, este trabalho pretende mostrar a importância da Razão Áurea para o estudo da Geometria nas diferentes séries do Ensino Fundamental e Médio, realizar um levantamento histórico dos aspectos mais relevantes sobre ela e entender os caminhos percorridos pelos Matemáticos até chegar ao conhecimento que hoje temos sobre este tema, utilizando principalmente conceitos geométricos e no caso desse trabalho, contextualizar o ensino na geometria nas mais diversas fases do ensino básico.

Com este trabalho, temos a pretensão de estimular a curiosidade e novos estudos de temas que há tempos fizeram parte do cotidiano de grandes matemáticos, desde a antiguidade. No capítulo um, mostraremos um levantamento histórico relacionado à Razão Áurea, desde os primeiros passos até o que se sabe hoje. No capítulo dois e três faremos um levantamento sobre o ensino da Geometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e o Currículo do estado de São Paulo, enfatizando a importância de se utilizar da História da Matemática como forma de metodologia de ensino, mostrando os aspectos positivos trazidos para o ensino da Geometria quando contextualizada pela Razão Áurea. Finalmente, no capítulo quatro mostraremos algumas atividades que podem ser aplicadas ao aluno como forma de estimular a curiosidade e o interesse pelo ensino da Geometria.

1 LEVANTAMENTO HISTÓRICO SOBRE A RAZÃO ÁUREA

Desde os mais primórdios tempos os homens se encantam pelos números e seus mistérios, muitos se dedicaram e se dedicam até hoje em estudos referentes a Matemática, promovendo o conhecimento que hoje possuímos sobre essa área do conhecimento.

Um dos temas que sempre aguçou a curiosidade dos estudiosos desde a época de Euclides, é a questão da incomensurabilidade de um segmento. Sabe-se que é possível construir dois segmentos cuja razão entre seus comprimentos não será expressa por números inteiros (SANTOS, 2013, p. 11).

Podemos tomar como exemplo desses números, o número π (ou *p*i) que está associado à toda forma circular, o número de ouro (φ), relacionado a diversos resultados que modelam fenômenos naturais e ainda o número e, chamado base do logaritmo natural.

A primeira definição da “Razão Áurea” conhecida se deu por volta de 300 a.C. por Euclides de Alexandria que escreveu: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.” (EUCLIDES apud LIVIO, 2011, p.14).

O número de ouro, também conhecido como número *Fi*(φ), razão áurea, razão de ouro ou divina proporção, é um número irracional extremamente enigmático, isso porque ele pode ser encontrado em uma infinidade de elementos da natureza na forma de razão. Esta razão é considerada por muitos pesquisadores uma oferta de Deus ao mundo.

Luca Pacioli (1445-1517), frade franciscano e matemático, justifica em seu livro *De Divina Proportione* (1509) o nome que deu à obra, e, consequentemente à proporção: A razão áurea seria uma manifestação de Deus devido a semelhanças entre eles.

> Das quais, dentre outras, consideraremos quatro como suficientes para o nosso propósito. A primeira é que ela é somente uma e não mais e, não é possível atribuir-lhe outras espécies, nem diferenças. E esta unidade é o supremo epíteto de Deus, segundo toda escola teológica e também filosófica. A segunda correspondência é a da Santa Trindade, isto é, assim como *in divinis* há uma mesma substância em três pessoas, Pai, Filho e Espírito Santo, da mesma maneira, uma mesma proporção desta sorte sempre se encontrará em três termos e nunca em mais ou em menos, como se dirá. A terceira correspondência é que assim como Deus, propriamente, não se pode definir, nem por nós pode ser entendido por palavras, da

> mesma maneira, esta nossa proporção não pode ser determinada por número inteligível, nem ser expressa por quantidade racional, sendo sempre oculta e secreta e, pelos matemáticos, chamada irracional. A quarta correspondência é que, assim como Deus jamais pode mudar e é tudo em tudo e está em tudo em toda parte, da mesma maneira, a nossa presente proporção sempre, em toda quantidade continua ou discreta, seja grande ou pequena, é a mesma e sempre invariável e de nenhum modo pode mudar, nem tampouco pode apreendê-la de outro modo o intelecto [...]. (PACIOLI, 1509 apud BERTATO, 2008, p. 14)

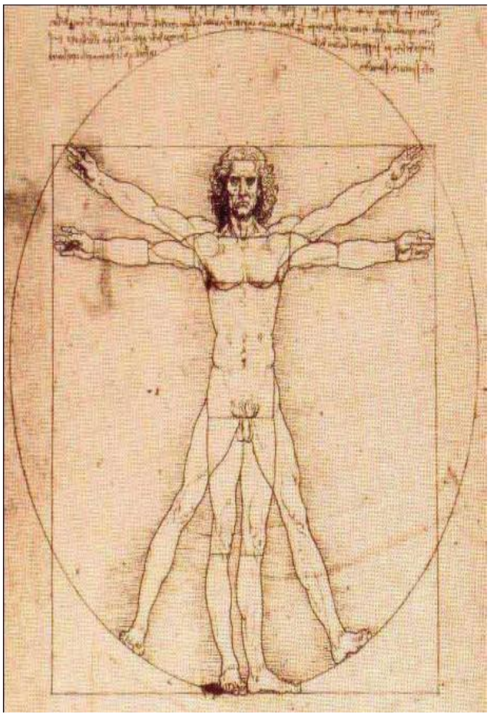
Pacioli foi um dos primeiros estudiosos a buscar proporções e comparações com o corpo humano. Sua visão mística contribuía para uma ideia de "Geometria Sagrada", o que interessava aos artistas renascentistas de sua época (BERTATO, 2008).

De acordo com Lívio (2007), o segundo volume *De Divina Proportione* é um tratado sobre proporção e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano. Pacioli em seu tratado baseou-se, em grande parte, no trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius.

> No corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se o homem for deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas. (VITRUVIUS, s/d apud LÍVIO, 2007, p.157).

Segundo Souza (2013) estudiosos consideraram esta passagem como mais uma demonstração da ligação entre a base orgânica e a geometria da beleza, o que gerou o conceito de Homem Vitruviano, desenhado por Leonardo da Vinci em torno de 1490.

Figura 1 - Homem Vitruviano desenhado por Leonardo da Vinci



Fonte: http://academiadefilosofia.org/

A publicação do livro *De Divina Proportione*, em 1509, resgatou o interesse por se discutir a razão áurea. A partir dessa publicação o tema ganhou significado teológico/filosófico o qual foi estudado mais profundamente por um grupo eclético e cada vez maior de intelectuais. E a partir, do livro de Pacioli, a Razão Áurea passou a estar disponível a artistas em tratados teóricos mais acessíveis.

De acordo com Lívio (2007), Pacioli apresenta no quinto capítulo de seu livro, cinco razões pelas quais acredita que o nome perfeito para Razão Áurea seja proporção divina. A primeira razão é justificada pelo fato de seu valor ser sempre o mesmo não dependendo do comprimento da linha que irá ser dividida, no qual quocientes entre os comprimentos são calculados, ou seja, a razão áurea é um valor único e a unidade é o supremo epíteto do próprio Deus. A segunda razão, diz respeito a uma similaridade entre a existência da Santíssima Trindade e a definição da razão áurea a qual envolve exatamente três comprimentos. A terceira razão é baseada no fato de não se poder compreender Deus e o fato de a razão áurea ser um número irracional. Pacioli dizia que, assim como Deus não pode ser compreendido por meio de palavras, a proporção áurea também não pode ser expressa por uma quantidade racional. Na quarta razão, Pacioli compara a onipresença e a invariabilidade de Deus com a autossimilaridade associada à Razão Áurea. Na quinta razão Pacioli afirma que, assim como Deus criou todo o cosmo através da quinta essência, o que representado o dodecaedro, a razão áurea conferiu existência ao dodecaedro, de modo que não há possibilidade de construir o dodecaedro sem utilizar a Razão Áurea. Nesse viés, ressalta ainda que é infactível comparar aos quatro sólidos platônicos (simbolizando os quatro elementos, terra, água, fogo e ar) entre eles sem a razão áurea (LIVIO apud SOUZA, 2013).

Para Pacioli (1509 apud LÍVIO, 2007), um grande impacto foi causado por Leonardo da Vinci com seus desenhos, confeccionados à mão, de poliedros para o livro *De Divina Proportione,* devido ao fato de, segundo relatos, serem as primeiras ilustrações que se podia visualizar a parte da frente e a de trás de sólidos vazados.

Acredita-se que Leonardo possa ter desenhado o poliedro a partir de uma série de modelos de madeira, pois existem registros da Sala do Conselho em Florença que indicam a aquisição de um conjunto de modelos de madeira de Pacioli para exposição pública na cidade.

Na história da Razão Áurea outro matemático importante que estudou essa proporção e consequentemente o número phi, segundo Contador (2007) foi Leonardo de Pisa que nasceu em Pisa (1175-1250), que também era conhecido como Leonardo Fibonacci. Motivado por seu pai que trabalhava na alfândega fez inúmeras viagens ao Egito, Sicília, Grécia e Síria.

Fibonacci escreveu um livro sobre Geometria, *Practica Geometriae* (1223), o qual contribuiu para a literatura da Razão Áurea (LÍVIO, 2015). Neste livro Fibonacci apresenta novos métodos para o cálculo da medida da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do dodecágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos intimamente ligados à razão áurea. Na solução desses problemas, ele demonstra conhecer muito a geometria euclidiana. Um dos problemas que Fibonacci estudou está relacionado há reprodução de coelhos, uma contribuição importante que veio de um problema aparentemente bastante simples o *Liber Abaci*.

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (FIBONACCI, 1202 apud LÍVIO, 2007, p.116).

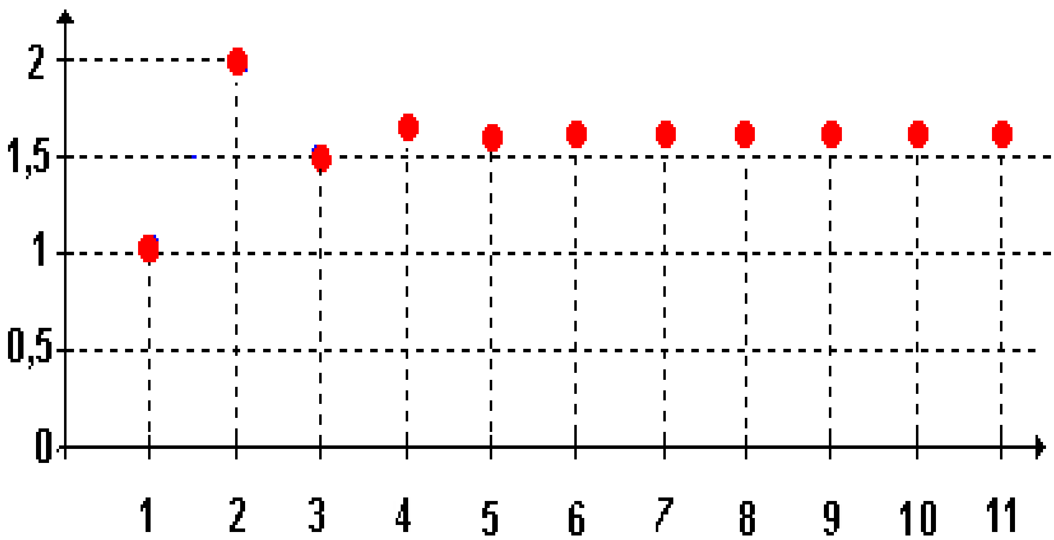
A partir do terceiro mês, o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de adultos nos dois meses anteriores. Como mostra a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., e o número de pares de filhotes segue exatamente a mesma sequência, apenas com a diferença de um mês, 0, 1, 2, 3, 5, 8,... . Observa-se então que o número de pares é simplesmente a soma desses números, que dá a mesma sequência dos pares de adultos, com o primeiro termo omitido (1, 2, 3, 5, 8,...). A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... , na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, recebeu o nome de sequencia de Fibonacci, nome dado pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 – 1891).

Os números presentes na sequência de Fibonacci, a partir do segundo, quando divididos pelo seu antecessor, geram outra sequência:

$$\frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5, \qquad \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots, \qquad \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Sequência essa que cada vez mais se aproxima da Razão Áurea, situação essa que pode ser mais bem percebida quando se coloca em um gráfico, no eixo horizontal ordenam-se as razões sucessivas e no eixo vertical o resultado delas.

Figura 2- Razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci



Fonte: Própria

Nota-se através da figura 2 que as razões vão se aproximando da razão áurea. Quando n tende para o infinito, o limite é exatamente a Razão Áurea.

Sobre ela, Kepler (1571 – 1630) fez o seguinte comentário:

> A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão. O primeiro, podemos comparar a uma medida do áureo; o segundo podemos chamar joia preciosa. (KEPLER, s/d apud HUNTLEY, 1985, p. 35).

Os números e a Matemática têm contribuído para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, a evolução da tecnologia ou outros ramos que muitas vezes parecem ser distantes desta ciência, a Razão Áurea é um destes números que podem ser encontrado desde em Conferências da História da Arte, até na arquitetura.

Como descreve Lívio (2015):

> O que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magnificas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum certo numero, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de "Número Áureo" (LIVIO, 2015, p. 13).

A literatura matemática profissional utiliza para a Razão Áurea o símbolo grego tau (τ), mas no século XX o matemático americano Mark Barr deu a razão nome que hoje utilizamos o Fi (φ), por ser a primeira letra grega no nome de Fídias, um grande escultor que viveu entre 490 a 430 a. C. O matemático Mark Barr decidiu realizar essa homenagem, porque alguns historiadores da arte da época afirmavam que Fídias utilizava frequentemente a Razão Áurea em suas esculturas.

Durante toda a história muitas mentes matemáticas brilhantes, como Pitágoras, Euclides, Leonardo de Pisa na Idade Média, o astrônomo Johannes Kepler, o físico Roger Penrose, dedicaram horas de trabalho relacionadas a razão áurea e suas propriedades e segundo Livio (2015) esse estudo não se restringiu apenas aos matemáticos, mas também a biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos que dedicam seu tempo a examinar e debater as bases da Razão Áurea, pois se trata de um número misterioso por surgir onde menos se espera.

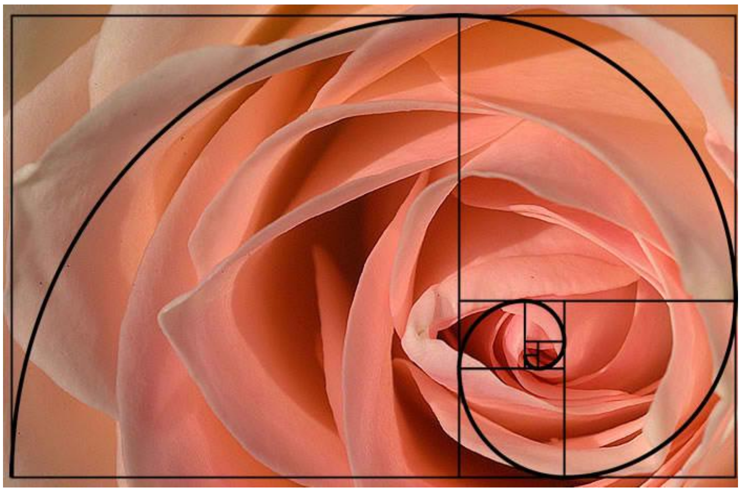
Podemos exemplificar algumas situações naturais onde esse número aparece, se pegarmos uma simples maçã, e cortarmos a fruta pela sua circunferência encontraremos as sementes arranjadas em um padrão de estrela de cinco pontas, ou seja, um pentagrama, onde cada um dos triângulos isósceles que formam as pontas do pentagrama tem a propriedade da Razão Áurea.

Figura 3 – Pentagrama na maçã

Fonte: http://profestevam.blogspot.com.br

Outra situação onde pode ser observada uma regra matemática da Razão Áurea é o arranjo das pétalas de uma rosa, a maneira com que elas se sobrepõem a suas antecessoras, como mostra a imagem abaixo. O crescimento das conchas espirais do molusco náutilo também obedece a um padrão orientado pela Razão Áurea.

Figura 4 – Arranjos de pétalas de rosa



Fonte: estheraliu.blogspot.com

O crescimento das conchas espirais do molusco náutilo também obedece a um padrão orientado pela Razão Áurea. Abaixo segue algumas imagens da Natureza e na Arquitetura nas quais o número de ouro pode ser encontrado.

As conchas marinhas (Nautilus)

Pode-se obter o espiral de ouro traçando um espiral por toda a concha, isso se dá pelo fato de que o crescimento dessa concha é proporcional ao crescimento do organismo que dela faz parte.

Figura 5 – Cocha Marinha

Fonte: http://www.seasky.org/

Pinhas

As sementes encontradas nas pinhas se arranjam em forma de espirais ora curvando-se para a direita ora para a esquerda. Contando esses espirais notamos que 34 deles se curvam para a direita, e 55 para a esquerda. Esses valores são termos consecutivos da sucessão de Fibonacci. Esta organização das sementes permite que elas estejam distribuídas de forma uniforme na pinha.

Figura 6 - Pinha

Fonte: www.naturezabrasileira.com.br

Girassóis

Nem todos os girassóis apresentam o mesmo padrão encontrado nas pinhas, mas quando se observa um espécime da família *Compositae* podemos notar que suas sementes também formam espirais que ora se curvam para a direita ora para a esquerda, de forma que todas fiquem equidistantes. A organização das sementes ajuda a melhorar a capacidade de captação de luz e de água dos girassóis. Outra curiosidade encontrada nos girassóis, é que suas pétalas encontram-se organizadas em pares de 21 e 34 pétalas, ou 34 e 55, ou 55 e 89, números pertencentes a sucessão de Fibonacci.

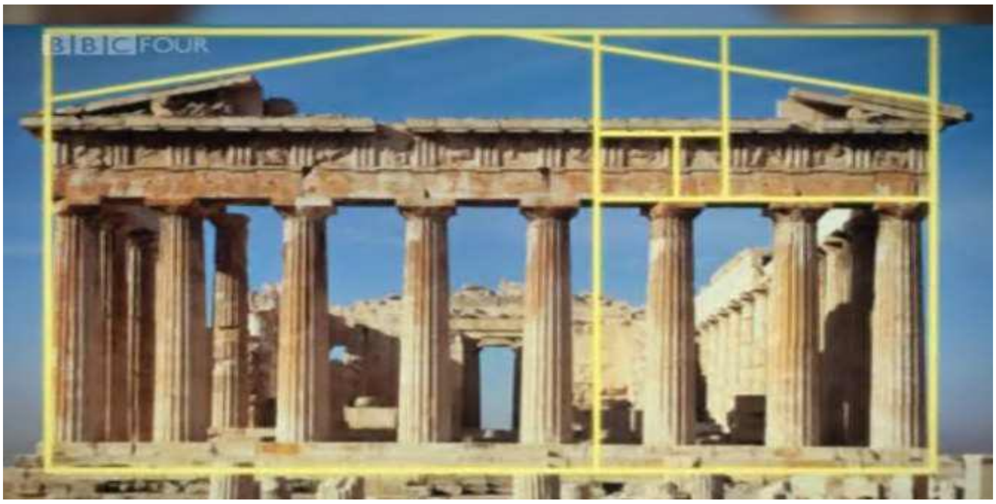
Figura 7 - Girassol

Fonte: www.lojapeterpaiva.com.br/oleo-vegetal-girassol

Na arquitetura (Parthenon)

Parthenon conhecido também como templo da deusa Atena foi construído por Fídias entre 447 e 433 a.C. na Grécia, esse templo trás em seu frontispício um retângulo áureo.

Figura 8- Parthenon



Fonte: https://matematicalidades.files.wordpress.com/2011/03/partenon.png

O Templo de Dendara

No Egito, o templo de Dendara traz em suas arcadas a proporção de retângulo áureo, e em seu interior existe uma escadaria em espiral, muito semelhante à espiral de ouro (RANULFO 2005 apud DOTTO, 2006).

Figura 9 – Templo de Dendara

Fonte: www.pinterest.com

O Templo de Philae

Este templo foi dedicado à deusa Isis. Em sua fachada existem diversos retângulos, e inúmeras arcadas criadas por centenas de pilares, todos eles proporcionais ao retângulo áureo (SERRES et al., sd)

Figura 10 – Templo de Philae

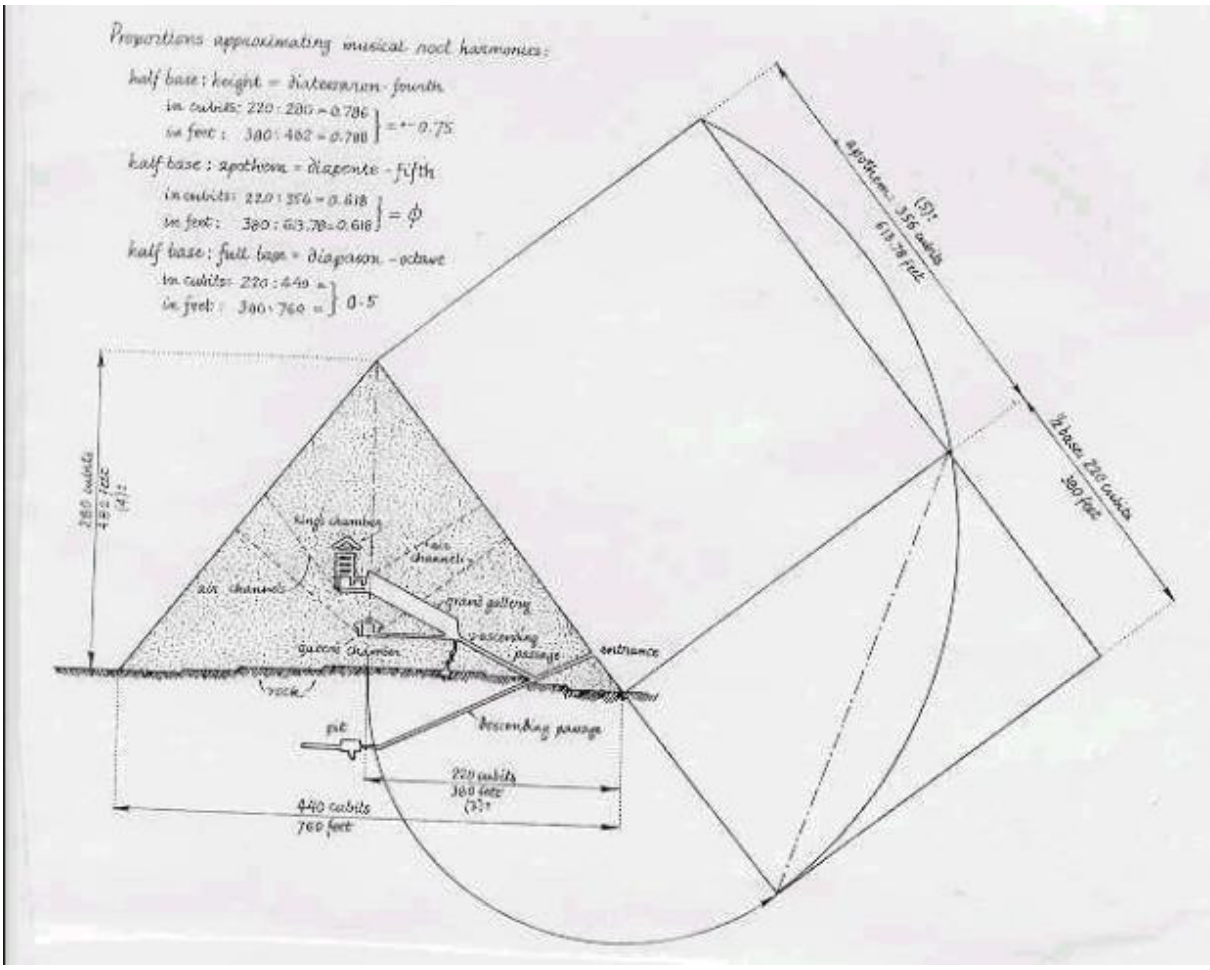
Fonte: youtube.com

As Pirâmides do Egito

O povo Egípcio considerava o número de ouro um “número sagrado” tendo importância em diversas áreas, principalmente na religião (SERRES et al., sd). O número de ouro era usado na construção de templos e sepulcros, pois se acreditava que se isso não fosse feito o templo não ficaria do agrado dos Deuses. Por ser também considerado um número muito agradável esteticamente, por representar a perfeição, era usado na construção e na decoração dos templos egípcios.

O Papiro de Ahmes contém informações sobre a construção da Grande Pirâmide de Gizé (4700 a.C.), e dentre as informações aparece proporções representadas pelo "número sagrado" (SERRES et al., sd).

Figura 11 – Papiro de Ahmes



Fonte: http://principo.org

Figura 12 – Pirâmides do Egito

Fonte: www.ultracurioso.com.br

1.1 Definições da Razão Áurea

Sabemos que a Razão Áurea representa um símbolo de harmonia e beleza para os muitos estudiosos e que ela pode ser encontrada em diversas áreas, como: Botânica, Reprodução Animal, Medidas do Corpo Humano, Construções Antigas, Obras de Arte etc.

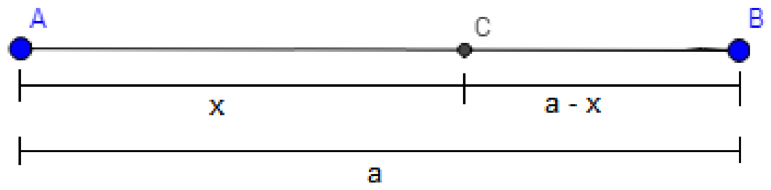
A definição da Razão Áurea pode se dar geometricamente ou algebricamente como veremos a seguir:

Landim (2014) define geometricamente a Razão Áurea através de um segmento $\overline{AB}$, que estará com as proporções áureas, se a razão entre o menor e o maior segmento for igual a razão entre o maior segmento e o segmento inteiro, ou seja:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

Fazendo uso de notação algébrica tem-se a seguinte relação:

Figura 13 – Segmento áureo



Fonte: Própria

Considerando o segmento $\overline{AC}$ = x e $\overline{CB}$ = a – x, como na figura 13, e substituindo os valores na definição geométrica, obtemos:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{x}{a}$$

Cálculo da Razão Áurea "Fi"

Seja a distância AB igual a uma unidade de comprimento e seja o tamanho do segmento AC = x.

Chamemos de "Fi" a razão extrema (e média). Então:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = Fi$$

Efetuando as operações:

$$x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\ .\ 1\ .\ (-1)}}{2\ .\ 1} = \frac{-1\ \pm \sqrt{5}}{2}$$

O que leva a duas raízes:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\ e\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Desprezando a raiz negativa, a razão procurada é:

$$Fi = \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Que resulta aproximadamente em:

Fi = 1,61803…

Portanto, o valor numérico da Razão Áurea ou Fi é 1,6180339887...

No entanto, é importante salientar que alguns autores, ao invés de considerar a Razão Áurea como 1,6180339887... consideram o inverso desse valor, que será 0,6180339887...

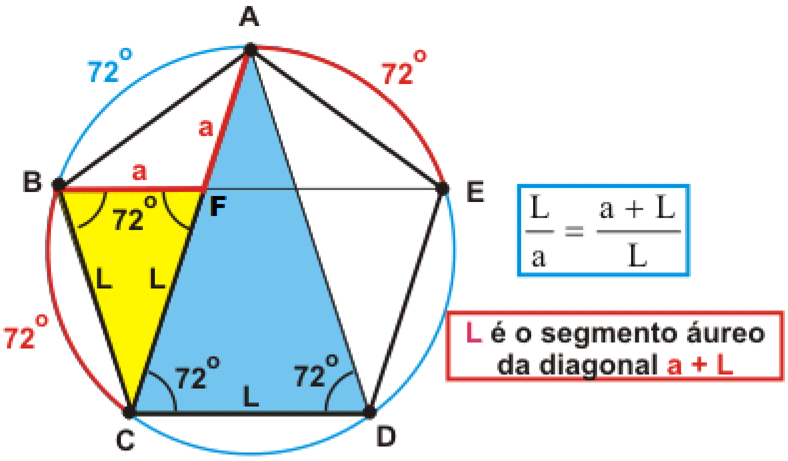
1.2 Razão Áurea na Geometria

A Razão Áurea pode ser encontrada em várias figuras geométricas, algumas serão apresentadas a seguir:

- Pentágono Regular

Se observarmos a relação mostrada na figura abaixo, que L é um segmento áureo da diagonal a + L.

Figura 14 – Pentágono Regular



Fonte: http://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/poligonos/pentagono/

Considerando um pentágono regular de lado unitário e que os triângulos destacados BCF e ACD são isósceles e semelhantes onde o ângulo oposto ao lado diferente dos dois triângulos possui 36º tem-se:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{CD}{AC} \rightarrow \frac{a}{L} = \frac{L}{a+L}$$

Como L = 1, tem-se:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a+1} \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rightarrow 2a = \sqrt{5} - 1$$

Pela lei dos senos, pode-se obter:

$$\frac{a}{sen36°} = \frac{1}{sen72°} \rightarrow \frac{a}{sen36°} = \frac{1}{2sen36°cos36°} \rightarrow \frac{2a}{1} = \frac{sen36°}{sen36°cos36°}$$

$$cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Assim pode-se calcular o seno de 36º pela relação fundamental da trigonometria:

$$cos36° + sen36° = 1 \ \rightarrow sen36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

No triângulo ADC observa-se que $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}} = \frac{a+L}{L}$ e ainda, pela lei dos Senos, tem-se:

$$\frac{L}{sen36°} = \frac{a+L}{sen72°} \rightarrow (a+L)sen36° = Lsen72° \ \rightarrow \frac{(a+L)}{L} = \frac{sen72°}{sen36°} = \frac{2sen36°cos36°}{sen36°} =$$

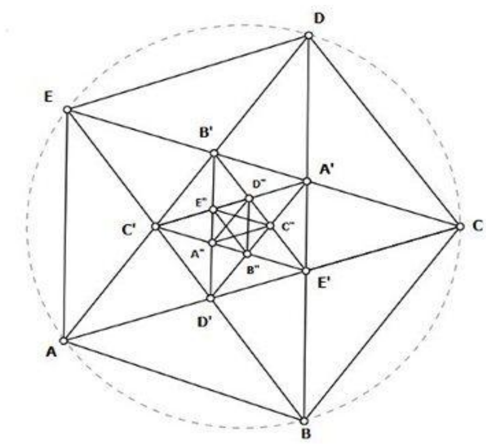
$$= 2cos36° = 2.\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

que é justamente o Número de Ouro, onde $\overline{\mathrm{AC}}$ é a diagonal do pentágono inicial ABCDE e $\overline{\mathrm{CD}}$ é a medida do lado do pentágono.

Segundo Landim (2014):

> Uma grande influência do pentágono regular na História da Matemática está diretamente relacionada aos Pitagóricos, pois o pentagrama (estrela de cinco pontas) formado a partir da conexão de todos os vértices do pentágono com as diagonais representa irmandade (LANDIM, 2014, p. 20).

Figura 15 – Formação do pentagrama



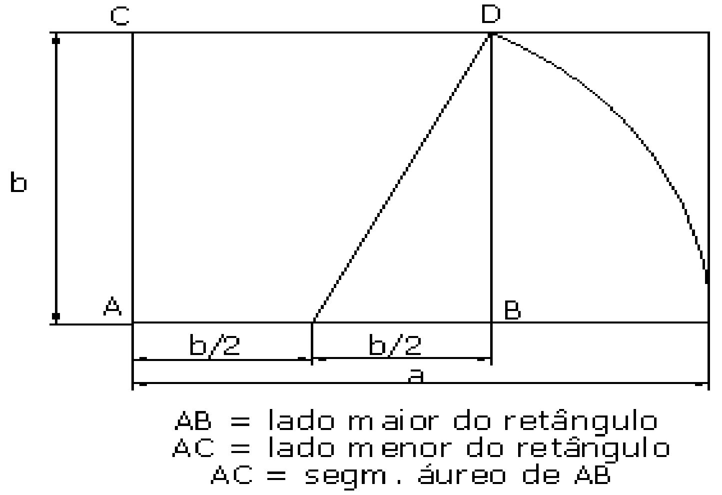
Fonte: http://www.anelatlante.com/simbolos-sagrados-do-anel-atlante-original/

O pentagrama é formado pelas diagonais do pentágono regular, que também forma outro pentágono menor no seu interior, e permanecendo nessa linha de raciocínio, as diagonais desse pentágono menor, formam em seu interior outro pentagrama menor ainda. Essa progressão prossegue ao infinito e em todos esses pentágonos subsequentes observa-se a razão áurea entre a diagonal e o lado do novo pentágono regular.

- Retângulo de Ouro

Definimos um retângulo como um paralelogramo, onde seus lados formam ângulos retos entre si. Um retângulo Áureo é aquele em que o valor entre a razão do lado maior e o lado menor resulta em 1,6180..., ou seja, o Φ.

Figura 16 - Retângulo de Ouro



Fonte: http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg/dg_4t. php

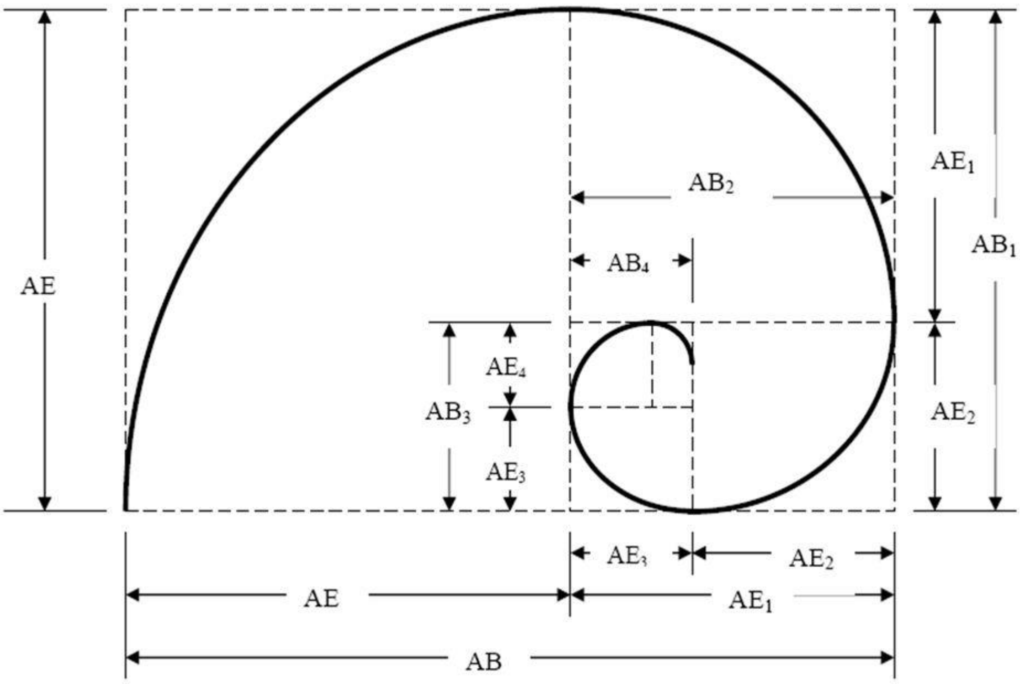
- Espiral de Ouro

Jacques Bernoulli (1654 – 1705) voltou sua atenção a um espiral em particular que hoje é conhecida como Espiral Logarítmica, por possuir uma propriedade chamada de auto-similaridade, pois nessa espiral, à medida que se aumenta seu raio no sentido horário, a curva não sofre alterações em seu formato. Sobre essa propriedade, Bernoulli escreveu que a Espiral Logarítmica:

> “pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser” (BERNOULLI apud LANDIM, 2014, p. 25).

A Espiral Logarítmica e o Número de Ouro podem ser relacionados entre si, pelo fato dessa Espiral ser encontrada tanto no Retângulo de Ouro, como no Triângulo de Ouro.

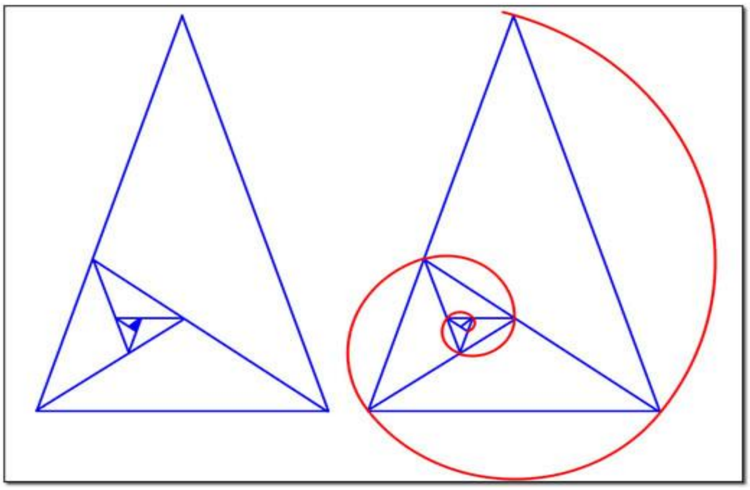
Figura 17 – Espiral de Ouro



$$AB/AE = AB_1/AE_1 = AB_2/AE_2 = AB_3/AE_3 = AB_4/AE_4 = 1{,}618034...$$

Fonte: http://slideplayer.com.br/

Figura 18: Espiral logarítmica traçada com base em triângulos Áureos.

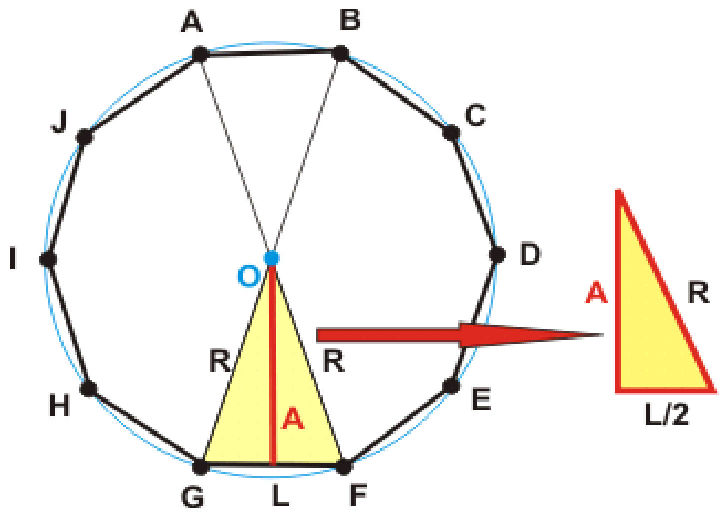


Fonte:https://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm

- Decágono Regular

O Decágono regular é uma figura plana inscritível em uma circunferência, pois tem seus vértices tangentes à circunferência. Esse ponto de tangência divide a circunferência em partes iguais. Se dividirmos o raio dessa circunferência pelo lado do Decágono, teremos o Número de Ouro.

Figura 19 – Decágono Regular



Fonte: http://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/poligonos/decagono/

Considerando um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário e que os 10 triângulos que formam esse decágono são isósceles, onde o ângulo oposto ao lado do decágono possui 36º e os outros dois ângulos possuem 72°, tem-se, pela lei dos senos:

$$\frac{L}{sen36°} = \frac{1}{sen72°} \rightarrow \frac{L}{sen36°} = \frac{1}{2sen36°cos36°} \rightarrow \frac{2L}{1} = \frac{sen36°}{sen36°cos36°}$$

$$cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

No triângulo OGL tem-se pela lei dos Senos,

$$\frac{L}{sen36°} = \frac{R}{sen72°} \rightarrow Rsen36° = Lsen72° \rightarrow \frac{R}{L} = \frac{sen72°}{sen36°} = \frac{2sen36°cos36°}{sen36°} =$$

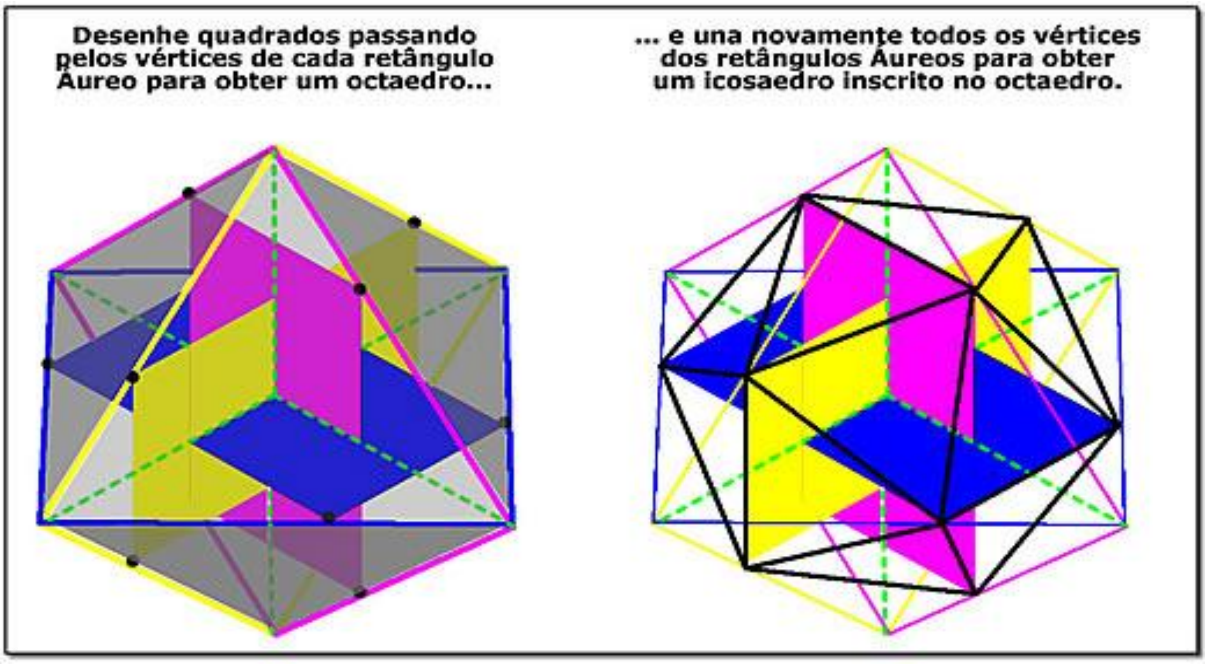
$$= 2cos36° = 2.\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

que é o Número de Ouro, onde R é o raio da circunferência e L é a medida do lado do decágono.

Assim como o Decágono regular, o Dodecaedro regular apresenta algumas razões onde o número de ouro é encontrado e de acordo com Lívio (2015):

> “O Dodecaedro regular é um poliedro composto por doze faces, sendo todos pentágonos regulares, o centro dessas doze faces podem ser divididos em três grupos de quatro, e cada um desses grupos formam um Retângulo Áureo” (LIVIO, 2015, p.89).

Figura 20- Dodecaedro Regular



Fonte:https://www.bpiropo.com.br/fpc20070219.htm

Na Matemática, a Geometria se encarrega pelo estudo das formas e, até onde se tem conhecimento, é a mais antiga amostra da matemática.

As construções geométricas que podem levar ao encontro da Razão Áurea podem contribuir, utilizando estas construções como metodologias, para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois as construções podem tornam as aulas mais práticas e lúdicas.

2 PANORAMA HISTÓRICO SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA

Segundo Passos (2000) o historiador Eves (1997), sugere que os primeiros relatos sobre o uso da Geometria podem ter tido origem a partir de simples observações advindas da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Destaca também que as primeiras noções geométricas como traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume, etc. se deu pelos egípcios e os babilônios a beira do Rio Nilo e Eufrates, quando realizavam medição da área de plantio, construção de moradias entre outras necessidades da época. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias.

Segundo Pavanello (1989):

> "...o que parece mais provável é que tais conhecimentos foram sendo construídos empiricamente, como resposta a necessidades de ordem prática das comunidades que, no Neolítico – Idade da Pedra – deixaram sua vida nômade, passando a se fixar a terra e a cultivá-la" (PAVANELLO, 1989 apud PASSOS, 2000, p. 73).

A Geometria, de uma maneira mais rústica, foi utilizada na Babilônia, na China, entre outros países. Eves, 1997 em seus estudos sugere que o uso da Geometria como ciência dedutiva pode ter surgido no vale do rio Nilo, no Antigo Egito.

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesótris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. (HERÓDOTO, século V a.C apud, EVES 1997, p.3).

Segundo Mlodinow (2005), acredita-se que na época dos faraós a primeira razão para se desenvolver a Geometria foi a cobrança de impostos, pois o governo determinava o valor a ser cobrado baseando-se na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades.

Para Boyer (1974), buscando resolver tal problemática, os faraós passaram a nomear funcionários, chamados de agrimensores, que tinham como função avaliar os prejuízos causados pelas cheias, medir as terras e demarcar os limites das propriedades, restabelecendo assim os limites de suas áreas de cultivo. Quando iam fazer tais demarcações, os agrimensores não tinham informações alguma ou quando tinham era apenas parcial, pois as fronteiras podiam ter desaparecido com as enchentes. Esses funcionários determinavam áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos, e quando se deparavam com superfícies irregulares utilizavam o método de triangulação, que nada mais era do que dividir o terreno em porções menores e triangulares cujas áreas somadas correspondiam à área total.

Segundo Boyer (1974), o povo Egípcio possuía muita habilidade em delimitar terras e para isso faziam uso de diversos princípios, um deles era utilizado para marcar ângulos retos, onde usavam cordas cheias de nós equidistantes um do outro, fazendo assim a divisão das terras. Essa técnica mais tarde viria usar o resultado do teorema de Pitágoras.

Toda prática desses povos acabou por ser responsável pelos passos iniciais da Geometria como ciência.

> Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado "geometria cientifica" uma vez que indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos eram instrumentos de descobertas. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre figuras sugeridas por objetos físicos. (EVES, 1997, p. 3)

No entanto, Eves (1997) salienta que devido as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.c., o poder do povo egípcio e babilônio ficou bastante comprometido e devido a essa nova realidade os desenvolvimentos posteriores da Geometria acabaram ficando por conta dos gregos.

De acordo com Mlodinow (2005), os gregos valorizavam muito a busca pelo conhecimento e foi através de seus matemáticos que a Geometria foi estabelecida, tudo teve início com Tales de Mileto 640 a.c. e 564 a.c. Tales viajou muito para o Egito, onde permaneceu longos períodos. Foi durante essas viagens que Tales tentou encontrar explicações teóricas para a construção das pirâmides e assim acabou deduzindo técnicas geométricas como as propriedades dos triângulos semelhantes que usou para medir a altura da pirâmide de Quéops. Tales de Mileto foi o primeiro matemático que demonstrou teoremas geométricos, que, séculos adiante, acabaria se unindo aos elementos de Euclides.

Para Mlodinow (2005) um matemático muito importante da época foi Pitágoras que foi o primeiro grego a aprender os hieróglifos egípcios e a compreender a geometria egípcia. Pitágoras permaneceu no Egito por 13 anos, e só saiu de lá quando foi feito prisioneiro pelos persas que invadiram o Egito. Devido a uma demonstração, um importante resultado matemático leva seu nome: O Teorema de Pitágoras.

Conforme Garbi (2006), outro matemático que trouxe muita contribuição para a Matemática foi Euclides. Ele não apenas anunciou um grande número de leis geométricas, mas preocupou-se em realizar a demonstração desses teoremas. Trabalhava a partir de hipóteses básicas e, com seus conhecimentos, adquiridos ao longo do tempo.

Andrade (2004) após analisar a obra “Elementos” de Euclides relata que por volta de 300 a.C., Euclides organizou em sua obra a Geometria até então conhecida como um sistema lógico único.

Fiorentini (1995) cita que a obra de Euclides é marcada pela sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos primitivos (definições, axiomas, postulados). Essa sistematização é demonstrada por teoremas e corolários que são deduzidos dos elementos primitivos (FIORENTINI, 1995 apud ANDRADE, 2004, p. 59).

Andrade (2004) diz que no Brasil houve certo abandono no ensino baseado na Geometria de Euclides nos anos 80.

Segundo Pavanello (1993) o ensino da Geometria numa abordagem tradicional enfrentou diversos problemas relacionados ao conhecimento do professor, aos métodos adotados, à dificuldade em se estabelecer uma relação entre a geometria prática trabalhada na escola elementar e a abordagem axiomática inserida no ensino secundário. Mais dificuldades são encontradas quando se insere programas nos quais a Geometria é desenvolvida sob o enfoque das transformações. Grande parcela de professores de Matemática deixa o ensino da Geometria de lado pelo fato de não dominar o assunto (PAVANELLO, 1993 apud ANDRADE, 2004, p. 59).

De acordo com Zuin (2001) no final da década de 70 muitas críticas foram feitas ao Movimento da Matemática Moderna, mas ao mesmo tempo surgem também alternativas para o ensino dessa área. Boa parte dessas críticas se dava pelo fato de haver redução ou abandono do ensino da Geometria. A autora ainda cita que após o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, muitas alterações são realizadas nos livros didáticos de Matemática, passam a ter um aspecto mais atraente, mais colorido e com diferentes ilustrações, no entanto, muitos conteúdos são apresentados de maneira enxuta, ou seja, as fórmulas já são deduzidas, sem demonstrações de teoremas. Esse material acaba sendo insuficiente para o professor preparar suas aulas e como muitos não possuem o domínio do conteúdo acabam por deixar de lado essa parte da Matemática.

Segundo Andrade (2004) documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), vem orientando o professor a começar a trabalhar a Geometria pela percepção, experimentação e exploração do espaço podendo assim desenvolver significados para explicar o conteúdo. Dessa forma possibilitará as representações do espaço de modo a caminhar em direção a abstrações dos conteúdos. Além disso, o documento também apresenta uma preocupação com as questões teórico-epistemológicas que vêm dar sustentação a essa concepção experimental de Ensino de Geometria (ANDRADE, 2004, p. 61).

Passos (2005), diz que:

> "...o desenvolvimento de conceitos geométricos é fundamental para a capacidade de aprendizagem e representa um avanço no desenvolvimento conceitual" (PASSOS, 2005, p. 18 apud CARNEIRO, DÈCHEN, 2006, p. 2)

Apesar de toda sua importância, o ensino da Geometria tem sido deixada de lado não dando a ela o seu devido valor nas escolas. Pavanello (1993) fala que no Brasil, o ensino de Geometria vem sendo deixado para o último bimestre letivo, além de ser baseado na apresentação de teoremas e aplicação de fórmulas, na resolução de exercícios, o que acaba contribuindo para a situação em que se encontra o ensino de Geometria na atualidade.

Pavanello (1993) afirma, ainda, que o ensino da Geometria, independentemente do nível escolar, vem aos poucos sumindo do currículo. O ensino-aprendizagem da Matemática vem passando por grandes problemas, e muitos deles vem sendo gerado pelo mínimo ou pela ausência do aprendizado de conteúdos geométricos. Para a autora, toda essa problemática é resultado da ausência do tema nos programas escolares.

E toda essa situação de acordo com Fonseca (1997) foi provocada a partir do:

> [...] isolamento da geometria em um momento específico do ano letivo, geralmente no final do curso; a abordagem analítica e mecânica; dissociação da realidade imediata; redução à atividade de nomenclatura (FONSECA, 1997, p.35, apud PEREIRA, OLIVEIRA, 2004, p. 5).

Sabemos hoje que no decorrer da história humana a Geometria sempre teve um grande destaque em diferentes áreas do cotidiano, muitas vezes facilitando os afazeres do homem. Atualmente a Geometria continua sendo importante, pois a sociedade utiliza, numa proporção cada vez maior, conhecimentos geométricos cada vez mais tecnológicos em seu cotidiano. E assim, depois de muitas pesquisas entendeu-se que a Geometria pode favorecer o desenvolvimento de novas competências e novos conhecimentos no momento que se faz uso das diferentes tecnologias e linguagens, tão exigidas neste mundo globalizado.

O uso de diferentes abordagens no ensino da geometria demanda conhecimento nessa área, e nesse viés Fonseca (2001) afirma:

> A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino. (FONSECA, 2001, p. 91)

Para Souza Filho e Brito (2006), a necessidade em resolver problemas do dia a dia leva o homem a buscar soluções e dessa forma desenvolve uma inteligência essencialmente prática, ou seja, que acaba facilitando a percepção de enxergar os problemas, e dessa forma contextualiza a geometria no seu cotidiano buscando e selecionando conhecimentos geométricos nas tomadas de decisões.

Enfim, o conhecimento matemático é algo que está presente na vida do ser humano, seja de maneira informal ou formal, mas ninguém pode afirmar que vive sem aplicar no seu cotidiano tais conceitos. A escola tem como função sistematizar de maneira mais cientifica esse conhecimento que o homem já traz desde o início de sua existência, mas necessita fazer isso de maneira mais apaixonante que leve o aluno a viajar com prazer nesse universo chamado matemática.

2.1 O ensino da Geometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais

As crianças, quando ingressam na vida escolar, mais precisamente no primeiro ciclo do Ensino Fundamental trazem consigo uma noção informal sobre os conhecimentos matemáticos básicos, inclusive geométricos, e essa bagagem serve como referência para a organização das formas de aprendizagem.

As observações que fazem na sua vida cotidiana, são abordadas e utilizadas a fim de fazer com que elas percebam semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, reconhecendo e identificando formas tridimensionais e bidimensionais em situações que envolvam construções, representações, posicionamento e noções de localização para o seu deslocamento no espaço.

Visando esses aprendizados iniciais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), propõem que as atividades realizadas com os alunos hajam de forma a estimular os mesmos a relacionar os conceitos ensinados com seus cotidianos, observando o espaço ao seu redor para que possam estabelecer referências pela comparação e associação dos conteúdos geométricos.

Os Conteúdos Conceituais e procedimentais – Primeiro Ciclo segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (BRASIL, 1998, p. 51), são:

Espaço e Forma

- Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
- Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
- Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.
- Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.
- Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.
- Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não etc.

- Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos – esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos – sem uso obrigatório de nomenclatura.
- Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.
- Construção e representação de formas geométricas.

O ensino aprendizagem da Matemática no primeiro ciclo do Ensino Fundamental e seus aspectos devem também ser considerado no segundo ciclo, nesse sentido um dos que mais se destaca é a importância dos conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos para que sirva como ponto de partida, além de que suas capacidades cognitivas estão mais aguçadas e a busca de explicações mais matemáticas das finalidades dos conhecimentos matemáticos, inclusive geométricos, fica mais forte de modo que passam a descobrir regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas.

No segundo ciclo do Ensino Fundamental os conteúdos e as atividades trabalhadas em torno da Geometria devem levar o aluno a identificar características nas figuras geométricas, compondo e decompondo-as com facilidade, identificando simetrias, ampliações e reduções.

Ainda neste ciclo, os alunos entram em contato com situações-problema onde os resultados se apresentam na forma de um número racional, pela compreensão dos significados de quociente e razão, e de suas representações, sendo elas decimal ou fracionária, conceito esse que é de relevância para o objeto de estudo deste trabalho.

Os Conteúdos Conceituais e procedimentais – Segundo Ciclo segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (BRASIL, 1998, p. 60), são:

Espaço e Forma

- Descrição, interpretação e representação da posição de uma pessoa ou objeto no espaço, de diferentes pontos de vista.
- Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto.

- Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários.
- Representação do espaço por meio de maquetes.
- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros.
- Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.
- Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades.
- Identificação da simetria em figuras tridimensionais.
- Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.
- Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais.
- Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria etc.
- Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados etc.
- Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.
- Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas.
- Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.
- Representação de figuras geométricas.

O desenvolvimento destes conteúdos geométricos pode contribuir para a estimativa visual do aluno sobre as propriedades métricas. A construção de maquetes também pode ser uma atividade com muita importância, principalmente no quesito do domínio dos conceitos e conhecimentos geométricos, além do uso de softwares disponíveis, que levam o aluno a raciocinar geometricamente.

Na última etapa da educação básica, no Ensino Médio, a Matemática é vista como uma última parcela do conhecimento essencial para a formação dos jovens e, portanto, vai além dos conhecimentos triviais abordados até então nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental.

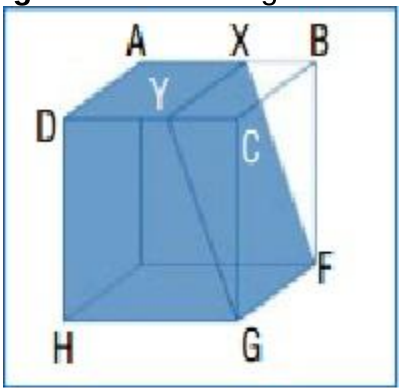
Os conteúdos matemáticos, sua dimensão histórica e sua relação com o cotidiano, nesta fase, se ampliam e aprofundam, contextualizando, integrando e relacionando com outros conhecimentos, a fim de que o aluno se aproprie das competências e habilidades geométricas necessárias a sua formação.

No quesito de apropriação das habilidades e competências geométricas ensinadas no ensino médio exemplifica-se:

Exemplo de atividade para o Ensino Médio onde podem ser trabalhados alguns conceitos geométricos, como razões entre segmentos, volumes e áreas, segundo Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio - Orientações Educacionais complementares - Matemática (BRASIL, 1998, p. 125).

A figura 21 destaca o sólido que restou de um cubo de aresta ***a***, após retirar-se dele o prisma ***BCYXFG***, sendo ***XY*** paralelo a ***AD***. Se o volume do sólido restante é 4/7 do volume do cubo, ache a fração de ***a*** que expressa a medida de ***AX***.

Figura 21 – Sólido geométrico



Fonte: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, p. 112)

A proposta de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio deixa a cargo dos professores o desenvolvimento das competências e habilidades almejadas, incluindo as de Geometria e isso envolve diferentes maneiras de pensar em matemática, diferentes contextos e razões históricas que deram origem a tais conhecimentos. Neste contexto, os temas foram separados em três grandes eixos ou temas estruturadores e a parte que interessa a este trabalho seria a “Geometria e medidas” que se subdivide em quatro outras unidades temáticas: Geometria plana, espacial, métrica e analítica.

Uma importante capacidade a ser desenvolvida é a compreensão e construção de modelos através do uso de formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo e que estão ligadas a representação métrica das grandezas que envolvem as formas geométricas, sendo elas planas ou espaciais. Essa última envolve cálculos de distâncias, áreas e volumes que representam apenas uma parte do conteúdo geométrico a ser desenvolvido no Ensino Médio. O ensino na Geometria se completa com o estudo das propriedades geométricas relacionadas a todos os ramos e o ensino da Geometria do primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental pode estruturar toda a aprendizagem que deve ser adquirida no Ensino Médio.

Os Conteúdos e habilidades propostos – Tema 2: Geometria e medidas segundo Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio - Orientações Educacionais complementares - Matemática (BRASIL, 1998, p. 112), são:

Unidades temáticas

1- Geometria Plana: semelhança e congruência; representações de figuras.

- Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problemas.
- Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.
- Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.
- Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhanças de figuras.
- Fazer uso de escalas em representações planas.

2- Geometria Espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- Compreender o significado de postulados, axiomas ou teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma especifica para validar resultados.

3- Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.

- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

4- Geometria Analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) se organizam em ciclos de maneira que o mesmo conteúdo será visto em diversos momentos no decorrer no ano letivo, dando ênfase e aprofundando conforme a necessidade se apresenta. Os conteúdos não serão necessariamente esgotados de uma só vez, dando ao professor a possibilidade de fazer conexões em diversos momentos.

O ensino da Geometria, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, desempenha um papel importante no Ensino Básico, pois mostra aos alunos uma grande utilidade deste conhecimento matemático na vida cotidiana devido a sua facilidade de conectar com outras áreas do conhecimento, além de estarem presentes em praticamente todas as atividades realizadas na vida em sociedade**.** As atividades abordadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais utilizam contextos que exploram os mais diversos significados matemáticos dos conceitos geométricos, o que abrem uma vasta possibilidade para a utilização da abordagem histórica.

São abordadas as mais diversas grandezas, como comprimento, massa, tempo, capacidade, etc., além de razões entre elas e ainda medidas não conhecidas de forma direta, o que envolve conceitos e procedimentos da Geometria.

2.2 O ensino da Geometria segundo o Currículo do Estado de São Paulo

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) se apresenta através da Secretaria de Educação, de maneira a propor um currículo básico para as escolas da rede estadual no Ensino Fundamental de Ciclo II e Ensino Médio, pretendendo apoiar as escolas estaduais em seus trabalhos e contribuir para que estas melhorem a qualidade no ensino-aprendizagem dos alunos. Como essa proposta se põe em 2008, suas contribuições se norteiam nas experiências e práticas já consolidadas e recuperadas com revisões dos documentos, diagnósticos já realizados, publicações, levantamentos e análises de resultados levantados em cima de iniciativas e projetos previamente realizados.

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo tomou duas iniciativas de maneira a incentivar o desenvolvimento do currículo, sendo uma delas um levantamento amplo no acervo documental já existente, nos âmbitos pedagógicos e técnicos, e a outra se deu com uma consulta inicial as escolas e professores para identificar boas práticas, sistematizando as já existentes nas escolas do Estado.

Com esse processo iniciando, a Secretaria de Educação preocupou-se com o dever de cumprir a garantia uma base comum de conhecimentos e de competências a todos para que as escolas funcionassem com uma rede de fato, pois em um mundo onde o conhecimento é usado de uma forma mais intensa, o mesmo se diferencia pela qualidade do conhecimento e educação recebida. A qualidade dos conhecimentos, das habilidades e das competências, do convívio na vida escolar, determinará ou não uma boa participação do aluno em seu grupo social e como parte de processos de crítica e renovação do currículo, dando à qualidade uma importância ainda maior na educação oferecida nas escolas públicas da rede estadual do Estado de São Paulo.

Um dos principais objetivos desse Currículo é apropriar-se do vasto conhecimento existente e mapear esse território em cada disciplina de tal forma que os conteúdos devem ser organizados de maneira que possibilitem o tratamento de todos os dados ofertados e que essas informações tratadas se transformem em conhecimentos.

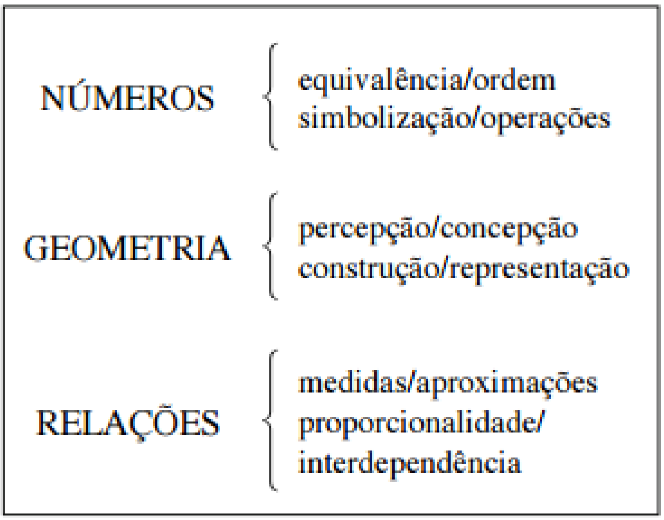
A Matemática pode ser vista como uma das primeiras línguas que se aprende e, juntamente com a língua materna, tem sido as disciplinas básicas que norteiam as construções dos currículos escolares, em todas as culturas e épocas tendo um censo relativo ao fato de que sem o desenvolvimento adequado de ambos os eixos a formação pessoal não se dá por completa.

O aprendizado na Matemática nas séries iniciais se dá de maneira compulsória e automática assim como o aprendizado na língua materna onde os alunos se expressam gostando ou não da disciplina. É de notório acordo que o uso dos conhecimentos matemáticos na vida cotidiana dos adultos se apresenta em diversos contextos, sendo eles nas ações como consumidores, como pessoas conscientes, autônomas e cidadãos. Todos, inconscientemente ou não, lidam com números, medidas, formas, operações, tabelas, gráficos, relações de ordem, equivalência, tomam decisões baseadas em proposições, fazem inferências, ou seja, ninguém pode afirmar que está livre ou não necessita do conhecimento fornecido pelo ensino da Matemática.

No Currículo do Estado de São Paulo, a Matemática se apresenta como um sistema primário trabalhando juntamente com a nossa língua materna influenciando a ampliação dos horizontes nas demais disciplinas do conhecimento não perdendo a noção que a Matemática tem seus próprios conteúdos e no intuito de transformar as informações em conhecimento, o tratamento dessas informações é apresentada pela Secretaria de Educação de maneira inovadora, abrindo as portas para que os professores explorem cada parte da melhor maneira.

Os conteúdos disciplinares básicos da Matemática se organizam em decorrência dos pressupostos citados anteriormente, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, em três grandes blocos: Números, Relações e Geometria, sendo esse último o motivo da análise do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011).

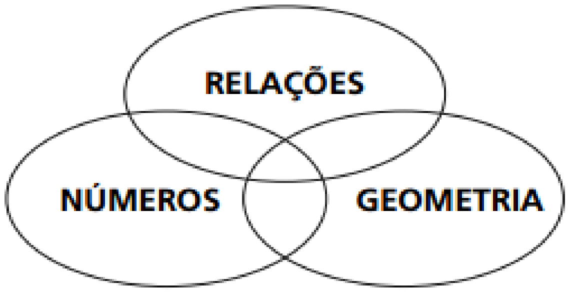
Figura 22 – Blocos de Conteúdos



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo - Matemática (SÃO PAULO, p. 39)

De forma natural, os três grandes blocos interceptam e interpenetram-se constante e permanentemente tornando a abordagem de um deles sem a intersecção do outro de forma automática praticamente impossível.

Figura 23 – Blocos Temáticos



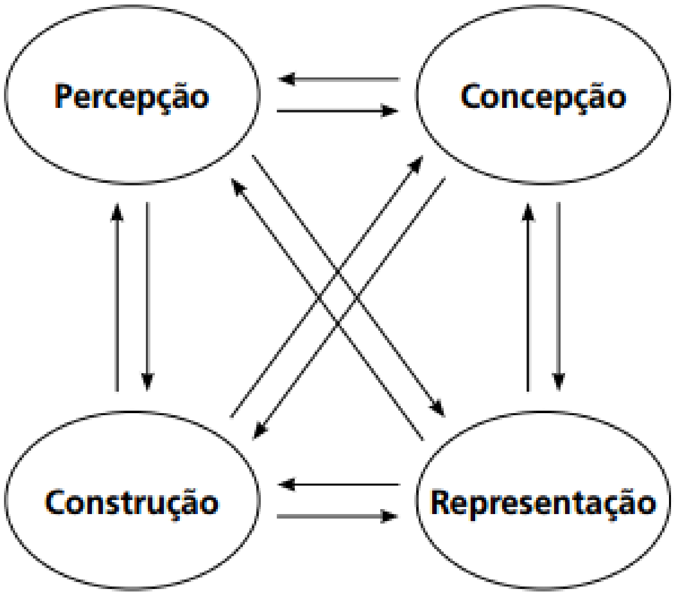
Fonte: Currículo do Estado de São Paulo - Matemática (SÃO PAULO, 2011, p. 39)

Cada um dos três grandes blocos de conteúdos matemáticos está de maneira direta ou indireta presentes nos mais diversos temas e conteúdos a serem ensinados em todas as séries do Ensino Fundamental e Ensino Médio. No que diz respeito ao ensino da Geometria ela está diretamente ligada à percepção de formas e das relações entre figuras planas e espaciais e seus elementos, construindo as formas geométricas existentes ou imaginadas e para que a compreensão do mundo físico que nos cerca sejam elaboradas.

No Ensino Fundamental, a Geometria se preocupa inicialmente com o reconhecimento, classificação e a representação das mais diversas formas geométricas planas e espaciais, dando ênfase à abordagem dos contextos concretos com as séries iniciais do Ciclo II do Ensino Fundamental. Nas séries finais do Ciclo II, as deduções e construções de raciocínios são o foco da abordagem geométrica no ensino da Matemática, mas independente da série que se trata, a Geometria deve sempre estar incorporada ao contexto rotineiro dos alunos cabendo ao professor trabalhar essa contextualização, pois a Geometria aparece de forma frequente no decorrer do tratamento do currículo no Ensino Fundamental, Ciclo II, e do Ensino Médio. Diferentemente dos demais currículos encontrados, o do Estado de São Paulo não subdivide a Geometria Plana, Espacial e Analítica no decorrer das séries do Ensino Básico, possibilitando ao professor trabalhar e mesclar todas desde o início do Ciclo II até o final do Ensino Médio.

A Secretaria de Educação elaborou um currículo que trata a Geometria de maneira espiralada, fazendo o mesmo tópico voltar a ser trabalhado em diversas ocasiões do Ensino Básico, alterando apenas a intensidade e ênfase dada ao tópico abordado, dando espaço à Geometria Plana, Espacial e Analítica em todas as séries do Ensino Fundamental, Ciclo II, e Ensino Médio destacando um aspecto importante da Geometria que são as quatro faces as quais ela se apresenta e se relaciona permanentemente com a caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação, que se tocam mutuamente e alteram sua ordem de abordagem contribuindo para uma compreensão mais rica da natureza do espaço em que vivemos.

Figura 24 – As faces dos conhecimentos geométricos



Fonte: Currículo do Estado de São Paulo – Matemática (SÃO PAULO, 2011, p.42)

A abordagem inicial do estudo da Geometria normalmente se dá por meio da percepção automática e imediata das formas geométricas e de suas principais características, através de observações e manipulações feitas nos objetos relacionando-se diretamente com a construção, a representação e a concepção desses objetos e/ou figuras geométricas que existem ou se imaginam.

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, tendo em vista todas as abordagens feitas e levando em consideração as quatro séries do Ensino Fundamental, Ciclo II e as três do Ensino Médio, apresenta um quadro de conteúdos, que de certa forma não se diferencia, nem tão pouco se distancia do que naturalmente de encontra nos livros didáticos ou em outros dos diversos sistemas de ensino. O quadro de conteúdos não pretende engessar o Currículo do Estado de São Paulo, mas sim propiciar uma articulação dos conteúdos presentes no mesmo de maneira a criar uma expectativa de que a aprendizagem de fato ocorra.

Figura 25 – Quadro de Conteúdos e Habilidades de Matemática – Geometria:

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Geometria/Relações** Formas geométricas • Formas planas • Formas espaciais Perímetro e área • Unidades de medida • Perímetro de uma figura plana • Cálculo de área por composição e decomposição • Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas	• Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas • Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações • Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras • Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
2º Bimestre	**Geometria** Geometria • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros	• Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
4º Bimestre	**Geometria** Geometria • Teorema de Tales • Teorema de Pitágoras • Área de polígonos • Volume do prisma	• Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares • Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Geometria/Relações** Proporcionalidade na Geometria • O conceito de semelhança • Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas	• Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes • Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos • Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos • Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos

4º Bimestre	**Geometria/Números** Corpos redondos • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo • Volume e área do cilindro Probabilidade • Problemas de contagem e introdução à probabilidade	• Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes • Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência • Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro • Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo • Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

1ª série do Ensino Médio

4º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria-Trigonometria • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	• Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas

2ª série do Ensino Médio		
4º Bimestre	**Geometria** Geometria métrica espacial • Elementos de geometria de posição • Poliedros, prismas e pirâmides • Cilindros, cones e esferas	• Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos • Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Geometria/Relações** Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares • Ponto e reta: distância • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas • Cônicas: noções, equações, aplicações	• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações • Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas • Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares • Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares • Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo – Matemática (SÃO PAULO, 2011, p.57)

3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

A curiosidade faz parte da espécie humana e esta pode despertar interesse em conhecer melhor determinados assuntos. A escola possibilita ao aluno conhecer melhor a origem dos temas que serão abordados e discutidos em sala de aula, mas quando se fala dos conhecimentos matemáticos tem-se a impressão de que se trata de algo pronto e acabado.

Os alunos enxergam a Matemática como algo muito abstrato e que não pode ser contextualizada, pois a configuração que se dá a essa disciplina no currículo escolar é de que se trata de algo descontextualizado e isolado das demais disciplinas, ou seja, sem relação alguma com os demais saberes existentes na escola e com a própria vida dos alunos (GOMES, 2005).

Sabemos que os conhecimentos matemáticos não nasceram sistematizados, com algoritmos prontos para serem utilizados, mas que foram construídos a partir das necessidades humanas de se chegar a uma solução para determinado problema do cotidiano, ou até mesmo pela simples curiosidade em solucionar problemas, assim, acredita-se que conhecer o percurso realizado por esses conhecimentos ao longo da história pode contribuir para a compreensão e significação dos mesmos por parte dos alunos.

Segundo Gomes (2005), a História da Matemática vem ganhando espaço e se consolidando como área de conhecimento e investigação em Educação Matemática. Diversas pesquisas têm sido realizadas nesta área e os resultados demonstram que cada vez mais o saber matemático está interligado à motivação e interesse dos alunos por essa ciência e devido a isso se tem acreditado que a História da Matemática pode ser utilizada como metodologia de ensino, e assim tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes.

Resgatar a História da Matemática no ambiente escolar é uma estratégia que possibilita construir com os alunos um olhar mais crítico, onde se promove a reflexão diante das relações existentes entre a Matemática e as diversas áreas do conhecimento. Diante disso é importante também apresentar aos estudantes as diferentes matemáticas utilizadas pelo mundo afora, para que assim consiga levá-lo a valorizar tais conhecimentos e de certa forma fazer com que ele também valorize o seu próprio conhecimento.

Como citam Lopes e Ferreira (2013):

> Afinal, (re)conhecer as contribuições de diferentes povos, fugindo de uma visão única da (etno)matemática eurocentrista, possibilita atribuir valor à própria cultura ao perceber-se inserido no contexto do conhecimento escolar (LOPES; FERREIRA, 2013, p. 77).

A matemática sempre esteve presente na vida do homem desde os tempos mais remotos mesmo que de maneira intuitiva e mostrar aos alunos essa relação é uma excelente forma de se obter a compreensão desses conhecimentos matemáticos por parte deles. Como cita Santos (2009):

> "É importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças" (SANTOS, 2009, p.19).

Ao ter contato com a História da Matemática, o aluno pode ver essa disciplina com outro olhar, pois percebe que se trata de uma ciência construída pelo próprio homem depois de muitas tentativas e erros ao buscar solucionar problemas do cotidiano. Diante dessa visão, Santos (2009) diz que a História da Matemática:

> " [...] dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político"(SANTOS, 2009, p.20).

Ainda nessa linha, Miguel e Miorim (2011) apontam a importância da história durante o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, para que o aluno receba um estímulo e, assim, não fique alienada em relação a esse ensino. Para eles "a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido" o que leva o aluno a acreditar que a Matemática é uma ciência repleta de coleções arbitrárias de objetos sem conexão e sentido (MIGUEL; MIORIM, 2011, p.52).

Para Groenwald et. al. (2005), ter uma perspectiva histórica da disciplina possibilita ao aluno "um saber significativo, que foi e é construído pelo homem para responder suas dúvidas na leitura do mundo, permitindo ao aluno apropriar-se desse saber, o que lhe propiciará uma melhor leitura do contexto global".

Essa visão de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada muitas vezes é um pensamento dos próprios educadores que deixam de questioná-la e de perceber que a matemática está em constante adaptação e podemos observar isso na fala de Cury e Motta (2008) quando discute o tema com professores dessa área, "para eles as definições matemáticas, uma vez estabelecidas, passam a serem verdades absolutas e não lhes é permitido questioná-las", para os autores isso é uma falha que já vem dos níveis mais altos da educação, ou seja, nas pessoas que formam os professores que irão atuar na Educação Básica.

> Dar-se conta de que a construção de um conceito pode exigir outros recursos metodológicos além do simples enunciado da definição formal – a qual é, em si, um objeto histórico variável, formalizado de acordo com o desejo de busca vivido pelo meio e conduzido pelo contexto ao qual se incorporará o objeto matemático definido – é algo que desestabiliza as concepções dos docentes e lhes faz refletir sobre sua prática (CURY; MOTTA, 2008, p.79).

No entanto, quando o aluno conhece e compreende a História do conteúdo que lhe está sendo apresentado, o seu entendimento no que diz respeito à essa dimensão histórica, desperta o interesse, motivando-o ainda mais a buscar o conhecimento. Dessa forma o aluno pode desenvolver aspectos investigativos, críticos e principalmente autonomia para buscar alternativas na resolução de problemas matemáticos.

D'Ambrosio (1999) afirma que, discutir educação sem recorrer aos seus registros históricos e referentes interpretações dos mesmos é impossível, valendo, isto, para várias disciplinas, em especial, ao estudo da Matemática.

Neste intuito, faz-se necessário uma discussão ampla sobre o tema, para que se busquem maneiras eficientes de se introduzir a História da Matemática em sala de aula, e isso deve ser feito através de um planejamento pedagógico capaz de propor aulas que utilizem essa área do conhecimento com uma maneira de redescobrir o conhecimento e assim colaborar com a construção de conceitos semelhantes da criação histórica dos mesmos, pois entendendo a origem desses conceitos o educando compreenderá melhor como a Matemática pode ser inserida em seu dia a dia.

Dessa forma, o conteúdo ministrado quando articulado à sua história pode despertar a curiosidade nos alunos, e assim deixarem de enxergar a Matemática como algo difícil e inútil em suas vidas. Segundo Carvalho (1994):

> O ensino da história da Matemática permite recuperar sentido, e símbolo que foram ensinados tão arbitrários, seus traços, suas origens e a sua histórica permitem-nos restabelecer os novos conceitos que a mesma visa. Neste sentido dois aspectos são fundamentais no ensino da Matemática: tais como: o primeiro refere-se à visão da matemática que em geral norteia o ensino. Considera-se a Matemática como uma área do conhecimento pronta, acabada, perfeita pertencente apenas ao mundo da ideias e cuja estrutura de sistematização serve de modelo para outras ciências". O segundo aspecto é considerado como algo crucial, causando desgosto da maioria dos alunos pela Matemática (CARVALHO, 1994, p.15 apud LUNA, 2014, p.16)

Já para Carvalho (1994):

> "...no ensino onde é necessário submeter-se à autoridade da Matemática, é impossível entender, pois, compreender Matemática torna-se privilégio das cabeças mais bem dotadas; acaba-se por negar todas as vivências anteriores relativas à qualificação já que não se enquadram na perfeição da Matemática" (CARVALHO, 2014, p.16 apud LUNA, 2014, p. 16).

O educador precisa perceber que para o ensino da Matemática melhorar é necessário que esteja o mais próximo possível da realidade do seu aluno, dessa forma haverá menos resistência por parte dele para o estudo dessa ciência, pois ainda hoje muitos acreditam que estudar matemática é um feito para poucos, ou melhor, apenas para os superdotados. As palavras de Garbi (1997 apud Oliveira et al. 2014, p. 461) corroboram para essa perspectiva:

> De um modo geral, a matemática é mostrada de maneira fria e insípida, sem qualquer vinculação com a realidade histórica e humana, vivida pelos gênios que, ao desvendar os segredos das ciências exatas, tornaram possível o mundo tecnológico que nos está libertando da miséria, das doenças, do sofrimento e da ignorância (GARBI, 1997 apud Oliveira et al., 2014, p. 461).

O professor sendo mediador do conhecimento, dentro de sala de aula tem como missão despertar no seu aluno a mesma paixão e interesse que o levou à escolha dessa profissão, principalmente a escolher a área de exatas, uma área muitas vezes vista como o terror da escola e que na verdade é de extrema importância para a sociedade.

A Geometria, em especial, será utilizada pelo aluno durante toda a sua vida, mesmo que muitas vezes de uma forma contextualizada diferente daquela que aprenderam na escola. Assim, fazer uso de metodologias diferenciadas como a História da Matemática e deixar evidente o amor pela disciplina são ingredientes importantíssimos que não podem faltar numa aula de matemática.

Despertar o gosto no aluno é o primeiro passo para se ter melhorias no ensino da Matemática, e esse gosto pode ser dado quando o aluno conhece a formação do conceito que quer se ensinar.

3.1 Que contribuições a História da Matemática contextualizada pela razão áurea pode trazer para o ensino da geometria?

O levantamento bibliográfico e histórico realizado durante este trabalho fortaleceu a convicção de que conhecer melhor a História pode possibilitar ao aluno uma maior compreensão do que é e para que serve o conteúdo que está sendo ministrado em sala de aula, possibilita também que as aulas sejam mais dinâmicas e atraentes, aguçando assim a curiosidade e a vontade do aluno em aprender.

Conhecer a História da Matemática possibilita ao aluno investigar as origens e descobertas, métodos e notações matemáticas desenvolvidas ao longo do tempo, desde as antigas civilizações até os nossos dias. Todo conhecimento que temos hoje sobre Matemática foi desenvolvido através da curiosidade, de pesquisas, tentativas de estudiosos ao longo de muitos anos e reconhecer tais feitos é fundamental para compreender o principio das ideias que foram aos poucos dando forma à cultura.

Levar o aluno a relacionar situações do cotidiano ao conteúdo matemático aprendido na escola é importante, porque isso o leva a encontrar sentido naquilo em que está aprendendo. Pode-se perceber esse fato nas palavras de D’Ambrósio (1999, p.97), “Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas”.

Estudar como se deu a construção histórica dos conhecimentos matemáticos possibilita uma maior compreensão da evolução dos conceitos enfatizando as dificuldades relacionadas a sua origem, estrutura, métodos e validade desse conhecimento, ou seja, pode-se perceber que todo conhecimento que temos hoje foi elaborado por meio da tentativa do homem em compreender e atuar em seu mundo.

Hoje exige-se que o aluno desenvolva competências e habilidades que sejam utilizadas no cotidiano escolar, mas que principalmente possam ser levadas para sua vida fora da escola, levando o aluno a desenvolver sua autonomia e criticidade para resolver os problemas matemáticos apresentados em seu dia a dia. Nesse quesito, a Geometria tem um papel muito importante, pois as figuras geométricas são facilmente encontradas e identificadas, desenvolvendo no aluno raciocínios geométricos que são ferramentas importantes para se conseguir resolver problemas, como citam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> “Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, pág. 55).

Ainda segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, pág. 55), a Geometria permite que se ensinem situações-problemas que os estimule a observar, explorar, perceber e identificar as diferenças e semelhanças.

A Geometria sempre fez parte da vida das pessoas que sem perceberem aplicam os conhecimentos geométricos em muitas de suas atividades diárias. Podemos tomar como exemplo o pedreiro que em suas construções usa sem saber os conceitos da Geometria aprendidos na escola.

Diante dessa perspectiva, resgatar situações cotidianas para serem utilizadas no ensino da Matemática traz contribuições positivas para o ensino. A Razão Áurea pode ser uma dessas ferramentas a serem utilizadas para o ensino da Geometria, por ser encontrada em diversas situações do cotidiano e áreas do conhecimento das quais o aluno sequer imagina que ela esteja presente. Dessa forma são situações que podem ser colocadas como curiosidades e/ou aplicações.

A Razão Áurea vem contribuir para o ensino da Geometria, quando possibilita trazer para as aulas aplicações práticas do Número de Ouro na geometria através de situações que podem ser observados na natureza, vistos aplicados na arte, nas pinturas, esculturas, na arquitetura, biologia ou até mesmo na odontologia. E com isso deixa de se ensinar figuras geométricas, por exemplo, de forma isolada.

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES UTILIZANDO A RAZÃO ÁUREA

As atividades propostas neste trabalho foram elaboradas seguindo como modelo as atividades propostas no artigo de Rosania Maria Queiroz (2007) uma Proposta apresentada ao PDE: Programa de Desenvolvimento Educacional. Atividades que utilizam sempre como auxílio inicial para o ensino da Geometria, vídeos ou textos históricos que abordam de certo modo a história da razão áurea.

4.1 Porta-canetas áureo

Objetivo pedagógico:

- Tratar de um assunto normalmente não desenvolvido no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando materiais que necessitam o entendimento de espaço.
- Manusear e manipular materiais a fim de construir figuras geométricas planas e espaciais.
- Estudar razões e proporções, utilizando tais conceitos para obter razões áureas dentre as medidas obtidas.
- Mostrar que a Matemática pode estar relacionada com objetos do cotidiano através das dimensões áureas.
- Encorajar o discente a apreciar a beleza matemática na natureza, na ciência, na arte e na estética.
- Mostrar que os objetos que apresentam maior correlação numérica com a razão áurea, em geral, são mais bem aceitos em função da beleza estética.
- Mostrar que a Matemática desenvolvida neste tópico pode ser tratada até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que a Matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e na interação dos mesmos com outras pessoas que essa habilidade se desenvolve.
- Despertar a atitude positiva em relação à matemática, valorizando sua utilidade, sua lógica e sua beleza.

- Articular o eixo Números, Operações e Geometria Espacial.

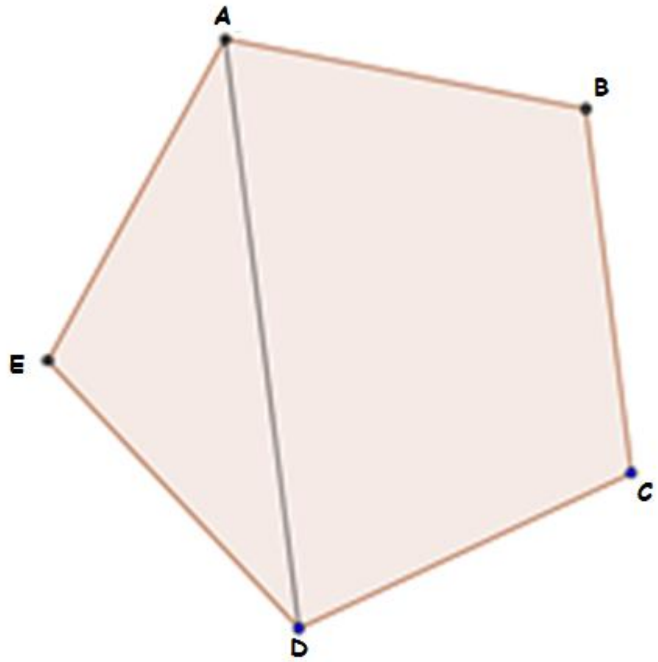
***Material necessário*:**

Embalagens de leite, calculadora, caneta, lápis, borracha, régua, tesoura, fita adesiva, tintas e o vídeo “Donald no País da Matemágica – Pentagrama e a Razão Áurea”[1].

***Encaminhamento Metodológico*:**

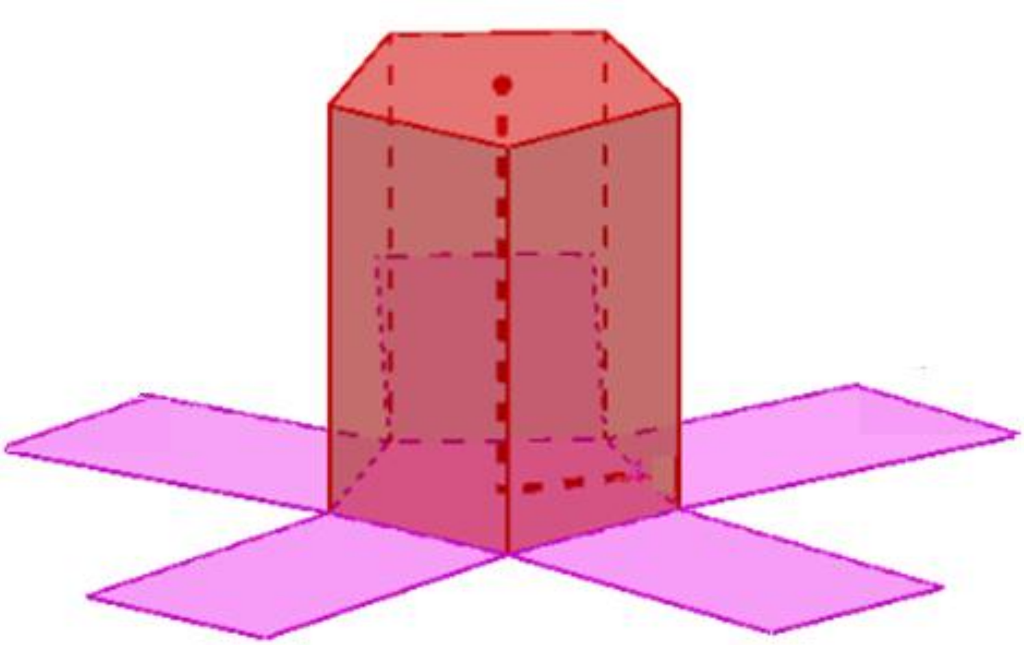
Após assistir, em sala de aula ou na sala de vídeo da escola, o vídeo “Donald no País da Matemágica – Pentagrama e a Razão Áurea”, será realizada uma discussão geral sobre o assunto. O professor poderá utilizar a televisão ou data show e com o auxílio de um pen-drive e o acesso a internet mostrar aos alunos o vídeo, o passo a passo com imagens das construções que serão realizadas. Esse vídeo apresenta as razões áureas em diversas situações, inclusive no pentágono, o que facilitará o entendimento da atividade. Após discussão sobre o vídeo e análise das imagens, os alunos formarão pequenos grupos de 4 à 6 pessoas.

Após a formação dos grupos, cada equipe receberá do professor as instruções necessárias para a construção de um pentágono regular. Com o uso da régua e do compasso constrói-se um pentágono regular com as medidas dos lados podendo ser escolhidas pelo grupo.

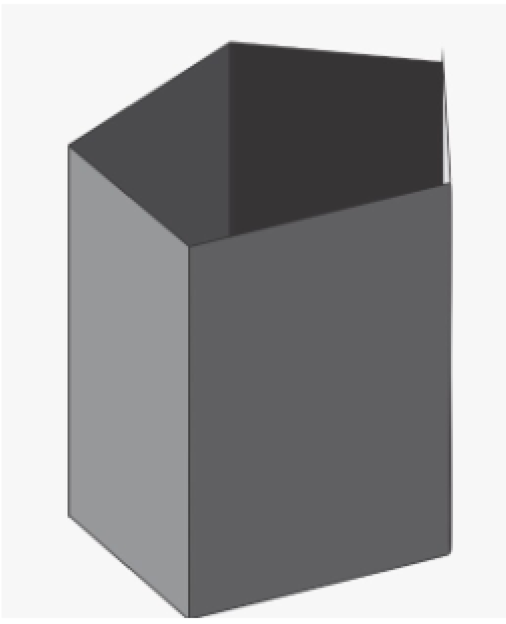


[1] https://www.youtube.com/watch?v=5pyqszJ6hSk

Depois de construído, uma das diagonais do pentágono será utilizada como a altura do prisma que será levantado sob os lados do pentágono e confeccionado com as embalagens recicláveis de leite.



Os alunos verificarão as razões áureas nos retângulos que compõem as faces laterais deste prisma e finalizarão a atividade com o auxílio da fita adesiva e usando sua criatividade para colorir seu porta-canetas com formato de prisma pentagonal com razões áureas.



4.2 Construindo um triângulo áureo

***Objetivo pedagógico*:**

- Trabalhar o assunto de uma forma diferente daquela normalmente apresentada nos livros didáticos de Matemática no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos individuais, motivando a concentração e dedicação de cada aluno da classe.
- Construir triângulos áureos cujas razões medidas das laterais e das bases correspondam ao número de ouro.
- Mostrar que o triângulo áureo é uma figura geométrica esteticamente agradável.
- Trabalhar nos alunos a habilidade de utilizar materiais de apoio como réguas e compassos.
- Mostrar que é possível trabalhar os Conteúdos Estruturantes dos Ensinos Fundamental e Médio de forma articulada, envolvendo Números, Operações, Álgebra, Medidas e Geometria.
- Mostrar que é possível trabalhar o conhecimento elaborado cientificamente de uma forma agradável aos alunos e professores.
- Articular o eixo Números, Operações e Álgebra com os eixos Medidas e Geometrias.

Material necessário

Régua, compasso, transferidor, calculadora, caneta, lápis, borracha, papel e xérox do texto “O Retângulo Áureo”[2] de Rosania Maria Queiroz.

***Texto de Auxílio*:** O Retângulo Áureo (ROSANIA MARIA QUEIROZ)

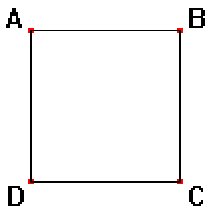
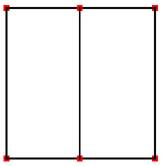
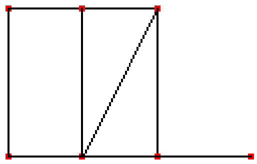
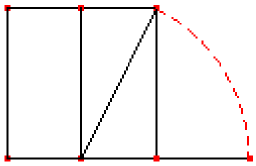
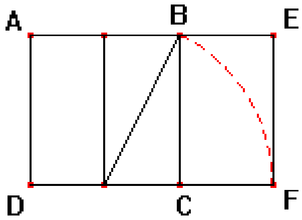
O retângulo áureo e uma figura esteticamente agradável. Ele apresenta os seus lados na razão áurea, isto e: a/b = 1,618... Este retângulo exerceu uma influência muito grande na arquitetura e na pintura. Nos dias de hoje ele e bastante utilizado no formato de cartões de credito, carteira de identidade, carteira de habilitação, capas de livros e cadernos, cartas de baralho, blocos de papel de carta,

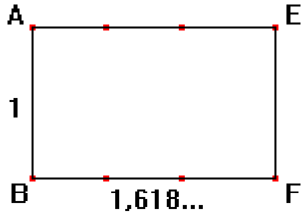
[2] http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf

janelas, construções, etc. Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos.

O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um certo retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da razão áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e em cada uma destas pesquisas os resultados foram semelhantes.

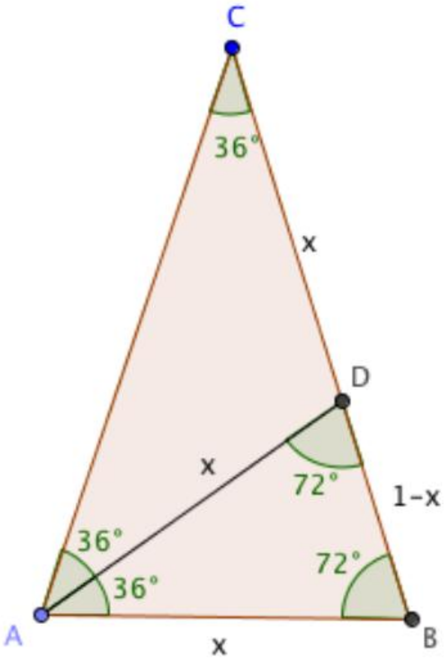
Observe como podemos construir um retângulo áureo:

Inicialmente vamos construir um quadrado cuja medida do lado seja uma unidade de comprimento;	
Unindo o ponto médio do lado AB com o ponto médio do lado DC, obtemos dois retângulos congruentes.	
Prolongamos o lado DC do quadrado e traçamos uma das diagonais do segundo retângulo, conforme o modelo ao lado.	
Com a ponta seca do compasso no vértice inferior esquerdo do segundo retângulo, abertura igual a medida da diagonal, traçamos um arco do vértice direito superior do retângulo ao prolongamento do lado DC do quadrado.	
Partindo do ponto de interseção do arco com o segmento da base, traçamos o segmento EF paralelo ao lado AD. Prolongamos o lado AB do quadrado até encontrar o segmento EF para formar o retângulo;	

O retângulo AEFB aqui construído apresenta a razão entre suas dimensões igual a 1,618..., por isso e chamado retângulo áureo.	

Encaminhamento Metodológico:

Após leitura do texto “O Retângulo Áureo”, será realizada uma discussão geral sobre o assunto. O professor poderá utilizar a televisão ou o data show e com o auxílio de um pen-drive mostrar aos alunos imagens do retângulo áureo e da construção geométrica deste retângulo que podem ser encontradas no mesmo link. Após a discussão sobre o assunto, os alunos em posse do material necessário e com a orientação do professor seguirão um passo a passo para a construção de um triângulo áureo, que é um triângulo isósceles com os ângulos da base medindo 72º e o ângulo do ápice medindo 36º, também conhecido como "Triângulo Áureo":



Diz-se de um triângulo áureo, ou de um retângulo áureo que: o quociente do lado maior, pelo menor, resulta no número áureo, resultado esse conferido pelos alunos após a construção do triângulo. Na sequência algumas observações e curiosidades a respeito do triângulo áureo serão levantadas pelo professor, como por exemplo, que traçando uma bissetriz num de seus dois ângulos de 72º, surge um novo triângulo, semelhante ao maior, e repetindo a operação, isso acontece infinitas vezes, assim como o retângulo áureo.

4.3 Relações áureas em monumentos que têm a forma retangular

***Objetivo pedagógico*:**

- Tratar de um assunto que, em geral, não é desenvolvido no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos em equipe, interagindo com as respostas obtidas por outros grupos.
- Após estudar sistemas de unidades de medidas de comprimento, cada grupo irá realizar na prática medidas de objetos que têm a forma retangular.
- Estudar razões e proporções, utilizando tais conceitos para obter razões entre as dimensões de objetos na forma retangular.
- Identificar monumentos do cotidiano na forma retangular que apresentam a razão áurea entre suas dimensões ou uma razão que se aproxima da razão áurea.
- Mostrar que a Matemática está presente no nosso dia-a-dia.
- Mostrar que a Matemática pode ser utilizada para proporcionar beleza estética aos monumentos do nosso cotidiano.
- Mostrar que a Matemática possui aplicações práticas importantes na vida das pessoas e que tais relações são ignoradas por um número muito grande de docentes.
- Mostrar que a Matemática desenvolvida neste tópico pode ser compreendida até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que é possível trabalhar o conhecimento elaborado cientificamente de forma agradável e prazerosa aos alunos e professores.
- Articular o eixo Números, Operações e Álgebra com os eixos Medidas e Geometrias.

***Material necessário*:**

Imagens de monumentos conhecidos ou comuns ao nosso cotidiano que possuem a forma retangular, régua, calculadora, caneta, lápis, borracha e xérox do texto “O Retângulo Áureo”[3] de Rosania Maria Queiroz.

***Encaminhamento Metodológico*:**

Após leitura do texto “O Retângulo Áureo”, será realizada uma discussão geral sobre o assunto. O professor poderá utilizar a televisão ou data show e com o auxílio de um pen-drive mostrar aos alunos imagens do retângulo áureo e da construção geométrica deste retângulo que podem ser encontradas no mesmo link, além de diversas imagens de monumentos que possuem em sua fachada retângulos áureos. Após a discussão sobre o assunto, os alunos formarão pequenos grupos de 4 à 6 pessoas.

Após a formação dos grupos, utilizando a régua, cada equipe irá medir nas imagens trazidas pelos alunos o comprimento e a largura dos retângulos observados nas fachadas dos monumentos a forma retangular e após realizar as medições, calcular a razão entre essas dimensões de cada imagem, as quais serão registradas. Concluído o cálculo das razões, cada equipe verificará quantas de suas imagens possuem a razão entre suas dimensões mais próxima da razão áurea. Dando sequência ao trabalho, cada equipe apresentará aos demais colegas o resultado do seu trabalho. Concluídas as apresentações o professor poderá falar do valor estético no formato retangular de monumentos, visto que muitos deles apresentam a razão entre suas dimensões bem próximo à razão áurea.

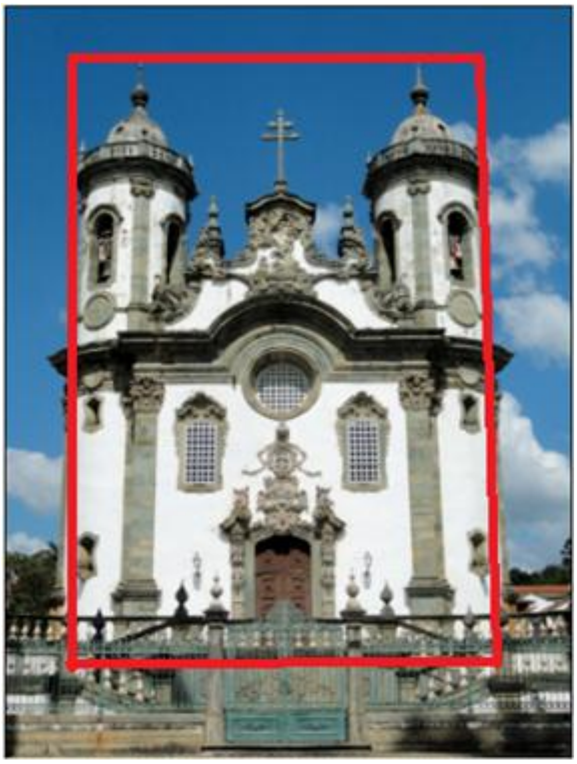
Apresentamos algumas sugestões de imagens[4] que os alunos podem utilizar para realizar esta atividade.

---

[3] http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf

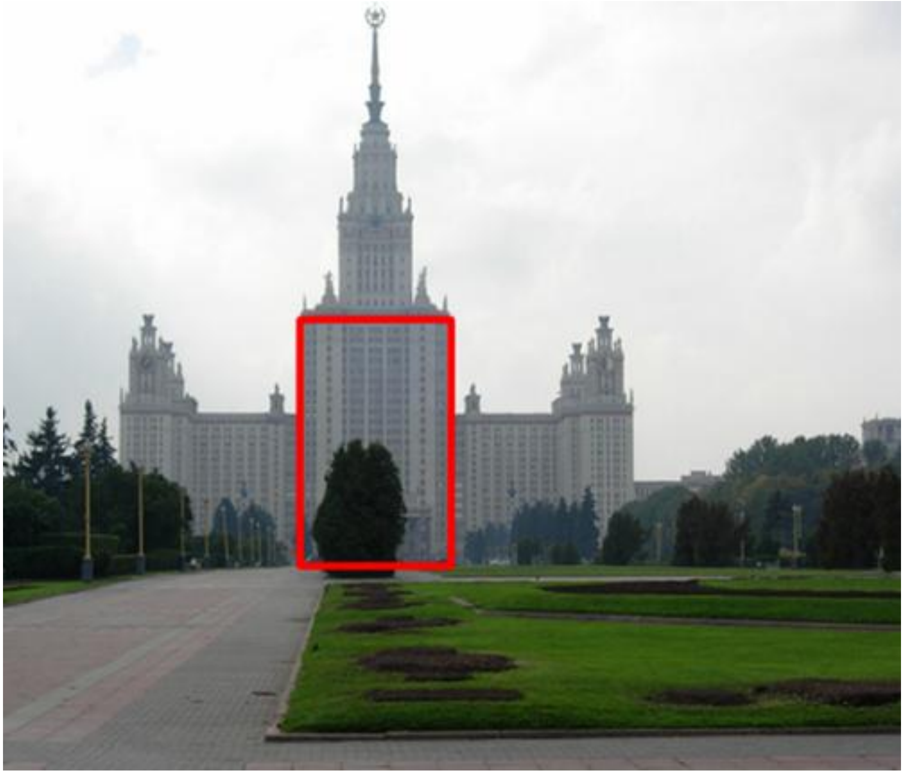
[4] http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf

Figura 26 – Igreja São Francisco de Assis – Minas Gerais



Fonte: https://www.apontador.com.br/

Figura 27 – Universidade de Moscou - Moscou

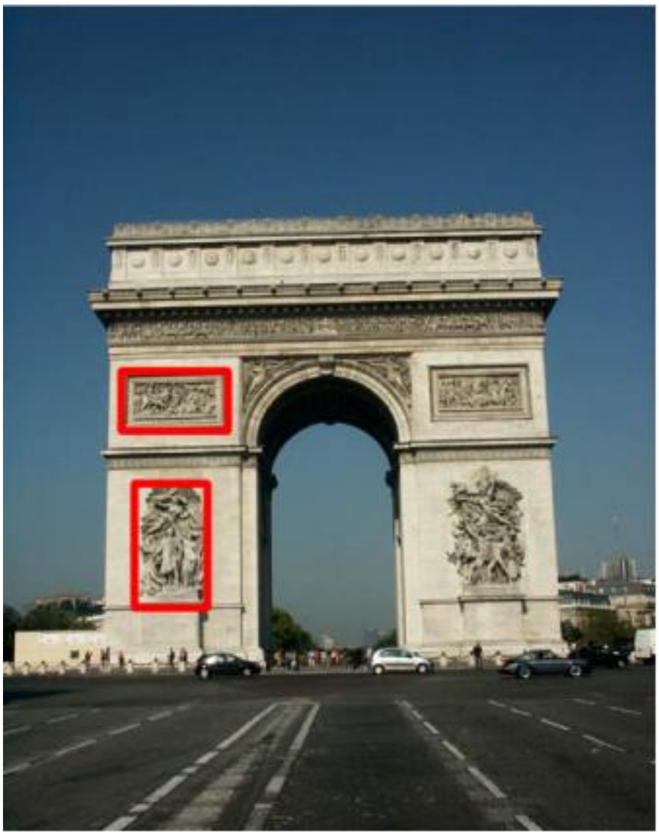


Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/

Figura 28 – Arco de Septímio Severo – Roma

Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/

Figura 29 – Arco do Triunfo – Paris



Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/

4.4 Memória da Razão

Objetivo pedagógico:

- Tratar de um assunto normalmente não desenvolvido no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas pelo grupo.
- Estudar razões e proporções, utilizando tais conceitos para obter razões áureas dentre as medidas obtidas pelos grupos.
- Mostrar que a Matemática possui aplicações práticas importantes na vida das pessoas.
- Mostrar que a Matemática desenvolvida neste tópico pode ser tratada até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que a Matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- Despertar a atitude positiva em relação à matemática, valorizando sua utilidade, sua lógica e sua beleza.
- Articular o eixo Números, Operações e Álgebra com o eixo Medidas.

***Material necessário*:**

Peças retangulares feitas de papel cartão em duas cores, calculadora e xérox do texto **“**Razão áurea e Mondrian”[5] de Rosania Maria Queiroz.

Texto de Auxilio: Razão áurea e Mondrian(ROSANIA MARIA QUEIROZ)

Pieter Cornelis Mondrian nasceu em Amersfoort na Holanda em 1872 e apesar das objeções da família, estudou na Academia de Belas Artes de Amsterdã de 1892 a 1895 e depois começou a pintar.

Nas suas últimas composições, Mondrian, como ficou conhecido, utilizou linhas pretas horizontais e verticais que delimitam blocos na cor branco, vermelho, amarelo ou azul. Na busca da harmonia e da beleza, Pieter Mondrian encontrou a

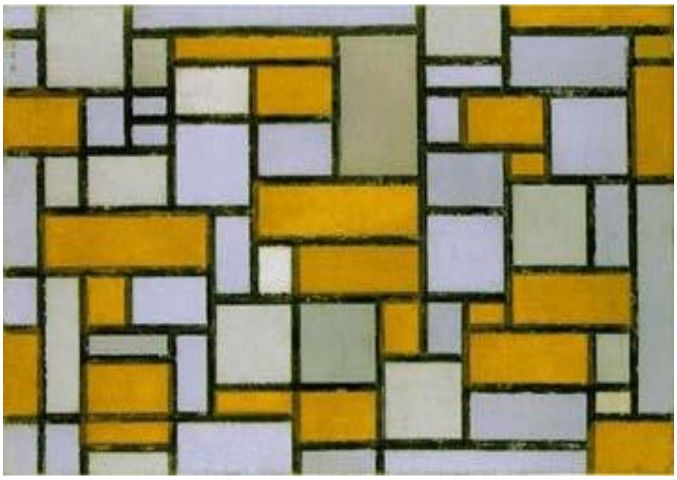
[5] http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razaoaurea.pdf

matemática. Descobriu o número de ouro e com ele chegou ao retângulo de ouro, que passou a ser presença constante nas suas pinturas.

Alguns quadros onde se observa retângulos de ouro:

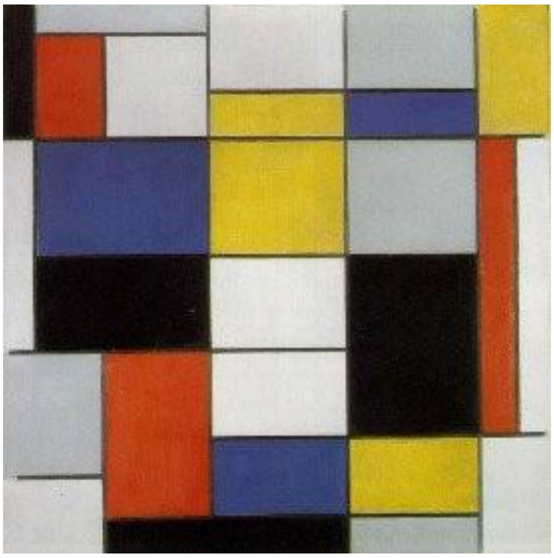
- “Composition in Blue-B” no ano de 1917,
- “Composition With Gray and Light Brown” - 1918,
- “Composition A” - 1920,
- “Composition in Red, Yellow and Blue” no ano de 1921,
- “Composition With large blue plane, red back, yellow and gray” em 1921,
- “Lozenge composition with, yellow, black, blue, red and gay” – 1921.

Figura 30 – Composition With Gray and Light Brown – 1918



Fonte:http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Mondrian2.htm

Figura 31 – Composition A - 1920



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Mondrian2.htm

***Encaminhamento Metodológico*:**

Após leitura do texto “Razão áurea e Mondrian”, o professor realizará uma discussão geral sobre o assunto. Depois de trabalhado o tema razão áurea, razão e proporção o professor formará grupos contendo de 4 a 6 alunos propondo aos alunos um jogo da memória intitulado como “memória da razão”

Após a formação dos grupos, cada equipe receberá do professor um conjunto contendo 15 pares de fichas retangulares de papel cartão divididos em duas cores, por exemplo, vermelho e verde, nas fichas vermelhas estarão alguns valores referente ao lado maior de um retângulo e nas fichas verdes alguns valores referente ao lado menor do mesmo retângulo. Os alunos deverão embaralhá-las de forma que as cores das fichas fiquem voltadas para cima e os valores fiquem virados para baixo e como num jogo de memória deverão virar uma carta vermelha que contém o valor referente a um lado de um retângulo e uma carta verde que contém o valor referente ao outro lado do retângulo e realizar, com o auxilio da calculadora, o cálculo da razão entre os lados. Quando o resultado obtido no cálculo for aproximadamente o valor da razão áurea, o aluno retira as cartas da mesa fazendo um ponto. Após encontrar todos os pares os alunos deverão contar quantos pontos cada um realizou para descobrir o ganhador.

Modelo de fichas:

15,9	9,8
1+√5	2

4.5 Construindo a Espiral Áurea

Objetivo pedagógico

- Tratar de um assunto normalmente não desenvolvido no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio.
- Realizar trabalhos em equipe, utilizando interação de respostas obtidas por outros grupos.
- Após realizar o estudo de sistemas de unidades de medidas de comprimento, cada grupo irá construir quadrados cujas medidas dos lados correspondam a números da Sequência de Fibonacci.
- Observar que quando os quadrados são justapostos em ordem crescente da medida de seus lados, eles vão formando retângulos áureos.
- Estudar razões e proporções, utilizando tais conceitos para obter razões áureas dentre as dimensões dos retângulos formados pela justaposição dos quadrados.
- Observar que utilizando um compasso para traçar um quarto de círculo nos quadrados justapostos obtemos uma espiral como a do Nautilus.
- Mostrar que a Matemática está relacionada com a Biologia através da Espiral Áurea uma vez que esta apresenta as mesmas propriedades da espiral do Nautilus Marinho.
- Encorajar o docente a apreciar a beleza matemática na natureza, na ciência e na Biologia.

- Mostrar que a Matemática possui aplicações práticas importantes na natureza e que tais relações são ignoradas por muitos docentes.
- Mostrar que a Matemática desenvolvida neste tópico pode ser tratada até mesmo por alunos que apresentam dificuldades matemáticas.
- Mostrar que é possível trabalhar o conhecimento elaborado cientificamente de forma agradável e prazerosa.
- Mostrar que a Matemática também pode contribuir para que as crianças desenvolvam a habilidade de comunicar suas ideais, pois é nos momentos de trabalhos em equipe e de apresentação dos mesmos que essa habilidade se desenvolve.
- Despertar a atitude positiva em relação à matemática, valorizando sua utilidade, sua lógica e sua beleza.
- Articular o eixo Números, Operações e Álgebra com os eixos Medidas e Geometrias.

***Material necessário*:**

Papelão, régua, lápis, borracha, tesoura, fita adesiva, compasso, xérox dos textos "O Retângulo áureo" e "A sequência de Fibonacci e a espiral"[6] de Rosania Maria Queiroz sobre Razão Áurea.

***Texto de Auxilio*:** A sequência de Fibonacci e a espiral (ROSANIA MARIA QUEIROZ)

Um retângulo áureo tem a interessante propriedade de, se o dividirmos num quadrado e num retângulo, o novo retângulo é também áureo. Repetindo este processo infinitamente e unindo os cantos dos quadrados formados, obtém-se uma espiral a que se dá o nome de espiral áureo.

A espiral sempre foi conhecida por uma variedade de nomes, correspondentes a uma ou outra característica. Descartes em 1638 designou-a de espiral equiangular, porque o ângulo em que um raio vetor corta a curva, em qualquer ponto, é constante.

Foi chamada de espiral geométrica porque seu raio aumenta em progressão geométrica. Jakob Bernoulli (1654-1705), que era fascinado pela beleza matemática

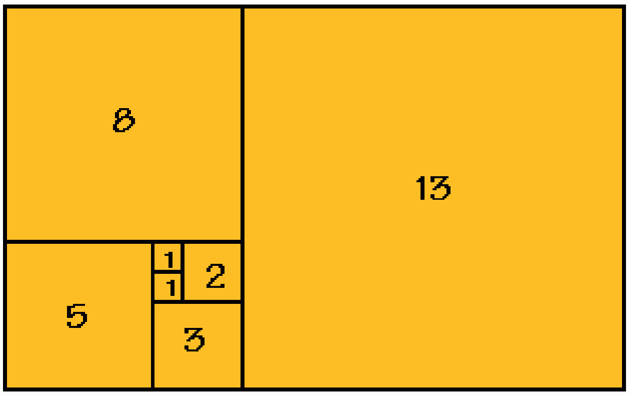
---

[6] http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf.

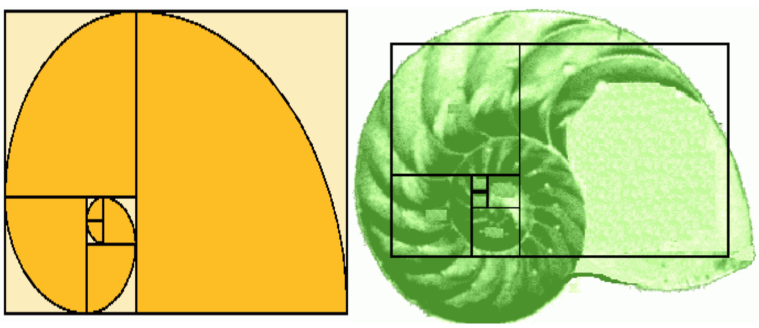
da curva, observou que seu tamanho aumenta, mas sua forma não se altera, por isso, chamou-a de espiral logarítmica.

Considerando esta característica, Bernoulli a descreveu como *spiramirabilis*. Anexando dois quadrados com lado = 1 unidade, teremos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos quadrados anteriores.

Anexando agora outro quadrado com lado = 2 unidades (o maior lado do retângulo 2x1), obteremos um retângulo 3x2. Se continuarmos este processo, a sequência dos lados dos próximos quadrados será: 5, 8, 13..que é a sequência de Fibonacci.



Utilizando um compasso e traçando um quarto de círculo no maior quadrado de lado = 13 e em seguida traçando quartos de círculos nos quadrados de lado L=8, L=5, L=3, L=2, L=1 e L=l, obtemos uma espiral como a do Nautilus Marinho.

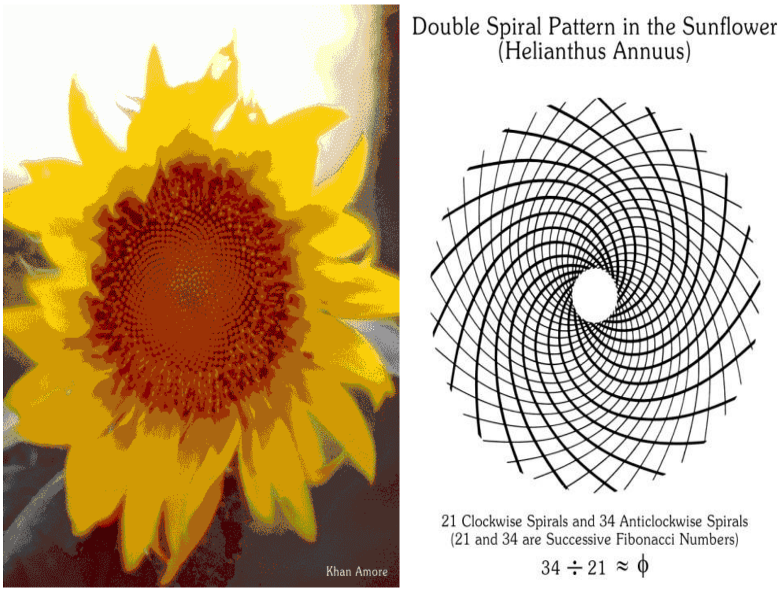


Fonte:http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

As sementes de girassol formam espirais tanto para a esquerda como para a direita. Numa boa amostra, vê-se uma característica importante: dois conjuntos de espirais sobrepostas ou entrelaçadas, um à direita e outro à esquerda, onde os flósculos desempenham um duplo papel, por pertencerem a duas espirais.

O número de espirais em cada direção quase sempre são números vizinhos na sequência de Fibonacci. Se calcularmos a razão entre esses dois números chegaremos ao número Phi ou a um número próximo de Phi.

Figura 32 – As espirais do Girassol



Fonte: http://www.hypatia-lovers.com/geometry/Divine_Proportion.html

Muitos abacaxis possuem 13 diagonais num sentido e 8 diagonais no outro sentido. Se calcularmos a razão entre esses números, encontraremos o Phi.

Encaminhamento Metodológico:

Após ler os textos “O Retângulo áureo” e “A sequência de Fibonacci e a espiral” em sala de aula, será realizada uma discussão geral sobre o assunto, destacando que o novo símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática é a Espiral Áurea. O professor poderá utilizar a televisão ou data show e com o auxílio de um pen-drive mostrar aos alunos imagens da Espiral Áurea[7] e do Nautilus Marinho.

Após discutir informações sobre a construção da Espiral Áurea, os alunos formarão pequenos grupos de 4 à 6 pessoas.

Utilizando papelão, os alunos vão construir sete quadrados de modo que as medidas dos lados correspondam aos sete primeiros números da sequência de Fibonacci. Em ordem crescente de tamanho dos lados será colado, com o auxílio de fita adesiva, o quadrado cujo lado é o segundo número da sequência de Fibonacci abaixo do primeiro, o quadrado cujo lado é o terceiro número da sequência de Fibonacci à direita dos anteriores, e assim sucessivamente, dando a ideia de movimento em espiral.

[7] www.mwt.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

Após colar os quadrados, coloca-se a ponta seca do compasso no vértice do lado direito comum aos dois quadrados menores, traçando um quarto de círculo em cada um desses quadrados. Dando continuidade, traçar um quarto de círculo nos demais quadrados para formar a Espiral Áurea. Após construir a Espiral Áurea, relacioná-la com a espiral do Nautilus para que o aluno possa admirar a beleza da Matemática.

Atualmente a História da Matemática possui milhares de anos de registros e de existência das mais variadas épocas. Foram muitos estudos e muitas contribuições da Matemática para o desenvolvimento do conhecimento humano, onde muitos deles acabaram por revolucionar o modo de viver da humanidade.

Muitos temas da Matemática surgiram de aplicações necessárias em diversas situações cotidianas e o que se nota no desenvolvimento deste trabalho é que são muitos os materiais divulgados e as informações a respeito da Razão Áurea.

As atividades elaboradas visam buscar aspectos e fundamentos sobre a Razão Áurea e o ensino da Geometria para ser desenvolvido por professores e alunos, tendo como objetivo auxiliar o desenvolvimento de atividades que utilizem a Razão Áurea e para que os alunos entendam e situem os acontecimentos que contribuíram para a Matemática.

Considerando que a história da Razão Áurea é motivadora, pois conforme se aprofundam os estudos, os alunos deparam-se com situações matemáticas curiosas que os instigam a pesquisar, além de levar a estudar e aprender sobre outros assuntos.

Espera-se que este trabalho e as atividades que nele contam auxilie o professor a estimular e aprimorar suas aulas e que seja uma fonte agradável para adquirir conhecimento sobre Razão Áurea.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca e ampliação dos conhecimentos sobre a Razão Áurea foi prazerosa e curiosa ao mesmo tempo, perceber as diferentes situações do cotidiano onde o número de ouro pode ser encontrado e entender de que forma isso pode ser provado, possibilita enxergar uma gama de possibilidades da aplicação desse número em sala de aula. Utilizar esse conhecimento no ensino de Geometria é uma dessas possibilidades.

Historicamente se sabe que muitos estudiosos dedicaram seu tempo à pesquisa e aplicação da Razão Áurea, mas que hoje isso tem sido de muito pouco interesse entre os estudiosos e menos ainda explorado nas instituições de ensino e as razões podem ser diversas.

Diante disso é que surgiu a pergunta norteadora deste trabalho: “Que contribuições a História da Matemática contextualizada pela razão áurea pode trazer para o ensino da Geometria?”. Neste trabalho foi possível observar que as contribuições para a Geometria contextualizada pela Razão Áurea são diversas. Ensinar uma teoria mostrando sua aplicabilidade no cotidiano, possibilita o aluno aguçar sua curiosidade, seu interesse e com isso o ensino aprendizagem fica facilitado, pois passa a ter um significado e deixa de ser abstrato aos olhos do aluno.

E esses benefícios podem ir além se o educador conseguir colocar a prática ao alcance do seu aluno, a Geometria assim como outras áreas da Matemática possibilita esse tipo de aula, o que com certeza tornará o aluno mais autônomo e crítico, capaz de buscar as soluções necessárias para as diferentes situações encontradas em sala de aula e fora dela.

A abrangência do tema instigou uma busca por informações e novos conhecimentos, que pode ser utilizado como uma ferramenta metodológica a mais dentro da sala de aula, não só na prática docente, como na prática de outros profissionais, pois possibilitará ao aluno perceber no seu cotidiano aquilo que está aprendendo.

Realizar um resgate histórico da Razão Áurea e do ensino da Geometria juntamente dos alunos também é um fator que pode colaborar com o trabalho do professor. Mostrar ao aluno que os conceitos matemáticos surgiram a partir de uma necessidade humana ou até mesmo de uma curiosidade é importante, pois quando conhecemos a história tudo passa a ter mais significado e acaba saindo do abstrato.

Sabemos que por muito tempo o ensino da Geometria não foi trabalhada nas escolas como deveria, podendo ser por falta de preparo do professor, mas hoje com novas metodologias de ensino esse cenário vem aos poucos sendo alterado. Muitos estudos comprovam os benefícios do estudo da Geometria para o aluno, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento.

A Geometria é necessária no cotidiano do aluno como uma ferramenta básica para resolver situações da vida, compreender o seu próprio ambiente, comunicar ideias para melhor entender assuntos de outras áreas.

E diante desse pressuposto espera-se que este trabalho estimule profissionais da educação, pela busca em ampliar as pesquisas e o interesse em aprimorar conhecimentos da Geometria, e especialmente a Razão Áurea, desenvolvendo assim novos trabalhos dentro do tema.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. A. A. **O ensino da geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referências as publicações nos Anais dos ENEM´S**. Itatiba: USF. (Dissertação de Mestrado), 2004.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** –Ensino Fundamental II (Matemática). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio (Matemática- parte III). Brasília: MEC, 2000.

BERTATO, Fábio Maia. **A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli:** tradução anotada e comentada. 2008. 291 f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

BOYER, Carl B. **História da Matemática;** 2a edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CARNEIRO, Reginaldo Fernando, DÉCHEN, Tatiana. **Tendências no ensino de geometria**: Um Olhar para os Anais dos Encontros Paulista de Educação Matemática. 2006 Acesso em: 11 de março 2010.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A matemática na arte e na vida**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

CURY, Helena Noronha; MOTTA, Carlos Eduardo Mathias. **Histórias e estórias da matemática.** In: CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Ed.). História e tecnologia no ensino da Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A história da matemática**: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97–115.

DOTTO, P.P. Verificação da proporção áurea em medidas cefalométricas laterais de indivíduos com síndrome de Down. 2006. 221f. **Tese** (Doutorado em Biopatologia Bucal, Área Radiologia Odontológica) - Faculdade de Odontologia de São José dos Campos, Universidade Estadual Paulista, São José dos Campos, 2006.

EVES, Howard. Geometria: **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos e ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké,** Campinas, nº. 04 ano 03. novembro /95.

FONSECA, Maria da Conceição F.R., LOPES, Maria da Penha, BARBOSA, Maria das Graças Gomes, GOMES, Maria Laura Magalhães, DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. **O ensino da geometria na escola fundamental**: Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira, SAUER, Lisandra de Oliveira, FRANK RosvitaFuelber. **A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico**. Disponível em: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental II, 1998. Acesso em: 18 jan. 2017.

GOMES, Emerson Batista. **A História da Matemática como Metodologia de Ensino da Matemática**- Perspectivas Epistemológicas e Evolução de Conceitos. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará. 2005. Disponível em: <http://www.repositorio.ufpa.br:8080/jspui/bitstream/2011/1750/4/Dissertacao_HistoriaMatematicaMetodologia.pdf>, acesso em 02 jan 2017.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção -** Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p.

LANDIM, Nilo Pinheiro. **Razão Áurea: Expressando a beleza desse número para o Ensino Médio.** Dissertação de mestrado apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA. MOSSORÓ/RN. 2014

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André LuisAndrejew Ferreira.**Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. ABAKÓS. Instituto de Ciências Exatas e Informática, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov 2013.

LÍVIO, Mário. **Razão** áurea, a história de fi, um número surpreendente. 2a edição, Rio de Janeiro-São Paulo: Record, 2015.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. História da Matemática: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção tendências em educação matemática).

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides**. A Historia da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. São Paulo: Geração, 2005.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Franciele Aparecida. **A História da Matemática e o Processo de Ensino Aprendizagem**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

PASSOS. C.L.B. **Representações, Interpretações e Praticas Pedagógica**: A Geometria na Sala de Aula 2000. Tese de Doutorado Unicamp, Faculdade de Educação, São Paulo, 2000.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil**: Causas e Conseqüências. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM, v.1, n.1 marco, p.7-17, 1993.

PEREIRA, Márcio, OLIVEIRA, Weslley Florentino. **Uma Proposta de Pesquisa sobre a Contribuição da Geometria para o Desenvolvimento Cognitivo de Crianças com Necessidades Educativas Especiais**. 2004. Fundação Educacional de Divinópolis – FUNEDI/UEMG 2004. Acesso em: 15 de abril 2010.

QUEIROZ, Rosania Maria. **Razão Áurea**: A Beleza de uma Razão Surpreendente. Trabalho apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional. UEL-Londrina, 2007.

QUEIROZ, Rosania Maria. **Propostas de Atividades**: Razão Áurea. Proposta apresentada ao PDE: Programa de Desenvolvimento Educacional. UEL- Londrina, 2007.

REBOUÇAS, Fernando. **Déficit no ensino de matemática no Brasil.**Agenda Pesquisa. Disponível em: <http://agendapesquisa.com.br/deficit-no-ensino-de-matematica-no-brasil/**>, acesso em 10 dez 2016.**

SANTOS, Luciane Mulazani dos. **Metodologia do ensino de Matemática e Física**: Tópicos de história da física e da matemática. Curitiba: Ibpex, 2009.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número Φ, o Número de Ouro**. Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Linguagens, códigos e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Alice Vieira. – 2. ed. – São Paulo: SE, 2011. 260 p.

SCHENDER, KlimWertz. **História da Matemática**: a Importância no Processo do EnsinoAprendizagem na Educação Básica. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática), Guarujá - SP.

SERRES, Fabiana Fattore, MAGRO, Juliana Zys, AZEVEDO Taís Bruno de. **O Número de Ouro como Instrumento de Aprendizagem Significativa no Estudo dos Números Irracionais**. Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sd. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf>. Acesso em 24 de jan de 1027.

SOUZA, Alexandre Ramon. **Razão Áurea e Aplicações**: Contribuições para a Aprendizagem de Proporcionalidade de Alunos do 9o Anodo Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

SOUZA FILHO, Joaquim Borges de, BRITO, Kleisy Laiana Vieira de. **O aprendizado da Geometria** Contextualizada no Ensino Médio, IESGO – Instituto de Ensino Superior de Goiás Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática Formosa GO, 2006.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da Régua e do Compasso**: As Construções Geométricas como um Saber Escolar no Brasil. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2001. Disponível em:< http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-85DGQB/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf?sequence=1>, acesso em 20 de jan de 2017.