

**Abordagens de Otimização para o problema de Alocação Dinâmica de Veículos no
contexto de Transporte Rodoviário de Carga no Brasil**

Cesar Dario Alvarez Cruz

São Carlos

2017

Abordagens de Otimização para o problema de Alocação Dinâmica de Veículos no contexto de Transporte Rodoviário de Carga no Brasil

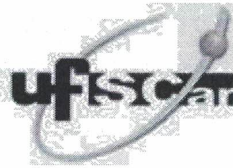
Cesar Dario Alvarez Cruz

Orientador: Prof. Dr. Reinaldo Morabito

Texto de Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

São Carlos

Mai 2017



Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cesar Dario Alvarez Cruz, realizada em 10/03/2017:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
UFSCar

Prof. Dr. Mauricio Cardoso de Souza
UFMG

Prof. Dr. Pedro Augusto Munari Junior
UFSCar

Dra. Rejane Arinos Vasco
UFSCar

Certifico que a sessão de defesa foi realizada com a participação a distância do membro Pedro Augusto Munari Junior e, depois das arguições e deliberações realizadas, o participante a distância está de acordo com o conteúdo do parecer da comissão examinadora redigido no relatório de defesa do(a) aluno(a) Cesar Dario Alvarez Cruz.

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto
Presidente da Comissão Examinadora
UFSCar

*Aos meus pais, Esperanza e Juan Paulo,
aos meus adorados irmãos, Laura e Juan Manuel.,
ao meu sobrinho Juan Jose,
aos animais de estimação da casa
Vocês são meu impulso e a vocês dedico este trabalho.*

Agradecimentos

A essa imensidão desconhecida da qual não tenho certeza, porém com certeza me deu esta oportunidade de crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais, Esperanza e Juan, e aos meus irmãos Juan Manuel e Laura, por me apoiar em todas as decisões e me ajudarem a levantar sempre que foi necessário. Pelo amor de vocês que sempre foi crucial para me sentir bem e para dar sentido a minha existência.

Ao meu super legal orientador, Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto, por me dar a oportunidade de trabalhar ao seu lado. Admiro-o por ser um pesquisador e professor exemplar, mas o admiro ainda mais por ser uma pessoa íntegra e legal da qual tenho muito por aprender.

Ao Prof. Dr. Pedro Munari, por seu conhecimento fundamental para o andamento do meu trabalho e por ser uma pessoa íntegra e super legal.

Aos meus amigos Luis Fernando Medina e Julian Granados, por sua amizade que tem sido importante para meu crescimento.

A todos meus amigos e colegas do Grupo de Pesquisa Operacional (GPO) da UFSCar que fizeram minha vida mais fácil e feliz durante o mestrado. Agradecimento especial para as cachacas Alyne, Amélia, e também para Aldair, Juanete, Karim, Pedro, Justin, Mateus e Betty.

A minha tia Miriam e família Loaiza Cruz por me terem sempre em suas orações.

Aos meus animais de estimação (Zuco, Luna, Timmy, Valentina, Simona, Ivy e Mia) cujas companhias sempre trazem paz interior e tranquilidade ao meu ser.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não teria sido realizada.

*“He who has a why to live for can bear almost
any how.”*

Friedrich Nietzsche

Resumo

Este trabalho aborda o problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV) no contexto de Transporte Rodoviário de Carga. O problema envolve alocar veículos de carga para atender a demanda de transporte de carga prevista entre terminais durante um horizonte de tempo multiperíodos e finito. O objetivo é maximizar o lucro gerado pelos serviços completados. Este tipo de decisões surge nos serviços de transporte de carga de lotação e na parcela de transporte de transferência dos serviços de transporte de carga consolidada. Dado que o tamanho dos problemas que enfrentam as transportadoras logísticas são consideravelmente grandes para resolver com métodos exatos em tempos computacionais aceitáveis, tem-se utilizado métodos heurísticos para dar boas soluções sem garantia de otimalidade mas em tempos toleráveis a estes problemas. Neste contexto, pretende-se contribuir com métodos de solução que proporcionem garantia de otimalidade e/ou boas soluções aproximadas, acompanhadas de certificados de otimalidade ou de qualidade de solução, para tratar problemas de porte em tempos razoáveis. Os métodos propostos estão baseados em relaxação lagrangiana, utilizando o método de otimização do subgradiente, e na decomposição de Dantzig Wolfe, utilizando a técnica de geração de colunas, além de heurísticas lagrangianas e de factibilização acopladas nestes métodos. Experimentos computacionais usando instâncias geradas aleatoriamente e baseados em dados reais de transportadoras brasileiras são apresentados e analisados, para as duas abordagens, mostrando seus potenciais de aplicação prática, principalmente para problemas de grande porte.

Palavras-chave: Alocação Dinâmica de Veículos, relaxação lagrangiana, decomposição de Dantzig Wolfe, geração de colunas, transporte rodoviário de carga, logística.

Abstract

This work aims at treating the Dynamic Vehicle Allocation Problem (DVAP) in the context of the Brazilian Freight Transportation system. The problem consists of allocating empty vehicles to different terminals so as to attend the demand of freight transport during a predetermined planning horizon while maximizing the profit from these services. These type of decisions arise in customized freight transport services and in between-terminals operations of consolidation freight services. Given the size of the resulting models of real life problems confronted by third party logistics operators are large for using exact solution methods, heuristic methods have been used for giving good quality solution at the expense of optimality guarantee. In this context, the objective of this work is to contribute with solution methods that provide optimality guarantee or quality solution certificates for treating large-scale problems in reasonable computational times. The methods utilized are lagrangean relaxation, using subgradient optimization, and DantzigWolfe decomposition together with a lagrangian heuristic and factibilization method, respectively. Computational experiments are presented and analyzed for randomly generated instances and real-world instances from a brasilian freight operator. The latter method shows great potential for treating large-scale problems.

Key words: Dynamic Vehicle Allocation Problem, lagrangean relaxation, Dantzig Wolfe decomposition, column generation, road freight transportation, logistics.

Lista de Figuras

2.1	Representação Gráfica das operações de um sistema <i>LTL Trucking</i>	31
2.2	Representação gráfica das equações de fluxo.	34
2.3	Representação gráfica da solução ótima do exemplo ilustrativo	36
3.1	Representação gráfica dos parâmetros do problema	49
3.2	Representação gráfica da solução em uma iteração do subgradiente	50
3.3	Representação gráfica da solução após factibilização	50
3.4	Nós da rede definida pelos conjuntos N e T	52
3.5	Representação da Rede	52
3.6	Representação do grafo Passos 1 e 2	53
3.7	Representação do grafo Passo 3	54
3.8	Representação da árvore	55
3.9	Representação gráfica 1 da ordem topológica do exemplo	56
3.10	Representação gráfica 2 da ordem topológica do exemplo	56
3.11	Inicialização do Caminho Máximo	59
3.12	Avaliação dos rótulos nó 1	60
3.13	Avaliação dos rótulos nó 4	60
3.14	Avaliação dos rótulos nó 13	61
4.1	Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15l Grupo 1	87
4.2	Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15a Grupo 1	87
4.3	Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15r Grupo 1	88
5.1	Enumeração de pontos extremos de caminhos versus árvores.	98
5.2	Caminhos num grafo direcionado de 6 nós.	99
5.3	Caminhos num grafo direcionado de 7 nós.	100
5.4	Árvores num grafo direcionado de 6 nós.	100
5.5	Árvores num grafo direcionado de 7 nós.	101

5.6	Arvores que contem o percurso 1-4-6.	102
A.1	Inicialização do Caminho Máximo	108
A.2	Avaliação dos rótulos nó 1	108
A.3	Avaliação dos rótulos nó 2	109
A.4	Avaliação dos rótulos nó 3	109
A.5	Avaliação dos rótulos nó 4	110
A.6	Avaliação dos rótulos nó 5	110
A.7	Avaliação dos rótulos nó 6	111
A.8	Avaliação dos rótulos nó 7	111
A.9	Avaliação dos rótulos nó 8	112
A.10	Avaliação dos rótulos nó 9	112
A.11	Avaliação dos rótulos nó 10	113
A.12	Avaliação dos rótulos nó 11	113
A.13	Avaliação dos rótulos nó 12	114
A.14	Avaliação dos rótulos nó 13	114

Lista de Tabelas

2.1	Caraterísticas Operacionais dos Modais de Transporte. Fonte: (RIBEIRO; FERREIRA, 2002b)	27
2.2	Matriz do transporte de cargas. Fonte: (COLAVITE; KONISHI, 2015)	28
2.3	Tempos de viagem entre terminais no problema exemplo TransBras.	35
2.4	Custo de transporte de veículo vazio no problema exemplo TransBras.	35
2.5	Lucro de uma carga completa no problema exemplo TransBras.	35
2.6	Características relevantes da literatura atual do PADV	40
3.1	Tempos de viagem entre terminais do exemplo com $N = 3, T = 3$	53
3.2	Custos dos arcos do exemplo do caminho máximo	59
3.3	Solução ótima das instâncias Grupo 1	64
3.4	Máximo intervalo de solução ótima entre IP e LP para 1000 instâncias	65
3.5	Solução ótima das instâncias Grupo 2	65
3.6	Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 1 - Subproblema CPLEX	67
3.7	Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 2 - Subproblema CPLEX	67
3.8	Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo	68
3.9	Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo	68
3.10	Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 1 - Subproblema CPLEX	69
3.11	Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 2 - Subproblema CPLEX	70
3.12	Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo	71
3.13	Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo	72
4.1	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - Subproblema CPLEX	83
4.2	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - Subproblema CPLEX	84
4.3	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo	85
4.4	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo	86
4.5	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - PDCGM Caminho Máximo	89
4.6	Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - PDCGM Caminho Máximo	90

5.1	PDCGM para instâncias do grupo V1	94
5.2	PDCGM para instâncias do grupo V10	95
5.3	PDCGM para instâncias do grupo V17	96
5.4	PDCGM para instâncias do grupo V130	97
5.5	Tempos Computacionais LP - IP - PDCGM para o PADV	98
A.1	Custos dos arcos do exemplo do caminho máximo	107
B.1	PDCGM para instâncias do grupo V1	117
B.2	PDCGM para instâncias do grupo V2	118
B.3	PDCGM para instâncias do grupo V3	119
B.4	PDCGM para instâncias do grupo V4	120
B.5	PDCGM para instâncias do grupo V5	121
B.6	PDCGM para instâncias do grupo V6	122
B.7	PDCGM para instâncias do grupo V7	123
B.8	PDCGM para instâncias do grupo V8	124
B.9	PDCGM para instâncias do grupo V9	125
B.10	PDCGM para instâncias do grupo V10	126
B.11	PDCGM para instâncias do grupo V11	127
B.12	PDCGM para instâncias do grupo V12	128
B.13	PDCGM para instâncias do grupo V13	129
B.14	PDCGM para instâncias do grupo V14	130
B.15	PDCGM para instâncias do grupo V15	131
B.16	PDCGM para instâncias do grupo V16	132
B.17	PDCGM para instâncias do grupo V17	133
B.18	PDCGM para instâncias do grupo V130	134

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Escopo e Relevância do trabalho	21
1.2	Objetivos e Justificativa	23
1.3	Método de Pesquisa	24
1.4	Organização	24
2	Transporte de Carga	27
2.1	Descrição das atividades de transporte de carga	27
2.1.1	Descrição das operações do transportador logístico	29
2.2	O problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV)	31
2.2.1	Exemplo Ilustrativo	34
2.3	Revisão Bibliográfica do PADV	36
3	Relaxação e Heurística Lagrangiana	41
3.1	Relaxação Linear e Lagrangiana	42
3.1.1	Relaxação Linear	43
3.1.2	Relaxação Lagrangiana	43
3.2	Aplicação de Relaxação Lagrangiana e Heurística Lagrangiana no PADV	45
3.2.1	Método de subgradiente para a relaxação lagrangiana	47
3.2.2	Heurística Lagrangiana	48
3.2.3	Subproblema e o Problema do Caminho Máximo	51
3.2.4	Problema do Caminho Máximo para Grafos Acíclicos Direcionados	54
3.2.5	Exemplo Ilustrativo do Caminho Máximo	58
3.3	Resultados Computacionais	62
3.4	Considerações Finais	69
4	Decomposição de Dantzig-Wolfe e o método de Geração de Colunas	73
4.1	Decomposição de Dantzig-Wolfe	74

4.2	Aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe no DVAP	77
4.3	Método de geração de colunas Primal-Dual	81
4.4	Resultados Computacionais	82
4.5	Considerações Finais	90
5	Experimentos Computacionais com Instâncias Realistas	91
5.1	Descrição das Instâncias	91
5.2	Análise dos Resultados	92
6	Conclusões	103
	Apêndices	105
	Apêndice A Gráficos do Caminho Máximo para o exemplo ilustrativo	107
	Apêndice B Resultados obtidos com o PDCGM-Caminho Máximo para instâncias realistas	115

Capítulo 1

Introdução

1.1 Escopo e Relevância do trabalho

Uma cadeia de suprimentos pode ser considerada um processo integrado em que um grupo de várias organizações, como fornecedores, produtores, distribuidores e varejistas, trabalham juntos para adquirir matérias-primas, transformar estas matérias-primas em produtos finais e entregar estes produtos finais aos consumidores (BEAMON, 1998). O gerenciamento da cadeia de suprimentos em geral é complexo e importante, pois é responsável pela integração dos processos fundamentais de negócios desde os fornecedores até o usuário final, e com isso nota-se um constante crescimento da terceirização ao tratar os processos logísticos. Segundo o Conselho Profissional de Gestão da Cadeia de Suprimentos (*Council of Supply Chain Management Professionals - CSCMP*), o termo logística refere-se a “um subconjunto de operações da cadeia de suprimentos que planeja, implementa e controla efetivamente o fluxo de bens físicos, serviços e informações, desde o ponto de origem ou formação até o ponto final de consumo”(RIOPEL; LANGEVIN; CAMPBELL, 2005).

Entre as atividades logísticas, o transporte de carga realiza um papel importante no gerenciamento das cadeias de suprimento, já que ele fornece suporte à produção, comércio e atividades de consumo, assegurando a movimentação eficiente entre lugares espacialmente distantes e disponibilizando, no prazo estipulado, matérias-primas e produtos acabados. O fluxo de transporte de carga tem crescido continuamente, devido ao aumento da população, quedas de barreiras comerciais e diminuição dos custos de transporte. Mediante esse cenário, o aumento de fluxo de mercadorias tem sido propulsionado por crescentes níveis de consumo e serviços. Este crescimento tem sido facilitado por desenvolvimentos em infraestrutura de transporte que inclui a rodoviária, ferroviária, aquaviária e aeroviária. Porém, estas mudanças têm tornado o transporte de carga um sistema de alta complexidade que tem importantes repercussões socioeconômicas e socioambientais. Isto, devido a ineficiências no sistema que geram altos custos para os consumidores, afeta a competitividade da indústria nacional, e gera efeitos secundários

que afetam o meio ambiente.

No Brasil, segundo dados do IBGE de 2014, a classe de transporte, armazenagem e correio representou uma despesa de 4,5% do PIB ¹. Ou seja, o custo do transporte de cargas é um fator importante para a competitividade da economia de um país, dado que o transporte pode representar uma parcela significativa no custo dos produtos. Sendo assim, com elevados custos de transporte, grandes economias de escala permanecem inexploradas, e a produção torna-se, portanto, mais ineficiente.

A ênfase atual em processos enxutos e responsivos nas indústrias tem estabelecido como padrões de qualidade no setor de transporte de carga, a redução de tempos de entrega (*lead times*) e a confiabilidade do serviço, mantendo níveis baixos de desperdício e de custos em geral. Isso advém em resposta às mudanças de comportamento por parte da demanda. Sendo assim, há menos espaço para erros na programação das entregas, tornando assim uma tarefa de natureza complexa ainda mais complexa (CHASE; AQUILANO; JACOBS, 1998).

Juntamente à complexidade intrínseca das operações de transporte de carga, o desempenho deste setor se vê afetado pelo desequilíbrio evidenciado entre os diferentes modais de transporte: rodoviário, ferroviário e o aquaviário (marítimo e fluvial). Segundo dados do Confederação Nacional do Transporte (CNT), aproximadamente 59% do transporte de carga do Brasil (e, 93% do transporte de carga do estado de São Paulo) são feitos no modal rodoviário ². Além da significativa participação do transporte rodoviário na movimentação de cargas, a falta de integração dos diferentes modais exerce mais pressão no já congestionado sistema rodoviário e incrementa, ainda mais, a dependência das operações logísticas das empresas neste modal (RIBEIRO; FERREIRA, 2002a). Outro fator relevante a ser considerado é que no Brasil há um desbalanceamento das demandas por transportes entre regiões devido aos diferentes desenvolvimentos econômicos e sociais e, também, devido às questões tributárias entre estados.

Desta maneira, este trabalho pretende contribuir com ferramentas e abordagens de otimização para apoiar decisões no nível operacional da gestão de frotas de empresas prestadoras de serviços de transporte rodoviário de cargas. Em particular, na otimização do uso de veículos nos transportes de transferências de cargas entre terminais, envolvendo veículos de média e grande capacidade.

O problema de gestão de frotas de empresas prestadoras de serviços de transporte rodoviário de carga apresenta vários desafios operacionais, principalmente ao tratar o gerenciamento da frota de transferência, que consiste em alocar veículos às requisições de transporte de carga. Devido às diferenças geográficas de demanda de serviços de transporte, muitas vezes se acumula veículos vazios em uma região onde eles não são necessários, ou se gera um déficit de veículos vazios em regiões onde há

¹Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Contas Nacionais <http://www.ibge.gov.br>

²Fonte: Ministério de Transportes, <http://www.transportes.gov.br/>; FIESP, <http://www.fiesp.com.br/transporte-e-logistica/matriz-de-transporte/>

demanda. Embora a movimentação de veículos vazios não gere lucros para as empresas (os custos operacionais tem que ser cobertos pelas viagens de veículos com carga), estas viagens são essenciais para a continuidade das operações. Consequentemente, a alocação de veículos de carga é um componente central do planejamento e controle das operações de empresas de transporte rodoviário de cargas. Neste contexto, aparece o Problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV), que consiste em: dado um conjunto de demandas conhecidas por transporte de carga entre diferentes terminais, alocar veículos vazios aos diferentes terminais para atender essas demandas, de maneira a se maximizar o lucro gerado pelos serviços de demanda completados e se minimizar os custos das viagens de veículos vazios.

1.2 Objetivos e Justificativa

O objetivo deste trabalho é estudar o PADV e propor métodos de solução através do uso de técnicas de pesquisa operacional para resolver problemas representativos de empresas de transporte rodoviário de carga do Brasil, em especial com respeito ao transporte rodoviário de carga entre terminais. As decisões a serem consideradas estão enquadradas no nível operacional do planejamento e tratam basicamente da alocação de recursos limitados (veículos) a tarefas (demanda por transporte de carga entre terminais).

Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014) e Vasco e Morabito (2016) apresentam um modelo de programação linear inteira para resolver o problema de reposicionamento de veículos vazios no contexto do transporte rodoviário. Nestes trabalhos são desenvolvidas heurísticas (gulosa, busca local, GRASP, Colônia de Formigas e *Simulated Annealing*) e utilizam-se métodos exatos do solver CPLEX (*Branch-and-Cut*) para resolver instâncias baseadas em um estudo de caso de uma empresa de transporte de carga do Brasil. As instâncias estão divididas em dois grupos, o primeiro com 17 tipos de veículos e o segundo com 130 tipos de veículos. No primeiro caso, os resultados das heurísticas são comparados com as soluções ótimas obtidas com o CPLEX. No outro grupo de instâncias, as comparações são feitas apenas com a melhor solução encontrada pelas heurísticas, dado o alto requerimento de memória computacional para compilar e resolver os problemas de grande porte no CPLEX.

Como as heurísticas só proporcionam limitantes inferiores da solução ótima, não é possível estabelecer uma garantia de otimalidade por meio destes métodos. Isto apresenta uma desvantagem destes métodos do ponto de vista operacional, já que as empresas precisam avaliar o valor ou desempenho das decisões a serem tomadas. Assim neste trabalho propõe-se explorar a estrutura em blocos do modelo proposto para se aplicar duas técnicas de reformulação que, em teoria, permitem dar garantia de otimalidade para instâncias de grande porte que não podem ser resolvidas por software de otimização de propósito geral.

A primeira técnica está baseada na relaxação lagrangiana (REEVES, 1993). Esta consiste em reformular o problema original em um problema relativamente mais fácil de resolver. Uma vez feita a

reformulação, o problema resultante pode ser decomposto em diferentes subproblemas (um para cada veículo ou tipo de veículo) os quais podem ser mais fáceis de serem resolvidos de forma independente. Utilizando o método de otimização do subgradiente junto às soluções dos subproblemas, obtêm-se limitantes duais do problema original. Porém, estas soluções podem ser ineficazes para o problema original, pois um conjunto de restrições foram relaxadas. Assim, propõe-se uma heurística lagrangiana simples para factibilizar as soluções dos subproblemas e proporcionar um limitante factível de boa qualidade para o problema original.

A segunda técnica é a decomposição de Dantzig-Wolfe (BERTSIMAS; TSITSIKLIS, 1997). Esta consiste em reformular o problema original baseando-se no conjunto de pontos e raios extremos que satisfazem parte das restrições do problema. Esses pontos e raios extremos são obtidos pela resolução de subproblemas e dão origem às colunas da reformulação, sendo que no caso do PADV, cada coluna representa uma rota para cada tipo de veículo. É importante que os subproblemas sejam relativamente fáceis de resolver, para proporcionar de forma rápida as colunas para formarem parte da solução ótima.

Dada a natureza decomponível do problema, este trabalho visa utilizar estas duas metodologias para resolver instâncias de grande porte do PADV, as quais não se pode resolver por meio de softwares de otimização de propósito geral, usando as formulações matemáticas disponíveis na literatura. E contrariamente às heurísticas, com possibilidade de obter garantias de otimalidade das soluções obtidas.

1.3 Método de Pesquisa

O presente trabalho utiliza a metodologia de Pesquisa Axiomática Quantitativa Normativa. A pesquisa é denominada axiomática quantitativa porque é primariamente orientada a modelos de problemas idealizados e é normativa porque é baseada em modelos que prescrevem uma decisão para o problema - métodos de solução para um problema (BERTRAND; FRANSOO, 2002).

1.4 Organização

O restante deste texto está organizado da seguinte maneira. O Capítulo 2 apresenta uma breve descrição das atividades do transporte rodoviário de carga, e introduz o problema a ser tratado, o PADV e sua formulação matemática, junto a um exemplo didático para facilitar o entendimento do problema. Também apresenta a revisão bibliográfica deste problema e dos métodos de solução a serem aqui abordados. O Capítulo 3 inicialmente apresenta a relaxação lagrangiana em um problema genérico, por meio da qual se obtêm o problema dual lagrangiano. Posteriormente descreve o método de solução utilizado para resolver o problema dual: o método de subgradiente. Em seguida descreve a reformulação e aplicação do método ao PADV e se apresenta uma heurística lagrangiana proposta para o problema. Testes com-

putacionais são apresentados para problemas de pequeno e médio porte. O Capítulo 4 apresenta o esquema geral da decomposição de Dantzig-Wolfe inicialmente em um problema genérico e explica o funcionamento da geração de colunas. Em seguida é aplicada esta decomposição ao PADV e testes computacionais são apresentados para problemas de pequeno e médio porte. No Capítulo 5 se apresenta as instâncias realistas de grande porte e os resultados aplicando a geração de colunas. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões deste trabalho e também algumas perspectivas para pesquisa futura a partir dele.

Capítulo 2

Transporte de Carga

Neste capítulo se descreve brevemente as operações de transporte de carga. Além disso, é descrito o Problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV). Em seguida, são revisados trabalhos encontrados na literatura abordando o PADV. Por fim, é apresentada a revisão da literatura sobre relaxação lagrangiana, decomposição de Dantzig-Wolfe e métodos relacionados, aplicados ao PADV, já que essas técnicas são a base dos métodos explorados nesta dissertação.

2.1 Descrição das atividades de transporte de carga

O transporte de carga é uma parte essencial da economia, uma vez que permite unir as distâncias entre lugares espacialmente separados de oferta e demanda, agregando assim valor de espaço e tempo à demanda. As atividades de transporte de carga podem se dar a través de cinco modais ou uma combinação destes, os quais tem vantagens distintas, dependendo das características da carga e do serviço desejado. Os modais são: ferroviário, rodoviário, hidroviário, aeroviário e dutoviário. Na Tabela 2.1 se mostra uma comparação destes cinco modais, baseando-se em cinco medidas de desempenho, sendo que a pontuação menor significa que o modal possui excelência naquela característica (RIBEIRO; FERREIRA, 2002a). Neste trabalho, tratam-se as atividades operacionais apenas no modal rodoviário.

Características	Ferrovária	Rodoviária	Aquário	Dutoviário	Aéreo
Velocidade	3	2	4	5	1
Disponibilidade	2	1	4	5	3
Confiabilidade	3	2	4	1	5
Capacidade	2	3	1	5	4
Freqüência	4	2	5	1	3

Tabela 2.1: Caraterísticas Operacionais dos Modais de Transporte. Fonte: (RIBEIRO; FERREIRA, 2002b)

Apesar das diferentes vantagens de cada um dos modais para diferentes tipos de carga, na Tabela 2.2 pode-se ver que a matriz de transporte no Brasil é significativamente desbalanceada, favorecendo

assim o modal rodoviário. Com os elevados custos logísticos que isto acarreta (decorrente das opções de transporte as vezes inadequadas), a competitividade interna do mercado brasileiro se vê prejudicada, em especial nas regiões menos desenvolvidas em termos industriais (Norte e Nordeste). Segundo o PNLT, os custos logísticos evitáveis (tanto no comércio interno como o externo) são da ordem de US\$ 2,5 bilhões por ano. Dado que os custos de transporte representam a maior parcela dos custos logísticos (31,8 % aproximadamente), uma matriz de transporte mais equilibrada representa uma redução significativa nos custos e, portanto, um benefício para a economia nacional ¹.

Matriz do Transporte de Cargas		
MODAL	MILHÕES (TKU)	PARTICIPAÇÃO (%)
Rodoviário	485.625	61.10%
Ferroviário	164.809	20.70%
Aquaviário	108	13.60%
Dutoviário	33.3	4.20%
Aéreo	3.169	0.40%
TOTAL	794.903	100%

Tabela 2.2: Matriz do transporte de cargas. Fonte: (COLAVITE; KONISHI, 2015)

Os sistemas de transporte rodoviário de carga, em geral, podem se dividir em duas categorias. Na categoria de transporte de carga de grande porte, os bens se movimentam sobre longas distâncias, os tempos de duração das atividades (viagens de veículos, cargas em terminais, etc) são longos e as unidades de carga (como contêineres ou *truckload*) são de grande volume e peso, o que limita o manuseio da carga a certos lugares específicos, como terminais, facilidades e portos. Na categoria de transporte de carga de pequeno porte, os serviços de transporte têm uma cobertura limitada, e portanto os tempos e distâncias dos percursos são curtos. As unidades de carga são menores (caixa de produtos ou produtos individuais), o que permite interagir mais perto do consumidor final (CRAINIC, 2003). Neste trabalho trata-se os aspectos específicos do transporte de carga de grande porte, ou seja, transporte de transferência.

As atividades de transporte de carga de grande porte podem se classificar em dois grandes grupos, dependendo se elas são feitas pelo expedidor/produtor (transporte com frota própria, já que o produtor dos bens possui os recursos de transporte), ou por um operador de transporte logístico (transporte terceirizado). No caso do transporte com frota própria, geralmente existe um número limitado de pontos de origem, que correspondem às instalações da empresa, e um número variado de pontos de destino. Com a globalização dos mercados, as empresas precisam se concentrar nas suas competências núcleo, seja no setor de manufatura ou montagem de bens, ou no projeto e *marketing* de produtos. Essas competências núcleo raramente incluem atividades relacionadas ao suprimento e distribuição de bens, e assim estas atividades têm sido delegadas a organizações especializadas em logística ou operadores logísticos de

¹Fonte: Plano Nacional de Logística e Transportes

transporte. Com os transportadores logísticos atendem as atividades de distribuição de várias empresas, os pontos de origem e destino são numerosos, existem diferentes tipos de carga e surgem diferentes tipos de restrições, tornando as atividades de planejamento mais complexas se comparadas com as atividades das empresas que possuem frota própria.

Existem duas opções de serviço a oferecer para o operador de transporte logístico: serviços customizados ou serviços de consolidação. No transporte customizado, como o *Truckload Trucking* (*TL Trucking*) ou de carga de lotação, após o cliente solicitar um serviço de transporte de carga, o transportador aloca um conjunto de recursos (veículos) para atender essa demanda, ou seja, movimentar a carga da origem ao destino. No transporte de consolidação, como o *Less-than-trucload Trucking* (*LTL Trucking*) ou de carga fracionada, os serviços não são individualizados; pelo contrário, existem serviços padrões que procuram dar cobertura às diferentes demandas por transporte. Assim, um veículo pode movimentar cargas de diferentes origens/destinos com requerimentos de serviço distintos (GHIANI; LAPORTE; MUSMANNNO, 2004). A seguir, descreve-se as operações dos dois tipos de transporte.

2.1.1 Descrição das operações do transportador logístico

Os transportadores ou operadores logísticos rodoviários geralmente se enquadram na seguinte classificação com respeito aos serviços oferecidos (ROY, 2001):

- Serviço *TL Trucking*
- Serviço *LTL Trucking*

No tipo *TL Trucking*, as cargas preenchem ou ocupam toda unidade de transporte de carga, portanto, eles não exigem decisões complexas de roteamento de serviços, classificação ou manipulação. As empresas de *TL trucking* também não precisam investir intensivamente em terminais e em equipamento especializado para coleta e entrega dada a customização dos serviços. No entanto, devido à demanda dos clientes, transportadoras *TL trucking* podem realizar várias coletas com o mesmo destino, ou uma coleta com vários destinos.

O planejamento das operações *Truckload* no nível operacional é centrado em torno do despacho de conjuntos de caminhões-trailers e as rotas a seguir dos veículos. Os pedidos de coleta dos clientes são transmitidos ao transportador por meio de telefone, fax, EDI (*Electronic Data Interchange*) ou internet, e estas informações são inseridas no sistema de informação da transportadora. Na América do Norte, a comunicação via satélite tornou-se o padrão ao longo da indústria de operadores logísticos, o que permite fornecer informação atualizada da localização dos caminhões para fazer uma melhor alocação destes aos pedidos de coleta de cargas completas. Em países onde o posicionamento por satélite não é padrão, se utilizam programas de reposicionamento fixos, onde os veículos seguem um conjunto

de regras para se reposicionar e manter contato com as centrais de planejamento. No caso da frota terceirizada é tarefa das centrais manter contato com os motoristas e tomar a melhor decisão com a informação dos caminhões disponíveis. Após as coletas e entregas serem feitas, os veículos podem ser alocados imediatamente a outro pedido, ou alocado estrategicamente para atender uma demanda futura.

No tipo *LTL Trucking*, transportam-se carregamentos que pesam de 50 a 4.500 kg, por exemplo. Dado que uma carreta suporta entre 14.000 e 23.000 kg, dependendo da densidade de carga, as operadoras devem consolidar as cargas (agrupar em unidades de carga maiores) para fazer uso econômico de seus veículos. Eles estabelecem um grande número de terminais, tanto *end-of-line* como *hubs*, para classificar e consolidar a carga. Os *end-of-line* terminais mantêm pequenas frotas de caminhões para coletar e entregar cargas dentro das cidades ou regiões de cobertura estipulada. Os *hubs* mantêm equipamento especializado para separar, classificar e consolidar os diferentes itens em unidades de carga e programas nas diferentes rotas, dadas as políticas estabelecidas de serviço (ROY, 2001).

A Figura 2.1 mostra o fluxo típico das operações de um operador *LTL Trucking*. O ciclo começa com a demanda por um serviço de coleta, o qual é transmitido à central de informações do transportador. Estes raramente são conhecidos com antecedência e variam de dia para dia. Com ajuda de software ou baseado na experiência do despachador, se envia um veículo para fazer a coleta, considerando fatores como: tipo de carga e outros. A transportadora leva os pacotes para o terminal de origem (terminal *end-of-line*), onde são descarregadas e a informação e documentos de carga são verificados (*Bill of Lading*): peso, dimensões, número de peças, o tipo de carga, e assim por diante. A seguir, a carga é classificada de acordo com o seu destino imediato e carregadas em carretas de linha (*line-haul trailer*), ou é simplesmente movimentada para o terminal *break-bulk* mais próximo se o terminal de origem não classifica as cargas. É neste ponto que começa o transporte de carga de grande porte, que equivale a longas distâncias e unidades de carga grande.

As carretas nem sempre podem ser despachadas economicamente para cada destino à qual está dirigida a carga. Essas carretas vão para terminais intermediários onde suas cargas são consolidadas (agrupadas) com outras cargas (de diferentes origens), dirigindo-se a um destino em comum. Neste ponto, a carga pode voltar a ser descarregada, classificada, e recarregada no terminal de transferência. As vezes tais mercadorias podem ser mantidas em postos fixos nas carretas e mais carga é adicionada à unidade de carga, ou mais unidades de carga são adicionadas aos veículos, sem necessidade de reorganizar, o que reduz os custos de manipulação. A quantidade de paradas em terminais intermediários vai depender do nível de serviço (prazo de entrega) acordado com o cliente.

No terminal de destino, a carga é descarregada, verificada, classificada, codificada, e movimentada para áreas de carga, onde será despachada aos destinatários finais. Geralmente, o transporte de grandes

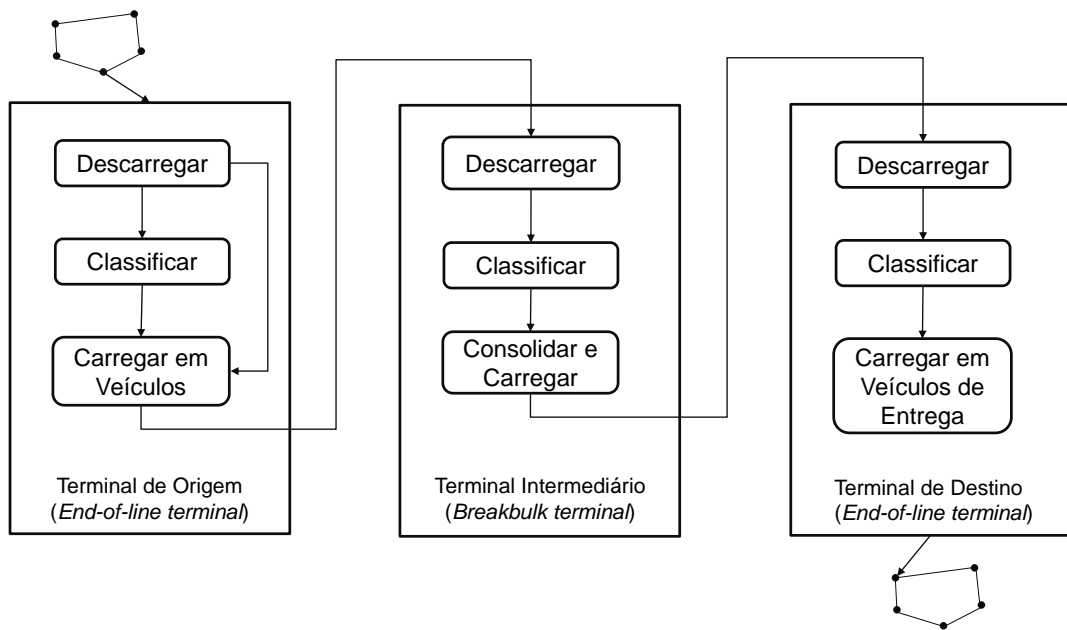


Figura 2.1: Representação Gráfica das operações de um sistema *LTL Trucking*.

unidades entre terminais intermediários (*line-haul shipments*) se faz durante a noite, para que os itens possam ser entregues no começo de cada dia.

Um dos maiores problemas dos operadores logísticos em ambos os casos (transporte customizado ou de consolidação) é o que fazer com os veículos que ficam vazios após entregarem suas cargas. Nos EUA, por exemplo, 18% dos movimentos diários de caminhões são vazios, o que evidencia uma alta proporção de movimentações sem carga (LIU *et al.*, 2010). Por um lado, a movimentação destes veículos não gera lucro para as empresas, o que supõe um mínimo de trânsito para os recursos nestas condições, já que estes custos geralmente têm que ser cobertos por movimentações de cargas cheias. Por outro lado, devido à dispersão espacial e incerteza da demanda no horizonte de planejamento, faz-se necessário o reposicionamento destes recursos para diminuir o custo de oportunidade. Isso pode implicar em possíveis serviços de carga. Assim, surge a necessidade de se desenvolver ferramentas para melhorar a tomada de decisões desta natureza.

2.2 O problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV)

Problemas de reposicionamento de veículos são encarados por empresas que geram lucros transportando cargas de grande porte, como é o caso do *TL Trucking* ou o Transporte de Transferência nas cargas parceladas. Uma vez que um veículo entrega a carga no terminal de destino, este fica vazio e tem que ser reposicionado a um novo terminal para atender um serviço ou para antecipar uma possível

demanda por serviços de carga. As decisões a serem tomadas no problema PADV são: decidir quais cargas são aceitas e quais são rejeitadas entre terminais, e decidir o reposicionamento de veículos vazios entre terminais para atender a demanda futura. A seguir, o PADV é modelado como uma extensão de um problema de fluxo *multicommodity* de custo mínimo num grafo direcionado expandido, para o caso em que todas as demandas são conhecidas com antecipação (VASCO; MORABITO, 2014).

Conjuntos

- N : Conjunto de terminais (Centro de Distribuição) da rede de transporte.
- T : Conjunto de períodos do horizonte de planejamento.
- V : Conjunto de subdivisões de toda a frota disponível para o transporte de cargas (diferenciação dos veículos, seja pela forma de sua remuneração, pelas rotas praticadas ou, ainda, pelo tratamento individual de cada veículo, placa a placa, sendo nesse caso $|V|$ igual à quantidade de veículos existentes na frota).

Parâmetros

- τ_{ij} : Tempo de viagem de i até j , $\forall i, j \in N$.
- d_{ijt} : Demanda por serviços de transporte (em número de veículos cheios) de i até j começando no período t , $\forall i, j \in N, \forall t \in T$.
- p_{ij}^v : Lucro (receita menos custos operacionais diretos) obtida ao se realizar a rota de i até j com um veículo do tipo v , $\forall i, j \in N, \forall v \in V$.
- c_{ij}^v : Custo de deslocamento para um veículo do tipo v vazio de i até j , $\forall i, j \in N, \forall v \in V$.
- m_{it}^v : Quantidade de veículos do tipo v que entram (i.e., ficam disponíveis) no sistema no terminal i no período t , $\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$.
- A_{ij}^v : Restrição de movimentação entre os terminais i e j para o tipo de veículo v , sendo 1: se o veículo pode fazer o percurso, e 0: caso contrário, $\forall i \in N, j \in N$ e $v \in V$.

Variáveis

- z : Valor da função objetivo.
- x_{ijt}^v : Fluxo (número) de veículos cheios de carga do tipo $v \in V$ que começam a se movimentar desde o terminal i até o terminal j no período t para satisfazer a demanda d_{ijt} , $\forall i \in N, j \in N$ e $t \in T$.

- y_{ijt}^v : Fluxo (número) de veículos vazios do tipo $v \in V$, que começam a se movimentar desde o terminal i até o terminal j no período t , $\forall i \in N, j \in N$ e $t \in T$.

A partir dessas definições, tem-se a seguinte formulação para o PADV:

$$\max \quad z = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (2.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kii(t-\tau_{ki})}^v + y_{kii(t-\tau_{ki})}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (2.1b)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V,$$

$$\sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \quad (2.1c)$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V, \quad (2.1d)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V. \quad (2.1e)$$

A função objetivo (2.1a) maximiza o lucro total das operações ao longo do horizonte de planejamento, que equivale ao lucro gerado pelas movimentações dos veículos cheios menos o custo das movimentações dos veículos vazios.

O conjunto de restrições (2.1b) garante o balanço do fluxo de veículos cheios e vazios em cada terminal i em cada período t e para cada tipo de veículo v . Como se mostra na Figura 2.2, o suprimento do tipo de veículos v no terminal i no período t (m_{it}^v), adicionado ao estoque de veículos (y_{iit-1}^v), e à quantidade de veículos cheios e vazios originados de um dado terminal k , $k \neq i$ num período $t - \tau_{ki}$ ($x_{kii(t-\tau_{ki})}^v + y_{kii(t-\tau_{ki})}^v$), tem que ser igual à quantidade do tipo de veículos v que saem do terminal i no período t ($x_{ijt}^v + y_{ijt}^v$).

O conjunto de restrições (2.1c) estabelece um limite superior equivalente à demanda para a quantidade de veículos alocados a cada arco. O conjunto de restrições (2.1d) estabelece as rotas cheias e vazias que podem ser feitas para cada tipo de veículo. Estas restrições são relevantes do ponto de vista prático, pois permitem evitar que determinados tipos de veículos realizem certas rotas, seja por segurança das rodovias, restrições dos motoristas quando são contratados, ou outros. Das equações, pode-se ver que a quantidade ($d_{ijt} - \sum_{v \in V} x_{ijt}^v$) representa a quantidade de demanda rejeitada, enquanto as variáveis y_{iit}^v representam a quantidade de veículos sem se movimentar (estoque de veículos vazios no terminal i no período t).

Em certas situações práticas, é desejável tratar cada veículo individualmente como um tipo de veículo, em vez de separá-los em grupos. Isto se faz com o intuito de melhorar a gestão e o planejamento

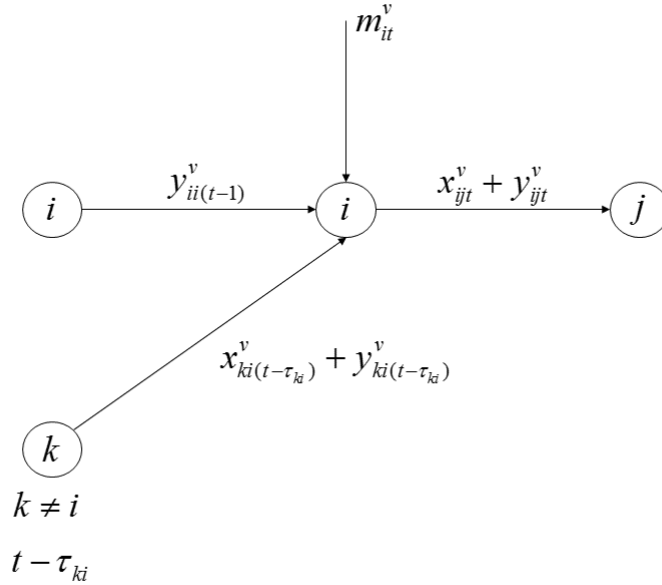


Figura 2.2: Representação gráfica das equações de fluxo.

dos recursos das operações (VASCO; MORABITO, 2014). Assim, cada veículo passa a ser considerado como um grupo diferente e se fixa $m_{it}^v \in \{0, 1\}, \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$, como um parâmetro binário, tomando o valor de 1 se o veículo v entra no sistema no terminal i no período t , e 0 caso contrário, satisfazendo:

$$\sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} m_{it}^v = |V|$$

Ao se tratar individualmente cada veículo, o tamanho do modelo de programação linear inteira aumenta em função do número de variáveis e restrições, e assim, a dificuldade de se resolver o modelo por métodos convencionais aumenta.

2.2.1 Exemplo Ilustrativo

Para facilitar o entendimento do modelo matemático utilizado para representar o problema, apresenta-se a seguir um exemplo ilustrativo baseado em um exemplo de Ghiani, Laporte e Musmanno (2004).

TransBras é uma transportadora operando na região central e sudeste do Brasil. No último dia 11 de julho, quatro requisições de carga completa (TL) foram realizadas: de Belo Horizonte para São Paulo em 11 de julho, de Curitiba para Uberaba em 12 de julho (duas cargas), e de Belo Horizonte para o Distrito Federal em 13 de julho. Em 11 de julho, um veículo tipo 1 estava disponível em Belo Horizonte e outro em São Paulo. Um outro veículo tipo 2 estava neste dia transportando um carregamento previamente

programado e estará disponível em Belo Horizonte em 12 de julho. Os tempos de viagem são apresentados na Tabela 2.3. Os lucros e custos de movimentações vazias são apresentadas nas Tabelas 2.4 e 2.5, respectivamente. Seja $T = \{11 \text{ de julho}, 12 \text{ de julho}, 13 \text{ de julho}, 14 \text{ de julho}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $N = \{\text{DF}, \text{Belo horizonte}, \text{Uberaba}, \text{Sao Paulo}, \text{Curitiba}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a demanda pode ser representada como: $d_{241} = d_{213} = 1, d_{532} = 2$.

τ_{ij}	1	2	3	4	5
1	0	1	2	1	3
2	1	0	1	2	2
3	2	1	0	1	2
4	1	2	1	0	1
5	3	2	2	1	0

Tabela 2.3: Tempos de viagem entre terminais no problema exemplo TransBras.

c_{ij}^v	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
1	0	1	2	2	2	0	3	3	2	2
2	1	0	2	2	2	3	0	3	3	2
3	2	2	0	2	1	3	3	0	1	2
4	2	2	2	0	1	2	3	1	0	3
5	2	2	1	1	0	2	2	2	3	0

Tabela 2.4: Custo de transporte de veículo vazio no problema exemplo TransBras.

p_{ij}^v	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
1	0	1,8	3,6	3,6	3,6	0	4,2	4,2	3,6	3,6
2	1,8	0	3,6	3,6	3,6	4,2	0	4,2	4,2	3,6
3	3,6	3,6	0	3,6	1,8	4,2	4,2	0	4,5	3,6
4	3,6	3,6	3,6	0	3,6	3,6	4,2	4,5	0	4,2
5	3,6	3,6	1,8	3,6	0	3,6	3,6	3,6	4,2	0

Tabela 2.5: Lucro de uma carga completa no problema exemplo TransBras.

Neste caso, temos dois tipos de veículos (isto é, $|V| = 2$). Também se assume que existem restrições de circulação na rota Belo Horizonte - DF (isto é, $A_{12}^1 = A_{21}^1 = A_{12}^2 = A_{21}^2 = 0$). A solução ótima para o PADV utilizando-se os dados do exemplo são apresentados na Figura 2.3. As setas azuis representam as movimentações de veículos cheios; as setas vermelhas representam as movimentações de veículos vazios; os nós verdes representam os terminais com suprimento de veículos e as setas pontilhadas os percursos com restrição de movimentação. Os valores das variáveis na solução ótima são: $x_{241}^1 = x_{532}^1 = 1, y_{334}^1 = y_{443}^1 = y_{444}^1 = y_{451}^1 = y_{222}^2 = y_{223}^2 = y_{224}^2 = 1$, resultando em um valor da função objetivo de $z^* = p_{24}^1 + p_{53}^1 - c_{45}^1 = 3.6 + 1.8 - 1.0 = 4.4$. Nota-se que a demanda d_{532} é parcialmente atendida e a demanda d_{213} não é atendida por restrições de circulação.

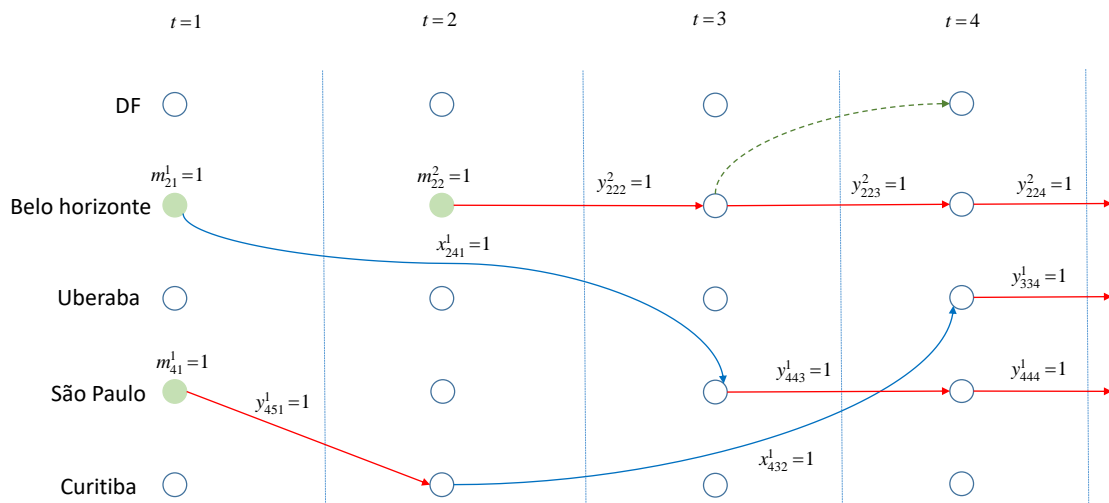


Figura 2.3: Representação gráfica da solução ótima do exemplo ilustrativo

2.3 Revisão Bibliográfica do PADV

O PADV surge em uma variedade de situações que envolvem o gerenciamento de uma frota de veículos ao longo de um dado período de tempo, possuindo aplicações no transporte rodoviário de cargas, no transporte ferroviário, e no transporte marítimo, com o reposicionamento de contêineres vazios. Como o objeto de estudo desta dissertação é o transporte rodoviário de cargas no Brasil, nesta seção é apresentada uma revisão parcial dos trabalhos desenvolvidos apenas para este modal, especificamente para o reposicionamento de veículos vazios.

Um dos primeiros modelos propostos para o tratamento de transporte rodoviário de cargas foi o PADV para o gerenciamento da frota de caminhões. Baseado em modelos prévios, Powell, Sheffi e Thiriez (1984) utilizam um grafo de espaço-tempo para representar o aspecto dinâmico do problema. O fornecimento e demanda de veículos, para cada nó e aresta, respectivamente, são variáveis aleatórias. As variáveis de decisão são definidas como uma fração do fornecimento de veículos, o que resulta em um modelo de rede não linear.

Powell (1986) propõe um modelo alternativo onde é possível manter estoque de veículos vazios quando a demanda alocada a um veículo é insuficiente. As decisões que se tomam neste modelo correspondem à movimentação de veículos carregados, veículos vazios e a quantidade de veículos mantidos em estoque. Dado que o fornecimento de veículos ainda é representada por eventos aleatórios, a movimentação é definida como uma fração desta quantidade, resultando novamente em um modelo não

linear. Com a estrutura da função objetivo e do conjunto de restrições resultante, o autor utilizou o algoritmo de Frank-Wolfe (FRANK; WOLFE, 1956), o qual, segundo o autor, se mostrou útil particularmente no campo de otimização de redes estocásticas.

Dejax e Crainic (1987) propuseram uma taxonomia do problema de movimentação de veículos vazios, visando aumentar o conhecimento destes sistemas a identificar possíveis tendências de pesquisa relacionada. Os autores apresentam uma classificação, baseada no escopo e abrangência dos problemas, que consideram mais pertinente para o estudo de reposicionamento de veículos: modelos operacionais e modelos de políticas de decisão. Do mesmo modo, definem diferentes critérios que servem para refinar a classificação dos diferentes modelos.

Powell (1987) apresentou um modelo alternativo que pode ser usado em um ambiente operacional, na determinação de como gerenciar uma frota de veículos, antecipando as consequências das decisões tomadas. No trabalho se descreve um mecanismo de programação de veículos em tempo real em um ambiente de incertezas. As decisões que devem ser tomadas são aquelas que aceitam ou rejeitam determinadas cargas por meio de análise da margem de contribuição em enviar veículos vazios em atendimento à uma demanda futura, ou aguardar em uma determinada região de um período a outro. O modelo é uma aplicação da teoria de Markov e cadeias Markovianas.

Hughes, Powell e Arbor (1988) estudam os “*end effect*” ou efeitos de finalização, que são resultado de considerar um número finito de períodos no problema de alocação dinâmica de veículos. Idealmente, deve-se considerar horizontes de tempo infinito para definir um problema deste tipo; no entanto, devido à complexidade resultante, é necessário truncar o número de períodos. O resultado disto, é que, dado que o PADV é um problema dinâmico, decisões tomadas agora só levam em conta os períodos restantes do horizonte do planejamento, fazendo com que a informação relevante dos outros períodos fique fora do método de análise, o que pode levar a decisões sub-ótimas no contexto global das operações a considerar. Uma forma de mitigar estes efeitos é encontrar uma aproximação de horizonte finito para o problema de horizonte infinito. Os autores apresentam três métodos para gerar estas aproximações: *Dual Equilibrium*, *Generalized Summation* e *Leontieff Approximation*. Experimentos numéricos são feitos para avaliar quão boas são as aproximações descritas e se avalia o *trade-off* entre o desempenho da solução e os requerimentos computacionais.

Embora truncar o número de períodos de análise possa ter efeitos negativos nas soluções do problema no longo prazo, considerar períodos muitos longos de planejamento quando se trata incerteza na demanda também pode ser contraproducente. Segundo Sethi e Sorger (1991), a principal razão para considerar horizontes finitos de planejamento é que as estimativas de demanda num futuro muito distante tendem a ser pouco confiáveis e, portanto, de pouca utilidade, além de serem dispendiosas em muitos casos. Além disso, ao se utilizar um método exato como programação dinâmica, que é uma

técnica versátil para tratar problemas de caráter horizontal e sequencial, limitações de memória computacional não poderiam lidar com a expansão exponencial e quase indefinida dos estados do algoritmo em longos períodos. Portanto, o ideal seria encontrar um horizonte de estimação (*forecast horizon*), que é definido como a quantidade necessária de períodos para estabelecer políticas ótimas de alocação sem que os períodos restantes a afetem significativamente. Uma vez definido o horizonte de planejamento, pode-se aplicar o procedimento de horizonte rolante, que consiste em fazer análises sequenciais com o horizonte de estimação estabelecido.

Frantzeskakis e Powell (1990) estudam o problema de alocação dinâmica de veículos com demanda incerta com o objetivo de maximizar as contribuições esperadas totais. O problema é formulado como um modelo de programação estocástica, e uma nova heurística é desenvolvida, a qual é contrastada com aproximações determinísticas prévias. Experimentos numéricos foram feitos utilizando um horizonte de tempo rolante para simular as operações de caminhões de carga e os resultados evidenciam uma melhoria, comparados com os outros algoritmos testados.

Powell (1996) faz uma descrição das operações típicas de um operador de caminhões de carga assim como dos elementos que afetam as decisões relacionadas. Além disso, fazem uma revisão dos diferentes modelos utilizados para descrever este problema: modelos determinísticos e estocásticos, no modal estático e dinâmico, e desenvolve um modelo híbrido que incorpora as melhores características dos modelos estudados. Os testes experimentais são feitos com uma ferramenta de simulação denominada pelos autores como MIDAS (*Micro Dispatch and Simulation*).

Powell e Carvalho (1998a) apresentam a formulação de modelagem denominado *Logistics Queuing Network* (LQN) para o gerenciamento de cargas, baseado no trabalho de Powell, Jaillet e Odoni (1995). Formulações clássicas de problemas reais geralmente resultam em problema intratáveis. Porém, os modelos LQN podem considerar uma quantidade maior de detalhes do problema, contrariamente às formulações clássicas. A solução apresentada começa com a formulação clássica de programação linear que, então, é reformulada como um problema de programação dinâmica. Os autores mostram que o algoritmo LQN se aproxima em torno de 3% dos valores ótimos das relaxações de programação linear. Powell e Carvalho (1998b) utilizam a abordagem LQN para desenvolver um modelo operacional para tomar decisões em tempo real referente à alocação de vagões numa rede ferroviária. Dada a complexidade do problema, não é viável a implementação prática de um modelo global de otimização, portanto, é desenvolvido um modelo global para prover informação de redes aos decisores locais. Os autores observam uma redução em torno de 5% dos custos, comparado com abordagens tradicionais cuja ênfase é a alta utilização dos recursos.

Cheung e Chen (1998) estudam o problema de alocação de contêineres vazios, cujas decisões consistem em reposicionar contêineres vazios e determinar o número de contêineres necessários para satisfa-

zer a demanda num horizonte de tempo definido. O problema é formulado como uma rede estocástica de dois estágios: no primeiro estágio, os parâmetros como fornecimento, demanda e capacidade de carga para os contêineres vazios são determinísticos, enquanto que no segundo estágio, estes parâmetros são variáveis aleatórias. Precisam-se tomar decisões de tal maneira a minimizar os custos totais do primeiro estágio e os custos totais esperados do segundo estágio. Aproveitando a estrutura de rede, os autores utilizam um método estocástico quase gradiente (*stochastic quase-gradient method*) e uma aproximação híbrida estocástica (*stochastic hybrid approximation procedure*) para resolver o problema. Do mesmo modo, propõem variações destes dois métodos e testes computacionais são feitos num ambiente de horizonte rolante.

Ghiani, Laporte e Musmanno (2004) apresentam o PADV denominado de *Vehicle Allocation Problem* (VAP), um modelo matemático para representar o problema (originalmente apresentado em Powell, Jaillet e Odoni (1995)), porém de forma mais didática, alterando algumas nomenclaturas de variáveis e fornecendo um exemplo didático para estudo.

Erera, Morales e Savelsbergh (2009) desenvolvem uma formulação robusta para o problema de reposicionamento de veículos vazios com incerteza na demanda, baseado na linha de otimização robusta de Bertsimas e Sim (2004) junto com a linha de Ben-Tal e Nemirovski (2002). Esta abordagem robusta procura encontrar um plano de reposicionamento de custo mínimo que: (1) satisfaz os limites de fluxo e equações de equilíbrio para os valores nominais de fornecimento, e (2) é recuperável para cada realização conjunta, em que o fornecimento de cada nó de espaço-tempo se encontra dentro de seu intervalo de variação, e não mais do que K parâmetros pode tomar o valor de pior caso. Um plano é recuperável se existe um conjunto de ações de recuperação (semelhantes a uma ação de recurso em modelos de programação estocástica de dois estágios) que pode transformar o plano, tal que satisfaça os limites de fluxo e equações de equilíbrio, dado os valores de fornecimento realizados. Os testes computacionais evidenciam a viabilidade deste método para resolver problemas práticos.

Em Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014) e Vasco e Morabito (2016) se estuda o PADV no contexto do sistema de Transporte Rodoviário de Carga (TRC) no Brasil. Os autores tomam como ponto inicial o modelo de Ghiani, Laporte e Musmanno (2004) e estendem e refinam o modelo, para incluir detalhes importantes na gestão de veículos de carga, como a necessidade de terceirização de frota (*out-source fleet sizing*), a necessidade de aceitar *backlog* no planejamento (já que dado o alto nível competitivo da indústria de carga, estrategicamente é prejudicial rejeitar pedidos), diferentes tipos de veículos, restrições de movimentação de veículos para certas cargas ou certos percursos, e capacidade de carga dos terminais. A ênfase é dada na caracterização do problema em situações reais, na modelagem matemática do problema e na solução do mesmo utilizando técnicas de pesquisa operacional, envolvendo ainda a utilização de heurísticas e metaheurísticas para solução, como o GRASP, o *simulated annealing*

e a colônia de formigas (ACO).

Diversos trabalhos apresentados na literatura consideraram o PADV no modal rodoviário. Inicialmente o problema foi abordado utilizando modelos de programação linear (PL), e posteriormente se utilizaram modelagens mais aptas às aplicações práticas do problema, como programação inteira (IP). Da mesma forma, dada a natureza do problema, os trabalhos mais recentes incorporam incertezas na demanda a ser atendida. Diferentes métodos heurísticos e metaheurísticos foram propostos de acordo a modelagens propostas para resolver o problema. Na Tabela 2.6 se resume os trabalhos relacionados ao PADV, segundo características relevantes para a presente pesquisa. Estas características referem-se a trabalhos com modelos de programação linear inteira para tratar o problema de alocação de veículos de carga. Da mesma forma, nestes trabalhos se propõem métodos de solução para resolver os modelos desenvolvidos.

Tabela 2.6: Características relevantes da literatura atual do PADV

Trabalhos	Formulação Deter- minística	Formulação Estocástica	Métodos Heurísticos	Métodos Exatos	Problemas Pequeno Porte	Problemas Grande Porte
(POWELL, 1986)		x		x	x	
(FRANTZESKAKIS; POWELL, 1990)		x	x			x
(ERERA; MORALES; SAVELSBERGH, 2009)		x		x	x	
(POWELL; CARVALHO, 1998a)	x		x			x
(VASCO; MORABITO, 2014; VASCO; MORABITO, 2016)	x		x			x

Dada as características dos trabalhos anteriores, a presente pesquisa procura trabalhar abordagens exatas, ou aproximadas mas com certificado de qualidade da solução para tratar problemas de grande porte da formulação determinística do PADV.

Neste capítulo foi descrito de forma geral as operações de transporte de carga de grande porte. Posteriormente foi introduzido o PADV e sua formulação de programação linear. Finalmente foi apresentado a revisão bibliográfica pertinente a pesquisa desenvolvida neste trabalho.

Capítulo 3

Relaxação e Heurística Lagrangiana

O tamanho de um problema de programação linear pode ser muito grande e na prática, pode-se encontrar problemas com várias centenas de milhares de restrições e/ou variáveis. Assim, para resolver esses problemas, o uso de algumas técnicas especiais é conveniente ou necessário. Uma forma de tratar esses problemas é resolve-los por partes, o qual pode ser desejável desde o ponto de vista técnico (computacional) e prático (administrativo). As decomposições são técnicas que permitem reformular um problema de tal forma que possa ser resolvido em uma forma distribuída ou descentralizada, o qual, conduz a uma simplificação drástica do procedimento de solução do problema em estudo.

Para uma técnica de decomposição ser útil, o problema em estudo deve possuir uma estrutura apropriada. Dois casos de estruturas se apresentam apropriados para aplicar estas técnicas: as estruturas com restrições complicadas e as estruturas com variáveis complicadas.

Dada a estrutura do PADV, neste trabalho é estudado técnicas com restrições complicadas. Neste capítulo é proposta uma heurística lagrangiana baseada na relaxação lagrangiana e no método de otimização de subgradiente. Em decorrência do intuito deste capítulo, a seguir se apresentam alguns trabalhos relacionados que utilizam heurísticas lagrangianas.

Toledo e Armentano (2006) propõem uma heurística baseada na relaxação lagrangiana das restrições de capacidade do problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas. Imai, Nishimura e Current (2007) propõem uma heurística baseada na relaxação lagrangiana para resolver o problema de roteamento de veículos com contêiner de carga completa (“*Vehicle Routing with Full Container Load*”), um caso especial do problema de roteamento de veículos com *backhaul*. Holmberg e Yuan (2000) propõem uma heurística baseada na relaxação lagrangiana para resolver o problema de projeto de rede capacitado (“*Capacitated Network Design Problem*” ou CNDP). O CNDP é um problema de fluxo de custo mínimo *multicommodity* com custos fixos nos arcos. Os autores decidem relaxar as restrições de conservação de fluxo, resultando assim num caso especial do problema da mochila linear, o qual é relativamente fácil de resolver utilizando princípios gulosos. A heurística lagrangiana e o subgradi-

ente são utilizados em cada iteração da busca de árvore *Branch-and-Bound* para melhorar os limitantes superiores e inferiores e, desta maneira, diminuir o tamanho da árvore.

Nesta seção também é explorado o problema do caminho mínimo para resolver o PADV. O problema do caminho mínimo é de grande importância na otimização de redes, já que: 1) aparecem em diversas aplicações nas quais é necessário enviar algum material (e.g. um pacote de dados de rede, estoque num depósito, um veículo) entre dois pontos da rede da forma mais confiável e menor custo (ou mais lucrativa), 2) são relativamente fáceis de resolver e 3) surgem como subproblemas em outros problemas de otimização em redes mais complexos (AHUJA; MAGNANTI; ORLIN, 1993).

O problema do caminho máximo (quando surgem como subproblemas de problemas de maximização) consiste na maximização do lucro de travessia de um grafo entre dois nós (ou vértices), onde o lucro este dado pela soma dos pesos de cada aresta percorrida (ARENALES *et al.*, 2015).

3.1 Relaxação Linear e Lagrangiana

Considere um problema de programação inteira na forma

$$z = \max \{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$$

onde X é o conjunto de soluções, c é o vetor de custos e x é o vetor que representa cada solução. Uma forma de provar que uma dada solução é ótima para esse problema é gerar limitantes inferiores $\underline{z} \leq z$ e limitantes superiores $\bar{z} \geq z$ tal que $\underline{z} = \bar{z} = z$. Na prática, isto significa utilizar algoritmos que gerem uma sequência decrescente $\bar{z}_1 > \bar{z}_2 > \dots > \bar{z}_s > z$ de limitantes superiores (duais), e uma sequência crescente $\underline{z}_1 < \underline{z}_2 < \dots < \underline{z}_t < z$ de limitantes inferiores (factíveis), e parar quando $\bar{z}_s - \underline{z}_t < \epsilon$, para um valor suficientemente pequeno de ϵ .

Uma forma de encontrar limitantes inferiores é utilizar algoritmos que gerem soluções factíveis, dado que cada solução factível representa uma solução com função objetivo igual ou menor à solução ótima. Para alguns problemas de programação inteira, encontrar uma solução factível é fácil e o verdadeiro desafio é encontrar soluções de boa qualidade.

Uma forma de encontrar limitantes superiores ou limitantes duais é utilizando-se relaxações. Uma relaxação de um problema tem como finalidade torná-lo mais fácil de se resolver. A solução fornecida pela relaxação geralmente não satisfaz todas as restrições do problema original. Porém, através do problema relaxado, obtemos um limitante para a solução ótima. Se o problema for de maximização (minimização), o valor da função objetivo fornecerá um limitante superior (inferior) para a solução ótima do problema.

A seguir, são brevemente apresentadas as relaxações Linear e Lagrangiana, as quais são bastante

conhecidas e amplamente divulgadas na literatura.

3.1.1 Relaxação Linear

Considere o seguinte problema (escrito em notação matricial) o qual pode ser referenciado como problema (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.a.:} \quad & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

onde c é o vetor de custos; A e B são as matrizes tecnológicas; b e d são os vetores de recursos. Uma maneira de gerar um limitante superior (\bar{z}) é relaxar o problema através de uma relaxação por Programação Linear (PL), isto é, ao invés de considerar a restrição de integralidade ($x \in \mathbb{Z}^+$), considera-se um conjunto maior, trocando-a por sua relaxação Linear ($x \in \mathbb{R}^+$). A vantagem desta relaxação é a existência de algoritmos eficientes para a solução de problemas de Programação Linear, como por exemplo, o método simplex ou o método de pontos interiores, e a solução nos dá um limitante superior para o problema original acima (P) (maximização).

Note que a relaxação linear do PADV descrito na seção anterior, consiste em relaxar a condição de integralidade de x e y , ou seja, o domínio será alterado de $x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$ para $x_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$.

3.1.2 Relaxação Lagrangiana

A relaxação Lagrangiana foi introduzida em programação inteira por Held e Karp (1970), Held e Karp (1971) com o intuito de fornecer um limitante inferior para o problema do caixeiro viajante. Motivados pelo sucesso da abordagem, esse método foi aplicado no início da década de 70 em problemas de Programação Inteira em geral (SHAPIRO, 1971).

A relaxação lagrangiana envolve:

1. considerar uma formulação de Programação Inteira ou Inteira-mista do problema;
2. anexar os multiplicadores de Lagrange para algumas restrições nesta formulação e inserindo-as na função objetivo;
3. resolver o problema inteiro ou inteiro-misto resultante.

Após a resolução do problema inteiro ou inteiro-misto, obtém-se um limitante inferior ou superior para o valor ótimo de problema original, dependendo se o problema em questão é de minimização ou maximização, respectivamente. Embora o problema original e o resultante sejam de caráter inteiro, existe uma justificativa para utilizar este método; vários problemas de otimização combinatória consistem em um problema relativamente fácil, complicado pela adição de restrições extras. Assim, com a relaxação e inserção destas restrições na função objetivo, o problema resultante fica mais fácil de tratar do que o original. Porém, é de grande importância encontrar formas de achar os valores dos multiplicadores que melhoram a qualidade do limitante dual (REEVES, 1993). O limitante obtido por relaxação Lagrangiana é melhor ou igual ao obtido por relaxação de Programação Linear, porém, se há a propriedade de integralidade, ou seja, se a solução do problema relaxado não varia com as restrições de integralidade relaxadas, teoricamente o limitante obtido por relaxação Lagrangiana é igual ao obtido por Programação Linear. Neste trabalho investigamos a aplicação desta relaxação ao modelo do PADV apresentado no capítulo anterior.

De volta ao problema (P), obtém-se a relaxação Lagrangiana do problema (P), com respeito ao conjunto de restrições $Ax \leq b$, com a introdução de um vetor multiplicador de Lagrange $\lambda \geq 0$, o qual é incorporado a este conjunto de restrições e inserido na função objetivo, resultando em:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx + \lambda(b - Ax) \\ \text{s.a.:} \quad & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

O que deve-se observar é que o problema que obtém-se depois de aplicar a relaxação Lagrangiana, para quaisquer $\lambda \geq 0$, produz um limitante superior para a solução ótima do problema original (maximização). Isso se deve ao fato de que a solução do problema original (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.a.:} \quad & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

tem valor maior ou igual a solução do problema

$$\begin{aligned} \max \quad & cx + \lambda(b - Ax) \\ \text{s.a.:} \quad & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

De fato, sendo $\lambda \geq 0$ e $(b - Ax) \geq 0$, tem-se a adição de um termo positivo $\lambda(b - Ax) \geq 0$ na função objetivo. A solução do problema acima tem valor maior ou igual a solução do problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx + \lambda(b - Ax) = (c - \lambda A)x + \lambda b \\ \text{s.a.:} \quad & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

uma vez que o problema se torna menos restrito. Por este motivo, a solução deste último problema resulta em um limitante superior (\bar{z}) para a solução do primeiro problema. O problema dual langrangiano consiste em encontrar os multiplicadores λ que minimizem o limitante superior para o problema de maximização original, ou seja:

$$\min_{\lambda \geq 0} \left\{ \begin{array}{ll} \max & (c - \lambda A)x + \lambda b \\ \text{s.a.:} & Bx \leq d \\ & x \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right\}$$

3.2 Aplicação de Relaxação Langrangiana e Heurística Lagrangiana no PADV

Voltando ao modelo do PADV definido em (2.1), introduzindo os multiplicadores de Lagrange $\lambda_{ijt} (\geq 0)$ para todo $i, j \in N$ e todo $t \in T$ da expressão (2.1c), obtém-se o seguinte problema Lagrangiano:

$$\max \quad \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \lambda_{ijt} \left(d_{ijt} - \sum_{v \in V} x_{ijt}^v \right) \quad (3.1a)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (3.1b)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.1c)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.1d)$$

que pode ser reescrito por:

$$\max \quad \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} (\lambda_{ijt} d_{ijt}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} ((p_{ij}^v - \lambda_{ijt}) x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (3.2a)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (3.2b)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.2c)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.2d)$$

Note que, dados λ_{ijt} , o problema (3.2a)- (3.2d) pode ser facilmente resolvido utilizando algum algoritmo que aproveite a estrutura em rede do problema de fluxo. Note também que o problema Lagrangiano resultante (3.2a)- (3.2d) é um problema de fluxo de custo máximo numa rede estendida de espaço-tempo, e portanto, possui a propriedade de integralidade, i.e., dados λ_{ijt} , a solução não se altera ao trocar a restrição de integralidade $x_{ijt}^v, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+$, pela relaxação Linear $x_{ijt}^v, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+$ (AHUJA; MAGNANTI; ORLIN, 1993; GHIANI; LAPORTE; MUSMANNNO, 2004). Isto implica que o melhor limitante superior produzido pelo problema Lagrangiano (3.2a)- (3.2d) para o problema (2.1a)- (2.1e) não é melhor do que o limitante superior obtido pela relaxação de Programação Linear do problema. Porém, pode-se utilizar uma heurística lagrangiana para obter soluções factíveis inteiras com *gaps* de otimalidade produzidos pelo método. Dado que o interesse é encontrar valores para os multiplicadores de Lagrange que minimizem o limitante superior, isto é, o limitante superior que seja tão próximo quanto possível do valor ótimo. O problema dual Lagrangiano corresponde a:

$$\min_{\lambda_{ijt} \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} (\lambda_{ijt} d_{ijt}) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \sum_{i \neq j} ((p_{ij}^v - \lambda_{ijt}) x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \\ \text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \\ \\ \forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \\ \\ x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \\ \\ x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \end{array} \right.$$

Outra forma de obter uma relaxação para o PADV é relaxar as restrições (2.1b) em vez das restrições (2.1c). Desta forma, se obtém um problema da mochila para cada arco (i, j, t) os quais podem ser resolvidos por inspeção (isto devido ao fato do peso de cada veículo ser igual dentro de uma restrição). O problema resultante possui também a propriedade de integralidade, portanto, o melhor limitante não pode ser melhor que o limitante da relaxação linear. Neste trabalho, optou-se por explorar a relaxação da demanda.

3.2.1 Método de subgradiente para a relaxação lagrangiana

Para resolver o problema dual Lagrangiano, utilizamos o método de otimização do subgradiente, que está descrito a seguir. Para mais detalhes do método, o leitor pode consultar, por exemplo, Camerini, Fratta e Maffioli (1975) e Reeves (1993). A seguir apresentamos o método aplicado ao problema (3.2a)-(3.2d) conforme descrito por Reeves (1993).

1. Faça \underline{z} igual a 0. Seja $ITMAX$ o máximo número de iterações e faça $it = 0$. Fixe $\lambda_{ijt} = 0, \forall i, j \in N, \forall t \in T$ como valores iniciais para os multiplicadores.
2. Resolva o problema Lagrangiano (3.2a)-(3.2d) com o conjunto de multiplicadores atual, obtendo a solução $[X, Y]$ e valor \bar{z} . Atualize o melhor limitante superior \bar{z}_{min} com \bar{z} . Faça $it = it + 1$.
3. Teste de factibilidade: se a solução Lagrangiana é factível para o problema original, então atualize \underline{z} , o limitante inferior para o problema, correspondendo a uma solução factível. Atualize o melhor limitante inferior \underline{z}_{max} com \underline{z} .
4. Teste de otimalidade: pare se $(\underline{z}_{max} - \bar{z}_{min}) > \epsilon$; caso contrário, vá para o Passo 5.
5. Calcule os subgradientes:

$$s = \left(-d - [1, 0][X^1, Y^1]^T - \dots - [1, 0][X^v, Y^v]^T \right)$$

6. Defina o tamanho do passo t por:

$$t = \frac{f * (\bar{z} - \underline{z})}{\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \lambda_{ijt}^2}$$

onde $0 < f \leq 2$, e atualize os multiplicadores de Lagrange por:

$$\lambda_{ijt} = \max(0, \lambda_{ijt} + t * s_{ijt}), \forall i, j \in N, \forall t \in T$$

7. Se $it = ITMAX$, pare; caso contrário, vá para o Passo 2.

Reeves (1993) reporta uma boa prática para a convergência do método ajustando os subgradientes antes do cálculo do tamanho do passo (t) (durante o Passo 5), usando $s_{ijt} = 0$ sempre que $s_{ijt} < 0$ e $\lambda = 0$. Ou seja, se a restrição (i, j, t) não está violada (isto é, $s_{ijt} < 0$) na iteração corrente e não possui multiplicador associado não nulo (isto é, $\lambda_{ijt} > 0$), então seu gradiente é desconsiderado, fixando-o em $s_{ijt} = 0$ (Passo 5). Com isso, ele não contribui no cálculo do tamanho do passo t (Passo 6).

3.2.2 Heurística Lagrangiana

Como as soluções resultantes em cada iteração do método de subgradiente geralmente são infactíveis para o PADV, pode-se utilizar um método para encontrar soluções factíveis do problema original. Nas heurísticas lagrangianas, toma-se as soluções encontradas pela relaxação lagrangiana e procura-se convertê-las em soluções factíveis. Cada solução factível constitui um limitante inferior (maximização) da solução ótima do problema original. A seguir, propõe-se uma simples heurística lagrangiana para o PADV, baseada na informação dos multiplicadores de Lagrange em cada iteração do método de subgradiente. O intuito da heurística é factibilizar os arcos infactíveis com as maiores penalizações.

1. Tome uma solução S_{RL} resultante de uma iteração do procedimento de subgradiente.
2. Escolha o arco infactível (i^*, j^*, t^*) (ou seja, o arco (i, j, t) no qual $\sum_{v \in V} x_{ijt}^v > d_{ijt}$) com o menor termo $\lambda_{ijt} (d_{ijt} - \sum_{v \in V} x_{ijt}^v)$. Se não tiver arcos infactíveis vá para o Passo 5.
3. Escolha aleatoriamente um tipo de veículo $v^* \in V$ tal que $A_{i^*j^*t^*}^{v^*} = 1$ e $x_{i^*j^*t^*}^{v^*} > 0$. Faz $x_{i^*j^*t^*}^{v^*} = \min((d_{i^*j^*t^*} - \sum_{v \in V} x_{i^*j^*t^*}^v), m_{i^*t^*}^{v^*})$. Repita este procedimento até $d_{i^*j^*t^*} = \sum_{v \in V} x_{i^*j^*t^*}^v$.
4. Se existe infactibilidade de conservação de fluxo no nó (i^*, t^*, v) , $\forall v \in V$, torne factível a solução resolvendo o problema de fluxo de custo máximo. Vai para o Passo 2.
5. Fim do procedimento

A seguir, se ilustra os Passos 3 e 4 com um exemplo. No exemplo da Seção 2, suponha que um veículo do tipo 1 e dois do tipo 2 estão disponíveis em São Paulo no dia 11 de julho ($m_{41}^1 = 1, m_{41}^2 = 2$). Numa iteração do subgradiente, após resolver os dois subproblemas, foram alocados os três veículos para o trajeto (5, 3, 2) ($y_{451}^1 = 1, y_{451}^2 = 2, x_{532}^1 = 1, x_{532}^2 = 2$) e o multiplicador dessa restrição é $\lambda_{532} = 2$. Assim $\sum_{v \in V} x_{532}^v > d_{532}$. Da mesma forma foi alocado um veículo cheio no trajeto (4, 3, 3) ($x_{241}^1 = 1, x_{433}^1 = 1$) e o multiplicador dessa restrição é $\lambda_{433} = 2$. Na Figura 3.1 se mostra a representação gráfica dos parâmetros do problema e na Figura 3.2 se mostra a representação gráfica da solução após resolver os subproblemas lagrangianos.

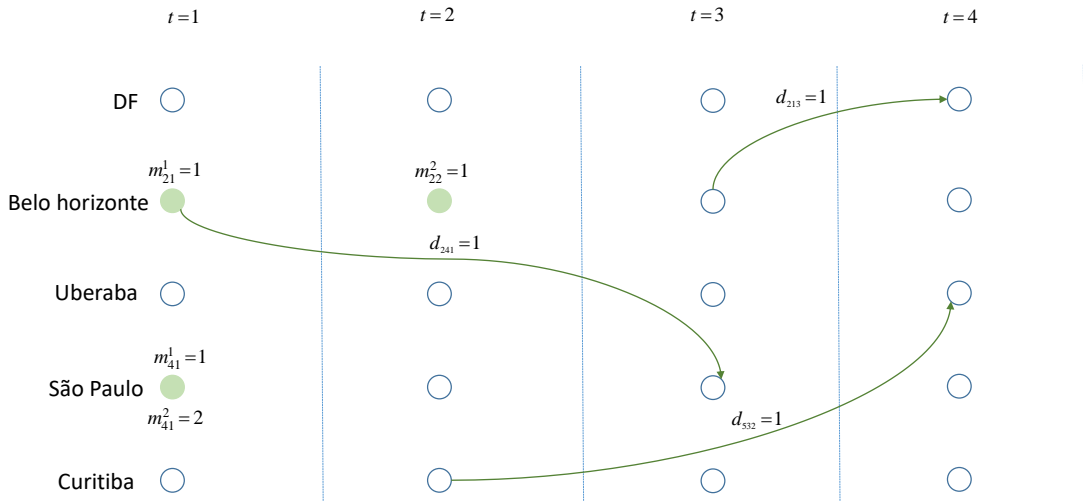


Figura 3.1: Representação gráfica dos parâmetros do problema

Avaliando-se o termo $\lambda_{ijt} (d_{ijt} - \sum_{v \in V} x_{ijt}^v)$ no Passo 2, pode-se observar que o arco com menor medida de infactibilização é (5, 3, 2) igual a $-2 (\lambda_{532} (d_{532} - \sum_{v \in V} x_{532}^v) < \lambda_{433} (d_{433} - \sum_{v \in V} x_{433}^v)$. Como se tem 3 veículos de 2 tipos diferentes, e a demanda de transporte de carga do arco $d_{532} = 2$, tem que se alocar apenas 2 veículos entre esses 3. Posteriormente, para não enviesar o processo de factibilização, se escolhe aleatoriamente entre os tipos de veículos. Supõe-se ter escolhido aleatoriamente o tipo de veículo 1 e a seguir o tipo de veículo 2 para fazer a alocação. Primeiro, se aloca a maior quantidade de veículos do tipo 1 sem ultrapassar a demanda, logo $x_{532}^1 = 1$. Posteriormente se aloca a maior quantidade de veículos do tipo 2 sem ultrapassar a demanda, logo $x_{532}^2 = 1$ dado que $\sum_{v \in V} x_{532}^v \leq 2$. Uma vez fixadas essas variáveis, se factibiliza o fluxo da rede resolvendo o problema de fluxo, resultando na solução mostrada na Figura 3.3.

Volta-se para o Passo 2 e avalia-se se existem arcos infactíveis. Dado que o arco (4, 3, 3) é infactível,

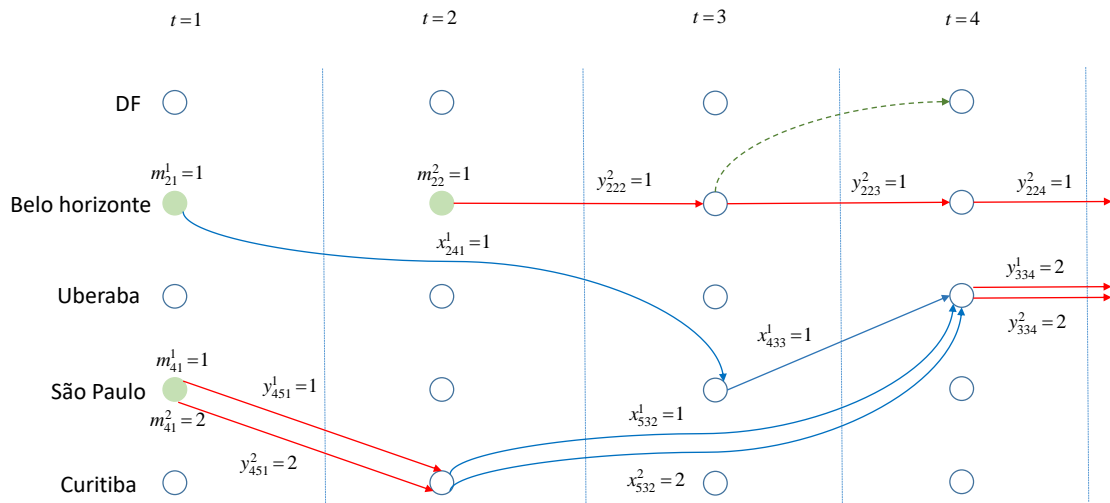


Figura 3.2: Representação gráfica da solução em uma iteração do subgradiente

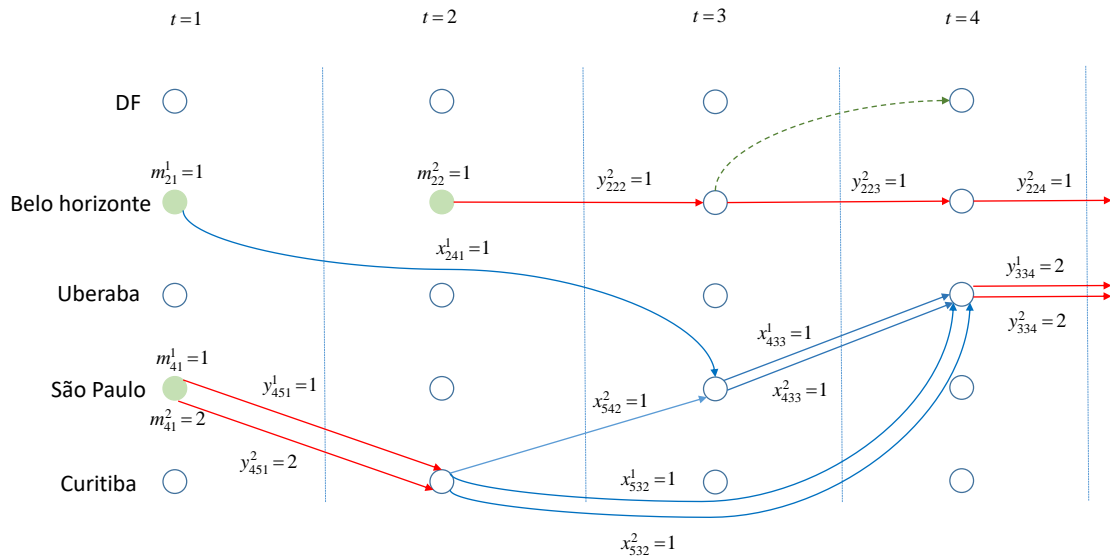


Figura 3.3: Representação gráfica da solução após factibilização

($\sum_{v \in V} x_{433}^v > 0$), se repete os passos apenas descritos para factibilizar esse arco. Este procedimento termina quando não existirem mais arcos infactíveis.

3.2.3 Subproblema e o Problema do Caminho Máximo

Nesta seção se descreve uma forma mais eficiente de resolver os subproblemas por meio de algoritmos para o Problema de Caminho Máximo (*Longest Path Problem*). O subproblema da relaxação lagrangiana é um problema de fluxo de custo máximo, o qual pode ser resolvido de forma eficiente com o método simplex para redes (*Network Simplex Method*). A seguir mostra-se novamente a formulação LP do subproblema do fluxo de custo máximo.

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} ((p_{ij}^v - \lambda_{ijt})x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (3.3a)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit(t-\tau_{ki})}^v + y_{kit(t-\tau_{ki})}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (3.3b)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.3c)$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.3d)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (3.3e)$$

Porém, o subproblema pode ser resolvido de forma mais eficiente utilizando-se algoritmos para o problema de caminho máximo. Para que a solução do problema de fluxo de custo máximo possa ser descrita como um conjunto agregado de soluções do problema de caminho máximo, é necessário modificar a rede.

A rede de espaço-tempo definida pelos conjuntos N e T possui os nós $(i, t) \in N \times T$, como mostrado na Figura 3.4. Os arcos definidos por (i, j, t) têm um nó de saída em (i, t) e um nó de chegada em $(j, t + \tau_{ij})$, sendo o nó de chegada um *output* do modelo, já que depende de j, t e τ_{ij} . Como pode-se observar na Figura 3.5, alguns nós de chegada não estão explicitados no conjunto $N \times T$ e vão além do horizonte de planejamento T , ou seja, $t + \tau_{ij} > T$. Para aplicar o algoritmo do caminho máximo se precisa de um grafo onde todos os nós estejam explicitados pelos conjuntos do modelo e, desta forma, cada arco esteja definido pelo par $((i, t), (j, t + \tau_{ij}))$. A seguir, se descreve a modificação.

1. Define-se o novo conjunto $T' = T \cup \{|T| + 1\}$. Esse ultimo período $|T| + 1$ contém os nós nos períodos futuros além do horizonte de planejamento (i.e. $t > T$).
2. Para cada (i, j, t) tal que $t + \tau_{ij} > T$ adiciona-se o arco $((i, t), (j, |T| + 1))$.
3. Adiciona-se um nó n_F e um arco $((i, |T| + 1), n_F), \forall (i, |T| + 1)$. Estes arcos tem um custo igual a 0. Esta adição tem o objetivo de obter a equivalência entre a solução de uma árvore de custo máximo com a solução de vários caminhos máximos agregados.

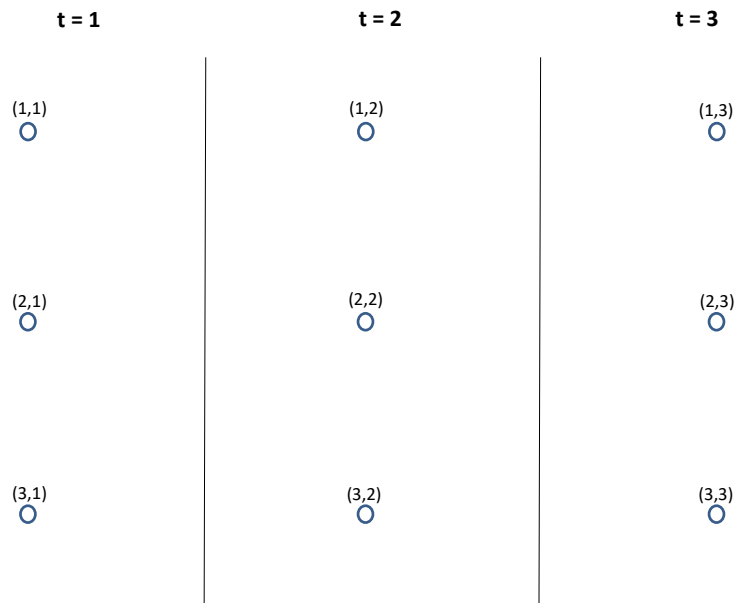


Figura 3.4: Nós da rede definida pelos conjuntos N e T

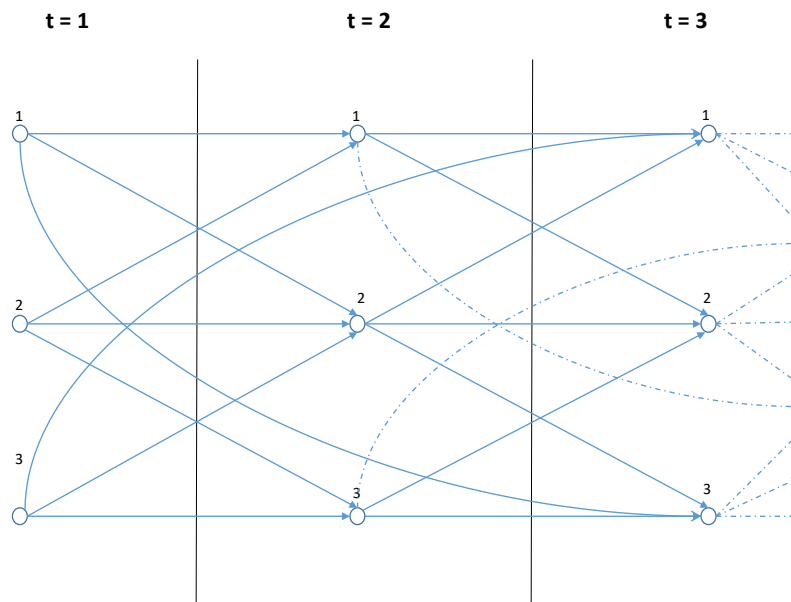


Figura 3.5: Representação da Rede

Nas Figuras 3.6-3.7 mostra-se um exemplo da extensão num grafo com $N = 3$, $T = 3$ e a matriz de tempos de viagem da Tabela 3.1. Assume-se que existe um tipo de veículo com suprimento nos nós $m_{31}^1 = m_{12}^1 = 2$.

τ_{ij}	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

Tabela 3.1: Tempos de viagem entre terminais do exemplo com $N = 3, T = 3$.

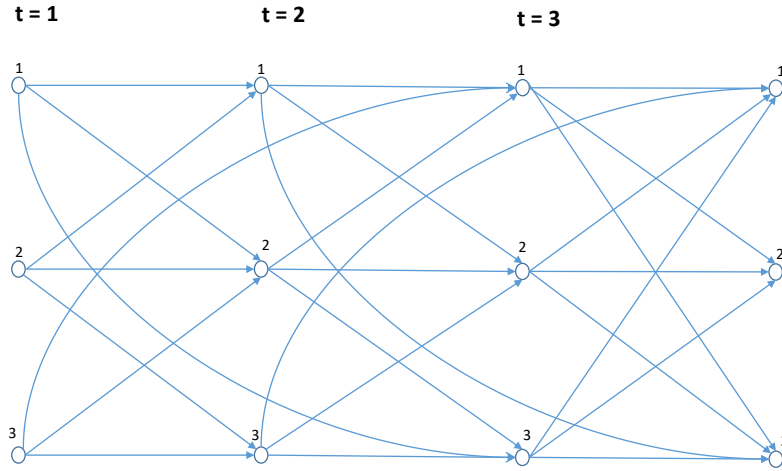


Figura 3.6: Representação do grafo Passos 1 e 2

Resolvendo-se o problema de fluxo de custo máximo para cada tipo de veículo $v \in V$, onde o suprimento do nó n_F é igual a menos o sumatório do suprimento de todos os veículos do mesmo tipo $m_{n_F} = -\sum_{v \in V, i \in N, t \in T} (m_{it}^v | m_{it}^v > 0)$, obtêm-se uma solução igual à do subproblema original. Esta rede tem a estrutura de uma árvore com um único nó de destino (*in-rooted tree*). O fluxo agregado de uma árvore com vários nós de origem e um nó de destino pode ser decomposto em um conjunto de caminhos factíveis desde os nós de origem até o nó de destino (Figura 3.8). A relação de equivalência entre a solução de árvore com um único nó de destino (*in-rooted tree*) e a agregação de varias soluções com diferentes origens e um único destino é estabelecida pelo seguinte Lema, o qual foi definido em Rockafellar (1998) e declarado de novo a seguir.

Lema 3.2.1. *Seja V um conjunto de tipos de veículos, S_v um conjunto de nós de suprimento do veículo $v \in V$ (i.e. todos os nós (i, t) tal que $m_{it}^v > 0$ para um dado v), n_F um nó de destino, Y^{v, n_F} um vetor que representa o fluxo da árvore com destino n_F e X^{v, s, n_F} um vetor que representa o fluxo desde o nó $s \in S_v$ até n_F . Se Y^{v, n_F} é factível para o problema de fluxo de custo mínimo com vários nós de origem e um nó*

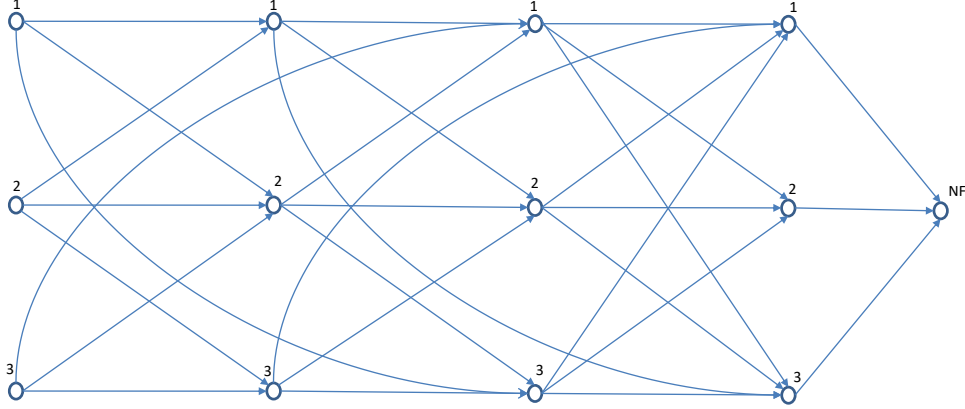


Figura 3.7: Representação do grafo Passo 3

de destino, então existem valores para X^{v,s,n_F} , $\forall s \in S_v$ e $v \in V$, tal que

$$Y^{v,n_F} = \sum_{s \in S_v} X^{v,s,n_F}$$

Da mesma forma, se os custos dos arcos não são dependentes dos pares origem-destino e só dependem do tipo de veículo $v \in V$, então uma solução ótima X^{*v,s,n_F} para todos os pares (s, n_F) pode ser utilizada para construir a solução ótima Y^{*v,n_F} (ROCKAFELLAR, 1998). Ou seja, a solução ótima dos subproblemas do PADV podem ser achados por meio da solução do caminho máximo para todos os veículos de um mesmo tipo de veículo.

3.2.4 Problema do Caminho Máximo para Grafos Acíclicos Direcionados

Dado que os arcos do grafo podem ter custos positivos (quando $p_{ij}^v > \lambda_{ijt}$), não é possível utilizar o algoritmo de Dijkstra adaptado para problemas de maximização. Nas restrições de fluxo (3.3b), pode se observar que o grafo do problema é acíclico, dado que a duração dos arcos (i, j, t) é estritamente positiva ($t + \tau_{ij} > 0, \forall i, j \in N$) (ROCKAFELLAR, 1998). Assim, é possível utilizar um algoritmo para achar caminhos máximos em grafos acíclicos, inclusive quando os custos dos arcos são positivos. Este algoritmo requer como fase de pré-processamento encontrar uma ordem topológica do grafo. Por simplicidade, define-se $N^T = (N \times T') \cup n_F$ e $A^T = (k, k'), k, k' \in N^T$. Uma ordem topológica é um mapeamento nos inteiros positivos dos nós $f(k), k \in N^T$ tal que para cada arco $(k, k') \in A^T$, tem-se

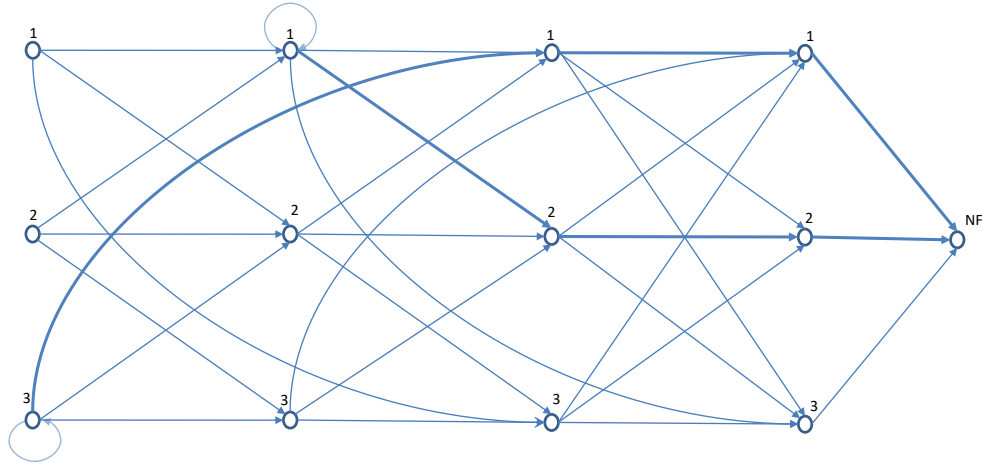


Figura 3.8: Representação da árvore

que $f(k) < f(k')$. As Figuras 3.9 e 3.10 mostram uma ordem topológica do exemplo anterior. Na Figura 3.9, pode-se observar que cada nó tem um novo rótulo que vai desde 1 até 13 (a quantidade total de nós), e cada arco está formado pela união de dois nós, onde o rótulo da cauda do arco é menor que o rótulo da cabeça do arco. Se se ordenam os nós da rede conforme os novos rótulos, como se mostra na Figura 3.10, observa-se que a direção dos arcos que ligam os nós é única (de esquerda para a direita).

Uma vez encontrada a ordem topológica, o algoritmo de caminho máximo consiste em percorrer todos os nós nesta ordem e atualizar as distâncias dos nós ligados ao nó incumbente. Os Algoritmos 1 e 2 mostram o pseudocódigo para encontrar a ordem topológica e os caminhos máximos. Na Seção 3.2.5 apresenta-se um exemplo ilustrativo do algoritmo do caminho máximo.

O grafo para cada subproblema $v \in V$ pode ser diferente devido ao conjunto de restrições (3.3d). Dado que a ordem topológica de um grafo direcionado é mantida quando se remove um ou vários arcos, é possível fazer uma ordem topológica para o grafo quando $A_{ij}^v = 1, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$ no começo do subgradiente e, para cada $v \in V$, evitar os arcos com restrição de movimentação na avaliação dos nós adjacentes no algoritmo de caminho máximo (Linha 2.9).

Uma questão importante para poder aplicar um algoritmo de caminho máximo neste grafo é a natureza do veículo que vai ser alocado em cada arco (quantos veículos cheios e/ou quantos veículos vazios) e portanto os custos associados a cada arco. As restrições (3.3d) limitam as movimentações de veículos em geral, assim, quando $A_{ij}^v = 0$ não existe nenhum tipo de movimentação (cheios e vazios). As restrições (3.3b) não limitam a proporção de veículos que percorrem cada arco (i, j, t) , só estabelecem

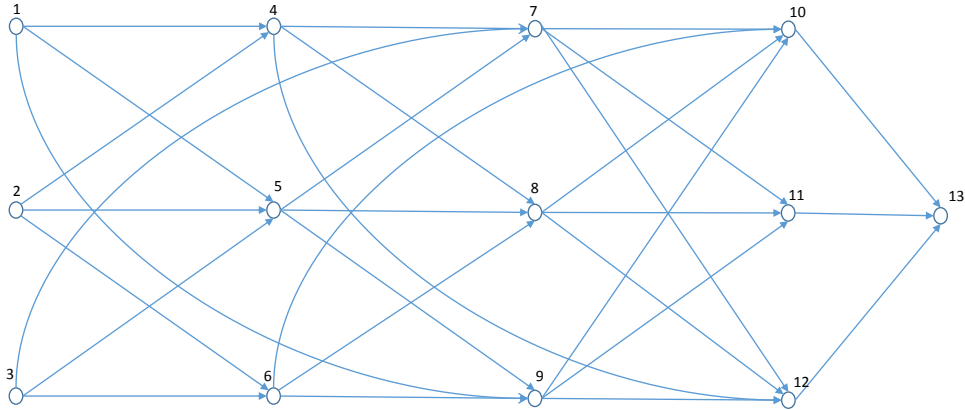


Figura 3.9: Representação gráfica 1 da ordem topológica do exemplo

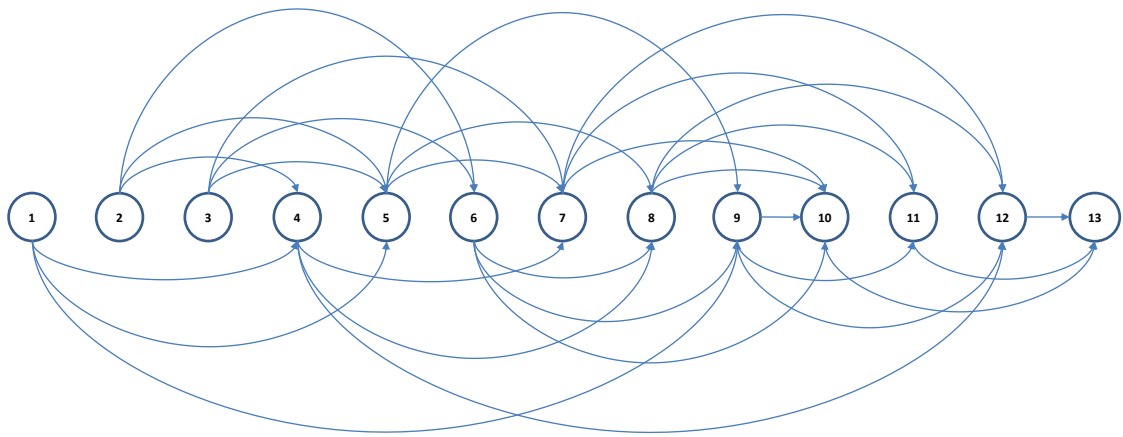


Figura 3.10: Representação gráfica 2 da ordem topológica do exemplo

que a soma dos dois tipos de veículos que chegam a um nó deve ser igual a soma de veículos que saem do mesmo nó. A natureza do tipo de veículo que percorre cada arco está estabelecida exclusivamente pela função objetivo.

Assim, uma fase de preprocessamento requerida para resolver o problema de caminho máximo para

Algoritmo 1 Algoritmo de Ordem Topológica

```
1: procedimento ORDEM TOPOLOGICA( $N^T, A^T$ )
2:   para  $k \in N^T$  faça
3:      $\text{indegree}[k] \leftarrow 0$ 
4:   fim para
5:   para  $(k, k') \in A^T$  faça
6:      $\text{indegree}[k'] \leftarrow \text{indegree}[k'] + 1$ 
7:   fim para
8:    $\text{Stack} \leftarrow \emptyset$ 
9:    $\text{next} \leftarrow 0$ 
10:  para  $k \in N^T$  faça
11:    se  $\text{indegree}[k] = 0$  então
12:       $\text{Stack} \leftarrow \text{Stack} \cup \{k\}$ 
13:    fim se
14:  fim para
15:  enquanto  $\text{Stack} \neq \emptyset$  faça
16:    selecione nó  $k$  em  $\text{Stack}$  e remova-o do conjunto
17:     $\text{next} \leftarrow \text{next} + 1$ 
18:     $f(k) \leftarrow \text{next}$ 
19:    para  $(k, k') \in A^T$  faça
20:       $\text{indegree}[k'] \leftarrow \text{indegree}[k'] - 1$ 
21:      se  $\text{indegree}[k'] = 0$  então
22:         $\text{Stack} \leftarrow \text{Stack} \cup \{k'\}$ 
23:      fim se
24:    fim para
25:  fim enquanto
26:  se  $\text{next} < |N^T|$  então
27:    a rede contém ciclos direcionados
28:  fim se
29: fim procedimento
```

cada par origem-destino (s_v, n_F) é alocar custos aos arcos da seguinte forma: o custo w associado a cada arco (i, j, t) , $i \neq j$, é igual a $\max\{(p_{ij}^v - \lambda_{ijt}), -c_{ij}^v y_{ijt}^v\}$ e o custo w associado a cada arco (i, j, t) , $i = j$ é igual a 0.

Algoritmo 2 Algoritmo de Caminho Máximo para Grafos Acíclicos

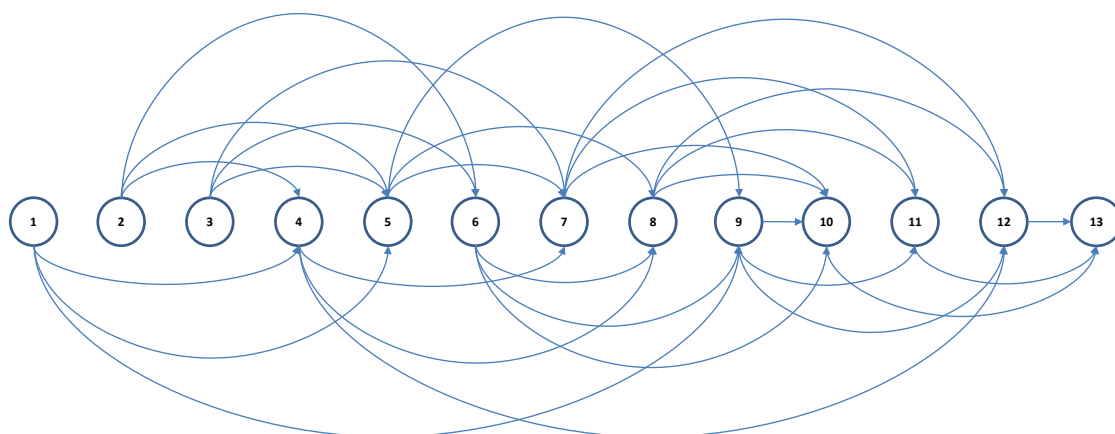
```
1:  $L = \text{Ordem Topológica}(f(k), k \in N^T)$ 
2: procedimento DAG( $s, n_F$ )
3:   para  $k \in N^T$  faça
4:      $d[k] = -\infty$ 
5:      $p[k] = 0$ 
6:   fim para
7:    $d[s] = 0$ 
8:   para  $i \leftarrow 1, |N^T|$  faça
9:     para  $j \in N^T$  tal que  $(L(i), j) \in A^T \wedge A_{i,j}^v = 1$  faça
10:      seja  $w$  o custo do arco  $(L(i), j)$  para o veículo  $v \in V$ 
11:      se  $d[j] < d[L(i)] + w$  então
12:         $d[j] \leftarrow d[L(i)] + w$ 
13:         $p[j] \leftarrow L(i)$ 
14:      fim se
15:    fim para
16:  fim para
17: fim procedimento
```

3.2.5 Exemplo Ilustrativo do Caminho Máximo

Para facilitar o entendimento do algoritmo do caminho máximo, apresenta-se a seguir um exemplo ilustrativo baseado no exemplo da Seção 3.2.3. O caminho máximo descrito é entre os vértices $f((1, 2)) = 4$ e n_F . A Tabela 3.2 mostra os custos dos arcos após a fase de processamento para esse tipo de veículo. O rótulo (distância) inicial do nó 4 é igual a 0 e o rótulo inicial dos outros nós é ∞ . A precedência de todos os nós inicialmente é vazia. Os círculos pontilhados representam os nós incumbentes em cada iteração do algoritmo do caminho máximo (Linha 8), e os círculos hachurados que estão ligados aos círculos pontilhados representam os nós nos quais se atualizam os rótulos em cada iteração (Linha 9). Por exemplo, os rótulos na iteração 4 (Figura 3.13) correspondentes aos nós 7,8,e 12 são atualizados de acordo às funções $d[7]=\max\{-\infty, 0 + 0\}$, $d[8]=\max\{-\infty, 0 + 5\}$ e $d[12]=\max\{-\infty, 0 + 3\}$, onde o primeiro termo de cada função corresponde ao rótulo (distância) da iteração anterior e o segundo termo corresponde a distância dos nós passando pelo nó 4. A seguir mostra-se os gráficos correspondentes às iterações 1, 4 e 13 do exemplo ilustrativo. No Apêndice A mostra-se os gráficos de todas as iterações.

Arco	Custo	Arco	Custo	Arco	Custo	Arco	Custo
1-4	0	4-7	0	7-10	0	10-13	0
1-5	-1,254	4-8	5	7-11	-0,21	11-13	0
1-9	-0,369	4-12	3	7-12	3,5	12-13	0
2-4	1,5	5-7	5	8-10	-1,5		
2-5	0	5-8	0	8-11	0		
2-6	-0,569	5-9	4	8-12	-0,5		
3-7	4	6-10	2,5	9-10	3		
3-5	2,25	6-8	-0,365	9-11	1,15		
3-6	0	6-9	0	9-12	0		

Tabela 3.2: Custos dos arcos do exemplo do caminho máximo



d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = -inf	d[8] = -inf	d[9] = -inf	d[10] = -inf	d[11] = -inf	d[12] = -inf	d[13] = -inf
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = null	p[8] = null	p[9] = null	p[10] = null	p[11] = null	p[12] = null	p[13] = null

Figura 3.11: Inicialização do Caminho Máximo

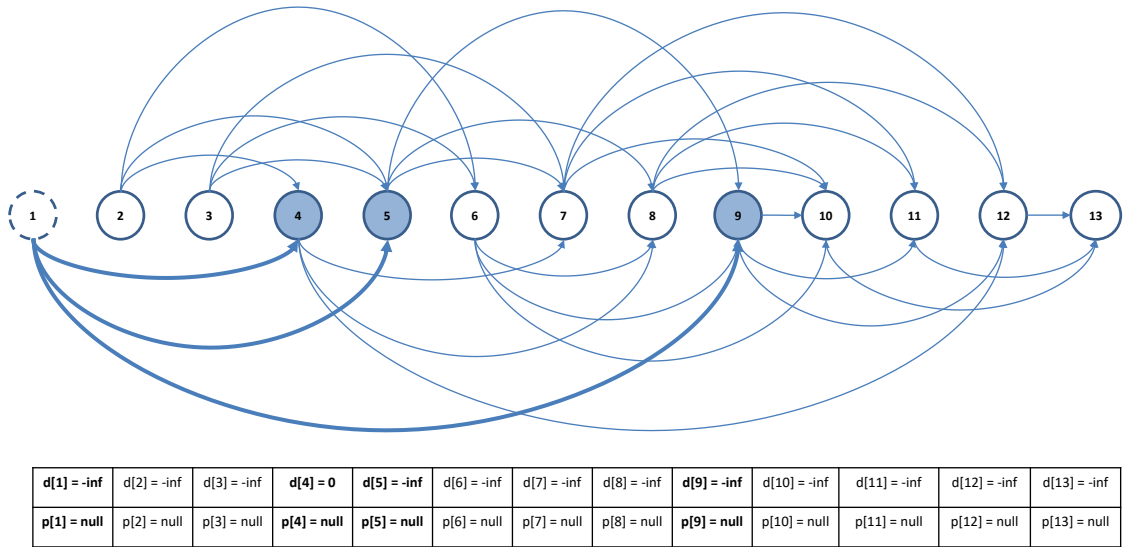


Figura 3.12: Avaliação dos rótulos nó 1

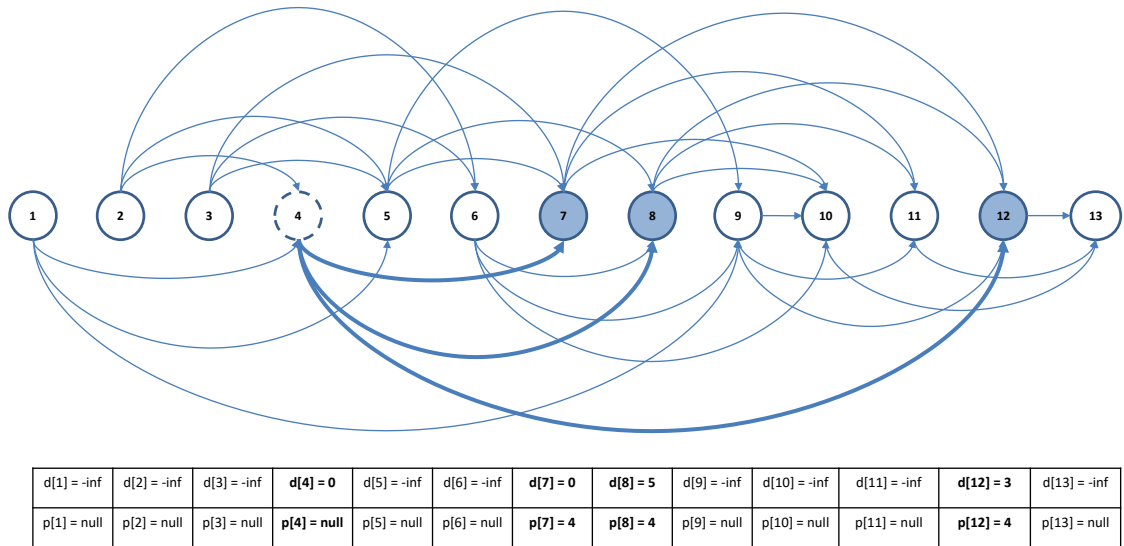


Figura 3.13: Avaliação dos rótulos nó 4

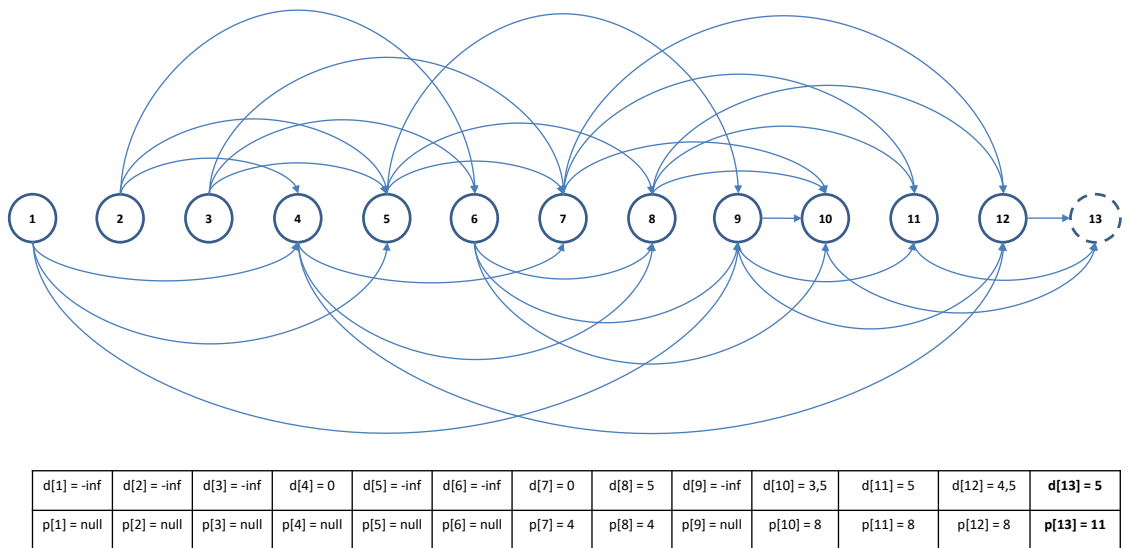


Figura 3.14: Avaliação dos rótulos nó 13

3.3 Resultados Computacionais

No trabalho de Vasco (2012), Vasco e Morabito (2016) se testaram algoritmos heurísticos em problemas com as seguintes características: $N = 53$, $T = 36$, $V = 130$. Um problema destas características equivale a um problema de programação linear de 29.352.960 variáveis e 29.727.936 restrições. Utilizando o software de otimização CPLEX, o tamanho dos problemas excedeu as capacidades de memória da máquina em que foram testados (Intel(R) Core(TM) 2DUOT 6600 2.2GHz, 4GB de memória RAM). Os autores então utilizaram métodos heurísticos como GRASP, Colônia de Formigas e *Simulated Annealing* para obter soluções factíveis para o problema.

Desta forma, justifica-se o uso de métodos que permitem explorar o caráter decomponível do PADV com a relaxação lagrangiana para atingir soluções com garantia de otimalidade para problemas de grande porte.

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais realizados utilizando-se a heurística lagrangiana proposta na Seção 3.2.2. O desempenho da heurística é comparado com a solução ótima obtida pelo *software* de otimização CPLEX versão 12.6.1 para a plataforma 64 bits. Inicialmente foram gerados aleatoriamente problemas de pequeno e médio porte, variando a quantidade de terminais, períodos e tipos de veículos. A heurística foi implementada na linguagem de programação C++ e todos os processamentos foram realizados em um *laptop* equipado com sistema operacional Windows, CPU Intel(R) Core (TM) i7-4500U, 1.8GHz e 8 GB de memória RAM.

Foram gerados dois grupos de instâncias. No Grupo 1, a solução ótima do problema e da relaxação linear são iguais (Tabela 3.3), enquanto que no Grupo 2 (Tabela 3.5) a solução ótima do problema e da relaxação linear são diferentes. As instâncias foram geradas da seguinte forma:

- Se define o número de terminais N , o número de períodos T e o número de tipos de veículos V .
- O nome das instâncias estão no formato “ $N \times T \times V \times a/l/r$ ”, onde N representa o número de terminais, T a quantidade de períodos, V a quantidade de tipo de veículos e $a/l/r$ representa variações na matriz de lucro e restrições de movimentações, conforme aplicado abaixo.
- Para a matriz de tempos de viagem, utilizou-se o seguinte procedimento:
 - Em um quadrado de dimensões $m \times m$ onde $m = 1.2 * T$, gera-se N coordenadas aleatórias X e Y .
 - Calcula-se a distância euclidiana entre cada par de coordenadas (terminais) e toma-se a parte inteira do resultado como a distância entre esses terminais.
- A matriz de demanda foi gerada alocando entre 1 e 5 demandas por veículos de carga a 10% dos arcos (i, j, t) , $\forall i \neq j$. Os arcos foram escolhidos aleatoriamente.

- A matriz de suprimento de veículos foi gerada alocando entre 1 e 5 veículos a 10% dos nós i . Os nós foram escolhidos aleatoriamente. Verifica-se que cada tipo de veículo tenha no mínimo um veículo de suprimento; caso não tenha, volta-se a gerar essa matriz até esta condição ser satisfeita.
- A matriz de custos e lucros, cujos valores são inteiros, foi gerada da seguinte forma:
 - Instâncias com “l” no final: os custos e lucros são iguais para todos os tipos de veículos. Os custos são números aleatórios entre 5 e 15 unidades monetárias (UM) e os lucros números aleatórios entre 20 e 35 UM.
 - Instâncias com “r” no final: os custos são iguais e os lucros são diferentes para todos os tipos de veículos. Os custos são números aleatórios entre 5 e 15 UM. Os lucros são números aleatórios entre $base$ e $base + 6$ UM, onde $base$ aumenta conforme cresce o tipo de veículo.
 - Instâncias com “a” no final: os custos e lucros são diferentes para todos os tipos de veículos. Os custos são números aleatórios entre 5 e 15 UM e os lucros números aleatórios entre 20 e 35 UM.
- A matriz de restrições de movimentação foi gerada da seguinte forma:
 - Instâncias com “l” no final: as restrições de movimentação são iguais para todos os tipos de veículos. Foram restringidas 5% das movimentações aleatoriamente para cada tipo de veículo.
 - Instâncias com “r” no final: as restrições de movimentação são diferentes para todos os tipos de veículos. Foram restringidas 5% das movimentações aleatoriamente para cada tipo de veículo.
 - Instâncias com “a” no final: as restrições de movimentação são diferentes para todos os tipos de veículos. Foram restringidas aleatoriamente 5% das movimentações para o primeiro veículo. Para o segundo veículo foram restringidas as mesmas movimentações do primeiro veículo, mais 0,5% das movimentações. Para o terceiro veículo foram restringidas as mesmas movimentações do segundo veículo, mais outros 0,5% de movimentações. Finalizar este procedimento até o último veículo.

A Tabela 3.3 mostra os resultados obtidos com o modelo (2.1a)-(2.1e) do PADV para cada uma das 24 instâncias geradas para o Grupo 1. As colunas apresentam a seguinte informação:

- Problema: Nome da instância no formato “ $N \times T \times V \times a/l/r$ ”, conforme explicado antes.
- Sol. Ot.: Solução ótima do problema obtida utilizando-se o CPLEX.
- CPU (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para se resolver o problema;

- Sol. Ot. LP: Solução ótima da Relaxação Linear do problema obtida utilizando-se o CPLEX.
- CPU LP (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para se resolver a relaxação linear do problema;
- Sol. Int: “sim”, se a solução da relaxação linear é inteira, e portanto, factível e ótima para o problema; Não, caso contrario.

Tabela 3.3: Solução ótima das instâncias Grupo 1

Problema	Sol. Ot.	CPU (seg)	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Int
5x5x5xa	370	0,14	370	0,08	sim
6x6x6xa	873	0,58	873	0,21	sim
7x7x7xa	1268	0,61	1268	0,39	sim
8x8x8xa	3144	0,81	3144	0,31	sim
9x9x9xa	3570	1,09	3570	0,37	sim
10x10x10xa	5203	1,34	5203	0,52	sim
12x12x12xa	10678	1,99	10678	0,98	sim
15x15x15xa	17331	3,75	17331	1,26	sim
5x5x5xr	603	0,35	603	0,12	sim
6x6x6xr	1406	0,59	1406	0,20	sim
7x7x7xr	1610	0,75	1610	0,43	sim
8x8x8xr	3571	1,09	3571	0,36	sim
9x9x9xr	10418	1,10	10418	0,40	sim
10x10x10xr	11540	1,73	11540	0,53	sim
12x12x12xr	18986	2,01	18986	1,01	sim
15x15x15xr	50112	4,12	50112	2,68	sim
5x5x5xl	865	0,25	865	0,11	sim
6x6x6xl	464	0,45	464	0,19	sim
7x7x7xl	1458	0,65	1458	0,44	sim
8x8x8xl	2118	0,98	2118	0,47	sim
9x9x9xl	3565	1,17	3565	0,41	sim
10x10x10xl	4710	1,25	4710	0,53	sim
12x12x12xl	8913	2,65	8913	1,06	sim
15x15x15xl	19739	4,12	19739	2,10	sim

Pode-se observar na Tabela 3.3 que todas as soluções da relaxação linear tem o mesmo valor da solução ótima e também são inteiras, porém isto não implica que o problema de alocação tenha a propriedade de integralidade, dado que as restrições de atendimento à demanda fazem dele um problema *multicommodity*.

Para avaliar a qualidade da relaxação linear, também foram geradas outras 1000 instâncias aleatórias para os tamanhos descritos anteriormente. Na geração destes problemas, os parâmetros (custos, lucros, suprimento de veículos e restrições de movimentação) de todos os tipos de veículos são aleatórios e diferentes, ou seja, não mantêm nenhuma estrutura. Na Tabela 3.4 mostra se, na primeira coluna, o tamanho do problema, na segunda coluna, o número de instâncias cuja solução não foi inteira e na

terceira coluna, o máximo *gap* (diferença percentual entre a solução ótima do problema e a solução ótima da relaxação linear) das instâncias que não tiveram solução inteira.

Tabela 3.4: Máximo intervalo de solução ótima entre IP e LP para 1000 instâncias

Problema	No Inst	Max Gap (%)
5x5x5	0/1000	0,00%
6x6x6	0/1000	0,00%
7x7x7	2/1000	13,08%
8x8x8	3/1000	18,18%
9x9x9	4/1000	23,55%
10x10x10	8/1000	34,03%
12x12x12	60/1000	20,68%
15x15x15	200/1000	40,88%

Embora existam instâncias com *gaps* de otimalidade significativos entre a solução inteira e a solução de relaxação linear, pode-se ver na Tabela 3.4 que a proporção de instâncias com *gaps* maiores que zero é relativamente pequena. Também foram gerados exemplos aleatórios usando a estrutura das instâncias do Grupo 1 até encontrar instâncias nas quais a solução ótima e LP são diferentes, assim, obtêm-se 24 instâncias que formam o Grupo 2.

Tabela 3.5: Solução ótima das instâncias Grupo 2

Problema	Sol. Ot.	CPU (seg)	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	GAP (%)
5x5x5xa	583	0,16	583	0,07	0,00%
6x6x6xa	691	0,69	691	0,31	0,00%
7x7x7xa	2473	0,74	2476,5	0,39	0,14%
8x8x8xa	2145	0,89	2151	0,31	0,28%
9x9x9xa	3186	1,36	3190	0,41	0,13%
10x10x10xa	4598	2,01	4603,5	0,56	0,12%
12x12x12xa	7594	2,35	7601,5	1,01	0,10%
15x15x15xa	16573	4,01	16580	1,32	0,04%
5x5x5xr	1034	0,45	1034	0,15	0,00%
6x6x6xr	1258	0,75	1263,5	0,32	0,44%
7x7x7xr	1547	0,85	1547,5	0,52	0,03%
8x8x8xr	5907	1,45	5908,5	0,54	0,03%
9x9x9xr	4916	1,75	4917,5	0,45	0,03%
10x10x10xr	10786	1,96	10788,5	0,65	0,02%
12x12x12xr	22100	3,01	22102,5	1,25	0,01%
15x15x15xr	50197	4,45	50197,5	2,86	0,00%
5x5x5xl	360	0,24	360	0,14	0,00%
6x6x6xl	949	0,39	949	0,18	0,00%
7x7x7xl	979	0,51	979	0,39	0,00%
8x8x8xl	3076	0,75	3076	0,42	0,00%
9x9x9xl	5047	1,03	5047	0,42	0,00%
10x10x10xl	5446	1,25	5446	0,49	0,00%
12x12x12xl	10532	2,12	10532	1,12	0,00%
15x15x15xl	22401	3,09	22401	1,98	0,00%

Retornando à heurística lagrangiana, o método de subgradiente foi iniciado com o parâmetro $f = 2$

(Passo 6, seção 3.2.1), sendo reduzido após um determinado número de iterações. O número de iterações escolhido foi 50 e o procedimento pára quando se atinge 2000 iterações. A heurística lagrangiana foi aplicada em todas as iterações do método de subgradiente, e em função dos altos requisitos computacionais, foi estabelecido um máximo de 1000 iterações para os problemas maiores. As Tabelas 3.6-3.7 mostram as informações relativas aos limitantes conseguidos pelo método do subgradiente com a heurística lagrangiana para os dois grupos de instâncias resolvendo os subproblemas com o *software* CPLEX. As Tabelas 3.8-3.9 mostram as informações relativas aos limitantes conseguidos pelo método do subgradiente com a heurística lagrangiana para os dois grupos de instâncias, resolvendo os subproblemas com o algoritmo do caminho máximo . As colunas desta tabela correspondem a:

- Problema: Nome da instância no mesmo formato “ $N \times T \times V \times a / l / r$ ”, conforme antes.
- No Iter: Número de iterações do método de subgradiente.
- L.B.: Limitante inferior obtido com a heurística lagrangiana.
- U.B.: Limitante superior obtido com a relaxação lagrangiana.
- CPU LR (seg): Tempo total de execução, em segundos, do método de subgradiente;
- Av.It.F.: Número médio de iterações em cada iteração da heurística lagrangiana.
- Av.Ti.F. (seg): Tempo médio de execução por iteração, em segundos, da heurística lagrangiana;
- GAP (%): Gap de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior $((UB - LB)/LB) * 100$.

Pode-se observar nas Tabelas 3.6-3.9 que a heurística lagrangiana consegue atingir a solução ótima somente nos problemas menores. Pode-se ver que o tempo computacional aumenta de forma significativa conforme se aumenta o tamanho das instâncias. Isto se deve ao fato da heurística lagrangiana aumentar o número de iterações de factibilização (uma iteração, equivale a encontrar o arco com a maior violação e factibilizar o fluxo da rede resultante) e o tempo computacional destas aumentarem. Por exemplo, no caso de 15x15x15xa da Tabela 3.6, se requer em média 1501 iterações de factibilização com duração de 229.46 segundos. Dado que este procedimento tem que ser repetido durante as iterações do subgradiente, torna-se pouco tratável computacionalmente resolver problemas de maior porte de forma eficiente, ou seja, em tempos computacionais aceitáveis.

Para avaliar a qualidade do limitante superior da relaxação lagrangiana, foram feitos testes com o método de subgradiente sem a heurística lagrangiana para os dois grupos de instâncias. O critério de parada foi o número de iterações igual a 5000, e o parâmetro f foi atualizado cada 100 iterações. A seguir se mostra as informações de cada coluna das Tabelas 3.10-3.13:

Tabela 3.6: Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 1 - Subproblema CPLEX

Problema	No Iter	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	CPU LR (seg)	Av. It. F.	Av. Ti. F. (seg)	GAP (%)
5x5x5xa	2000	370	370	272	370,0	1345,2	34	0,80	36,0%
6x6x6xa	2000	873	873	451	873,0	6700,5	77	3,01	93,6%
7x7x7xa	2000	1268	1268	786	1268,0	16325,1	115	3,16	61,3%
8x8x8xa	2000	3144	3144	2042	3144,0	42569,3	201	11,46	54,0%
9x9x9xa	2000	3570	3570	2598	3570,0	58369,2	220	12,46	37,4%
10x10x10xa	2000	5203	5203	2896	5204,0	75124,7	301	14,99	79,7%
12x12x12xa	1000	10678	10678	7594	10759,9	156326,2	415	32,15	41,7%
15x15x15xa	1000	17331	17331	13254	19203,7	408159,1	1501	229,46	44,9%
5x5x5xr	2000	603	603	524	603,0	1114,3	17	0,32	15,1%
6x6x6xr	2000	1410	1410	1245	1406,0	6856,3	75	2,06	12,9%
7x7x7xr	2000	1610	1610	1114	1610,0	7012,4	76	1,99	44,5%
8x8x8xr	2000	3571	3571	2244	3571,1	34798,3	235	7,65	59,1%
9x9x9xr	2000	10418	10418	6634	10418,0	48698,0	284	12,02	57,0%
10x10x10xr	2000	11540	11540	7456	11540,0	98456,8	468	22,01	54,8%
12x12x12xr	1000	18986	18986	9756	18998,0	175699,0	615	37,37	94,7%
15x15x15xr	1000	50112	50112	29456	51963,6	385697,2	1154	182,37	76,4%
5x5x5xl	1785	865	865	865	865,0	2700,4	36	1,01	0,0%
6x6x6xl	1856	464	464	464	464,0	1725,4	20	0,40	0,0%
7x7x7xl	2000	1458	1458	1118	1458,0	8963,3	89	2,59	30,4%
8x8x8xl	2000	2118	2118	1110	2118,0	18265,4	145	3,86	90,8%
9x9x9xl	2000	3565	3565	2551	3566,0	29337,2	178	6,29	39,8%
10x10x10xl	2000	4710	4710	2075	4710,7	61237,0	287	15,24	127,0%
12x12x12xl	1000	8913	8913	6154	8914,3	70636,0	294	16,24	44,9%
15x15x15xl	1000	19739	19739	12365	19789,2	365987,2	1265	198,37	60,0%

Tabela 3.7: Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 2 - Subproblema CPLEX

Problema	No Iter	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	CPU LR (seg)	Av. It. F.	Av. Ti. F. (seg)	GAP (%)
5x5x5xa	2000	583	583	470	583,0	2925,4	33	0,93	24,0%
6x6x6xa	2000	691	691	339	691,0	39456,3	53	1,12	103,8%
7x7x7xa	2000	2473	2476,5	2225	2476,5	18598,3	172	4,45	11,3%
8x8x8xa	2000	2145	2151	1596	2151,0	27589,2	199	6,99	34,8%
9x9x9xa	2000	3186	3190	1856	3190,1	28456,3	216	7,94	71,9%
10x10x10xa	2000	4598	4603,5	3845	4603,5	75698,3	320	16,37	19,7%
12x12x12xa	1000	7594	7601,5	4115	7602,0	132987,2	617	36,99	84,7%
15x15x15xa	1000	16573	16580	13456	16870,7	305963,5	801	254,99	25,4%
5x5x5xr	2000	1034	1034	1034	1034,1	1569,4	22	0,41	0,0%
6x6x6xr	2000	1258	1263,5	987	1263,5	5969,3	69	1,95	28,0%
7x7x7xr	2000	1547	1547,5	925	1547,0	4236,4	46	1,04	67,2%
8x8x8xr	2000	5907	5908,5	4235	5908,5	32659,2	235	9,64	39,5%
9x9x9xr	2000	4916	4917,5	3654	4917,5	48659,2	285	12,37	34,6%
10x10x10xr	2000	10786	10788,5	7896	10788,6	59369,4	274	17,59	36,6%
12x12x12xr	1000	22100	22102,5	11562	22104,7	139698,3	885	55,37	91,2%
15x15x15xr	1000	50197	50197,5	32569	51956,4	325732,2	956	201,32	59,5%
5x5x5xl	1785	360	360	360	360,0	1698,0	18	0,38	0,0%
6x6x6xl	2000	949	949	618	949,0	5102,4	65	1,70	53,6%
7x7x7xl	2000	979	979	596	979,0	5698,4	67	1,26	64,3%
8x8x8xl	2000	3076	3076	2456	3076,0	28789,3	206	6,99	25,2%
9x9x9xl	2000	5047	5047	2564	5074,0	55458,3	319	12,37	97,9%
10x10x10xl	2000	5446	5446	3502	5445,0	95236,2	367	18,37	55,5%
12x12x12xl	1000	10532	10532	7256	10617,0	195456,8	384	49,37	46,3%
15x15x15xl	1000	22401	22401	16456	22463,0	299687,2	762	238,37	36,5%

- L.B.: Limitante inferior obtido com a heurística lagrangiana.
- U.B.: Limitante superior obtido com a relaxação lagrangiana.
- CPU LR (seg): Tempo total de execução, em segundos, do método de subgradiente;

Tabela 3.8: Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	No Iter	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	CPU LR (seg)	Av. It. F.	Av. Ti. F. (seg)	GAP (%)
5x5x5xa	2000	370	370	268	370,0	1256,6	33	0,84	38,1%
6x6x6xa	2000	873	873	451	873,0	6548,3	76	2,90	93,6%
7x7x7xa	2000	1268	1268	786	1268,0	13085,1	112	3,50	61,3%
8x8x8xa	2000	3144	3144	2023	3144,0	39702,7	206	10,12	55,4%
9x9x9xa	2000	3570	3570	2619	3570,0	50458,8	215	11,47	36,3%
10x10x10xa	2000	5203	5203	2896	5204,0	65894,4	324	15,88	79,7%
12x12x12xa	1000	10678	10678	7563	10705,3	102698,4	395	34,46	41,5%
15x15x15xa	1000	17331	17331	12569	18698,7	310369,2	1456	205,26	48,8%
5x5x5xr	2000	603	603	469	603,0	1039,6	17	0,30	28,6%
6x6x6xr	2000	1410	1410	1127	1406,0	6083,2	78	2,03	24,8%
7x7x7xr	2000	1610	1610	997	1610,0	6258,3	76	1,74	61,5%
8x8x8xr	2000	3571	3571	2493	3571,0	33161,5	242	7,95	43,2%
9x9x9xr	2000	10418	10418	6634	10418,0	45615,9	292	11,20	57,0%
10x10x10xr	2000	11540	11540	7241	11540,1	92465,8	478	20,73	59,4%
12x12x12xr	1000	18986	18986	9622	18986,6	105369,2	635	38,96	97,3%
15x15x15xr	1000	50112	50112	28560	52369,4	321456,9	1115	178,24	83,4%
5x5x5xl	1785	865	865	865	865,0	2635,9	34	1,01	0,0%
6x6x6xl	2000	464	464	396	464,0	1578,9	19	0,42	17,2%
7x7x7xl	2000	1458	1458	1229	1458,0	8763,3	91	2,74	18,6%
8x8x8xl	2000	2118	2118	1039	2118,0	17257,0	142	3,70	103,9%
9x9x9xl	2000	3565	3565	2551	3565,0	25018,3	174	6,17	39,7%
10x10x10xl	2000	4710	4710	2093	4710,0	50899,7	296	14,26	125,0%
12x12x12xl	1000	8913	8913	5074	8913,3	56713,6	291	13,50	75,7%
15x15x15xl	1000	19739	19739	12563	19763,3	205695,2	1225	156,25	57,3%

Tabela 3.9: Limitantes da Relaxação Lagrangiana Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	No Iter	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	CPU LR (seg)	Av. It. F.	Av. Ti. F. (seg)	GAP (%)
5x5x5xa	2000	583	583	448	583,0	2809,2	35	0,88	30,1%
6x6x6xa	2000	691	691	339	691,0	3715,8	51	1,04	103,8%
7x7x7xa	2000	2473	2476,5	2160	2476,5	16796,5	168	4,62	14,7%
8x8x8xa	2000	2145	2151	1639	2151,0	25286,2	204	6,11	31,2%
9x9x9xa	2000	3186	3190	1937	3190,0	36655,7	212	8,32	64,7%
10x10x10xa	2000	4598	4603,5	3254	4603,5	66821,0	320	15,64	41,5%
12x12x12xa	1000	7594	7601,5	3982	7601,7	95817,3	617	34,91	90,9%
15x15x15xa	1000	16573	16580	12546	16953,3	245698,1	799	230,79	35,1%
5x5x5xr	2000	1034	1034	705	1034,0	1424,0	21	0,37	46,7%
6x6x6xr	2000	1258	1263,5	1247	1263,5	5834,9	67	1,85	1,3%
7x7x7xr	2000	1547	1547,5	834	1547,5	4148,3	41	1,00	85,6%
8x8x8xr	2000	5907	5908,5	4340	5908,5	30024,6	237	8,49	36,1%
9x9x9xr	2000	4916	4917,5	3585	4917,5	46744,8	282	10,24	37,2%
10x10x10xr	2000	10786	10788,5	8524	10788,6	52125,3	275	15,13	26,6%
12x12x12xr	1000	22100	22102,5	13098	22103,8	115511,1	890	52,91	68,8%
15x15x15xr	1000	50197	50197,5	35986	52456,3	276984,6	963	195,57	45,8%
5x5x5xl	2000	360,0	360	297	360,0	1474,0	19	0,42	21,2%
6x6x6xl	2000	949	949	618	949,0	4966,3	65	1,43	53,6%
7x7x7xl	2000	979	979	685	979,0	5080,6	65	1,14	42,9%
8x8x8xl	2000	3076	3076	2387	3076,0	26070,2	204	6,47	28,9%
9x9x9xl	2000	5047	5047	2857	5074,1	48074,0	311	11,33	77,6%
10x10x10xl	2000	5446	5446	3409	5446,0	71939,0	365	16,01	59,8%
12x12x12xl	1000	10532	10532	5661	10591,2	117794,0	685	43,07	87,1%
15x15x15xl	1000	22401	22401	15737	22453,1	256369,2	726	213,56	42,7%

- GAP LP (%): *Gap* entre o limitante superior da relaxação lagrangiana e o limitante da relaxação linear ($((UB - Sol. Ot. LP)/Sol. Ot. LP)*100$).
- Iter: Número da iteração em que o limitante superior atinge o limitante da relaxação linear

Tabela 3.10: Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 1 - Subproblema CPLEX

Problema	No Iter	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	Iter	CPU LR (seg)	GAP LP(%)
5x5x5xa	5000	370	0	370,0	2245	100,46	0,0%
6x6x6xa	5000	873	451	873,0	2384	412,87	0,0%
7x7x7xa	5000	1268	0	1268,0	2674	854,15	0,0%
8x8x8xa	5000	3144	0	3144,0	3145	1845,19	0,0%
9x9x9xa	5000	3570	0	3570,0	2945	3580,07	0,0%
10x10x10xa	5000	5203	0	5203,0	3745	7304,15	0,0%
12x12x12xa	5000	10678	0	10678,0	2734	10258,31	0,0%
15x15x15xa	5000	17331	0	17331,0	3451	48332,20	0,0%
5x5x5xr	5000	603	439	603,0	2284	85,48	0,0%
6x6x6xr	5000	1410	0	1410,0	2931	198,79	0,0%
7x7x7xr	5000	1610	0	1610,0	2765	759,85	0,0%
8x8x8xr	5000	3571	0	3571,0	2941	1845,37	0,0%
9x9x9xr	5000	10418	0	10418,0	2937	3845,25	0,0%
10x10x10xr	5000	11540	0	11540,0	3658	7896,24	0,0%
12x12x12xr	5000	18986	0	18986,0	3745	11764,29	0,0%
15x15x15xr	5000	50112	0	50112,1	3845	50815,73	0,0%
5x5x5xl	5000	865	391	865,0	2300	125,96	0,0%
6x6x6xl	5000	464	0	464,0	3000	310,88	0,0%
7x7x7xl	5000	1458	0	1458,0	2702	746,35	0,0%
8x8x8xl	5000	2118	0	2118,0	2507	1690,69	0,0%
9x9x9xl	5000	3565	0	3565,0	3302	3552,37	0,0%
10x10x10xl	5000	4710	0	4710,0	3745	7569,26	0,0%
12x12x12xl	5000	8913	0	8913,0	2932	9385,37	0,0%
15x15x15xl	5000	19739	0	19739,0	3231	50992,36	0,0%

Das Tabelas 3.10-3.13 pode-se observar que o limitante da relaxação linear é atingido pela relaxação lagrangiana por meio do método do subgradiente. Porém, o tempo computacional é significativamente alto para os problemas maiores, o que representa um inconveniente para resolver problemas de grande porte. Das Tabelas 3.6-3.9 e 3.10-3.13, pode-se observar uma redução significativa no tempo computacional quando se utiliza o algoritmo do caminho máximo para resolver os subproblemas. Porém, no caso de se utilizar a heurística, a maior parte de tempo computacional é consumido pela heurística, que ainda depende de CPLEX para factibilizar o fluxo da rede.

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo foram feitos testes computacionais do método do subgradiente para resolver a relaxação lagrangiana do PADV. Foram geradas instâncias aleatórias com estrutura especial nos custos/lucros e restrições de movimentação, e percebeu-se que a proporção de problemas onde o limitante da relaxação linear é diferente da solução ótima, é relativamente pequena. Dado o alto requerimento de memória computacional para resolver problemas de grande porte, optou-se por explorar o caráter decomponível da relaxação lagrangiana do PADV.

Tabela 3.11: Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 2 - Subproblema CPLEX

Problema	No Iter	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	Iter	CPU LR (seg)	GAP LP(%)
5x5x5xa	5000	583	583	583,0	2412	85,46	0,00%
6x6x6xa	5000	691	0	691,0	2184	136,25	0,00%
7x7x7xa	5000	2476,5	0	2476,5	2568	396,44	0,00%
8x8x8xa	5000	2151	0	2151,0	2374	785,18	0,00%
9x9x9xa	5000	3190	0	3190,0	2458	1503,54	0,00%
10x10x10xa	5000	4603,5	0	4603,5	2945	3202,46	0,00%
12x12x12xa	5000	7601,5	0	7601,5	3681	9900,59	0,00%
15x15x15xa	5000	16580	0	16649,0	5000	45173,57	0,42%
5x5x5xr	5000	1034	0	1034,0	2845	75,15	0,00%
6x6x6xr	5000	1263,5	0	1263,5	2914	122,78	0,00%
7x7x7xr	5000	1547,5	0	1547,5	3124	304,85	0,00%
8x8x8xr	5000	5908,5	0	5908,5	3671	678,26	0,00%
9x9x9xr	5000	4917,5	0	4917,5	3145	1375,15	0,00%
10x10x10xr	5000	10788,5	0	10788,5	2954	2851,15	0,00%
12x12x12xr	5000	22102,5	0	22102,7	3654	9903,26	0,00%
15x15x15xr	5000	50197,5	0	50197,6	3945	45061,26	0,00%
5x5x5xl	5000	360	118	360,0	2123	78,25	0,00%
6x6x6xl	5000	949	130	949,0	2654	127,19	0,00%
7x7x7xl	5000	979	0	979,0	2874	328,49	0,00%
8x8x8xl	5000	3076	0	3076,0	2354	730,41	0,00%
9x9x9xl	5000	5047	0	5047,0	2456	1498,77	0,00%
10x10x10xl	5000	5446	0	5446,0	2500	3004,57	0,00%
12x12x12xl	5000	10532	0	10532,0	2900	10483,70	0,00%
15x15x15xl	5000	22401	0	22403,6	5000	45857,37	0,01%

Desta forma, se particionou as instâncias em dois grupos, no primeiro grupo o limitante da relaxação linear é igual à solução ótima do problema e no segundo grupo, o limitante e a solução ótima são diferentes. Para resolver os subproblemas, foi utilizado tanto o CPLEX como o algoritmo de caminho máximo. Foi proposta uma heurística lagrangiana para fáctibilizar as soluções da relaxação lagrangiana do problema, porém, observou-se que ela não é eficiente para resolver problemas de grande porte devido aos altos tempos computacionais requeridos. Quando se remove a heurística lagrangiana do método de subgradiente, pode-se observar que a qualidade do limitante da relaxação lagrangiana é igual ao limitante da relaxação linear, porém, os tempos computacionais ainda são relativamente altos para resolver problemas de grande porte. Usando a codificação e implementação computacional corrente, esses resultados não motivaram o uso da relaxação e heurísticas lagrangianas nos experimentos com instâncias reais descritos no Capítulo 5.

Tabela 3.12: Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	No Iter	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	Iter	CPU LR (seg)	GAP LP(%)
5x5x5xa	5000	370	0	370,0	2652	43,61	0,00%
6x6x6xa	5000	873	451	873,0	2184	81,95	0,00%
7x7x7xa	5000	1268	0	1268,0	2568	146,53	0,00%
8x8x8xa	5000	3144	0	3144,0	2374	270,79	0,00%
9x9x9xa	5000	3570	0	3570,0	2458	482,61	0,00%
10x10x10xa	5000	5203	0	5203,0	2945	744,55	0,00%
12x12x12xa	5000	10678	0	10678,0	3681	1713,24	0,00%
15x15x15xa	5000	17331	0	17331,0	3715	4768,81	0,00%
5x5x5xr	5000	603	439	603,0	2845	25,67	0,00%
6x6x6xr	5000	1410	608	1410,0	2914	719,89	0,00%
7x7x7xr	5000	1610	0	1610,0	3124	106,05	0,00%
8x8x8xr	5000	3571	0	3571,0	3671	240,19	0,00%
9x9x9xr	5000	10418	0	10418,0	3145	567,88	0,00%
10x10x10xr	5000	11540	0	11540,0	2971	666,31	0,00%
12x12x12xr	5000	18986	0	18986,0	3654	1511,04	0,00%
15x15x15xr	5000	50112	0	50112,1	3945	5212,62	0,00%
5x5x5xl	5000	865	391	865,0	2145	56,43	0,00%
6x6x6xl	5000	464	0	464,0	2654	68,01	0,00%
7x7x7xl	5000	1458	455	1458,0	2874	165,90	0,00%
8x8x8xl	5000	2118	0	2118,0	2354	265,09	0,00%
9x9x9xl	5000	3565	0	3565,0	2456	567,83	0,00%
10x10x10xl	5000	4710	0	4710,0	2500	1032,13	0,00%
12x12x12xl	5000	8913	0	8913,0	2918	7482,57	0,00%
15x15x15xl	5000	19739	0	19739,0	3698	4642,33	0,00%

Tabela 3.13: Limitante Superior sem heurística lagrangiana Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	No Iter	Sol. Ot. LP	L.B.	U.B.	Iter	CPU LR (seg)	GAP LP(%)
5x5x5xa	5000	583	583	583,0	2378	30,80	0,00%
6x6x6xa	5000	691	0	691,0	2384	75,57	0,00%
7x7x7xa	5000	2476,5	0	2476,5	2674	179,47	0,00%
8x8x8xa	5000	2151	0	2151,0	3145	245,66	0,00%
9x9x9xa	5000	3190	0	3190,0	2945	400,57	0,00%
10x10x10xa	5000	4603,5	0	4603,5	3745	698,46	0,00%
12x12x12xa	5000	7601,5	0	7601,5	2734	1515,24	0,00%
15x15x15xa	5000	16580	0	16580,2	3451	4200,46	0,00%
5x5x5xr	5000	1034	0	1034,0	2261	35,60	0,00%
6x6x6xr	5000	1263,5	0	1263,5	2931	72,46	0,00%
7x7x7xr	5000	1547,5	0	1547,5	2765	185,97	0,00%
8x8x8xr	5000	5908,5	0	5908,5	2941	263,26	0,00%
9x9x9xr	5000	4917,5	0	4917,5	2937	386,13	0,00%
10x10x10xr	5000	10788,5	0	10788,5	3614	725,24	0,00%
12x12x12xr	5000	22102,5	0	22126,2	5000	1624,24	0,11%
15x15x15xr	5000	50197,5	0	50447,7	3845	4321,86	0,50%
5x5x5xl	5000	360	118	360,0	2300	40,59	0,00%
6x6x6xl	5000	949	130	949,0	3000	98,57	0,00%
7x7x7xl	5000	979	0	979,0	2702	181,65	0,00%
8x8x8xl	5000	3076	0	3076,0	2507	263,26	0,00%
9x9x9xl	5000	5047	0	5047,0	2975	411,15	0,00%
10x10x10xl	5000	5446	0	5446,0	3745	740,85	0,00%
12x12x12xl	5000	10532	0	10596,3	5000	1956,24	0,61%
15x15x15xl	5000	22401	0	22583,1	5000	4563,13	0,81%

Capítulo 4

Decomposição de Dantzig-Wolfe e o método de Geração de Colunas

Outro objetivo deste trabalho é aplicar a decomposição Dantzig-Wolfe e o método de geração de colunas para resolver o Problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV). Como o modelo utilizado é um caso particular de um Problema de Fluxo *Multicommodity* com domínio das variáveis inteiras, a seguir revisa-se alguns trabalhos da geração de colunas para o problema mencionado.

Jones *et al.* (1993) investigam o impacto do tipo de formulação do *Multicommodity Network Flow Problem* (MCNF) na decomposição de Dantzig-Wolfe. Barnhart, Hane e Vance (2000) desenvolvem um algoritmo *Branch-and-Price-and-Cut* para resolver o problema inteiro de fluxo *multicommodity*. Babonneau, Merle e Vial (2006) resolvem problemas de grande porte do problema de fluxo de custo mínimo linear *multicommodity* por meio de uma relaxação lagrangiana parcial. Babonneau e Vial (2009) utilizam o ACCPM (*Proximal- Analytic Center Cutting Plane Method*) junto com a estratégia do conjunto ativo para resolver instâncias grandes do problema de fluxo de mínimo custo não-linear *multicommodity*.

Gondzio e Sarkissian (1996) utilizam o método de geração de colunas primal-dual (*Primal-Dual Column Generation Method* - PDCGM) para resolver o problema de fluxo de custo mínimo não linear *multicommodity*. Gondzio, González-Brevis e Munari (2016) estudam o comportamento do PDCGM em problemas de otimização convexa de grande porte, especificamente: o problema de aprendizagem *kernel* múltiplo, problema estocástico de dois estágios e o problema linear de fluxo de custo mínimo *multicommodity*. Os problemas abordados neste estudo possuem a característica de ter Problemas Mestres de grande tamanho e subproblemas relativamente fáceis de resolver. O método PDCGM também é explorado neste capítulo para resolver o PADV.

4.1 Decomposição de Dantzig-Wolfe

A decomposição Dantzig-Wolfe foi proposta por George Dantzig e Philip Wolfe em 1960 para tratar programas lineares com uma estrutura especial que permite decompor o problema em subproblemas menores (DANTZIG, 1960). A decomposição de Dantzig-Wolfe está baseada na geração iterativa de colunas, o que faz o método apropriado para tratar programas lineares de grande escala.

Considere o problema (P) $\max\{\sum_{k=1}^K c^k x^k : \sum_{k=1}^k A^k x^k = b, x^k \in X^k, \forall k \in K\}$, onde $X^k = \{x^k \in R_+^{n_k}\}, \forall k \in K$. Os conjuntos de soluções X^k são independentes ($\bigcap_{k=0}^K X^k = \emptyset$), e estão ligados pelas restrições de acoplamento $\sum_{k=1}^K A^k x^k = b$. A seguir se mostra a estrutura em "blocos" do problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= c^1 x^1 && + c^2 x^2 && + \dots + c^k x^k \\ \text{s.a.:} & A^1 x^1 && + A^2 x^2 && + \dots + A^k x^k && = b \\ & D^1 x^1 && && && \leq d_1 \\ & && D^2 x^2 && && \leq d_2 \\ & && && \dots && \leq \cdot \\ & && && && D^k x^k && \leq d_k \\ & x^1 \in R_+^{n_1}, && x^2 \in R_+^{n_2}, && \dots && , x^k \in R_+^{n_k} \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \min f(x) &= c^1 x^1 && + c^2 x^2 && + \dots + c^k x^k \\ \text{s.a.:} & A^1 x^1 && + A^2 x^2 && + \dots + A^k x^k && = b \\ & && && && x^k \in X^k, \forall k \in K \\ & && && && X^k = \{x^k \in R_+^{n_k} | D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\} \end{aligned}$$

Assumindo que cada conjunto X^k é um poliedro não vazio, pelo Teorema da Representação (BERTSIMAS; TSITSIKLIS, 1997), cada X^k pode ser representado pela combinação linear convexa dos pontos extremos e a combinação linear dos raios extremos. Sejam $\bar{x}_q^k, q \in Q^k$, os pontos extremos de X^k e $\bar{x}_r^k, r \in R^k$, os raios extremos de X^k . Então, $x^k \in X^k$ se e somente se, x^k pode ser escrito como:

$$x^k = \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R^k} \lambda_r^k \bar{x}_r^k$$

com:

$$\sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k = 1; \lambda_q^k \geq 0, \lambda_r^k \geq 0, \forall q \in Q^k, \forall r \in R^k$$

Substituindo para x^k no problema original, obtêm-se

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K c^k \left(\sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R^k} \lambda_r^k \bar{x}_r^k \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{k=1}^K A^k \left(\sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R^k} \lambda_r^k \bar{x}_r^k \right) = b, \quad (p) \\ & \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k = 1, \forall k \in K, \quad (v) \\ & \lambda_q^k \geq 0, \lambda_r^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall q \in Q^k, \forall r \in R^k \end{aligned}$$

Ou, de forma equivalente,

$$\min \quad \sum_{k=1}^K \sum_{q \in Q^k} c_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in R^k} c_r^k \lambda_r^k \quad (4.1a)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{q \in Q^k} a_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in R^k} a_r^k \lambda_r^k = b, \quad (p) \quad (4.1b)$$

$$\sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k = 1, \forall k \in K, \quad (v) \quad (4.1c)$$

$$\lambda_q^k \geq 0, \lambda_r^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall q \in Q^k, \forall r \in R^k \quad (4.1d)$$

onde p e v representam as variáveis duais das restrições de acoplamento e convexidade, respectivamente, e

$$c_q^k = c^k \bar{x}_q^k \quad a_q^k = A^k \bar{x}_q^k \quad \forall q \in Q^k, \forall k \in K$$

$$c_r^k = c^k \bar{x}_r^k \quad a_r^k = A^k \bar{x}_r^k \quad \forall r \in R^k, \forall k \in K$$

O problema (4.1a)-(4.1d) é chamado de Problema Mestre (PM). É equivalente ao problema original e é um problema de programação linear com variáveis λ_q^k e λ_r^k . Contrário ao problema original, o número de variáveis do problema reformulado pode ser exageradamente grande, dado que a quantidade de pontos e raios extremos é exponencial no número de variáveis e restrições. Uma forma eficiente de resolver este problema é manter um conjunto limitado de pontos e raios extremos inicialmente. Este problema é chamado de Problema Mestre Restrito (PMR):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{q \in \tilde{Q}^k} c_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in \tilde{R}^k} c_r^k \lambda_r^k \\
\text{s.a.:} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{q \in \tilde{Q}^k} a_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in \tilde{R}^k} a_r^k \lambda_r^k = b, \quad (p) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}^k} \lambda_q^k = 1, \forall k \in K, \quad (v) \\
& \lambda_q \geq 0, \lambda_r \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall q \in \tilde{Q}^k, \forall r \in \tilde{R}^k
\end{aligned}$$

O custo relativo para cada tipo de variável λ_q^k e λ_r^k esta dado por

$$\begin{aligned}
\lambda_q^k : c^k x^k - \bar{p}^T A^k x^k - \bar{v} \\
\lambda_r^k : c^k x^k - \bar{p}^T A^k x^k
\end{aligned}$$

Em vez de avaliar o custo relativo de todas as variáveis, o que seria inviável na prática, utiliza-se o método de Geração de Colunas ou *Delayed Column Generation* para gerar iterativamente os programas ou colunas que vão formar parte da solução ótima. A seguir se mostra os subproblemas os quais podem ser resolvidos por meio do método de programação linear, ou outro algoritmo específico mais eficiente se a estrutura do subproblema permitir.

$$Z_{sp} = \max \left\{ c^k x^k - \bar{p}^T A^k x^k \mid x^k \in X^k \right\}$$

Após resolver cada subproblema, pode acontecer uma das duas seguintes situações:

- O subproblema tem solução ótima, portanto existe um ponto extremo x_q^k . Se $Z_{sp} - \bar{v} > 0$, então \bar{x}_q^k não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Assim, tem-se uma variável com custo relativo positivo para ser incluída no PMR. Logo, se adiciona q a \tilde{Q} , resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^k x_q^k \\ A^k x_q^k \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{função objetivo} \\ \longrightarrow \text{restrição de acoplamento} \\ \\ \longrightarrow \text{restrições de convexidade} \end{array}$$

- O subproblema é ilimitado, portanto existe um raio de subida x_r^k , o qual não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Assim, tem-se uma variável com custo relativo positivo para ser incluída no PMR. Logo, se adiciona r a \tilde{R} , resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^k x_r^k \\ A^k x_r^k \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{função objetivo} \\ \longrightarrow \text{restrição de acoplamento} \\ \\ \longrightarrow \text{restrições de convexidade} \end{array}$$

Após inserir as colunas para cada subproblema, volta-se a resolver o PMR e, assim, obter novos valores duais para avaliar a inserção de mais colunas. O processo de inserção termina quando $Z_{sp} - v^k \leq 0, \forall k$.

Quando se aplica a Decomposição Dantzig-Wolfe à relaxação linear de um programa inteiro, pode-se esperar que a solução ótima do problema mestre ótimo seja maior ou igual (maximização) que a solução ótima do problema original. Pelo Teorema 11.2 de (WOLSEY, 1998), o limitante atingido por meio desta relaxação é igual ao limitante obtido por meio do problema dual lagrangiano. Para garantir a obtenção de soluções inteiras, o método de geração de colunas pode ser combinado em um esquema de ramificação para chegar à solução ótima, este algoritmo é chamado de *Branch-and-Price* (WOLSEY, 1998).

4.2 Aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe no DVAP

Nesta seção descreve-se a aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe na relaxação linear do DVAP, resultando na descrição do problema mestre e do subproblema. A seguir se mostra a relaxação linear

do PADV.

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \quad (4.2a)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (4.2b)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$\sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \quad (4.2c)$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (4.2d)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (4.2e)$$

As restrições de fluxo e movimentação podem ser agrupadas de acordo com o tipo de veículo, portanto as restrições de atendimento à demanda correspondem às restrições de acoplamento, dando origem a

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{v \in V} x_{ijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ & (x^v, y^v) \in X^v, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

$$X^v = \left\{ \begin{array}{l} (x^v, y^v) \mid \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{kit}^v + y_{kit}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v \\ \forall i \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ x_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \end{array} \right.$$

Pelo Teorema da Representação, qualquer ponto $(x^v, y^v) \in X^v$ poder ser descrito como uma combinação de pontos e raios extremos:

$$(x^v, y^v) = \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v (\bar{x}_q^v, \bar{y}_q^v) + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v (\bar{x}_r^v, \bar{y}_r^v),$$

$$\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1, \lambda_q^v \geq 0, \lambda_r^v \geq 0$$

Com notação:

$$(x^v, y^v) = (x_{111}^v, x_{112}^v, x_{113}^v, \dots, x_{123}^v, \dots, x_{133}^v, y_{111}^v, y_{112}^v, y_{113}^v, \dots, y_{123}^v, \dots, y_{133}^v)$$

Ao se substituir a nova representação dos pontos no problema (4.2a)-(4.2e), obtém-se:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left(p_{ij}^v \left(\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{x}_{rijt}^v \right) - c_{ij}^v \left(\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{y}_{qijt}^v + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{y}_{rijt}^v \right) \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{v \in V} \left(\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v + \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{x}_{rijt}^v \right) \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ & \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1, \quad \forall v \in V \\ & \lambda_q^v \geq 0, \lambda_r^v \geq 0, \quad \forall v \in V, \forall q \in Q, \forall r \in R \end{aligned}$$

E reorganizando para agrupar pontos e raios extremos:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left(p_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v - c_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{y}_{qijt}^v \right) \\ & + \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left(p_{ij}^v \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{x}_{rijt}^v - c_{ij}^v \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{y}_{rijt}^v \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{v \in V} \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v + \sum_{v \in V} \sum_{r \in R^v} \lambda_r^v \bar{x}_{rijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \\ & \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v = 1, \quad \forall v \in V \\ & \lambda_q^v \geq 0, \lambda_r^v \geq 0, \quad \forall v \in V, \forall q \in Q, \forall r \in R \end{aligned}$$

Como o problema é factível e limitado, se eliminam os raios extremos, ficando assim o problema mestre:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} \left(p_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v - c_{ij}^v \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{y}_{qijt}^v \right) \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{v \in V} \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v \leq d_{ijt}, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \quad (u_{ijt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v &= 1, & \forall v \in V & \quad (w_v) \\ \lambda_q^v &\geq 0, & \forall v \in V, \forall q \in Q & \end{aligned}$$

onde u_{ijt} e w_v representam as variáveis duais das restrições de acoplamento e convexidade, respectivamente. Os subproblemas que descrevem um programa de alocação de veículos cheios e vazios para cada tipo de veículo são dados por:

$$Z_{sp}^v = \max \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} ((p_{ij}^v x_{ijt}^v - c_{ij}^v y_{ijt}^v) - u_{ijt} x_{ijt}^v) \quad (4.3)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j \in N} (x_{ijt}^v + y_{ijt}^v) - \sum_{\substack{k \in N, \\ k \neq i, \\ t > \tau_{ki}}} (x_{ij(t-\tau_{ki})}^v + y_{ij(t-\tau_{ki})}^v) - y_{iit-1}^v = m_{it}^v, \quad (4.4)$$

$$\forall i \in N, \forall t \in T$$

$$x_{ijt}^v = 0 \wedge y_{ijt}^v = 0, \text{ if } A_{ij}^v = 0, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \quad (4.5)$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, y_{ijt}^v \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i, j \in N, \forall t \in T \quad (4.6)$$

O custo relativo de cada variável (coluna) λ_q^v é $(Z_{sp}^v - w_v)$.

Como a solução da geração de colunas corresponde à relaxação linear do problema original, precisa-se de um método para obter uma solução inteira para o problema. Neste trabalho, aplicou-se uma simples MIP-heurística, que consiste em adicionar o seguinte conjunto de restrições ao problema mestre ótimo da relaxação linear.

$$\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{x}_{qijt}^v = x_{ijt}^v, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$\sum_{q \in Q^v} \lambda_q^v \bar{y}_{qijt}^v = y_{ijt}^v, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$x_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

$$y_{ijt}^v \in \mathbb{Z}_+, \forall i, j \in N, \forall t \in T, \forall v \in V$$

Quando se resolve o problema com estas restrições, os valores das variáveis x_{ijt}^v e y_{ijt}^v formam uma solução factível do problema inteiro.

4.3 Método de geração de colunas Primal-Dual

A geração de colunas padrão baseada em soluções duais ótimas apresenta vários inconvenientes, especialmente quando o método simplex é utilizado para resolver o Problema Mestre Restrito (PMR) (VANDERBECK, 2005; LÜBBECKE; DESROSIERS, 2005). São eles: 1) convergência lenta próximo à otimalidade (“*tailing off*”), 2) as primeiras iterações produzem colunas e valores duais irrelevantes, devido à informação pobre no começo (“*heading-in effect*”), 3) degeneração no primal e por conseguinte, múltiplas soluções ótimas no dual causam o valor ótimo do problema mestre restrito constante por várias iterações (“*plateu effect*”), 4) instabilidade nas soluções duais, que saltam de um valor extremo para outro (“*yo-yo effect*”). Assim, métodos de estabilização têm sido desenvolvidos para melhorar a robustez do método de geração de colunas.

Um desses métodos é a geração de colunas Primal-Dual (PDCGM), que tenta produzir soluções duais do PMR centradas para reduzir os efeitos negativos da geração de colunas, citados anteriormente. Dada uma solução factível primal-dual $(\bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{w})$ do PMR, que pode não ser uma solução ótima, pode-se obter um limitante superior e inferior do valor ótimo do PMR utilizando os valores primais e duais da função objetivo da seguinte forma:

$$Z_{LB}(\bar{\lambda}) := \sum_{k=1}^K \left(\sum_{q \in Q^k} c_q^k \bar{\lambda}_q^k + \sum_{r \in R^k} c_r^k \bar{\lambda}_r^k \right)$$

$$Z_{UB}(\bar{u}, \bar{w}) := b^T \bar{u} + \sum_{k=1}^K \bar{w}^k$$

Assumindo que a solução não seja ótima, se tem $Z_{UB}(\bar{u}, \bar{w}) > Z_{LB}(\bar{\lambda})$. Esta solução é chamada de ϵ -ótima se satisfaz:

$$Z_{UB}(\bar{u}, \bar{w}) - Z_{LB}(\bar{\lambda}) \leq \epsilon(10^{-10} + |Z_{LB}(\bar{\lambda})|)$$

para alguma tolerância $\epsilon > 0$. O método primal-dual de pontos interiores proporciona soluções duais bem centradas, já que mantem os produtos complementares primal-dual próximos ao caminho central. Define-se um ponto bem centrado se satisfaz as seguintes condições:

$$\gamma\mu \leq (c_q^k - \bar{u}^T a_q^k - \bar{w}^k) \lambda_q^k \leq \frac{1}{\gamma} \mu, \forall k \in K, \forall q \in \bar{Q}^k$$

$$\gamma\mu \leq (c_r^k - \bar{u}^T a_r^k) \lambda_r^k \leq \frac{1}{\gamma} \mu, \forall k \in K, \forall r \in \bar{R}^k$$

onde $\gamma \in (0, 1)$ e μ é o parâmetro barreira utilizado no método de pontos interiores primal-dual que define o caminho central. O PDCGM propõe um ajuste dinâmico da tolerância utilizada para resolver

o PMR. A tolerância é folgada ao começo do algoritmo e apertada conforme a geração se aproxima à otimalidade. O Algoritmo 3 descreve o método PDCGM.

Algoritmo 3 Algoritmo de Geração de Coluna com Pontos Interiores Primal-Dual

procedimento PDCGM($\epsilon > 0, D > 1, \delta > 0$)

$LB = -\infty, UB = \infty, gap = \infty, \epsilon = 0, 5$

enquanto $gap \geq \delta$ **faça**

 Encontre uma solução centrada ϵ -ótima $(\bar{\lambda}, \bar{u}, \bar{w})$ do PMR

$LB = \max\{LB, Z_{LB}(\bar{\lambda})\}$

 Resolver o subproblema com o vetor (\bar{u}, \bar{w})

$UB = \min\{UB, Z_{UB}(\bar{u}, \bar{w}) + Z_{SP}(\bar{u}, \bar{w})\}$

$gap = (UB - LB)/(10^{-10} + |LB|)$

$\epsilon = \min\{\epsilon_{max}, gap/D\}$

se $Z_{SP}(\bar{u}, \bar{w}) > 0$ **então**

 adicionar coluna ao PMR

fim se

fim enquanto

fim procedimento

4.4 Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais realizados utilizando-se o método de geração de colunas. O desempenho do algoritmo é comparado com a solução ótima obtida pelo mesmo *software* de otimização CPLEX versão 12.6.1 para a plataforma 64 bits do capítulo anterior. Foram utilizados os mesmos problemas de pequeno e médio porte do capítulo anterior. O algoritmo foi implementado na linguagem de programação C++ e todos os processamentos foram realizados em um *laptop* equipado com sistema operacional Windows, CPU Intel(R) Core (TM) i7-4500U, 1.8GHz e 8 GB de memória RAM. Para cada problema foi estabelecido um limite máximo de 30000 iterações.

As Tabelas 4.1-4.2 mostram os resultados dos limitantes obtidos pela geração de colunas utilizando o CPLEX para resolver os subproblemas. As Tabelas 4.3-4.4 mostram os resultados dos limitantes obtidos pela geração de colunas utilizando o algoritmo de caminho máximo para resolver os subproblemas. As colunas dessas tabelas referem-se a:

- Problema: Nome da instância no formato “ $N \times T \times V \times a / l / r$ ”, conforme o capítulo anterior.
- Sol. Ot.: Solução ótima obtida utilizando-se o CPLEX.
- Sol. Ot. LP: Solução ótima da Relaxação Linear obtida utilizando-se o CPLEX.
- No It: Número de iterações da geração de colunas.
- N.It. L.B.: Número da iteração em que o limitante inferior atinge o limitante da relaxação linear.

- L.B.: Limitante inferior obtido com a geração de colunas.
- U.B.: Limitante superior obtido com a geração de colunas.
- CPU (seg): Tempo de execução, em segundos, da geração de colunas.
- Sol. Heu: Solução obtida com a heurística MIP.
- GAP1 (%): Intervalo de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior $((UB - LB)/LB)*100$.
- GAP2 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a solução MIP-heurística (Seção 4.2) $((Sol. Ot - Sol. Heu)/Sol. Ot)*100$

Tabela 4.1: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - Subproblema CPLEX

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	No It	N.It. L.B.	L.B.	U.B.	Sol. Heu.	CPU (seg)	Gap 1(%)	Gap 2(%)
5x5x5xa	370	370	87	87	370,00	370,00	370	21,52	0%	0%
6x6x6xa	873	873	360	360	873,00	873,00	873	57,81	0%	0%
7x7x7xa	1268	1268	408	398	1268,00	1268,00	1166	92,90	0%	8%
8x8x8xa	3144	3144	3778	3778	3144,00	3144,00	2181	851,11	0%	31%
9x9x9xa	3570	3570	21025	16125	3570,00	3570,00	2571	8737,32	0%	28%
10x10x10xa	5203	5203	30000	-	5172,75	5275,88	3340	19188,26	2%	36%
12x12x12xa	10678	10678	30000	-	10675,70	10681,46	5417	84598,37	0%	49%
15x15x15xa	17331	17331	30000	-	12351,88	19534,92	5114	299505,26	58%	70%
5x5x5xr	603	603	83	83	603,00	603,00	603	18,36	0%	0%
6x6x6xr	1406	1406	1359	1337	1406,00	1406,00	1406	241,57	0%	0%
7x7x7xr	1610	1610	403	318	1610,00	1610,00	1610	79,46	0%	0%
8x8x8xr	3571	3571	11003	10859	3571,00	3571,00	3563	2365,22	0%	0%
9x9x9xr	10418	10418	30000	-	10415,94	10481,49	7997	15083,26	1%	23%
10x10x10xr	11540	11540	13607	13607	11540,00	11540,00	10716	9557,26	0%	7%
12x12x12xr	18986	18986	30000	-	18975,74	20763,00	10948	64294,24	9%	42%
15x15x15xr	50112	50112	30000	-	31372,14	89358,12	2363	284265,19	185%	95%
5x5x5xl	865	865	175	175	865,00	865,00	575	34,26	0%	34%
6x6x6xl	464	464	153	125	464,00	464,00	464	23,17	0%	0%
7x7x7xl	1458	1458	12010	12010	1458,00	1458,00	1458	2660,38	0%	0%
8x8x8xl	2118	2118	3413	3413	2118,00	2118,00	2118	728,56	0%	0%
9x9x9xl	3565	3565	10492	1554	3565,00	3565,00	2721	3506,37	0%	24%
10x10x10xl	4710	4710	30000	-	3709,00	4888,00	2603	18798,24	32%	45%
12x12x12xl	8913	8913	30000	-	8912,60	8915,60	4509	61745,90	0%	49%
15x15x15xl	19739	19739	30000	-	19676,69	20341,19	4007	248742,26	3%	80%

Tabela 4.2: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - Subproblema CPLEX

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	No It	N.It. L.B.	L.B.	U.B.	Sol. Heu.	CPU (seg)	Gap 1(%)	Gap 2(%)
5x5x5xa	583	583	369	369	583,00	583,00	583	76,90	0%	0%
6x6x6xa	691	691	546	546	691,00	691,00	680	108,77	0%	2%
7x7x7xa	2473	2476,5	4546	4393	2476,50	2476,50	2432	1046,51	0%	2%
8x8x8xa	2145	2151	30000	-	1111,00	2543,00	1104	11172,81	129%	49%
9x9x9xa	3186	3190	30000	-	318,33	3192,33	2236	12844,55	903%	30%
10x10x10xa	4598	4603,5	9565	9565	4603,50	4603,50	3533	6159,36	0%	23%
12x12x12xa	7594	7601,5	30000	-	6359,41	7993,91	4202	62581,96	26%	45%
15x15x15xa	16573	16580	30000	-	11545,81	22843,50	1336	258675,37	98%	92%
5x5x5xr	1034	1034	225	212	1034,00	1034,00	1034	39,46	0%	0%
6x6x6xr	1258	1263,5	632	632	1263,50	1263,50	1258	123,46	0%	0%
7x7x7xr	1547	1547,5	211	191	1547,50	1547,50	1547	60,19	0%	0%
8x8x8xr	5907	5908,5	30000	-	4867,25	6328,25	4463	10896,79	30%	24%
9x9x9xr	4916	4917,5	28740	17940	4917,50	4917,50	4890	12784,73	0%	1%
10x10x10xr	10786	10788,5	30000	-	10788,20	10793,91	10033	25218,78	0%	7%
12x12x12xr	22100	22102,5	30000	-	22091,05	22204,04	9711	86863,77	1%	56%
15x15x15xr	50197	50197,5	30000	-	36966,44	74821,23	4376	265761,90	102%	91%
5x5x5xl	360	360	57	51	360,00	360,00	360	9,65	0%	0%
6x6x6xl	949	949	4214	2884	949,00	949,00	944	906,11	0%	1%
7x7x7xl	979	979	622	593	979,00	979,00	979	155,54	0%	0%
8x8x8xl	3076	3076	30000	-	3076,00	3082,00	2570	107000,58	0%	16%
9x9x9xl	5047	5047	30000	-	5073,87	5082,07	3123	16477,54	0%	38%
10x10x10xl	5446	5446	30000	-	5445,53	5446,68	3381	21869,57	0%	38%
12x12x12xl	10532	10532	21893	21893	10532,00	10532,00	3250	50413,85	0%	69%
15x15x15xl	22401	22401	30000	-	3679,83	52111,64	0	254589,26	1316%	100%

Tabela 4.3: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	No It	N.It. L.B.	L.B.	U.B.	Sol. Heu.	CPU (seg)	Gap 1(%)	Gap 2(%)
5x5x5xa	370	370	192	192	370,00	370,00	370	10,34	0%	0,00%
6x6x6xa	873	873	369	333	873,00	873,00	846	20,83	0%	3,09%
7x7x7xa	1268	1268	342	335	1268,00	1268,00	1093	20,09	0%	13,80%
8x8x8xa	3144	3144	5630	6530	3144,00	3144,00	2327	490,26	0%	25,99%
9x9x9xa	3570	3570	30000	-	3566,25	3594,25	3061	9053,25	1%	14,26%
10x10x10xa	5203	5203	30000	-	5163,11	5267,38	3772	12379,67	2%	27,50%
12x12x12xa	10678	10678	30000	-	10666,82	10689,45	4626	30154,93	0%	56,68%
15x15x15xa	17331	17331	30000	-	12267,10	19721,33	5501	89569,24	61%	68,26%
5x5x5xr	603	603	93	78	603,00	603,00	603	5,55	0%	0,00%
6x6x6xr	1406	1406	728	399	1406,00	1406,00	1406	42,61	0%	0,00%
7x7x7xr	1610	1610	425	371	1610,00	1610,00	1610	25,60	0%	0,00%
8x8x8xr	3571	3571	5193	5193	3571,00	3571,00	3571	464,91	0%	0,00%
9x9x9xr	10418	10418	30000	-	10054,60	11957,60	7976	10214,79	19%	23,44%
10x10x10xr	11540	11540	30000	-	11539,58	11543,65	10618	13976,26	0%	7,99%
12x12x12xr	18986	18986	30000	-	18965,79	19078,04	12685	31310,57	1%	33,19%
15x15x15xr	50112	50112	30000	-	16582,00	79056,43	0	87720,95	377%	100,00%
5x5x5xl	865	865	222	222	865,00	865,00	783	11,98	0%	9,48%
6x6x6xl	464	464	72	46	464,00	464,00	464	4,12	0%	0,00%
7x7x7xl	1458	1458	5952	4426	1458,00	1458,00	1458	426,78	0%	0,00%
8x8x8xl	2118	2118	712	712	2118,00	2118,00	2116	51,32	0%	0,09%
9x9x9xl	3565	3565	8195	8195	3565,00	3565,00	2929	990,81	0%	17,84%
10x10x10xl	4710	4710	30000	-	3709,00	4879,00	2496	8741,64	32%	47,01%
12x12x12xl	8913	8913	30000	-	8908,55	8921,30	2911	25475,24	0%	67,34%
15x15x15xl	19739	19739	30000	-	19020,05	20080,86	1821	92369,24	6%	90,77%

Tabela 4.4: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - Subproblema Caminho Máximo

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	No It	N.It. L.B.	L.B.	U.B.	Sol. Heu.	CPU (seg)	Gap 1(%)	Gap 2(%)
5x5x5xa	583	583	192	174	583,00	583,00	583	10,77	0%	0%
6x6x6xa	691	691	777	775	691,00	691,00	685	41,05	0%	1%
7x7x7xa	2473	2476,5	3199	2269	2476,50	2476,50	2348	232,67	0%	5%
8x8x8xa	2145	2151	30000	-	1111,00	2573,00	1111	4912,70	132%	48%
9x9x9xa	3186	3190	22073	21853	3190,00	3190,00	2818	3543,57	0%	12%
10x10x10xa	4598	4603,5	25247	22311	4603,50	4603,50	3451	7157,79	0%	25%
12x12x12xa	7594	7601,5	30000	-	6363,08	8071,58	4219	20735,24	27%	44%
15x15x15xa	16573	16580	30000	-	11081,14	23386,65	1410	102369,75	111%	91%
5x5x5xr	1034	1034	233	233	1034,00	1034,00	1034	12,38	0%	0%
6x6x6xr	1258	1263,5	676	347	1263,50	1263,50	1258	38,01	0%	0%
7x7x7xr	1547	1547,5	426	426	1547,50	1547,50	1547	25,02	0%	0%
8x8x8xr	5907	5908,5	30000	-	4463,00	6137,00	4463	4959,79	38%	24%
9x9x9xr	4916	4917,5	21817	20781	4917,50	4917,50	4907	3562,81	0%	0%
10x10x10xr	10786	10788,5	21203	14035	10788,50	10788,50	10713	7634,99	0%	1%
12x12x12xr	22100	22102,5	30000	-	22088,75	22209,12	7073	43853,48	1%	68%
15x15x15xr	50197	50197,5	30000	-	32537,97	75049,65	3522	99258,16	131%	93%
5x5x5xl	360	360	47	38	360,00	360,00	360	2,37	0%	0%
6x6x6xl	949	949	434	415	949,00	949,00	949	28,81	0%	0%
7x7x7xl	979	979	317	309	979,00	979,00	976	22,99	0%	0%
8x8x8xl	3076	3076	6350	6350	3076,00	3076,00	2537	747,57	0%	18%
9x9x9xl	5047	5047	22869	19925	5074,00	5074,00	3061	5907,15	0%	39%
10x10x10xl	5446	5446	30000	-	5445,49	5446,33	2922	9189,76	0%	46%
12x12x12xl	10532	10532	15393	-	10527,74	10539,34	3867	11892,66	0%	63%
15x15x15xl	22401	22401	30000	-	4634,67	50502,74	0	101735,29	990%	100%

Pode-se ver nas Tabelas 4.1-4.4 que o método de geração de colunas atinge a solução ótima da relaxação linear em menos de 30000 iterações para os problemas de pequeno porte. Os tempos computacionais são menores usando o algoritmo de caminho máximo do que o CPLEX para resolver os subproblemas. Porém, para as instâncias maiores, o intervalo de otimalidade não é fechado neste número de iterações. A seguir se mostra alguns gráficos da evolução dos limitantes superiores e inferiores das instâncias das Tabelas 4.1-4.4 que não fecharam o intervalo.

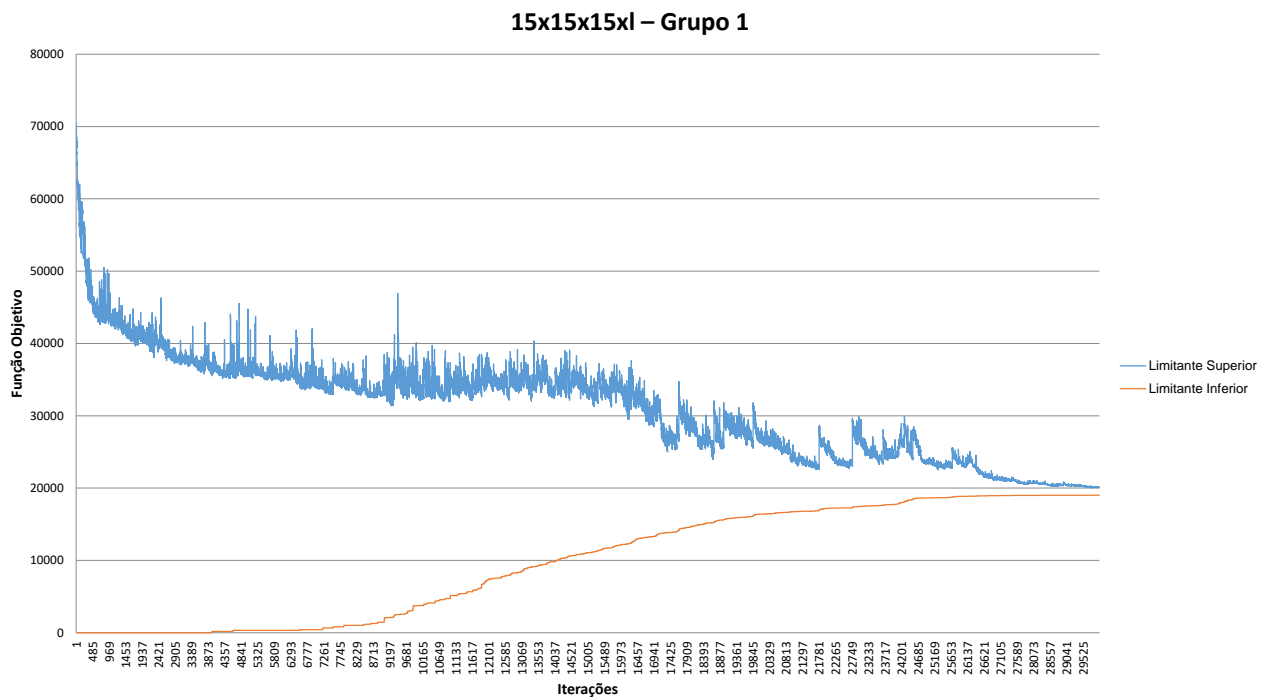


Figura 4.1: Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15l Grupo 1

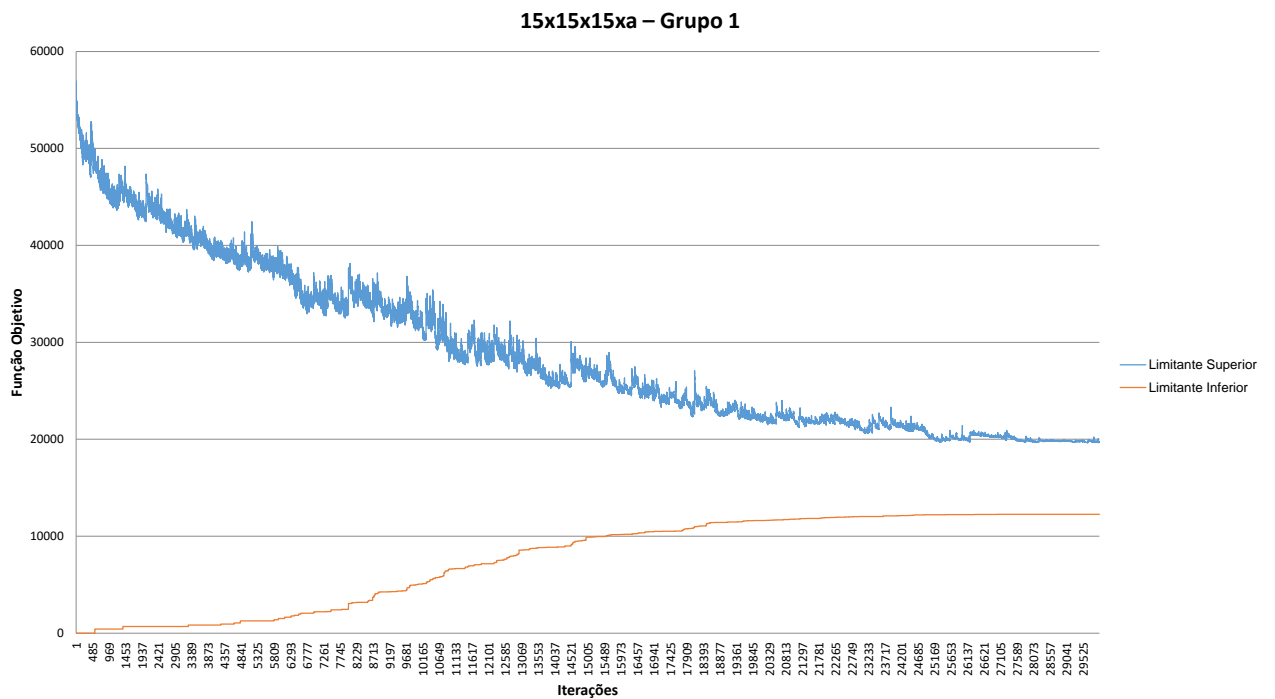


Figura 4.2: Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15a Grupo 1

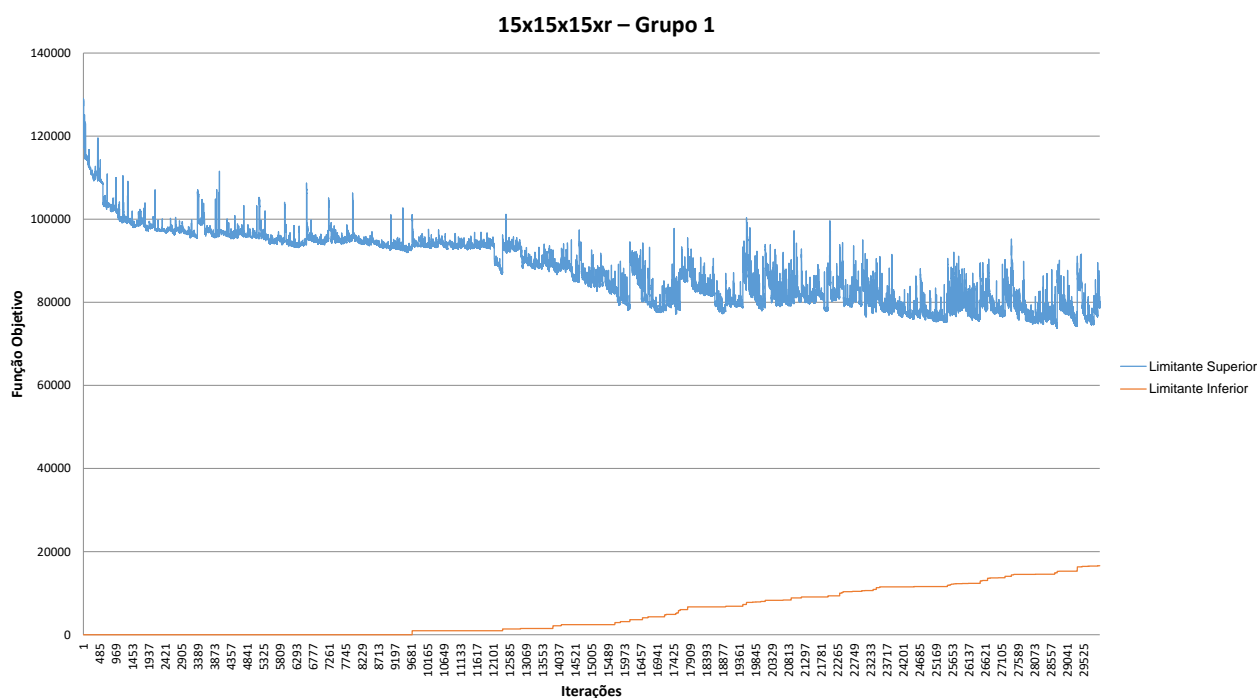


Figura 4.3: Limitantes da Geração de Colunas para 15x15x15r Grupo 1

Pelos gráficos apresentados nas Figuras 4.1–4.3 pode-se ver os comportamentos patológicos no método de geração de colunas quando se utiliza o método simplex para otimizar o problema mestre. A convergência dos problemas é muito lenta. Devido à degeneração no primal, pode se observar estagnação do valor primal com múltiplas soluções duais em uma parcela significativa de iterações, situação que está evidenciada claramente na Figura 4.2 (*plateau effect*). Convergência não monotônica dos limitantes duais (*yo-yo effect*) devido à instabilidade das soluções duais, situação que pode evidenciar claramente na Figura 4.3. Para mitigar estes efeitos, foram rodados testes utilizando o código de Geração de Colunas Primal-Dual (PDCGM) disponível em <http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/pdcmg.html>, junto com o algoritmo de caminho máximo descrito na Seção 3.2.4 do capítulo anterior. A seguir se apresenta as colunas com a seguinte informação:

- Problema: Nome da instância no formato “ $N \times T \times V \times a / l / r$ ” conforme o capítulo anterior.
- Sol. Ot.: Solução ótima obtida utilizando-se o CPLEX.
- Sol. Ot. LP: Solução ótima da Relaxação Linear obtida utilizando-se o CPLEX.
- CPU PDCGM(seg): Tempo de execução, em segundos, da geração de colunas.
- GAP (%): Intervalo de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior ($((UB - LB)/LB) * 100$).
- L.B.: Limitante inferior obtido com a geração de colunas.

- U.B.: Limitante superior obtido com a geração de colunas.
- CPU Sub (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os subproblemas.
- CPU PMR (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os problemas menores restritos.
- No It: Número de iterações da geração de colunas.
- Sol. Heu: Solução obtida com a heurística MIP.
- GAP1 (%): Intervalo de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior $((UB - LB)/LB)*100$.
- GAP2 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a solução heurística $((Sol. Ot - Sol. Heu)/Sol. Ot)*100$

Tabela 4.5: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 1 - PDCGM Caminho Máximo

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	CPU PDCGM (seg)	U.B.	L.B.	CPU Sub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	GAP1 (%)	GAP2 (%)
5x5x5xa	370	370	0,02	370,00	370,00	0,00	0,02	6	364	0,0%	1,62%
6x6x6xa	873	873	0,04	873,00	873,00	0,00	0,03	8	798	0,0%	8,59%
7x7x7xa	1268	1268	0,06	1268,00	1268,00	0,00	0,05	10	1198	0,0%	5,52%
8x8x8xa	3144	3144	0,15	3144,00	3144,00	0,00	0,14	20	2443	0,0%	22,30%
9x9x9xa	3570	3570	0,19	3570,00	3570,00	0,00	0,17	18	1966	0,0%	44,93%
10x10x10xa	5203	5203	0,45	5203,00	5203,00	0,02	0,42	28	3030	0,0%	41,76%
12x12x12xa	10678	10678	1,46	10678,00	10677,90	0,08	1,38	41	4446	0,0%	58,36%
15x15x15xa	17331	17331	8,24	17331,00	17330,90	0,37	7,87	74	4247	0,0%	75,49%
5x5x5xr	603	603	0,01	603,00	603,00	0,00	0,00	5	603	0,0%	0,00%
6x6x6xr	1406	1406	0,04	1406,00	1406,00	0,00	0,03	11	762	0,0%	45,80%
7x7x7xr	1610	1610	0,07	1610,00	1610,00	0,00	0,06	13	1610	0,0%	0,00%
8x8x8xr	3571	3571	0,12	3571,01	3571,00	0,00	0,11	16	3231	0,0%	9,52%
9x9x9xr	10418	10418	0,56	10418,00	10418,00	0,02	0,53	38	4798	0,0%	53,95%
10x10x10xr	11540	11540	0,77	11540,00	11540,00	0,04	0,74	43	4226	0,0%	63,38%
12x12x12xr	18986	18986	4,32	18986,00	18986,00	0,14	4,17	94	8462	0,0%	55,43%
15x15x15xr	50112	50112	34,52	50112,00	50111,90	0,82	33,65	155	7867	0,0%	84,30%
5x5x5xl	865	865	0,02	865,00	865,00	0,00	0,01	9	851	0,0%	1,62%
6x6x6xl	464	464	0,01	464,00	464,00	0,00	0,00	3	439	0,0%	5,39%
7x7x7xl	1458	1458	0,06	1458,00	1458,00	0,00	0,05	11	1446	0,0%	0,82%
8x8x8xl	2118	2118	0,10	2118,00	2117,99	0,00	0,09	13	1832	0,0%	13,50%
9x9x9xl	3565	3565	0,16	3565,00	3565,00	0,00	0,14	14	2849	0,0%	20,08%
10x10x10xl	4710	4710	0,38	4710,00	4710,00	0,02	0,35	23	1799	0,0%	61,80%
12x12x12xl	8913	8913	1,41	8913,00	8913,00	0,07	1,33	37	4049	0,0%	54,57%
15x15x15xl	19739	19739	9,44	19739,00	19739,00	0,35	9,08	70	5342	0,0%	72,94%

Das Tabelas 4.5-4.6 pode-se observar que os problemas de convergência foram mitigados e os *gaps* para todas as instâncias foram reduzidos. O número de iterações para resolver o PMR diminuiu significativamente. Porém, os resultados da heurística MIP são piores que nos casos anteriores, provavelmente devido ao fato de um número menor de colunas do PMR final, resultando em menos alternativas para se compor uma solução inteira factível.

Tabela 4.6: Limitantes da Geração de Colunas Grupo 2 - PDCGM Caminho Máximo

Problema	Sol. Ot.	Sol. Ot. LP	CPU PDCGM (seg)	U.B.	L.B.	CPU Sub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	GAP1 (%)	GAP2 (%)
5x5x5xa	583	583	0,02	583,00	583,00	0,00	0,02	12	442	0,0%	24,19%
6x6x6xa	691	691	0,04	691,00	691,00	0,00	0,03	12	569	0,0%	17,66%
7x7x7xa	2473	2476,5	0,10	2476,50	2476,50	0,00	0,08	17	1846	0,0%	25,35%
8x8x8xa	2145	2151	0,27	2151,00	2151,00	0,00	0,25	35	1080	0,0%	49,65%
9x9x9xa	3186	3190	0,18	3190,00	3190,00	0,00	0,17	16	2554	0,0%	19,84%
10x10x10xa	4598	4603,5	0,32	4603,50	4603,49	0,02	0,30	20	2400	0,0%	47,80%
12x12x12xa	7594	7601,5	1,19	7601,50	7601,50	0,03	1,13	38	1444	0,0%	80,98%
15x15x15xa	16573	16580	6,84	16580,00	16580,00	0,33	6,49	64	3591	0,0%	78,33%
5x5x5xr	1034	1034	0,02	1034,00	1033,99	0,00	0,01	8	924	0,0%	10,64%
6x6x6xr	1258	1263,5	0,04	1263,50	1263,49	0,00	0,02	10	1170	0,0%	7,00%
7x7x7xr	1547	1547,5	0,10	1547,50	1547,50	0,00	0,09	12	1547	0,0%	0,00%
8x8x8xr	5907	5908,5	0,29	5908,50	5908,47	0,00	0,27	31	4423	0,0%	25,12%
9x9x9xr	4916	4917,5	0,20	4917,50	4917,48	0,00	0,19	16	2758	0,0%	43,90%
10x10x10xr	10786	10788,5	0,83	10788,50	10788,40	0,04	0,79	44	6977	0,0%	35,31%
12x12x12xr	22100	22102,5	3,49	22102,50	22102,40	0,16	3,34	82	6264	0,0%	71,66%
15x15x15xr	50197	50197,5	29,21	50197,50	50197,40	0,77	28,43	155	9509	0,0%	81,06%
5x5x5xl	360	360	0,02	360,00	360,00	0,00	0,01	8	360	0,0%	0,00%
6x6x6xl	949	949	0,04	949,00	948,99	0,00	0,03	10	947	0,0%	0,21%
7x7x7xl	979	979	0,04	979,00	978,99	0,00	0,04	9	910	0,0%	7,05%
8x8x8xl	3076	3076	0,13	3076,00	3076,00	0,00	0,12	16	2133	0,0%	30,66%
9x9x9xl	5047	5047	0,42	5074,00	5074,00	0,02	0,39	31	2786	0,0%	44,80%
10x10x10xl	5446	5446	0,44	5446,01	5445,98	0,02	0,42	25	2392	0,0%	56,08%
12x12x12xl	10532	10532	2,13	10532,00	10531,90	0,11	2,01	50	2930	0,0%	72,18%
15x15x15xl	22401	22401	19,00	22401,10	22400,90	0,53	18,43	106	2019	0,0%	90,99%

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram feitos testes computacionais do método de geração de colunas para resolver o DVAP. Foram utilizadas as mesmas instâncias do capítulo anterior. Aplicou-se uma heurística simples para encontrar soluções factíveis. Os subproblemas foram resolvidos utilizando CPLEX e o algoritmo de caminho máximo. Observa-se que nas instâncias maiores, a geração de colunas apresenta as patologias típicas quando se aplica o método simplex para resolver o problema mestres. Da mesma forma, foi utilizado o algoritmo do PDCGM junto ao caminho máximo para resolver as instâncias o qual reduz significativamente os tempos computacionais, mas não necessariamente melhorando a solução da heurística proposta. Embora seu desempenho em termos da qualidade da solução não tenha sido tão bom para resolver esses exemplos aleatórios, no próximo capítulo mostra-se que seu desempenho melhora ao tratar exemplos reais de uma transportadora brasileira, principalmente os exemplos de grande porte.

Capítulo 5

Experimentos Computacionais com Instâncias Realistas

Neste capítulo são apresentados alguns experimentos computacionais adicionais realizados utilizando-se o procedimento de geração de colunas com o método de pontos interiores primal-dual descrito na Seção 4.3 e o algoritmo de caminho máximo descrito na Seção 3.2.3 do Capítulo 3.

5.1 Descrição das Instâncias

Foram selecionados os 30 problemas gerados no trabalho de Vasco (2012), os quais possuem as seguintes características baseadas na situação real de uma transportadora brasileira:

- 53 terminais;
- 36 períodos, tendo cada período 4 horas;
- 300 cargas a serem transportadas;
- 130 veículos.

Os 130 veículos foram agrupados entre 1 e 17 tipos de veículos, o que gerou 510 instâncias. Por último, cada veículo foi tratado como um único tipo de veículo ($V = 1..17, 130$), gerando 30 instâncias a mais. No total, são 540 instâncias para fazer os testes. Estas instâncias envolvem milhões de variáveis e restrições, sendo portanto consideradas de grande porte se comparadas com as instâncias de pequeno e médio porte dos capítulos 3 e 4.

As instâncias com $V = 1..17$ foram resolvidas de forma exata em Vasco (2012) utilizando-se o software AMPL/CPLEX. Também foram utilizadas heurísticas gulosa, Busca Local, *Simulated Annealing*, *GRASP* e Colônia de Formigas para obter soluções factíveis de forma eficiente. As instâncias

com $V = 130$ foram resolvidas unicamente com as heurísticas, dado as limitações de memória dos equipamentos utilizados na época em que Vasco (2012) realizou o trabalho.

As heurísticas desenvolvidas em Vasco (2012) foram implementadas na linguagem de programação C, e os processamentos realizados em um *laptop* equipado com sistema operacional Linux, CPU Intel(R) Core (TM) 2 DUO T6600 2,2GHz, e 4 GB de memória RAM.

5.2 Análise dos Resultados

Em função das limitações técnicas do subgradiente, junto com a heurística lagrangiana, para tratar problemas de grande porte, e os problemas de convergência da geração de colunas padrão para o mesmo tipo de problemas; neste trabalho utiliza-se unicamente o código de PDCGM (GONDZIO; GONZÁLEZ-BREVIS; MUNARI, 2016), junto com o algoritmo de caminho máximo para grafos acíclicos descrito na Seção 2 do capítulo 3. Os modelos e algoritmos deste trabalho foram implementados utilizando-se o software C++/CPLEX 12.6.1 em uma máquina CPU Intel(R) Core (TM) i7-4500U, 2.6 GHz e 16 GB de memória RAM. No caso dos problemas V130 o CPLEX tarda mais de 1 hora em compilar o problema, portanto, as soluções utilizando-se esse software foram omitidas.

As Tabelas 5.1-5.4 mostram os resultados dos limitantes obtidos pela geração de colunas para os grupos de instâncias V1, V10, V17 e V130, utilizando-se o algoritmo de caminho máximo para resolver os subproblemas. Os resultados dos outros grupos de instâncias são apresentados no Apêndice B. As colunas dessas tabela referem-se a:

- Problema: nome da instância no formato “ $pxr-vy$ ”, onde x representa o número do problema, e y a quantidade de grupos;
- Sol. Ot.: Solução ótima obtida utilizando-se o CPLEX/C++.
- CPU IP (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para resolver o problema pelo CPLEX;
- Sol. Ot. LP: Solução ótima da Relaxação Linear obtida utilizando-se o CPLEX/C++.
- CPU LP (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para se obter a solução reportada da relaxação
- CPU PDCGM(seg): Tempo de execução, em segundos, da geração de colunas.
- L.B.: Limitante inferior obtido com a geração de colunas.
- U.B.: Limitante superior obtido com a geração de colunas.
- CPU Sub (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os subproblemas.

- CPU PMR (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os problemas mes- tres restritos.
- No It: Número de iterações da geração de colunas.
- Sol. Heu: Solução obtida com a heurística MIP.
- CPU Heu (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver o PMR final com variáveis do PMR inteiras.
- GAP1 (%): Intervalo de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior $((UB - LB)/LB)*100$.
- GAP2 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a solução MIP-heurística $((Sol. Ot - Sol. Heu)/Sol. Ot)*100$
- Me Sol Heu: Melhor Solução obtida com as heurísticas no trabalho de Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014), Vasco e Morabito (2016)
- CPU MSH (seg): Tempo de execução, em segundos, da melhor solução heurística.
- GAP3 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a melhor solução heurística $((Sol. Ot - Me Sol Heu)/Sol. Ot)*100$

Das Tabelas 5.1-5.4 pode-se observar que a solução heurística da geração de colunas (integralizar as variáveis do PMR) melhora conforme se desagrega a frota. O *gap* médio entre a solução ótima e a heurística para o grupo V1 é 100% enquanto que no grupo V17 é 0,4%. Por outro lado, o *gap* médio entre a solução ótima e a melhor solução heurística das metaheurísticas não varia consideravelmente, sendo 1,1% para o grupo V1 e 1,8% para o grupo V17. Da Tabela 5.5 pode-se observar que o tempo computacional para resolver o modelo no *software* de propósito geral CPLEX aumenta conforme aumenta o número de tipos de veículos. Contrário ao esperado, o tempo computacional do algoritmo PDCGM/Caminho Máximo para resolver o problema relaxado diminui conforme aumenta o número de tipos de veículos. Por exemplo, no grupo de instâncias V1 a média de tempo computacional e número de iterações para atingir o ótimo é de 2602,2 segundos e 431 iterações respectivamente. Por outro lado, no grupo de instâncias V17 a média de tempo computacional e número de iterações para atingir o ótimo é de 83,6 e segundos e 34 iterações respectivamente. As pequenas diferenças observadas entre os limitantes obtidos pelo algoritmo PDCGM/Caminho-Máximo e as melhores soluções heurísticas para o grupo V130 podem ser consequência do *round-off* acumulado da quantidade excessiva de operações.

Tabela 5.1: PDGGM para instâncias do grupo V1

Problema	Sol. Or. IP		CPU		Sol. Or. IP	UB.	L.B.	GAP1 (%)	PDGGM		Iter	Sol. Heu.	CPU Heu	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH		GAP3 (%)
	IP	(seg)	IP	(seg)					CPU	Sub						PMR	(seg)	
p1r-v1	14558,4	1,67	14558,4	1,67	14558,40	14558,40	0%	3811,6	57,2	3754,34	509	0	0,83	14,263,60	56,3	2,0%		
p2r-v1	16994,4	1,36	16994,4	1,36	16994,40	16994,30	0%	3853,3	56,5	3796,86	513	0	0,85	16,870,61	57,2	0,7%		
p3r-v1	11675,8	1,15	11675,8	1,15	11675,90	11675,80	0%	2626,4	49,2	2577,14	436	0	0,77	11,580,02	55,3	0,8%		
p4r-v1	14012,8	1,39	14012,8	1,39	14012,80	14012,80	0%	2444,6	47,8	2396,71	419	0	0,85	13,685,21	59,9	2,3%		
p5r-v1	16548	1,16	16548	1,16	16548,00	16548,00	0%	3506,1	50,3	3455,78	458	0	0,84	16,455,80	52,2	0,6%		
p6r-v1	18842	1,55	18842	1,55	18842,00	18842,00	0%	3720,3	61,3	3659,03	549	0	0,85	18,757,81	56,2	0,4%		
p7r-v1	12766,6	0,75	12766,6	0,75	12766,60	12766,60	0%	1662,9	39,3	1623,64	354	0	0,83	12,708,00	56,5	0,5%		
p8r-v1	12675,2	0,98	12675,2	0,98	12675,20	12675,20	0%	4137,7	58,5	4079,2	529	0	0,79	12,648,20	53,7	0,2%		
p9r-v1	12964	0,86	12964	0,86	12964,00	12963,90	0%	3151,9	51,3	3100,58	476	0	0,78	12,908,41	52,4	0,4%		
p10r-v1	14177,2	1,04	14177,2	1,04	14177,30	14177,20	0%	1367,5	38,4	1329,08	339	0	0,82	13,988,81	53,3	1,3%		
p11r-v1	13721,6	1,06	13721,6	1,06	13721,60	13721,60	0%	2093,6	36,8	2056,86	332	0	0,87	13,587,61	51,8	1,0%		
p12r-v1	16866,4	1,22	16866,4	1,22	16866,40	16866,40	0%	5466,3	68,4	5397,89	634	0	0,80	16,777,61	60,2	0,5%		
p13r-v1	13421,8	1,18	13421,8	1,18	13421,90	13421,80	0%	3208,4	49,5	3158,89	436	0	0,81	13,254,22	57,0	1,2%		
p14r-v1	16327,6	1,31	16327,6	1,31	16327,60	16327,60	0%	2945,5	55,6	2889,79	510	0	0,59	16,186,01	50,8	0,9%		
p15r-v1	14431,6	0,95	14431,6	0,95	14431,60	14431,60	0%	1284,0	34,6	1249,36	337	0	0,68	14,214,01	82,1	1,5%		
p16r-v1	15097,2	1,30	15097,2	1,30	15097,20	15097,20	0%	4525,5	63,3	4462,25	610	0	0,60	15,019,61	55,6	0,5%		
p17r-v1	13126,6	1,03	13126,6	1,03	13126,60	13126,60	0%	893,5	30,0	863,477	286	0	0,60	12,805,42	51,5	2,4%		
p18r-v1	13957,2	1,10	13957,2	1,10	13957,20	13957,20	0%	2537,7	44,6	2493,08	430	0	0,59	13,854,41	55,0	0,7%		
p19r-v1	14088,6	1,29	14088,6	1,29	14088,60	14088,60	0%	1231,6	33,4	1198,18	329	0	0,64	13,696,60	50,1	2,8%		
p20r-v1	17898,4	1,16	17898,4	1,16	17898,40	17898,40	0%	2313,1	45,7	2267,32	446	0	0,59	17,790,21	52,3	0,6%		
p21r-v1	11287,8	1,19	11287,8	1,19	11287,80	11287,70	0%	1845,3	37,5	1807,78	368	0	0,64	11,107,21	58,7	1,6%		
p22r-v1	12848,6	0,82	12848,6	0,82	12848,60	12848,60	0%	3177,5	53,1	3124,32	494	0	0,63	12,780,80	82,2	0,5%		
p23r-v1	14503,4	1,05	14503,4	1,05	14503,40	14503,40	0%	3156,8	52,1	3104,61	487	0	0,63	14,399,21	56,0	0,7%		
p24r-v1	16031,8	1,13	16031,8	1,13	16031,80	16031,80	0%	2093,2	42,4	2050,71	395	0	0,57	15,947,81	53,4	0,5%		
p25r-v1	12462,2	1,48	12462,2	1,48	12462,20	12462,20	0%	3767,2	57,6	3709,61	553	0	0,60	12,182,41	51,3	2,2%		
p26r-v1	14928,6	1,13	14928,6	1,13	14928,60	14928,60	0%	1690,0	36,2	1653,74	344	0	0,57	14,798,21	52,6	0,9%		
p27r-v1	13930,2	1,31	13930,2	1,31	13930,20	13930,20	0%	1392,7	37,8	1354,92	367	0	0,58	13,813,61	49,9	0,8%		
p28r-v1	11527,8	0,98	11527,8	0,98	11527,80	11527,80	0%	1616,4	36,0	1580,38	349	0	0,56	11,447,61	51,2	0,7%		
p29r-v1	14161,4	1,06	14161,4	1,06	14161,40	14161,30	0%	1470,1	37,9	1434,1	363	0	0,63	13,987,60	82,8	1,2%		
p30r-v1	14005,6	1,28	14005,6	1,28	14005,60	14005,60	0%	1076,5	29,1	1047,44	276	0	0,60	13,820,82	54,8	1,3%		
Média		1,16		1,16			0%	2602,24	46,38	2555,84	431		0,70	100,0%	57,06	1,1%		

Tabela 5.2: PDCGM para instâncias do grupo V10

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP	Sol. Ot.	CPU IP	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub	CPU PMR	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH	GAP3 (%)	
	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)		(seg)	(seg)	(%)	(seg)	(seg)	(%)	
p1r-v10	16891,4	131,78	16891,4	131,78	16891,5	16891,4	0%	112,03	6,24	105,79	49	16570	253,38	16.344,00	69,12	1,9%	3,2%
p2r-v10	18797,2	113,90	18797,2	113,90	18797,2	18797,1	0%	153,38	6,83	146,56	53	18171	529,62	18.279,00	62,87	3,3%	2,8%
p3r-v10	16288	110,49	16288	110,49	16288	16288	0%	128,21	6,25	121,96	48	16076	625,76	15.948,41	70,80	1,3%	2,1%
p4r-v10	19390	132,65	19389,4	132,65	19390	19389,9	0%	244,55	8,32	236,22	65	18767,2	518,84	19.008,82	73,32	3,2%	2,0%
p5r-v10	18055,6	119,69	18053,8	119,69	18055,6	18055,5	0%	142,41	6,74	135,67	53	17784,8	776,27	17.850,01	56,72	1,5%	1,1%
p6r-v10	19189,5	100,28	19188,4	100,28	19189,5	19189,5	0%	159,54	7,24	152,30	57	18092	655,68	18.915,61	63,15	5,7%	1,4%
p7r-v10	18297,6	136,32	18297,6	136,32	18297,6	18297,6	0%	212,26	7,39	204,86	58	16870,4	321,28	17.958,80	83,56	7,8%	1,9%
p8r-v10	17910,9	113,21	17908,2	113,21	17910,9	17910,9	0%	228,63	8,22	220,41	64	16899,4	1312,74	17.697,02	58,98	5,6%	1,2%
p9r-v10	15122	110,00	15122	110,00	15122	15121,9	0%	143,19	6,78	136,41	53	14542,4	465,44	15.018,02	58,25	3,8%	0,7%
p10r-v10	18381,6	114,63	18380,2	114,63	18381,6	18381,4	0%	88,88	4,82	84,05	38	18042,4	410,83	17.952,83	57,99	1,8%	2,3%
p11r-v10	16223,8	194,20	16223,8	194,20	16223,8	16223,7	0%	132,60	5,99	126,61	47	15685,2	1126,23	15.852,42	58,97	3,3%	2,3%
p12r-v10	21688,6	136,48	21688,6	136,48	21688,6	21688,6	0%	196,59	8,46	188,13	67	19814,6	1185,68	21.285,80	73,96	8,6%	1,9%
p13r-v10	19365,2	138,14	19365,2	138,14	19365,2	19365,2	0%	239,76	7,90	231,86	62	18070,6	1416,09	19.050,82	65,11	6,7%	1,6%
p14r-v10	19217,4	118,08	19217,4	118,08	19217,4	19217,3	0%	188,62	7,24	181,37	57	18872,8	360,64	18.883,40	81,27	1,8%	1,7%
p15r-v10	19674	116,64	19674	116,64	19674	19673,8	0%	171,43	7,22	164,20	57	18432	415,28	19.355,21	71,41	6,3%	1,6%
p16r-v10	17258,2	134,04	17258,2	134,04	17258,3	17258,1	0%	144,34	6,49	137,85	51	16929,6	357,26	16.981,01	65,11	1,9%	1,6%
p17r-v10	16684,8	126,25	16684,8	126,25	16684,9	16684,8	0%	163,47	6,27	157,19	49	16351,8	277,15	16.057,22	55,42	2,0%	3,8%
p18r-v10	17325	104,94	17325	104,94	17325	17324,9	0%	109,10	5,46	103,63	44	16390,4	770,84	16.999,61	68,55	5,4%	1,9%
p19r-v10	17566,8	118,03	17566,8	118,03	17567	17566,8	0%	103,33	4,60	98,73	37	17048,8	947,48	17.324,61	57,17	2,9%	1,4%
p20r-v10	19942,6	145,54	19942,6	145,54	19942,7	19942,6	0%	153,01	6,20	146,80	49	18759,2	356,58	19.616,82	61,25	5,9%	1,6%
p21r-v10	16634,4	158,13	16634,4	158,13	16634,4	16634,4	0%	217,52	7,24	210,28	57	15046,4	400,59	16.178,61	79,35	9,5%	2,7%
p22r-v10	18466,2	127,03	18466,2	127,03	18466,2	18466,2	0%	281,37	8,97	272,39	70	16491,4	1186,33	18.251,39	81,65	10,7%	1,2%
p23r-v10	21104	122,58	21104	122,58	21104	21104	0%	198,08	7,27	190,80	57	19646,6	1096,19	20.763,20	63,43	6,9%	1,6%
p24r-v10	17354,4	117,84	17354,4	117,84	17354,4	17354,4	0%	93,95	5,16	88,79	41	17269	230,31	17.173,40	64,80	0,5%	1,0%
p25r-v10	16594,2	111,38	16594,2	111,38	16594,2	16594,1	0%	179,69	7,08	172,60	55	15785,2	1038,52	16.243,80	59,46	4,9%	2,1%
p26r-v10	19720,6	118,32	19719,6	118,32	19720,6	19720,6	0%	179,27	6,47	172,79	51	18925,8	986,32	19.207,62	60,39	4,0%	2,3%
p27r-v10	19473,2	128,00	19473,2	128,00	19473,2	19473,2	0%	151,71	7,08	144,62	56	19164,8	890,35	19.270,42	52,52	1,6%	1,4%
p28r-v10	17647,8	104,24	17647,8	104,24	17647,8	17647,8	0%	167,12	7,07	160,05	55	16715,6	556,36	17.513,61	57,13	5,3%	0,8%
p29r-v10	18607,6	110,94	18607,6	110,94	18607,6	18607,6	0%	156,28	6,24	150,05	49	17701,8	1350,73	18.170,80	80,96	4,9%	2,3%
p30r-v10	15858,2	115,49	15858,2	115,49	15858,2	15858,2	0%	89,09	5,17	83,92	41	15794	141,51	15.374,82	60,23	0,4%	3,0%
Média		124,31		124,31			0%	164,31	6,75	157,56	53		676,68		65,76	4,3%	1,9%

Tabela 5.3: PDCGM para instâncias do grupo V17

Problema	Sol. Ot. LP			Sol. Ot. IP			U.B.	L.B.	GAPI (%)	PDCGMsub			Hier	Sol. Heu.	Heu			Me Sol Heu	CPU MSH	GAP3 (%)
	LP	CPU (seg)	IP	CPU (seg)	U.B.	L.B.				GAPI (%)	CPU (seg)	CPU (seg)			PMR (seg)	CPU (seg)	GAP2 (%)			
p1r-v17	17080,6	321,02	17079,4	321,02	17080,6	17080,5	0%	67,60	4,30	63,29	32	16977,4	197,84	0,6%	16,499,00	68,38	3,4%			
p2r-v17	18906,8	247,51	18906,8	247,51	18906,8	18906,8	0%	80,20	4,66	75,54	34	18828,6	234,17	0,4%	18,614,41	62,89	1,5%			
p3r-v17	15789	521,42	15789	521,42	15789	15789	0%	39,96	2,98	36,97	22	15769,4	126,42	0,1%	15,284,61	71,43	3,2%			
p4r-v17	19352	212,03	19352	212,03	19352	19352	0%	156,50	5,91	150,58	42	19258,2	3072,58	0,5%	19,087,22	74,26	1,4%			
p5r-v17	17567,2	270,93	17567,2	270,93	17567,2	17567,2	0%	54,81	3,88	50,93	29	17511,4	139,55	0,3%	17,256,61	58,25	1,8%			
p6r-v17	19298	145,07	19298	145,07	19298	19298	0%	91,27	5,25	86,02	39	19094,2	473,58	1,1%	19,118,61	64,14	0,9%			
p7r-v17	18878,2	221,95	18878,2	221,95	18878,2	18878,2	0%	77,74	4,94	72,80	37	18828,4	367,97	0,3%	18,640,03	66,91	1,3%			
p8r-v17	17609,2	452,86	17609,2	452,86	17609,2	17609,2	0%	103,00	5,55	97,45	37	17402	454,71	1,2%	17,412,21	61,33	1,1%			
p9r-v17	15016,4	169,92	15015,4	169,92	15016,4	15016,4	0%	85,60	5,07	80,53	37	14976	193,71	0,3%	14,806,22	58,07	1,4%			
p10r-v17	18093,8	218,73	18093,8	218,73	18093,8	18093,7	0%	46,84	3,39	43,45	25	18084,8	37,04	0,0%	17,709,24	58,70	2,1%			
p11r-v17	16387	288,47	16387	288,47	16387	16387	0%	65,18	4,45	60,72	33	16386,8	2,68	0,0%	15,944,42	59,99	2,7%			
p12r-v17	21729,8	154,36	21729,8	154,36	21729,8	21729,7	0%	123,74	6,00	117,75	44	21653	895,73	0,4%	21,516,40	75,00	1,0%			
p13r-v17	18939,2	367,64	18939,2	367,64	18939,2	18939,2	0%	99,00	4,88	94,11	36	18820,4	2678,85	0,6%	18,553,22	65,02	2,0%			
p14r-v17	19244,2	174,83	19241,8	174,83	19244,3	19244,2	0%	90,29	4,66	85,62	35	19112,6	582,74	0,7%	19,034,21	59,55	1,1%			
p15r-v17	19796,2	230,99	19796,2	230,99	19796,3	19796,2	0%	75,16	4,81	70,35	36	19788,8	4,97	0,0%	19,517,21	74,72	1,4%			
p16r-v17	17294,6	297,04	17294,6	297,04	17294,6	17294,5	0%	94,37	5,08	89,28	31	17245,2	192,14	0,3%	17,047,79	82,05	1,4%			
p17r-v17	16719,8	316,79	16719,8	316,79	16719,8	16719,8	0%	62,83	4,27	58,55	32	16719,8	2,23	0,0%	16,318,02	56,52	2,4%			
p18r-v17	17435,4	289,64	17435,4	289,64	17435,4	17435,3	0%	60,67	4,19	56,48	31	17350,2	195,71	0,5%	17,076,41	73,46	2,1%			
p19r-v17	17777,8	225,06	17777,8	225,06	17777,8	17777,8	0%	53,77	3,56	50,21	26	17743,6	386,29	0,2%	17,383,41	56,97	2,2%			
p20r-v17	19878,6	283,55	19878,6	283,55	19878,6	19878,6	0%	89,01	4,69	84,32	35	19823	209,64	0,3%	19,495,22	60,65	1,9%			
p21r-v17	16694,8	161,12	16694,8	161,12	16694,8	16694,8	0%	166,58	6,00	160,57	48	16452,4	5977,57	1,5%	16,265,81	80,35	2,6%			
p22r-v17	18542,6	218,73	18542	218,73	18542,6	18542,6	0%	129,01	5,86	123,15	43	18494	1738,82	0,3%	18,322,19	70,16	1,2%			
p23r-v17	21119,2	674,51	21119,2	674,51	21119,2	21119,2	0%	80,69	4,94	75,75	37	21087,8	386,28	0,1%	20,872,01	67,86	1,2%			
p24r-v17	17489,4	273,28	17489,4	273,28	17489,4	17489,4	0%	39,71	2,99	36,72	22	17399,2	151,08	0,5%	17,165,21	66,60	1,9%			
p25r-v17	16819,4	257,58	16819,4	257,58	16819,4	16819,3	0%	69,23	4,51	64,72	33	16808,6	11,68	0,1%	16,194,79	62,52	3,7%			
p26r-v17	19995,4	176,09	19995,4	176,09	19995,4	19995,4	0%	64,56	4,20	60,36	31	19991,4	9,61	0,0%	19,711,41	60,36	1,4%			
p27r-v17	19557,6	283,42	19557,6	283,42	19557,6	19557,6	0%	75,67	4,67	70,99	35	19544,2	116,51	0,1%	19,398,22	53,99	0,8%			
p28r-v17	17807,6	146,41	17807,6	146,41	17807,6	17807,5	0%	100,96	5,67	95,28	35	17756,8	160,44	0,3%	17,611,81	58,35	1,1%			
p29r-v17	18473,6	211,80	18473,6	211,80	18473,6	18473,5	0%	96,53	4,23	92,29	31	18461,6	126,03	0,1%	18,051,61	58,88	2,3%			
p30r-v17	16288,6	299,74	16288,6	299,74	16288,6	16288,6	0%	88,00	3,90	84,09	29	16212,8	160,15	0,5%	15,949,82	61,10	2,1%			
Média		270,42		270,42		270,42	0%	83,61	4,65	78,96	34	642,89	642,89	0,4%		64,95	1,8%			

Tabela 5.4: PDCGM para instâncias do grupo V130

Problema	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub (seg)	CPU CPU (seg)	PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)
p1r-v130	17437,8	17437,8	0%	25,63	4,61	21,02	14	17436,6	0,86	17.483,99	184,77
p2r-v130	19260	19260	0%	28,33	4,90	23,43	15	19205	0,38	18.859,01	212,46
p3r-v130	16634,5	16634,4	0%	27,98	4,58	23,40	14	16496,8	1,01	16.677,21	252,1
p4r-v130	19560	19559,9	0%	33,24	5,39	27,86	16	19560	0,30	19.356,62	251,13
p5r-v130	18169,2	18169,1	0%	27,81	4,87	22,95	15	18169,2	0,29	18.291,61	159,13
p6r-v130	19969,4	19969,4	0%	26,21	4,91	21,30	15	19957,4	0,46	19.690,81	164,86
p7r-v130	19213,8	19213,8	0%	25,26	4,59	20,68	14	19148,8	0,29	19.132,43	160,5
p8r-v130	18475,9	18475,8	0%	32,27	5,33	26,93	16	18472,6	2,05	18.156,21	135,7
p9r-v130	15371,4	15371,3	0%	24,90	4,60	20,30	14	15261,4	0,29	15.121,82	115,6
p10r-v130	18344,8	18344,8	0%	24,35	4,54	19,81	14	18288,8	0,38	18.321,02	149,61
p11r-v130	16799,9	16799,8	0%	27,85	4,38	23,47	13	16785,6	1,04	16.578,22	145,89
p12r-v130	22008,4	22008,4	0%	33,98	5,58	28,40	17	21910,4	0,61	21.617,22	230,84
p13r-v130	19628,6	19628,6	0%	30,34	5,24	25,09	16	19582	0,38	19.265,62	137,83
p14r-v130	19616,6	19616,6	0%	25,42	4,20	21,22	13	19616,6	0,39	19.258,01	170,79
p15r-v130	20673,2	20673,1	0%	27,09	4,65	22,43	14	20673,2	0,39	21.421,23	216,57
p16r-v130	17796,2	17796,1	0%	27,22	4,67	22,55	14	17754,2	0,29	17.072,01	216,57
p17r-v130	17345,2	17345,1	0%	25,97	4,22	21,75	12	17345,2	0,38	16.888,81	178,4
p18r-v130	17850,7	17850,5	0%	28,96	5,05	23,91	15	17835,2	1,31	17.597,41	147,48
p19r-v130	18190,6	18190,6	0%	27,06	4,39	22,67	13	18187,6	0,31	17.967,60	208,81
p20r-v130	20754,4	20754,3	0%	29,00	5,10	23,89	15	20672,4	0,96	19.689,61	193,85
p21r-v130	16953,2	16953,2	0%	34,99	5,94	29,06	17	16833,2	0,40	16.696,01	145,04
p22r-v130	18699,2	18699,2	0%	34,95	5,83	29,12	17	18699,2	0,40	18.527,39	272,04
p23r-v130	21525,6	21525,5	0%	28,64	5,28	23,36	15	21525,6	0,39	20.842,21	190,04
p24r-v130	18266,2	18266,2	0%	30,37	5,78	24,59	13	18216,2	0,43	18.652,43	173,6
p25r-v130	17064,9	17064,8	0%	41,87	8,01	33,85	14	17020,6	0,45	16.822,40	214,61
p26r-v130	20324,4	20324,4	0%	27,37	5,17	22,20	14	20282,4	0,31	20.046,02	161,22
p27r-v130	20003	20002,9	0%	25,39	4,10	21,28	12	19875	0,41	19.295,42	177,04
p28r-v130	17956	17956	0%	29,74	5,35	24,38	16	17928	0,39	17.951,61	117,62
p29r-v130	19074,6	19074,5	0%	26,78	5,03	21,75	15	18972,6	0,39	18.818,41	161,39
p30r-v130	16464,6	16464,6	0%	28,43	4,77	23,66	14	16402,6	0,41	16.208,22	159,37
Média			0%	28,91	5,04	23,88	15		0,54		180,16

Tabela 5.5: Tempos Computacionais LP - IP - PDCGM para o PADV

Grupo de Instâncias	CPU LP (seg)	CPU PDCGM (seg)	CPU Sub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter
V1	1,16	2602,20	46,37	2555,83	431
V2	5,48	1401,50	27,59	1373,89	237
V3	12,79	784,50	18,85	765,64	156
V4	23,32	581,22	14,96	566,25	121
V5	39,05	453,50	12,70	440,79	99
V6	53,48	348,22	10,65	337,56	84
V7	71,19	255,43	8,90	246,53	74
V8	85,78	1099,60	15,69	1083,93	129
V9	104,15	174,36	7,09	167,25	57
V10	124,30	164,31	6,74	157,56	53
V11	265,35	158,80	6,76	152,03	49
V12	284,99	130,72	5,83	124,88	45
V13	275,99	120,47	5,48	114,98	41
V14	291,10	106,63	5,26	104,08	40
V15	295,40	102,91	5,10	97,80	38
V16	297,79	91,45	4,83	86,61	35
V17	270,41	83,61	4,65	78,96	34
V130	*	28,91	5,03	23,87	15

*Mais de uma hora.

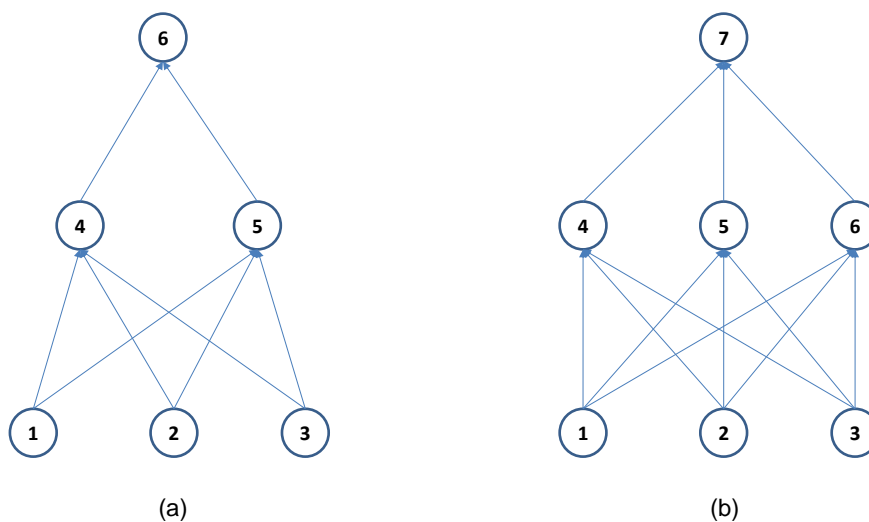


Figura 5.1: Enumeração de pontos extremos de caminhos versus árvores.

Segundo Jones *et al.* (1993), referente a análise do impacto da formulação na geração de colunas do *Multicommodity Network Flow Problem*, as formulações desagregadas, ou seja, nas quais os subproblemas são árvores com poucas folhas como os caminhos máximos, o número de iterações é menor que as

formulações agregadas. Isto se deve ao fato de que a soma dos pontos extremos no caso desagregado é menor que a soma dos pontos extremos do caso agregado, portanto, se tem uma cardinalidade menor de pontos extremos para agregar ao PMR. O pequeno exemplo da Figura 5.1 mostra como o número de caminhos aumenta de 6 (Figura 5.2) para 9 (Figura 5.3) quando o grafo cresce um só nó, enquanto o número de árvores aumenta de 8 (Figura 5.4) para 27 (Figura 5.5).

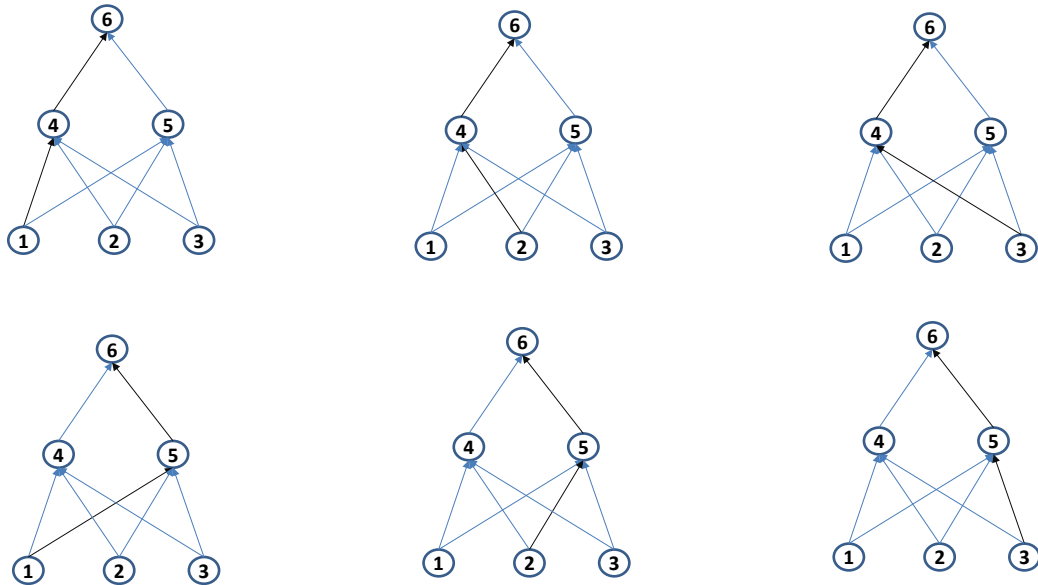


Figura 5.2: Caminhos num grafo direcionado de 6 nós.

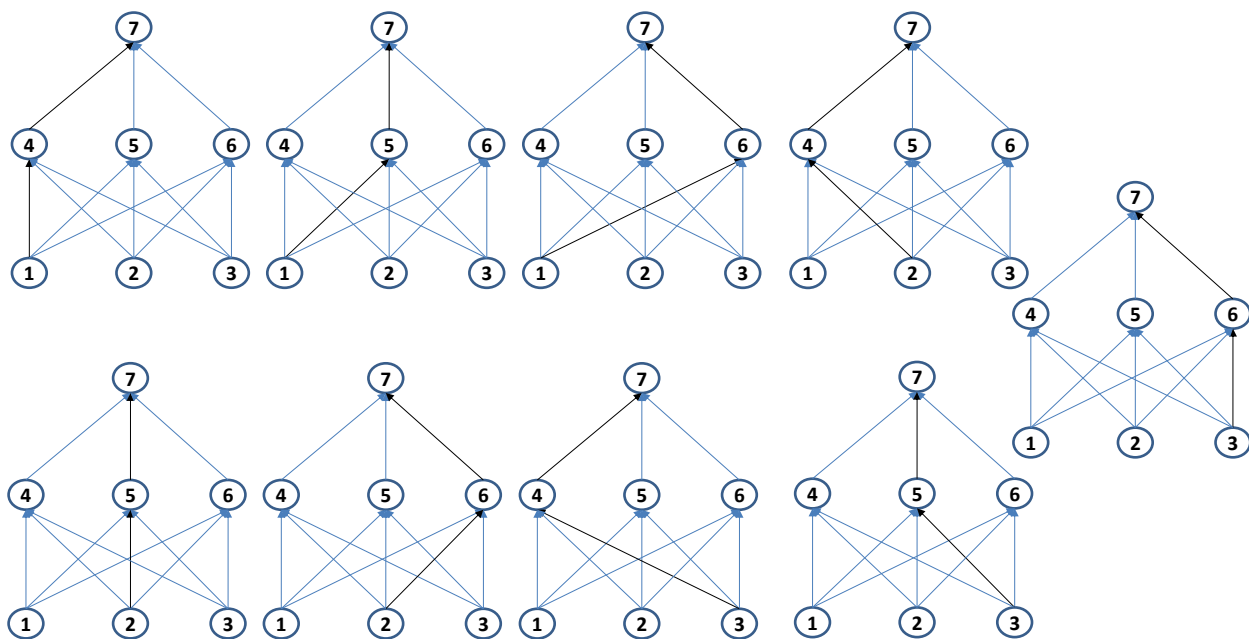


Figura 5.3: Caminhos num grafo direcionado de 7 nós.

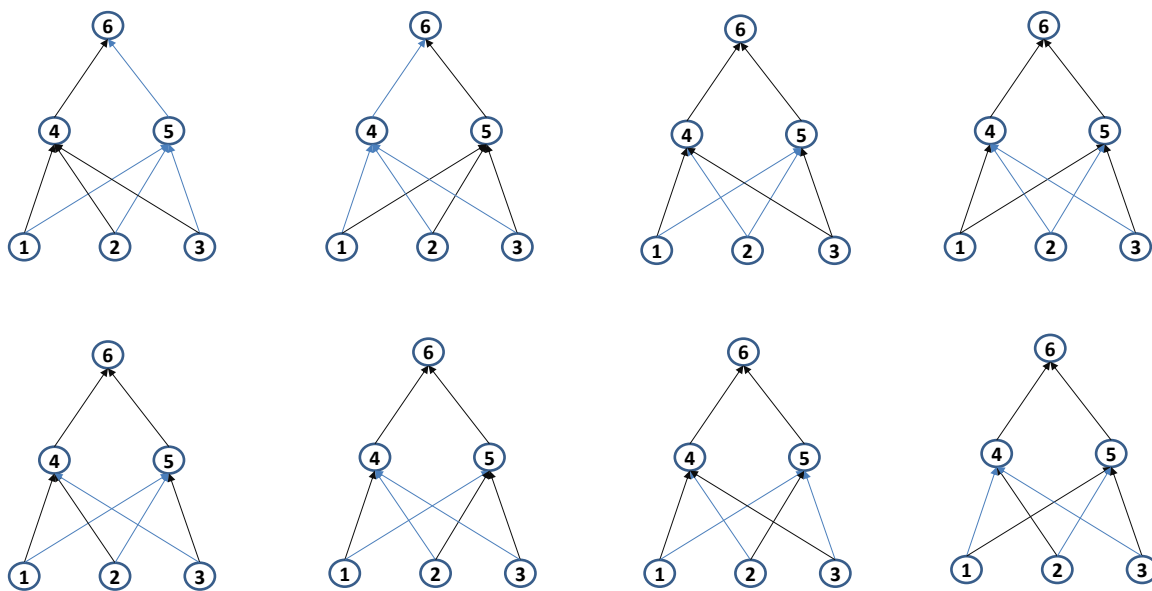


Figura 5.4: Árvores num grafo direcionado de 6 nós.

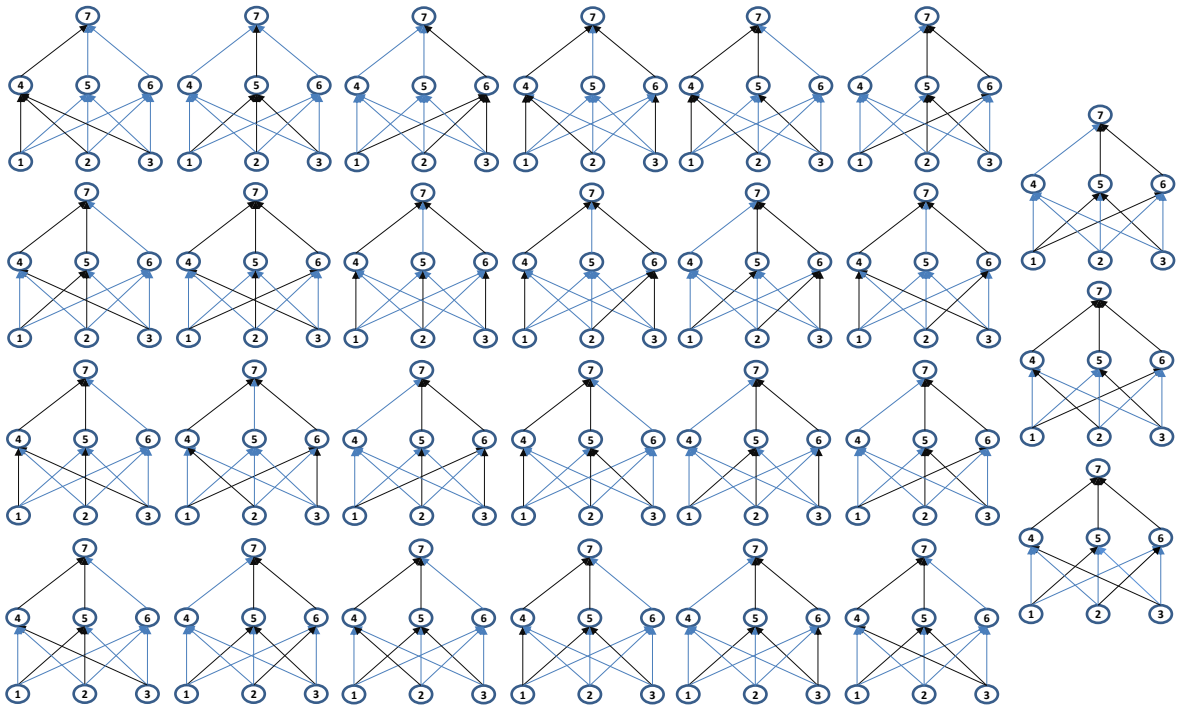


Figura 5.5: Árvores num grafo direcionado de 7 nós.

Além disso, no caso agregado é mais difícil encontrar percursos dos veículos que pertencem à solução ótima, já que eles fazem parte de árvores de fluxo que podem tornar infatível as colunas inseridas. Por exemplo, na Figura 5.6 considere o percurso 1-4-6 que pertence à solução ótima, em que 1 faz referência a um suprimento de veículo e 6 ao final do horizonte. Na formulação totalmente desagregada (resolver caminhos máximos), só basta resolver o subproblema que liga o nó 1 com o nó 6. Por outro lado, na formulação agregada, se tem que encontrar a árvore que contenha esse percurso e além disso mantenha a factibilidade da demanda (capacidade no MCNF padrão) nos demais arcos.

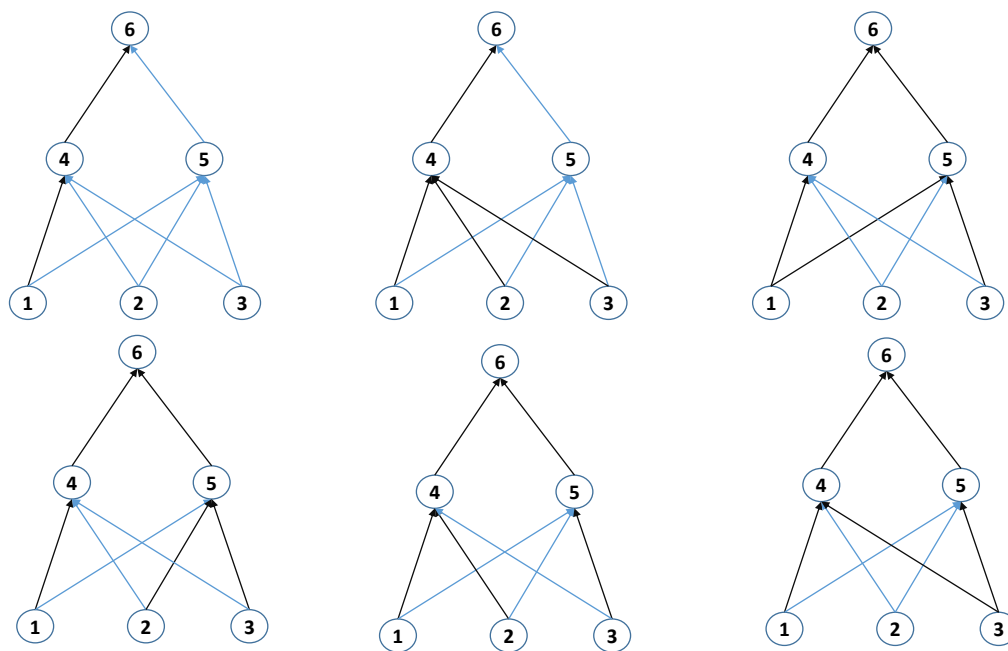


Figura 5.6: Árvores que contem o percurso 1-4-6.

Pode-se observar nas Tabelas B.17-B.18 que as soluções inteiras heurísticas (as soluções obtidas ao integralizar as variáveis do PMR final) tem *gaps* relativamente pequenos, comparáveis com as melhores soluções heurísticas do trabalho de Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014), Vasco e Morabito (2016) e em tempos computacionais razoáveis. Isso reforça o potencial do método para tratar o PADV em situações reais, particularmente em instâncias de grande porte com vários tipos de veículos. Em instâncias com um ou poucos tipos de veículos, é mais efetivo resolver o modelo com o método *Branch-and-Cut* do CPLEX, como seria esperado, ou aplicar as heurísticas propostas em Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014), Vasco e Morabito (2016). Por outro lado, um método *Branch-and-Price* tem grande potencial em ser uma alternativa efetiva para obter a solução ótima de problemas com um número grande de veículos.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi estudado o Problema de Alocação Dinâmica de Veículos (PADV), que tem grande aplicabilidade em sistemas logísticos, especificamente em operações de transporte rodoviário de carga. Dado que problemas de grande porte têm sido abordados unicamente com métodos heurísticos, e esses problemas se apresentam na prática com grande porte (VASCO; MORABITO, 2016), foram estudados dois métodos que utilizam decomposições. O primeiro método investigado foi relaxação lagrangiana, utilizando o método de otimização de subgradiente para resolver o problema dual e uma heurística lagrangiana para obter soluções factíveis para o problema original. O segundo método está baseado na decomposição de Dantzig-Wolfe para resolver a relaxação linear do problema original, seguido da solução do modelo inteiro do problema apenas com as colunas usadas na solução relaxada. Ambos os métodos podem ser inseridos em árvores de busca para encontrar a solução ótima do problema.

Experimentos computacionais utilizando instâncias do problema geradas aleatoriamente foram inicialmente realizados. Os resultados mostram certos inconvenientes do ponto de vista prático que tornam os métodos clássicos pouco eficientes para tratar problemas de grande porte. No caso da relaxação lagrangiana, a heurística lagrangiana estudada não é eficiente, encontrando soluções de boa qualidade apenas em problemas de pequeno e médio porte, mas os tempos computacionais requeridos para factibilizar uma solução em problemas maiores são excessivamente longos em cada iteração do subgradiente, o que torna o método ineficiente para resolver casos práticos do problema se comparado com softwares de otimização para resolver o modelo, como o CPLEX. No caso da decomposição de Dantzig-Wolfe, aparecem alguns problemas de convergência do método, que afetam sua eficiência para resolver problemas maiores. Da mesma forma que na relaxação lagrangiana, os tempos computacionais requeridos para problemas maiores são significativamente grandes se comparado com softwares de otimização para resolver o modelo, como o CPLEX.

Posteriormente, implementou-se um algoritmo de Caminho Máximo mais eficiente para resolver os subproblemas envolvidos em ambas as decomposições, lagrangiana e Dantzig-Wolfe. Além disso,

utilizou-se o algoritmo PDCGM (GONDZIO; GONZÁLEZ-BREVIS; MUNARI, 2016) para resolver o problema mestre na decomposição de Dantzig-Wolfe. No caso da relaxação lagrangiana junto com o algoritmo do caminho máximo, os tempos diminuem consideravelmente, porém este método ainda é inviável para tratar problemas de grande porte dado o requerimento computacional da heurística de factibilização. No segundo caso, o PDCGM junto com o algoritmo de Caminho Máximo foi utilizado para resolver a relaxação linear de instâncias realistas propostas no trabalho de Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014), Vasco e Morabito (2016). Os resultados indicam melhorias significativas tanto em termos do tempo computacional quanto na qualidade de soluções factíveis obtidas. A medida que se desagrega a frota de veículos, o que é comum na prática, o método fica mais competitivo com as melhores heurísticas da literatura para resolver o problema, e também com o CPLEX para resolver o modelo do problema.

Em função dos resultados obtidos, algumas pesquisas futuras a partir deste trabalho são:

1. Investigar outras heurísticas lagrangianas que permitam fazer a fase de factibilização de maneira mais eficiente em cada iteração do método de subgradiente. Isto poderia tornar o método mais viável para tratar problemas de maior porte em tempos computacionais razoáveis. Além disso, também avaliar melhores formas de atualizar os subgradientes para obter melhores limitantes duais.
2. Investigar outras relaxações e heurísticas lagrangianas do modelo para aplicar o método de subgradiente em instâncias de grande porte. Por exemplo, relaxar as restrições de fluxo tornando o subproblema num problema da mochila multidimensional.
3. Colocar o método PDCGM/Caminho-Máximo numa árvore de busca *Branch and Price* para obter soluções ótimas do problema inteiro.
4. Investigar outras maneiras de resolver a relaxação linear do problema em instâncias de grande porte, por exemplo, via métodos de pontos interiores (ao invés de método simplex), e aplicar heurísticas de factibilização, por exemplo, MIP-heurísticas.
5. Utilizar técnicas para tratar incerteza na demanda, como Otimização Robusta e Programação Estocástica.

Apêndices

Apêndice A

Gráficos do Caminho Máximo para o exemplo ilustrativo

Neste apêndice mostra-se graficamente todas as iterações do algoritmo do caminho máximo para o exemplo ilustrativo da Seção 3.2.5. A Tabela 3.2 mostra os custos dos arcos após a fase de processamento para esse tipo de veículo. O rótulo (distância) inicial do nó 4 é igual a 0 e o rótulo inicial dos outros nós é ∞ . A precedência de todos os nós inicialmente é vazia. Os círculos pontilhados representam os nós incumbentes em cada iteração (Linha 8), e os círculos hachurados que estão ligados aos círculos pontilhados representam os nós nos quais se atualizam os rótulos em cada iteração (Linha 9).

Arco	Custo	Arco	Custo	Arco	Custo	Arco	Custo
1-4	0	4-7	0	7-10	0	10-13	0
1-5	-1,254	4-8	5	7-11	-0,21	11-13	0
1-9	-0,369	4-12	3	7-12	3,5	12-13	0
2-4	1,5	5-7	5	8-10	-1,5		
2-5	0	5-8	0	8-11	0		
2-6	-0,569	5-9	4	8-12	-0,5		
3-7	4	6-10	2,5	9-10	3		
3-5	2,25	6-8	-0,365	9-11	1,15		
3-6	0	6-9	0	9-12	0		

Tabela A.1: Custos dos arcos do exemplo do caminho máximo

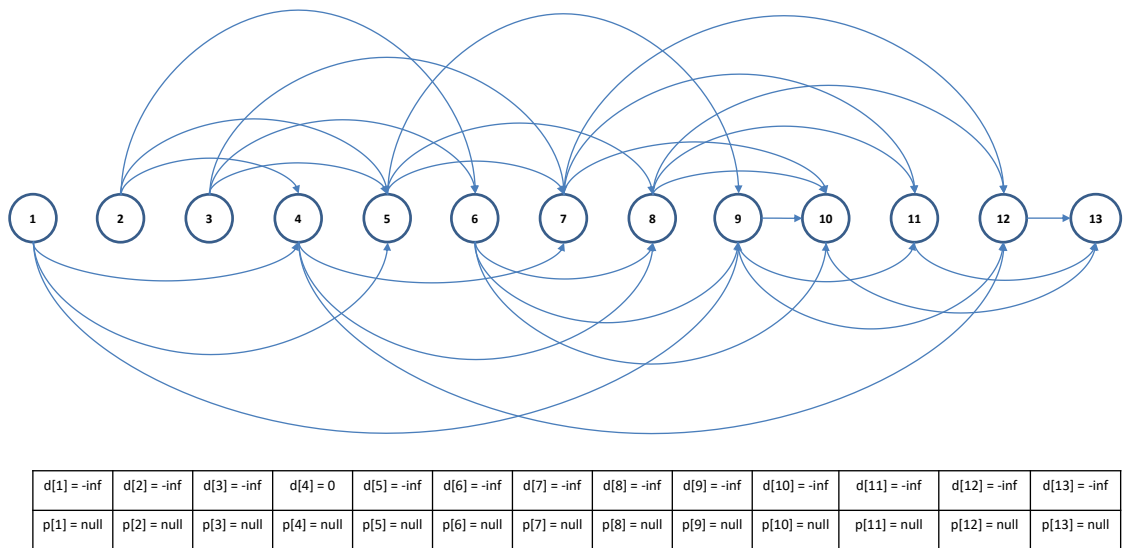


Figura A.1: Inicialização do Caminho Máximo

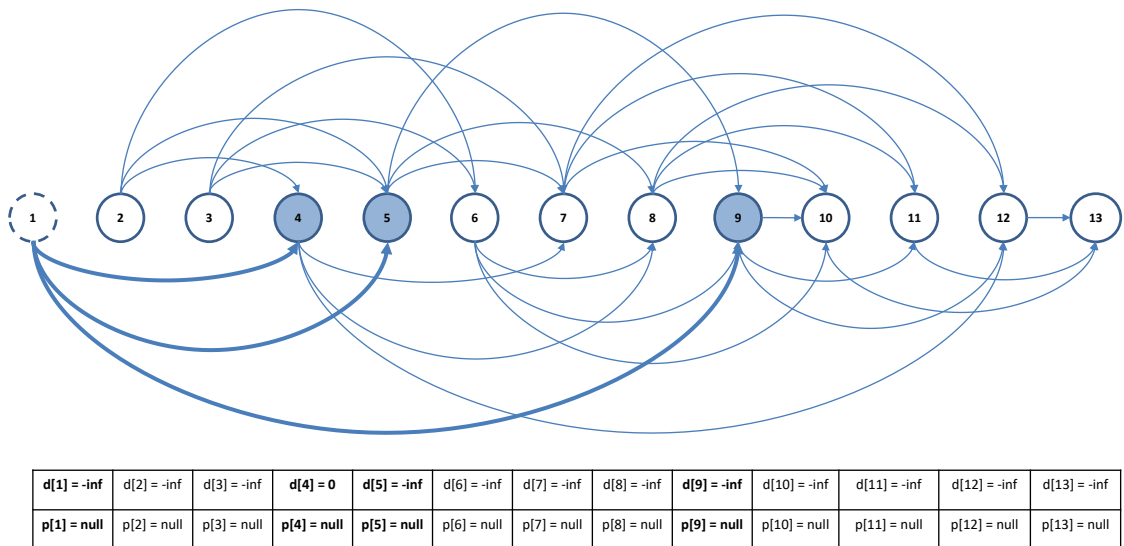


Figura A.2: Avaliação dos rótulos nó 1

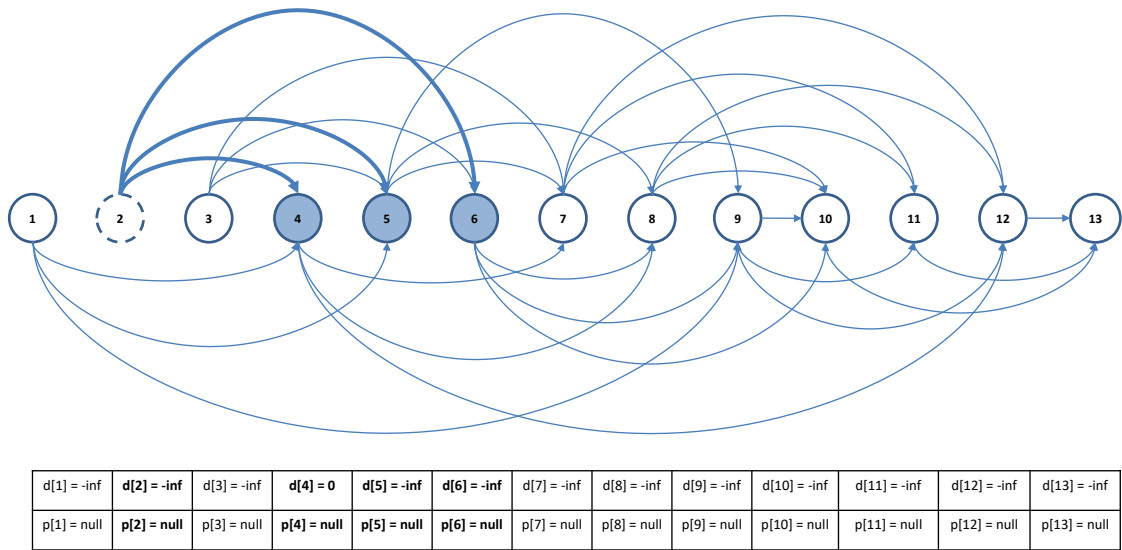


Figura A.3: Avaliação dos rótulos nó 2

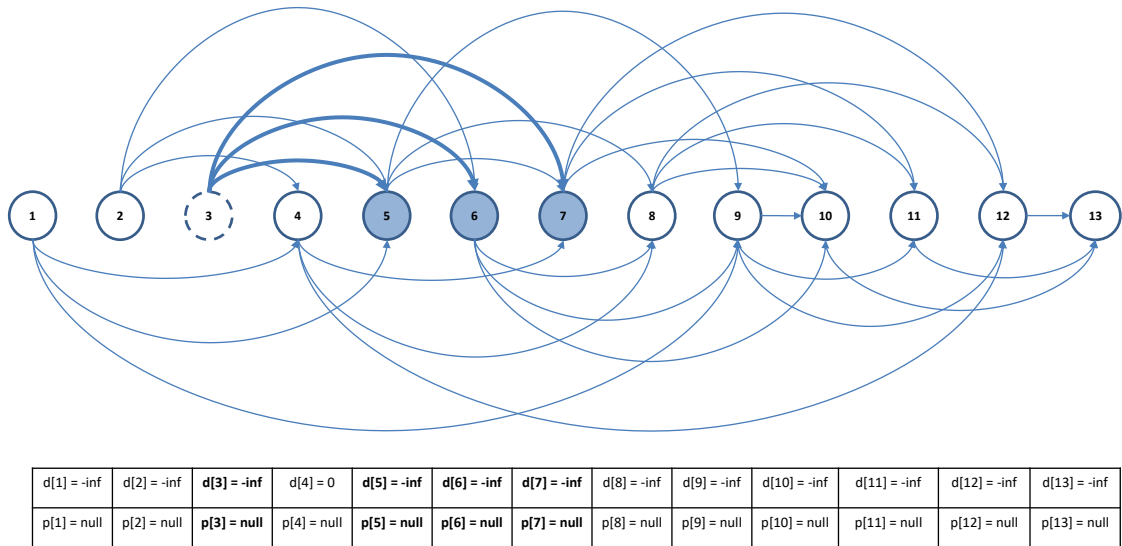


Figura A.4: Avaliação dos rótulos nó 3

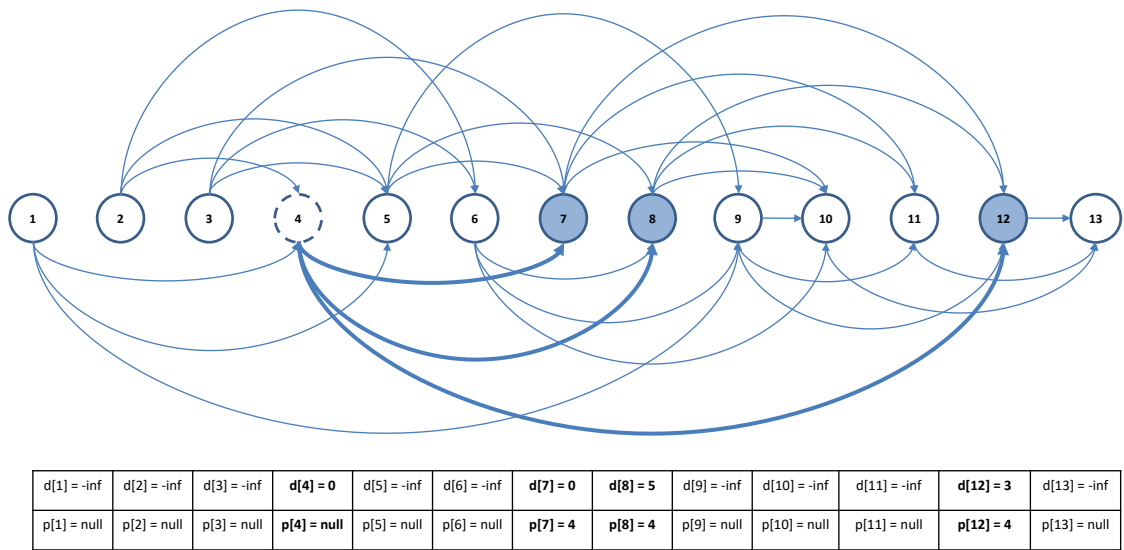


Figura A.5: Avaliação dos rótulos nó 4

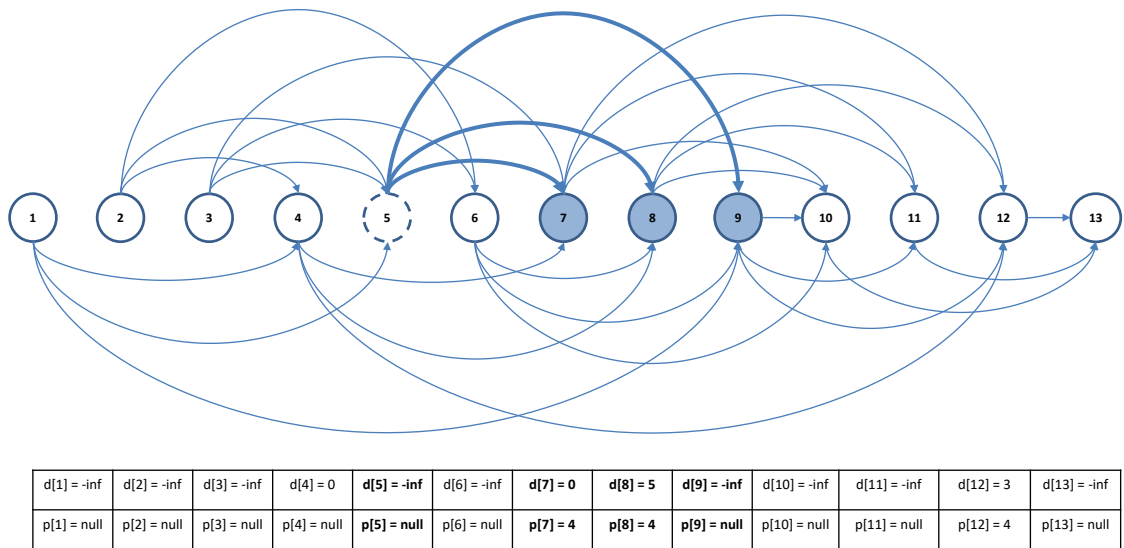


Figura A.6: Avaliação dos rótulos nó 5

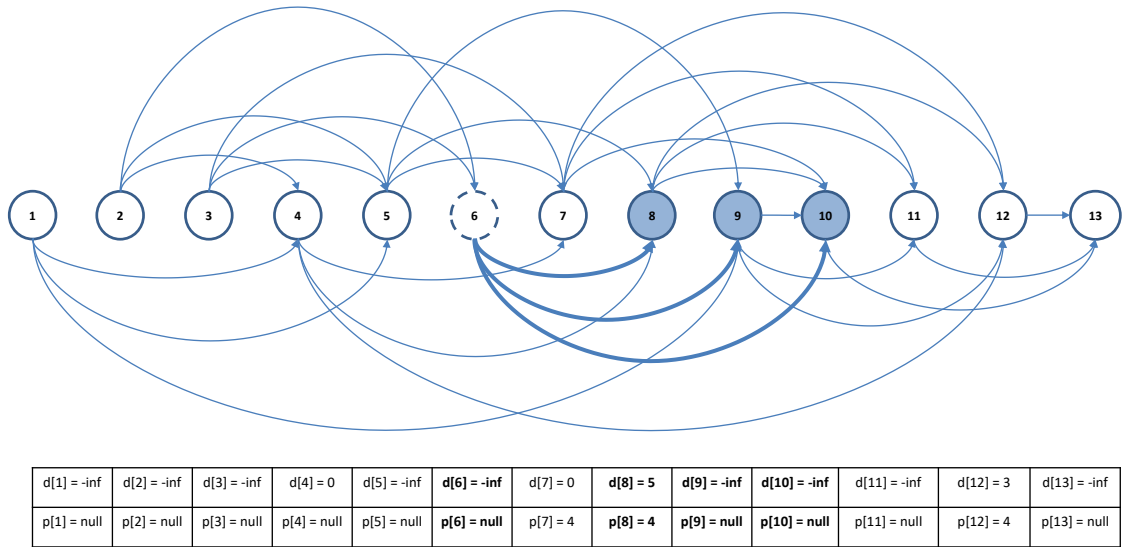


Figura A.7: Avaliação dos rótulos nó 6

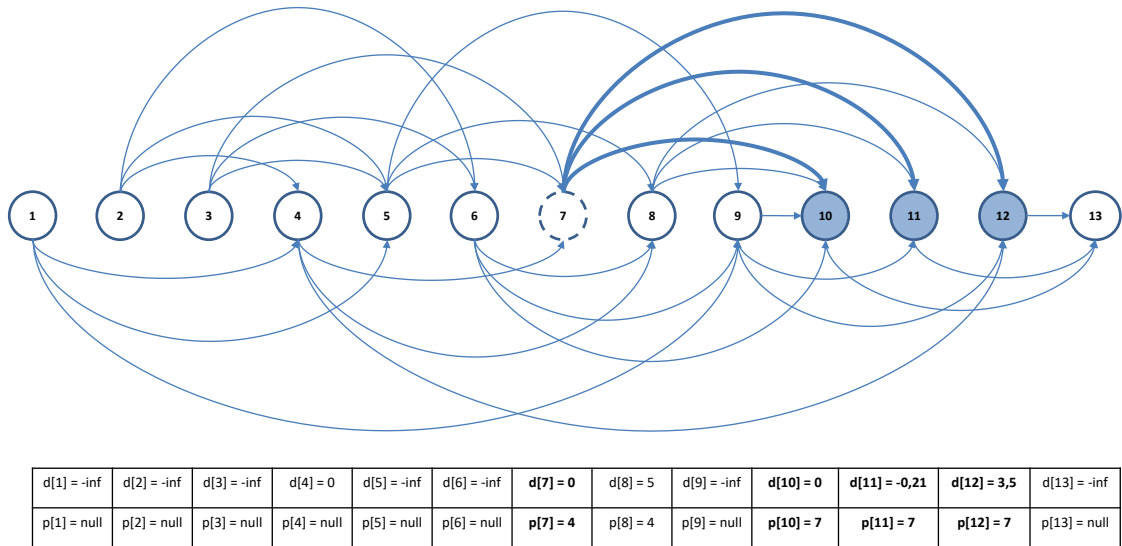
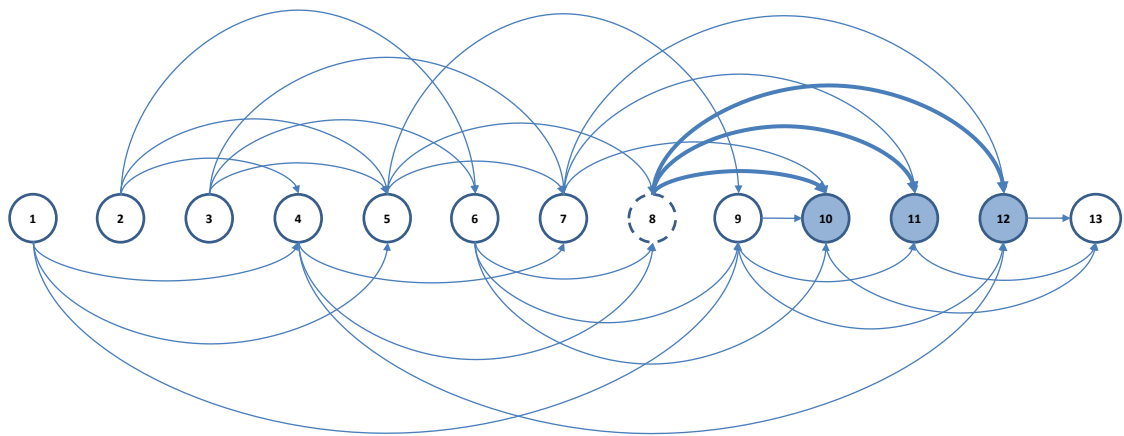
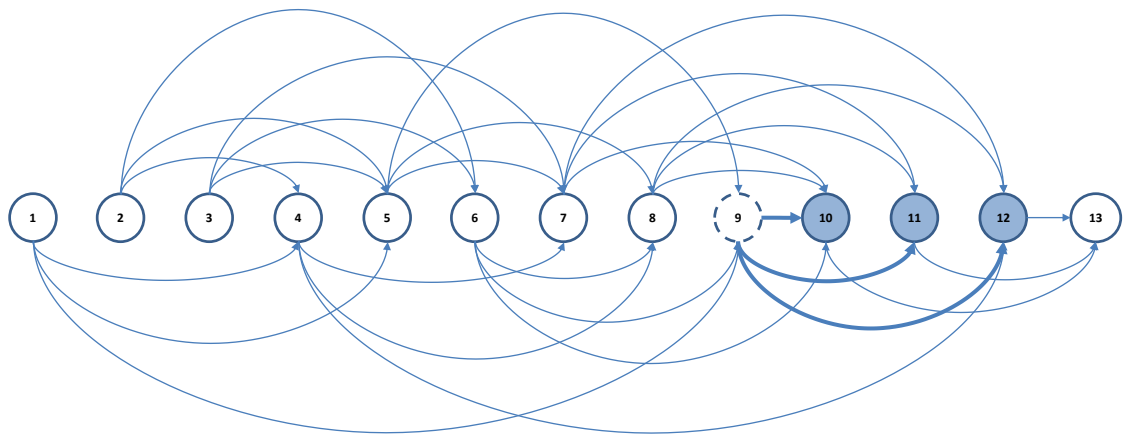


Figura A.8: Avaliação dos rótulos nó 7



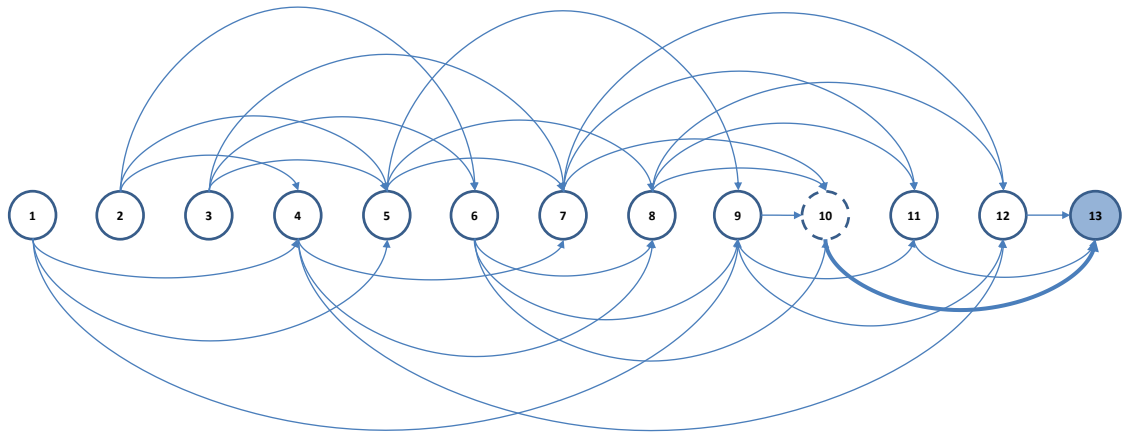
d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = -inf
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = null

Figura A.9: Avaliação dos rótulos nó 8



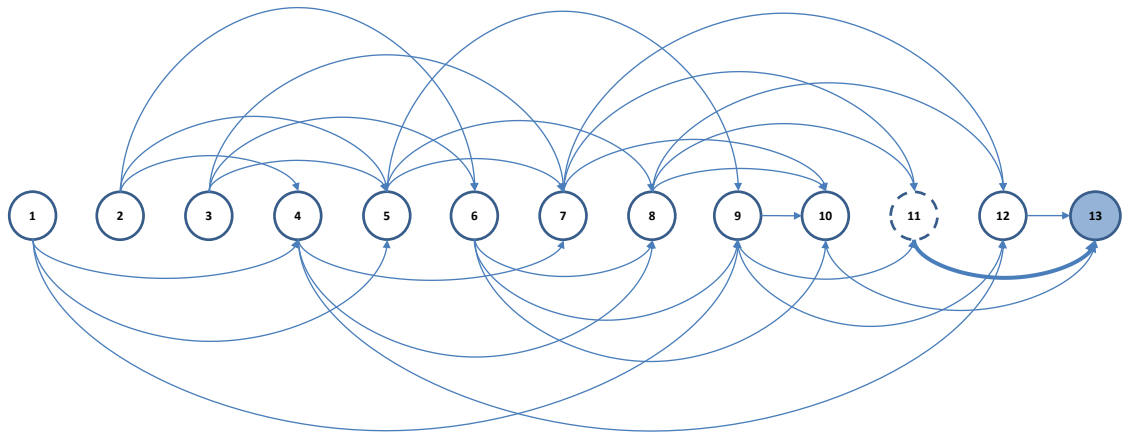
d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = -inf
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = null

Figura A.10: Avaliação dos rótulos nó 9



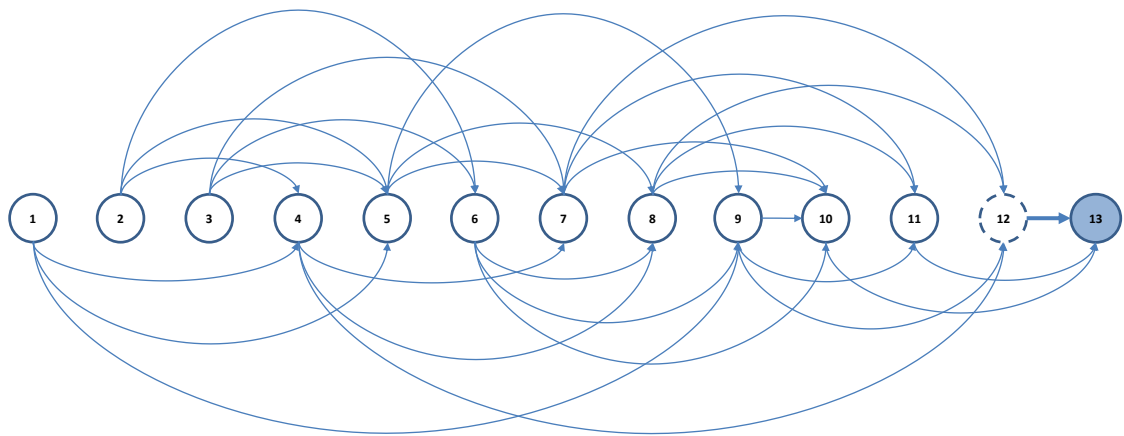
d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = 3,5
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = 10

Figura A.11: Avaliação dos rótulos nó 10



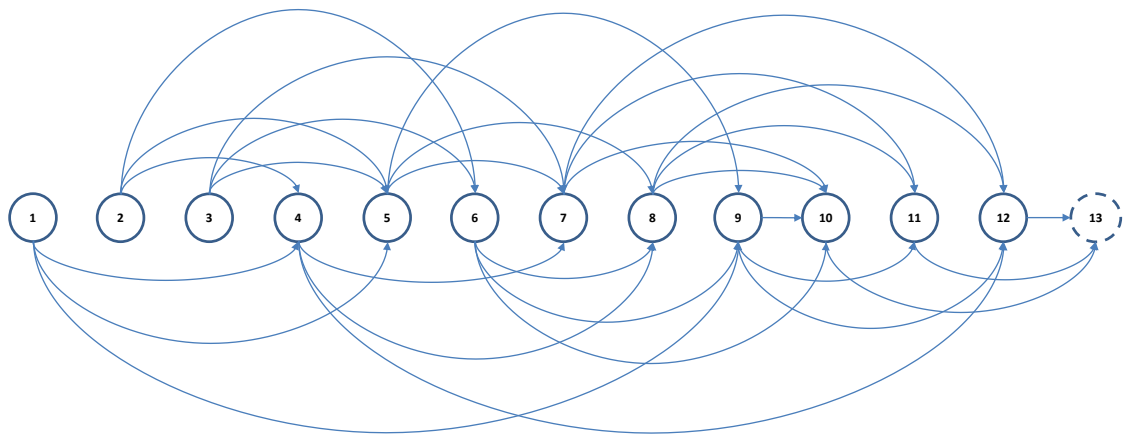
d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = 5
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = 11

Figura A.12: Avaliação dos rótulos nó 11



d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = 5
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = 11

Figura A.13: Avaliação dos rótulos nó 12



d[1] = -inf	d[2] = -inf	d[3] = -inf	d[4] = 0	d[5] = -inf	d[6] = -inf	d[7] = 0	d[8] = 5	d[9] = -inf	d[10] = 3,5	d[11] = 5	d[12] = 4,5	d[13] = 5
p[1] = null	p[2] = null	p[3] = null	p[4] = null	p[5] = null	p[6] = null	p[7] = 4	p[8] = 4	p[9] = null	p[10] = 8	p[11] = 8	p[12] = 8	p[13] = 11

Figura A.14: Avaliação dos rótulos nó 13

Apêndice B

Resultados obtidos com o PDCGM-Caminho Máximo para instâncias realistas

Os resultados obtidos na solução de 540 problemas de tamanho e complexidade similares ao encontrado na prática, são apresentados nas tabelas a seguir, sendo:

- Problema: nome da instância no formato “ $pxr-vy$ ”, onde x representa o número do problema, e y a quantidade de grupos;
- Sol. Ot.: Solução ótima obtida utilizando-se o CPLEX/C++.
- CPU IP (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para resolver o problema pelo CPLEX;
- Sol. Ot. LP: Solução ótima da Relaxação Linear obtida utilizando-se o CPLEX/C++.
- CPU LP (seg): Tempo de execução, em segundos, necessário para se obter a solução reportada da relaxação
- CPU PDCGM(seg): Tempo de execução, em segundos, da geração de colunas.
- L.B.: Limitante inferior obtido com a geração de colunas.
- U.B.: Limitante superior obtido com a geração de colunas.
- CPU Sub (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os subproblemas.
- CPU PMR (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver os problemas mestres restritos.

- No It: Número de iterações da geração de colunas.
- Sol. Heu: Solução obtida com a heurística MIP.
- CPU Heu (seg): Tempo de execução acumulado, em segundos, para resolver o PMR final com variáveis do PMR inteiras.
- GAP1 (%): Intervalo de otimalidade entre o limitante inferior e o limitante superior $((UB - LB)/LB)*100$.
- GAP2 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a solução MIP-heurística $((Sol. Ot - Sol. Heu)/Sol. Ot)*100$
- Me Sol Heu: Melhor Solução obtida com as heurísticas no trabalho de Vasco (2012), Vasco e Morabito (2014), Vasco e Morabito (2016)
- CPU MSH (seg): Tempo de execução, em segundos, da melhor solução heurística.
- GAP3 (%): Intervalo de otimalidade entre a solução ótima do problema e a melhor solução heurística $((Sol. Ot - Me Sol Heu)/Sol. Ot)*100$

Tabela B.1: PDCGM para instâncias do grupo VI

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCGM Sub (seg)	CPU Sub (seg)	CPU PMR	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v1	14558,4	1,67	14558,4	1,67	14558,40	14558,40	0%	3811,6	57,2	3754,34	509	0	0,83	100,0%	14.263,60	56,3	2,0%
p2r-v1	16994,4	1,36	16994,4	1,36	16994,40	16994,30	0%	3853,3	56,5	3796,86	513	0	0,85	100,0%	16.870,61	57,2	0,7%
p3r-v1	11675,8	1,15	11675,8	1,15	11675,90	11675,80	0%	2626,4	49,2	2577,14	436	0	0,77	100,0%	11.580,02	55,3	0,8%
p4r-v1	14012,8	1,39	14012,8	1,39	14012,80	14012,80	0%	2444,6	47,8	2396,71	419	0	0,85	100,0%	13.685,21	59,9	2,3%
p5r-v1	16548	1,16	16548	1,16	16548,00	16548,00	0%	3506,1	50,3	3455,78	458	0	0,84	100,0%	16.455,80	52,2	0,6%
p6r-v1	18842	1,55	18842	1,55	18842,00	18842,00	0%	3720,3	61,3	3659,03	549	0	0,85	100,0%	18.757,81	56,2	0,4%
p7r-v1	12766,6	0,75	12766,6	0,75	12766,60	12766,60	0%	1662,9	39,3	1623,64	354	0	0,83	100,0%	12.708,00	56,5	0,5%
p8r-v1	12675,2	0,98	12675,2	0,98	12675,20	12675,20	0%	4137,7	58,5	4079,2	529	0	0,79	100,0%	12.648,20	53,7	0,2%
p9r-v1	12964	0,86	12964	0,86	12964,00	12963,90	0%	3151,9	51,3	3100,58	476	0	0,78	100,0%	12.908,41	52,4	0,4%
p10r-v1	14177,2	1,04	14177,2	1,04	14177,30	14177,20	0%	1367,5	38,4	1329,08	339	0	0,82	100,0%	13.988,81	53,3	1,3%
p11r-v1	13721,6	1,06	13721,6	1,06	13721,60	13721,60	0%	2093,6	36,8	2056,86	332	0	0,87	100,0%	13.587,61	51,8	1,0%
p12r-v1	16866,4	1,22	16866,4	1,22	16866,40	16866,40	0%	5466,3	68,4	5397,89	634	0	0,80	100,0%	16.777,61	60,2	0,5%
p13r-v1	13421,8	1,18	13421,8	1,18	13421,90	13421,80	0%	3208,4	49,5	3158,89	436	0	0,81	100,0%	13.254,22	57,0	1,2%
p14r-v1	16327,6	1,31	16327,6	1,31	16327,60	16327,60	0%	2945,5	55,6	2889,79	510	0	0,59	100,0%	16.186,01	50,8	0,9%
p15r-v1	14431,6	0,95	14431,6	0,95	14431,60	14431,60	0%	1284,0	34,6	1249,36	337	0	0,68	100,0%	14.214,01	82,1	1,5%
p16r-v1	15097,2	1,30	15097,2	1,30	15097,20	15097,20	0%	4525,5	63,3	4462,25	610	0	0,60	100,0%	15.019,61	55,6	0,5%
p17r-v1	13126,6	1,03	13126,6	1,03	13126,60	13126,60	0%	893,5	30,0	863,477	286	0	0,60	100,0%	12.805,42	51,5	2,4%
p18r-v1	13957,2	1,10	13957,2	1,10	13957,20	13957,20	0%	2537,7	44,6	2493,08	430	0	0,59	100,0%	13.854,41	55,0	0,7%
p19r-v1	14088,6	1,29	14088,6	1,29	14088,60	14088,60	0%	1231,6	33,4	1198,18	329	0	0,64	100,0%	13.696,60	50,1	2,8%
p20r-v1	17898,4	1,16	17898,4	1,16	17898,40	17898,40	0%	2313,1	45,7	2267,32	446	0	0,59	100,0%	17.790,21	52,3	0,6%
p21r-v1	11287,8	1,19	11287,8	1,19	11287,80	11287,70	0%	1845,3	37,5	1807,78	368	0	0,64	100,0%	11.107,21	58,7	1,6%
p22r-v1	12848,6	0,82	12848,6	0,82	12848,60	12848,60	0%	3177,5	53,1	3124,32	494	0	0,63	100,0%	12.780,80	82,2	0,5%
p23r-v1	14503,4	1,05	14503,4	1,05	14503,40	14503,40	0%	3156,8	52,1	3104,61	487	0	0,63	100,0%	14.399,21	56,0	0,7%
p24r-v1	16031,8	1,13	16031,8	1,13	16031,80	16031,80	0%	2093,2	42,4	2050,71	395	0	0,57	100,0%	15.947,81	53,4	0,5%
p25r-v1	12462,2	1,48	12462,2	1,48	12462,20	12462,20	0%	3767,2	57,6	3709,61	553	0	0,60	100,0%	12.182,41	51,3	2,2%
p26r-v1	14928,6	1,13	14928,6	1,13	14928,60	14928,60	0%	1690,0	36,2	1653,74	344	0	0,57	100,0%	14.798,21	52,6	0,9%
p27r-v1	13930,2	1,31	13930,2	1,31	13930,20	13930,20	0%	1920,7	37,8	1854,92	367	0	0,58	100,0%	13.813,61	49,9	0,8%
p28r-v1	11527,8	0,98	11527,8	0,98	11527,80	11527,80	0%	1616,4	36,0	1580,38	349	0	0,56	100,0%	11.447,61	51,2	0,7%
p29r-v1	14161,4	1,06	14161,4	1,06	14161,40	14161,30	0%	1470,1	37,9	1432,1	363	0	0,63	100,0%	13.987,60	82,8	1,2%
p30r-v1	14005,6	1,28	14005,6	1,28	14005,60	14005,60	0%	1076,5	29,1	1047,44	276	0	0,60	100,0%	13.820,82	54,8	1,3%
Média		1,16		1,16			0%	2602,24	46,38	2555,84	431		0,70	100,0%		57,06	1,1%

Tabela B.2: PDGGM para instâncias do grupo V2

Problema	Sol. Or. LP		CPU		Sol. Or. IP		U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDGGM		CPU	PMR	Iter	Sol. Heu.	CPU	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU	GAP3 (%)
	LP	IP	(seg)	(seg)	(seg)	(seg)				Sub	(seg)									
p1r-v2	16784,6	8,84	16784,6	8,84	16784,70	16784,60	0%	1888,31	30,95	1857,34	265	7385,8	0,81	56,0%	16,376,80	61,2	2,4%			
p2r-v2	17179,4	5,02	17179,4	5,02	17179,40	17179,40	0%	1478,42	27,80	1450,61	240	7539,6	1,01	56,1%	16,935,21	59,7	1,4%			
p3r-v2	15383	4,30	15383	4,30	15383,00	15383,00	0%	1069,78	23,39	1046,38	199	0	0,83	100,0%	15,008,01	61,5	2,4%			
p4r-v2	15579,2	6,30	15579,2	6,30	15579,20	15579,10	0%	1222,90	28,15	1194,72	238	0	0,89	100,0%	15,102,21	63,2	3,1%			
p5r-v2	17161	5,33	17161	5,33	17161,00	17161,00	0%	1507,92	26,94	1480,96	234	0	0,77	100,0%	16,908,40	54,0	1,5%			
p6r-v2	18176,6	6,79	18176,6	6,79	18176,60	18176,60	0%	1286,25	28,33	1257,9	242	0	0,81	100,0%	18,100,61	59,6	0,4%			
p7r-v2	18094,6	4,47	18094,6	4,47	18094,60	18094,50	0%	2132,22	37,33	2094,88	316	7974,8	0,65	55,9%	18,028,82	59,5	0,4%			
p8r-v2	16486,6	3,36	16486,6	3,36	16486,60	16486,60	0%	2263,03	34,08	2228,91	296	0	0,81	100,0%	16,369,41	54,8	0,7%			
p9r-v2	11652,2	4,94	11652,2	4,94	11652,20	11652,20	0%	850,09	22,90	827,17	201	0	0,80	100,0%	11,563,62	53,8	0,8%			
p10r-v2	16580	3,90	16580	3,90	16580,00	16580,00	0%	413,22	14,71	398,501	126	0	0,69	100,0%	16,202,22	56,4	2,3%			
p11r-v2	15650,2	6,57	15650,2	6,57	15650,20	15650,20	0%	1067,23	23,74	1043,48	203	0	0,81	100,0%	15,354,01	56,1	1,9%			
p12r-v2	17610,4	6,76	17610,4	6,76	17610,40	17610,40	0%	1975,21	33,79	1941,41	293	0	0,77	100,0%	17,419,62	67,9	1,1%			
p13r-v2	17614	6,09	17614	6,09	17614,00	17613,90	0%	1481,65	27,54	1454,11	235	0	0,79	100,0%	17,350,02	60,4	1,5%			
p14r-v2	19224,8	5,19	19224,8	5,19	19224,80	19224,80	0%	1668,58	34,65	1633,91	297	0	0,82	100,0%	18,951,42	55,1	1,4%			
p15r-v2	20322	5,65	20322	5,65	20322,00	20321,90	0%	1761,92	30,86	1731,04	263	0	0,80	100,0%	19,993,43	72,1	1,6%			
p16r-v2	15629,3	6,06	15629,2	6,06	15629,40	15629,30	0%	1130,37	25,92	1104,43	224	0	0,82	100,0%	15,394,80	59,0	1,5%			
p17r-v2	16599,6	5,53	16599,6	5,53	16599,60	16599,60	0%	1069,20	25,42	1043,78	219	0	0,83	100,0%	15,947,82	54,4	3,9%			
p18r-v2	15785,8	3,52	15785,8	3,52	15785,80	15785,80	0%	1199,18	25,78	1173,39	225	7533	0,95	52,3%	15,456,80	60,5	2,1%			
p19r-v2	15884,6	5,47	15884,6	5,47	15884,60	15884,50	0%	417,40	16,16	401,23	140	0	0,80	100,0%	15,800,20	82,1	0,5%			
p20r-v2	18166,4	3,99	18166,4	3,99	18166,40	18166,40	0%	1092,10	26,48	1065,6	229	7846	0,94	56,8%	17,903,81	57,3	1,4%			
p21r-v2	14553,8	7,72	14553,8	7,72	14553,80	14553,80	0%	1056,01	23,30	1032,69	199	0	0,77	100,0%	14,243,40	82,1	2,1%			
p22r-v2	17623,9	5,12	17623,2	5,12	17623,90	17623,80	0%	1809,67	33,32	1776,34	282	0	0,61	100,0%	17,448,21	64,8	1,0%			
p23r-v2	19222,4	5,04	19222,4	5,04	19222,40	19222,40	0%	1585,08	28,59	1556,47	244	0	0,74	100,0%	18,966,01	57,8	1,3%			
p24r-v2	15134,8	6,38	15134,8	6,38	15134,80	15134,80	0%	872,01	21,90	850,09	186	0	0,77	100,0%	14,979,80	61,3	1,0%			
p25r-v2	15304,8	3,09	15304,8	3,09	15304,80	15304,70	0%	2332,55	34,33	2298,21	294	3853,4	1,02	74,8%	14,914,80	55,9	2,5%			
p26r-v2	19042	5,64	19042	5,64	19042,00	19042,00	0%	802,34	23,50	778,83	198	6625,6	0,98	65,2%	18,674,22	57,7	1,9%			
p27r-v2	16504	6,25	16504	6,25	16504,10	16504,00	0%	3235,83	42,16	3193,65	361	0	0,83	100,0%	16,256,01	51,6	1,5%			
p28r-v2	17249,2	5,63	17249,2	5,63	17249,20	17249,20	0%	1148,37	26,93	1121,43	234	0	0,76	100,0%	17,149,21	54,1	0,6%			
p29r-v2	17381,6	5,56	17381,6	5,56	17381,60	17381,60	0%	1108,96	24,21	1084,74	208	0	0,79	100,0%	17,142,41	56,7	1,4%			
p30r-v2	15325	5,99	15325	5,99	15325,00	15325,00	0%	1119,32	24,80	1094,51	214	6760,6	0,91	55,9%	15,076,01	61,4	1,6%			
Média		5,48		5,48			0%	1401,50	27,60	1373,89	237		0,82	89,1%		60,39	1,6%			

Tabela B.3: PDCGM para instâncias do grupo V3

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGM (seg)	CPU Sub (seg)	PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v3	16334,2	12,65	16333,6	12,65	16334,2	16334,1	0%	600,41	17,71	582,69	148	10108,6	5,47	38,1%	15.835,60	69,84	3,0%
p2r-v3	18240,4	12,27	18240,4	12,27	18240,4	18240,4	0%	625,75	18,06	607,68	150	5438,6	0,99	70,2%	17.824,20	62,27	2,3%
p3r-v3	16281,6	11,48	16281,6	11,48	16281,6	16281,5	0%	511,64	15,21	496,43	125	9102,4	3,59	44,1%	15.807,81	69,69	2,9%
p4r-v3	17046,4	14,60	17046,4	14,60	17046,4	17046,4	0%	1310,19	23,42	1286,75	193	4856,2	0,88	71,5%	16.731,41	66,17	1,8%
p5r-v3	17643,8	12,82	17643,8	12,82	17643,8	17643,8	0%	506,23	14,70	491,52	125	11304,2	1,49	35,9%	17.382,61	55,76	1,5%
p6r-v3	18134,8	16,41	18134,8	16,41	18134,8	18134,8	0%	720,70	20,51	700,17	168	0	0,77	100,0%	17.869,81	60,30	1,5%
p7r-v3	18630	13,85	18630	13,85	18630,1	18630	0%	1246,31	25,65	1220,65	212	6941	1,65	62,7%	18.467,02	61,31	0,9%
p8r-v3	17285	11,48	17283,6	11,48	17285,1	17285	0%	936,34	20,60	915,73	171	6235,8	0,71	63,9%	17.124,41	56,69	0,9%
p9r-v3	14316,8	11,68	14316,8	11,68	14316,8	14316,7	0%	822,59	18,42	804,16	153	8131,6	1,01	43,2%	14.179,21	83,98	1,0%
p10r-v3	17760,2	8,07	17760,2	8,07	17760,2	17760,1	0%	470,32	14,39	455,92	119	12175,4	5,79	31,4%	17.523,63	57,23	1,3%
p11r-v3	15964,4	15,63	15964,4	15,63	15964,4	15964,3	0%	662,09	16,28	645,80	136	9783,6	7,41	38,7%	15.649,42	55,79	2,0%
p12r-v3	20755,4	12,40	20755,4	12,40	20755,4	20755,4	0%	1254,15	25,05	1229,08	205	6261,6	0,97	69,8%	20.497,82	69,84	1,2%
p13r-v3	19133,4	14,53	19133	14,53	19133,4	19133,4	0%	514,19	17,32	496,86	144	11602,8	1,93	39,4%	18.744,22	63,90	2,0%
p14r-v3	18435,4	13,34	18435,4	13,34	18435,4	18435,4	0%	1133,60	21,43	1112,15	177	11454	0,96	37,9%	18.169,61	56,29	1,4%
p15r-v3	19724,4	13,05	19724,4	13,05	19724,4	19724,3	0%	917,82	19,89	897,92	165	12348,4	5,12	37,4%	19.392,61	70,90	1,7%
p16r-v3	16129,2	12,61	16129,2	12,61	16129,2	16129,2	0%	549,02	16,94	532,07	140	0	0,87	100,0%	15.813,80	61,83	2,0%
p17r-v3	15857,6	10,85	15857,6	10,85	15857,6	15857,5	0%	752,93	17,44	735,48	144	9411,4	1,22	40,7%	15.100,22	55,40	4,8%
p18r-v3	17193,7	12,10	17193	12,10	17193,7	17193,6	0%	563,18	17,61	545,56	144	6520,4	2,43	62,1%	16.907,61	66,61	1,7%
p19r-v3	17354,2	12,43	17354,2	12,43	17354,2	17354,2	0%	400,86	12,69	388,16	107	6053,8	3,13	65,1%	17.193,21	53,26	0,9%
p20r-v3	19978,4	13,25	19978,4	13,25	19978,4	19978,4	0%	552,94	18,31	534,62	151	6642,8	1,05	66,8%	19.504,42	59,96	2,4%
p21r-v3	15725,6	13,91	15725,6	13,91	15725,7	15725,6	0%	1157,50	21,56	1135,94	181	5328,4	0,80	66,1%	15.208,22	72,54	3,3%
p22r-v3	18339,5	11,68	18339	11,68	18339,5	18339,5	0%	945,61	22,96	922,63	190	4844,4	1,18	73,6%	18.089,80	66,90	1,4%
p23r-v3	19077,2	11,69	19077,2	11,69	19077,2	19077,2	0%	856,40	19,60	836,78	161	5997	1,18	68,6%	18.947,21	60,68	0,7%
p24r-v3	17084,8	18,38	17084,8	18,38	17084,8	17084,8	0%	379,89	12,99	366,90	107	12890,8	4,09	24,5%	16.730,21	67,47	2,1%
p25r-v3	16691,2	11,67	16691,2	11,67	16691,2	16691,1	0%	827,14	20,94	806,19	173	9149	2,55	45,2%	16.329,79	60,04	2,2%
p26r-v3	19502,4	11,89	19502,4	11,89	19502,6	19502,4	0%	830,79	18,49	812,29	154	8238,4	12,21	57,8%	19.262,42	58,11	1,2%
p27r-v3	18978,4	12,85	18978,4	12,85	18978,5	18978,4	0%	1075,55	23,06	1052,48	192	10942	1,85	42,3%	18.801,02	53,06	0,9%
p28r-v3	17280,6	12,60	17280,6	12,60	17280,6	17280,6	0%	959,66	19,86	939,79	166	5424,8	1,79	68,6%	17.098,60	82,48	1,1%
p29r-v3	17334,2	11,22	17334,2	11,22	17334,2	17334,1	0%	679,86	15,61	664,24	128	5472,6	1,28	68,4%	16.996,21	56,42	1,9%
p30r-v3	15168,2	12,46	15168,2	12,46	15168,2	15168,2	0%	771,64	18,84	752,79	156	9868,4	3,37	34,9%	14.852,42	59,78	2,1%
Média		12,79		12,79			0%	784,51	18,85	765,65	156		2,59	55,6%		63,15	1,8%

Tabela B.4: PDCGM para instâncias do grupo V4

Problema	Sol. Ot. IP	CPU IP		Sol. Ot. IP	CPU IP	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCGM		Her	Sol. Heu.	CPU Heu		GAP2 (%)	Me Sol Heu	MSH		GAP3 (%)
		(seg)	(seg)						(seg)	(seg)			(seg)	(seg)			(seg)	(seg)	
p1r-v4	16299	24,89	16298,8	24,89	16299	16298,9	0%	426,16	14,49	411,67	117	11992,2	8,45	26,4%	15,778,00	66,25	3,2%		
p2r-v4	18373,8	15,67	18373,8	15,67	18373,8	18373,7	0%	483,54	12,90	470,64	104	8656,4	17,68	52,9%	18,197,80	62,53	1,0%		
p3r-v4	15834,9	19,41	15834,4	19,41	15834,9	15834,9	0%	333,36	10,94	322,42	88	10896	36,37	31,2%	15,313,41	68,50	3,3%		
p4r-v4	18535,8	20,87	18535,8	20,87	18535,8	18535,8	0%	735,24	17,50	717,73	141	12915,8	2,47	30,3%	18,225,21	67,70	1,7%		
p5r-v4	17832,4	25,03	17832,4	25,03	17832,4	17832,3	0%	298,92	11,10	287,81	90	9352,2	9,29	47,6%	17,570,61	57,41	1,5%		
p6r-v4	18808,8	22,24	18808,8	22,24	18808,9	18808,8	0%	803,19	17,83	785,35	144	9284,4	3,53	50,6%	18,486,20	83,21	1,7%		
p7r-v4	18316	21,91	18315	21,91	18316	18316	0%	892,43	18,20	874,23	146	13810,2	16,50	24,6%	18,108,62	63,33	1,1%		
p8r-v4	16764	23,27	16764	23,27	16764,1	16764	0%	774,52	18,32	756,19	150	11907	10,77	29,0%	16,545,22	55,17	1,3%		
p9r-v4	14954,3	19,65	14953	19,65	14954,4	14954,2	0%	768,30	16,49	751,81	136	11729,8	25,08	21,6%	14,723,41	56,16	1,5%		
p10r-v4	18448,4	23,65	18448,4	23,65	18448,4	18448,4	0%	288,80	10,59	278,20	86	13805,8	59,02	25,2%	18,165,84	57,99	1,5%		
p11r-v4	16588	39,36	16588	39,36	16588	16587,9	0%	348,42	13,40	335,02	108	13248,8	48,34	20,1%	16,323,23	58,06	1,6%		
p12r-v4	21676,4	24,68	21675,8	24,68	21676,4	21676,4	0%	986,88	20,87	966,01	172	15883,8	6,81	26,7%	18,904,02	75,01	1,3%		
p13r-v4	19184,8	28,00	19184,8	28,00	19184,8	19184,8	0%	705,47	16,84	688,62	137	14061,2	7,67	27,8%	18,390,22	63,46	1,5%		
p14r-v4	18641,2	26,69	18641,2	26,69	18641,2	18641,2	0%	579,04	15,72	563,32	128	13452	28,44	27,8%	19,562,61	72,18	2,2%		
p15r-v4	20000	20,70	20000	20,70	20000	19999,8	0%	479,00	14,46	464,53	117	12948,6	38,06	35,3%	16,271,00	61,97	1,7%		
p16r-v4	16547,2	22,92	16547,2	22,92	16547,2	16547,2	0%	449,95	14,67	435,27	120	11487	11,06	30,6%	16,271,00	61,97	1,7%		
p17r-v4	16090,8	19,13	16090,8	19,13	16090,8	16090,7	0%	555,90	13,99	541,90	114	12246,4	14,32	23,9%	15,556,42	81,81	3,3%		
p18r-v4	16774,8	21,51	16774,8	21,51	16774,9	16774,8	0%	480,34	12,93	467,41	106	11108,4	9,45	33,8%	16,536,40	62,37	1,4%		
p19r-v4	17457,6	20,32	17457,6	20,32	17457,6	17457,6	0%	331,54	10,97	320,56	89	13184,2	9,43	24,5%	17,246,61	55,35	1,2%		
p20r-v4	19331,8	26,22	19331,8	26,22	19331,8	19331,8	0%	600,78	15,14	585,63	124	12092	6,94	37,5%	18,679,81	57,43	3,4%		
p21r-v4	16564,4	28,52	16564,4	28,52	16564,4	16564,3	0%	796,08	17,94	778,12	145	7726	6,95	53,4%	16,136,61	74,30	2,6%		
p22r-v4	17528	23,52	17525,2	23,52	17528	17527,9	0%	1057,91	20,41	1037,48	164	8362,6	3,66	52,3%	17,234,41	74,20	1,7%		
p23r-v4	20463,2	21,44	20463,2	21,44	20463,2	20463,2	0%	961,12	18,47	942,64	149	10710,2	14,30	47,7%	20,205,01	64,69	1,3%		
p24r-v4	17627	24,74	17627	24,74	17627	17626,9	0%	304,96	10,26	294,70	82	13789,8	51,22	21,8%	17,427,21	65,91	1,1%		
p25r-v4	16943,8	20,69	16943,8	20,69	16943,8	16943,8	0%	657,81	16,60	641,20	134	12310,2	30,69	27,3%	16,526,00	59,30	2,5%		
p26r-v4	19383	21,04	19383	21,04	19383	19383	0%	649,68	12,28	633,71	99	14166	15,72	26,9%	19,144,22	61,19	1,2%		
p27r-v4	19496,8	23,81	19496,8	23,81	19496,8	19496,8	0%	660,68	17,16	632,51	139	14005	21,01	28,2%	19,243,03	52,75	1,3%		
p28r-v4	17419	27,77	17419	27,77	17419,1	17419	0%	360,92	12,50	348,41	103	10107,8	13,21	42,0%	17,239,61	57,79	1,0%		
p29r-v4	17895,2	20,32	17895,2	20,32	17895,3	17895,2	0%	512,45	13,76	498,68	111	9312,8	9,44	48,0%	17,486,01	55,53	2,3%		
p30r-v4	15743,2	21,76	15743,2	21,76	15743,2	15743,2	0%	448,08	12,31	435,77	101	11863,6	9,80	24,6%	15,410,61	81,03	2,1%		
Média		23,33		23,33			0%	581,23	14,97	566,25	121		18,19	33,3%		64,34	1,8%		

Tabela B.5: PDCGM para instâncias do grupo V5

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCGM (seg)	CPU Sub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v5	16530,6	44,33	16530,6	44,33	16530,7	16530,6	0%	539,76	13,68	526,07	107	13764,6	48,32	16,7%	15.944,40	66,74	3,5%
p2r-v5	18248,8	26,20	18248,8	26,20	18248,8	18248,8	0%	394,57	11,34	383,22	89	12282,8	17,50	32,7%	17.940,60	62,42	1,7%
p3r-v5	16194,4	30,91	16194,7	30,91	16194,7	16194,7	0%	325,68	10,16	315,51	79	12247,4	61,25	24,4%	15.649,01	71,54	3,4%
p4r-v5	19082	51,07	19082	51,07	19082	19082	0%	649,77	16,26	633,50	127	15305,2	57,69	19,8%	18.721,22	66,68	1,9%
p5r-v5	17608	34,00	17608	34,00	17608	17608	0%	297,27	10,52	286,74	84	14429,2	58,31	18,1%	17.267,41	56,16	1,9%
p6r-v5	19514	35,33	19514	35,33	19514	19514	0%	605,97	15,28	590,69	121	14790,8	85,77	24,2%	19.305,00	60,25	1,1%
p7r-v5	18573,2	43,74	18573,7	43,74	18573,7	18573,6	0%	411,34	13,89	397,44	110	14163	61,89	23,7%	18.462,82	63,31	0,6%
p8r-v5	17793	40,21	17793	40,21	17793,1	17793	0%	566,06	14,71	551,35	116	11846,8	51,80	33,4%	17.606,61	58,84	1,0%
p9r-v5	14941,2	41,38	14941,2	41,38	14941,3	14941,2	0%	451,16	12,39	438,76	97	11716,6	50,66	21,6%	14.795,01	59,07	1,0%
p10r-v5	18313	35,96	18313,8	35,96	18313,8	18313,8	0%	182,20	8,18	174,01	65	13934	29,03	23,9%	17.876,43	58,15	2,4%
p11r-v5	15807	49,63	15807	49,63	15807	15806,9	0%	239,19	10,00	229,19	79	12463,4	61,74	21,2%	15.548,42	57,77	1,6%
p12r-v5	21666,2	46,43	21666,2	46,43	21666,2	21666,1	0%	868,42	18,08	850,33	143	16253,2	16,93	25,0%	21.336,79	69,85	1,5%
p13r-v5	19397,6	39,44	19397,6	39,44	19397,6	19397,6	0%	579,45	14,35	565,09	113	14845,6	81,49	23,5%	19.164,61	65,09	1,2%
p14r-v5	18842	39,58	18842	39,58	18842	18842	0%	485,88	14,70	471,18	116	15377	68,92	18,4%	18.698,82	56,98	0,8%
p15r-v5	20398,6	39,60	20398,6	39,60	20398,6	20398,6	0%	611,69	14,78	596,90	115	16451	50,94	19,4%	20.291,42	67,83	0,5%
p16r-v5	17208,8	39,96	17208,8	39,96	17208,9	17208,8	0%	602,30	14,61	587,69	113	12798,4	35,53	25,6%	16.933,81	63,05	1,6%
p17r-v5	16391,2	36,45	16392,1	36,45	16392,1	16392	0%	320,38	11,06	309,31	86	13330,4	135,56	18,7%	15.883,42	54,68	3,1%
p18r-v5	17461	31,45	17461	31,45	17461	17461	0%	293,71	10,57	283,13	84	13535,4	66,01	22,5%	17.144,21	67,08	1,8%
p19r-v5	17706	41,23	17706	41,23	17706	17705,9	0%	222,95	8,92	214,03	68	14730,6	54,28	16,8%	17.502,41	53,85	1,1%
p20r-v5	19982	45,11	19982	45,11	19982	19981,8	0%	386,87	12,85	374,01	102	14380,6	19,78	28,0%	19.400,02	59,45	2,9%
p21r-v5	16578,2	46,51	16578,2	46,51	16578,2	16578,2	0%	1037,22	16,98	1020,24	133	10538,2	97,30	36,4%	16.177,01	74,30	2,4%
p22r-v5	18240,4	42,90	18240,7	42,90	18240,7	18240,7	0%	686,59	16,37	670,21	128	11660	47,86	36,1%	18.013,62	70,84	1,2%
p23r-v5	20363,8	32,24	20363,8	32,24	20363,8	20363,8	0%	422,46	13,03	409,43	101	15964,4	48,77	21,6%	19.936,62	63,17	2,1%
p24r-v5	17359,6	38,18	17359,6	38,18	17359,6	17359,6	0%	266,92	9,15	257,75	71	15856,8	57,78	8,7%	17.176,41	67,44	1,1%
p25r-v5	16493,6	34,89	16493,6	34,89	16493,6	16493,6	0%	340,39	11,12	329,27	87	12705,4	53,43	23,0%	16.154,19	60,39	2,1%
p26r-v5	18742,8	41,05	18742,8	41,05	18742,8	18742,8	0%	231,73	9,12	226,60	70	15110,6	74,45	19,4%	18.508,03	58,95	1,3%
p27r-v5	19351,8	38,60	19351,8	38,60	19351,9	19351,8	0%	530,74	13,95	516,79	111	15513	93,13	20,8%	19.199,62	53,30	0,8%
p28r-v5	17656,6	39,55	17656,6	39,55	17656,6	17656,6	0%	374,41	12,02	362,38	94	13959,4	14,30	20,9%	17.520,21	56,65	0,8%
p29r-v5	18087,4	30,94	18087,4	30,94	18087,4	18087,4	0%	382,55	12,36	370,18	89	14169,6	67,21	21,7%	17.751,22	56,90	1,9%
p30r-v5	15899,8	34,82	15899,8	34,82	15899,8	15899,7	0%	297,59	10,78	286,80	85	12710,8	59,87	20,1%	15.637,22	58,41	1,7%
Média		39,06		39,06			0%	453,51	12,71	440,79	99		57,58	22,8%		61,97	1,7%

Tabela B6: PDCCGM para instâncias do grupo V6

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)		Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)		U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCCGMSub (seg)			Her	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)		GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
		LP	(seg)		IP	(seg)				CPU	PMR	CPU			Heu	(seg)				
p1r-v6	17112	55,80	17112	55,80	17112	17112	0%	343,06	10,36	332,69	80	14528,4	140,62	15,1%	16,566,80	69,57	3,2%			
p2r-v6	18734,2	45,50	18734,2	45,50	18734,2	18734,2	0%	373,05	10,74	362,30	84	15875,2	52,81	15,3%	18,387,41	63,03	1,9%			
p3r-v6	15805,4	47,41	15805,4	47,41	15805,3	15805,3	0%	196,22	8,06	188,16	61	14996,8	106,31	5,1%	15,187,21	65,64	3,9%			
p4r-v6	18970	60,94	18970	60,94	18970	18970	0%	622,30	15,29	607,00	118	13774,2	11,97	27,4%	18,683,82	71,97	1,5%			
p5r-v6	18103,8	47,81	18103,8	47,81	18103,8	18103,6	0%	283,81	9,43	274,37	73	15237,4	209,94	15,8%	17,790,61	58,41	1,7%			
p6r-v6	18771,5	60,95	18771,4	60,95	18771,5	18771,5	0%	372,63	11,99	360,64	93	12197,6	74,84	35,0%	18,453,82	63,60	1,4%			
p7r-v6	18963,6	54,44	18963,6	54,44	18963,6	18963,5	0%	532,09	14,55	517,54	111	16363,4	148,90	13,7%	18,700,41	82,53	1,4%			
p8r-v6	17474,2	53,04	17474,2	53,04	17474,2	17474,2	0%	424,72	12,18	412,54	94	12478	49,10	28,6%	17,241,61	58,24	1,3%			
p9r-v6	14492,2	52,35	14492,2	52,35	14492,3	14492,1	0%	483,36	11,79	471,57	92	13564	97,04	6,4%	14,157,41	56,41	2,3%			
p10r-v6	17964,3	41,27	17963,6	41,27	17964,3	17964,3	0%	185,46	7,76	177,69	60	16819,4	115,98	6,4%	17,466,24	58,75	2,8%			
p11r-v6	16566,6	69,24	16566,6	69,24	16566,6	16566,6	0%	311,02	10,00	301,02	76	14333,6	374,43	13,4%	16,293,63	62,10	1,6%			
p12r-v6	21572,8	61,89	21572,6	61,89	21572,8	21572,8	0%	535,43	14,24	521,18	107	17496,2	56,37	18,9%	21,247,62	75,15	1,5%			
p13r-v6	18940,2	60,37	18940,2	60,37	18940,2	18940	0%	445,00	12,48	432,50	97	15338,8	47,58	19,0%	18,665,83	62,45	1,4%			
p14r-v6	18951,8	57,77	18951,8	57,77	18951,8	18951,8	0%	325,99	10,44	315,55	80	17919,4	93,78	5,4%	18,632,82	58,61	1,7%			
p15r-v6	20126,4	51,61	20126,4	51,61	20126,5	20126,3	0%	277,95	10,86	267,09	82	16476,8	114,54	18,1%	19,734,62	77,65	1,9%			
p16r-v6	17147,1	46,57	17147	46,57	17147,1	17147	0%	387,18	11,24	375,93	87	14682,2	94,04	14,4%	16,911,21	64,44	1,4%			
p17r-v6	16173,8	57,91	16173,8	57,91	16173,8	16173,8	0%	302,72	10,53	292,19	79	15186,8	98,70	6,1%	15,524,62	57,54	4,0%			
p18r-v6	17375,2	50,58	17375,2	50,58	17375,3	17375,2	0%	470,38	11,22	459,15	87	14670	93,60	15,6%	16,972,01	68,77	2,3%			
p19r-v6	17771,4	53,05	17771,4	53,05	17771,4	17771,4	0%	140,27	6,77	133,49	52	14985,8	205,33	15,7%	17,535,01	56,75	1,3%			
p20r-v6	19878	52,25	19878	52,25	19878	19878	0%	295,27	11,01	284,25	85	16998,8	114,62	14,5%	19,508,21	58,81	1,9%			
p21r-v6	15979,2	62,01	15979,2	62,01	15979,2	15979,2	0%	442,55	10,89	431,65	83	11142,4	63,88	30,3%	15,568,61	78,45	2,6%			
p22r-v6	18603	58,24	18603	58,24	18603	18603	0%	571,69	14,10	557,59	118	15309,2	34,46	17,7%	18,406,20	70,55	1,1%			
p23r-v6	21005,8	49,13	21005,8	49,13	21005,8	21005,8	0%	355,01	10,71	344,30	90	17164,4	78,12	18,3%	20,705,20	62,93	1,4%			
p24r-v6	17436,4	54,60	17436,4	54,60	17436,4	17436,4	0%	139,85	6,63	133,22	56	14724,4	55,72	15,6%	17,117,01	63,41	1,8%			
p25r-v6	16966,6	56,30	16966,6	56,30	16966,6	16966,6	0%	247,49	9,09	238,39	76	14955,6	116,19	14,0%	16,464,40	61,60	3,0%			
p26r-v6	19733,8	56,26	19733,8	56,26	19733,8	19733,8	0%	300,84	9,36	297,48	79	16680,4	172,38	14,1%	18,969,02	60,03	1,3%			
p27r-v6	19221,6	51,29	19221,6	51,29	19221,6	19221,6	0%	300,95	9,79	291,16	83	16740,4	99,01	12,9%	19,480,22	54,63	1,3%			
p28r-v6	17712,6	48,84	17712,6	48,84	17712,6	17712,6	0%	323,60	9,86	313,74	84	14550	54,16	17,9%	17,464,40	83,41	1,4%			
p29r-v6	18358,2	41,26	18358,2	41,26	18358,2	18358,2	0%	245,81	9,70	236,11	82	15518,2	180,94	15,5%	18,039,41	56,87	1,6%			
p30r-v6	15891,2	45,94	15891,2	45,94	15891,2	15891,2	0%	245,00	8,62	236,38	73	13652,4	47,79	14,1%	15,554,82	59,49	2,1%			
Média		53,49		53,49			0%	348,22	10,65	337,56	84		106,77	16,0%		64,73	1,9%			

Tabela B.7: PDCGM para instâncias do grupo V7

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v7	16792,4	70,25	16792,4	70,25	16792,5	16792,4	0%	213,78	8,50	205,27	69	16119,8	84,52	16.542,40	68,16	1,5%
p2r-v7	18666,2	65,73	18666,2	65,73	18666,2	18666,1	0%	252,70	8,61	244,08	70	15956,8	110,55	18.297,41	61,74	2,0%
p3r-v7	15939,8	63,06	15939,8	63,06	15939,8	15939,8	0%	186,03	7,76	178,26	63	14147	258,51	15.340,81	68,35	3,8%
p4r-v7	19262,6	75,19	19262,6	75,19	19262,6	19262,6	0%	326,60	10,66	315,93	87	16097	77,08	18.958,62	70,76	1,6%
p5r-v7	18254	72,25	18254	72,25	18254	18254	0%	181,38	8,48	172,91	70	16995,2	201,61	17.853,42	58,10	2,2%
p6r-v7	19218,2	70,05	19218,2	70,05	19218,2	19218,1	0%	315,62	10,45	305,16	86	16961	105,98	19.075,19	65,49	0,7%
p7r-v7	18953,6	69,61	18953,6	69,61	18953,6	18953,5	0%	310,54	10,77	299,77	90	15743	193,98	18.747,43	62,53	1,1%
p8r-v7	17940,2	76,22	17940,2	76,22	17940,3	17940,2	0%	340,20	10,17	330,03	84	14000	82,60	17.704,20	81,74	1,3%
p9r-v7	15228,4	65,26	15228,4	65,26	15228,4	15228,3	0%	358,50	10,52	347,97	87	14640,2	201,57	15.023,42	57,39	1,3%
p10r-v7	17864,2	74,19	17864,2	74,19	17864,2	17864,2	0%	109,41	5,86	103,54	48	17167,6	162,65	17.536,63	57,97	1,8%
p11r-v7	16390,8	76,61	16390,8	76,61	16390,8	16390,8	0%	224,02	8,88	215,14	72	15246,8	247,68	16.082,42	58,55	1,9%
p12r-v7	21408,9	76,30	21407,6	76,30	21409	21408,9	0%	434,31	11,85	422,46	99	18134,8	235,13	21.123,21	71,99	1,3%
p13r-v7	19217	95,74	19217	95,74	19217	19216,8	0%	275,05	9,33	265,71	78	18387,6	138,44	18.871,82	66,08	1,8%
p14r-v7	19093,5	63,49	19091	63,49	19093,5	19093,5	0%	292,04	9,42	282,61	78	17806,4	111,63	18.809,62	57,39	1,5%
p15r-v7	19673,2	76,00	19673,2	76,00	19673,2	19673,2	0%	199,93	8,31	191,61	68	16598	171,75	19.386,03	74,63	1,5%
p16r-v7	17728,8	70,13	17728,4	70,13	17728,8	17728,8	0%	261,59	9,59	252,00	79	15182,8	159,67	17.466,62	63,12	1,5%
p17r-v7	16782,8	73,71	16782,8	73,71	16782,8	16782,8	0%	199,08	7,83	191,25	65	14517	260,18	16.388,82	57,85	2,3%
p18r-v7	17405,4	56,22	17403,4	56,22	17405,4	17405,4	0%	218,51	8,14	210,36	68	14408,4	201,23	17.078,00	83,73	1,9%
p19r-v7	17377,6	67,13	17377,6	67,13	17377,6	17377,5	0%	147,93	6,09	141,83	51	15639,2	259,42	17.034,81	57,50	2,0%
p20r-v7	19235,3	71,98	19235,2	71,98	19235,4	19235,2	0%	388,95	9,77	379,18	81	16411,2	103,57	18.924,61	57,13	1,6%
p21r-v7	16766,6	80,82	16766,6	80,82	16766,6	16766,6	0%	347,86	10,10	337,74	83	13651,2	172,86	16.443,01	84,40	1,9%
p22r-v7	18405,6	71,58	18405,2	71,58	18405,6	18405,6	0%	414,39	11,70	402,68	96	15309,8	158,09	18.255,01	68,28	0,8%
p23r-v7	21313,6	63,08	21313,6	63,08	21313,6	21313,5	0%	279,46	10,16	269,29	84	18835,4	214,66	20.968,40	64,44	1,6%
p24r-v7	17633,8	67,20	17633,8	67,20	17633,8	17633,8	0%	135,41	6,27	129,13	52	16361,6	240,56	17.374,01	67,33	1,5%
p25r-v7	16402,1	75,53	16400,6	75,53	16402,1	16402,1	0%	258,26	8,88	249,36	74	14706,2	165,92	15.890,59	63,89	3,1%
p26r-v7	19645,6	72,22	19645,4	72,22	19645,7	19645,6	0%	168,51	7,10	161,40	59	17687,2	247,21	19.244,82	59,97	2,0%
p27r-v7	19412,6	72,13	19412,6	72,13	19412,7	19412,5	0%	200,15	7,88	192,26	66	18223,2	154,19	19.166,21	52,88	1,3%
p28r-v7	17938,6	64,49	17938,6	64,49	17938,7	17938,6	0%	205,37	8,30	197,06	69	15898,6	253,96	17.729,21	56,21	1,2%
p29r-v7	18696,2	70,04	18696,2	70,04	18696,2	18696,2	0%	200,59	8,20	192,38	68	17279,4	235,25	18.359,21	57,05	1,8%
p30r-v7	16204,6	69,54	16204,6	69,54	16204,6	16204,5	0%	217,03	7,46	209,56	62	14378,6	156,50	15.859,02	60,17	2,1%
Média		71,19		71,19			0%	255,44	8,90	246,53	74	178,90			64,49	1,7%

Tabela B.8: PDCCGM para instâncias do grupo V8

Problema	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCCGM (seg)	CPU Sub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v8	16602,8	83,36	16602,8	83,36	16602,8	16602,8	0%	308,31	8,61	299,70	69	16236,4	149,54	2,2%	16,108,40	64,11	3,0%
p2r-v8	18634,7	77,85	18630,8	77,85	18634,7	18634,7	0%	216,55	8,62	207,92	69	17216,4	819,64	7,6%	18,415,01	61,91	1,2%
p3r-v8	16145,5	75,08	16144,2	75,08	16145,5	16145,5	0%	109,54	5,35	104,19	43	14669	151,72	9,1%	15,605,41	71,50	3,3%
p4r-v8	19158,8	96,33	19158,8	96,33	19158,8	19158,8	0%	344,04	10,13	333,91	81	18359	295,16	4,2%	18,855,01	73,20	1,6%
p5r-v8	17211,7	78,73	17210,4	78,73	17211,7	17211,7	0%	121,82	5,87	115,95	47	15787,2	178,33	8,3%	16,789,41	57,44	2,4%
p6r-v8	19316,8	77,19	19316,8	77,19	19316,8	19316,6	0%	233,37	9,58	223,79	77	17321,6	331,40	10,3%	19,100,61	62,88	1,1%
p7r-v8	18657,4	93,25	18657,4	93,25	18657,4	18657,4	0%	203,76	9,06	194,70	72	16965	913,48	9,1%	18,278,22	62,65	2,0%
p8r-v8	17930,2	84,16	17930,2	84,16	17931	17929,7	0%	27039,50	241,33	26798,00	2000	16701,8	248,94	6,9%	17,709,62	59,13	1,2%
p9r-v8	15005,8	86,49	15005,8	86,49	15005,8	15005,8	0%	199,23	8,25	190,98	68	14280	200,27	4,8%	14,866,61	56,39	0,9%
p10r-v8	18381	80,12	18381	80,12	18381	18381	0%	83,89	5,35	78,55	43	17812,2	288,99	3,1%	17,908,42	58,00	2,6%
p11r-v8	16733,4	104,60	16733,4	104,60	16733,4	16733,3	0%	150,35	7,32	143,03	59	16071,4	1596,29	4,0%	16,482,62	60,29	1,5%
p12r-v8	21913,2	88,59	21913,2	88,59	21913,3	21913,1	0%	347,68	10,76	336,92	88	19556,8	275,57	10,8%	21,604,81	72,55	1,4%
p13r-v8	19007	88,89	19007	88,89	19007	19007	0%	306,73	9,50	297,22	77	16809,4	396,73	11,6%	18,642,82	63,44	1,9%
p14r-v8	18985,2	83,88	18985,2	83,88	18985,3	18985,2	0%	201,89	8,59	193,29	69	18894,4	137,97	0,5%	18,713,22	58,74	1,4%
p15r-v8	20439	84,73	20439	84,73	20439	20439	0%	222,83	8,56	214,26	69	18506,2	173,54	9,5%	20,044,42	70,22	1,9%
p16r-v8	17393,2	84,84	17393,2	84,84	17393,3	17393,2	0%	218,20	8,89	209,31	72	16531,4	419,31	5,0%	17,210,01	63,51	1,1%
p17r-v8	16825	81,15	16825	81,15	16825	16825	0%	230,71	7,54	223,16	62	15882,2	689,88	5,6%	16,256,22	57,50	3,4%
p18r-v8	17012,4	71,76	17012,4	71,76	17012,4	17012,4	0%	151,24	7,11	144,13	58	14399,8	170,35	15,4%	16,702,00	64,60	1,8%
p19r-v8	17709,3	83,04	17706,8	83,04	17709,3	17709,3	0%	100,56	5,50	95,06	44	16404	220,02	7,4%	17,399,21	57,79	1,7%
p20r-v8	19160,1	98,03	19159,4	98,03	19160,1	19160,1	0%	190,09	8,21	181,87	67	17623	317,15	8,0%	18,834,02	58,26	1,7%
p21r-v8	16748,8	105,41	16748,8	105,41	16748,8	16748,8	0%	383,95	10,00	373,94	80	14611,2	201,41	12,8%	16,293,21	79,54	2,7%
p22r-v8	18311,7	93,83	18310,2	93,83	18311,8	18311,7	0%	285,49	9,53	275,95	77	15155,4	208,31	17,2%	18,007,20	68,47	1,7%
p23r-v8	20995,4	75,26	20995,4	75,26	20995,5	20995,4	0%	194,50	8,60	185,90	69	18555,2	237,81	11,6%	20,721,01	64,65	1,3%
p24r-v8	17657,8	94,02	17657,8	94,02	17657,8	17657,7	0%	93,37	5,37	88,00	43	16023,2	385,24	9,3%	17,455,42	66,38	1,1%
p25r-v8	16967	85,85	16967	85,85	16967,1	16967	0%	191,67	7,50	184,17	61	15606,4	172,16	8,0%	16,591,60	59,22	2,2%
p26r-v8	20079,8	84,34	20079,8	84,34	20079,8	20079,7	0%	139,51	6,37	133,13	52	18640	530,34	7,2%	19,632,81	81,51	2,2%
p27r-v8	19443,6	91,90	19443,6	91,90	19443,6	19443,5	0%	185,71	7,36	178,35	60	17378,9	162,19	10,6%	19,259,41	53,69	0,9%
p28r-v8	17760	77,48	17760	77,48	17760	17760	0%	191,41	8,10	183,31	66	15149	173,63	14,7%	17,615,41	57,17	0,8%
p29r-v8	18402	75,68	18402	75,68	18402	18402	0%	205,14	6,98	198,16	56	16487,2	260,71	10,4%	18,034,61	82,22	2,0%
p30r-v8	15949	87,75	15949	87,75	15949	15949	0%	138,30	6,94	131,36	57	15636,8	219,84	2,0%	15,678,22	59,16	1,7%
Media		85,79		85,79			0%	1099,64	15,70	1083,94	129		350,86	8,2%		64,20	1,8%

Tabela B.9: PDCGM para instâncias do grupo V9

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v9	16825	106,34	16825	106,34	16825	16824,9	0%	157,64	6,80	150,84	54	16377,4	250,94	16.382,40	68,86	2,6%
p2r-v9	18686,2	87,60	18686,2	87,60	18686,2	18686,2	0%	172,83	7,33	165,50	58	18220	583,31	18.350,01	61,89	1,8%
p3r-v9	16510,8	91,20	16510,8	91,20	16510,8	16510,8	0%	138,23	5,99	132,24	47	15934,4	461,35	16.016,81	77,74	3,0%
p4r-v9	19045,6	111,98	19045,6	111,98	19045,6	19045,5	0%	215,70	8,67	207,01	69	17366,6	179,76	18.561,42	75,52	2,5%
p5r-v9	18087,2	102,46	18087,2	102,46	18087,2	18087,2	0%	135,83	6,41	129,42	52	17848	214,87	17.598,01	58,05	2,7%
p6r-v9	19432,8	97,70	19432,8	97,70	19432,8	19432,8	0%	254,13	8,82	245,31	70	17675,8	462,01	19.247,21	62,50	1,0%
p7r-v9	18814	109,18	18814	109,18	18814	18813,9	0%	245,41	8,17	237,25	65	17079,2	1724,70	18.611,62	64,65	1,1%
p8r-v9	17881,2	95,88	17881,2	95,88	17881,3	17881,1	0%	218,87	8,51	210,36	68	16824,2	472,63	17.636,01	58,51	1,4%
p9r-v9	15061,4	99,39	15061,4	99,39	15061,4	15061,4	0%	187,32	7,28	180,04	59	14555	253,61	14.885,41	83,53	1,2%
p10r-v9	18094,6	91,12	18094,6	91,12	18094,7	18094,6	0%	115,50	5,78	109,72	46	18001,4	227,54	17.801,23	58,15	1,6%
p11r-v9	16259,1	163,64	16258,6	163,64	16259,1	16259,1	0%	120,17	5,72	114,44	45	15809,6	932,00	15.864,62	59,48	2,4%
p12r-v9	21678,4	116,21	21678,4	116,21	21678,4	21678,4	0%	241,14	9,36	231,77	75	19198,4	1006,59	21.417,62	72,66	1,2%
p13r-v9	19256,2	109,20	19256,2	109,20	19256,2	19256,2	0%	244,38	8,01	236,37	64	18220,4	460,58	18.859,82	65,10	2,1%
p14r-v9	19488	115,74	19488	115,74	19488	19488	0%	176,58	8,07	168,50	64	19389,6	153,71	18.995,22	60,28	2,5%
p15r-v9	20238,4	103,64	20238,4	103,64	20238,4	20238,4	0%	130,46	6,83	123,63	54	18371,4	292,59	19.814,42	72,57	2,1%
p16r-v9	17344	94,71	17344	94,71	17344	17344	0%	194,50	6,81	187,69	54	16417,6	261,41	17.084,01	63,10	1,5%
p17r-v9	16748,2	98,55	16748,2	98,55	16748,2	16748,2	0%	138,99	6,32	132,67	51	15501,4	381,70	16.033,61	80,91	4,3%
p18r-v9	17380	90,60	17380	90,60	17380	17380	0%	180,24	6,79	173,45	55	16333,8	295,32	16.983,20	67,00	2,3%
p19r-v9	17537	95,66	17537	95,66	17537	17537	0%	94,34	4,63	89,71	37	15936,4	239,90	17.238,21	56,66	1,7%
p20r-v9	19807,6	111,70	19807,6	111,70	19807,6	19807,6	0%	115,36	5,77	109,59	46	18471,4	235,85	19.418,61	61,21	2,0%
p21r-v9	16796,8	132,42	16796,8	132,42	16796,8	16796,8	0%	216,89	8,19	208,70	65	14869,6	618,71	16.429,61	79,50	2,2%
p22r-v9	18561,8	129,64	18561,8	129,64	18561,9	18561,8	0%	337,23	10,36	326,86	82	17757,2	474,26	18.352,37	81,06	1,1%
p23r-v9	20841,4	90,42	20841,4	90,42	20841,4	20841,3	0%	182,41	7,89	174,53	63	19532,6	1269,43	20.532,20	63,88	1,5%
p24r-v9	17190,2	105,74	17186,8	105,74	17190,2	17190,2	0%	90,09	4,73	85,36	38	14981	177,04	16.854,00	65,71	1,9%
p25r-v9	16535,4	93,71	16535,4	93,71	16535,4	16535,4	0%	155,00	7,43	147,56	59	16279	325,06	16.092,60	61,18	2,7%
p26r-v9	19688,6	103,81	19688,6	103,81	19688,7	19688,6	0%	91,09	4,99	86,10	40	19297,2	143,58	19.204,62	59,95	2,5%
p27r-v9	18886,6	95,10	18886,6	95,10	18886,6	18886,6	0%	201,48	7,44	194,02	60	18412,6	209,83	18.623,82	52,80	1,4%
p28r-v9	17470,2	83,13	17470,2	83,13	17470,2	17470,1	0%	189,12	7,08	182,04	57	16093,6	583,95	17.231,20	56,97	1,4%
p29r-v9	18202,2	98,44	18202,2	98,44	18202,2	18202,2	0%	121,73	5,55	116,18	45	16544,2	327,43	17.684,02	56,69	2,8%
p30r-v9	16052,2	99,64	16052,2	99,64	16052,2	16052,2	0%	168,20	7,27	160,93	58	16019	137,07	15.670,02	59,34	2,4%
Média	104,15	104,15	104,15	104,15	104,15	104,15	0%	174,36	7,10	167,26	57	445,22	445,22	5,6%	65,52	2,0%

Tabela B.10: PDGGM para instâncias do grupo V10

Problema	Sol. Ot. LP		Sol. Ot. IP		U.B.	L.B.	GAPI (%)	CPU		PMR	Iter	Sol. Heu.	Heu		GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU	GAP3 (%)
	LP	CPU (seg)	IP	CPU (seg)				PDGGMsub	PMR				Heu	GAP2 (%)				
p1r-v10	16891,4	131,78	16891,4	131,78	16891,5	16891,4	0%	112,03	6,24	105,79	49	16570	253,38	1,9%	16,344,00	69,12	3,2%	
p2r-v10	18797,2	113,90	18797,2	113,90	18797,2	18797,1	0%	153,38	6,83	146,56	53	18171	529,62	3,3%	18,279,00	62,87	2,8%	
p3r-v10	16288	110,49	16288	110,49	16288	16288	0%	128,21	6,25	121,96	48	16076	625,76	1,3%	15,948,41	70,80	2,1%	
p4r-v10	19390	132,65	19389,4	132,65	19390	19389,9	0%	244,55	8,32	236,22	65	18767,2	518,84	3,2%	19,008,82	73,32	2,0%	
p5r-v10	18055,6	119,69	18053,8	119,69	18055,6	18055,5	0%	142,41	6,74	135,67	53	17784,8	776,27	1,5%	17,850,01	56,72	1,1%	
p6r-v10	19189,5	100,28	19188,4	100,28	19189,5	19189,5	0%	159,54	7,24	152,30	57	18092	655,68	5,7%	18,915,61	63,15	1,4%	
p7r-v10	18297,6	136,32	18297,6	136,32	18297,6	18297,6	0%	212,26	7,39	204,86	58	16870,4	321,28	7,8%	17,958,80	83,56	1,9%	
p8r-v10	17910,9	113,21	17908,2	113,21	17910,9	17910,9	0%	228,63	8,22	220,41	64	16899,4	1312,74	5,6%	17,697,02	58,98	1,2%	
p9r-v10	15122	110,00	15122	110,00	15122	15121,9	0%	143,19	6,78	136,41	53	14542,4	465,44	3,8%	15,018,02	58,25	0,7%	
p10r-v10	18381,6	114,63	18380,2	114,63	18381,6	18381,4	0%	88,88	4,82	84,05	38	18042,4	410,83	1,8%	17,952,83	57,99	2,3%	
p11r-v10	16223,8	194,20	16223,8	194,20	16223,8	16223,7	0%	132,60	5,99	126,61	47	15685,2	1126,23	3,3%	15,852,42	58,97	2,3%	
p12r-v10	21688,6	136,48	21688,6	136,48	21688,6	21688,6	0%	196,59	8,46	188,13	62	19814,6	1185,68	8,6%	21,285,80	73,96	1,9%	
p13r-v10	19365,2	138,14	19365,2	138,14	19365,2	19365,2	0%	239,76	7,90	231,86	62	18070,6	1416,09	6,7%	19,050,82	65,11	1,6%	
p14r-v10	19217,4	118,08	19217,4	118,08	19217,4	19217,3	0%	188,62	7,24	181,37	57	18872,8	360,64	1,8%	18,883,40	81,27	1,7%	
p15r-v10	19674	116,64	19674	116,64	19674	19673,8	0%	171,43	7,22	164,20	57	18432	415,28	6,3%	19,355,21	71,41	1,6%	
p16r-v10	17258,2	134,04	17258,2	134,04	17258,3	17258,1	0%	144,34	6,49	137,85	51	16929,6	357,26	1,9%	16,981,01	65,11	1,6%	
p17r-v10	16684,8	126,25	16684,8	126,25	16684,9	16684,8	0%	163,47	6,27	157,19	49	16351,8	277,15	2,0%	16,057,22	55,42	3,8%	
p18r-v10	17325	104,94	17325	104,94	17325	17324,9	0%	109,10	5,46	103,63	44	16390,4	770,84	5,4%	16,999,61	68,55	1,9%	
p19r-v10	17566,8	118,03	17566,8	118,03	17567	17566,8	0%	103,33	6,20	98,73	37	17048,8	947,48	2,9%	17,324,61	57,17	1,4%	
p20r-v10	19942,6	145,54	19942,6	145,54	19942,7	19942,6	0%	153,01	6,20	146,80	49	18759,2	356,58	5,9%	19,616,82	61,25	1,6%	
p21r-v10	16634,4	158,13	16634,4	158,13	16634,4	16634,4	0%	217,52	7,24	210,28	57	15046,4	400,59	9,5%	16,178,61	79,35	2,7%	
p22r-v10	18466,2	127,03	18466,2	127,03	18466,2	18466,2	0%	281,37	8,97	272,39	70	16491,4	1186,33	10,7%	18,251,39	81,65	1,2%	
p23r-v10	21104	122,58	21104	122,58	21104	21104	0%	198,08	7,27	190,80	57	19646,6	1096,19	6,9%	20,753,20	63,43	1,6%	
p24r-v10	17354,4	117,84	17354,4	117,84	17354,4	17354,4	0%	93,95	5,16	88,79	41	17269	230,31	0,5%	17,173,40	64,80	1,0%	
p25r-v10	16594,2	111,38	16594,2	111,38	16594,2	16594,1	0%	179,69	7,08	172,60	55	15785,2	1038,52	4,9%	16,243,80	59,46	2,1%	
p26r-v10	19720,6	118,32	19719,6	118,32	19720,6	19720,6	0%	179,27	6,47	172,79	51	18925,8	280,32	4,0%	19,207,62	60,39	2,3%	
p27r-v10	19473,2	128,00	19473,2	128,00	19473,2	19473,2	0%	151,71	7,08	144,62	56	19164,8	936,35	1,6%	19,277,41	52,52	1,4%	
p28r-v10	17647,8	104,24	17647,8	104,24	17647,8	17647,8	0%	167,12	7,07	160,05	55	16715,6	556,36	5,3%	17,513,62	57,13	0,8%	
p29r-v10	18607,6	110,94	18607,6	110,94	18607,6	18607,6	0%	156,28	6,24	150,05	49	17701,8	1350,73	4,9%	18,170,80	80,96	2,3%	
p30r-v10	15858,2	115,49	15858,2	115,49	15858,2	15858,2	0%	89,09	5,17	83,92	41	15794	141,51	0,4%	15,374,82	60,23	3,0%	
Média		124,31		124,31			0%	164,31	6,75	157,56	53		676,68	4,3%		65,76	1,9%	

Tabela B.11: PDCGM para instâncias do grupo V11

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCGMSub (seg)	CPU CPU (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v11	17032,5	194,08	17032,5	194,08	17032,5	17032,4	0%	212,89	7,30	205,59	47	16891,2	394,33	16.595,60	68,13	2,6%
p2r-v11	18873,4	205,46	18873,4	205,46	18873,4	18873,4	0%	163,63	7,23	156,39	49	18121,2	1322,94	18.682,60	63,85	1,0%
p3r-v11	16360,6	370,88	16360,6	370,88	16360,6	16360,6	0%	115,89	5,22	110,67	36	15723,8	1062,93	15.922,81	74,50	2,7%
p4r-v11	18979	207,90	18979	207,90	18979	18979	0%	363,74	14,62	349,11	61	17745	1157,23	18.547,02	73,76	2,3%
p5r-v11	17920,6	383,81	17920,6	383,81	17920,6	17920,6	0%	152,15	6,83	145,32	45	17294	1180,90	17.596,21	57,27	1,8%
p6r-v11	19494,2	156,43	19494,2	156,43	19494,3	19494,1	0%	225,79	9,03	216,76	56	18493,6	5418,51	19.191,40	62,13	1,6%
p7r-v11	18948,8	211,50	18948,8	211,50	18948,9	18948,8	0%	172,72	7,38	165,34	57	18669,8	1711,74	18.683,42	66,30	1,4%
p8r-v11	17948	246,10	17948	246,10	17948	17948	0%	194,74	7,36	187,38	57	17487	339,93	17.782,01	58,74	0,9%
p9r-v11	14837,6	299,88	14837,6	299,88	14837,6	14837,6	0%	165,42	7,10	158,31	55	14763,6	178,33	14.688,01	58,17	1,0%
p10r-v11	18391,4	348,00	18391,4	348,00	18391,4	18391,3	0%	86,01	4,79	81,22	37	18347,4	227,96	17.983,23	57,65	2,2%
p11r-v11	16483,5	245,34	16483,5	245,34	16483,6	16483,5	0%	85,84	4,75	81,08	37	16339,8	307,45	16.245,22	62,26	1,4%
p12r-v11	21659,6	284,47	21659,6	284,47	21659,6	21659,6	0%	189,76	7,36	182,40	57	20082	2505,11	21.409,81	74,06	1,2%
p13r-v11	19485,2	154,23	19485,2	154,23	19485,2	19485	0%	195,84	7,23	188,61	56	19280,6	1295,92	19.285,03	64,74	1,0%
p14r-v11	19223,4	262,73	19223,4	262,73	19223,4	19223,4	0%	160,06	7,30	152,75	57	19002	333,94	18.769,61	81,96	2,4%
p15r-v11	19956	271,76	19956	271,76	19956	19955,9	0%	128,63	5,96	122,66	46	19673,4	473,02	19.548,23	71,46	2,0%
p16r-v11	17435,2	284,34	17435,2	284,34	17435,2	17435,2	0%	145,14	6,63	138,50	51	17133,6	613,11	17.060,21	63,97	2,2%
p17r-v11	16928,2	223,70	16928,2	223,70	16928,2	16928,2	0%	115,22	5,73	109,49	45	16728,2	251,09	16.484,82	56,57	2,6%
p18r-v11	17112	171,53	17112	171,53	17112	17112	0%	164,20	6,31	157,89	49	16479,2	1108,84	16.802,60	67,49	1,8%
p19r-v11	17853,8	376,53	17853,8	376,53	17853,8	17853,8	0%	74,95	4,41	70,53	34	17559,4	434,80	17.468,41	58,45	2,2%
p20r-v11	20008,4	186,00	20008,4	186,00	20008,4	20008,4	0%	140,70	6,59	134,11	51	19825,6	320,82	19.586,81	82,83	2,1%
p21r-v11	16598,6	234,79	16598,6	234,79	16598,6	16598,6	0%	271,66	8,08	263,57	60	15212,6	1496,41	16.091,81	80,86	3,1%
p22r-v11	18490,4	180,84	18490,4	180,84	18490,4	18490,4	0%	217,08	8,81	208,27	66	17128,4	3951,43	18.075,40	72,34	2,2%
p23r-v11	21148,2	258,62	21148,2	258,62	21148,2	21148,1	0%	158,66	6,92	151,73	53	20536	1306,78	20.863,81	64,80	1,3%
p24r-v11	17450,8	218,14	17450,8	218,14	17450,8	17450,7	0%	90,11	4,56	85,54	35	17133,8	709,34	17.223,21	67,21	1,3%
p25r-v11	16820,6	245,59	16820,6	245,59	16820,6	16820,6	0%	137,73	6,77	130,96	53	16532,6	380,98	16.522,20	62,95	1,8%
p26r-v11	19769	441,15	19769	441,15	19769,1	19768,9	0%	86,14	4,71	81,43	36	19589	357,34	19.382,62	61,12	2,0%
p27r-v11	19153,1	185,73	19153,1	185,73	19153,1	19153	0%	128,86	6,13	122,72	48	19143,4	67,80	18.973,21	55,15	0,9%
p28r-v11	17708,2	303,34	17708,2	303,34	17708,2	17708,2	0%	171,20	6,68	164,51	52	16850,2	2111,10	17.537,21	57,91	1,0%
p29r-v11	18788,2	408,07	18788,2	408,07	18788,2	18788,2	0%	143,99	5,94	138,05	46	18429	1134,07	18.486,40	58,65	1,6%
p30r-v11	16313,6	399,75	16313,6	399,75	16313,6	16313,5	0%	105,46	5,17	100,28	40	16309	29,88	15.835,22	62,62	2,9%
Média		265,36		265,36			0%	158,81	6,76	152,04	49	1072,80			65,60	1,8%

Tabela B.12: PDCCGM para instâncias do grupo V12

Problema	Sol. Ot. LP		Sol. Ot. IP		U.B.	L.B.	GAP1 (%)	PDCCGM			Hier	Sol. Heu.	Heu		Me Sol Heu	CPU MSH	GAP3 (%)
	CPU (seg)	IP (seg)	CPU (seg)	IP (seg)				CPU (seg)	PMR (seg)	CPU (seg)			GAP2 (%)				
p1r-v12	16605,4	391,01	16605,4	391,01	16605,4	16605,4	0%	135,13	6,03	129,10	46	16385,6	415,37	1,3%	16,130,40	66,60	2,9%
p2r-v12	19038,4	185,84	19038,4	185,84	19038,4	19038,4	0%	100,81	5,59	95,21	43	18585,2	920,65	2,4%	18,796,21	63,65	1,3%
p3r-v12	16484,5	242,16	16483,4	242,16	16484,6	16484,5	0%	95,63	4,55	91,08	35	16390,2	651,62	0,6%	15,831,61	70,84	4,0%
p4r-v12	18975	422,63	18974,8	422,63	18975	18975	0%	154,03	6,68	147,34	51	18079,6	554,41	4,7%	18,561,62	72,09	2,2%
p5r-v12	17802,2	166,52	17802,2	166,52	17802,2	17802,2	0%	99,63	4,91	94,71	38	17580	341,05	1,2%	17,385,22	59,10	2,3%
p6r-v12	19603	303,10	19603	303,10	19603	19602,9	0%	155,31	6,56	148,74	50	18443,6	5313,47	5,9%	19,401,20	63,42	1,0%
p7r-v12	18715,6	361,05	18715,6	361,05	18715,6	18715,4	0%	129,45	6,15	123,29	47	18019,6	782,70	3,7%	18,457,62	64,22	1,4%
p8r-v12	17753,4	390,69	17753,4	390,69	17753,4	17753,4	0%	177,44	6,67	170,76	51	17327	338,35	2,4%	17,410,22	59,27	1,9%
p9r-v12	14996,4	140,73	14996,4	140,73	14996,4	14996,3	0%	170,53	6,74	163,79	52	14793,6	696,59	1,4%	14,821,41	57,99	1,2%
p10r-v12	17931,6	245,40	17931,6	245,40	17931,6	17931,6	0%	68,80	4,29	64,51	33	17902	67,39	0,2%	17,476,83	82,01	2,5%
p11r-v12	16197,4	400,66	16197,4	400,66	16197,4	16197,4	0%	80,90	4,66	76,24	36	15995,8	238,78	1,2%	15,805,22	60,41	2,4%
p12r-v12	21764,5	234,13	21762	234,13	21764,5	21764,5	0%	318,80	8,42	310,37	64	21083,8	2514,14	3,1%	21,507,20	75,99	1,2%
p13r-v12	19356,6	230,56	19356,6	230,56	19356,6	19356,6	0%	123,75	5,84	117,90	45	18321,4	970,90	5,3%	18,960,62	65,32	2,0%
p14r-v12	19311,2	264,07	19311,2	264,07	19311,4	19311,2	0%	169,57	6,62	162,94	51	18853,4	566,85	2,4%	19,089,42	59,33	1,1%
p15r-v12	19999,6	275,55	19999,6	275,55	19999,6	19999,6	0%	120,36	5,79	114,57	44	19014,4	559,02	4,9%	19,742,22	70,96	1,3%
p16r-v12	17247,1	224,87	17247	224,87	17247,1	17247,1	0%	108,48	5,36	103,12	41	17046,6	85,31	1,2%	16,928,00	63,88	1,8%
p17r-v12	16621	249,23	16621	249,23	16621	16620,9	0%	110,38	5,59	104,79	43	16337,6	385,78	1,7%	16,117,02	54,87	3,0%
p18r-v12	17350	196,78	17350	196,78	17350	17350	0%	100,95	5,21	95,73	40	16701	353,80	3,7%	17,084,20	69,18	1,5%
p19r-v12	17976,6	195,13	17976,6	195,13	17976,6	17976,5	0%	61,34	3,78	57,55	29	17815,2	310,00	0,9%	17,721,21	56,55	1,4%
p20r-v12	19834,8	406,84	19834,8	406,84	19834,8	19834,8	0%	172,76	6,73	166,02	52	19708,6	646,32	0,6%	19,474,62	58,46	1,8%
p21r-v12	16637	405,42	16637	405,42	16637	16636,9	0%	167,31	6,97	160,34	53	15226,2	2323,47	8,5%	16,257,21	77,09	2,3%
p22r-v12	18482,3	309,75	18481,8	309,75	18482,4	18482,3	0%	224,59	8,17	216,42	62	17831,2	1782,86	3,5%	18,199,59	72,50	1,5%
p23r-v12	20938,2	171,41	20938,2	171,41	20938,2	20938,1	0%	128,37	6,15	122,21	47	20087,2	1312,07	4,1%	20,402,80	81,80	2,6%
p24r-v12	17662,2	336,79	17662,2	336,79	17662,2	17662,2	0%	66,40	3,93	62,47	30	17508	191,50	0,9%	17,331,21	66,23	1,9%
p25r-v12	16765	185,21	16764,2	185,21	16765	16765	0%	134,50	6,28	128,22	48	16473,2	713,91	1,7%	16,534,80	61,83	2,4%
p26r-v12	19294	187,30	19294	187,30	19294,1	19294	0%	81,27	4,56	76,71	35	19014,4	473,81	1,4%	18,862,42	60,33	2,2%
p27r-v12	19680,8	303,42	19680,8	303,42	19680,8	19680,7	0%	138,56	6,27	132,29	48	19300	359,49	1,9%	19,535,22	54,01	0,8%
p28r-v12	17837	338,63	17837	338,63	17837,1	17837	0%	135,76	6,31	129,44	49	17622	754,60	1,2%	17,665,20	83,88	1,0%
p29r-v12	18576,8	409,46	18576,8	409,46	18576,8	18576,7	0%	93,22	5,11	88,11	39	18157,4	947,22	2,3%	18,223,02	60,80	1,9%
p30r-v12	16344,6	375,47	16344,6	375,47	16344,6	16344,6	0%	97,81	5,08	92,73	39	16125,2	322,73	1,3%	16,078,01	62,84	1,6%
Média		284,99		284,99			0%	130,73	5,83	124,89	45		863,14	2,5%		65,85	1,9%

Tabela B.13: PDCGM para instâncias do grupo V13

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub (seg)	CPU CPU (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v13	17085,7	198,03	17084,4	198,03	17085,7	17085,7	0%	142,38	5,43	136,95	41	17048,8	128,56	16.450,80	68,17	3,7%
p2r-v13	18881,6	337,03	18881,6	337,03	18881,6	18881,5	0%	99,30	5,41	93,88	41	18681,8	1056,70	18.754,61	61,81	0,7%
p3r-v13	16175,6	185,22	16175,4	185,22	16175,6	16175,6	0%	79,45	4,37	75,08	33	16109	329,05	15.707,21	74,29	2,9%
p4r-v13	19266,4	226,10	19266,4	226,10	19266,4	19266,3	0%	171,93	6,96	164,96	52	18916,4	901,78	19.010,62	73,78	1,3%
p5r-v13	17824,8	257,22	17824,8	257,22	17824,8	17824,8	0%	99,86	4,84	95,02	37	17549,6	496,74	17.515,01	58,21	1,7%
p6r-v13	18960,8	238,80	18960,8	238,80	18960,9	18960,8	0%	163,32	6,66	156,66	50	17919,6	1843,36	18.789,19	62,35	0,9%
p7r-v13	19037,2	276,62	19037,2	276,62	19037,2	19037,2	0%	157,22	7,05	150,16	53	18590,4	8520,15	18.720,82	64,80	1,7%
p8r-v13	18039,8	258,64	18039,8	258,64	18039,8	18039,7	0%	120,64	5,65	114,99	43	17700	564,71	17.854,80	82,26	1,0%
p9r-v13	14840,8	301,36	14840,8	301,36	14840,8	14840,8	0%	166,96	5,97	160,98	45	14732,4	341,68	14.666,81	58,29	1,2%
p10r-v13	18188,4	217,26	18188,4	217,26	18188,4	18188,4	0%	58,76	3,83	54,92	29	18182,8	34,07	17.901,83	26,67	1,6%
p11r-v13	16262,4	196,04	16262,4	196,04	16262,4	16262,4	0%	82,03	4,63	77,41	35	16031,6	539,39	16.010,23	60,51	1,6%
p12r-v13	21590	155,58	21590	155,58	21590	21589,9	0%	173,13	7,32	165,81	55	21249,4	2451,09	21.381,02	74,87	1,0%
p13r-v13	19212	403,11	19212	403,11	19212,1	19212	0%	173,25	6,60	166,64	50	18934	2095,24	18.820,62	64,98	2,0%
p14r-v13	19131,6	413,60	19131,6	413,60	19131,6	19131,6	0%	112,01	5,64	106,37	43	18893	786,84	18.752,81	57,82	2,0%
p15r-v13	19632,6	252,17	19631,2	252,17	19632,6	19632,6	0%	144,26	5,70	138,56	43	19394,8	691,39	19.340,43	73,08	1,5%
p16r-v13	17577,8	360,37	17577,8	360,37	17577,8	17577,8	0%	102,90	5,52	97,38	42	17163	1122,89	17.231,21	65,52	2,0%
p17r-v13	16835,6	196,82	16835,6	196,82	16835,6	16835,6	0%	86,46	4,77	81,68	36	16791,6	191,91	16.196,22	57,71	3,8%
p18r-v13	17187,1	209,24	17186,2	209,24	17187,2	17187,1	0%	101,91	5,14	96,77	39	17073,4	163,09	16.764,80	65,46	2,5%
p19r-v13	17554,8	237,69	17554,8	237,69	17554,8	17554,8	0%	62,47	3,80	58,66	29	17486,8	1010,21	17.199,61	57,83	2,0%
p20r-v13	20213,8	469,16	20213,8	469,16	20213,8	20213,7	0%	81,97	4,91	77,06	37	20081,4	289,73	19.823,01	61,45	1,9%
p21r-v13	16666,8	366,62	16666,8	366,62	16666,8	16666,8	0%	147,10	5,99	141,10	45	15730,4	7666,44	16.277,61	78,14	2,3%
p22r-v13	18502,2	192,29	18502,2	192,29	18502,2	18502	0%	209,75	7,09	202,65	53	17072,2	6244,69	18.257,60	70,60	1,3%
p23r-v13	21122,7	334,32	21122,4	334,32	21122,7	21122,6	0%	103,09	5,24	97,85	39	20230,2	1532,11	20.764,00	81,51	1,7%
p24r-v13	17185	213,96	17185	213,96	17185	17185	0%	71,38	4,26	67,12	32	16616,2	528,39	16.835,21	64,28	2,0%
p25r-v13	16719,7	320,24	16717,8	320,24	16719,7	16719,7	0%	84,00	5,09	78,90	38	16539	887,64	16.372,20	61,79	2,1%
p26r-v13	19868	297,02	19868	297,02	19868	19867,9	0%	96,97	4,68	92,29	35	19782,2	260,69	19.631,02	58,49	1,2%
p27r-v13	19679,8	131,68	19679,8	131,68	19679,8	19679,8	0%	141,89	5,97	135,92	45	19492,4	1327,15	19.564,62	54,35	0,6%
p28r-v13	17322,4	297,04	17322,4	297,04	17322,4	17322,4	0%	124,43	5,82	118,60	44	17152,8	629,97	17.191,80	57,33	0,8%
p29r-v13	19002,8	330,81	19002,8	330,81	19002,8	19002,7	0%	173,14	5,70	167,44	43	18856,2	1838,32	18.771,03	57,39	1,2%
p30r-v13	15943	405,74	15943	405,74	15943	15943	0%	82,27	4,45	77,81	34	15876	212,48	15.598,21	60,77	2,2%
Média		275,99		275,99			0%	120,47	5,48	114,99	41	1489,55			63,82	1,7%

Tabela B.14: PDGGM para instâncias do grupo V14

Problema	Sol. Ot. LP		Sol. Ot. IP		U.B.	L.B.	GAPI (%)	PDGGMsub		PMR	Iter	Sol. Heu.	Heu		GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH	GAP3 (%)
	LP	CPU (seg)	IP	CPU (seg)				CPU (seg)	CPU (seg)				Heu (seg)	Heu (seg)				
p1r-v14	16966,7	209,45	16966	209,45	16966,7	16966,7	0%	102,31	4,58	97,72	34	16835,6	506,79	0,8%	16,343,60	66,78	3,7%	
p2r-v14	18537,6	223,17	18537,6	223,17	18537,6	18537,6	0%	99,16	5,33	93,83	40	18467,4	322,82	0,4%	18,273,01	61,41	1,4%	
p3r-v14	16407	171,59	16407	171,59	16407	16407	0%	61,97	3,75	58,22	28	16290	1107,12	0,7%	15,898,01	74,38	3,1%	
p4r-v14	18950,6	791,84	18950,6	791,84	18950,6	18950,6	0%	153,12	6,10	147,02	45	17746,4	1265,10	6,4%	18,596,02	72,78	1,9%	
p5r-v14	17766	179,82	17766	179,82	17766	17766	0%	80,86	4,81	76,05	36	17636,2	529,70	0,7%	17,592,41	58,86	1,0%	
p6r-v14	19219,4	205,32	19219,4	205,32	19219,4	19219,4	0%	111,48	5,76	105,72	43	18681,2	3476,78	2,8%	19,058,61	63,29	0,8%	
p7r-v14	18699,2	316,73	18697,2	316,73	18699,2	18699,1	0%	130,26	5,88	124,38	44	18602,2	2465,80	0,5%	18,417,62	64,41	1,5%	
p8r-v14	18235,2	212,62	18235,2	212,62	18235,2	18235,1	0%	133,56	6,19	127,37	46	17897,6	3006,86	1,9%	18,081,61	82,97	0,8%	
p9r-v14	15274,4	225,93	15274,4	225,93	15274,4	15274,4	0%	113,28	5,90	107,37	44	15247,2	385,67	0,2%	15,140,42	58,37	0,9%	
p10r-v14	18078,4	234,06	18078,4	234,06	18078,4	18078,4	0%	60,64	3,86	56,79	29	17884,6	299,71	1,1%	17,640,83	59,07	2,4%	
p11r-v14	16540,4	458,79	16540,4	458,79	16540,4	16540,4	0%	122,63	5,20	117,43	39	16475,4	590,59	0,4%	16,284,63	60,99	1,5%	
p12r-v14	21658,4	129,25	21658,4	129,25	21658,4	21658,3	0%	133,50	6,12	127,38	48	21127,6	4185,85	2,5%	21,386,02	72,47	1,3%	
p13r-v14	19043	262,13	19043	262,13	19043	19042,8	0%	115,05	6,12	108,93	44	18677,8	5663,02	1,9%	18,774,81	65,56	1,4%	
p14r-v14	19527,6	373,80	19527,6	373,80	19527,6	19527,5	0%	104,86	5,36	99,50	40	19440	302,66	0,4%	19,156,42	59,70	1,9%	
p15r-v14	20238,8	223,93	20238,8	223,93	20238,8	20238,8	0%	104,63	5,27	99,36	39	20165	401,61	0,4%	19,911,83	74,11	1,6%	
p16r-v14	17280,2	348,92	17280,2	348,92	17280,2	17280,2	0%	117,85	5,82	112,02	43	17016	939,57	1,5%	16,953,20	63,96	1,9%	
p17r-v14	16906,4	358,23	16905,4	358,23	16906,4	16906,4	0%	87,31	4,81	82,49	36	16701,8	202,39	1,2%	16,345,42	56,68	3,3%	
p18r-v14	17370,8	215,82	17370,8	215,82	17370,8	17370,8	0%	97,88	4,69	93,19	35	16990	237,19	2,2%	16,950,40	67,17	2,4%	
p19r-v14	17780,4	327,94	17780,4	327,94	17780,4	17780,4	0%	71,95	4,19	67,77	31	17652	562,69	0,7%	17,451,61	82,26	1,8%	
p20r-v14	19652,3	201,64	19650,6	201,64	19652,3	19652,3	0%	101,34	4,89	96,44	36	19396	696,07	1,3%	19,298,62	63,01	1,4%	
p21r-v14	16532	304,27	16532	304,27	16532	16532	0%	172,85	6,03	166,82	50	16076	5534,93	2,8%	16,129,81	76,04	2,4%	
p22r-v14	18501,6	248,54	18501,6	248,54	18501,6	18501,6	0%	156,59	6,61	149,97	49	18312,2	2419,32	1,0%	18,350,60	70,40	0,8%	
p23r-v14	21017,6	197,65	21017,6	197,65	21017,6	21017,4	0%	91,46	6,03	166,82	50	20436	2715,18	2,8%	20,577,00	67,79	2,1%	
p24r-v14	17424,4	727,60	17424,4	727,60	17424,4	17424,4	0%	70,04	4,01	66,03	30	17332,6	185,06	0,5%	17,102,42	63,20	1,8%	
p25r-v14	16733,8	249,09	16733,8	249,09	16733,8	16733,7	0%	91,80	4,98	86,82	37	16630,4	871,68	0,6%	16,282,00	83,41	2,7%	
p26r-v14	19843,6	302,26	19843,6	302,26	19843,6	19843,6	0%	96,93	4,82	92,10	36	19762,4	1197,33	0,4%	19,517,62	60,08	1,6%	
p27r-v14	19342,2	168,60	19342,2	168,60	19342,2	19342,2	0%	124,66	5,85	118,76	44	19155	692,22	1,0%	19,111,42	54,74	1,2%	
p28r-v14	17992,2	203,73	17992,2	203,73	17992,3	17992,1	0%	128,98	5,74	123,24	43	17815,2	1137,04	1,0%	17,826,61	57,66	0,9%	
p29r-v14	18408,4	291,52	18408,4	291,52	18408,5	18408,4	0%	82,89	4,70	78,18	35	18260,2	370,67	0,8%	18,083,82	58,72	1,8%	
p30r-v14	16017,4	368,79	16017,4	368,79	16017,4	16017,4	0%	79,34	4,41	74,92	33	15893	391,72	0,8%	15,700,62	60,61	2,0%	
Média		291,10		291,10			0%	106,64	5,26	104,09	40		1422,10	1,3%		66,03	1,8%	

Tabela B.15: PDCGM para instâncias do grupo V15

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU PDCGMSub (seg)	CPU PMR (seg)	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v15	16619	308,01	16619	308,01	16619,1	16618,9	0%	104,92	5,03	99,88	37	16619	1,01	16.221,00	69,28	2,4%
p2r-v15	18544,8	606,80	18544,8	606,80	18544,8	18544,8	0%	98,38	5,18	93,20	38	18399,2	789,98	18.252,40	64,08	1,6%
p3r-v15	16251	174,26	16251	174,26	16251	16251	0%	67,96	3,96	64,00	29	16237	69,59	15.924,41	73,33	2,0%
p4r-v15	19325,2	304,79	19325,2	304,79	19325,2	19325,2	0%	161,33	6,59	154,74	48	19124	1265,62	18.919,42	74,24	2,1%
p5r-v15	17818,6	155,15	17818,6	155,15	17818,6	17818,6	0%	68,80	4,04	64,76	30	17792,2	90,64	17.425,21	58,50	2,2%
p6r-v15	18940,4	255,21	18940,4	255,21	18940,4	18940,3	0%	166,77	6,06	160,70	44	18873,6	1009,31	18.700,41	63,23	1,3%
p7r-v15	18835	417,70	18835	417,70	18835	18834,9	0%	115,28	5,46	109,81	40	18667,6	2906,36	18.524,82	65,44	1,6%
p8r-v15	18073,9	314,45	18072,4	314,45	18073,9	18073,9	0%	140,42	6,15	134,26	45	17909,8	1246,74	17.811,81	59,15	1,4%
p9r-v15	14906,2	165,33	14906,2	165,33	14906,2	14906,2	0%	102,65	5,07	97,57	37	14836,2	206,73	14.823,41	58,32	0,6%
p10r-v15	18213,6	429,88	18213,6	429,88	18213,6	18213,6	0%	57,71	3,69	54,02	27	18193,6	125,65	17.811,83	59,53	2,2%
p11r-v15	16415	206,29	16415	206,29	16415	16415	0%	71,40	4,20	67,20	31	16364,6	150,20	16.142,02	61,42	1,7%
p12r-v15	21609,2	306,05	21609,2	306,05	21609,2	21609,2	0%	121,75	5,90	115,85	48	21279	5784,64	21.402,42	75,20	1,0%
p13r-v15	19318	150,06	19318	150,06	19318	19317,9	0%	99,37	5,21	94,16	38	18864	2244,53	18.925,22	64,32	2,0%
p14r-v15	19229,2	241,34	19229,2	241,34	19229,2	19229,1	0%	112,98	5,52	107,46	40	19226,2	137,22	18.860,41	60,14	1,9%
p15r-v15	19911,2	838,63	19911,2	838,63	19911,2	19911,2	0%	85,74	5,25	80,49	38	19783,2	822,09	19.714,81	73,70	1,0%
p16r-v15	17340,4	216,38	17339,2	216,38	17340,4	17340,4	0%	106,71	5,13	101,57	37	17181,8	607,00	17.017,41	63,63	1,9%
p17r-v15	16949	341,66	16949	341,66	16949	16949	0%	74,67	4,38	70,28	32	16861,2	280,34	16.329,82	57,27	3,7%
p18r-v15	16874,6	155,79	16874,6	155,79	16874,6	16874,5	0%	84,89	4,92	79,96	36	16634	2702,89	16.371,40	67,10	3,0%
p19r-v15	17585,8	255,62	17585,8	255,62	17585,8	17585,8	0%	55,09	3,79	51,30	28	17436,6	608,64	17.314,62	56,30	1,5%
p20r-v15	19639	158,35	19639	158,35	19639	19639	0%	90,67	4,75	85,92	35	19542,4	463,92	19.187,41	61,86	2,3%
p21r-v15	16548	404,53	16548	404,53	16548	16548	0%	143,14	6,05	137,09	44	16200	4171,35	16.139,81	77,92	2,5%
p22r-v15	18239,2	725,88	18239,2	725,88	18239,3	18239,2	0%	222,92	7,01	215,91	51	18163,2	268,64	18.030,20	71,24	1,1%
p23r-v15	20943,6	165,18	20943,6	165,18	20943,6	20943,5	0%	129,74	6,02	123,71	44	20848	3320,62	20.672,21	64,32	1,3%
p24r-v15	17543,8	243,05	17542,8	243,05	17543,8	17543,8	0%	67,43	4,21	63,22	31	17521,6	207,77	17.418,21	69,51	0,7%
p25r-v15	16886,2	184,47	16886,2	184,47	16886,2	16886,2	0%	75,33	4,61	70,72	34	16570,6	1559,08	16.524,00	61,22	2,1%
p26r-v15	20242	301,30	20242	301,30	20242	20242	0%	78,79	4,74	74,04	35	20203,4	164,28	19.972,63	60,11	1,3%
p27r-v15	19149,6	140,76	19149,6	140,76	19149,7	19149,6	0%	94,30	5,01	89,28	37	19088,8	352,10	18.883,02	53,64	1,4%
p28r-v15	17668,8	138,42	17668,8	138,42	17668,9	17668,8	0%	91,97	5,15	86,82	38	17649,6	210,26	17.544,41	57,81	0,7%
p29r-v15	18773,8	235,91	18771,6	235,91	18773,8	18773,8	0%	116,77	5,32	111,44	39	18597,4	2770,45	18.578,02	59,07	1,0%
p30r-v15	16209,6	320,78	16209,6	320,78	16209,6	16209,6	0%	79,48	4,60	74,89	34	16140	245,34	15.853,42	65,30	2,2%
Média		295,40		295,40			0%	102,91	5,10	97,81	38	1159,43			64,21	1,7%

Tabela B.16: PDCCGM para instâncias do grupo V16

Problema	Sol. Or. LP		Sol. Or. IP		U.B.	L.B.	GAPI (%)	PDCCGMsub		PMR	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu		GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH	
	CPU (seg)	IP (seg)	CPU (seg)	IP (seg)				CPU (seg)	PMR (seg)				CPU (seg)	GAP2 (%)			Me Sol Heu	CPU (seg)
p1r-v16	16874,8	616,71	16874,8	616,71	16874,8	16874,7	0%	73,37	4,49	68,87	32	16826,6	315,59	0,3%	16,442,80	67,69	2,6%	
p2r-v16	18911,2	332,46	18911,2	332,46	18911,2	18911,2	0%	78,11	4,66	73,44	35	18686,4	990,16	1,2%	18,533,21	65,11	1,9%	
p3r-v16	16300,8	392,86	16300,8	392,86	16300,8	16300,8	0%	64,44	3,60	60,84	27	16153,4	233,29	0,9%	15,710,21	70,76	3,6%	
p4r-v16	19098	171,47	19098	171,47	19098	19098	0%	118,04	5,46	112,58	41	18802,8	1082,08	1,5%	18,775,62	71,71	1,7%	
p5r-v16	17769,6	303,71	17769,6	303,71	17769,6	17769,6	0%	76,95	4,84	72,11	30	17753,6	106,49	0,1%	17,469,21	57,95	1,7%	
p6r-v16	19135,2	258,66	19135,2	258,66	19135,2	19135,2	0%	107,69	5,35	102,34	40	18977	609,53	0,8%	18,905,60	64,38	1,2%	
p7r-v16	18890,2	262,75	18890,2	262,75	18890,2	18890,2	0%	93,25	5,46	87,79	41	18610,4	2466,19	1,5%	18,574,62	64,01	1,7%	
p8r-v16	17958,8	315,26	17958,8	315,26	17958,8	17958,8	0%	103,21	5,59	97,62	42	17949,2	218,42	0,1%	17,781,61	57,73	1,0%	
p9r-v16	15105,4	192,94	15105,4	192,94	15105,4	15105,3	0%	117,42	5,45	111,97	36	14924,4	364,78	1,2%	14,976,22	59,46	0,9%	
p10r-v16	18008	332,15	18008	332,15	18008	18007,9	0%	45,05	3,32	41,74	25	17989,8	37,96	0,1%	17,639,83	58,82	2,0%	
p11r-v16	16538,8	202,53	16538,8	202,53	16538,8	16538,8	0%	57,49	3,80	53,68	29	16538,8	2,49	0,0%	16,268,02	61,53	1,6%	
p12r-v16	21847	467,54	21847	467,54	21847	21847	0%	118,91	6,08	112,83	46	21534,6	2709,76	1,4%	21,533,81	75,31	1,4%	
p13r-v16	18810,8	202,16	18810,8	202,16	18810,8	18810,7	0%	113,31	5,69	107,61	35	18704	277,69	0,6%	18,411,61	64,89	2,1%	
p14r-v16	19257,6	250,74	19257,6	250,74	19257,6	19257,6	0%	104,48	5,54	98,94	42	19253,6	4,66	0,0%	18,937,42	58,95	1,7%	
p15r-v16	19927,6	390,52	19927,6	390,52	19927,6	19927,6	0%	77,62	4,68	72,93	35	19860,6	334,07	0,3%	19,616,02	71,41	1,6%	
p16r-v16	17379,4	240,53	17379,4	240,53	17379,4	17379,4	0%	93,27	4,34	88,92	33	17160,6	988,07	1,3%	17,198,41	64,31	1,0%	
p17r-v16	17011	281,50	17011	281,50	17011	17010,9	0%	58,26	3,86	54,40	29	17010	0,91	0,0%	16,409,21	57,57	3,5%	
p18r-v16	17169	173,18	17169	173,18	17169	17168,9	0%	95,48	5,15	90,34	32	17097,4	213,95	0,4%	16,699,00	66,44	2,7%	
p19r-v16	17835,2	183,35	17835,2	183,35	17835,2	17835,2	0%	53,69	3,46	50,23	26	17792	382,53	0,2%	17,555,21	59,09	1,6%	
p20r-v16	19706	324,60	19706	324,60	19706,1	19706	0%	76,89	4,57	72,32	35	19612,4	471,59	0,5%	19,335,22	60,81	1,9%	
p21r-v16	16805	158,66	16805	158,66	16805	16804,8	0%	135,92	5,65	130,26	45	16509,6	5950,62	1,8%	16,403,42	80,57	2,4%	
p22r-v16	18476	350,19	18476	350,19	18476	18475,9	0%	156,25	5,53	150,71	44	17953	6386,08	2,8%	18,305,81	70,26	0,9%	
p23r-v16	21070,4	589,15	21070,4	589,15	21070,5	21070,3	0%	132,43	6,54	125,88	40	20963,2	294,05	0,5%	20,600,00	66,36	2,2%	
p24r-v16	17351,2	191,19	17351,2	191,19	17351,2	17351,2	0%	84,76	4,72	80,04	30	17324,2	124,10	0,2%	17,155,62	65,20	1,1%	
p25r-v16	16764	345,72	16764	345,72	16764	16764	0%	98,62	4,35	94,28	33	16736	161,50	0,2%	16,333,80	61,93	2,6%	
p26r-v16	19945	267,21	19945	267,21	19945,1	19944,9	0%	62,86	4,23	58,62	32	19900,6	340,56	0,2%	19,616,22	59,75	1,6%	
p27r-v16	19686,6	366,45	19684,8	366,45	19686,6	19686,6	0%	82,64	4,54	78,09	35	19530	229,81	0,8%	19,447,62	54,27	1,2%	
p28r-v16	17794	222,74	17794	222,74	17794	17794	0%	91,94	4,64	87,30	35	17723,8	393,54	0,4%	17,641,80	57,82	0,9%	
p29r-v16	18527,4	196,06	18527,4	196,06	18527,4	18527,4	0%	85,72	4,98	80,73	33	18448,2	918,04	0,4%	18,280,22	58,91	1,3%	
p30r-v16	16302,6	350,79	16302,6	350,79	16302,6	16302,6	0%	85,71	4,58	81,13	35	16292,8	92,90	0,1%	16,037,42	61,78	1,6%	
Média		297,79		297,79			0%	91,46	4,84	86,62	35		890,05	0,7%		63,83	1,8%	

Tabela B.17: PDCGM para instâncias do grupo V17

Problema	Sol. Ot. LP	CPU LP (seg)	Sol. Ot. IP	CPU IP (seg)	U.B.	L.B.	GAPI (%)	CPUGMSub (seg)	CPU CPU (seg)	PMR	Iter	Sol. Heu.	CPU Heu (seg)	GAP2 (%)	Me Sol Heu	CPU MSH (seg)	GAP3 (%)
p1r-v17	17080,6	321,02	17079,4	321,02	17080,6	17080,5	0%	67,60	4,30	63,29	32	16977,4	197,84	0,6%	16,499,00	68,38	3,4%
p2r-v17	18906,8	247,51	18906,8	247,51	18906,8	18906,8	0%	80,20	4,66	75,54	34	18828,6	234,17	0,4%	18,614,41	62,89	1,5%
p3r-v17	15789	521,42	15789	521,42	15789	15789	0%	39,96	2,98	36,97	22	15769,4	126,42	0,1%	15,284,61	71,43	3,2%
p4r-v17	19352	212,03	19352	212,03	19352	19352	0%	156,50	5,91	150,58	42	19258,2	3072,58	0,5%	19,087,22	74,26	1,4%
p5r-v17	17567,2	270,93	17567,2	270,93	17567,2	17567,2	0%	54,81	3,88	50,93	29	17511,4	139,55	0,3%	17,256,61	58,25	1,8%
p6r-v17	19298	145,07	19298	145,07	19298	19298	0%	91,27	5,25	86,02	39	19094,2	473,58	1,1%	19,118,61	64,14	0,9%
p7r-v17	18878,2	221,95	18878,2	221,95	18878,2	18878,2	0%	77,74	4,94	72,80	37	18828,4	367,97	0,3%	18,640,03	66,91	1,3%
p8r-v17	17609,2	452,86	17609,2	452,86	17609,2	17609,2	0%	103,00	5,55	97,45	37	17402	454,71	1,2%	17,412,21	61,33	1,1%
p9r-v17	15016,4	169,92	15015,4	169,92	15016,4	15016,4	0%	85,60	5,07	80,53	37	14976	193,71	0,3%	14,806,22	58,07	1,4%
p10r-v17	18093,8	218,73	18093,8	218,73	18093,8	18093,7	0%	46,84	3,39	43,45	25	18084,8	37,04	0,0%	17,709,24	58,70	2,1%
p11r-v17	16387	288,47	16387	288,47	16387	16387	0%	65,18	4,45	60,72	33	16386,8	2,68	0,0%	15,944,42	59,99	2,7%
p12r-v17	21729,8	154,36	21729,8	154,36	21729,8	21729,7	0%	123,74	6,00	117,75	44	21653	895,73	0,4%	21,516,40	75,00	1,0%
p13r-v17	18939,2	367,64	18939,2	367,64	18939,2	18939,2	0%	90,29	4,66	85,62	35	18820,4	2678,85	0,6%	18,553,22	65,02	2,0%
p14r-v17	19244,2	174,83	19241,8	174,83	19244,3	19244,2	0%	75,16	4,81	70,35	36	19788,8	4,97	0,0%	19,034,21	59,55	1,1%
p15r-v17	19796,2	230,99	19796,2	230,99	19796,3	19796,2	0%	94,37	5,08	89,28	31	17245,2	192,14	0,0%	19,517,21	74,72	1,4%
p16r-v17	17294,6	297,04	17294,6	297,04	17294,6	17294,5	0%	62,83	4,27	58,55	32	16719,8	2,23	0,0%	17,047,79	82,05	1,4%
p17r-v17	16719,8	316,79	16719,8	316,79	16719,8	16719,8	0%	60,67	4,19	56,48	31	17350,2	195,71	0,5%	16,318,02	56,52	2,4%
p18r-v17	17435,4	289,64	17435,4	289,64	17435,4	17435,3	0%	53,77	3,56	50,21	26	17743,6	386,29	0,2%	17,076,41	73,46	2,1%
p19r-v17	17777,8	225,06	17777,8	225,06	17777,8	17777,8	0%	89,01	4,69	84,32	35	19823	209,64	0,3%	17,383,41	56,97	2,2%
p20r-v17	19878,6	283,55	19878,6	283,55	19878,6	19878,6	0%	166,58	6,00	160,57	48	16452,4	5977,57	1,5%	19,495,22	60,65	1,9%
p21r-v17	16694,8	161,12	16694,8	161,12	16694,8	16694,8	0%	129,01	5,86	123,15	43	18494	1738,82	0,3%	16,265,81	80,35	2,6%
p22r-v17	18542,6	218,73	18542	218,73	18542,6	18542,6	0%	80,69	4,94	75,75	37	21087,8	386,28	0,1%	18,322,19	70,16	1,2%
p23r-v17	21119,2	674,51	21119,2	674,51	21119,2	21119,2	0%	39,71	2,99	36,72	22	17399,2	151,08	0,5%	20,872,01	67,86	1,2%
p24r-v17	17489,4	273,28	17489,4	273,28	17489,4	17489,4	0%	69,23	4,51	64,72	33	16808,6	11,68	0,1%	17,165,21	66,60	1,9%
p25r-v17	16819,4	257,58	16819,4	257,58	16819,4	16819,3	0%	64,56	4,20	60,36	31	19991,4	9,61	0,0%	16,194,79	62,52	3,7%
p26r-v17	19995,4	176,09	19995,4	176,09	19995,4	19995,4	0%	75,67	4,67	70,99	35	19544,2	116,51	0,1%	19,711,41	60,36	1,4%
p27r-v17	19557,6	283,42	19557,6	283,42	19557,7	19557,6	0%	100,96	5,67	95,28	35	17756,8	160,44	0,3%	19,398,22	53,99	0,8%
p28r-v17	17807,6	146,41	17807,6	146,41	17807,6	17807,5	0%	96,53	4,23	92,29	31	18461,6	126,03	0,1%	17,611,81	58,35	1,1%
p29r-v17	18473,6	211,80	18473,6	211,80	18473,6	18473,5	0%	68,00	3,90	64,09	29	16212,8	160,15	0,5%	18,051,61	58,88	2,3%
p30r-v17	16288,6	299,74	16288,6	299,74	16288,6	16288,6	0%	83,61	4,65	78,96	34	642,89	642,89	0,4%	15,949,82	61,10	2,1%
Média		270,42		270,42			0%										1,8%

Tabela B.18: PDCGM para instâncias do grupo V130

Problema	U.B.	L.B.	GAP1 (%)	CPU		CPU	PMR	Iter	Sol.	Heu.	CPU		Me Sol	Heu	CPU	MSH
				PDCGMSub	(seg)						(seg)	(seg)				
p1r-v130	17437,8	17437,8	0%	25,63	4,61	21,02	14	17436,6	0,86	17483,99	184,77					
p2r-v130	19260	19260	0%	28,33	4,90	23,43	15	19205	0,38	18859,01	212,46					
p3r-v130	16634,5	16634,4	0%	27,98	4,58	23,40	14	16496,8	1,01	16677,21	252,1					
p4r-v130	19560	19559,9	0%	33,24	5,39	27,86	16	19560	0,30	19356,62	251,13					
p5r-v130	18169,2	18169,1	0%	27,81	4,87	22,95	15	18169,2	0,29	18291,61	159,13					
p6r-v130	19969,4	19969,4	0%	26,21	4,91	21,30	15	19957,4	0,46	19690,81	164,86					
p7r-v130	19213,8	19213,8	0%	25,26	4,59	20,68	14	19148,8	0,29	19132,43	160,5					
p8r-v130	18475,9	18475,8	0%	32,27	5,33	26,93	16	18472,6	2,05	18156,21	135,7					
p9r-v130	15371,4	15371,3	0%	24,90	4,60	20,30	14	15261,4	0,29	15121,82	115,6					
p10r-v130	18344,8	18344,8	0%	24,35	4,54	19,81	14	18288,8	0,38	18321,02	149,61					
p11r-v130	16799,9	16799,8	0%	27,85	4,38	23,47	13	16785,6	1,04	16578,22	145,89					
p12r-v130	22008,4	22008,4	0%	33,98	5,58	28,40	17	21910,4	0,61	21617,22	230,84					
p13r-v130	19628,6	19628,6	0%	30,34	5,24	25,09	16	19582	0,38	19265,62	137,83					
p14r-v130	19616,6	19616,6	0%	25,42	4,20	21,22	13	19616,6	0,39	19258,01	170,79					
p15r-v130	20673,2	20673,1	0%	27,09	4,65	22,43	14	20673,2	0,39	21421,23	216,57					
p16r-v130	17796,2	17796,1	0%	27,22	4,67	22,55	14	17754,2	0,29	17072,01	216,57					
p17r-v130	17345,2	17345,1	0%	25,97	4,22	21,75	12	17345,2	0,38	16888,81	178,4					
p18r-v130	17850,7	17850,5	0%	28,96	5,05	23,91	15	17835,2	1,31	17597,41	147,48					
p19r-v130	18190,6	18190,6	0%	27,06	4,39	22,67	13	18187,6	0,31	17967,60	208,81					
p20r-v130	20754,4	20754,3	0%	29,00	5,10	23,89	15	20672,4	0,96	19689,61	193,85					
p21r-v130	16953,2	16953,2	0%	34,99	5,94	29,06	17	16833,2	0,40	16660,01	145,04					
p22r-v130	18699,2	18699,2	0%	34,95	5,83	29,12	17	18699,2	0,40	18527,39	272,04					
p23r-v130	21525,6	21525,5	0%	28,64	5,28	23,36	15	21525,6	0,39	20842,21	190,04					
p24r-v130	18266,2	18266,2	0%	30,37	5,78	24,59	13	18216,2	0,43	18652,43	173,6					
p25r-v130	17064,9	17064,8	0%	41,87	8,01	33,85	14	17020,6	0,45	16822,40	214,61					
p26r-v130	20324,4	20324,4	0%	27,37	5,17	22,20	14	20282,4	0,31	20046,02	161,22					
p27r-v130	20003	20002,9	0%	25,39	4,10	21,28	12	19875	0,41	19295,42	177,04					
p28r-v130	17956	17956	0%	29,74	5,35	24,38	16	17928	0,39	17951,61	117,62					
p29r-v130	19074,6	19074,5	0%	26,78	5,03	21,75	15	18972,6	0,39	18818,41	161,39					
p30r-v130	16464,6	16464,6	0%	28,43	4,77	23,66	14	16402,6	0,41	16208,22	159,37					
Média			0%	28,91	5,04	23,88	15		0,54		180,16					

Referências Bibliográficas

AHUJA, R.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. *Network flows : theory, algorithms, and applications*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1993. ISBN 978-0136175490.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; REINALDO, M.; HORACIO, Y. *Pesquisa Operacional*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2015. ISBN 9788535271614.

BABONNEAU, F.; MERLE, O. d.; VIAL, J.-P. Solving large-scale linear multicommodity flow problems with an active set strategy and proximal-accpm. *Operations Research*, v. 54, n. 1, p. 184–197, 2006.

BABONNEAU, F.; VIAL, J.-P. Accpm with a nonlinear constraint and an active set strategy to solve nonlinear multicommodity flow problems. *Mathematical Programming*, v. 120, n. 1, p. 179–210, 2009. ISSN 1436-4646.

BARNHART, C.; HANE, C. A.; VANCE, P. H. Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity flow problems. *Operations Research*, v. 48, n. 2, p. 318–326, 2000.

BEAMON, B. M. Supply chain design and analysis:: Models and methods. *International Journal of Production Economics*, v. 55, n. 3, p. 281 – 294, 1998. ISSN 0925-5273.

BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust optimization – methodology and applications. *Mathematical Programming*, v. 92, n. 3, p. 453–480, 2002. ISSN 1436-4646.

BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations & Production Management*, v. 22, n. 2, p. 241–264, 2002.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. *Operations Research*, v. 52, n. 1, p. 35–53, 2004.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. ed. [S.l.]: Athena Scientific, 1997. ISBN 1886529191.

CAMERINI, P. M.; FRATTA, L.; MAFFIOLI, F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. In: _____. *Nondifferentiable Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975. p. 26–34. ISBN 978-3-642-00764-4.

CHASE, R.; AQUILANO, N. J.; JACOBS, F. R. *Production and operations management : manufacturing and services*. Boston, Mass: Irwin/McGraw-Hill, 1998. ISBN 007561278X.

CHEUNG, R. K.; CHEN, C.-Y. A two-stage stochastic network model and solution methods for the dynamic empty container allocation problem. *Transportation Science*, v. 32, n. 2, p. 142–162, feb 1998. ISSN 1526-5447. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.32.2.142>.

COLAVITE, A. S.; KONISHI, F. A matriz do transporte no brasil: uma análise comparativa para a competitividade. In: *Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia*. [S.l.: s.n.], 2015.

- CRAINIC, T. G. Long-haul freight transportation. In: _____. *Handbook of Transportation Science*. Boston, MA: Springer US, 2003. p. 451–516.
- DANTZIG, P. W. G. B. Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, INFORMS, v. 8, n. 1, p. 101–111, 1960. ISSN 0030364X, 15265463.
- DEJAX, P. J.; CRAINIC, T. G. Survey paper—a review of empty flows and fleet management models in freight transportation. *Transportation Science*, v. 21, n. 4, p. 227–248, 1987. ISSN 0041-1655.
- ERERA, A. L.; MORALES, J. C.; SAVELSBERGH, M. Robust optimization for empty repositioning problems. *Operations Research*, v. 57, n. 2, p. 468–483, 2009.
- FRANK, M.; WOLFE, P. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, v. 3, n. 1-2, p. 95–110, 1956.
- FRANTZESKAKIS, L. F.; POWELL, W. B. A successive linear approximation procedure for stochastic, dynamic vehicle allocation problems. *Transportation Science*, v. 24, n. 1, p. 40–57, 1990. ISSN 0041-1655.
- GHIANI, G.; LAPORTE, G.; MUSMANNO, R. *Introduction to logistics systems planning and control*. Hoboken, NJ, USA: J. Wiley, 2004. ISBN 978-0470849163.
- GONDZIO, J.; GONZÁLEZ-BREVIS, P.; MUNARI, P. Large-scale optimization with the primal-dual column generation method. *Mathematical Programming Computation*, v. 8, n. 1, p. 47–82, 2016. ISSN 1867-2957.
- GONDZIO, J.; SARKISSIAN, R. *Column generation with a Primal-Dual Method*. [S.l.], 1996.
- HELD, M.; KARP, R. M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, v. 18, n. 6, p. 1138–1162, 1970.
- HELD, M.; KARP, R. M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part ii. *Mathematical Programming*, v. 1, n. 1, p. 6–25, 1971.
- HOLMBERG, K.; YUAN, D. A lagrangian heuristic based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Research*, v. 48, n. 3, p. 461–481, 2000.
- HUGHES, R. E.; POWELL, W. B.; ARBOR, A. Mitigating end effects in the dynamic vehicle allocation model. *Management Science*, v. 34, n. 7, p. 859–879, 1988.
- IMAI, A.; NISHIMURA, E.; CURRENT, J. A lagrangian relaxation-based heuristic for the vehicle routing with full container load. *European Journal of Operational Research*, v. 176, n. 1, p. 87 – 105, 2007. ISSN 0377-2217.
- JONES, K. L.; LUSTIG, I. J.; FARVOLDEN, J. M.; POWELL, W. B. Multicommodity network flows: The impact of formulation on decomposition. *Mathematical Programming*, v. 62, n. 1-3, p. 95–117, 1993. ISSN 00255610.
- LIU, R.; JIANG, Z.; FUNG, R. Y.; CHEN, F.; LIU, X. Two-phase heuristic algorithms for full truckloads multi-depot capacitated vehicle routing problem in carrier collaboration. *Computers and Operations Research*, v. 37, n. 5, p. 950 – 959, 2010.
- LÜBBECKE, M. E.; DESROSIERS, J. Selected topics in column generation. *Operations Research*, INFORMS, v. 53, n. 6, p. 1007–1023, nov 2005. ISSN 0030-364X.
- POWELL, W. B. A stochastic model of the dynamic vehicle allocation problem. *Transportation Science*, v. 20, n. 2, p. 117–129, 1986. ISSN 0041-1655.

- POWELL, W. B. An operational planning model for the dynamic vehicle allocation problem with uncertain demands. *Transportation Research Part B: Methodological*, v. 21, n. 3, p. 217–232, 1987. ISSN 01912615.
- POWELL, W. B. A stochastic formulation of the dynamic assignment problem, with an application to truckload motor carriers. *Transportation Science*, v. 30, n. 3, p. 195–219, 1996. ISSN 0041-1655.
- POWELL, W. B.; CARVALHO, T. A. Dynamic control of logistics queueing networks for large-scale fleet management. *Transportation Science*, v. 32, n. 2, p. 90–109, 1998.
- POWELL, W. B.; CARVALHO, T. A. Real-time optimization of containers and flatcars for intermodal operations. *Transportation Science*, v. 32, n. 2, p. 110–126, 1998. ISSN 0041-1655.
- POWELL, W. B.; JAILLET, P.; ODONI, A. Stochastic and dynamic networks and routing. *Network Routing*, v. 8, p. 141–295, 1995.
- POWELL, W. B.; SHEFFI, Y.; THIRIEZ, S. The dynamic vehicle allocation problem with uncertain demands. p. 357–374, 1984.
- REEVES, C. *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*. New York: Halsted Press, 1993. ISBN 978-0470220795.
- RIBEIRO, P. C. C.; FERREIRA, K. A. Logística e transportes : Uma discussão sobre os modais de transporte e o panorama brasileiro . *XXII Encontro Nacional de Engenharia de Produção - ENEGEP*, p. 1–8, 2002.
- RIBEIRO, P. C. C.; FERREIRA, K. A. Logística e transportes: uma discussão sobre os modais de transporte e o panorama brasileiro. In: *XXII Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. [S.l.: s.n.], 2002.
- RIOPEL, D.; LANGEVIN, A.; CAMPBELL, J. F. The network of logistics decisions. In: _____. *Logistics Systems: Design and Optimization*. Boston, MA: Springer US, 2005. p. 1–38. ISBN 978-0-387-24977-3.
- ROCKAFELLAR, R. T. *Network flows and monotropic optimization*. Belmont, Mass: Athena Scientific, 1998. ISBN 1-886529-06-X.
- ROY, J. Recent trends in logistics and the need for real-time decision tools in the trucking industry. In: *System Sciences, 2001. Proceedings of the 34th Annual Hawaii International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2001.
- SETHI, S.; SORGER, G. A theory of rolling horizon decision making. *Annals of Operations Research*, v. 29, n. 1, p. 387–415, 1991. ISSN 1572-9338.
- SHAPIRO, J. F. Generalized lagrange multipliers in integer programming. *Operations Research*, v. 19, n. 1, p. 68–76, 1971.
- TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, v. 175, n. 2, p. 1070 – 1083, 2006. ISSN 0377-2217.
- VANDERBECK, F. Implementing mixed integer column generation. In: _____. *Column Generation*. Boston, MA: Springer US, 2005. p. 331–358. ISBN 978-0-387-25486-9.
- VASCO, R. A. *Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais*. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de São Carlos, 2012.

VASCO, R. A.; MORABITO, R. Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais. *Gestão e Produção*, scielo, v. 21, p. 271 – 284, 06 2014. ISSN 0104-530X.

VASCO, R. A.; MORABITO, R. The dynamic vehicle allocation problem with application in trucking companies in brazil. *Computers & Operations Research*, v. 76, p. 118 – 133, 2016. ISSN 0305-0548.

WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York (N.Y.), Chichester, Weinheim: J. Wiley & sons, 1998. (Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization). A Wiley-Interscience publication. ISBN 0-471-28366-5.