UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atrator pullback para uma equação de onda semilinear amortecida

Estefani Moraes Moreira

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

São Carlos-SP
Abril de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Atrator pullback para uma equação de onda semilinear amortecida

Estefani Moraes Moreira

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

"VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA"

Data da defesa:	26/02/2018
Visto do orientador:	

São Carlos-SP
Abril de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Estefani Moraes Moreira, realizada em 26/02/2018:

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento
UFSCar

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
USP

Karina Schiabel

Profa. Dra. Karina Schiabel
UFSCar

Dedico este trabalho
a Haide e ao Everaldo,
meus pais.

Agradecimentos

Durante todo o decorrer da minha vida, em especial agora, sou imensamente grata ao meus pais, por serem meu suporte e apoiarem todas as minhas decisões, dando-me a oportunidade de errar e acertar fazendo minhas próprias escolhas, por mais difícil que isso deva ter sido. Obrigada por me fazerem a pessoa que sou hoje e espero fazê-los orgulhosos. Agradeço também aos demais familiares.

Não poderia deixar de agradecer meu namorado, Anderson, por ser uma das pessoas mais incríveis que eu conheço e sempre me motivar a correr atrás do que acredito. Sempre vou ser grata por ter te conhecido.

Agradeço ao meus amigos, em especial aqueles que faziam parte da minha rotina diária: Cláudio, Thaysa, Juan, Felipe, Camila, Ana e meu colega Saulo.

Um agradecimento a todos os professores que fizeram parte da minha vida e que se importam com a profissão. Vocês me inspiraram profundamente! Tenho imenso orgulho de ter feito licenciatura e espero um dia conseguir inspirar alguém também.

Sou grata aos funcionários do Departamento de Matemática e ao meus colegas da pós-graduação, por toda a parceria no decorrer do mestrado.

E por último, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador por ter aceitado o trabalho de me orientar mesmo já sabendo a "dor de cabeça" que isto seria, pela experiência que teve no TCC. Professor, sou muito grata por todo o apoio, paciência e tranquilidade durante a elaboração do trabalho.

Agradeço a quem se dará ao trabalho de ler a minha dissertação, dediquei-me profundamente e com grande carinho à mesma, espero que isto seja perceptível durante a leitura.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um pouco sobre as teorias de semigrupos e atratores globais. Também falamos sobre processos de evolução e atratores pullback. E por fim, estudamos a existência e a regularidade do atrator pullback para o problema da forma

$$u_{tt} + \beta(t)u_t = \Delta u + f(u)$$

em um domínio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com condições de contorno de Dirichlet. A perturbação $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma função apropriada e $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função não-linear com uma condição de dissipatividade.

Palavras-chave: processos de evolução, atrator pullback, equação de onda semilinear amortecida.

Abstract

In this work, we present some of the theories of semigroups and global attractors. Also, we present process of evolution and pullback attractors. Finally, we show the existence and regularity of the pullback attractor for the problem

$$u_{tt} + \beta(t)u_t = \Delta u + f(u)$$

in a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with the Dirichlet boundary conditions, the damping $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ is a suitable function and $f \in C^2(\mathbb{R})$ is a nonlinear function with a dissipative condition.

Key-words: Evolution process, pullback attractor, damped wave equation.

Sumário

Lista de símbolos

SÍMBOLO	**SIGNIFICADO**
$\mathscr{C}(X)$	Conjuntos das funções contínuas de X em X
$\mathscr{L}(X, Y)$	Conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y
$\mathscr{L}(X)$	Conjunto dos operadores lineares contínuos de X em X
$R(A)$	Imagem do operador A
$B_Y(a, r) \quad (r > 0)$	Bola de centro a e raio r em Y
$\overline{A}$	Fecho do conjunto A
$\|\Omega\|$	Medida do conjunto Ω
X^*	Espaço dual de X
$\mathrm{Re}\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	Parte real do número α
$\mathrm{Im}\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	Parte imaginária do número α
$\langle f, x \rangle \ \ (f \in X^*, x \in X)$	Valor do operador f calculado em x
$\partial\Omega$	Fronteira de conjunto Ω

Prefácio

O conceito de sistema dinâmico tem importância fundamental na compreensão de muitos fenômenos naturais, serve para estudar modelos físicos, químicos, biológicos, entre outros. Matematicamente, um sistema dinâmico é uma família a um parâmetro (em geral o tempo) de aplicações de um espaço abstrato (o conjunto de estados) nele mesmo. Em geral, um sistema dinâmico está associado a uma equação diferencial.

Quando trabalhamos num sistema dinâmico podemos estudar a dinâmica backwards (comportamento do sistema no passado, quando o parâmetro é o tempo) e a dinâmica forwards (comportamento no futuro, quando o parâmetro é o tempo). Nos sistemas de caráter autônomo, as dinâmicas backwards e forwards tem o mesmo comportamento, o que pode não ser verdade nos sistemas não-autônomos.

Neste trabalho, buscamos apresentar a teoria de semigrupos e de processos de modo a oferecer uma introdução a quem não está habituado. Na segunda parte, fazemos uma aplicação da teoria a uma equação de onda semilinear amortecida, com o objetivo de mostrar a existência do atrator pullback e sua regularidade. Inicialmente, vamos modificar o problema a uma forma que exige menos regularidade, depois mostraremos que as soluções do problema modificado tem a regularidade necessária e nos apresentam soluções do problema inicial.

O primeiro capítulo é um conjunto de resultados preliminares, isto é, resultados que serão utilizados nos próximos capítulos. O Capítulo 2 apresenta um pouco sobre a teoria de semigrupos e atratores globais, potências fracionárias e teoria de interpolações. No terceiro capítulo, falaremos de processos, atratores pullback e apresentaremos alguns resultados gerais para tratar o problema do capítulo que o sucede. O último capítulo trata do problema de equação de onda semilinear amortecida.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar resultados básicos que utilizaremos no decorrer do trabalho. As principais referências para este capítulo são [1], [7], [11], [12], [14] e [15].

Adicionalmente, apresentaremos alguns poucos resultados sobre teoria de interpolação, que é tratada de maneira minuciosa em [26].

No decorrer do texto, se nada for declarado, assumimos que X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$.

1.1 Alguns resultados

Proposição 1.1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Suponhamos que $C \subset X$ seja um compacto e que existe sequência $\{x_n\}$ em X com $d(C, x_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Então $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente.*

A demonstração desta proposição é feita em [12].

Proposição 1.2 (Desigualdade de Young)**.** *Consideremos $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $1 < p, q < +\infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A demonstração desta proposição, pode ser encontrada em [15].

Corolário 1.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, temos*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

Em [14], a desigualdade acima é referida como Desigualdade de Cauchy.

Teorema 1.4 (Lax-Milgram)**.** *Suponhamos que X seja um espaço de Hilbert. Consideremos uma forma sesquilinear limitada $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para algum $c > 0$, ocorra $|b(x,x)| \geq c\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$. Então, para cada $f \in X^*$ existe $z_f \in X$ tal que*

$$f(x) = b(z_f, x), \qquad \forall x \in X.$$

Relembre que uma forma sesquilinear $b(\cdot,\cdot)$ é uma aplicação que é linear na segunda variável e antilinear na primeira variável e é dita limitada se $\|b\| := \sup\limits_{x,y \in X\setminus\{0\}} \frac{|b(x,y)|}{\|x\|_X \|y\|_X} < +\infty$.

1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$ e de Sobolev

Seja Ω um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, com a $\sigma-$álgebra de Lebesgue e medida de Lebesgue. Consideremos $1 \leq p < +\infty$ e

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Teorema 1.5 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Para $1 \leq p < +\infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, temos*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

O teorema acima nos mostra que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ satisfaz a desigualdade triangular e, a partir disto, fica muito simples ver que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma. Mais ainda:

Proposição 1.6. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um aberto.*

i) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ *é um espaço de Banach, para $1 \leq p < +\infty$.*

ii) $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *é um espaço de Hilbert, onde $\langle u, v\rangle_2 = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx$.*

Comumente, quando trabalhamos nos espaços $L^p(\Omega)$, utilizamos as duas desigualdades que seguem:

Teorema 1.7 (Desigualdade de Hölder)**.** *Consideremos $1 < p < +\infty$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis em Ω, temos*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$.

Corolário 1.8. *Suponhamos que* $|\Omega| < \infty$. *Para* $1 < p < q < +\infty$, *é válido que* $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. *Mais ainda,*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(\Omega)} \qquad \forall f \in L^q(\Omega).$$

Corolário 1.9. *Sejam* $1 < p < q < r < +\infty$. *Temos* $L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)},$$

para $\lambda \in (0,1)$ *tal que* $\frac{1}{q} = \lambda\frac{1}{p} + (1-\lambda)\frac{1}{r}$.

Para mais detalhes sobre os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, assim como a demonstração dos dois teoremas acima, veja [15].

Teorema 1.10. *O espaço* $L^p(\Omega)$ *é reflexivo, para* $1 < p < +\infty$.

Relembre que um espaço de Banach X é reflexivo se $X = X^{**}$, onde X^{**} representa o bidual de X.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Consideremos

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \Big\{ a \geq 0 : \mu\left(\{|f(x)| > a\}\right) = 0 \Big\},$$

com a convenção que $\inf \emptyset = -\infty$. Definimos o conjunto

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\}.$$

Teorema 1.11. *O espaço* $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ *é um espaço de Banach.*

Pouco utilizaremos sobre o espaço $L^\infty(\Omega)$ e, por tal razão, não o exploraremos. Para mais detalhes, bem como a demonstração dos resultados anteriores, veja [15] e [22].

Alguns problemas físicos não podem ser estudados de maneira satisfatória apenas com a ideia de solução usual. Isto serviu de motivação para definir os espaços de Sobolev e solução fraca de um problema. Apresentamos os resultados sem demonstração, mas as mesmas podem ser encontradas em [1] e [7].

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < +\infty$. Seja

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\ f \in C^\infty(\Omega)\ :\ f \text{ tem suporte compacto em } \Omega\ \}.$$

A função f tem suporte compacto em Ω quando existe um subconjunto compacto $Q \subset \Omega$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in \Omega \setminus Q$.

Proposição 1.12. *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < +\infty$.*

Para mais detalhes, veja [7].

Para $p \geq 1$, definimos

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists f_1, f_2, \ldots, f_n \in L^p(\Omega), \text{ com } \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = -\int_\Omega f_j \phi, \\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \forall j = 1, \ldots, n. \end{array} \right\}.$$

Denota-se $f_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, para $j = 1, \ldots, n$ e $\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Definição 1.13. *Consideremos $1 \leq p < +\infty$. O espaço de Sobolev é definido como o par $\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$, onde*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposição 1.14. *$\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ é um espaço de Banach. Além disso, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < +\infty$ e separável se $1 \leq p < +\infty$.*

No caso em que $p = 2$, o espaço de Sobolev é denotado por $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. O espaço $H^1(\Omega)$ admite o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Proposição 1.15. *O espaço $H^1(\Omega)$ com o produto interno (1.1) é um espaço de Hilbert.*

Proposição 1.16. *Seja $1 \leq p < +\infty$. Consideremos $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. É válido que $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{d}{dx_j}(uv) = \frac{du}{dx_j} v + u \frac{dv}{dx_j}, \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

A seguir definimos um subespaço de $W^{1,p}(\Omega)$ que aparecerá no problema do capítulo final. Consideremos $C_c^1(\Omega)$ o conjunto das funções em $C^1(\Omega)$ com suporte compacto.

Definição 1.17. *Definimos o conjunto $W_0^{1,p}(\Omega)$ como o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Em particular, denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

O subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é muito útil quando procuramos solução de uma equação diferencial com a condição de Dirichlet de fronteira, pelo seguinte resultado:

Teorema 1.18. *Seja $1 \leq p < +\infty$ e suponhamos a fronteira de Ω, denotada por $\partial\Omega$, uma curva de classe C^1. Para $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, são equivalentes:*

i) $u = 0$ *em* $\partial\Omega$;

ii) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7].

Teorema 1.19 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq k\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para mais detalhes, veja [7]. A desigualdade de Poincaré tem algumas consequências, em especial:

Corolário 1.20. *A forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle u, v\rangle_1 = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$. Mais ainda, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ é equivalente ao produto interno usual de $H_0^1(\Omega)$.

A fim de facilitar as contas, consideraremos o espaço $H_0^1(\Omega)$ com o produto interno acima, e a norma gerada por este.

Tendo definido $W^{1,p}(\Omega)$, podemos também considerar para $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geq 2$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^{m-1,p}(\Omega),\ \forall j = 1, \ldots, n \right\}.$$

É possível mostrar que se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ então existem $g_1, \ldots, g_m \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\phi^{(j)}(x)dx = (-1)^j \int_\Omega g_j(x)\phi(x)dx, \qquad \forall \phi \in C^\infty(\Omega),$$

onde $\phi^{(j)}$ é a $j-$ésima derivada de ϕ, para $j = 1, \ldots, m$. Usualmente, denotamos $D^j := g_j$, para todo $j = 1, \ldots, m$ e definimos

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Proposição 1.21. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}\right)$ *é um espaço de Banach. Além disso, a norma dada em* (1.2) *é equivalente à norma*

$$|||u||| = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^m u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Também podemos definir $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle D^j u, D^j v\right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Neste trabalho, usaremos bastante o espaço $H^2(\Omega)$, que podemos escrever como

$$H^2(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega), \ \forall j = 1, \dots, n\right\}.$$

Teorema 1.22. *Sejam* $r, s \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p, q < +\infty$. *Temos*

$$r - \tfrac{n}{p} \geq s - \tfrac{n}{q} \ \Rightarrow \ W^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,q}(\Omega).$$

No caso em que $r - \frac{n}{p} > s - \frac{n}{q}$, *a inclusão é compacta.*

Para mais detalhes, ver [14].

Teorema 1.23. *Suponhamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *seja um aberto limitado com fronteira de classe* C^1. *São injeções compactas*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \quad \textit{para } p < n \textit{ e para todo } r \in [1, q), \ \textit{onde } \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n},$$
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{para } p = n \textit{ e para todo } q \in [p, +\infty).$$

Em particular, para todo $p \geq 1$, temos $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e tal inclusão é compacta.

O teorema acima é parte do Teorema de Rellich-Kondrachov, que pode ser encontrado em [7].

1.3 Operadores setoriais

Consideremos X e Y espaços de Banach (reais ou complexos). Definimos o conjunto

$$\mathscr{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é um operador linear e contínuo}\}.$$

Se $X = Y$ usamos a notação $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X, X)$.

Definição 1.24. *Consideremos um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$. Definimos o resolvente de A, e representamos por $\rho(A)$, o conjunto*

$$\Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ imagem de } (\lambda I - A) \text{ é densa em } X \text{ e } (\lambda I - A)^{-1} \text{ é limitado}\Big\}.$$

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é dito o espectro de A. Para facilitar, denotemos a imagem de $(\lambda I - A)$ por $R(\lambda I - A)$.

Definição 1.25. *Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que um operador $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ é compacto se, para cada conjunto limitado $B \subset X$ temos $T(B)$ é um conjunto pré-compacto.*

Lembrando que um conjunto B é pré-compacto se $\overline{B}$ é compacto.

Definição 1.26. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com $\rho(A) \neq \emptyset$. Dizemos que A tem resolvente compacto se existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tal que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador compacto.*

Para $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ definimos o setor

$$\Sigma_{a,\theta} = \{\ \lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi,\ \ \lambda \neq a\ \},$$

onde $\arg\alpha$ representa o argumento (entre $[-\pi, \pi)$) de $\alpha \in \mathbb{C}$.

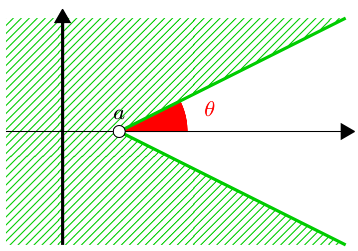

Figura 1.1: A área sombreada representa parte da região do setor $\Sigma_{a,\theta}$.

Definição 1.27. *Um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dito setorial se A é um operador fechado, $\overline{D(A)} = X$ e existem $M > 0$ e setor $\Sigma_{a,\theta} \subset \rho(A)$ tais que*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \qquad \forall \lambda \in \Sigma_{a,\theta}.$$

Usualmente, se $\overline{D(A)} = X$, dizemos que o operador A é densamente definido.

Proposição 1.28. *Consideremos A um operador setorial, com $\Sigma_{a,\theta} \subset \rho(A)$. Se $b \in \mathbb{R}$, então $A_b = A + bI$ é um operador setorial, com $\Sigma_{a+b,\theta} \subset \rho(A_b)$.*

Para mais detalhes, veja [14].

Proposição 1.29. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador fechado densamente definido. São equivalentes:*

i) A_s *é setorial, para todo* $s \in \mathbb{R}$;

ii) A_s *é setorial, para algum* $s \in \mathbb{R}$;

iii) Existem constantes $r, s \in \mathbb{R}$ *e* $M \geq 1$ *tais que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < r\} \subset \rho(A_s)$ *e* $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M$, *se* $\mathrm{Re}\lambda < r$.

A demonstração da proposição acima é feita em [14].

Consideremos $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ um espaço de Hilbert. Suponhamos $A : D(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido.

Definição 1.30. *O adjunto de Hilbert de A é dado por*

$$A^* : D(A^*) \subset H \longrightarrow H$$

com $D(A^*) = \big\{y \in H : \text{ o operador } D(A) \ni x \mapsto \langle Ax, y\rangle_H \text{ é limitado}\big\}$, *onde A^*y é tal que* $\langle z, A^*y\rangle_H = \langle Az, y\rangle_H$, *para todo* $z \in D(A)$.

É fácil ver que A^* é um operador linear e que, pelo Teorema de Representação de Riesz, está bem definido.

Definição 1.31. *Um operador linear $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é dito simétrico se é densamente definido e*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\,,\ \forall x, y \in D(A).$$

Em outras palavras, A é simétrico se $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*x = Ax$, para todo $x \in D(A)$.

Definição 1.32. *Suponhamos $A : D(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido. Dizemos que A é autoadjunto se $D(A^*) = D(A)$ e $A^* = A$.*

Notemos que se o operador é autoadjunto então é simétrico. A proposição abaixo nos oferece condições para garantir a recíproca.

Proposição 1.33. *Se* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *é um operador simétrico e sobrejetor então é autoadjunto, injetor e* $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.

Resultado retirado de [13].

Teorema 1.34. *Seja* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *um operador linear com* $\overline{D(A)} = H$. *Suponhamos que* A *seja autoadjunto e que exista* $m \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\langle Ax, x \rangle_H \geq m\|x\|_H^2, \qquad \forall x \in D(A).$$

Então A *é um operador setorial.*

Este resultado pode ser encontrado em [14].

Capítulo 2

Semigrupos

Neste capítulo estudaremos um pouco da teoria de semigrupos bem como dos atratores globais. Apresentaremos alguns resultados sobre existência de atratores globais. As principais referências para este capítulo são [3], [12], [17], [20] e [23].

2.1 C_0-semigrupos

Para $a \in \mathbb{R}$, consideremos a equação

$$\dot{x} = ax.$$

Já sabemos que as soluções são da forma $x(t) = ce^{at}$, para $t \in \mathbb{R}$, onde c é uma constante real.

Agora, consideremos $A \in \mathscr{L}(X)$. Queremos mostrar que o problema

$$\dot{x} = Ax$$

admite como solução $e^{At} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, para $t \geq 0$. Observemos que

$$\left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!}, \; \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} \text{ converge.}$$

Logo, e^{At} converge absolutamente, pelo teste da comparação. Concluímos assim que $e^{At} \in L(X)$, para todo $t \geq 0$.

Proposição 2.1. *Dado $A \in \mathscr{L}(X)$, temos $\left\{e^{tA} : t \geq 0\right\}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $e^{0.A} = I$, *onde I representa o operador identidade em $\mathscr{L}(X)$;*

ii) Para cada $t, s \geq 0$, temos $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$;

iii) Temos $\dfrac{d}{dt^+}\, e^{tA} = Ae^{tA}$;

iv) e^{tA} converge uniformemente a I quando $t \to 0^+$, isto é, $\|e^{tA} - I\|_{\mathscr{L}(X)} \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Demonstração.

i) Para cada $t \geq 0$ podemos escrever $e^{tA} = I + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ e calculando em $t = 0$, temos o desejado.

ii) Primeiramente, para cada $t \geq 0$, $Ae^{tA} = e^{tA}A$. De fato, para cada $x \in X$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!} Ax = \sum_{n=0}^{k} A\left[\frac{(tA)^n}{n!} x\right] = A\left[\sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!} x\right].$$

Logo, $e^{tA}Ax = Ae^{tA}x$, para todo $x \in X$, já que $A \in L(X)$ e $e^{tA} = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(tA)^n}{n!}$, por Teorema da Convergência Dominada.

Usando o fato de e^{At} ser uma série de potências, temos

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{n=1}^{+\infty} A\, \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} = A\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!}\right] = A\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right] = Ae^{tA}.$$

onde usamos implicitamente as limitações dos operadores A e e^{tA}.

Agora, para cada $z \in X$ e $s \geq 0$, consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = e^{As}z. \end{cases}$$

Observemos que $u(t) = e^{A(t+s)}z$ e $v(t) = e^{At}e^{As}z$, são ambas soluções do sistema definidas para $t \in \mathbb{R}$. Como $A \in \mathscr{L}(X)$, o sistema admite uma única solução. Consequentemente $e^{A(t+s)}z = e^{At}e^{As}z$, para todo $z \in X$.

Portanto, $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para $t, s \geq 0$.

iii) Para $x \in X$, temos $e^{tA}x - x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n x}{n!} = tAx + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}$.

Então, para cada $x \in X$, e $h > 0$,

$$\frac{e^{(t+h)A}x - e^{tA}x}{h} = \frac{e^{hA}e^{tA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA}x - x}{h} e^{tA}$$

e
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{hA}x-x}{h}=\lim_{h\to 0^+}Ax+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{h^{n-1}A^n}{n!}(x)=Ax.$$

Portanto, para cada $t\geq 0$,
$$\frac{d}{dt^+}e^{tA}=Ae^{tA}.$$

iv) Consideremos que, para $t\geq 0$,
$$\|e^{tA}-I\|_{\mathscr{L}(X)}\leq\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right\|_{\mathscr{L}(X)}\leq|t|\|A\|_{\mathscr{L}(X)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|t|^{n-1}\|A\|^{n-1}_{\mathscr{L}(X)}}{n(n-1)!}\right).$$

Como $n\in\mathbb{N}$, temos $n\geq 1$ e
$$\|e^{tA}-I\|_{\mathscr{L}(X)}\leq|t|\|A\|_{\mathscr{L}(X)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|t|^{n-1}\|A\|^{n-1}_{\mathscr{L}(X)}}{(n-1)!}\right)=|t|\|A\|_{\mathscr{L}(X)}e^{|t|\|A\|_{\mathscr{L}(X)}}\overset{t\to 0^+}{\longrightarrow}0.$$

$\square$

Baseado nas propriedades da família $\{e^{tA}:t\geq 0\}$, definimos:

Definição 2.2. *Uma família $\{T(t):t\geq 0\}\subset\mathscr{L}(X)$ é dita semigrupo se satisfaz*

i) $T(0)=I$, *onde I é o operador identidade em $\mathscr{L}(X)$;*

ii) $T(t+s)=T(t)T(s)$, *para todo $t,s\geq 0$;*

iii) A função $[0,+\infty)\times X\ni(t,x)\longmapsto T(t)x\in X$ é contínua.

Também é possível definir um semigrupo $\{T(t):t\geq 0\}\subset C(X)$ mas neste trabalho, supomos que estamos trabalhando com operadores lineares.

Se não houver perigo de confusão, denotaremos o semigrupo $\{T(t):t\geq 0\}$ simplesmente por $T(\cdot)$.

O semigrupo $\{T(t):t\geq 0\}$ é dito semigrupo fortemente contínuo ou C_0-semigrupo se $\|T(t)x-x\|_X\overset{t\to 0^+}{\longrightarrow}0$. No caso em que $\|T(t)-I\|_{\mathscr{L}(X)}\overset{t\to 0^+}{\longrightarrow}0$, o semigrupo é dito uniformemente contínuo.

Observação 2.3. *Um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t):t\geq 0\}$ é um C_0-semigrupo. De fato, para cada $x\in X$, temos*
$$\|T(t)x-x\|_X\leq\|T(t)-I\|_{\mathscr{L}(X)}\|x\|_X\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

A recíproca da observação acima não é verdadeira, veja [17].

Teorema 2.4. *Suponhamos que* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *seja um* C_0-*semigrupo. Então existem* $M \geq 1$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{t\beta}, \ \forall t \geq 0.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23]. No caso especial em que $M = 1$ e $\beta = 0$, isto é, $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq 1, \ \forall t \geq 0$, o semigrupo é dito semigrupo de contração.

Definição 2.5. *Dado um* C_0-*semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *sobre* X, *o gerador infinitesimal de* $T(\cdot)$ *é a aplicação* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, *onde*

$$D(A) = \left\{ x \in X \ : \ \textit{existe} \ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$$

e o operador é definido por $Ax = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}$.

Teorema 2.6. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um* C_0-*semigrupo. Temos:*

a) *Para todo* $x \in X$, *a função* $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x$ *é contínua.*

b) $[0, +\infty) \ni t \mapsto \|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)}$ *é semi-contínua inferiormente.*

c) *Se* A *é o gerador infinitesimal de* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *então* A *é um operador fechado com* $\overline{D(A)} = X$.

d) *Para* $x \in D(A)$ *temos* $T(t)x \in D(A)$ *e a função* $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t)x$ *é continuamente diferenciável com*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \qquad \forall t \geq 0.$$

e) $\bigcap\limits_{n \geq 1} D(A^n)$ *é denso em* X.

f) *Suponhamos que* $\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$, $\forall t \geq 0$. *Então, para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, *com* $\mathrm{Re}\lambda > \beta$ *é válido*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3] e [23].

Proposição 2.7. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ são C_0-semigrupos com o mesmo gerador infinitesimal então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

A demonstração é feita em [23]. Este resultado nos mostra que um operador pode ser o gerador infinitesimal de um único C_0-semigrupo.

Teorema 2.8. *Consideremos X um espaço de Banach. Suponhamos que A seja gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(\cdot)$. Para $x_0 \in D(A)$, o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite uma única solução $\xi \in C^1(\mathbb{R}^+, D(A))$. Mais ainda, $\xi(t) = T(t)x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4].

Notemos que para $A \in \mathscr{L}(X)$, o resultado já era conhecido, pois $\xi(t) = e^{tA}x_0, \ \forall t \geq 0$.

Consideremos o setor $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$, onde $\theta_1 < 0 < \theta_2$.

Definição 2.9. *Suponhamos que X seja um espaço de Banach. Dizemos que um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico se existe um setor Σ e existe uma família $\{S(z) : z \in \Sigma\}$ que satisfaz:*

i) Para $t \geq 0$, temos $S(t) = T(t)$;

ii) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \Sigma$;

iii) A função $\Sigma \ni z \mapsto S(z)$ é analítica.

Teorema 2.10. *Se A é um operador setorial em X então $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.*

Demonstração feita em [16]. É possível mostrar que a recíproca também é válida.

Notemos que na definição de gerador infinitesimal é necessário o conhecimento do C_0-semigrupo. Apresentaremos o Teorema de Hille-Yosida, que oferece oportunidade de mostrar que um operador é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, sem precisar exibí-lo.

Teorema 2.11 (Teorema de Hille-Yosida). *Seja A um operador linear (limitado ou não). O operador A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações se, e somente se, as duas condições acontecem:*

i) $\overline{D(A)} = X$ *e A é um operador fechado;*

ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ *e para $\lambda > 0$, ocorre a seguinte limitação* $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

A prova do Teorema de Hille-Yosida envolve diversos resultados preliminares e pode ser encontrada em [12].

Nosso objetivo agora é apresentar o teorema de Lumer-Phillips que nos fornece uma ferramenta para identificar se um operador é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Consideremos X um espaço de Banach e X^* o seu dual. Também denotaremos por 2^{X^*} o conjunto das partes de X^*. A aplicação dualidade é definida por

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow 2^{X^*} \\ x &\longmapsto F(x) = \left\{ f \in X^* : f(x) = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X^*} \right\}. \end{aligned}$$

A função está bem definida pois o Teorema de Hahn-Banach garante que $F(x) \neq \emptyset,\ \forall x \in X$.

A fim de facilitar a escrita, passemos a utilizar a seguinte notação: $\langle f, x\rangle := f(x)$ para $f \in X^*$ e $x \in X$.

Definição 2.12. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para cada $x \in D(A)$ existir $f \in F(x)$ satisfazendo $Re\langle f, Ax\rangle \leq 0$, onde $Re\langle f, Ax\rangle$ representa a parte real do número complexo $\langle f, Ax\rangle$.*

Proposição 2.13. *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se, para cada $\lambda > 0$,*

$$\|(\lambda I - A)x\|_{\mathscr{L}(X)} \geq \lambda \|x\|_X, \qquad \forall x \in D(A).$$

A demonstração da proposição é feita em [23].

Teorema 2.14 (Teorema de Lumer-Phillips). *Suponhamos que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ seja um operador linear densamente definido. São válidos:*

i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 I - A) = X$ então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X então A é um operador dissipativo e $R(\lambda I - A) = X$ para $\lambda > 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23].

Definição 2.15. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear densamente definido. Definimos o adjunto de A como o operador $A^t : D(A^t) \subset X^* \longrightarrow X^*$, onde $D(A^t)$ é formado por todos os funcionais $f \in X^*$ tal que exista $h_f \in X^*$ com $\langle f, Ax \rangle = \langle h_f, x \rangle$, para cada $x \in D(A)$ e é dado por $A^t f = h_f$.*

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo em X. Consideremos $\{T(t)^* : t \geq 0\}$, onde para cada $t \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t)^* : X^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto T(t)^* f \end{aligned}$$

é o operador adjunto de $T(t)$, isto é, $\langle T(t)^* f, x \rangle = \langle f, T(t)x \rangle$, $\forall x \in X$.

A família $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ é um semigrupo, não necessariamente fortemente contínuo.

Proposição 2.16. *Suponhamos que X seja um espaço de Banach reflexivo e consideremos um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ com gerador infinitesimal A. Então $\{T(t)^* : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A^t.*

Veja o resultado em [11].

Recorde o fato de que se X é espaço de Hilbert então X é um espaço reflexivo, veja em [22].

Queremos apresentar o Teorema de Stone. Antes, recordemos a seguinte definição:

Definição 2.17. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador U é dito unitário se $U^* = U^{-1}$, onde U^* representa o adjunto de Hilbert de U.*

Teorema 2.18 (Teorema de Stone)**.** *Suponhamos H um espaço de Hilbert. Um operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores unitários em H se, e somente se, iA é um operador auto-adjunto.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [11].

2.2 Atratores globais

Sejam A e B subconjuntos de X, definiremos a semi-distância de Hausdorff entre A e B por

$$\mathrm{d}(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b),$$

onde $d(a,b)$ é a distância usual de $a, b \in X$.

Observemos que $\mathrm{d}(A,B)=0$ implica $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Definição 2.19. *Sejam $B, C \subset X$. Dizemos que*

i) B atrai C sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $\mathrm{d}(T(t)C, B) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Nestas condições, dizemos que C é atraído por B.

ii) B absorve C sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)C \subset B$, para todo $t \geq t_0$.

Definição 2.20. *Um conjunto $A \subset X$ é dito positivamente invariante sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se para todo $t \geq 0$, $T(t)A \subset A$ e é dito invariante sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se para todo $t \geq 0$, $T(t)A = A$.*

Dado $B \subset X$, podemos definir os seguintes conjuntos

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t\geq 0} T(t)B \qquad \text{e} \qquad \omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}.$$

O conjunto $\gamma^+(B)$ é chamado de órbita positiva de B e $\omega(B)$ é o conjunto $\omega-$limite de B. É possível mostrar que

$$\omega(B) = \Big\{ x \in X \ : \ \exists \{x_n\} \subset X, \ \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ com } t_n \to +\infty \text{ e } T(t_n)x_n \to x \Big\}.$$

Definição 2.21. *Seja $A \subset X$ um conjunto não-vazio e invariante. Dizemos que*

i) A é estável se dada vizinhança $U \subset X$ de A, existe uma vizinhança B de A de modo que $T(t)B \subset U$, para todo $t \geq 0$.

ii) A é assintoticamente estável se A é estável e existe vizinhança W de A tal que A atrai todo ponto $x \in W$, isto é, $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)x \in A$.

iii) A é uniformemente assintoticamente estável se A é estável e existe vizinhança W de A que é atraída por A.

Observemos que $iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$.

Definição 2.22. *Um conjunto $A \subseteq X$ é dito atrator global de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X.*

Proposição 2.23. *Dado um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. O semigrupo admite no máximo um atrator global.*

Demonstração. Suponhamos que existam $A, B \subset X$ conjuntos não-vazios, compactos, invariantes e que atraem subconjuntos limitados de X. O conjunto A é limitado pois é compacto. Como B atrai subconjuntos limitados, pela invariância de A, segue que

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(T(t)A, B) \to 0, \qquad \text{quando } t \to +\infty.$$

Logo $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Da mesma forma, B é um conjunto limitado, pois é compacto e A atrai subconjuntos limitados. Pela invariância de B, segue que

$$\mathrm{d}(B, A) = \mathrm{d}(T(t)B, A) \longrightarrow 0, \qquad \text{quando } t \to +\infty.$$

E então $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Consequentemente $A = B$, já que são conjuntos fechados. □

Podemos tirar algumas considerações. Seja $A \subset X$ o atrator global de um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $B \subset X$ um conjunto limitado e invariante. Temos, para todo $t \geq 0$, $B = T(t)B$ e então

$$\mathrm{d}(B, A) = \mathrm{d}(T(t)B, A) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $\overline{B} \subset A$. Concluímos que A é o elemento maximal entre os conjuntos limitados e invariantes sob $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Consideremos $C \subset X$ um conjunto limitado e fechado que atrai subconjuntos limitados de X. Em particular, C atrai A e então

$$\mathrm{d}(A, C) = \mathrm{d}(T(t)A, C) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, $A \subset C$, o que nos mostra que A é o elemento minimal entre os conjuntos limitados e fechados que atraem limitados de X.

Definição 2.24. *Uma função contínua $u : \mathbb{R} \longrightarrow X$ é uma solução global para $\{T(t) : t \geq 0\}$ se, para cada $t \geq 0$,*

$$T(t)u(s) = u(t+s) \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.25. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo que possui atrator global $\mathscr{A}$. Temos*

$$\mathscr{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global } u : \mathbb{R} \to X, \text{ com } u(0) = x\}.$$

A demonstração deste teorema é encontrada em [13].

2.3 Existência do atrator global

Definição 2.26. *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito*

i) ponto dissipativo se existe $B \subset X$ não-vazio, limitado e que atrai todo ponto de X, isto é, $\mathrm{d}(T(t)x, B) \to 0$ quando $t \to +\infty$, para todo $x \in X$.

ii) limitado dissipativo se existe $B \subset X$ não-vazio, limitado e que atrai subconjuntos limitados de X.

Definição 2.27. *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito assintoticamente suave se para cada conjunto $B \subset X$ não-vazio, limitado, fechado e positivamente invariante existe um compacto $C \subset B$ que atrai B.*

Proposição 2.28. *Suponhamos que um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ seja assintoticamente suave. Suponhamos que $B \subset X$ é um conjunto não-vazio para o qual existe $t_B \geq 0$ com $\bigcup_{t \geq t_B} T(t)B$ compacto. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração feita em [14].

Corolário 2.29. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo que possui atrator global $\mathscr{A}$. Então*

i) $\mathscr{A}$ é a união de conjuntos $\omega(B)$, para $B \subset X$ limitado.

ii) $\mathscr{A}$ é a união de conjuntos $\omega(B)$, para $B \subset X$ compacto.

Resultado encontrado em [14].

Teorema 2.30. *Suponhamos que um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ seja ponto dissipativo, assintoticamente suave e $\gamma^+(B)$ seja limitado, para cada conjunto limitado B de X. Temos $T(t)$ admite atrator global.*

Demonstração feita em [14].

Definição 2.31. *Dizemos que $x \in X$ é um ponto de equilíbrio para $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)x = x$, para todo $t \geq 0$.*

Definição 2.32. *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito compacto se para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é um operador compacto, isto é, se B é um limitado de X temos $T(t)B$ é pré-compacto.*

Proposição 2.33. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo compacto então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente suave.*

Demonstração feita em [14].

Lema 2.34. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo então para cada $B \subset X$ limitado e $t_1 > t_0 \geq 0$ o conjunto $\displaystyle\bigcup_{t\in[t_0,t_1]} T(t)B$ é limitado.*

Veja demonstração em [14].

Definição 2.35. *Dizemos que um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto se, para cada $B \subset X$ não-vazio para o qual exista $t_B \geq 0$ com $\displaystyle\bigcup_{t\geq t_B} T(t)B$ é limitado, $\{T(t_n)x_n\}$ tal que $x_n \in B$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ admite uma subsequência convergente.*

Proposição 2.36. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Temos $T(\cdot)$ é assintoticamente suave se, e somente se, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.*

Ver demonstração em [14].

Teorema 2.37. *Consideremos $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo tal que para todo $t \geq 0$, $T(t) = S(t) + K(t)$, onde:*

i) Para cada $B \subset X$ limitado, existe $t_B \geq 0$ com $K(t)B$ pré-compacto, para todo $t \geq t_B$.

ii) Para cada $B \subset X$ limitado, existe $t_B \geq 0$ tal que $\sup_{x\in B} \|S(t)x\|_X < +\infty$, para todo $t \geq t_B$ e $\sup_{x\in B} \|S(t)x\|_X \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Para cada conjunto não-vazio $B \subset X$, fechado, limitado e positivamente invariante, mostremos que $\omega(B)$ é um subconjunto compacto de B e que atrai B.

Seja $\varepsilon > 0$. Existem $t_0, t_1 > 0$ tais que

$$\sup_{x\in B} \|S(t)x\|_X < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t \geq t_0. \tag{2.1}$$

$$K(t)B \text{ é pré-compacto} \qquad \forall t \geq t_1. \tag{2.2}$$

Logo, ambos os resultados valem para $t \geq \max\{t_0, t_1\}$. Como um conjunto compacto é totalmente limitado, existem $n \in \mathbb{N}$, e $x_1, \ldots, x_n \in K(t)B$ tais que

$$K(t)B \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_X(x_j, \tfrac{\varepsilon}{2}). \tag{2.3}$$

Observemos que

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} T(s)B} \supseteq \bigcap_{t\geq 0} \overline{T(t)B}.$$

Por outro lado, B é positivamente invariante e então

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} T(t)B} \subset \bigcap_{t\geq 0} \overline{T(t)B} \subset \overline{T(t)B} \subset \overline{S(t)B + K(t)B}.$$

Usando as equações (2.1) e (2.3), temos

$$\omega(B) \subset B_X\left(0, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) + \bigcup_{j=1}^{n} B_X\left(x_j, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_X(x_j, \varepsilon).$$

Acabamos de mostrar que $\omega(B)$ é totalmente limitado. Agora, por definição $\omega(B)$ é fechado e, como X é espaço de Banach, segue que $\omega(B)$ é compacto.

Sejam $\{x_n\} \in B$ e $t_n \in \mathbb{R}$ com $t_n \to +\infty$. A sequência

$$\{T(t_n)x_n\} = \left\{S(t_n)x_n + K(t_n)x_n\right\}$$

é totalmente limitada e possui subsequência convergente. Logo, $\omega(B) \neq \emptyset$. É claro que $\omega(B) \subset B$, pois B é fechado e positivamente invariante.

Basta provar agora que $\omega(B)$ atrai o conjunto B. De fato, se isto não ocorresse, existiriam sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, com $t_n \to +\infty$ tal que $\mathrm{d}(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas a sequência é totalmente limitada, pelo argumento acima, logo admite uma subsequência que converge a um ponto de $\omega(B)$, pela definição de tal conjunto. Chegamos a uma contradição.

Portanto, provamos deste modo que $T(t)$ é assintoticamente compacto. $\square$

Quando obtemos a existência do atrator também buscamos conhecer características sobre tal conjunto. Dado um semigrupo com atrator global, nosso objetivo é estudar quanto uma perturbação pode afetar o atrator global.

Consideremos (X, d) e $(\Lambda, \overline{d})$ espaços métricos.

Definição 2.38. *Dizemos que uma família* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset X$, *é*

i) semicontínua superiormente em λ_0 *se*

$$\mathrm{d}(A_\lambda, A_{\lambda_0}) = \sup_{x_\lambda \in A_\lambda} d(x_\lambda, A_{\lambda_0}) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

ii) semicontínua inferiormente em λ_0 *se*

$$\mathrm{d}(A_{\lambda_0}, A_\lambda) = \sup_{x \in A_{\lambda_0}} d(x, A_\lambda) \overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

Para mais detalhes sobre a semicontinuidade de atratores globais, veja [12]. Em [10] e em [25] é mostrada a continuidade de um atrator global para um problema parabólico semilinear.

2.4 Potências fracionárias

Consideremos X um espaço de Banach. Dado um operador $A : D(A) \subset X \to X$, queremos definir o operador A^α para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $A^0 = I$ e $A^n = \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{n \text{ vezes}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tais operadores são ditos potências fracionárias de A.

É possível mostrar que se $A \in \mathscr{L}(X)$ é um operador fechado, com $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, conseguimos definir tais potências. No entanto, como é o caso do problema do último capítulo, o operador nem sempre é limitado.

Para nossa sorte, é possível definir potências fracionárias para uma classe mais ampla de operadores.

Definição 2.39. *Suponhamos que* $A : D(A) \subset X \to X$ *seja um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que* A *é um operador do tipo positivo se* $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ *e existe constante* $C > 0$ *de modo que*

$$\|(1+s)(sI + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \le C, \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Observação 2.40. *Se o operador A é do tipo positivo, existem $\theta \in (0,\pi)$ e $r > 0$ tais que o setor*

$$\Sigma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \theta\} \cup \{\lambda : \ |\lambda| < r\} \subset \rho(-A)$$

e para algum $C > 0$,

$$(1+|\lambda|)\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C, \qquad \forall \lambda \in \Sigma_\theta.$$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\alpha < 0$, defina

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^\alpha (\lambda I + A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma} \lambda^\alpha (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

onde Γ é uma curva simples em $\Sigma_\theta \setminus \mathbb{R}^+$ suave por partes, indo de $\infty e^{-i\phi}$ a $\infty e^{i\phi}$, com $0 < \phi < \theta$ e $-\Gamma = \{-\lambda : \lambda \in \Gamma\}$.

É possível mostrar que a potência está bem definida, isto é, não importa a curva Γ considerada. Para mais detalhes, ver [11].

Consideremos A um operador do tipo positivo. Os resultados que seguem não serão demonstrados, mas suas demonstrações podem ser encontradas em [11].

Proposição 2.41. *Temos*

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{ com } \mathrm{Re}\alpha < 0, \ \mathrm{Re}\beta < 0.$$

Proposição 2.42. *Existe $M > 0$ tal que, para cada $\alpha \in (0,1)$, temos $\|A^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M$.*

Observemos que tal limitação não depende de $\alpha \in (0,1)$ considerado.

Proposição 2.43. *$\{A^\alpha : \alpha \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\alpha < 0\} \cup \{I\}$ é um semigrupo analítico.*

Lema 2.44. *Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\alpha < 0$, temos A^α é injetor.*

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\alpha > 0$, consideremos $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ e podemos definir

$$\begin{aligned} A^\alpha : D(A^\alpha) \subset X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto A^\alpha x = y, \end{aligned}$$

para $y \in D(A^{-\alpha})$, com $A^{-\alpha} y = x$.

Notemos que tal definição faz sentido pelo Lema anterior, já que $A^{-\alpha}$ é bijetora sobre $R(A^{-\alpha})$.

Proposição 2.45. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\beta > \mathrm{Re}\alpha > 0$. São válidas as seguintes propriedades:*

i) $\overline{D(A^\alpha)} = X$;

ii) $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha) \subset X$;

Além disso, temos

$$\begin{aligned} A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x = A^\beta A^\alpha x, &\qquad x \in D(A^{\alpha+\beta}),\\ A^{-\alpha+\beta}x = A^{-\alpha}A^\beta x, &\qquad x \in D(A^\beta),\\ A^{\alpha-\beta}x = A^{-\beta}A^\alpha x, &\qquad x \in D(A^\alpha). \end{aligned}$$

Proposição 2.46. *Suponhamos que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $0 < \mathrm{Re}\alpha < n+1$ então podemos escrever*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{n!}{(1-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\int_0^{+\infty} \lambda^{n-\alpha}(\lambda I + A)^{-n-1}d\lambda.$$

Em particular, para $n = 1$, e $x \in D(A)$

$$A^\alpha x = A^{\alpha-1}Ax = A^{-(1-\alpha)}Ax = \frac{\sin\big(\pi(1-\alpha)\big)}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty} \lambda^\alpha(\lambda I + A)^{-2}Ax\, d\lambda = A_\alpha x.$$

Resta apenas definir as potências fracionárias para $\mathrm{Re}\alpha = 0$. Consideremos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $-1 < \mathrm{Re}\alpha < 1$ e então $0 < \mathrm{Re}(\alpha+1) < 2$.

Definimos

$$A_\alpha x := \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty} s^\alpha(sI + A)^{-2}Axds, \qquad \forall x \in D(A).$$

Agora, $A^{\alpha-1} = A^{-(1-\alpha)}$ e $0 < \mathrm{Re}(1-\alpha) < 2$.

É possível mostrar que o operador A_z é fechável, isto é, para cada sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ temos $A_z x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\alpha = 0$, definimos $A^\alpha =$ fecho de A_α, isto é, a extensão de A_z.

Teorema 2.47. *Seja A um operador do tipo positivo. Temos*

i) A^α *é um operador fechado densamente definido, para todo* $\alpha \in \mathbb{C}$;

ii) Para $\alpha \in \mathbb{C}$, *com* $\mathrm{Re}\alpha < 0$, *temos* $A^\alpha \in \mathscr{L}(X)$.

Para $\alpha > 0$, definimos $X^\alpha := R(A^{-\alpha})$. O conjunto $\{X^\alpha : \alpha > 0\}$ é dito o conjunto das potências fracionárias do operador A.

Proposição 2.48. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, temos $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ de maneira contínua e X^α é denso em X^β.

ii) Se $\rho(A)$ é um conjunto compacto então X^α é compacto, para cada $\alpha \geq 0$.

iii) Para $\alpha \geq 0$, a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{X^\alpha} : X^\alpha &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha x\|_X \end{aligned}$$

é uma norma e $(X^\alpha, \|\cdot\|_{X^\alpha})$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.49. *Consideremos H um espaço de Hilbert e o operador $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ densamente definido para o qual existe $m > 0$ com $\langle Ax, x\rangle_H \leq m\|x\|_H^2$, para todo $x \in D(A)$. Então A é um operador do tipo positivo e existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tais que*

$$\|A^{it}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C_\varepsilon, \ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Além disso, para cada $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (-\lambda)^z (\lambda I + A)^{-1} d\lambda,$$

onde Γ é união dos raios $-b + \infty e^{i\theta}$ e $-b + \infty e^{-i\theta}$, com $b \in (0, m)$ e $\theta \in (0, \pi)$, orientada de forma que a parte imaginária cresça ao longo de Γ.

A demonstração do teorema acima é feita em [2].

Teorema 2.50. *Consideremos H um espaço de Hilbert. Suponhamos que $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ seja um operador autoadjunto, densamente definido e que, para algum $\alpha > 0$, $\langle Ax, x\rangle_H \geq \alpha\|x\|_H^2$, para todo $x \in D(A)$. Então A é um operador do tipo positivo e existe $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ com*

$$A^{it} \in \mathscr{L}(H) \qquad e \qquad \|A^{it}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C_\varepsilon, \qquad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Este resultado está demonstrado em [2].

2.4.1 Potências fracionárias do operador adjunto A^t

Suponhamos que X seja um espaço de Banach reflexivo. Consideremos $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador setorial positivo definido, com setor $\Sigma_\theta \subset \rho(-A)$ e

$$(1+|\lambda|)\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C \qquad (C>0). \tag{2.4}$$

Consideremos A^t o operador adjunto de A, veja Definição 2.15. Para facilitar, vamos utilizar a seguinte notação: $X_* := X^*$.

Teorema 2.51. *Nas condições acima, A^t é um operador setorial com mesma constante C de* (2.4) *e mesmo setor Σ_θ.*

Além disso,

$$(X^{-\alpha})^* = X_*^\alpha, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Para $u \in X$ temos $A^\alpha u \in X^{-\alpha}$ e para $v \in X^{-\alpha}$, $A^{-\alpha} v \in X$.

Se $x \in A^{-\alpha}$ então

$$\langle \xi, x\rangle = \left\langle \xi, A^\alpha A^{-\alpha} x\right\rangle = \left\langle \xi \circ A^\alpha, A^{-\alpha} x\right\rangle$$

e então $\xi \in (X^{-\alpha})^* \Leftrightarrow \xi \circ A^\alpha \in X_*$.

Agora, usando a definição de adjunto, para cada $x \in D(A^\alpha)$, temos

$$\langle \xi \circ A^\alpha, x\rangle = \langle \xi, A^\alpha x\rangle = \left\langle (A^\alpha)^t \xi, x\right\rangle$$

e então $\xi \circ A^\alpha \in D(A^\alpha)^* \Leftrightarrow \xi \in D\left((A^\alpha)^t\right)$.

Falta mostrar que as normas também são equivalentes. Para isto, veja que

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_{(X^{-\alpha})^*} &= \sup\left\{\langle \xi, x\rangle : x \in X^{-\alpha},\ \|x\|_{X^{-\alpha}} = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\langle \xi, x\rangle : x \in X^{-\alpha},\ \|A^{-\alpha} x\|_X = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\langle \xi, A^\alpha y\rangle : y \in X,\ \|y\|_X = 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left\langle (A^\alpha)^t \xi, y\right\rangle : y \in X,\ \|y\|_X = 1\right\}\\
&= \|(A^\alpha)^t \xi\|_{X_*}\\
&= \|\xi\|_{(X_*)^\alpha}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4.2 Potências fracionárias de um operador autoadjunto

Suponhamos H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador autoadjunto, com resolvente compacto e que exista $C > 0$ tal que

$$\langle Au, u\rangle_H \geq C\|u\|_H^2, \qquad \forall u \in D(A).$$

Nestas condições, sabemos que $\sigma(A)$ é formado por apenas uma quantidade enumerável de autovalores com multiplicidade finita, digamos $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ onde λ_j são autovalores com multiplicidade $m_j \in \mathbb{N}$ e $\lambda_j < \lambda_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Para detalhes sobre este resultado, consulte: [7], [11] e [22].

Observemos que, se u_j é um autovetor não-nulo associado ao autovalor λ_j, temos

$$\lambda_j\|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle Au_j, u_j\rangle_{L^2(\Omega)} \geq C\|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e então $\lambda_j \geq C$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Podemos decompor $H = \bigoplus\limits_{j=1}^{+\infty} M_j$, onde M_j é um subespaço com base de autovetores de λ_j. Logo $\dim M_j = m_j$ e $M_j \perp M_i$ para $j \neq i$.

Consequentemente, o operador A pode ser reescrito como

$$Au = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j P_j u, \qquad \forall u \in D(A),$$

onde $P_j : D(A) \longrightarrow M_j$ representa o operador projeção ortogonal de H sobre M_j.

A potência fracionária para $\alpha > 0$ também fica simplificada para o seguinte

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^\alpha P_j u, \qquad \forall u \in D(A^\alpha). \tag{2.5}$$

A partir disto, é fácil ver que, para $\alpha > 0$, A^α é um operador autoadjunto: de fato, dados $u, v \in D(A^\alpha)$ temos

$$\langle A^\alpha u, v\rangle_H = \left\langle \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^\alpha P_j u, \sum_{i=1}^{+\infty} P_i v \right\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} \left\langle \lambda_j^\alpha P_j u, P_i v\right\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle \lambda_j^\alpha P_j u, P_j v\right\rangle_H$$

e

$$\langle u, A^\alpha v\rangle_H = \left\langle \sum_{j=1}^{+\infty} P_j u, \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^\alpha P_i v \right\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} \langle P_j u, \lambda_i^\alpha P_i v\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle P_j u, \lambda_j^\alpha P_j v\right\rangle_H,$$

já que $P_j u \in M_j$ e $P_i v \in M_i$ e então $\langle P_j u, P_i v\rangle = 0$, se $i \neq j$.

Sabemos que $\lambda_j \in \mathbb{R}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Logo, se $\alpha > 0$ e $u, v \in D(A^\alpha)$, temos

$$\langle A^\alpha u, v\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle \lambda_j^\alpha P_j u, P_j v\right\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^\alpha \langle P_j u, P_j v\rangle_H = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\langle P_j u, \lambda_j^\alpha P_j v\right\rangle_H = \langle u, A^\alpha v\rangle .$$

2.5 Interpolação

Neste trabalho, vamos utilizar um pouco de Teoria de Interpolações. Tal teoria data dos anos 50 e uma das funcionalidades é a de criar funções contínuas a partir de outras já existentes, com um conjunto de saída diferente das funções já existentes. Não entraremos em detalhes, mais informações podem ser encontradas em [2] e [26].

O que nos interessa são os seguintes resultados:

Proposição 2.52. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador do tipo positivo para o qual existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ com*

$$\|A^{it}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_\varepsilon, \qquad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Então, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta$, e $\theta \in (0,1)$ temos

$$\left[X^\alpha, X^\beta\right]_\theta = X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}.$$

Na proposição acima, X^α representa a potência fracionária do operador A, para $\alpha \in \mathbb{C}$, $[\cdot,\cdot]_\theta$ representa o espaço de interpolação complexo. Para mais detalhes, veja [26].

Podemos obter um resultado semelhante, considerando o operador setorial.

Proposição 2.53. *Consideremos X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador setorial para o qual existam $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ com $\|A^{it}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_\varepsilon$, para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Então para cada $\alpha, \beta \geq 0$, é válido o seguinte:*

$$\left[X^\alpha, X^\beta\right]_\theta = X^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}, \qquad \theta \in (0,1).$$

Corolário 2.54. *Assuma as hipóteses da Proposição acima. Para $\theta \in (0,1)$,*

$$X^\theta = [X, D(A)]_\theta .$$

Para a demonstração dos dois resultados acima, veja [14] e [26].

Capítulo 3

Processos de evolução

Neste capítulo, abordaremos os processos de evolução. Vamos estudar resultados que garantam a existência de atratores pullback. Além disso, trataremos de tópicos que nos auxiliem com o problema do próximo capítulo. As principais referências são: [2], [12], [13] e [21].

Definição 3.1. *Um processo de evolução (processo) é uma família* $\{S(t,s) : t \geq s\} \subset \mathscr{C}(X)$*, que satisfaz as seguintes propriedades*

i) $S(t,t) = I$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*, onde* I *é a identidade em* $\mathscr{C}(X)$*;*

ii) $S(t,\tau)S(\tau,s) = S(t,s)$*, para* $t \geq \tau \geq s$*;*

iii) $(t,s,x) \mapsto S(t,s)x$ *é contínua, para* $t \geq s$ *e* $x \in X$*.*

Também denotamos o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ por $S(\cdot,\cdot)$, se não há risco de confusão.

Definição 3.2. *Uma família* $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é dita*

i) positivamente invariante sob $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *se* $S(t,s)A(s) \subset A(t)$*, para cada* $t \geq s$*,*

ii) invariante sob $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *se* $S(t,s)A(s) = A(t)$ *para* $t \geq s$*.*

Seja $B \subset X$. Os conjuntos

$$S(t,s)B = \{S(t,s)x : x \in B\}, \qquad \gamma^s(B) = \bigcup_{t \geq s} S(t,s)B \qquad \text{e} \qquad \gamma_p(B,t) = \bigcup_{s \leq t} S(t,s)B$$

são ditos respectivamente a imagem de B sob $S(t,s)$, a órbita de B a partir do instante $s \in \mathbb{R}$ e a órbita pullback de B no instante $t \in \mathbb{R}$.

A definição de atrator para um processo não ocorre de maneira análoga ao caso de semigrupos. Consideremos o seguinte problema retirado de [12]:

$$x' = h(t)x - x^3, \tag{3.1}$$

onde $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ é uma função continuamente diferenciável satisfazendo $h(t) = 0$, quando $t \leq 0$ e $h(t) = 1$, quando $t \geq 1$.

O retrato de fase da equação, assemelha-se à Figura 3, onde a região sombreada é a parte onde não conseguimos explicitar o comportamento.

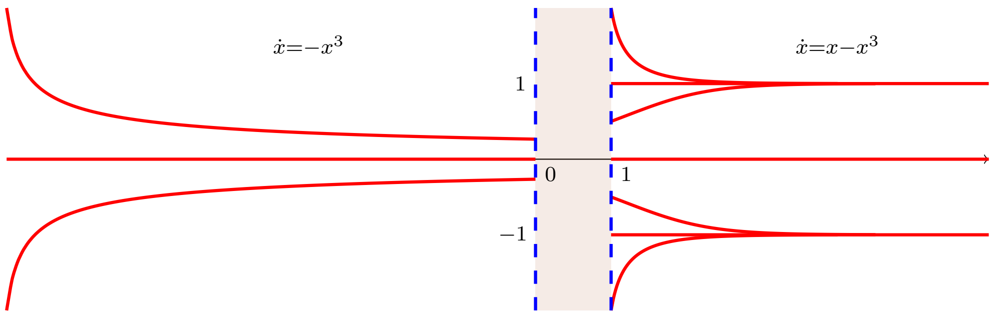

Figura 3.1: Representação das soluções da equação $\dot{x} = h(t)x - x^3$

A partir deste exemplo, tentemos formular a melhor candidata à definição de atrator para um processo, isto é, a definição que mantenha mais proximidade ao caso de semigrupos. Observemos primeiramente que, diferentemente do caso autônomo, o atrator pullback deve ser uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e não apenas um conjunto, pela definição de invariância sob $\{S(t,s) : t \geq s\}$.

(I) Digamos que $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é atrator pullback de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se é invariante, $A(t)$ é compacto, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{d}(S(t,s)B, A(t)) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada $B \subset X$ limitado e $s \in \mathbb{R}$.

Pela Figura 3, o possível candidato a atrator para o processo gerado por (3.1) é a família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$, com $A(t) = [-1,1]$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas, tal família não é invariante e o problema, apesar de ser relativamente simples, não admite atrator satisfazendo (I).

Modifiquemos um pouco a definição:

(II) Digamos que $\{A(t) : t \geq \tau\}$ é atrator pullback de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se é invariante, $A(t)$ é compacto para $t \geq \tau$, e $\mathrm{d}(S(t,s)B, A(t)) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada $B \subset X$ limitado e $s \in \mathbb{R}$.

Observemos que a família $\{A(t) = [-1, 1] : t \geq 1\}$ é invariante sob o processo associado a (3.1). Logo, o problema admite um candidato a atrator. No entanto, criamos um outro problema, existe uma infinidade de famílias satisfazendo esta definição. De fato, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e um compacto $K \subset \mathbb{R}$ com 0 em seu interior, consideremos

$$\mathscr{B}(t) = S(t, \tau)K, \qquad \forall t \geq \tau.$$

Temos, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, com $t \geq s \geq \tau$,

$$S(t, s)\mathscr{B}(s) = S(t, s)S(s, \tau)K = S(t, \tau)K = \mathscr{B}(t).$$

Observemos que $\mathscr{B}(t) = S(t, \tau)K \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} [-1, 1]$ e então $\mathrm{d}(S(t, s)D, \mathscr{B}(t)) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $D \subset X$ limitado.

Notemos que a família $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$, com $C(t) = \{0\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, não pode ser atrator para o processo associado a (3.1), já que $\{1\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$ e $S(t, s)\{1\} = \{1\}$, para cada $t \geq s > 1$, que não é atraído por $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Exibimos infinitas possibilidades para o atrator e não conseguimos garantir um elemento minimal.

Por isso, a abordagem no caso de um atrator pullback será diferente do caso de semigrupos, ao invés de estudarmos a dinâmica forwards, estudamos a dinâmica backwards.

Definição 3.3. *Consideremos $\{S(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $B \subset X$. Dizemos que*

i) B atrai-pullback subconjuntos limitados de X no instante $t \in \mathbb{R}$ sob a ação de $S(\cdot, \cdot)$ se para cada limitado D em X, $\lim_{s \to -\infty} d(S(t, s)D, B) = 0$.

ii) B absorve-pullback subconjuntos limitados de X no instante $t \in \mathbb{R}$ sob a ação de $S(\cdot, \cdot)$ se para cada limitado D em X, existe $t_D \in \mathbb{R}$, $t_D \leq t$, tal que $S(t, s)D \subset B$, para todo $s \leq t_D$.

A partir disso, podemos definir que uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X se, para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ atrai-pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $S(\cdot, \cdot)$.

E uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ absorve-pullback se para cada $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ absorve-pullback subconjuntos limitados de X no instante t sob a ação de $S(\cdot, \cdot)$.

3.1 Atratores pullback

Nesta seção, definiremos atrator pullback e apresentaremos alguns resultados que garantam a sua existência.

Definição 3.4. *Dizemos que uma família* $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é o atrator pullback para* $S(\cdot,\cdot)$ *se satisfaz as seguintes condições:*

i) $A(t)$ *é compacto, para cada* $t \in \mathbb{R}$*;*

ii) $A(\cdot)$ *é uma família invariante;*

iii) $A(\cdot)$ *atrai-pullback subconjuntos limitados de* X *e é a família minimal de fechados satisfazendo essa propriedade, isto é, se* $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é uma família de fechados que atrai-pullback subconjuntos limitados de* X*, temos* $A(t) \subset B(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Recorde que um atrator para um semigrupo, pela Proposição 2.23, não é preciso exigir qualquer tipo de minimalidade. O exemplo a seguir justifica a necessidade desta exigência no caso de atratores pullback.

Teorema 3.5. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo e* $\{S(t,s) : t \geq s\}$ *o processo autônomo associado. Isto é,* $S(t,s) = T(t-s)$*, para* $t \geq s$*. O semigrupo* $T(\cdot)$ *possui atrator global* $\mathscr{A}$*, se e somente se,* $S(\cdot,\cdot)$ *tem atrator pullback* $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$*, com* $A(t) = \mathscr{A}$*, para* $t \in \mathbb{R}$*.*

A demonstração deste teorema é feita em [13].

Exemplo 3.6. *Consideremos o semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$*, onde* $T(t)x = e^{-t}x$*, com* $x \in \mathbb{R}$*. Logo, o processo* $S(\cdot,\cdot)$ *associado é dado por* $S(t,s)x = e^{-(t-s)}x$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

A família de compactos $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$*, onde* $A(t) = \{0\}$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$*, é uma família invariante e que atrai-pullback subconjuntos limitados: para cada limitado* $B \subset X$ *e* $t, s \in \mathbb{R}$*, com* $t \geq s$ *temos*

$$S(t,s)B = e^{-(t-s)}B \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} \{0\}.$$

Agora, consideremos $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *com* $C(t) = [-e^{-t}, e^{-t}]$*. Essa família é invariante, pois*

$$S(t,s)C(s) = e^{-(t-s)}[-e^{-s}, e^{-s}] = [-e^{-t}, e^{-t}] = C(t), \qquad \forall t \geq s.$$

Logo, $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família invariante de compactos e que atrai-pullback subconjuntos limitados de X, já que $0 \in C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exibimos duas famílias que satisfazem as propriedades requeridas para um atrator pullback, à exceção da minimalidade.

3.1.1 Existência do atrator pullback

Definição 3.7. *Dizemos que $u : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global para $\{S(t,s) : t \geq s\}$ se para cada $t \geq s$, $S(t,s)u(s) = u(t)$.*

Uma solução global constante é dita um ponto de equilíbrio.

Definição 3.8. *Dizemos que uma solução global $u : \mathbb{R} \to X$ de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é backwards-limitada se existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto $\{u(t) : t \leq \tau\}$ é limitado.*

Uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é dita backwards-limitada se existe um limitado $B \subset X$ e $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $A(s) \subset B$, para $s \leq \tau$.

Teorema 3.9. *Se uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ backwards-limitada é o atrator pullback de $\{S(t,s) : t \geq s\}$ então*

$$A(t) = \{u(t) : u : \mathbb{R} \to X \text{ é uma solução backwards-limitada}\}.$$

Demonstração feita em [13].

Corolário 3.10. *Consideremos um processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ que admite atrator pullback $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Se $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A(t)$ é um conjunto limitado então, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$A(t) = \{u(t) : u : \mathbb{R} \to X \text{ é uma solução global limitada}\}.$$

Demonstração feita em [13].

Definição 3.11. *Seja $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos o $\omega-$limite de $B \subset X$ como o conjunto*

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\tau \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \tau} S(t,s)B}.$$

Pode ocorrer que $\omega(B,t) = \emptyset$. Podemos reescrever o $\omega-$limite de B da seguinte forma

$$\omega(B,t) = \Big\{x \in X : \exists\{x_n\} \subset X,\ \exists\{s_n\} \subset \mathbb{R},\ s_n \to -\infty,\ \text{com } S(t,s_n)x_n \to x\Big\}. \quad (3.2)$$

Definição 3.12. *Se $\{S(t,s) : t \geq s\}$ admite uma família de conjuntos limitados que absorve-pullback subconjuntos limitados, dizemos que o processo é pullback limitado dissipativo.*

Definição 3.13. *Um processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo se, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe um limitado $B(t) \subset X$ que absorve-pullback subconjuntos limitados de X no instante s, para cada $s \leq t$.*

Em outras palavras, para cada limitado $K \subset X$ e $s \leq t$, existe $s_0(s,K)$ com

$$S(s,\tau)K \subset B(t), \qquad \forall \tau \leq s_0.$$

Definição 3.14. *Um processo de evolução $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é dito pullback assintoticamente compacto se, para cada $t \in \mathbb{R}$, e $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ com $s_n \to -\infty$ e sequência limitada $\{x_n\} \subset X$, em que $\{S(t,s_n)x_n\}$ é uma sequência limitada, $\{S(t,s_n)x_n\}$ admitir subsequência convergente.*

Observemos que, por definição, $\omega(B,t)$ atrai todo ponto $x \in B$, mas não necessariamente atrai o conjunto B.

Lema 3.15. *Suponhamos que X seja um espaço métrico. Consideremos o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$. São válidos:*

i) Para todo $t \geq s$, temos $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$, para todo $B \subset X$;

ii) Suponhamos que para $B \subset X$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(B,s)$ é compacto e atrai-pullback B no instante s. Então, $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$, para todo $t \geq s$.

Demonstração. i) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$, com $t \geq s$ e suponhamos que $\omega(B,s) \neq \emptyset$. Basta observar que se $x \in \omega(B,s)$ então existem sequências $\{x_n\} \subset B$, $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}$ com $\sigma_n \leq s$ e $\sigma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ tais que $S(s,\sigma_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Agora, pela continuidade de $S(t,s)$, segue que $S(t,\sigma_n)x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(t,s)x \in \omega(B,t)$, por (3.2).

Portanto, $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$.

ii) Precisamos mostrar que $\omega(B,t) \subset S(t,s)\omega(B,s)$.

Por definição, se $y \in \omega(B,t)$ então existem sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{R}$ com $\sigma_n \leq t$ e $\sigma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, tais que $S(t,\sigma_n)y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.

Agora, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \leq s$ para $n \geq n_0$ e como $\omega(B,s)$ atrai-pullback B no instante s, temos $\mathrm{d}(S(s,\sigma_n)y_n, \omega(B,s)) \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mas $\omega(B,s)$ é compacto e, pela Proposição 1.1 existe subsequência convergente de $\{S(s,\sigma_n)x_n\}_{n\geq n_0}$, digamos que $S(s,\sigma_{n_k})x_{n_k} \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} x \in X$.

Notemos que $x \in \omega(B,s)$, por (3.2). Logo, pela continuidade de $S(t,s)$, concluímos que $S(t,s)x = y$.

Portanto, $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$.

□

Lema 3.16. *Consideremos X um espaço métrico e $\{S(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução pullback assintoticamente compacto. Suponhamos que um conjunto não-vazio $B \subset X$ é tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $\tau \in \mathbb{R}$, com $\tau \leq t$ e com $\bigcup_{s\leq\tau} S(t,s)B$ limitada. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $\omega(B,t)$ é não-vazio, compacto e atrai-pullback B no instante t. Além disso, $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família invariante.*

Demonstração. Sejam sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ com $s_n \leq t$ e $s_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Temos $S(t,s_n)x_n \subset \bigcup_{s\leq\tau} S(t,s)B$, para todo $s_n \leq \tau$. Como o processo é pullback assintoticamente compacto, a sequência $\{S(t,s_n)x_n\}$ admite subsequência convergente. Logo, $\omega(B,t) \neq \emptyset$.

Sejam $\{y_n\} \subset \omega(B,t)$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, conseguimos sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{s_n\}$ tal que $s_n \leq n$ e ainda, $\mathrm{d}(S(t,s_n)x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Como $\bigcup_{s\leq\tau} S(t,s)B$ é um conjunto limitado e o processo é pullback assintoticamente compacto, temos $\{S(t,s_n)x_n\}$ tem subsequência convergente, digamos $S(t,s_{n_k})x_{n_k} \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in X$. Por consequência,

$$\mathrm{d}(y_{n_k}, x) \leq \mathrm{d}(y_{n_k}, S(t,s_{n_k})x_{n_k}) + \mathrm{d}(S(t,s_{n_k})x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{n_k} + \mathrm{d}(S(t,s_{n_k})x_{n_k}, x) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $\{y_n\}$ admite subsequência convergente. Então $\omega(B,t)$ é compacto.

Suponhamos, por absurdo, que para algum $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\omega(B,t)$ não atrai-pullback B no instante t. Então existem $\epsilon > 0$ e sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$ com $s_n \leq t$ e $s_n \to +\infty$ tais que

$$\mathrm{d}(S(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Mas, pelo mesmo argumento anterior, $\{S(t,s_n)x_n\}$ admite uma subsequência convergente a algum ponto em $\omega(B,t)$, o que contradiz (3.3). Logo, $\omega(B,t)$ atrai-pullback B no instante t.

Pelo Lema 3.15, a família $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante. □

Para os dois teoremas que seguem, consideremos a família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definida por

$$A(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : B \subset X,\ B \text{ limitado}\}. \tag{3.4}$$

Teorema 3.17. *Suponhamos que o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ seja pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto. Então $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$, definida em* (3.4)*, é uma família de conjuntos limitados, é invariante e atrai-pullback subconjuntos limitados de X.*

Além disso, se $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família que atrai-pullback subconjuntos limitados de X então $A(t) \subset \overline{B(t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela definição de $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e pelo Lema 3.16, temos de imediato que $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família invariante e que atrai-pullback subconjuntos limitados de X.

Seja $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família que atrai-pullback subconjuntos limitados de X. Observemos que, por (3.2), para cada $D \subset X$ limitado $\omega(D,t) \subset \overline{B(t)}$. Logo, $A(t) \subset \overline{B(t)}$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, como o processo é pullback limitado dissipativo, existe uma família de limitados que absorve-pullback subconjuntos limitados. Pelo que acabamos de mostrar, segue que $A(t)$ é limitado, para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Teorema 3.18. *Se $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é um processo pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto então $\{S(t,s) : t \geq s\}$ admite atrator pullback $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$, tal que para cada $s \in \mathbb{R}$, o conjunto $\bigcup_{t \leq s} A(t)$ é limitado.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.17, temos que a família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dada em (3.4) atrai-pullback subconjuntos limitados de X e é a família minimal com esta propriedade.

Resta mostrar que $A(t)$ é compacto, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Como $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe uma família $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que absorve-pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para todo $\tau \leq t$.

Em particular, existe $\sigma_t \in \mathbb{R}$ tal que $S(t,s)D \subset B(t)$, para cada $s \leq \sigma_t$ e $D \subset X$ limitado. Logo, $\bigcup_{s \leq \sigma_t} S(t,s)D$ é um conjunto limitado sempre que D é limitado. Pelo Lema 3.16, temos que $\omega(D,t)$ é não-vazio, compacto e atrai-pullback D no instante t. Como $B(t)$ é limitado, temos que $\omega(B(t),t)$ é não-vazio, compacto e atrai-pullback $B(t)$ no instante t.

Para cada limitado $D \subset X$, mostremos que $\omega(D,t) \subset \omega(B(t),t)$. Se $x \in \omega(D,t)$ existem sequências $\{x_n\} \subset D$, $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$, com $s_n \leq t$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \overset{\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de modo que $x = \lim_{n\to+\infty} S(t,s_n)x_n$.

Agora, $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e então, dada sequência $\{\tau_k\}$ com $\tau_k \to -\infty$ existe sequência $\{\sigma_k\}$ com $\sigma_k \leq \tau_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(\tau_k, s)D \subset B(t), \quad \forall s \leq \sigma_k.$$

Como $s_n \to -\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n_k} \leq \sigma_k$. Assim, denotando $y_{n_k} = S(\tau_k, s_{n_k})x_{n_k} \in B(t)$, temos

$$x = \lim_{k\to+\infty} S(t, s_{n_k})x_{n_k} = S(t,\tau_k)y_{n_k},$$

e então $x \in \omega(B(t),t)$.

Com isto mostramos que $A(t) \subset \omega(B(t),t)$. Agora, por definição de $A(t)$, segue que $\omega(B(t),t) \subset A(t)$.

Portanto, $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de compactos pois $A(t) = \omega(B(t),t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 3.19. *Um processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \subset X$ limitado, o conjunto*

$$\bigcup_{\tau \leq t} \bigcup_{s \leq \tau} S(\tau, s)B$$

é limitado.

Teorema 3.20. *Consideremos um processo pullback fortemente limitado $\{S(t,s) : t \geq s\}$ que admite a seguinte decomposição:*

$$S(t,s) = L(t,s) + U(t,s)$$

tal que

i) Existe uma função $\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $r > 0$, $\alpha(\cdot, r)$ é não-crescente e $\alpha(t,r) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ com

$$\|L(t,s)x\|_X \leq \alpha(t-s,r), \qquad \forall s \leq t,\ \forall x \in X,\ \text{com } \|x\|_X \leq r;$$

ii) $U(t,s)$ é um operador compacto, para cada $t \geq s$.

Nestas condições, o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto.

Resultado retirado de [8].

Quando perturbamos um problema, queremos saber se isto modificará o comportamento assintótico ou não, ou seja, buscamos um certo tipo de continuidade.

Definição 3.21. *Consideremos $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e uma família de conjuntos $\{A_\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon \in \Lambda}$. Dizemos que a família é*

i) semicontínua superiormente em $\varepsilon_0 \in \Lambda$, quando $\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{d}(A_\varepsilon(t), A_{\varepsilon_0}(t)) \overset{\varepsilon \to \varepsilon_0}{\longrightarrow} 0$.

ii) semicontínua inferiormente em $\varepsilon_0 \in \Lambda$, quando $\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{d}(A_{\varepsilon_0}(t), A_\varepsilon(t)) \overset{\varepsilon \to \varepsilon_0}{\longrightarrow} 0$.

iii) contínua em ε_0 se for semicontínua superiormente e inferiormente em ε_0.

Em termos mais gerais, a semicontinuidade superior garante, sob uma perturbação, que o atrator não exploda e a semicontinuidade inferior, que o atrator não imploda. Para encontrar mais resultados de semicontinuidades inferior e superior, veja [12]. Em [5], é mostrada a semicontinuidade superior do atrator pullback para um problema parabólico com difusibilidade grande localizada e em [6], para um problema termoelástico.

3.2 Problemas da forma $\frac{d}{dt}x + Ax = f(t,x)$

Nesta seção, iremos tratar de equações semilineares. Serão omitidas as demonstrações dos resultados abaixo, que podem ser consultadas em [13].

Consideremos X um espaço de Banach. Suponhamos $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador setorial ou que $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{-At} : t \geq 0\}$. Suponhamos que $\mathrm{Re}\sigma(A) \geq \lambda$ para algum $\lambda > 0$.

Consideremos uma equação da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x + Ax = f(t,x), & t > \tau \\ x(\tau) = x_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definição 3.22. *Uma função $u : [\tau, \tau + s] \longrightarrow X^1$, $(s > 0)$ é dita uma "mild solution" de (3.5) se $u \in C([\tau, \tau+s], X^1)$ e satisfaz*

$$u(t) = e^{-A(t-\tau)}x_0 + \int_\tau^t e^{-A(t-s)} f(s, u(s))ds.$$

Teorema 3.23. *Consideremos o problema da forma (3.5). Suponhamos que ocorra uma das situações:*

i) *A é setorial e para algum $\alpha \in (0,1]$, $f : \mathbb{R} \times X^1 \longrightarrow X^\alpha$ é tal que existam $C(R) > 0$ e $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ uma função crescente com $\varphi(0) = 0$ satisfazendo*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{X^\alpha} \leq C(R)\varphi(t-\tau)\ |t-\tau|^{-\alpha}\|x-y\|_{X^1},$$
$$\|f(t,x)\|_{X^\alpha} \leq C(R)\varphi(t-\tau)\ |t-\tau|^{-\alpha},$$

quando $\|x\|_{X^1}, \|y\|_{X^1} \leq R$.

ii) *$-A$ é gerador infinitesimal um C_0-semigrupo e $f : \mathbb{R} \times X^1 \longrightarrow X^1$ é tal que existe $C(R) > 0$, com*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{X^1} \leq C(R)\|x-y\|_{X^1},$$
$$\|f(t,x)\|_{X^1} \leq C(R),$$

quando $\|x\|_{X^1}, \|y\|_{X^1} \leq R$.

Então, para cada $R > 0$, existe $\tau_{max} > \tau$ tal que, para cada $x_0 \in B_{X^1}(0,R)$ existe uma única mild solution $u(\cdot,\tau,x_0) : [\tau,\tau_{max}] \longrightarrow X^1$ de (3.5).

Mais ainda, para cada $x_0, z_0 \in B_{X^1}(0,R)$,

$$\|x(t,\tau,x_0) - x(t,\tau,z_0)\|_{X^1} \leq C(R)\|x_0 - z_0\|_{X^1} \qquad \forall t \in [\tau,\tau_{max}].$$

Em [13], é feita a demonstração do teorema acima.

Teorema 3.24. *Consideremos válida alguma das condições do Teorema 3.23. Suponhamos ainda que f seja continuamente diferenciável e $x_0 \in X^{\alpha+1}$.*

Então a mild solution $u(\cdot,\tau,x_0) : [\tau,\tau+\tau_{max}] \longrightarrow X^1$, dada pelo Teorema 3.23, é continuamente diferenciável, $u(t,\tau,x_0) \in X^{1+\alpha}$ e u satisfaz a equação (3.5) para $t \in (\tau,\tau+\tau_{max})$.

Mais ainda,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{u(\tau+h) - u(\tau)}{h} = Ax_0 + f(\tau,x_0).$$

Corolário 3.25. *Suponhamos que são satisfeitas as condições do Teorema 3.23. Então, para cada $(\tau_0,x_0) \in \mathbb{R} \times X^1$ a mild solution $u(\cdot,\tau,x_0) : [\tau_0,\tau_{max}) \longrightarrow X^1$ é definida no intervalo maximal $[\tau_0,\tau_{max})$ onde uma das situações ocorre*

$$\tau_{max} = +\infty \qquad ou \qquad \liminf_{t\to\tau_{max}} \|u(t,\tau_0,x_0)\|_{X^1} = +\infty.$$

Teorema 3.26. *Suponhamos que são satisfeitas as condições do Teorema 3.23 e que* $f : \mathbb{R} \times X^1 \longrightarrow X^\alpha$ *seja diferenciável em relação à segunda variável, isto é, para cada* $(t, x) \in \mathbb{R} \times X^1$ *existe* $Df(t, x) \in \mathscr{L}(X^1, X^\alpha)$ *satisfazendo*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(t, x+h) - f(t, x) - Df(t, x)h\|_{X^\alpha}}{\|h\|_{X^1}} = 0.$$

Se $(t, x) \mapsto Df(t, x)$ *é uma função contínua de* $\mathbb{R} \times X^1$ *em* $\mathscr{L}(X^1, X^\alpha)$ *então, para cada* $(t, \tau, x) \in [\tau, \tau + \sigma] \times [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \times B_\varepsilon(x_0)$, *existe* $D_f u(t, \tau, x) \in \mathscr{L}(X^1)$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|u(t, \tau, x+h) - u(t, \tau, x) - D_f u(t, \tau, x)h\|_{X^1}}{\|h\|_{X^1}} = 0.$$

Mais ainda, fixado $(\tau, x) \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \times B_\varepsilon(x_0)$, *temos* $t \mapsto D_f u(t, \tau, x)u$ *é uma função contínua de* $[\tau, \tau + \sigma]$ *em* X^1 *e*

$$D_f u(t, \tau, x) = e^{-A(t-\tau)}x + \int_\tau^t e^{-A(t-s)} Df(s, u(s, \tau, x)) D_f u(s, \tau, x) ds,$$

para cada $t \in [\tau, \tau + \sigma]$.

Os resultados acima são demonstrados em [13].

3.2.1 O operador Laplaciano em $L^2(\Omega)$

O operador Laplaciano é muito conhecido, aparece em diversas equações, como por exemplo, a equação de onda, a equação de calor e a equação de Laplace. Nesta seção, mostraremos que sob um domínio determinado, o operador Laplaciano em $L^2(\Omega)$ possui propriedades que tornam possível a utilização de potências fracionárias.

Seja Ω um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, com a $\sigma-$álgebra de Lebesgue e medida de Lebesgue. Consideremos $X = L^2(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert. Definimos o operador

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto Au = -\Delta u, \end{aligned}$$

onde $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Mostremos que $I + A$ é sobrejetor, isto é, dado $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in D(A)$ tal que

$$(I + A)u = f.$$

Definimos $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $F(\psi) = \int_\Omega \psi(x) f(x) dx$. É fácil ver que F é um funcional linear limitado.

Seja $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por

$$b(u,v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

Observemos que, pela desigualdade de Hölder, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$b(u,v) \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

assim $\|b\| \leq 2 < +\infty$.

Mais ainda, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$|b(u,u)| = \int_\Omega u^2(x)dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, b satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram. Em particular, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$F(v) = b(u,v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Reescrevendo, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega v(x)f(x)dx = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx. \tag{3.6}$$

É possível mostrar que $u \in H^2(\Omega)$. Este resultado é feito no capítulo 9 de [7].

Para $u, v \in D(A)$, usando integração por partes duas vezes temos

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega -\Delta u(x)v(x)dx = -\sum_{j=1}^n \int_\Omega \tfrac{d^2u(x)}{dx_j^2}v(x)dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \tfrac{du(x)}{dx_j}\ \tfrac{dv(x)}{dx_j}dx,$$

$$\langle u, Av\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\big(-\Delta v(x)\big)dx = -\sum_{j=1}^n \int_\Omega u(x)\tfrac{d^2v(x)}{dx_j^2}dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \tfrac{du(x)}{dx_j}\ \tfrac{dv(x)}{dx_j}dx.$$

Então, para cada $u, v \in D(A)$, $\langle Au, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, Av\rangle_{L^2(\Omega)}$ e

$$\begin{aligned}\langle (I+A)u, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Au, v\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, Av\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle u, (I+A)v\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, o operador $I + A$ é simétrico.

Pela Proposição 1.33, segue que $I + A$ é autoadjunto em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Portanto, temos que $A = -\Delta$ também é autoadjunto em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Mostremos agora que A tem resolvente compacto. A Proposição 1.33 garante que existe

$$A^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

e A^{-1} é um operador limitado.

Consideremos um limitado $B \subset L^2(\Omega)$. Nosso objetivo é mostrar que $A^{-1}B$ é pré-compacto em $L^2(\Omega)$. Mas isto é simples, pois $A^{-1}B \subset D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é limitado e

$D(A) \subset H^1(\Omega)$, que está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema 1.23.

Agora, para $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u(x))u(x)dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e, pela desigualdade de Poincaré, segue que

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq K^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pelo Teorema 2.50, existem $\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tais que $A^{it} \in \mathscr{L}(H)$, e $\|A^{it}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C_\varepsilon$, para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Logo, pela Proposição 2.52, dados $\alpha, \beta \geq 0$ e $\theta \in (0,1)$,

$$\left[X^\alpha, X^\beta\right]_\theta = X^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}.$$

Como $X^0 = L^2(\Omega),\ X^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, segue que

$$X^{\frac{1}{2}} = [X^0, X^1]_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega).$$

Pela desigualdade de Poincaré, se $u \in D(A)$, temos $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq k\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Este resultado pode ser melhorado para $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 3.27. *Para $u \in H_0^1(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde λ_1 representa o menor autovalor de A.

Demonstração. Pela Subseção 2.4.2, temos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, em que λ_j é autovalor de A, com $\lambda_j > 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Suponhamos λ_1 seja o menor entre estes autovalores. Sabemos ainda que, para cada $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$, temos

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} P_j u,$$

onde P_j é a projeção de X no subespaço gerado pelos autovetores associados a λ_j, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Notemos que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ e que $A^{\frac{1}{2}}u = \nabla u$ para $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\|\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} P_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \left\|P_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_1 \left\|P_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_1 \left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Portanto, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

3.3 Equações do tipo $\frac{d}{dt}x = Ax + f(t, x)$

Os resultados desta seção nos auxiliarão no próximo capítulo.

Seja X um espaço de Hilbert. Para $\theta \in [0, 1]$, $\beta > 0$, consideremos um operador do tipo positivo e autoadjunto $A : D(A) \subset X \to X$ e o seguinte problema

$$u_{tt} + \beta A^\theta u_t = -Au. \tag{3.7}$$

Definindo $v = u_t$, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \mathbb{A}_\theta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

onde $\mathbb{A}_\theta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\beta A^\theta v - Au \end{pmatrix}$. Consideremos

$$D(\mathbb{A}_\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X^{\frac{1}{2}} \times X : -\beta v - A^{1-\theta} u \in X^\theta \right\}.$$

Pela equação (3.7) temos

$$\langle u_{tt}, u_t \rangle_X + \beta \left\langle A^\theta u_t, u_t \right\rangle_X = \langle -Au, u_t \rangle_X .$$

E, como A^θ é autoadjunto,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u_t\|_X^2 + \beta \left\langle A^{\frac{\theta}{2}} u_t, A^{\frac{\theta}{2}} u_t \right\rangle_X = - \left\langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} u_t \right\rangle_X .$$

Então, podemos reescrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_X^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|_X^2\right) = -\beta \left\|A^{\frac{\theta}{2}} u_t\right\|_X^2.$$

o que nos sugere o uso do funcional de energia

$$V(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\|\psi\|_X^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{X^{\frac{1}{2}}}^2 + \beta\|\psi\|_{X^{\frac{\theta}{2}}}^2.$$

Proposição 3.28. *São válidas:*

i) *O operador* $\mathbb{A}_\theta$ *é fechado;*

ii) $-\mathbb{A}_\theta$ *é dissipativo em* $Y_0 = X^{\frac{1}{2}} \times X$, *com* $1 \in \rho(\mathbb{A}_\theta)$;

iii) $0 \in \rho(\mathbb{A}_\theta)$;

iv) $\mathbb{A}_\theta$ *tem resolvente compacto se* $\theta < 1$.

v) $\mathbb{A}_\theta$ *é um gerador infinitesimal de um* C_0-*semigrupo de contração.*

A demonstração desta proposição é feita em [13].

Capítulo 4

Uma equação de onda semilinear amortecida

A equação de onda é representada por $u_{tt} = c^2\Delta u$ onde $c > 0$ é uma constante. Como o próprio nome diz, a equação de onda modela problemas ondulatórios e a constante c é a velocidade de propagação de onda. Para mais detalhes, veja [7] e [18].

Neste capítulo, iremos estudar resultados para uma equação de onda semilinear amortecida, baseado no trabalho em [9]. Seguimos a sequência do capítulo 15 do livro [13], onde é feita uma versão em $\mathbb{R}^3$. No artigo [8] é feita toda a parte de existência do atrator pullback para $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$.

Mudamos ligeiramente a condição de dissipatividade do problema, não desenvolveremos os resultados sobre a estrutura do atrator pullback mas mostraremos a semicontinuidade superior do atrator pullback.

No decorrer deste capítulo, denotaremos o termo constante sempre com o mesmo símbolo em todas as passagens, a fim de simplificar os cálculos.

Para $n \geq 3$, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e com fronteira suave. Queremos estudar o processo de evolução relacionado à equação:

$$u_{tt} + \beta(t)u_t = \Delta u + f(u), \tag{4.1}$$

em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com condição de contorno de Dirichlet e $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não-linear tal que

$$|f'(s)| \leq c\left(1 + |s|^{p-1}\right), \tag{4.2}$$

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1. \tag{4.3}$$

com $c > 0$ e $1 < p < \frac{n}{n-2}$ e $\lambda_1 > 0$ é o menor autovalor de $-\Delta$, quando definido em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Assumimos que $\beta : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é uma função suave, globalmente Lipschitz, e que existem $\beta_1 \geq \beta_0 > 0$ tal que

$$\beta_0 \leq \beta(t) \leq \beta_1. \tag{4.4}$$

Conseguimos retirar algumas informações adicionais do problema:

Observação 4.1. *De* (4.3)*, pela definição de* $\limsup$, $\inf\limits_{r>0} \sup\limits_{|s|>r} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_1$ *e então existe* $r_1 > 0$ *tal que* $S := \sup\limits_{|s|>r_1} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_1$.

Para $s \in \mathbb{R}$, *com* $|s| > r_1$, *temos*

$$\frac{f(s)}{s} - \lambda_1 \leq S - \lambda_1 < 0.$$

Denotemos $\varepsilon_0 = \lambda_1 - S > 0$ *e então, para* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *e* $|s| > r_1$ *é válido que*

$$\frac{f(s)}{s} - \lambda_1 \leq -\varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{f(s)}{s} \leq \lambda_1 - \varepsilon.$$

Como f *é uma função contínua, existe* $M > 0$ *tal que* $|f(s)| \leq M$, *quando* $|s| \leq r_1$. *Logo, podemos escrever*

$$\begin{cases} f(s) \leq (\lambda_1 - \varepsilon)s, & s > r_1 \\ f(s) \geq (\lambda_1 - \varepsilon)s, & s < -r_1 \\ |f(s)| \leq \frac{M}{r_1}, & |s| \leq r_1. \end{cases}$$

Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < \lambda_1$ e para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$sf(s) \leq (\lambda_1 - \varepsilon)s^2 + M \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Observação 4.2. *A partir das hipóteses, podemos extrair mais resultados sobre a função* f. *Pelo Teorema do Valor Médio, para* $s, t \in \mathbb{R}$, *existe* $\theta \in (0,1)$ *de modo que*

$$|f(s) - f(t)| \leq \big|f'\big((1-\theta)s + \theta t\big)\big|\,|s - t|.$$

Usando a equação (4.2) *e a desigualdade de Young*

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &\leq c\big(\ 1 + |\ (1-\theta)s + \theta t\ |^{p-1}\ \big)\,|s - t| \\ &\leq c\big(\ 1 + 2^{p-1}|(1-\theta)s|^{p-1} + 2^{p-1}\ |\theta t|^{p-1}\ \big)\,|s - t| \\ &\leq 2^{p-1}c\big(\ 1 + |s|^{p-1} + |t|^{p-1}\ \big)\,|s - t|. \end{aligned}$$

Além disso, para $t = 0$, *temos*

$$|f(s)| - |f(0)| \leq 2^{p-1}c(\ 1 + |s|^{p-1}\ )|s|.$$

Pela desigualdade de Cauchy, para todo $s \in \mathbb{R}$, *temos* $|s| \leq \frac{p-1}{p} + \frac{|s|^p}{p}$ *e concluímos que*

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq |f(0)| + 2^{p-1}c\left(\frac{p-1}{p} + \frac{|s|^p}{p} + |s|^p\right) \\ &\leq |f(0)| + 2^{p-1}c\left(1 + 2|s|^p\right) \\ &\leq \left(|f(0)| + 2^p c\right)\left(1 + |s|^p\right). \end{aligned}$$

Portanto, f *satisfaz uma desigualdade do tipo*

$$|f(s)| \leq c(1 + |s|^p) \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

4.1 Boa colocação local

Nosso objetivo agora é mostrar que o problema está bem definido localmente, isto é, para cada dado inicial, a solução local existe, é única, além disso, as soluções dependem continuamente dos dados iniciais.

Consideremos $\mathscr{X} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Se escrevermos $v = u_t$, e $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, podemos transformar a equação no seguinte sistema

$$\begin{cases} w_t = Bw + G(t,w), & t > \tau \\ w(\tau) = w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $G(t,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t,w) \end{pmatrix}$ com

$$A : D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

dado por $Au = -\Delta u$ e $g(t,w) = -\beta(t)v + f^e(u)$, onde

$$f^e(\cdot) : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é dada por $f^e(u)(x) = f(u(x))$, para cada $x \in \Omega$.

Observemos que f^e está bem definida já que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\|f^e(u)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f^e(u)(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |f(u(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e pela limitação de f dada por (4.6),

$$\begin{aligned} \|f^e(u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\left(\int_\Omega (1 + |u(x)|^p)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\left(\|1\|_{L^2(\Omega)} + \|\, |u|^p\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq c\left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \|u\|^p_{L^{2p}(\Omega)}\right) < +\infty, \end{aligned}$$

pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, pelo Teorema 1.23.

Proposição 4.3. *Dados $s, t \in \mathbb{R}$, suponhamos que $|f(s)-f(t)| \leq c|s-t|\left(1+|s|^{p-1}+|t|^{p-1}\right)$. Então, para todo $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \left(1 + \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1}\right).$$

Segue que para $z_1, z_2 \in \mathscr{X}$,

$$\|G(t, z_1) - G(t, z_2)\|_{\mathscr{X}} \leq c\|z_1 - z_2\|_{\mathscr{X}} \left(1 + \|z_1\|_{\mathscr{X}}^{p-1} + \|z_2\|_{\mathscr{X}}^{p-1}\right).$$

Demonstração. Consideremos $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned}
\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f^e(u_1)(x) - f^e(u_2)(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(u_1(x)) - f(u_2(x))|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(\int_\Omega |u_1(x) - u_2(x)|^2 (1 + |u_1(x)|^{p-1} + |u_2(x)|^{p-1})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $\frac{n}{n-2}$ e $\frac{n}{2}$, temos

$$\begin{aligned}
\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\|u_1 - u_2\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}\|_{L^n(\Omega)} \\
&\leq c\|u_1 - u_2\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \left(|\Omega|^{\frac{1}{n}} + \|u_1\|_{L^{n(p-1)}(\Omega)}^{p-1} + \|u_2\|_{L^{n(p-1)}(\Omega)}^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{n(p-1)}(\Omega)$, segue

$$\|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \left(1 + \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1}\right).$$

Isto conclui a primeira parte. Consideremos agora $z_1, z_2 \in \mathscr{X}$, digamos $z_1 = (u_1, v_1)$ e $z_2 = (u_2, v_2)$. Temos

$$\begin{aligned}
\|G(t, z_1) - G(t, z_2)\|_{\mathscr{X}} &= \|-\beta(t)[v_1 - v_2] + [f^e(u_1) - f^e(u_2)]\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|-\beta(t)[v_1 - v_2]\|_{L^2(\Omega)} + \|f^e(u_1) - f^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \beta_1\|v_1 - v_2\|_{\mathscr{X}} + c\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \left(1 + \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1} + \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{p-1}\right) \\
&\leq c\|z_1 - z_2\|_{\mathscr{X}} \left(1 + \|z_1\|_{\mathscr{X}}^{p-1} + \|z_2\|_{\mathscr{X}}^{p-1}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos que $1 + \|z_1\|_{\mathscr{X}}^{p-1} + \|z_2\|_{\mathscr{X}}^{p-1} \geq 1$ e que $\|z_j\|_{\mathscr{X}} = \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v_j\|_{L^2(\Omega)}$, $j = 1, 2$. $\square$

Como consequência da Proposição 4.3, se $z_1, z_2 \in \mathscr{X}$, com $\|z_1\|_{\mathscr{X}}, \|z_2\|_{\mathscr{X}} \leq R$ então existe $C(R) > 0$ tal que

$$\|G(t, z_1) - G(t, z_2)\|_{\mathscr{X}} \leq C(R)\|z_1 - z_2\|_{\mathscr{X}}.$$

Observemos que, dado $R > 0$, se $z = (u, v) \in \mathscr{X}$ é tal que $\|z\|_{\mathscr{X}} \leq R$ temos

$$\|G(t, z)\|_{\mathscr{X}} = \|g(t, u)\|_{L^2(\Omega)} = \| - \beta(t)v + f^e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \| - \beta(t)v\|_{L^2(\Omega)} + \|f^e(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Agora,

$$\| - \beta(t)v\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta_1\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta_1\|z\|_{\mathscr{X}}$$

e

$$\|f^e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(\int_\Omega (1 + |u(x)|^p)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \|u^p\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq c\left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \|u\|^p_{L^{2p}(\Omega)}\right).$$

Usando que $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ e que $\|z\|_{\mathscr{X}} = \|u\|_{H^1_0(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$. Logo,

$$\|G(t, z)\|_{\mathscr{X}} \leq C_R,$$

para algum $C_R > 0$.

Notemos que B é um operador da forma $B = -\mathbb{A}_\theta$, operador dado na Seção 3.3. Pela Proposição 3.28, concluímos que $-B$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Finalmente aplicamos o Teorema 3.23 e, para cada $R > 0$, se $z_0 \in \mathscr{X}$ com $\|z_0\|_{\mathscr{X}} \leq R$ então existe uma única mild solution $z(\cdot, \tau, w_0) : [\tau, \tau + s] \longrightarrow X^1$ de (4.7).

Ainda é válido que, se $w_0, z_0 \in B_{X^1}(0, R)$ então

$$\|z(t, \tau, w_0) - z(t, \tau, z_0)\|_{X^1} \leq C\|w_0 - z_0\|_{X^1} \qquad \forall t \in [\tau, \tau + s].$$

4.2 Diferenciabilidade

Nesta parte, precisamos supor ainda que

$$|f''(s)| \leq c(1 + |s|),\ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad (n = 3) \tag{4.8}$$

$$|f''(s)| \leq K,\ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad (n > 3) \tag{4.9}$$

para algum $K \geq 0$. Ainda, consideremos válida a hipótese (4.2) com $p = 2$ quando $n = 4$.

Como G é definida de $\mathscr{X}$ em $L^2(\Omega)$ sua derivada de Fréchet $DG \in \mathscr{L}\big(\mathscr{X}, L^2(\Omega)\big)$. Precisamos do seguinte resultado:

Lema 4.4. *Consideremos $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo (4.2) e (4.9). Temos que f^e é continuamente diferenciável e sua derivada de Fréchet $Df^e : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathscr{L}\big(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)\big)$ é um operador limitado.*

Mais ainda, para os casos $n=3$ e $n=4$, temos que Df^e é Lipschitz contínua e para $n>4$, satisfaz a seguinte desigualdade: existe $\alpha \in (0,1)$ tal que, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|Df^e u - Df^e v\|_{\mathscr{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} \leq c\|u-v\|^{\alpha}_{H_0^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Definimos o operador

$$\begin{aligned} D_f : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathscr{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \\ u &\longmapsto D_f u \end{aligned}$$

onde $[D_f u(h)](x) := f'\big(u(x)\big)h(x)$, para $x \in \Omega$.

O operador D_f está bem definido: dados $u, h \in H_0^1(\Omega)$, usando (4.2) e as desigualdades de Hölder e de Minkowski, temos

$$\begin{aligned} \|D_f u(h)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |f'\big(u(x)\big)|^2 h^2(x)dx &\leq c\int_\Omega \big(1+|u(x)|^{p-1}\big)^2 h^2(x)dx \\ &\leq c\int_\Omega \big(1+|u(x)|^{2(p-1)}\big)h^2(x)dx \\ &\leq c\big\|1+|u|^{p-1}\big\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\big\|h^2\big\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \\ &\leq c\left(|\Omega|^{\frac{2}{n}} + \|\,|u|^{p-1}\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right)\|h^2\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \\ &\leq c\left(1+\|u\|^{p-1}_{L^{\frac{n(p-1)}{2}}(\Omega)}\right)\|h\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \end{aligned}$$

Agora, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{n(p-1)}{2}}(\Omega)$, pois $p < \frac{n}{n-2}$. Segue que

$$\|D_f u(h)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\left(1+\|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|^2_{H_0^1(\Omega)} < +\infty.$$

Provemos que $D_f = Df^e$, isto, D_f é a derivada de Fréchet de f^e. Para tal, dividiremos em três casos: $n=3$, $n=4$ e $n>4$.

Caso $n = 3$ **:**

$$\begin{aligned} \|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \big[f\big(u(x)+h(x)\big) - f\big(u(x)\big) - f'(x)h(x)\big]^2 dx \\ &= \int_\Omega \big[f'\big(u(x)+\theta_1(x)h(x)\big) - f'(u(x))\big]^2 h^2(x)dx \\ &= \int_\Omega \big[f''\big(u(x)+\theta(x)h(x)\big)\big]^2 h^4(x)dx, \end{aligned}$$

onde aplicamos duas vezes o Teorema do Valor Médio e $\theta_1(x), \theta(x) \in (0,1)$, para todo $x \in \Omega$. Observemos que, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
[f''\big(u(x)+\theta(x)h(x)\big)]^2 &\le (1+|u(x)+\theta(x)h(x)|)^2\\
&\le (1+|u(x)|+|\theta(x)||h(x)|)^2\\
&\le (1+|u(x)|+|h(x)|)^2\\
&\le (3\max\{1,|u(x)|,|h(x)|\})^2\\
&\le 9\left(1+u^2(x)+h^2(x)\right).
\end{aligned}$$

Usando (4.8), a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Minkowski temos

$$\begin{aligned}
\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le 9\int_\Omega \left(1+u^2(x)+h^2(x)\right)h^4(x)dx\\
&\le 9\|1+u^2+h^2\|_{L^3(\Omega)}\|h^4\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\\
&\le 9\left(|\Omega|^{\frac{1}{3}}+\|u^2\|_{L^3(\Omega)}+\|h^2\|_{L^3(\Omega)}\right)\|h^4\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\\
&\le c\left(1+\|u\|_{L^6(\Omega)}^2+\|h\|_{L^6(\Omega)}^2\right)\|h\|_{L^6(\Omega)}^4.
\end{aligned}$$

Agora, observemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (pois assumimos $n=3$) e então

$$\begin{aligned}
\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)} &\le c\left(1+\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2+\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2\\
&\le c\left(1+\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\|h\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$,

$$\frac{\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} \le c\left(1+\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\|h\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0.$$

Caso $n=4$ **:**

Podemos escrever, usando a mesma ideia acima,

$$\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega [f''\big(u(x)+\theta(x)h(x)\big)]^2 h^4(x)dx,$$

com $\theta(x) \in (0,1)$, para todo $x \in \Omega$. Por (4.9), temos

$$\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le K\int_\Omega h^4(x)dx = K\|h\|_{L^4(\Omega)}^4.$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (usando que $n=4$), concluímos que

$$\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)} \le K\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

e quando $\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$,

$$\frac{\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow 0.$$

Caso $n > 4$ **:**

Neste caso, utilizaremos interpolação, observando que $\frac{n}{n-2} < 2 < \frac{2n}{(n-2)p}$.

Temos

$$\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)}^{\frac{n}{n-2}} = \int_\Omega \left(f''(u(x) + \theta(x)h(x))h^2(x)\right)^{\frac{n}{n-2}} dx$$

onde $\theta(x) \in (0,1)$, para todo $x \in \Omega$. Por (4.9), segue que

$$\begin{aligned}\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)}^{\frac{n}{n-2}} &\leq \int_\Omega K h(x)^{\frac{2n}{n-2}} dx \\ &\leq K\|h\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^{\frac{2n}{n-2}},\end{aligned}$$

como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}(\Omega)}$, concluímos que, para alguma constante $K' > 0$,

$$\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq K'\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{4.10}$$

A fim de facilitar as contas, denotemos $\eta = \frac{2n}{(n-2)p}$. Então

$$\begin{aligned}\left\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\right\|_{L^\eta(\Omega)}^\eta &= \int_\Omega [f(u(x)+h(x)) - f(u(x)) - f'(u(x))h(x)dx]^\eta \\ &= \int_\Omega [f'(u(x)+\theta(x)h(x))h(x) - f'(u(x))h(x)dx]^\eta\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema do Valor Médio, $\theta(x) \in (0,1)$, para cada $x \in \Omega$. Aplicando a desigualdade de Hölder para $\frac{p}{p-1}$ e p temos

$$\begin{aligned}\left\|f^e(u+h) - f^e(u) - D_f u(h)\right\|_{L^\eta(\Omega)}^\eta &\leq \left\|\left(f'(u+\theta h) - f'(u)\right)^\eta\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left\|h^\eta\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left\|f'(u+\theta h) - f'(u)\right\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)}^\eta \left\|h\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^\eta\end{aligned}$$

Agora,

$$\|f'(u+\theta h) - f'(u)\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)} \leq \|f'(u+\theta h)\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)} + \|f'(u)\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Notemos que, por (4.2),

$$\begin{aligned}\left\|f'(u+\theta h)\right\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)}^{\frac{\eta p}{p-1}} &\leq c\int_\Omega \left(1 + |u(x)+\theta(x)h(x)|^{p-1}\right)^{\frac{\eta p}{p-1}} dx \\ &\leq c\left(|\Omega|^{\frac{p-1}{\eta p}} + \int_\Omega |u(x)+\theta(x)h(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right) \\ &\leq c\left(1 + \left\|u+\theta h\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^{\frac{2n}{n-2}}\right).\end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$,

$$\left\|f'(u+\theta h)\right\|^{\frac{\eta p}{p-1}}_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)} \leq c\left(1+\left\|u+\theta h\right\|^{\frac{2n}{n-2}}_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Então

$$\|f'(u+\theta h)\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)} \leq c\left(1+\|u+\theta h\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)$$

e, de maneira análoga,

$$\|f'(u)\|_{L^{\frac{\eta p}{p-1}}(\Omega)} \leq c\left(1+\|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Unindo os resultados anteriores

$$\left\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\right\|_{L^{\frac{2n}{(n-2)p}}(\Omega)} \leq c\left(1+\|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}+\|u+\theta h\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (4.11)$$

Pelo Corolário 1.9 e pelas desigualdades (4.10) e (4.11), para algum $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\left\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \left[K\|h\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right]^{1-\lambda}\left[c\left(1+\|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}+\|u+\theta h\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|_{H_0^1(\Omega)}\right]^{\lambda} \\
&\qquad \leq c\left(1+\|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}+\|u+\theta h\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\lambda}\|h\|^{2-\lambda}_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\|f^e(u+h)-f^e(u)-D_f u(h)\|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow 0$$

quando $\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$.

Com isto, provamos que D é a derivada de Fréchet de f^e. Mostremos a segunda parte do lema. Dividiremos em três casos: $n=3$, $n=4$ e $n>4$.

Caso $n=3$:

$$\|Df^e(u)h-Df^e(v)h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega [f'(u(x))-f'(v(x))]^2 h^2(x)dx.$$

Agora, para cada $x \in \Omega$, existe $\theta(x) \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
[f'(u(x))-f'(v(x))]^2 &= f''\big((1-\theta(x))u(x)+\theta(x)v(x)\big)^2(u(x)-v(x))^2 \\
&\leq c\left[1+\left|\big(1-\theta(x)\big)u(x)+\theta(x)v(x)\right|\right]^2(u(x)-v(x))^2 \\
&\leq c\left[1+\big(1-\theta(x)\big)^2u^2(x)+\theta^2(x)v^2(x)\right](u(x)-v(x))^2 \\
&\leq c\left[1+u^2(x)+v^2(x)\right](u(x)-v(x))^2,
\end{aligned}$$

onde usamos (4.8). Logo,

$$\begin{aligned}\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 4c\int_\Omega (1+u^2(x)+v^2(x))(u(x)-v(x))^2h^2(x)dx\\ &\leq c\|(1+u^2+v^2)(u-v)^2\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|h^2\|_{L^3(\Omega)}\\ &\leq c\|1+u^2+v^2\|_{L^3(\Omega)}\|(u-v)^2\|_{L^3(\Omega)}\|h^2\|_{L^3(\Omega)}\\ &\leq c\left(|\Omega|^{\frac{1}{3}}+\|u\|^2_{L^6(\Omega)}+\|v\|^2_{L^6(\Omega)}\right)\|u-v\|^2_{L^6(\Omega)}\|h\|^2_{L^6(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$ concluímos que

$$\begin{aligned}\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\left(1+\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}\|h\|_{H^1_0(\Omega)}\\ &\leq c\left(1+\|u\|_{H^1_0(\Omega)}+\|v\|_{H^1_0(\Omega)}\right)\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}\|h\|_{H^1_0(\Omega)}.\end{aligned}$$

Caso $n=4$ **:**

$$\|Df^e(u)h-Df^e(v)h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega [f'(u(x))-f'(v(x))]^2h^2(x)dx \leq \int_\Omega K[u(x)-v(x)]^2h^2(x)dx$$

onde usamos o Teorema do Valor Médio e a equação (4.9). Agora, pela desigualdade de Hölder, segue

$$\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq K\|(u-v)^2\|_{L^2(\Omega)}\|h^2\|_{L^2(\Omega)} = K\|(u-v)\|^2_{L^4(\Omega)}\|h\|^2_{L^4(\Omega)}.$$

Como, neste caso, $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}\|h\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Caso $n>4$ **:**

Observemos que $\frac{n}{n-2} < 2 < \frac{2n}{(n-2)p}$. Consequentemente,

$$L^{\frac{2n}{(n-2)p}}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega). \tag{4.12}$$

Assim, para $u,v,h\in H^1_0(\Omega)$,

$$\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} = \int_\Omega \left[f'\big(u(x)\big)h(x) - f'\big(v(x)\big)h(x)dx\right]^{\frac{n}{n-2}}.$$

Agora, para cada $x\in\Omega$, existe $\theta(x)\in(0,1)$ tal que

$$f'\big(u(x)\big)h(x) - f'\big(v(x)\big) \leq f''\big((1-\theta(x))u(x)+\theta(x)v(x)\big)(u(x)-v(x)).$$

Logo, por (4.9), seguido da desigualdade de Hölder e (4.12), temos

$$
\begin{aligned}
\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} dx &\leq K \int_\Omega \big[\big(u(x)-v(x)\big)h(x)dx\big]^{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq K\big\|(u-v)^{\frac{n}{n-2}}\big\|_{L^2(\Omega)}\big\|h^{\frac{n}{n-2}}\big\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq K\big\|u-v\big\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\big\|h\big\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \\
&\leq K\big\|u-v\big\|^{\frac{n}{n-2}}_{H_0^1(\Omega)}\big\|h\big\|^{\frac{n}{n-2}}_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$
\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \leq K\big\|u-v\big\|_{H_0^1(\Omega)}\big\|h\big\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.13}
$$

Denotemos $\kappa := \frac{2n}{(n-2)p}$. Aplicando da desigualdade de Hölder com p e $\frac{p}{p-1}$,

$$
\begin{aligned}
\big\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\big\|^\kappa_{L^\kappa(\Omega)} &= \int_\Omega \big[f'\big(u(x)\big)h(x) - f'(v(x)\big)h(x)dx\big]^\kappa \\
&= \int_\Omega \big[f'\big(u(x)\big) - f'(v(x))\big]^\kappa h^\kappa(x) \\
&\leq \big\|[f'(u)-f'(v)]^\kappa\big\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \|h^\kappa\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|f'(u)-f'(v)\|^\kappa_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)} \|h\|^\kappa_{L^{\kappa p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\|f'(u)-f'(v)\|^\kappa_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)} &\leq \Big(\|f'(u)\|_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)} + \|f'(v)\|_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)}\Big)^\kappa \\
&\leq c\left(|\Omega|^{\frac{p-1}{\kappa p}} + \|u^{p-1}\|_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{p-1}{\kappa p}} + \|v^{p-1}\|_{L^{\frac{\kappa p}{p-1}}(\Omega)}\right)^\kappa \\
&\leq c\left(1 + \|u\|^{p-1}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|v\|^{p-1}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\right)^\kappa \\
&\leq c\left(1 + \|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)^\kappa,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$.

Consequentemente,

$$
\big\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\big\|_{L^\kappa(\Omega)} \leq c\left(1 + \|u\|^{(p-1)}_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^{(p-1)}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|h\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{4.14}
$$

Utilizemos as equações (4.13) e (4.14) e o Corolário 1.9. Para algum $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\big\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|Df^e(u)h - Df^e(v)h\big\|^\lambda_{L^\kappa(\Omega)}\|Df^e(u)h - Df^e(v)h\big\|^{1-\lambda}_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \\
&\leq c\left(1 + \|u\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^{p-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)^\lambda \|u-v\|^{1-\lambda}_{H_0^1(\Omega)}\big\|h\big\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

□

Provado o Lema 4.4, é fácil ver que G é continuamente diferenciável e a derivada de Fréchet de G é o operador

$$DG : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{X}, L^2(\Omega))$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto DG\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

onde $\left[DG\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} := -\beta(t)h_2 + Df^e(u)h_1$.

Observemos que, se $z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{X}$, tal que dado $r > 0$, tal que $\|z_1\|_{\mathscr{X}}, \|z_1\|_{\mathscr{X}} \leq r$, existe $C(r)$ com

$$\|DG(z_1)h - DG(z_2)h\|_{L^2(\Omega)} = \|Df^e(u_1) - Df^e(u_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(r)\|u_1 - u_2\|^{\alpha}_{H_0^1(\Omega)}\|h\|_{H_0^1(\Omega)},$$

com $\alpha = 1$ para $n = 3$ ou 4 e $\alpha \in (0,1)$ para $n > 4$.

Pelo Teorema 3.26 segue que as soluções do problema (4.7) são continuamente diferenciáveis com respeito à condição inicial.

4.3 Boa colocação global

Nesta seção, queremos mostrar que as soluções da equação (4.7) são definidas globalmente. Para tal, consideremos $\delta > 0$ e o seguinte funcional $V_\delta : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ definido por

$$V_\delta(u,v) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\left\langle u, v\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega F(u(x))dx,$$

onde $F(r) = \int_0^r f(s)ds$.

Proposição 4.5. *Existem $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, com $\varepsilon_0 < \lambda_1$ e $M_\varepsilon > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,*

$$F(r) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)r^2 + M_\varepsilon, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Consideremos $\varepsilon_0 > 0$ e $r_1 > 0$ dados na Observação 4.1. Notemos que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, se $|r| \leq r_1$, existe $M > 0$ tal que $|f(r)| \leq M$ e

$$F(r) \leq |F(r)| \leq M|r| \leq Mr_1.$$

Se $r > r_1$,

$$\begin{aligned} F(r) = \int_0^r f(s)ds = \int_0^{r_1} f(s)ds + \int_{r_1}^r f(s)ds &= \int_0^{r_1} f(s)ds + \int_{r_1}^r (\lambda_1 - \varepsilon)sds \\ &\leq Mr_1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)r^2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)r_1^2. \end{aligned}$$

Se $r < -r_1$ então

$$F(r) = \int_0^{-r_1} f(s)ds + \int_{-r_1}^{r} f(s)ds \leq Mr_1 - \int_r^{-r_1} f(s)ds \leq Mr_1 - \int_{r_1}^{r} -(\lambda_1 - \varepsilon)sds$$
$$\leq Mr_1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\, r^2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\, r_1^2.$$

Denotemos $M_\varepsilon := Mr_1$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, é válido que

$$F(r) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)r^2 + M_\varepsilon. \tag{4.15}$$

□

Finalmente, estamos em condições de garantir a boa colocação global das soluções. Pela definição de $V_\delta(u,v)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} &= V_\delta(u,v) - \delta\, \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F(u(x))dx \\
&\leq V_\delta(u,v) + \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)u^2(x) + M_\varepsilon\right] dx + \delta\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq V_\delta(u,v) + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + M_\varepsilon|\Omega| + \delta\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq V_\delta(u,v) + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + M_\varepsilon|\Omega| \\
&\quad + \delta\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

na última desigualdade foi usada a desigualdade de Poincaré. Usando a desigualdade de Young, temos

$$\delta\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2}\lambda_1^{-1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Conseguimos disto que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1} - \frac{\delta}{2}\lambda_1^{-1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right)\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq V_\delta(u,v) + C_\varepsilon|\Omega|.$$

Considerando $\delta < \min\{1, \lambda_1\}$ e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1} - \frac{\delta}{2}\lambda_1^{-1} > 0$, obtemos

$$\|(u,v)\|^2_{\mathscr{X}} = \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \leq 4\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq c_1 V_\delta(u,v) + c_2, \tag{4.16}$$

com constantes $c_1, c_2 > 0$.

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in D(B)$. Consideremos a mild solution $z(\cdot, t_0, z_0)$ tal que $z(t_0) = z_0$, definida no intervalo maximal $[t_0, \tau_{t_0,z_0})$. Lembrando que tal solução existe, pelo Teorema 3.24. Calculando a derivada de V_δ sob a mild solução, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_\delta(z) &= \langle \nabla u, \nabla u_t\rangle + \langle u_t, u_{tt}\rangle + \delta\|u_t\|^2 + \delta\,\langle u, u_{tt}\rangle - \langle f(u), u_t\rangle \\
&= \langle \nabla u, \nabla u_t\rangle + \langle u_t, -\beta(t)u_t + \Delta u + f(u)\rangle + \delta\|u_t\|^2 + \delta\,\langle u, -\beta(t)u_t + \Delta u + f(u)\rangle \\
&\quad - \langle f(u), u_t\rangle \\
&= -(\beta(t)-\delta)\|u_t\|^2 - \delta\beta(t)\,\langle u, u_t\rangle + \delta\,\langle u, \Delta u\rangle + \delta\,\langle u, f(u)\rangle \\
&= -(\beta(t)-\delta)\|u_t\|^2 - \delta\|\nabla u\|^2 - \delta\beta(t)\,\langle u, u_t\rangle + \delta\,\langle u, f(u)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Para $\delta = 0$, segue que $\frac{d}{dt}V_0(u) \leq 0$. Logo, V_0 é não-crescente, contínua e limitada em subconjuntos limitados de $\mathscr{X}$. Para cada $r > 0$, se $\|z_0\|_{\mathscr{X}} \leq r$ existe $C(r) > 0$ tal que $|V_0(x)| \leq C(r)$. Por (4.16) e (4.17), para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
\|z(t,t_0,z_0))\|_{\mathscr{X}} &\leq c_1 V_0(z(t,t_0,z_0)) + c_2 \\
&\leq c_1 V_0(z(t_0,t_0,z_0)) + c_2 = c_1 V_0(z_0) + c_2 \\
&\leq M(r),
\end{aligned}$$

onde $M(r) := c_1 C(r) + c_2$. Observemos que $M(r)$ não depende de $t_0 \in \mathbb{R}$. Logo

$$\sup\left\{\ \|z(t,t_0,z_0)\|_{\mathscr{X}} : \|z_0\|_{\mathscr{X}} \leq r,\ t_0 \in \mathbb{R},\ t \in \left[t_0, \tau_{\{t_0,z_0\}}\right)\ \right\}\ \leq M(r). \tag{4.18}$$

Logo, pelo Corolário 3.25, segue que $\tau_{\{t_0,x_0\}} = +\infty$.

Portanto, podemos definir o processo

$$S(t,s)x_0 = z(t,s,x_0), \qquad x_0 \in X,\ \forall t \geq s. \tag{4.19}$$

Provemos que o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado, queremos mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\bigcup_{\tau \leq t}\bigcup_{s\leq\tau} S(\tau,s)B$ é limitado.

Existe $R > 0$ tal que $B \subset B_{\mathscr{X}}(0,R)$. Agora, observemos que por (4.18), para cada $t,\tau \in \mathbb{R}$, com $\tau \leq t$, segue que

$$S(\tau,s)B \subset B_{\mathscr{X}}(0,M(R)) \qquad \forall s \in \mathbb{R}, s \leq \tau,$$

isto é, $\bigcup_{s\leq\tau} S(\tau,s)B \subset B_{\mathscr{X}}(0,M(R))$.

Como o resultado é válido para cada $\tau \leq t$, concluímos que

$$\bigcup_{\tau\leq t}\bigcup_{s\leq\tau} S(\tau,s)B \subset B_{\mathscr{X}}(0,M(R)).$$

4.4 O processo é pullback fortemente limitado dissipativo

Mostremos que o processo $\{S(t,s) : t \geq s\}$ definido acima é pullback fortemente limitado dissipativo. Consideremos V_δ como na seção anterior.

Usando (4.5), temos

$$\langle u, f(u)\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)f(u(x))dx \leq \int_\Omega (\lambda_1 - \varepsilon)u^2(x) + M\ dx \leq (\lambda_1 - \varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + M|\Omega|.$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_\delta(u,u_t) &= -(\beta(t) - \delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \delta\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \delta\beta(t)\langle u, u_t\rangle_{L^2(\Omega)} + \delta\langle u, f(u)\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leq -(\beta_0 - \delta)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \delta\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\beta_1\|u\|_{L^2(\Omega)}.\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta(\lambda_1 - \varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta M|\Omega|,\end{aligned}$$

onde foi usado (4.6). Agora, pela desigualdade de Cauchy com $\lambda_1 > 0$, temos

$$\begin{aligned}\beta_1\delta\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)} &= \delta\|u\|_{L^2(\Omega)}\left(\beta_1\|u_t\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq \frac{\delta\lambda_1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta\beta_1^2\lambda_1^{-1}}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\delta}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta\beta_1^2\lambda_1^{-1}}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Usando o resultado acima e a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_\delta(z) \leq &-\left(-\delta + \frac{\delta}{2} + \delta(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &-\left(\beta_0 - 2\delta - \frac{\delta\beta_1^2\lambda_1^{-1}}{2}\right)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta m_\delta|\Omega|.\end{aligned}$$

Podemos escolher $\delta < \min(1, \lambda_1)$ suficientemente pequeno tal que $\beta_0 - 2\delta - \dfrac{\delta\beta_1^2\lambda_1^{-1}}{2} > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $-\frac{\delta}{2} + \delta(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1} > 0$. Tomemos

$$\alpha := \min\left(\beta_0 - \delta - \frac{\delta\beta_1^2\lambda_1^{-1}}{2}, -\frac{\delta}{2} + \delta(\lambda_1 - \varepsilon)\lambda_1^{-1}\right)$$

e então

$$\frac{d}{dt}V_\delta(z) \leq -\alpha\|z\|^2_{\mathscr{X}} + \delta m_\varepsilon|\Omega|. \tag{4.20}$$

Consideremos $r_0^2 = \frac{\delta m_\varepsilon|\Omega|+1}{\alpha}$. Suponhamos que $\|z(t,t_0,z_0)\|_{\mathscr{X}} \geq r_0$ para todo $t \geq t_0$,

$$V_\delta(z) \leq -(t - t_0) + V_\delta(z_0).$$

Logo, existe $\bar{t} > 0$ tal que $V_\delta(z(t)) \leq 0$, para todo $t \geq t_0 + \bar{t}$. Por (4.16), segue que

$$\|z(t)\|_{\mathscr{X}}^2 \leq c_2, \ \forall t \geq t_0 + \bar{t}.$$

Suponhamos agora que existe $T > 0$ de modo que $\|z(t_0 + T)\|_{\mathscr{X}} < r_0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que T seja o menor número positivo satisfazendo esta condição. Neste caso, temos duas possibilidades, $T \leq \bar{t}$ ou $T > \bar{t}$. Observemos que, no primeiro caso, por (4.18), temos

$$\|z(t)\|_{\mathscr{X}} \leq M(r_0), \qquad \forall t \geq t_0 + T.$$

Suponhamos que $T > \bar{t}$. Pelo mesmo argumento acima, temos $\|z(t)\|_{\mathscr{X}} \leq M(r_0)$, para todo $t \geq t_0 + T$. Agora, observemos que se $t \in [t_0 + \bar{t}, t_0 + T]$ então $\|z(t)\|_{\mathscr{X}} \geq r_0$ e $V_\delta(z(t)) \leq 0$. Assim, $\|z(t)\|_{\mathscr{X}}^2 \leq c_2$.

Tomemos $R = \max\{\sqrt{c_2}, r_0\}$. Concluímos assim que, para cada $B \subset \mathscr{X}$ limitado e para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existem $\bar{t} > 0$ e $R > 0$ tal que

$$S(t + t_0, t_0)B \subset B_{\mathscr{X}}(0, R), \qquad \forall t \geq \bar{t}.$$

4.5 Existência do atrator pullback

Queremos mostrar que o processo admite atrator pullback. Para tal, utilizaremos o Teorema 3.20. Reescrevemos o problema (4.1) na forma

$$w_t = C(t)w + F(w)$$

onde $C(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -\beta(t)I \end{pmatrix}$ e $F(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ f^e(w) \end{pmatrix}$.

Logo podemos escrever o processo $S(\cdot, \cdot)$ da seguinte forma

$$S(t, s)w_0 = L(t, s)w_0 + U(t, s)w_0,$$

onde $L(\cdot, \cdot)$ é o processo associado à equação linear $w_t = C(t)w$ e $U(t, s)w_0$ é dado por

$$U(t, s)w_0 = \int_s^t L(t, \tau)F(S(\tau, s)w_0)d\tau.$$

Proposição 4.6. *Existem constantes $K > 0$, $\alpha > 0$ tal que*

$$\|L(t, s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad \forall t \geq s.$$

Demonstração. Para $b \geq 0$, consideremos o funcional dado por

$$W_b(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2b\,\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Observemos que, pela desigualdade de Cauchy,

$$|2b\,\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq 2b\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq b\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + b\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Consideremos $b < b_0$ tal que $\frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2b\,\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$.

Assim,

$$\frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \ \leq\ W_b(\varphi, \psi)\ \leq \left(\tfrac{1}{2} + b\right)\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left(\tfrac{1}{2} + b\right)\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

Calculemos a derivada de W_b sob $L(t,s)(\varphi, \psi) := \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_b(v, v_t) &= \langle v, v_t \rangle_{H_0^1(\Omega)} + 2b\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\,\langle v, v_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v_t, v_{tt} \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle \nabla v, \nabla v_t \rangle_{L^2(\Omega)} + 2b\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\,\langle v, -\beta(t)v_t + \Delta v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \langle v_t, -\beta(t)v_t + \Delta v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= 2b\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} - 2b\beta(t)\,\langle v, v_t \rangle_{L^2(\Omega)} - 2b\,\langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \beta(t)\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq -(\beta_0 - 2b)\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} - 2b\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\beta_1\,\langle v, v_t \rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde usamos o Corolário 1.20 e que $\langle v, \Delta v \rangle_{L^2(\Omega)} = -\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$. Pela desigualdade de Young, para $\varepsilon > 0$, temos

$$|\,\langle v, v_t \rangle_{L^2(\Omega)}\,| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\|v_t\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

E então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_b(v, v_t) &\leq -(\beta_0 - 2b)\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} - b\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - b\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon b\beta_1\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{b\beta_1}{\varepsilon}\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq -\left(\beta_0 - 2b - \frac{b\beta_1}{\varepsilon}\right)\|v_t\|^2_{L^2(\Omega)} - b\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (\varepsilon b\beta_1 - b\lambda_1)\|v\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para $\varepsilon < \frac{\lambda_1}{\beta_1}$, temos

$$\frac{d}{dt}W_b(v, v_t) \leq -\left(\beta_0 - 2b - \frac{b\beta_1^2}{\lambda_1}\right)\big\|v_t\big\|^2_{L^2(\Omega)} - b\big\|v\big\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Tomando $b > 0$ suficientemente pequeno tal que $\beta_0 - 2b - \frac{b\beta_1^2}{\lambda_1} > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}W_b(v, v_t) \leq -\frac{\alpha}{4}\big\|(v, v_t)\big\|^2_{\mathscr{X}}. \tag{4.22}$$

Por (4.21) e (4.22) segue que

$$\frac{d}{dt}W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)) \leq -\alpha W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)).$$

Observemos que, pela nossa escolha de $b < b_0$ temos $W_b > 0$ e então

$$\frac{\frac{d}{dt}W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)}{W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)} \leq \alpha,$$

integrando de s até t temos

$$\begin{gathered}\log W_b\left(L(t,s)(\varphi,\psi)\right) - \log W_b(\varphi,\psi) \leq -\alpha(t-s) \\ \Downarrow \\ W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)) \leq e^{-\alpha(t-s)}W_b(\varphi,\psi).\end{gathered}$$

Finalmente,

$$\left\|L(t,s)(\varphi,\psi)\right\|_{\mathscr{X}} \leq 4.W_b(L(t,s)(\varphi,\psi)) \leq 4e^{-\alpha(t-s)}W_b(\varphi,\psi) \leq 4(\tfrac{1}{2}+b)e^{-\alpha(t-s)}\left\|(\varphi,\psi)\right\|_{\mathscr{X}}.$$

Portanto, existe $K > 0$ tal que, se $t \geq s$ então

$$\left\|L(t,s)\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

□

Proposição 4.7. *$U(t,s)$, para $t \geq s$ é um operador compacto.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que f^e leva subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$ em subconjuntos limitados de $W^{1,r}(\Omega)$, para $\frac{2n}{n+2} < r < 2$. De fato, usando (4.6) e (4.2), temos

$$\begin{aligned}\left\|f^e(u)\right\|_{W^{1,r}(\Omega)}^r &= \int_\Omega |f(u(x))|^r dx + \int_\Omega |f'(u(x))|^r |\nabla u(x)|^r dx \\ &\leq \int_\Omega c\left(1+|u(x)|^p\right)^r dx + \int_\Omega c\left(1+|u(x)|^{p-1}\right)^r |\nabla u(x)|^r dx \\ &\leq c\left(1 + \left\|u^p\right\|_{L^r(\Omega)}^r + \left\|\nabla u\right\|_{L^r(\Omega)}^r + \left\|u^{p-1}\nabla u\right\|_{L^r(\Omega)}^r\right).\end{aligned}$$

Agora usando Hölder com expoentes $\frac{2}{r}$ e $\frac{2}{2-r}$, temos

$$\begin{aligned}\left\|u^{p-1}\nabla u\right\|_{L^r(\Omega)}^r = \int_\Omega |u(x)|^{r(p-1)}|\nabla u(x)|^r\, dx &\leq \left\|\, |u|^{r(p-1)}\right\|_{L^{\frac{2}{2-r}}(\Omega)}\left\|\, |\nabla u|^r\right\|_{L^{\frac{2}{r}}(\Omega)} \\ &= \left\|u\right\|_{L^{\frac{2r(p-1)}{2-r}}(\Omega)}^{r(p-1)}\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^r.\end{aligned}$$

Tomemos $r > 0$ de modo que $\frac{2r(p-1)}{2-r} = \frac{2n}{n-2} \Rightarrow r(p-1)(n-2) = n(2-r) \Rightarrow 2r > 2n - nr \Rightarrow r > \frac{2n}{n+2}$. Temos

$$\left\|u^{p-1}\nabla u\right\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \left\|u\right\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^{r(p-1)}\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)}^r.$$

Usando isto e que $rp < 2p < \frac{2n}{n-2}$, vemos que

$$\|f^e(u)\|^r_{W^{1,r}(\Omega)} \leq c\left(1 + \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} + \|\nabla u\|^r_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{r(p-1)}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\|\nabla u\|^r_{L^2(\Omega)}\right).$$

Portanto, f leva subconjuntos limitados de $H^1_0(\Omega)$ em subconjuntos limitados de $W^{1,r}(\Omega)$, para algum $\frac{2n}{n+2} < r < 2$. Agora, pelo Teorema 1.23, temos $W^{1,r}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$.

Concluímos assim que f^e é um operador compacto.

Logo, F é um operador compacto, $L(t,\tau)F(S(\tau,s)(\cdot))$ é compacto já que é composição de um operador linear e um compacto. Finalmente, $U(t,s)$ é compacto, para $t \geq s$ pois o operador é compacto.

Portanto, U é um operador compacto. □

Logo, pelo Teorema 3.18, o nosso problema admite atrator-pullback $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, temos que $\bigcup\limits_{s\leq t} A(s)$ é limitado em $\mathscr{X}$.

4.6 Regularidade do atrator pullback

Já sabemos que $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} A(t)$ é limitado em $\mathscr{X}$. Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) = \left\{\ \xi(t)\ \Big|\ \xi : \mathbb{R} \longrightarrow X \text{ é uma solução global limitada para } S(\cdot,\cdot)\ \right\}. \qquad (4.23)$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} A(t)$ é limitado em $\mathscr{X}^1 = H^2(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$. Consideremos $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{X}$ uma solução limitada. O conjunto $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é limitado em $\mathscr{X}$, pois $\xi(t) \in A(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora $\xi(\cdot) = \big(u(\cdot), u_t(\cdot)\big)$ e podemos escrever, pela fórmula da variação das constantes

$$\xi(t) = L(t,s)\xi(s) + \int_s^t L(t,\tau)F(\xi(\tau))d\tau,$$

e pela Proposição 4.6, temos

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t L(t,\tau)F(\xi(\tau))d\tau.$$

Para $s \in \mathbb{R}$ denotemos $w_0 = \xi(s)$,

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ w_t(t) \end{pmatrix} = \int_s^t L(t,\tau)F(S(\tau,s)w_0)d\tau.$$

Observemos que $w(s) = w_t(s) = 0$. Também $\Delta w(s) = 0$. Logo, w satisfaz a seguinte equação

$$w_{tt} + \beta(t) w_t = \Delta w + f(w)$$

com $w(s) = w_t(s) = 0$.

Consideremos o funcional de energia

$$W_b(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\big\|\nabla\varphi\big\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\big\|\psi\big\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\left\langle\varphi, \psi\right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Derivando sob (w, w_t), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_b(w(t), w_t(t)) &= \left\langle\nabla w, \nabla w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2b\left\langle w_t, w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2b\left\langle w, w_{tt}\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle w_t, w_{tt}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&= \left\langle\nabla w, \nabla w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2b\big\|w_t\big\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\left\langle w, -\beta(t)w_t + \Delta w + f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + \left\langle w_t, -\beta(t)w_t + \Delta w + f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&= 2b\big\|w_t\big\|^2_{L^2(\Omega)} - 2b\beta(t)\left\langle w, w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)} - 2b\left\langle\nabla w, \nabla w\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + 2b\left\langle w, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)} - \beta(t)\big\|w_t\big\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\langle w_t, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\leq -(\beta_0 - 2b)\big\|w_t\big\|^2_{L^2(\Omega)} - 2b\big\|\nabla w\big\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b\beta_1\left\langle w, w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + 2b\left\langle w, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle w_t, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Façamos algumas limitações. Primeiramente, veja que para $\alpha > 0$, temos

$$\left\langle w, w_t\right\rangle_{L^2(\Omega)} \leq \big\|w\big\|_{L^2(\Omega)}\big\|w_t\big\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2}\big\|w\big\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\alpha}\big\|w_t\big\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.24}$$

Agora, da condição de dissipatividade (4.5)

$$\left\langle w, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x)f(w(x))dx \leq \int_\Omega(\lambda_1 - \varepsilon)w^2(x) + M dx$$

e então

$$\left\langle w, f^e(w)\right\rangle_{L^2(\Omega)} \leq (\lambda_1 - \varepsilon)\big\|w\big\|^2_{L^2(\Omega)} + M|\Omega|. \tag{4.25}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
\big\|f^e(w)\big\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega [f(w(x))]^2\, dx \leq c\int_\Omega (1 + |w(x)|^p)^2 dx &\leq c\left(1 + \int_\Omega |w(x)|^{2p}\, dx\right)\\
&= c\left(1 + \big\|w\big\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

e, como $2p < \frac{2n}{n-2}$, temos

$$\big\|f^e(w)\big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\left(1 + \big\|w\big\|^{2p}_{H^1_0(\Omega)}\right) \leq C,$$

para algum $C > 0$.

Assim, para $\gamma > 0$, temos

$$\langle w_t, f^e(w) \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|w_t\|_{L^2(\Omega)} \|f^e(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + C. \tag{4.26}$$

Logo, por (4.24), (4.25) e (4.26),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_b(w, w_t) &\leq -(\beta_0 - 2b)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - 2b\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + b\beta_1\alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{b\beta_1}{\alpha}\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2b(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} + C \\
&\leq -\left(\beta_0 - 2b - \frac{b\beta_1}{\alpha} - \frac{\gamma}{2}\right)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2b\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + b\beta_1\alpha\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + C \\
&\leq -\left(\beta_0 - 2b - \frac{b\beta_1}{\alpha} - \frac{\gamma}{2}\right)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{b\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (b\beta_1\alpha - b\varepsilon)\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + C.
\end{aligned}$$

Agora, tomemos $\alpha = \frac{\varepsilon}{\beta_1}$e $\gamma = 2b$ e considerando b suficientemente pequeno temos

$$\frac{d}{dt}W_b(w(t), w_t(t)) \leq -\frac{\beta_0}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{b\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + C.$$

Por consequência disso, para cada limitado B em $\mathscr{X}$,

$$\bigcup_{s \leq \tau \leq t} U(\tau, s)B \text{ é um subconjunto limitado de } \mathscr{X}. \tag{4.27}$$

Denotemos $v = w_t$. Então é satisfeita a equação

$$v_{tt} + \beta(t)v_t = \Delta v - \beta'(t)v + f'(w(t, s; u_0))v(t, s; u_0), \tag{4.28}$$

com condições iniciais $v(s) = 0$ e $v_t(s) = f(w_0)$.

Estimemos (v, v_t) solução de (4.28) em $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Para tal, utilizaremos um método de aproximação usado em [3]. Para $\epsilon > 0$, definimos $Y^\epsilon = D\left((-\Delta)^{\frac{\epsilon}{2}}\right)$, com a norma do gráfico e $Y^{-\epsilon} = (Y^\epsilon)^*$, o dual de Y^ϵ.

Definimos o funcional

$$W_b(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{Y^{1-\epsilon}} + \frac{1}{2}\|\psi\|^2_{Y^{-\epsilon}} + 2b\langle \varphi, \psi \rangle_{Y^{-\epsilon}} \qquad \forall(\varphi, \psi) \in Y^{1-\epsilon} \times Y^{-\epsilon}.$$

Tomemos $\epsilon_1 = \frac{(p-1)(n-2)}{2} < 1$. Encontremos $r^* > 0$ tal que

$$\|f'(w)w_t\|_{Y^{-\epsilon_1}} \leq c\|f'(w)w_t\|_{L^{r^*}(\Omega)}.$$

Para termos essa desigualdade, basta que $Y^{\epsilon_1} \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $\frac{1}{r}+\frac{1}{r^*}=1$. Como $Y^{\epsilon_1} = X^{\frac{\epsilon_1}{2}} = H^{\epsilon_1}(\Omega)$, segue que

$$\epsilon_1 - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{r} \Rightarrow r \leq \frac{2n}{n-2\epsilon_1}.$$

Tomemos $r = \frac{2n}{n-2\epsilon_1}$ e então $r^* = \frac{2n}{n+2\epsilon_1}$.

Assim

$$\big\|f'(w)w_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} \leq c\big\|f'(w)w_t\big\|_{L^{\frac{2n}{n+2\epsilon_1}}(\Omega)}. \tag{4.29}$$

Usando a desigualdade de Hölder para $\frac{n+2\epsilon_1}{2\epsilon_1}$ e $\frac{n+2\epsilon_1}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \big\|f'(w)w_t\big\|_{L^{\frac{2n}{n+2\epsilon_1}}(\Omega)} &\leq \big\|f'(w)\big\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_1}}(\Omega)}\big\|w_t\big\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\left(1+\big\|\,|w|^{p-1}\big\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_1}}(\Omega)}\right)\big\|w_t\big\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\left(1+\big\|w\big\|^{p-1}_{L^{\frac{(p-1)n}{\epsilon_1}}(\Omega)}\right)\big\|w_t\big\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\left(1+\big\|w\big\|^{p-1}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\right)\big\|w_t\big\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \end{aligned} \tag{4.30}$$

com constante $C>0$. Acima, também usamos a desigualdade de Minkowski, que $|\Omega|$ é finita e que $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Agora, para v satisfazendo (4.28),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_{\epsilon_1}(v(t),v_t(t)) &= \langle v, v_t\rangle_{Y^{1-\epsilon_1}} + 2b\,\langle v, -\beta(t)v_t + \Delta v - \beta'(t)v + f'(w)w_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} \\ &\quad + 2b\,\langle v_t, v_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} + \langle v_t, -\beta(t)v_t + \Delta v - \beta'(t)v + f'(w)w_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}}. \end{aligned}$$

Usando que $\langle v, v_t\rangle_{Y^{1-\epsilon_1}} = -\langle \Delta v, v_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}}$ e $\langle v, \Delta v\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} = -\|v\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}}$, chegamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_{\epsilon_1}(v(t),v_t(t)) &= -(\beta(t)-2b)\big\|v_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} - 2b\big\|v\big\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} - (2b\beta(t)+\beta'(t))\,\langle v, v_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} \\ &\quad - 2b\beta'(t)\big\|v\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + 2b\,\langle v, f'(w)w_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} + \langle v_t, f'(w)w_t\rangle_{Y^{-\epsilon_1}} \\ &\leq -(\beta_0-2b)\big\|v_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} - 2b\big\|v\big\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} + (2b\beta_1+L)\big\|v\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|v_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} \\ &\quad + 2bL\big\|v\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + 2b\big\|v\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|f'(w)w_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} + \big\|v_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|f'(w)w_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}, \end{aligned}$$

onde $L>0$ é a constante de Lipschitz de β.

Usando a desigualdade de Cauchy para $\alpha,\gamma,\eta>0$,

$$\begin{aligned} \big\|v\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|v_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} &\leq \frac{1}{2\alpha}\big\|v\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + \frac{\alpha}{2}\big\|v_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} \\ \big\|v\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|f'(w)w_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} &\leq \frac{\gamma}{2}\big\|v\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + \frac{1}{2\gamma}\big\|f'(w)w_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} \\ \big\|v_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}}\big\|f'(w)w_t\big\|_{Y^{-\epsilon_1}} &\leq \frac{\eta}{2}\big\|v_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + \frac{1}{2\eta}\big\|f'(w)w_t\big\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} \end{aligned}$$

Pelas desigualdades acima e por (4.29) e (4.30), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W_{\epsilon_1}(v,v_t) &\leq -(\beta_0-2b)\|v_t\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} - 2b\|v\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} + \tfrac{(2b\beta_1+L)}{2\alpha}\|v\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} \\ &+ \tfrac{(2b\beta_1+L)\alpha}{2}\|v_t\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + 2bL\|v\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + b\gamma\|v\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + \frac{\eta}{2}\|v_t\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + C.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_1 < 1$ temos

$$L^2(\Omega) = X \hookrightarrow X^{-\frac{\varepsilon_1}{2}} = Y^{-\varepsilon_1}.$$

Consequentemente,

$$\tfrac{(2b\beta_1+L)}{2\alpha}\|v\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} + 2bL\|v\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} \leq k, \tag{4.31}$$

para alguma constante $k > 0$.

Ainda, $Y^{1-\varepsilon_1} \hookrightarrow Y^{-\varepsilon_1}$. Logo, existe $c > 0$ tal que $\|\cdot\|_{Y^{-\varepsilon_1}} \leq c\|\cdot\|_{Y^{1-\varepsilon_1}}$.

Pela imersão dada acima e pela equação (4.31), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W_{\epsilon_1}(v,v_t) &\leq -\left(\beta_0 - 2b - \tfrac{(2b\beta_1+L)\alpha}{2} - \frac{\eta}{2}\right)\|v_t\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} - b\|v\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} \\ &+ (-b + cb\gamma)\|v\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} + C.\end{aligned}$$

Com as escolhas apropriadas para valores de $\alpha, \gamma, \eta > 0$ e tomando b suficientemente pequeno, chegamos que

$$\frac{d}{dt}W_{\epsilon_1}(v(t),v_t(t)) \leq -\frac{\beta_0}{2}\|v_t\|^2_{Y^{-\epsilon_1}} - b\|v\|^2_{Y^{1-\epsilon_1}} + C. \tag{4.32}$$

De (4.32) e usando (4.23), temos

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A(t) \text{ é limitado em } Y^{2-\epsilon_1} \times Y^{1-\epsilon_1}. \tag{4.33}$$

Usando desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|f'(w)w_t\|_{Y^{-\epsilon_2}} &\leq c\|f'(w)w_t\|_{L^{\frac{2n}{n+2\epsilon_2}}(\Omega)} \\ &\leq c\|w_t\|_{L^{\frac{2n}{n-2+2\epsilon}}(\Omega)}\|f'(w)\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Agora, observemos que $L^{\frac{2n}{n-2+2\epsilon_1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\epsilon_1}(\Omega) = Y^{1-\epsilon_1}$. Logo,

$$\begin{aligned}\|f'(w)w_t\|_{Y_{-\epsilon_2}} &\leq c\|w_t\|_{Y^{1-\epsilon_1}}\|f'(w)\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)} \\ &\leq c\|w_t\|_{Y^{1-\epsilon_1}}\|1+|w|^{p-1}\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)} \\ &\leq c\|w_t\|_{Y^{1-\epsilon_1}}\left(1+\|\,|w|^{p-1}\|_{L^{\frac{n}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)}\right) \\ &\leq c\|w_t\|_{Y^{1-\epsilon_1}}\left(1+\|w\|^{p-1}_{L^{\frac{n(p-1)}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Nossa intenção é descobrirmos $\epsilon_2 > 0$ de modo que $Y^{2-\epsilon_1} \hookrightarrow L^{\frac{n(p-1)}{\epsilon_2-\epsilon_1+1}}(\Omega)$. Isto é válido se

$$2 - \epsilon_1 - \frac{n}{2} \geq \frac{-n(\epsilon_2 - \epsilon_1 + 1)}{n(p-1)} \Leftrightarrow (p-1)\left(-1 + \epsilon_1 + \frac{n-2}{2}\right) \leq \epsilon_2 - \epsilon_1 + 1.$$

Usando que $\epsilon_1 = \frac{(p-1)(n-2)}{2}$, temos

$$p\epsilon_1 - p + 1 \leq \epsilon_2 - \epsilon_1 + 1 \Rightarrow \epsilon_2 \geq (p+1)\epsilon_1 - p.$$

Usando (4.33) para $\epsilon_2 = (p+1)\epsilon_1 - p$ temos

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A(t) \text{ é limitado em } Y^{2-\epsilon_2} \times Y^{1-\epsilon_2}.$$

Continuando esta iteração, acabamos por provar que

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A(t) \text{ é limitado em } Y^2 \times Y^1. \tag{4.34}$$

De (4.34), temos

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \|\xi(t)\|_{\mathscr{X}}, \|\xi(t)\|_{\mathscr{X}^1}, \|\xi_t(t)\|_{\mathscr{X}} \right\} < +\infty.$$

4.7 Semicontinuidade superior da família de atratores

O estudo da continuidade do atrator pullback nos fornece informações sobre o comportamento do atrator pullback de um problema quando este problema sofre alguma perturbação. Esta é um propriedade muito conveniente visto que em problemas físicos, químicos, biológicos, etc, usualmente trabalhamos com equações que são modelagens aproximadas dos problemas.

Nesta seção, mostraremos que para o atrator pullback da equação de onda semilinear amortecida é válida a semicontinuidade superior. O desenvolvimento deste resultado foi baseado em [6].

Consideremos uma família $\{\beta_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon \geq 0}$ em que para cada $\varepsilon \geq 0$, a função $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é limitada, globalmente Lipschitz e existem $\beta_0 \leq \beta_\varepsilon(t) \leq \beta_1$, com $\beta_1 \geq \beta_0 > 0$ (constantes que independem de ε).

Fixe $\varepsilon \geq 0$. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto com fronteira suave e a equação:

$$u_{tt} + \beta_\varepsilon(t) u_t = \Delta u + f(u) \tag{4.35}$$

em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com condição de contorno de Dirichlet e $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não-linear tal que

$$|f'(s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}), \tag{4.36}$$

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \tfrac{f(s)}{s} < \lambda_1. \tag{4.37}$$

com $c > 0$ e $1 < p < \frac{n}{n-2}$ e λ_1 é o menor autovalor de $-\Delta$.

Observemos que as condições de (4.35) são exatamente as mesmas de (4.1). Logo, existe um processo de evolução $\{S_\varepsilon(t,s) : t \geq s\}$ associado à equação (4.35) e o mesmo admite atrator pullback $\mathscr{A}_\varepsilon = \{A_\varepsilon(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 4.8. *Suponhamos que* $\|\beta_\varepsilon - \beta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. *Então, para* $z_0 = (u_0, v_0) \in \mathscr{X}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$, *temos que* $z^{(\varepsilon)} = \left(u^{(\varepsilon)}, u_t^{(\varepsilon)}\right) = S_\varepsilon(\cdot,\tau)z_0$ *converge a* $z^{(0)} = \left(u^{(0)}, u_t^{(0)}\right) = S(\cdot,\tau)z_0$ *quando* $\varepsilon \to 0^+$.

Mais ainda, é válida a semicontinuidade superior da família $\{A_\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}_{\varepsilon\geq 0}$ *em* 0, *isto é,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{d}(A_\varepsilon(t), A_0(t)) \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração. Denotamos $u = u^{(\varepsilon)} - u^{(0)}$ e $u_t = u_t^{(\varepsilon)} - u_t^{(0)}$. Observemos que

$$u_{tt} + \beta_\varepsilon u_t^{(\varepsilon)} - \beta u_t^{(0)} = \Delta u + f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right). \tag{4.38}$$

Multiplicando a equação acima por u_t e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{tt}(x)u_t(x)dx + \beta_\varepsilon \int_\Omega u_t^{(\varepsilon)}(x)u_t(x)dx - \beta \int_\Omega u_t^{(0)}(x)u_t(x)dx \\ = \int_\Omega \Delta u(x)u_t(x)dx + \int_\Omega \left[f\left(u^{(\varepsilon)}(x)\right) - f\left(u^{(0)}(x)\right)\right] u_t(x)dx.\end{aligned}$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x)|^2dx + \beta_\varepsilon \int_\Omega |u_t(x)|^2dx - (\beta_\varepsilon - \beta)\int_\Omega u_t^{(0)}(x)u_t(x)dx \\ = \int_\Omega \Delta u(x)u_t(x)dx + \int_\Omega \left[f\left(u^{(\varepsilon)}(x)\right) - f\left(u^{(0)}(x)\right)\right] u_t(x)dx.\end{aligned}$$

Usando integração por partes e reorganizando, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_t(x)|^2dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx\right) = \underbrace{-\beta_\varepsilon \int_\Omega |u_t(x)|^2dx + (\beta_\varepsilon - \beta)\int_\Omega u_t^{(0)}(x)u_t(x)dx}_{(*)} \\ + \underbrace{\int_\Omega \left[f\left(u^{(\varepsilon)}(x)\right) - f\left(u^{(0)}(x)\right)\right] u_t(x)dx.}_{(**)}.\end{aligned}$$

Observemos $(*)$ e $(**)$ separadamente.

$(*)$ Observemos que

$$
\begin{aligned}
-\beta_\varepsilon \int_\Omega |u_t(x)|^2 dx + (\beta_\varepsilon - \beta) \int_\Omega u_t^{(0)}(x) u_t(x) dx &\leq (\beta_\varepsilon - \beta) \int_\Omega u_t^{(0)}(x) u_t(x) dx \\
&\leq \|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega |u_t^{(0)}(x) u_t(x)| dx.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\int_\Omega |u_t^{(0)}(x) u_t(x)| dx \leq \|u_t^{(0)}\|_{L^2(\Omega)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|u_t^{(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2.
$$

Como $u_t^{(0)}, u_t \in L^2(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que $\int_\Omega |u_t^{(0)}(x) u_t(x)| dx \leq C$. Portanto,

$$
-\beta_\varepsilon \int_\Omega |u_t(x)|^2 \ + (\beta_\varepsilon - \beta) \int_\Omega u_t^{(0)}(x) u_t(x) dx \leq C \|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
$$

$(**)$ Temos

$$
\int_\Omega \left[f\left(u^{(\varepsilon)}(x)\right) - f\left(u^{(0)}(x)\right) \right] u_t(x) dx \leq \left\| f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}
$$

e $f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right) = f'\left(\theta u^{(\varepsilon)} + (1-\theta) u^{(0)}\right)\left(u^{(\varepsilon)} - u^{(0)}\right)$, onde θ é uma função definida em Ω, com $\theta(x) \in (0,1)$, para todo $x \in \Omega$. Agora, aplicando Hölder para $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{n-2}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left\| f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_\Omega c\left(1 + |\theta(x) u^{(\varepsilon)}(x) + (1-\theta(x)) u^{(0)}(x)|^{p-1}\right)^2 |u^{(\varepsilon)}(x) - u^{(0)}(x)|^2 dx \\
&\leq c \left\| \left(1 + |\theta u^{(\varepsilon)} + (1-\theta) u^{(0)}|^{p-1}\right)^2 \right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \left\| (u^{(\varepsilon)} - u^{(0)})^2 \right\|_{L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega)} \\
&\leq c \left(1 + \left\| \, |u^{(\varepsilon)}|^{2(p-1)} \right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} + \left\| \, |u^{(0)}|^{2(p-1)} \right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}\right) \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

Como $n(p-1) < \frac{2n}{n-2}$, segue que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{n(p-1)}(\Omega)$ e

$$
\left\| f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(1 + \|u^{(\varepsilon)}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} + \|u^{(0)}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
$$

Como, $u^{(0)}, u^{(\varepsilon)} \in H_0^1(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que

$$
\left\| f\left(u^{(\varepsilon)}\right) - f\left(u^{(0)}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq K \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
$$

Logo, usando o Corolário 1.20, temos

$$
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + K \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{-2K(t-s)}$, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left[(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)})e^{-2K(t-\tau)}\right] \leq C\|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{-2K(t-\tau)}.$$

Logo

$$\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right)e^{-2K(t-\tau)} \leq \int_\tau^t C\|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}e^{-2K(s-\tau)}ds$$

e usando que $e^{-2K(s-\tau)} \leq e^{-2K.0} = 1$, para $s \in (\tau, t)$, segue que

$$\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right)e^{-2K(t-\tau)} \leq C\|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(t-\tau).$$

Finalmente, temos

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(t-\tau)e^{2K(t-\tau)}.$$

Logo, como $\|\beta_\varepsilon - \beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, segue que

$$u^{(\varepsilon)} \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} u^{(0)} \tag{4.39}$$

$$u_t^{(\varepsilon)} \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} u_t^{(0)}. \tag{4.40}$$

Para cada $w_0 \in B$ limitado de $\mathscr{X}$, temos que $w^{(\varepsilon)} = S_\varepsilon(t,\tau)w_0 \to w^{(0)} = S(t,\tau)w_0$ em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, uniformemente para w_0 em subconjuntos limitados de $\mathscr{X}$. Consequentemente, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sup_{v_\varepsilon \in A_\varepsilon(\tau)} \|S_\varepsilon(t,\tau)v_\varepsilon - S(t,\tau)v_\varepsilon\|_{\mathscr{X}} < \frac{\delta}{2}. \tag{4.41}$$

Fixe $t \in \mathbb{R}$. Já sabemos que existe um limitado $D \subset X$ tal que $\bigcup_{s\leq t} A_\varepsilon(s) \subset D$. E, pela definição de atrator-pullback, para cada $\delta > 0$, existe $\tau \leq t$ de modo que

$$\mathrm{d}(S(t,\tau)D, A(t)) < \frac{\delta}{2}. \tag{4.42}$$

Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$, usando desigualdade triangular

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A_\varepsilon(t), A(t)) &= \mathrm{d}\big(S_\varepsilon(t,\tau)A_\varepsilon(\tau), S(t,\tau)A(\tau)\big)\\ &\leq \mathrm{d}\big(S_\varepsilon(t,\tau)A_\varepsilon(\tau), S(t,\tau)A_\varepsilon(\tau)\big) + \mathrm{d}\big(S(t,\tau)A_\varepsilon(\tau), S(t,\tau)A(\tau)\big).\end{aligned}$$

Observemos que se $v_\varepsilon \in A_\varepsilon(\tau)$ então

$$\mathrm{d}(S_\varepsilon(t,\tau)v_\varepsilon, S(t,\tau)v_\varepsilon) \geq \inf_{u_\varepsilon \in A_\varepsilon(\tau)} \mathrm{d}(S_\varepsilon(t,\tau)v_\varepsilon, S(t,\tau)u_\varepsilon)$$

e então

$$\mathrm{d}\big(S_\varepsilon(t,\tau)A_\varepsilon(\tau), S(t,\tau)A_\varepsilon(\tau)\big) \leq \sup_{v_\varepsilon\in A_\varepsilon(\tau)} \mathrm{d}\big(S_\varepsilon(t,\tau)v_\varepsilon, S(t,\tau)v_\varepsilon\big).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A_\varepsilon(t), A(t)) &\leq \sup_{v_\varepsilon\in A_\varepsilon(\tau)} \mathrm{d}\big(S_\varepsilon(t,\tau)v_\varepsilon, S(t,\tau)v_\varepsilon\big) + \mathrm{d}\big(S(t,\tau)A_\varepsilon(\tau), S(t,\tau)A(\tau)\big)\\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.\end{aligned}$$

Portanto, está provada a semicontinuidade superior. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev spaces.** 2 ed. Oxford: Academic Press, 2003. 305 p. (Pure and Applied Mathematics; 140).

[2] AMANN, Herbert. **Linear and quasilinear parabolic problems**. 1 ed. Basel: Birkäuser, 1995. 335 p. (Monographs in mathematics)

[3] BABIN, Anatoliĭ V.; VISHIK, Mark I. **Attractors of evolution equations**. Amsterdam: North-Holland, 1992. 532 p. (Series in Mathematics and Applications; 25)

[4] ARENDT, Wolfgang; GRABOSCH, Annette; GREINER, Günther; GROH, Ulrich; LOTZ, Heinrich P., MOUSTAKAS, Ulrich; NAGEL, Rainer; NEUBRANDER, Frank; SCHLOTTERBECK, Ulf. **One-parameter semigroups of positive operators.** Berlin: Springer, 1986. (Lecture Notes in Mathematics)

[5] ARRIETA, José M.; CARVALHO, Alexandre N.; BERNAL, Anibal R. Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions. **Journal of Differential Equations**, v. 168, p. 33-59, 2000.

[6] BEZERRA, Flank D. M.; CARBONE, Vera L.; NASCIMENTO, Marcelo J. D.; SCHIABEL, Karina. Regularity and upper semicontinuity of pullback attractors for a class of non-autonomous thermoelastic plate systems. 22 p.

[7] BREZIS, Haim. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2010. 599 p. (Universitext).

[8] CARABALLO, Tomás; CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; RIVERO, Felipe. Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact process. **Nonlinear Analysis**, v. 72, n. 3-4, p. 1967-1976, 2010.

[9] CARABALLO, Tomás; CARVALHO; Alexandre N.; LANGA, José A.; RIVERO, Felipe. A gradient-like nonautonomous evolution processes. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v.20, n. 9, p. 2751-2760, 2010.

[10] CARBONE, Vera L.; CARVALHO; Alexandre N.; SILVA, Karina S. Continuity of attractors for parabolic problems with localized large diffusion. **Nonlinear Analysis**, v. 68, p. 515-535, 2008.

[11] CARVALHO, Alexandre N. **Análise Funcional II**. Notas de aula. ICMC-USP, São Carlos, 2010. 200 p.

[12] CARVALHO, Alexandre N. **Sistemas dinâmicos não-lineares**. Notas de aula. ICMC-USP, São Carlos, 2012. 267 p.

[13] CARVALHO, Alexandre N.; LANGA, José A.; ROBINSON, James C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. New York: Springer, 2003. 409 p. (Applied Mathematical Sciences; 182)

[14] CHOLEWA, Jan W.; DLOTKO, Tomasz. **Global attractors in abstract parabolic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 235 p. (London Mathematical Society Lecture Note Series; 278)

[15] FOLLAND, Gerald B. **Real Analysis:** Modern Techniques and their applications. 2 ed. New York: John Wiley and Sons, 1999. 386 p.

[16] HENRY, Dan. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1981. 348 p. (Lecture Notes in Mathematics)

[17] HENRY, Dan. **Semigroups**. Handwritten Notes. IME-USP, São Paulo, Brazil, 1981. 191 p.

[18] IÓRIO, Valéria M. **EDP:** um curso de graduação. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 276 p. (Coleção matemática universitária)

[19] LUNARDI, Alessandra. **Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems**. Berlin: Birkhäuser, 1995. 424 p. (Progress in nonlinear differential equations and their applications; 16)

[20] NASCIMENTO, Marcelo J. D. **Semigrupos lineares**. Notas de aula de minicurso. UFPB, João Pessoa, Brasil, 2011. 53 p.

[21] NASCIMENTO, Marcelo J. D. **Problemas parabólicos semilineares singularmente não autônomos com expoentes críticos**. 2007. 126 p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2007.

[22] OLIVEIRA, César R. de **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 257 p. (Projeto Euclides)

[23] PAZY, Amnon. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York: Springer, 1983. 279 p. (Applied Mathematical Sciences; 44).

[24] RENARDY, Michael; ROGERS, Robert C. **An introduction to partial differential equations**. 2 ed. New York: Springer, 2003. (Texts in applied mathematics; 13)

[25] SILVA, K. S. **Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares com difusibilidade grande localizada**. 2006. 94 p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2006.

[26] TRIEBEL, Hans. **Interpolation theory, function spaces, differential operators.** 1 ed. Berlin: North-Holland Publishing Company, 1978.