UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OSMAR DO NASCIMENTO SOUZA

ESPAÇOS DE HARDY
E
COMPACIDADE COMPENSADA

São Carlos - SP
Março de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OSMAR DO NASCIMENTO SOUZA

ESPAÇOS DE HARDY E COMPACIDADE COMPENSADA

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof Dr. Gustavo Hoepfner

São Carlos - SP

Março de 2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Souza, Osmar do Nascimento.
S729eh	Espaços de Hardy e compacidade compensada / Osmar do Nascimento Souza. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	117 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.
	1. Análise harmônica. 2. Hardy, Espaços de. 3. Compacidade compensada. I. Título.
	CDD: 515.2433 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
DM- UFSCar

Prof. Luis Antônio Carvalho dos Santos
DM- UFSCar

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
FFCLRP/USP

"Se todos fizessem o que dizem, ao morrer, seriam considerados santos."

Autor desconhecido.

Agradecimentos

A Deus Pai, Filho e Espírito Santo, por todo seu Amor, pelo dom da vida e por sempre iluminar meu caminho.

Ao professor Dr. Gustavo Hoepfner, pela orientação, confiança e pelos ensinamentos matemáticos.

Aos professores da minha graduação na UEL, Marcos Valle e Luci Fatori, por acreditarem em mim.

Aos meus pais e heróis, Antônio e Luiza, que são minha inspiração e exemplo de vida; aos meus irmãos, Ivani, Osvaldo, Hilda, Fátima, Nazaré e, em especial, ao José. Enfim, a toda minha família pelo apoio, incentivo e, principalmente, pelas orações; às minhas queridas sobrinhas, Laura, Verônica (afilhada), Nayelle, Maria Luiza e Nádia por sempre perguntarem pelo "Tio Mazim".

Aos meus amigos da graduação (e de sempre), Altair Tosti, Giovana Alves e Renata Fernandes.

Aos colegas da pós-graduação do PPGM pelo companheirismo, alegria e excelente ambiente de trabalho. Ao Pedro Lopes pela disponibilidade nas correções e sugestões do texto. Aos "truta" Caio Pena, Carolina Antonio, Danilo Ferreira, Ederson Dutra, Fernanda Gonçalves, Francisco Caramello, Igor Ferra, Marlon Fonseca, Renan Medrado, Thales Paiva e, de modo especial, ao Alisson Santos pelo seu companheirismo nos estudos (valeu, piá!). Agradeço também à minha vizinha e amiga Tallyta pela sua amizade, alegria e por suportar minhas chatices.

Enfim, agradeço a todos aqueles que torceram por mim, a quem trago na mente e no coração.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Esse trabalho está dividido em duas partes.

Na primeira, nosso objetivo é apresentar os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, o qual coincide com os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando $p > 1$, está estritamente contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $p = 1$, e é um espaço de distribuições quando $0 < p < 1$. Quando $0 < p \leqslant 1$, os espaços de Hardy oferecem um melhor tratamento envolvendo análise harmônica do que os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entre outros resultados, provamos o teorema da caracterização maximal de H^p, o qual fornece várias, porém equivalentes, formas de caracterizar H^p, com base em diferentes funções maximais. Demonstramos o teorema da decomposição atômica para H^p, $0 < p \leqslant 1$, que permite decompor qualquer distribuição em H^p como soma de H^p-átomos (funções mensuráveis que satisfazem certas propriedades). Nessa etapa, usamos fortemente a decomposição de Whitney e a decomposição de Calderón-Zygmund generalizada.

Na segunda parte, como uma aplicação, provamos que quantidades não-lineares (como o jacobiano, divergente e o rotacional definidos em $\mathbb{R}^n$), identificadas pela teoria compacidade compensada pertencem, em condições naturais, aos espaços de Hardy. Para tanto, além dos resultados visto na primeira parte, usamos outros como os Teoremas de Imersões de Sobolev, a desigualdade de Sobolev-Poincaré. Usamos ainda, definições e resultados referentes ao contexto de formas diferenciais.

Palavras-chave: Análise Harmônica, Espaços de Hardy H^p, Caracterização Maximal de H^p, Decomposição Atômica de H^p, Compacidade Compensada.

Abstract

This work is divided into two parts.

In the first part, our goal is to present the theory of Hardy Spaces $H^p(\mathbb{R}^n)$, which coincides with the Lebesgue space $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $p > 1$, is strictly contained in $L^p(\mathbb{R}^n)$ if $p = 1$, and is a space of distributions when $0 < p < 1$. When $0 < p \leqslant 1$, the Hardy spaces offers a better treatment involving harmonic analysis than the L^p spaces. Among other results, we prove the maximal characterization theorem of H^p, which gives equivalent definitions of H^p, based on different maximal functions. We will proof the atomic decomposition theorem for H^p, which allow decompose any distribution in H^p to be written as a sum of H^p-atoms (measurable functions that satisfy certain properties). In this step, we use the strongly the of Whitney decomposition and generalized Calderón-Zygmund decomposition.

In the second part, as a application, we will prove that nonlinear quantities (such as the Jacobian, divergent and rotational defined in $\mathbb{R}^n$) identied by the compensated compactness theory belong, under natural conditions, the Hardy spaces. To this end, in addition to the results seen in the first part, will use the results as Sobolev immersions theorems ans the inequality Sobolev-Poincaré. Furthermore, we will use the tings and results related to the context of differential forms.

Keyworks: Harmonic Analysis, Hardy Spaces H^p, Maximal Caracterization of H^p, Atomic Decomposition for H^p, Compensated Compactness.

Conteúdo

Introdução

O estudo dos espaços de Hardy, o qual se originou durante as décadas de 1910 e 1920, no cenário das séries de Fourier e análise complexa em uma variável, tem se transformado numa teoria rica e aprimorada, ao longo do tempo, proporcionando conhecimentos básicos em temas como funções maximais, integrais singulares e os espaços L^p. Os espaços de Hardy, definidos em termos de distribuições, conforme veremos, foram introduzidos por E. Stein e G. Weiss em 1960. Aqui enfatizamos alguns aspectos desta teoria:

- **Extensão de** L^p - De forma simples, porém imprecisa, os elementos de H^p são distribuições (temperadas) tais sua "função maximal"pertence a L^p. Quando $p > 1$, a própria definição de H^p torna-o equivalente a L^p, mas quando $0 < p \leqslant 1$, esses espaços são muito mais favoráveis, ou seja, nos levam a uma série de perguntas em análise harmônica do que os espaços L^p. Em particular, no caso $0 < p < 1$, apesar de serem apenas espaços quase-normados, os duais não se reduzem a $\{0\}$ e são interessantes. Em muitas situações que ocorrem em análise de Fourier o espaço H^1 é considerado um bom substituto do espaço L^1. De fato, existem muitos resultados em análise de Fourier que são válidos para L^p, $1 < p < \infty$, mas que não permanecem válidos para L^1. No entanto, a substituição de L^1 por H^1 recupera a validade desses resultados.

- **Equivalência de definições** - O tema central que tratado no capítulo 2 é uma variedade de abordagens distintas de H^p, com base em diferentes definições; todas levam à mesma concepção de H^p. Entre elas estão: as várias definições maximais, das quais a mais simples é que uma distribuição f pertence a H^p se, para alguma $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \neq 0$, a função Maximal

$$M_\phi(f)(x) \doteq \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|$$

está em L^p; a decomposição atômica, a qual permite expressar qualquer distribuição em H^p como série de elementos relativamente simples (e, reciprocamente, tal soma pertence a H^p). Uma das vantagens da caracterização atômica por meio de átomos é que ela facilita a estimativa de muitos operadores (como de convolução, pseudo-diferenciais e integral singular) sobre os espaços H^p, pois permite que tal estimativa seja realizada apenas sobre os átomos.

- **Natureza de** H^p - Em contraste com o caso $p > 1$, a questão para determinar se uma distribuição f pertence o H^p $0 < p \leqslant 1$, não é apenas uma questão do tamanho (valor absoluto) de f, mas também envolve propriedades de cancelamento da função, conforme veremos no texto. Assim, na definição do operador maximal dada acima, o operador M_ϕ não pode ser substituído pelo operador maximal

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

de Hardy-Littlewood (que será definido ao final do Capítulo 2), pois o último envolve apenas o valor absoluto do f. As propriedades de cancelamento também entram (de uma forma muito direta) na definição de H^p-átomos apresentados no texto. São estas sutilezas que são responsáveis pela natureza árdua de alguns dos argumentos nesse texto, porém as recompensas para o leitor paciente são as afirmações elegantes e de grande profundidade que se pode provar.

- **Aplicação: Compacidade Compensada e Lema tipo** $\mathrm{div} - \mathrm{rot}$ - Por fim, nos concentramos no espaço H^1, que também é um espaço de Banach. Esse espaço possui ricas propriedades e forma grande parte do assunto tratado no último capítulo. Em particular, nos concentramos numa pequena aplicação à teoria da Compacidade Compensada, a qual surgiu a partir de resultados obtidos por L. Tartar e F. Murat no decorrer de estudos em Teoria da Homogenização. Matematicamente, essa última trata-se de um problema de entender como oscilações de equações diferenciais parciais criam oscilações em suas soluções.

Capítulo

1

Espaços de Hardy no disco unitário

A teoria dos espaços de Hardy H^p tem sua origem no estudo dos valores fronteira de funções analíticas no interior do disco unitário $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Pode-se afirmar que o primeiro resultado nesse sentido é devido a Fatou, o qual em 1906 demonstrou que funções analíticas e limitadas em Δ possuem limite em quase todo ponto da fronteira de Δ. Os espaços H^p, $p > 0$, apareceram como espaços de funções analíticas em Δ, cujas restrições a circunferências de raio r possuem normas L^p, $0 < p < \infty$ limitadas para todo $r \in [0, 1)$, isto é,

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Iniciamos este capítulo apresentando definições e resultados utilizados para definir os espaços de Hardy no disco unitário. Os resultados aqui expostos foram retirados e adapatados do trabalho de Hoepfner, G.,[9].

1.1 Funções Harmônicas

Definição 1.1.1 (Funções Harmônicas). *Seja $\Omega \supset \mathbb{R}^n$ um domínio. Dizemos $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica se u satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$ em Ω, em que*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}.$$

Em particular, em $\mathbb{R}^2$, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Observação 1.1.2. É bem conhecido que sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio; então $\Delta u = 0$ se, e somente se, $u = Re(F), F$ holomorfa.

Definição 1.1.3 (Propriedade do Valor Médio). *Dizemos que f satisfaz a Propriedade do Valor Médio (PVM) em $\Omega \Leftrightarrow \forall x_0 \in \Omega$, tem-se*

$$f(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |f(x_0 + r\sigma)| d\sigma,$$

$\forall r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$, em que $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ e $|S^{n-1}| = \displaystyle\int_{S^{n-1}} d\sigma$.

Observação 1.1.4. Neste trabalho, $|X|$ sempre denotará a medida de Lebesgue do conjunto X.

O teorema seguinte relaciona as funções harmônicas com as que satisfaz a PVM. Para demonstrá-lo, usamos dois resultados clássicos:

$$|B(0,r)| = \frac{r^n}{n}|\partial B(0,1)| = |B(x_0,r)| = \frac{r^n}{n}|S^{n-1}| \tag{1.1}$$

$$\int_{B(x_0,r)} f(x)dx = \int_0^r t^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(x_0 + t\sigma) d\sigma dt \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.5. *Seja u uma função contínua. Então u é harmônica se, e somente se, u satisfaz a PVM.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que u é harmônica em Ω, então $\Delta u = 0$ em Ω. Dado $x_0 \in \Omega$, para $0 < t \leqslant r$ suficientemente pequeno tal que $B[x_0, r] \subset \Omega$, definamos

$$f(t) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + t\sigma) d\sigma.$$

A função f está definida em $(0, r]$, é diferenciável e sua derivada é

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0+t\sigma)d\sigma \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} \nabla u(x_0+t\sigma)\sigma d\sigma \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} \nabla u(x_0+r\sigma)\vec{n}(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{1}{t^n|S^{n-1}|}\int_{\partial B(x_0,t)} \nabla u(x)\vec{n}(\sigma)d\sigma_t(x) \\
&= \frac{1}{t^n|S^{n-1}|}\int_{B(x_0,t)} \Delta u(x)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, f é constante em $(0,r]$.

Afirmação 1.1.6. $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = u(x_0)$.

De fato,

$$|f(t)-f(x_0)| \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} |u(x_0+t\sigma)-u(x_0)|d\sigma \leqslant \sup_{\sigma\in S^{n-1}} |u(x_0+t\sigma)-u(x_0)| \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

(pois u é uniformemente contínua em S^{n-1}).

Além disso, de $\lim\limits_{t\to r} f(t) = f(r)$, temos $f(r) = u(x_0)$ e, portanto,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x_0+r\sigma)d\sigma.$$

($\Leftarrow$) Suponha que u satisfaz a PVM. Vamos dividir em dois casos: Caso 1: Suponha que $u \in C^2(\Omega)$. Dado $x_0 \in \Omega$, existe $r = r(x_0)$ tal que

$$u(x_0) = f(t) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x_0+t\sigma)d\sigma, \quad \forall t \leqslant r(x_0).$$

De modo análogo à primeira parte (e com a mesma notação, $f(t) = u(x_0)$ é constante em $[0,r]$), derivando obtemos

$$0 = f'(t) = \frac{1}{t^n|S^{n-1}|}\int_{B(x_0,t)} \Delta u(x)dx, \quad \forall t \leqslant r(x_0),$$

ou ainda,

$$0 = \frac{n}{t^n}\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{B(x_0,t)} \Delta u(x)dx = \frac{1}{|B(x_0,t)|}\int_{B(x_0,t)} \Delta u(x)dx.$$

Pelo teorema da convergência dominada [1],

$$\frac{1}{|B(x_0,t)|}\int_{B(x_0,t)} \Delta u(x)dx \xrightarrow{t\to 0} \Delta u(x_0),$$

pois $\Delta u \in C^0(\Omega)$. Logo, $\Delta u(x_0) = 0$.

Caso 2: $u \notin C^2(\Omega)$.

Seja $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1, \quad \phi(x) = \phi(x')$ se $|x| = |x'|$, isto é, ϕ é radial e definamos $\phi_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\epsilon^n}\phi(x/\epsilon)$.

Essas funções são chamadas “Identidades Aproximadas” em $\mathbb{R}^n$ radial e satisfazem as seguintes propriedades:

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1;$

(2) $\displaystyle\sup_{|x|>\delta} |\phi_\epsilon(x)| \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0, \forall\delta > 0;$

(3) $\displaystyle\sup_{\epsilon>0}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(x)|dx < \infty.$

Vamos mostrar que

$$u_\epsilon(x) \doteq (\phi_\epsilon * u)(x) \doteq \int_{B(0,\epsilon)} \phi_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \phi_\epsilon(y)u(x-y)dy$$

é harmônica em seu domínio e também que $u_\epsilon \equiv u$ (localmente). O símbolo $\doteq$ significa que a igualdade é valida por definição.

Veremos mais adiante que $u_\epsilon \doteq \phi_\epsilon * u \xrightarrow{\epsilon\to 0} u$ uniformemente (ou ver Jorge Hounie [12]) e pelo teorema da convergência dominada, u_ϵ é C^∞.

Afirmação 1.1.7. u_ϵ satisfaz a PVM em $\Omega_\epsilon \doteq \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \doteq Dom(u_\epsilon)$.

[1] Ver capítulo 2, página 23.

Se $x_0 \in \Omega_\epsilon$ e $B[x_0, t] \subset \Omega_\epsilon$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x_0+t\sigma)d\sigma &= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}\left[\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon(y)u(x_0-y+t\sigma)dy\right]d\sigma \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x_0+t\sigma)d\sigma \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon(y)\left[\int_{S^{n-1}} u(x_0-y+t\sigma)d\sigma\right]dy \\
&= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon(y)|S^{n-1}|u(x_0-y)dy \\
&= \int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon(y)u(x_0-y)dy \\
&= (\phi_\epsilon * u)(x_0) \\
&= u_\epsilon(x_0).
\end{aligned}
$$

Logo, $u_\epsilon(x_0)$ satisfaz a PVM em Ω_ϵ. Portanto, $u_\epsilon(x_0)$ é harmônica em Ω_ϵ.

Afirmação 1.1.8. $u = u_\epsilon \;\text{ em }\; \Omega_\epsilon$.

Para $x \in \Omega_\epsilon$, temos

$$
\begin{aligned}
u_\epsilon(x) &= \int_{B(0,\epsilon)} u(x-y)\phi_\epsilon(y)dy \\
&= \int_0^\epsilon r^{n-1}\int_{S^{n-1}} u(x-r\sigma)\phi_\epsilon(r\sigma)d\sigma dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon r^{n-1}\int_{S^{n-1}} u(x-r\sigma)\phi\Big(\frac{r\sigma}{\epsilon}\Big)d\sigma dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon r^{n-1}\int_{S^{n-1}} u(x-r\sigma)\phi(r/\epsilon)d\sigma dr \\
&= \frac{1}{\epsilon^n}\int_0^\epsilon r^{n-1}|S^{n-1}|u(x)\phi(r/\epsilon)dr \\
&= u(x)\int_0^\epsilon r^{n-1}\int_{S^{n-1}} d\sigma\phi_\epsilon(r/\epsilon)dr \\
&= u(x)\int_{B(0,\epsilon)}\phi_\epsilon(x)dx \\
&= u(x).
\end{aligned}
$$

□

Observação 1.1.9. Usando as equações (1.1) e (1.2), podemos mostrar que u satisfaz a PVM se, e somente se,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)dx.$$

1.2 Funções Subharmônicas

Os resultados não demonstrados nesta seção podem ser encontrados no trabalho de Hoepfner, G.,[9].

Definição 1.2.1 (Funções Subharmônicas). *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *é dita subharmônica se ela é semi-contínua superiormente e* u *satisfaz:* $\forall\ x \in \Omega,\ \exists r(x) > 0$ *tal que*

$$u(x) \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |u(x + r\sigma)|\, d\sigma, \forall r < r(x).$$

Em particular, quando $\Omega \subseteq \mathbb{R}, \forall x_0 \in \Omega$, tem-se $\lim\limits_{x \to x_{0+}} u(x) = u(x_0)$; equivalentemente, $\forall\ c \in \mathbb{R}$, o conjunto $u^{-1}((-\infty, c))$ é aberto.

Observação 1.2.2. Se u é semi-contínua superiormente e $K \subset\subset \Omega$ [2], então u é limitada superiormente em K.

De fato, para $j = 1, 2, \cdots$ definamos $K_j = \{x; u(x) < j\}^c \bigcap K$. Notemos que K_j é compacto em K para cada $j = 1, 2, \cdots$. Além disso, $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ e $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} K_j = \{x \in K; u(x) = \infty\} = \varnothing$. Pelo Teorema de Cantor, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{j_0} = \varnothing$. Então, $u(x) < j_0\ \forall\ x \in K$, ou seja, $u\big|_K \leqslant j_0$. Portanto, u é limitada superiormente em K.

Exemplo 1.2.3.

(1) Seja $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica e $p > 0$. Então $|u(z)|^p$ é subharmônica.

Com efeito, seja $z_0 \in \Omega$. Se $u(z_0) = 0$, então $0 \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |u(z_0 + r\sigma)|^p d\sigma$, claramente. Suponha $u(z_0) \neq 0$; então existe um ramo de $|u(z)|^p$ que é analítico numa vizinhança de z_0. Aplicando a propriedade do valor médio para as partes real e imaginária de $|u(z)|^p$, obtemos

$$|u(x)|^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta.$$

(2) Se u é harmônica em $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $p \geqslant 1$, então $|u(z)|^p$ subharmônica.

[2] Usamos a notação $A \subset\subset B$ para indicar que A é um subconjunto compacto de B.

De fato, sendo u harmônica, vale a PVM, isto é,

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Se $p = 1$, o resultado é direto. Para $p > 1$, temos

$$\begin{aligned} |u(z_0)| &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_0 + re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^q d\theta\right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_0 + re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|u(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u(z_0 + re^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

(3) Se $u_1, \cdots, u_n$ são subharmônicas, então $u = \max\{u_1, \ldots u_n\}$ é subharmônica. De fato, dado $x_0 \in \Omega$, seja $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ satisfazendo $u(x_0) = v_{j_0}(x_0)$. Como u_{j_0} satisfaz a PVM, temos

$$u(x_0) = u_{j_0}(x_0) \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} |u_{j_0}(x_0 + r\sigma)|\, d\sigma \leqslant \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} |u(x_0 + r\sigma)|\, d\sigma.$$

Proposição 1.2.4. *Uma função u é semi-contínua superiormente se, e somente se, para todo $K \subset\subset \Omega$, u é limite de uma sequência decrescente de funções contínuas em K.*

Teorema 1.2.5 (Princípio do Máximo para funções subharmônicas)**.** *Seja Ω um domínio e $u : \Omega \to \mathbb{R}$, então u não atinge máximo, a menos que u seja constante.*

Teorema 1.2.6. *Seja $v : \Omega \to [-\infty, \infty)$. São equivalentes:*

(a) v é subharmônica em Ω;

(b) Dado $G \subset \Omega$ limitado e $u : G \to \mathbb{R}$ harmônica tal que $u \in C^0(\bar{G}), \bar{G} \subset \Omega, v \leqslant u$ em ∂G, então $v \leqslant u$ em G.

Corolário 1.2.7. *Se v subharmônica em $B(0, R)$, então a função*

$$m(r) \doteq \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(r\sigma) d\sigma$$

é crescente em $r \in (0, R)$.

Exemplo 1.2.8. Seja F analítica em $B(0,1)$ e $1 < p \leqslant \infty$. Consideremos $v(z) = |F(z)|^p$. A função

$$M_p(F,r) \doteq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F(re^{i\theta})\right|^p d\theta \doteq \|F\|_{L^p(\partial B(0,r))}$$

é crescente para $r \in (0,1)$.

De fato, para $1 < p < \infty$, vimos que, se F analítica, então $|F(z)|^p$ é subharmônica. Logo, basta aplicar o corolário acima. Se $p = \infty$, $M_\infty(F,r) \doteq \sup_{\theta\in(-\pi,\pi)} |F(re^{i\theta})|$, o resultado segue do Princípio do Máximo para funções subharmônicas.

Denotemos por $\mathcal{H}(\Delta)$ o espaço das funções holomorfas $f : \Delta \to \mathbb{C}$, em que Δ é o disco unitário em $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.9 (Espaços de Hardy $H^p(\Delta)$). *Seja $0 < p \leqslant \infty$. Dada uma função $F \in \mathcal{H}(\Delta)$, dizemos que $F \in H^p(\Delta)$ se*

$$\|F\|_{H^p} \doteq \sup_{0\leqslant r<1} M_p(F,r) < \infty.$$

Mais precisamente, para $0 < p \leqslant \infty$, definimos os espaços de Hardy

$$H^p(\Delta) = \{F \in \mathcal{H}(\Delta); \|F\|_{H^p} \doteq \sup_{0\leqslant r<1} M_p(F,r) < \infty\}.$$

Claramente, se $0 < p < q < \infty$, valem as seguintes inclusões $H^\infty \subset H^q \subset H^p$.

Definindo a métrica $d(F,G) \doteq \sup_{0<r<1} [M_p(F-G,r)]^p$, o espaço $(H^p(\Delta), d)$ torna-se um espaço métrico completo e Banach se $p = 1$.

Até agora vimos a caracterização dos espaços de Hardy definidos sobre o disco unitário e subordinada à teoria das funções analíticas. No próximo capítulo vamos exibir os espaços de Hardy em $\mathbb{R}^n$. Para tanto, apresentamos algumas definições e resultados sobre funções teste, distribuições, espaço de Schwartz e trasformada de Fourier. Omitimos as demonstrações, as quais podem ser encontradas no livro do Hounie [12].

Capítulo

2

Espaços de Hardy em $\mathbb{R}^n$

Na teoria moderna, os espaços de Hardy H^p são apresentados sem referência a funções harmônicas ou holomorfas. Isso permite a extensão natural da definição a várias variáveis reais, como em H^p, e até mesmo a domínios mais gerais. Essencialmente, queremos tornar a teoria dos espaços H^p independente da teoria das funções analíticas, de modo que seja caracterizado em termos de funções maximais. Iniciamos esse capítulo apresentando alguns conceitos preliminares para o desenvolvimento desse trabalho.

2.1 Preliminares

2.1.1 As funções teste

Definição 2.1.2. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. As funções $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω são chamadas funções teste em Ω. O conjunto das funções teste em Ω será denotado por $C_c^\infty(\Omega)$.*

Lembremos que o suporte de uma função contínua $\phi : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}$. Denotaremos esse conjunto por *supp*(ϕ).

Definição 2.1.3. *Uma seqüência (ϕ_j) de funções de $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se:*

(1) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que supp$(\phi_j) \subseteq K$, $j = 1, 2, ...$;

(2) Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Observação 2.1.4. É possível dotar $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia não metrizável de forma que a convergência nessa topologia coincida com a dada pela definição acima (ver referência [11]).

2.1.5 Distribuições

Definição 2.1.6. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto é se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma seqüência em $C_c^\infty(\Omega)$, então,*

$$\begin{aligned} u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2) \qquad &\textit{(Linearidade)} \\ \phi_j \to 0 \quad \textit{em } C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow u(\phi_j) \to 0 \quad &\textit{(Continuidade).} \end{aligned}$$

Em geral, escrevemos $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.

As operações soma de distribuições e multiplicação por escalar por distribuição são definidas de maneira "standard". Dados u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi \rangle &= \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle \\ \langle \lambda u_1, \phi \rangle &= \lambda \langle u_1, \phi \rangle \end{aligned}$$

Dado um operador linear $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$, dizemos que L é contínuo se $L\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 2.1.7. *Sejam L e L' operadores lineares contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o transposto formal de L' (e denotamos por $L' = L^t$) e vice-versa se*

$$\int_\Omega (L\phi)\psi dx = \int_\Omega \phi(L'\psi)dx \qquad \phi,\, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Observemos que na definição acima, $\phi, L\phi, \psi, L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, então, a equação (2.1) pode ser reescrita na forma $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle$. Deste modo, é intuitivo estender L a um operador $\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, definido por:

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1.8 (Produto por uma função C^∞)**.** Dado $f \in C^\infty(\Omega)$, definimos $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$, $(L\phi)(x) = f(x) \cdot \phi(x)$. L é um operador linear contínuo e, além disso,

$$\int (L\phi)(x)\psi(x)dx = \int \phi(x)(L\psi)(x)dx.$$

Vemos que o transposto formal de L (L') é L. Deste modo, definimos

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle. \tag{2.3}$$

Exemplo 2.1.9 (Derivação)**.** Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. L é um operador linear contínuo e, além disso, se $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$, pelo teorema de Fubini [1] e integração por partes:

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx = -\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx.$$

Portanto, o transposto formal de L é $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e dado $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1.10 (Mudança de variável)**.** Sejam Ω_1, Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ um difeomorfismo, isto é, uma bijeção de Ω_1 em Ω_2, com Φ e Φ^{-1} de classe C^∞. Definemos $Lf = f \circ \Phi$, L é operador linear contínuo de $C_c^\infty(\Omega_2)$ em $C_c^\infty(\Omega_1)$. Dada uma função teste f em Ω_2, x pertence ao complementar de $S(f \circ \Phi)$ se, e somente se, existir V_x vizinhança de aberta de x , em que $f \circ \Phi$ é nula. Mas como Φ é difeomorfismo, isto equivale a dizer que existe uma vizinhança de $\Phi(x)$, a saber, $\Phi(V_x)$, em que f é nula. Deste modo, $S(f \circ \Phi) = \Phi^{-1}(supp(f))$, já que $supp(f)$ é compacto e Φ é difeomorfismo $f \circ \Phi$ possui suporte compacto. Assim, se $Lf = f \circ \Phi$, Lf é função teste em Ω_1, o que mostra a boa definição do operador L. Dada ψ função teste em Ω_2, pelo teorema de mudança de variáveis obtemos

$$\int_{\Omega_2} f(\Phi(x))\psi(y)dy = \int_{\Omega_1} f(x)\psi(\Phi^{-1}(x))|J(\Phi^{-1})|(x),$$

[1]Ver capítulo 2, página 23.

em que $|J(\Phi^{-1})|$ representa o valor absoluto do determinante da jacobiana de Φ^{-1}, assim

$$L'\psi = |J(\Phi^{-1})| \cdot \psi \circ \Phi^{-1}.$$

Portanto, definimos

$$\langle u \circ \Phi, \phi \rangle = \langle u, (\phi \circ \Phi^{-1})|J(\Phi^{-1})| \rangle. \tag{2.5}$$

2.1.11 Suporte de distribuições

Definição 2.1.12. *Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dizemos que u_1 e u_2 são iguais ($u_1 = u_2$) se para todo função teste ϕ em Ω temos $\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$.*

Abaixo será dada uma condição necessária para igualdade de distribuições.

Teorema 2.1.13. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ existe vizinhança aberta V_x em que $u_1 = u_2$. Então, $u_1 = u_2$ em Ω*

Definição 2.1.14. *Dado $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo. Denotamos o suporte de u por $supp(u)$.*

Observação 2.1.15. As definições de suporte de distribuições e de funções coincidem, para funções que são contínuas (ver referência [11]).

Definição 2.1.16. *Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita ser C^∞ em um aberto $U \subset \Omega$, se existe $f \in C^\infty(U)$ tal que*

$$\langle u, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)dx; \quad \phi \in C_c^\infty(U).$$

Definição 2.1.17. *Se Ω é aberto de $\mathbb{R}^n$, denotamos o espaço das distribuições em Ω com suporte compacto por $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Teorema 2.1.18. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que,*

(1) $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)\ \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$;

(2) $\tilde{u}(\phi) = 0$ *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $supp(\phi) \bigcap supp(u) = \varnothing$.

DEFINIÇÃO 2.1.19. *Uma seqüência (ϕ_j) de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ quando para todo compacto K e qualquer α em $\mathbb{N}^n$, a seqüência de funções $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge uniformemente a zero em K.*

Observação 2.1.20. Se (ϕ_j) é uma seqüência de funções convergindo a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então, (ϕ_j) converge a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Usamos a seguinte notação, dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $i = \sqrt{-1}$ e $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \end{aligned}$$

TEOREMA 2.1.21. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. Então u é contínuo é se, e somente se, existem $K \subset \Omega$ compacto, $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi|, \qquad \phi \in C^\infty(\Omega)$$

TEOREMA 2.1.22. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. u é contínuo se, e somente se, para todo compacto $K \subset \Omega$ existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que*

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup |D^\alpha \phi|, \qquad \phi \in C_c^\infty(\Omega), \qquad supp(\phi) \subset K. \tag{2.6}$$

Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se, para todo compacto K, a condição (2.6) é satisfeita para algum valor m fixado dizemos que u é de ordem menor que ou igual a m. O conjunto das distribuições em Ω de ordem menor que ou igual am é denotado por $\mathcal{D}'_m(\Omega)$.

2.1.23 A transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

em que $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e $x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. Pelo teorema da convergência dominada, $\widehat{f}$ é contínua, além disso, é limitada, pois $\sup_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.

Como já foi visto, é possível estender a $\mathcal{D}'$ um operador contínuo definido em C_c^∞, o que não é aplicável neste caso, já que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{\phi}$ não tem suporte compacto a menos que ϕ seja a função nula [2]. Por isso definimos um espaço que contém C_c^∞ e é invariante por transformada de Fourier.

Definição 2.1.24. *Denotamos por $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) o subespaço das funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

Intuitivamente,o espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é o conjunto das funções suaves ϕ definidas em $\mathbb{R}^n$, cujas derivadas decrescem rapidamente no infinito (permanecem limitadas quando multiplicadas por polinômios arbitrários), isto é,

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leqslant C(1 + |x|)^{-N},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $N \in \mathbb{N}$, em que C depende apenas de α, N.

A topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada pela coleção enumerável de semi-normas

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} \doteq \sup_{x\,\in\,\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)|,$$

sendo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_2^{\alpha_n}$, $\partial_x^\beta = \dfrac{\partial^{\beta_1}}{\partial x^{\beta_1}{}_1} \cdots \dfrac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * \phi$ está bem definida e é suave.

Definição 2.1.25. *Dizemos que uma seqüência $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ converge a zero em $\mathcal{S}$ se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente.*

$\mathcal{S}$ é invariante por multiplicação por polinômio e derivação, e ainda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.1.26. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e valem as propriedades:*

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha \phi}(\xi) &= \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi) \\ \mathcal{F}\left(x^\alpha \phi(x)\right)(\xi) &= (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

[2]Pelo Teorema de Paley-Wiener (ver referência [12]), a transformada de Fourier é analítica real, deste modo, se possuir suporte compacto ela será nula. Pela fórmula de inversão da transformada de Fourier, se $\widehat{f} \equiv 0$, então, $f \equiv 0$.

Teorema 2.1.27. *A transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\phi(\xi)d\xi, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.1.28. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

Teorema 2.1.29. *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, então,*

$$\begin{aligned}
\int \widehat{\phi}\psi dx &= \int \phi\widehat{\psi} dx \\
\int \phi\overline{\psi} dx &= (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}} dx \\
\widehat{\phi * \psi} &= \widehat{\phi}\cdot\widehat{\psi} \\
\widehat{\phi\psi} &= (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}.
\end{aligned}$$

2.1.30 A transformada de Fourier em $\mathcal{S}'$

Definição 2.1.31. *Uma distribuição temperada é um funcional linear e contínuo em $\mathcal{S}$. O espaço das distribuições temperadas será denotado por $\mathcal{S}'$.*

Observemos que se u é distribuição temperada, então a restrição de u a funções testes é uma distribuição e, além disso, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A seguir será dada uma caracterização para continuidade em $\mathcal{S}'$.

Teorema 2.1.32. *Seja u um funcional linear em $\mathcal{S}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) u é contínua;

(2) Existem inteiros positivos M, m tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha\phi(x)|, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Definição 2.1.33. *Dado $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{S}'$ e $u \in \mathcal{S}'$ dizemos que $u_j \to u$ em $\mathcal{S}'$ quando, para todo $\phi \in \mathcal{S}$, $\langle u_j, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$, quando $j \to \infty$.*

As definições de convergência em $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{E}'$ são definidas de modo análogo.

DEFINIÇÃO 2.1.34. *Seja $u \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier de u é definida por*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

TEOREMA 2.1.35. *(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de f como distribuição temperada coincide com a transformada de f dada por (2.7).*
(ii) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\widehat{f}\|_2^2 \quad \textit{(Identidade de Plancherel).}$$

(iii) Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{u}$ é uma função C^∞ dada por

$$\widehat{u}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\xi} \rangle.$$

(iv) Se $u \in \mathcal{S}'$, então

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \widehat{u}, \quad \widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}.$$

2.1.36 Alguns resultados clássicos

Inicialmente, recordemos que dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leqslant p < \infty$, definimos o espaço L^p como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$; e o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Observe que nesse caso $\sup_{\Omega} |u| = \inf\{c > 0; |u| \leqslant c \ q.t.p.\}$

Para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

- **Teorema da Convergência Monótona**

  Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz

  $(a) f_1 \leqslant f_2 \cdots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \cdots \ \ qtp$ em Ω;

  $(b) \sup_{n} \int f_n < \infty$.

  Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω para um limite finito, que denotamos por $f(x)$; a função f está em L^1 e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

- **Lema de Fatou**

  Seja (f_n) uma sequência de funções que satisfazem

  $(a) \forall n, f_n \geqslant 0 \ \ q.t.p.$;

  $(b) \sup_{n} \int f_n < \infty$.

  Então $\forall x \in \Omega$ com $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) < \infty$, tem-se $f \in L^1$ e

$$\int f \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

- **Teorema da Convergência Dominada**

  Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz

  $(a) f_n(x) \to f(x) \ \ q.t.p.$ em Ω;

  (b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $\forall\, n, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ q.t.p. em Ω.

  Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

- **Densidade**

  O espaço das funções contínuas com suporte compacto, $C_c^0(\mathbb{R}^n)$, é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 \leqslant p < \infty$, isto é,

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall\, \epsilon > \exists\, g \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|f - g\|_{L^p} \leqslant \epsilon.$$

- **O espaços das sequências l^p**

  Seja $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço l^p como sendo o espaço das sequências reais p-somáveis, isto é,

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

e o espaço l^∞ como sendo o espaço das sequências reais limitadas, isto é,

$$l^\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\},$$

munido da norma

$$|x|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

É bem conhecido que, para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l^p é um espaço de Banach.

Sejam $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ-finita. Podemos definir de uma forma padrão a estrutura do espaço medida sobre o produto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

- **Teormea de Tonelli**

  Seja $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável que satisfaz

  $(a) \displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty$ q.t.p. $x \in \Omega_1$;

  $(b) \displaystyle\int_{\Omega_1} \mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty.$

  Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

- **Teorema de Fubini**

  Seja $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

  $q.t.p.\, x \in \Omega_1$, temos $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ e

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1).$$

Analogamente, $q.t.p.\ y \in \Omega_2$, temos $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ e

$$\int_{\Omega_1} |F(x,y)| d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} \mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x,y)| d\mu_2 = \int_{\Omega_2} \mu_2 \int_{\Omega_1} |F(x,y)| d\mu_1 = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x,y)| d\mu_1 d\mu_2.$$

- **Desigualdade de Hölder**

  Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
  Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| dx \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^p \left(\int_\Omega |g|^q dx \right)^q.$$

- **Desigualdade de Minkowski**

  Sejam $f, g \in L^p(\Omega), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, então $f + g \in L^p(\Omega)$ e

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- **Desigualdade de Minkowski para integrais**

  Seja F mensurável em $\Omega_1 \times \Omega_2$ e $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$\left[\int \left(\int |F(x,y)| dy \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int \left(\int |F(x,y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Agora, suponha que $|F(x,.)| \in L^q$ e ponha $G(x) \doteq \left(\int |F(x,y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$. Se $G \in L^p$, aplicamos a desigualdade de Minkowski para integrais e obtemos

$$\left[\int \left(\int |F(x,y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int \left(\int |F(x,y)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dy \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Em particular, para $q = 1$, $\psi(x,y) \doteq f(x)g(y) \in L^p(\Omega_x \times \Omega_y)$ e

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega_x\times\Omega_y)} \leqslant \int_{\Omega_y}\left[\left(\int_{\Omega_x}|f(x)|^p dx\right)\right]^{\frac{1}{p}}|g(y)|dy.$$

- **Desigualdade de Young**

  Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$, com $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ e

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

DEFINIÇÃO 2.1.37 (Aproximação da Identidade). *Dizemos que uma família de funções $\{\phi_t\}_{t>0}$ é uma Aproximação da Identidade se*

(1) $\sup\limits_{t>0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_t(x)|dx < \infty$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\phi_t(x)dx = 1$;

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_{\delta\leqslant|x|}|\phi_t(x)|dx = 0 \;\forall\; \delta > 0.$

A seguir, apresentamos um exemplo clássico de aproximação da identidade, a qual usamos com grande frequência em todo o texto.

Exemplo 2.1.38. Fixemos uma função integrável ϕ em $\mathbb{R}^n$, com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$. Para $t > 0$, as funções $\phi_t(x) \doteq t^{-n}\phi(x/t)$ formam uma aproximação da identidade.

A proposição seguinte justifica, de fato, tal nomenclatura para a família $\{\phi_t; t > 0\}$.

PROPOSIÇÃO 2.1.39. *Se $\{\phi_t; t > 0\}$ é uma aproximação da identidade, então para toda $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos $\lim\limits_{t\to 0}(\phi_t * g) = g$ em $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Ver referência [12] . □

O próximo resultado nos mostra que a convergência de $\phi_t * f$ pode ser dada na norma em L^p.

TEOREMA 2.1.40. *Seja $\{\phi_t; t > 0\}$ uma aproximação da identidade. Então $\lim\limits_{t\to 0}\|\phi_t * f - f\|_{L^p} = 0$ se $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, e uniformemente se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), p = \infty$.*

Demonstração. Ver referência [12] . □

Observação 2.1.41. Neste trabalho, sempre supomos que cada elemento da família de uma aproximação da identidade é de classe C^∞ e tem suporte compacto.

Na seção seguinte, apresentamos alguns resultados úteis sobre convolução, os quais serão fortemente utilizados para demonstrar o principal teorema sobre Compacidade Compensada no último capítulo. A demonstração de cada resultado pode ser encontrada no livro do Hörmander [11], capítulo 4, seção 5.

2.1.42 Estimativas básicas em L^p para Convolução

A convolução $u * \phi$ de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e uma função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida por $(u * \phi)(x) = u(\phi(x - \cdot))$, em que o lado direito denota u agindo em $\phi(x-y)$ como uma função de y.

Para evitar questões de convergência, geralmente assumimos que $u \in C_c$. O resultado a seguir é, essencialmente, a desigualdade de Hölder, a qual é, de fato, o caso especial $k = 2$.

Teorema 2.1.43. *Sejam $u_1 \dots u_k \in C_c$. Se $\dfrac{1}{p_1} + \dots + \dfrac{1}{p_k} = k - 1$ e $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, então*

$$|u_1 * u_2 * \dots * u_k(0)| \leqslant \|u_1\|_{L^{p_1}} \dots \|u_k\|_{L^{p_k}}.$$

Corolário 2.1.44. *Se $1 \leqslant p_j \leqslant \infty, j = 1, \dots, k$, e $\dfrac{1}{p_1} + \dots + \dfrac{1}{p_k} = k - 1 + \dfrac{1}{q}, 1 \leqslant q \leqslant \infty$, então*

$$\|u_1 * u_2 * \dots * u_k\|_{L^q} \leqslant \|u_1\|_{L^{p_1}} \dots \|u_k\|_{L^{p_k}}. \tag{2.8}$$

Teorema 2.1.45. *Se $1 < a < \infty$, $1 < p < q < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{a} = 1 + \dfrac{1}{q}$, definindo k_a por $k_a(x) = |x|^{-\frac{n}{a}}, u \in \mathbb{R}^n$, temos* [3]

$$\|k_a * u\|_{L^q} \leqslant C_{p,a} \|u\|_{L^p}, \qquad u \in C_c^0. \tag{2.9}$$

Definição 2.1.46. *Seja P um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes, isto é,*

$$P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Então

[3]Esse resultado, por densidade, pode ser estendido para $u \in L^p$.

1. $Pu = (P\delta) * u$;

2. $P(u_1 * u_2) = (Pu_1) * u_2 = u_1 * (Pu_2),\ u_1, u_2 \in \mathcal{D}'$.

Dizemos que uma distribuição $E \in \mathcal{D}'$ *é uma* ***solução fundamental*** *de* P *se* $PE = \delta$, *em que* δ *é a distribuição delta de Dirac.*

Observemos que se E é solução fundamental de P, então

$$E * Pu = PE * u = \delta * u = u, \quad \forall\ u \in \mathcal{E}'.$$

e

$$P(E * f) = PE * f = \delta * f = f,\ f \in \mathcal{E}'.$$

Agora considere a EDP

$$Pu = f,\ f \in \mathcal{E}'.$$

Suponha que E é uma solução fundamental de P. Pela observação acima, se $u = E * f$, então $Pu = f$. Reciprocamente, se u é solução de $Pu = f$, então $u = E * Pu = E * f$.

Em particular, se $P = \Delta$ é o operador de Laplace (ou Laplaciano) em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j} = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div}(\nabla),$$

vale o seguinte resultado:

TEOREMA 2.1.47. *Seja* E *solução fundamental do operador de Laplace, isto é,*

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)C_n}|x|^{2-n} & n \geqslant 3 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x|, & n = 2. \end{cases}$$

em que C_n *é a área da esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$. *Então*

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{x_j}{C_n|x|^n} \in L^1_{loc(\mathbb{R}^n)} \ \ e \ \ \Delta E = \delta.$$

O próximo resultado fornece uma forma local do Teorema de Imersão de Sobolev.

TEOREMA 2.1.48. *Seja* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *com* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *e suponha que* $\partial_j u \in L^p_{loc}(\Omega)$,

$j = 1, \ldots n, 1 < p < n$. Então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ se

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}. \tag{2.10}$$

O resultado a seguir dá uma versão global do teorema acima.

Teorema 2.1.49. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $\partial_j u \in L^p(\mathbb{R}^n), j = 1, \ldots n, 1 < p < n$. Então existe uma constante C tal que $u - C \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{n}.$$

Teorema 2.1.50. *Suponha que $k \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é homogêneo de grau $-n/a$. Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e suponha $0 < \gamma = n(1 - 1/a - 1/p) < 1$. Então temos*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|k * u(x) - k * u(y)|}{|x - y|^\gamma} \leqslant C \|u\|_{L^p}, \qquad u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.1.51. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $\partial_j u \in L^p(\mathbb{R}^n), j = 1, \ldots n, p > n$. Então $u \in \Lambda^\gamma(\mathbb{R}^n)$, isto é, u é uma função Hölder contínua, com $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ e vale:*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

Corolário 2.1.52. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $\partial_j u \in L^n(\Omega)$, então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, $\forall\, 1 < q < \infty$.*

Teorema 2.1.53. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e suponha que $\partial_j u \in L^p_{loc}(\Omega), j = 1, \ldots n, p > n$. Então u é Hölder contínua de ordem $\gamma = 1 - n/p$, isto é,*

$$\sup_{x \neq y;\, x,\, y \in K} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty, \qquad K \subset\subset \Omega. \tag{2.12}$$

Teorema 2.1.54 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e suponha que $\partial^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega)$, quando $|\alpha| = m$, com $m \in \mathbb{Z}_+, 1 < p < \infty$. Se $\beta < m$, então*

(1) $\partial^\beta u \in L^q_{loc}(\Omega)$ desde que $q < \infty$ e $\dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{q} + \dfrac{(m - |\beta|)}{n}$;

(2) $\partial^\beta u$ é Hölder contínua de ordem γ se $0 < \gamma < 1$ e $\dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{(m - |\beta| - \gamma)}{n}$.

2.2 Caracterização Maximal de H^p

A partir de agora, nossa principal referência de inspiração são os livros do Stein, [16] e [17]. As definições de funções maximais, por exemplo, assim como os teoremas da Caracterização Maximal e da Decomposição Atômica de H^p, e outros resultados relacionados a esse contexto e aqui expostos foram adpatados das referências acima.

Os espaços H^p [4] são conjuntos de distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$ que podem ser caracterizados de muitas formas, todas implicando na mesma concepção.

2.2.1 Núcleo de Poisson em $\mathbb{R}^{n+1}_+$

A conexão dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ com as funções harmônicas definida no semi-plano superior $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ pode ser feita considerando o produto de convolução $f * P_t$, em que $P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right), t > 0$ e P é o núcleo de Poisson em $\mathbb{R}^{n+1}_+$, definido por

$$P(x) = \frac{c_n}{(1 + |x|^2)^{(n+1)/2}},$$

sendo c_n uma constante tal que $\int P(x)dx = 1$.

A convolução $f * P_t$ não está bem definida para qualquer distribuição [5], visto que P não está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ exigem uma restrição em sua classe de distribuições. Por isso, torna-se necessário trabalhar na classe das distribuições limitadas, as quais definimos a seguir.

Definição 2.2.2 (Distribuição Limitada $\mathcal{S}'_L$). *Uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$ é limitada se $u * \varphi \in L^\infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, em que $u * \varphi(x) \doteq \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle$. Denotaremos o espaço das distribuições limitadas por $\mathcal{S}'_L$.*

Notemos que valem as seguintes inclusões $L^\infty \subset \mathcal{S}'_L \subset \mathcal{S}'$. Ainda, se u é uma distribuição limitada e $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $u * h$ pode ser definida como uma distribuição. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Podemos definir

$$\langle u * h, \phi\rangle = \left\langle u * \check{\phi}, \check{h}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (u * \check{\phi})(x)\check{h}(x)dx,$$

[4] De agora em diante, não faremos distinção entre as notações H^p e $H^p(\mathbb{R}^n)$, a menos que seja especificado.

[5] Até o fim do texto, a menos que seja especificado, a palavra distribuição significará distribuição temperada.

em que $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Além disso, $u * h$ é também uma distribuição limitada e $u * (h_1 * h_2) = (u * h_1) * h_2$ se $h_i \in L^1(\mathbb{R}^n), i = 1, 2$. Portanto, como $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue $u * P_t$ está bem definido para toda distribuição limitada.

Observação 2.2.3. Podemos mostrar que, para todo $t > 0$ fixo, $u * P_t$ é uma função suave e limitada, isto é, $u * P_t \in L^\infty \bigcap C^\infty$, se $u \in \mathcal{S}'_L$.

Agora, nosso próximo objetivo é enunciar o Teorema da Caracterização Maximal, porém, antes precisamos definir as chamadas funções maximais.

2.2.4 Funções Maximais

Em muitas situações, o estudo de uma função f definida em $\mathbb{R}^n$ pode estar intimamente ligado às propriedades de uma função correspondente F, definida no semi-plano superior $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$. Por exemplo, F construída a partir de f usando aproximação da identidade, a qual descrevemos anteriormente.

No entanto, o ponto principal aqui é que $\lim_{t \to 0} (f * \phi_t)(x) = f(x)$, $q.t.p.\ x$, sempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leqslant p \leqslant \infty$, em que ϕ satisfaz $|\phi(x)| \leqslant \frac{A}{(1+|x|)^{n+\epsilon}}$, A, ϵ constantes positivas (ver referência [16]). Agora, para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e qualquer distribuição $f \in \mathcal{S}'$, definimos a Função Maximal de f,

$$M_\phi(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|.$$

Vamos considerar a função maximal associada não apenas a uma aproximação identidade ϕ_t, mas a uma família limitada de funções testes, chamada grande função maximal definida a seguir. Consideremos a coleção finita de semi-normas em $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\psi) \doteq \left\| x^\alpha \partial^\beta \psi \right\|_{L^\infty}$, $\psi \in \mathcal{S}$ e o conjunto $\mathcal{F} \doteq \{\psi \in \mathcal{S}; \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\psi) \leqslant 1, |\alpha|, |\beta| \leqslant N\}$ (bola unitária com respeito às semi-normas $P_{\alpha,\beta}$) e $N \in \mathbb{Z}_+$ fixo, a ser escolhido.

Definimos a grande função maximal de $f \in \mathcal{S}'$ associada à família $\mathcal{F}$ por

$$\mathcal{M}_\mathcal{F}(f)(x) = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} M_\psi(f)(x).$$

Finalmente, se $f \in \mathcal{S}'_L$, seja $u(x,t) \doteq (f * P_t)(x)$ a integral de Poisson de f, definida no semi-plano superior. Notemos que u está bem definida, é C^∞ e harmônica.

Seja

$$u^*(x) \doteq \sup_{|x-y|\leqslant t} |u(y,t)|$$

a função maximal não-tangencial de u e

$$u^{\perp}(x) \doteq \sup_{t>0} |u(x,t)|$$

a função maximal radial de u.

Agora, apresentamos mais uma "função maximal": a Função Maximal de Hardy-Littlewood. Devido à sua grande importância, destacamos uma seção para ela.

2.2.5 Função Maximal de Hardy-Littlewood

Nesta seção, vamos provar que o operador maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ é limitado em certos espaços. Como consequência, provaremos o Teorema da Diferenciação de Lebesgue.

Definição 2.2.6. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definimos o Operador Maximal de Hardy-Littlewood por*

$$\mathcal{M}f(x) \doteq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy. \tag{2.13}$$

Observação 2.2.7. Aqui estamos considerando $f \mapsto \mathcal{M}f$ como operador e $x \mapsto \mathcal{M}f(x)$ como função. Uma questão plausível de discussão é determinar quando $\mathcal{M}f \in L^p$, se $f \in L^p$, ou ainda, analisar em que espaços o operador $\mathcal{M}$ é limitado. Uma conta simples, nos mostra que $f = \chi_{B(0;1)} \in L^1$, mas $\mathcal{M}f \notin L^1$. Mais adiante mostraremos que existe $f \in L^1(\mathbb{R}^n), f \not\equiv 0$ tal que

$$\mathcal{M}f(x) \geqslant \frac{C\,\|f\|_{L^1}}{|x|^n},$$

quando $|x| \to \infty$, o que nos diz que $\mathcal{M}f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Apesar disso, mostraremos que $\mathcal{M}f$ deixa de estar em $L^1(\mathbb{R}^n)$ por pouco, considerando os espaços L^p_{fraco}, conforme veremos. Para tanto, usaremos a desigualdade de Tchebyshev, a qual apresentamos adiante. Antes, recordemos a definição de Função Distribuição e uma proposição clássica, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [6].

Definição 2.2.8 (Função Distribuição). *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função Lebesgue mensurável e μ a medida de Lebesgue definida em $\mathbb{R}^n$. A função $\lambda_f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida por*

$$\lambda(\alpha) \doteq |\{x : |f(x)| > \alpha\}|$$

é chamada função distribuição de f e denotada por λ_f.

Proposição 2.2.9. *Se $0 < p < \infty$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha. \tag{2.14}$$

Seja f mensurável sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $0 < p < \infty$. Definimos $[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p}$.

Definição 2.2.10 (L^p_{fraco}). *L^p_{fraco} é conjunto das funções mensuráveis f sobre Ω tais que $[f]_p < \infty$.*

Proposição 2.2.11. $L^p \subset L^p_{fraco}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha^p \lambda_f(\alpha) &= \alpha^p |\{x : |f(x)| > \alpha\}| \\
&= \alpha^p \int_{\{x;\, |f(x)|>\alpha\}} 1 dx \\
&\leqslant \alpha^p \int_{\{x;\, |f(x)|>\alpha\}} \alpha^{-p} |f(x)|^p dx \\
&\leqslant \int_\Omega |f(x)|^p dx \\
&= \|f\|^p_{L^p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[f]_p \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

□

Observação 2.2.12. $L^p_{fraco} \nsubseteq L^p$, pois podemos mostrar que $f(x) = |x|^{-n}$ está em L^1_{fraco}, mas não pertence a L^1.

Proposição 2.2.13 (Desigualdade de Tchebyshev). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então para todo $\alpha > 0$, tem-se*

$$\lambda_f(\alpha) \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}. \tag{2.15}$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy &\geqslant \int_{\{x;\,|f(x)|>\alpha\}} |f(y)|dy \\ &\geqslant \alpha|\{x;\,|f(x)|>\alpha\}| \\ &= \alpha\lambda_f(\alpha).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_f(\alpha) \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}.$$

□

TEOREMA 2.2.14 (Estimativa L^1_{fraco} para o operador maximal)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Existe uma constante $C = C(n) > 0$ tal que $\forall\, \alpha > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n;\, |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\}| \leqslant \frac{C}{\alpha}\, \|f\|_{L^1}\,, \text{ (\textit{Desigualdade fraca de tipo (1,1)})}.$$

Nesse caso, dizemos que $\mathcal{M}$ é um operador do tipo fraco $(1,1)$.

Para provar esse teorema, admitiremos o Lema Recobrimento de Vitali (ou cobertura de Vitali), cuja demonstração pode ser encontrada na referência [17].

LEMA 2.2.15 (Recobrimento de Vitali)**.** *Seja E subconjunto de $\mathbb{R}^n$ mensurável que possui uma cobertura de bolas $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de diâmetros limitados (uniformemente). Então existem $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J\subset\mathbb{N}} \subset \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, (finita ou infinita) disjuntos dois a dois, tais que*

$$|E| \leqslant 5^n \sum_{k\in J} |B_k|.$$

Demonstração. [do Teorema 2.2.14]
Fixemos $\alpha > 0$ e definamos

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}.$$

Queremos aplicar o Recobrimento de Vitali a E_α. Afirmamos que E_α é mensurável. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(f)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \\
&= \sup_{r\in\mathbb{Q},\, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.
\end{aligned}
$$

Sendo $r \mapsto \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} |f(y)| dy$ mensurável e $\mathbb{Q}$ enumerável, segue $\mathcal{M}f$ é mensurável. Mas $E_\alpha = (\underbrace{\mathcal{M}f}_{mens.})^{-1}\{\underbrace{(\alpha,\infty)}_{mens.}\}$. Logo, E_α é mensurável. Seja $x \in E_\alpha$; então

$$
\mathcal{M}(f)(x) \doteq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy > \alpha.
$$

Pela definição de supremo, existe $r_x > 0$ tal que pondo $B(x, r_x) = B_x$, temos

$$
\mathcal{M}(f)(x) - [\mathcal{M}(f)(x) - \alpha] < \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y).
$$

Então,

$$
\int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha |B_x|. \tag{2.16}
$$

Disso, segue $|B_x| < \dfrac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$ e $E_\alpha \subset \displaystyle\bigcup_{x\in E_\alpha} B_x$. Da última desigualdade, segue $diam(B_x)$ é uniformemente limitado. Pelo Lema 2.2.15, existe $\{(B_x)_i\}_{i\in J\subset\mathbb{N}} \subset \{B_x\}_{x\in E_\alpha}$ tal que os $(B_x)_i{}'s$ são disjuntos dois a dois e

$$
\sum_{i\in J} |(B_x)_i| \geqslant 5^{-n}|E_\alpha|. \tag{2.17}
$$

De (2.16) e (2.17), temos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\geqslant \int_{\bigcup_{i\in J}(B_x)_i} |f(y)| dy \\
&= \sum_{i\in J} \int_{(B_x)_i} |f(y)| dy \\
&\geqslant \sum_{i\in J} \alpha |(B_x)_i| \\
&\geqslant \alpha 5^{-n} |E_\alpha|.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{5^n}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

com $C = 5^n$. □

Teorema 2.2.16. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(1) Se $1 < p \leqslant \infty$, *então* $\mathcal{M}(f) \in L^P(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, vale*

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leqslant A_p \|f\|_{L^p} \text{ (Desigualdade forte de tipo (p,p))},$$

em que $A_p = A(n,p)$. *Nesse caso, dizemos que* $\mathcal{M}$ *é um operador de tipo forte* (p,p).

(2) Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *então* $\mathcal{M}(f)(x) < \infty \, q.t.p. \, x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. (1) Para $p = \infty$, temos

$$\mathcal{M}(f)(x) \doteq \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \right\} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$$

Daí,

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} = \inf\{\alpha > 0; |\mathcal{M}(f)(x)| \leqslant \alpha \text{ } q.t.p.\} \leqslant \|f\|_{L^\infty},$$

com $A_\infty = 1$.

Para $1 < p < \infty$, fixemos $\alpha > 0$ e definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |f(x)| < \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Notemos que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)|^p |f(x)|^{1-p} dx \\ &\leqslant \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \|f\|_{L^p}^p . \end{aligned}$$

Além disso, temos $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, pois se $|f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}$, então $|f(x)| = |f_1(x)| \leqslant |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$; e se $|f(x)| < \frac{\alpha}{2}$, então $|f(x)| < 0 + \frac{\alpha}{2} = |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$.

Daí,

$$\mathcal{M}(f)(x) \leqslant \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f_1(y)|\, dy \right\} + \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}(f)(x) \leqslant \mathcal{M}(f_1)(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

Em particular, se $\mathcal{M}(f_1)(x) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, então $\mathcal{M}(f)(x) \leqslant \alpha$. Logo,

$$E_\alpha \doteq \{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Pelo Teorema 2.2.14,

$$\begin{aligned} |E_\alpha| &\leqslant \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \\ &\leqslant \frac{2}{\alpha} \cdot 5^n \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx \\ &= \frac{2.5^n}{\alpha} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Seja $g = \mathcal{M}(f)$ e λ_g sua função distribuição. Então, pela Proposição 2.2.9 e por Tonelli-Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}(f)(x))^p dx &= p \int_0^\infty alpha^{p-1} \lambda_g(\alpha) d\alpha \\ &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} |E_\alpha| d\alpha \\ &\leqslant p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \frac{2.5^n}{\alpha} \int_{\{x;\, |f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx d\alpha \\ &= 2 \cdot 5^n \cdot p \int_{\{(\alpha,x)\, ;0 < \alpha \leqslant 2|f(x)|\}} \alpha^{p-2} |f(x)| d(x,\alpha) \\ &= 2 \cdot 5^n \cdot p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} |f(x)| d\alpha dx \\ &= \frac{2 \cdot 5^n \cdot p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} (2|f(x)|)^{p-1} |f(x)| dx \\ &= \frac{2^p \cdot 5^n \cdot p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leqslant A_p \|f\|_{L^p}, \; 0 < p \leqslant \infty, \;\text{ com }\; A_p = 2 \cdot \left(\frac{5^n \cdot p}{p-1} \right)^{1/p}.$$

Agora, demonstraremos o item (2). Se $1 < p < \infty$, pelo item (1), $\mathcal{M}(f) \in L^p$. Logo, $\mathcal{M}(f)(x) < \infty$ $q.t.p.$ $x \in \mathbb{R}^n$.

Se $p = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|\{x; \mathcal{M}(f)(x) < \infty\}^c| &= \left|\left\{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x; \mathcal{M}(f)(x) \leqslant k\}\right\}^c\right| \\
&\leqslant \left|\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{x; \mathcal{M}(f)(x) > k\}\right| \\
&\leqslant |\{x; \mathcal{M}(f)(x) > k\}| \\
&\leqslant \frac{A}{k}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx \\
&= \frac{A}{k}\,\|f\|_{L^1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{M}(f)(x) < \infty$ $q.t.p.$ $x \in \mathbb{R}^n$.

Para $p = \infty$, por hipótese, $\sup ess|f(x)| < \infty$. Logo,

$$\mathcal{M}(f)(x) \doteq \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy \leqslant \|f\|_{L^\infty}\frac{1}{|B(x;r)|}\int_{B(x,r)} 1dy = \|f\|_{L^\infty}\ .$$

$\square$

Corolário 2.2.17 (Diferenciação de Lebesgue)**.** *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que se o corolário vale para $f \in L^1$, então vale para $f \in L^1_{loc}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B(0,n)$. Tomemos $g = \chi_{B(0,n)} \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Daí, para quase todo $x \in B(0,n)$, temos

$$\begin{aligned}
g(x) &= \chi_{B(0,n)}(x)\cdot f(x) \overset{r\leq n}{=} \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\chi_{B(0,n)}(y)f(y)dy \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy \quad q.t.p.\ x \in B(0,n),\ \text{ com } r < n - |x| \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} g(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Sendo assim, seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ϵ e $x \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que o conjunto C_c é denso em L^1; então existe $g = g_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$. Definamos $g_r(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} g(y)dy$.

Como g é contínua e

$$|g_r(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (g(y) - g(x))\, dy \right| \leqslant \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy,$$

vemos que

$$\lim_{r \to 0} |g_r(y) - g(x)| = 0.$$

Analogamente, tomamos $f_r(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y) dy$. Então

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0} |f_r(x) - f(x)| &\leqslant \limsup_{r\to 0} \{|f_r(x) - g_r(x)| + |g_r(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\} \\ &\leqslant \limsup_{r\to 0} |f_r - g_r| + \limsup_{r\to 0} |g - f|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left|\left\{y; \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - f(y)| > \alpha\right\}\right| &\leqslant \left|\left\{y; \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - g_r(y)| > \frac{\alpha}{3}\right\}\right| \\ &+ \left|\left\{y; \limsup_{r\to 0} |g(y) - f(y)| > \frac{\alpha}{3}\right\}\right| \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - g_r(y)| &= \limsup_{r\to 0} \left\{ \left| \frac{1}{|B(y,r)|} \int_{B(y,r)} (f-g)(z)\, dz \right| \right\} \\ &\leqslant \limsup_{r\to 0} \left\{ \frac{1}{|B(y,r)|} \int_{B(y,r)} |f-g|(z)\, dz \right\} \\ &\leqslant \mathcal{M}(f-g)(y). \end{aligned}$$

Com isso e usando o fato de $\mathcal{M}$ ser fraco do tipo $(1,1)$, temos

$$\begin{aligned} \left|\left\{y; \limsup_{r\to 0} |f_r(y) - f(y)| > \alpha\right\}\right| &\leqslant \left|\left\{y; \mathcal{M}(f-g)(y) > \frac{\alpha}{3}\right\}\right| \\ &+ \frac{3}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y) - f(y)| dy \\ &\leqslant \frac{3\,A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |(g-f)(y)| dy \\ &+ \frac{3}{\alpha} \|g - f\|_{L^1} \\ &\leqslant C\, \|g - f\|_{L^1} \\ &\leqslant C\epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, $\limsup_{r\to 0} |f_r - f| = 0$ $q.t.p.$ e, portanto, $\lim_{r\to 0} |f_r - f| = 0$ $q.t.p.$. □

Observações:

(1) Da desigualdade forte de tipo (p,p), segue o operador $\mathcal{M} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é limitado, para $1 < p \leqslant \infty$.

(2) Da desigualdade fraca de tipo $(1,1)$, segue o operador $\mathcal{M} : L^1 \longrightarrow L^1_{fraco}$ é limitado. Com efeito, dada $f \in L^1$, temos

$$|\{x; \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{C}{\alpha} \cdot \|f\|_{L^1} \Leftrightarrow \alpha\lambda_{\mathcal{M}f}(\alpha) \leqslant C\|f\|_{L^1} \Leftrightarrow \sup_{\alpha>0}(\alpha\lambda_{\mathcal{M}f}(\alpha)) \leqslant C\|f\|_{L^1}.$$

Logo, $[\mathcal{M}f]_1 \leqslant C\|f\|_{L^1} < \infty$.

(3) Se $f \in L^1$ e $f \neq 0$ $q.t.p.$, então $\mathcal{M}f \notin L^1$. Inicialmente, mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2.18. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$ $q.t.p.$, então existe $C > 0$ tal que, para $|x| \geqslant 1$,

$$\mathcal{M}(f)(x) \geqslant \frac{C}{|x|^n}\|f\|_{L^1}.$$

De fato, seja $r > 0$. Como $f \in L^1$, temos $\lim_{r\to\infty} \int_{B(0;r)} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1}$. Daí, existe k_0 tal que

$$\left| \int_{B(0;r)} |f(x)|dx - \|f\|_{L^1} \right| < \frac{1}{2} \cdot \|f\|_{L^1}, \ r \geqslant k_0.$$

Seja $k = \max\{1, k_0\}$; então

$$\int_{B(0;k)} |f(x)|dx > \frac{1}{2} \cdot \|f\|_{L^1}.$$

Seja $|x| \geqslant 1$. Claramente, $B(x; 2|x|k) \supset B(0;k)$. Tomemos $r_0 = 2k|x|$ e notemos que $|B(x;r_0)| = C_n(2k|x|)^n = C'|x|^n$; daí

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f)(x) &= \sup_{r>0}\left\{\frac{1}{|B(x;r)|}\int_{B(x;r)}|f(x)|dx\right\} \\ &\geqslant \frac{1}{|B(x;r_0)|}\int_{B(x;r_0)}|f(x)|dx \\ &\geqslant \frac{1}{C'|x|^n\,2}\|f\|_{L^1} \\ &= \frac{C}{|x|^n}\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Disso, concluímos que $\mathcal{M}f \notin L^1$, pois a função $x \mapsto |x|^n$ não é integrável para $|x|$ grande, conforme mencionamos no início dessa seção.

Finalmente, considerando a coleção $\mathcal{F}$, $u^\perp$ e as funções u^* definidos anteriormente, podemos enunciar o Teorema da Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$. Esse resultado também é conhecido como Teorema de Fefferman-Stein devido ao fato de serem eles os autores. Apresentamos a seguir uma adaptação desse teorema, o qual na sua originalidade é composto apenas pelos itens (1), (2) e (4) conforme é exposto abaixo.

Teorema 2.2.19 (Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$). *Seja f uma distribuição (temperada) e $0 < p \leqslant \infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Existe uma função $\phi \in \mathcal{S}$, com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(2) Existe uma coleção $\mathcal{F}$ tal que $M_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(3) A distribuição $f \in \mathcal{S}'_L$ e $u^\perp \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(4) A distribuição $f \in \mathcal{S}'_L$ e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(5) Para qualquer função $\phi \in \mathcal{S}$, com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \neq 0$, tem-se $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.2.20. Se qualquer uma dessas propriedades equivalentes é satisfeita, dizemos que f pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, segue da demonstração que qualquer norma em L^p das funções maximais acima são equivalentes.

Com isso, dado $0 < p \leqslant \infty$, podemos definir os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto das distribuições temperadas de $\mathbb{R}^n$ tais que sua Função Maximal pertence a L^p. Mais precisamente,

$$H^p(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : M_\phi f \in L^p\}.$$

E ainda, definimos também

$$\|f\|_{H^p} \doteq \|M_\phi f\|_{L^p}.$$

Para $p > 1$, veremos que $H^p = L^p$, daí seguirá que $(H^p, \|.\|_{H^p})$ é completo. Antes de provar esse teorema, precisamos ainda de um pouco mais de teoria.

Seja $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$ Borel mensurável dada por $F(x,t) = (f * \phi_t)(x)$, com $f \in \mathcal{S}'_L$. Claramente, $0 \leqslant F^*(x) \doteq \sup_{|y-x|<t} |F(y,t)|$ e, ainda, vale a proposição a seguir.

Proposição 2.2.21. *A função F^* é semi-contínua inferiormente, isto é, $\forall \alpha \geqslant 0$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; F^*(x) > \alpha\}$ é aberto.*

Demonstração. Fixemos $\alpha \geqslant 0$ e tomemos $x \in A_\alpha$, isto é, $F^*(x) > \alpha$. Seja $\Gamma(x) = \{(y,t); |x-y|<t\}$. Existe $(y_0,t_0) \in \Gamma(x)$ tal que $|F(y_0,t_0)| > \alpha$. Tomemos $\delta = t_0 - |x-y_0|$ e mostremos que $B(x;\delta) \subset A_\alpha$. Se $x \in B(x;\delta)$, então $|x'-y_0| \leqslant |x'-x| + |x-y_0| < \delta + |x-y_0| = t_0$, ou seja, $(y_0,t_0) \in \Gamma(x')$. Portanto, $F^*(x') \geqslant |F(y_0,t_0)| > \alpha$. □

Agora, fixemos $a > 0$ e consideremos $F_a^*(x) \doteq \sup_{|y-x|\leqslant at} |F(y,t)|$. É claro que se $0 < a \leqslant b$, então $F_a^*(x) \leqslant F_b^*(x)$ e, consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} F_b^*(x)dx.$$

No entanto, vamos provar que vale a proposição abaixo.

Proposição 2.2.22. *Existe uma constante $C = C(a,b,n) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_b^*(x)dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)dx. \tag{2.18}$$

Disso, concluiremos que a integral em L^p não depende da abertura "a" do cone $\Gamma_a(x) \doteq \{(y,t) : |x-y| < at\}$, isto é, $F_b^* \in L^p \Leftrightarrow F_a^* \in L^p$, ou seja, para verificar que pertence a L^p, basta tomar uma abertura arbitrária. Ainda, para $p \neq 1$, basta considerar a função $F^* = \sup |F|^p$. Antes de provar a Proposição 2.2.22, façamos a seguinte definição:

Definição 2.2.23. *Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $0 < \gamma < 1$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é ponto de $\gamma -$ densidade global de G se*

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x;r) \cap G|}{|B(x;r)|}, \quad \forall r > 0.$$

Demonstração. Para provar a Proposição 2.2.22, lembremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)d\alpha. \tag{2.19}$$

Em particular, $\lambda_f(\alpha) \leqslant \lambda_g(\alpha)$ implica $\|f\|_{L^p} \leqslant \|g\|_{L^p}$. Com isso, para mostrar a Proposição 2.2.22, vamos provar a desigualdade das funções distribuições. Seja

$$G^* = \{x \in \mathbb{R}^n; x \text{ é ponto de } \gamma - \text{densidade global de } G\}.$$

Agora, afirmamos que G^* é fechado. Com efeito, seja $(x_k) \subset G^*$ tal que $x_k \to x$. Pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\gamma \leqslant \frac{|B(x_k;r)\cap G|}{|B(x_k;r)|} = \frac{1}{c_n\, r^n}\int_G \chi_k(x)dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{|B(x;r)|}\int_A \chi_{_B}(x)dx = \frac{|B(x;r)\cap A|}{|B(x;r)|}\ \forall r>0,$$

em que χ_k, $\chi_{_B}$ são, respectivamente, as funções características de $B(x_k;r)$ e de $B(x;r)$.

Notemos que $\chi_k(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi(x)$ e $\displaystyle\int_G \chi_k(x)dx \leqslant |B(x,r)|$. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, temos $x_0 \in B(x,r)$ ou $x_0 \notin B(x,r)$. Mas existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geqslant k_0$, $|x_k - x| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Se $x_0 \in B(x;r)$, tomemos $\epsilon = r - |x_0 - x| = r - r'$, com $r' = |x_0 - x|$. Daí,

$$|x_0 - x_k| \leqslant |x_0 - x| + |x - x_k| < r' + r - r' = r \quad \text{e} \quad \chi(x_0) = \chi_k(x_0) = 1,\ \forall\, k \geqslant k_0.$$

Se $x_0 \notin B(x;r)$, podemos supor x_0 fora da fronteira, pois essa tem medida nula. Então basta verificar para $x_0 \in \overline{B(x;r)}^c$, que é análogo.

Portanto, provamos que x é ponto de $\gamma-$ densidade global de G, isto é, $x \in G^*$ e, consequentemente, G^* é fechado.

Observação 2.2.24. Como G é fechado, temos $G^* \subset G$, pois se existe $z \in G^*$ tal que $z \notin G = \overline{G}$, então existe $r > 0$ tal que $B(z;r) \cap G = \varnothing$, ou seja, z não é ponto de $\gamma-$ densidade global de G, que é um absurdo.

Agora, ponha $\mathcal{A} = G^c$ e $\mathcal{A}^* = (G^*)^c$. Da observação acima, temos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$. Além disso, vale o seguinte resultado:

Lema 2.2.25. *Existe $C = C_\gamma$ tal que $|\mathcal{A}^*| \leqslant C_\gamma |\mathcal{A}|$.*

De fato,

$$x \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \exists\, r > 0;\ \frac{|B(x;r)\cap G|}{|B(x;r)|} < \gamma \Leftrightarrow \exists\, r > 0;\ \frac{|B(x;r)\cap \mathcal{A}|}{|B(x;r)|} > 1-\gamma,$$

pois como $G \cup \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, temos $|B(x;r)\cap G| = |B(x;r)| - |B(x;r)\cap\mathcal{A}|$.

Daí,

$$\gamma > \frac{|B(x;r)\cap G|}{|B(x;r)|} = 1 - \frac{|B(x;r)\cap\mathcal{A}|}{|B(x;r)|},$$

ou seja,

$$\frac{|B(x;r)\cap\mathcal{A}|}{|B(x;r)|} > 1-\gamma.$$

Ou ainda, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x;r)|}\int_{B(x;r)} \chi_{\mathcal{A}}(y)dy > 1-\gamma.$$

Então

$$\mathcal{M}(\chi_{\mathcal{A}})(x) \doteq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x;r)|}\int_{B(x;r)} (\chi_{\mathcal{A}})(y)dy > 1-\gamma.$$

Consequentemente,

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(\chi_{\mathcal{A}})(x) > 1-\gamma\}|.$$

Entretanto, o operador de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ é fraco de tipo $(1,1)$, isto é,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}| \leqslant \frac{A(n,p)}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f|dx, \ \forall \alpha > 0.$$

Logo, obtemos

$$|\mathcal{A}^*| \leqslant \frac{A(n,p)}{1-\gamma}\int_{\mathbb{R}\backslash} \chi_{\mathcal{A}}(x)dx = \frac{A(n,p)}{1-\gamma}|\mathcal{A}|,$$

provando, portanto, o lema com $C_\gamma = \dfrac{A(n,p)}{1-\gamma}$.

Finalmente, agora vamos provar a desigualdade

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; F_b^*(x) > \alpha\}| \leqslant C\,|\{x \in \mathbb{R}^n; F_a^*(x) > \alpha\}| \ \ \forall \alpha > 0, \ \text{com } a \leqslant b.$$

Para tanto, basta provar o seguinte: “Para algum $0 < \gamma < 1$, tem-se

$$\{x \in \mathbb{R}^n; F_b^*(x) > \alpha\} \subseteq \mathcal{A}^*, \tag{2.20}$$

com $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; F_a^*(x) > \alpha\} = G^c$, $G^* = \{x \in \mathbb{R}^n; F_a^*(x) \leqslant \alpha\}^*$, $\mathcal{A}^* = (G^*)^c$ e * denota o conjunto dos pontos de $\gamma-$densidade de um conjunto”. A desigualdade seguirá, respectivamente, de (2.20) e do lema anterior, pois teremos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; F_b^*(x) > \alpha\}| \leqslant |A^*| \overset{lema}{\leqslant} C_\gamma |\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; F_a^*(x) > \alpha\}}_{\mathcal{A}}|.$$

Para provar (2.20), seja $x \in \{z \in \mathbb{R}^n; F_b^*(z) > \alpha\}$. Então $\sup\limits_{|y-x|<b\,t} |F(y,t)| > \alpha$. Logo, existe $(y',t') \in \Gamma_b(x)$ tal que $|F(y',t')| > \alpha$. Vamos mostrar que $x \in \mathcal{A}^* \doteq G^{*c}$, isto é, x não é ponto de γ-densidade global de $G \doteq \{z \in \mathbb{R}^n; F_a^*(z) > \alpha\}^c$. Com efeito, temos

(1) $B(y', at') \subset \mathcal{A} \doteq \{z \in \mathbb{R}^n; F_a^*(z) > \alpha\}$, pois de $x \in B(y', at')$ temos $|x - y'| < at'$. Daí, $F_a^*(x) := \sup\limits_{|y'-x|<at'} |F(y', t')| > \alpha$. Logo, $x \in \{z \in \mathbb{R}^n; F_a^*(z) > \alpha\}$.

(2) $B(y', at') \subset B(x, (a+b)t')$, pois para $z \in B(y', at')$, temos $|z - y'| < at'$ e com isso

$$|z - x| \leqslant |z - y'| + |y' - x| < at' + bt' = (a+b)t',$$

isto é, $z \in B(x, (a+b)t')$.

De (1) e (2), temos $B(y'; at') \subset B(x; (a+b)t') \cap \mathcal{A}$. Então

$$\frac{|B(x; (a+b)t') \cap \mathcal{A}|}{|B(x; (a+b)t')|} \geqslant \frac{|B(y'; at')|}{|B(x; (a+b)t')|} = \frac{a^n}{(a+b)^n}.$$

Assim como antes, obtemos

$$\frac{|B(x; (a+b)t') \cap G|}{|B(x; (a+b)t')|} \leqslant 1 - \frac{a^n}{(a+b)^n} < 1.$$

Agora, basta tomar γ tal que $1 - \dfrac{a^n}{(a+b)^n} < \gamma < 1$. Com esse γ, x não é ponto de $\gamma-$ densidade global de G, ou seja, $x \in G^{*c}$.

Portanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; F_b^*(x) > \alpha\}| \leqslant C_\gamma \left|\{x \in \mathbb{R}^n; F_a^*(x) > \alpha\}\right|.$$

Usando a Proposição 2.2.22, obtemos $\displaystyle\int F_b^* \leqslant C \int F_a^*$. Portanto a integral em L^p não depende da abertura do cone. Em particular, tomando $b = 1$, podemos escolher $C = (1+a)^n$. $\square$

O lema a seguir será utilizado para mostrar o que havíamos mencionado na introdução do texto, isto é, $L^p = H^p$ se $p > 1$. Ele nos dá uma útil estimativa pontual da função maximal $M_\phi f(x)$ em termos da função maximal de Hardy-Littlewood.

Lema 2.2.26. *Dada $f \in L^1_{loc}$ e $\phi \in \mathcal{S}$, existe $C = C(\phi)$ tal que $M_\phi f(x) \leqslant C\mathcal{M}f(x)$.*

Demonstração. Vamos separar em casos:
Caso 1: Suponhamos, inicialmente, que $\phi = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{B_j}$, com $a_j > 0, B_j = B(0, r_j)$, χ_{B_j} a função característica da bola B_j e que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, ou seja, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j |B_j| = 1$. Para essas

funções $\phi' s$, temos

$$\begin{aligned}
|(\phi_t * f)(x)| &= \left|\frac{1}{t^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y/t) f(x-y)dy\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{c_n\, r_j{}^n}{c_n (r_j\, t)^n} \int_{B(0;r_j\, t)} |f(x-y)|dy \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} a_j |B_j|\right) \mathcal{M}f(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_\phi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j |B_j| \mathcal{M}(f)(x) = M(f)(x).$$

Caso 2: Suponhamos $0 \leqslant \phi \in \mathcal{S}$ radial e radialmente decrescente, isto é, $\phi(x) = \varphi(|x|)$, com $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ é decrescente. Nesse caso, podemos aproximar ϕ por funções da forma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{B_j}$, com $a_j > 0, B_j = B(0, r_j)$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j |B_j| = \int \phi$, como no caso (1). Análogo ao caso 1, provamos que $|(\phi_t * f)(x)| \leqslant C(\phi)\mathcal{M}(f)(x)$, com $C(\phi) = \displaystyle\int \phi dy$. Como $\left(\phi_t * \chi_{B_j}\right)(x) \leqslant |B_j| \mathcal{M}(f)(x)$, obtemos o resultado desejado.

Caso 3 (Caso geral):

Temos $|(\phi * f)(x)| \leqslant |(|\phi| * |f|)(x)|$. Mas $\left|x^\alpha \partial^\beta \phi\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}$, pois $\phi \in \mathcal{S}$. Daí, obtemos $(1+|x|)^{n+1} |\phi| \leqslant C_n$, isto é, $|\phi| \leqslant \dfrac{C_n}{(1+|x|)^{n+1}}$. Sendo assim, $\psi(x) = \dfrac{C_n}{(1+|x|)^{n+1}}$ satisfaz o caso 2. Logo, aplicamos o argumento anterior para a função ψ e obtemos

$$\begin{aligned}
|(\psi * f)(x)| &\leqslant |(|\psi| * |f|)(x)| \\
&\leqslant (\psi * |f|)(x) \\
&\leqslant C_n \left(\int (1+|y|)^{-(n+1)} dy\right) \mathcal{M}(f)(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$M_\phi(f)(x) \leqslant C\mathcal{M}(f)(x).$$

$\square$

Observação 2.2.27. A mesma prova se aplica no caso quando ϕ tem um limitante radial que é não crescente, limitado e integrável. Na verdade, ϕ não precisa estar em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2.28. *$L^p = H^p$ se $p > 1$, e $H^1 \subset L^1$.*

Demonstração. Se $f \in L^p$, então pelo Lema 2.2.26 $M_\phi(f)(x) \leqslant C\mathcal{M}(f)(x)$ $q.t.p.$ $x \in \mathbb{R}^n$ e ainda $\|M_\phi f\|_{L^p} \leqslant C\,\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leqslant \widetilde{C}\,\|f\|_{L^p}$, pois $\mathcal{M}$ é limitado. Logo, $f \in H^p$.

Para outra inclusão, seja $f \in H^p \subset \mathcal{S}'$. Dado $\epsilon > 0$, as funções $f_\epsilon = \phi_\epsilon * f$ satisfazem $\|f_\epsilon\|_{L^p} = \|M_\phi f\|_{L^p} \doteq c < \infty$. Tomemos $\epsilon_j \searrow 0$. Daí, $(f_{\epsilon_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{L^p}(0;c)$ é limitada em L^p. Pelo teorema de Banach-Alaoglu (ver referência [15]), existem $(f_{\epsilon_{j_k}}) \subset (f_{\epsilon_j})$ e $F \in L^p$ tal que $f_{\epsilon_{j_k}} \rightharpoonup F$ em $\sigma(L^p, L^q)$ fracamente, ou ainda,

$$\int f_{\epsilon_{j_k}}\psi \longrightarrow \int F\psi \;\; \forall\;\psi \in L^q.$$

Por outro lado, $f_{\epsilon_{j_k}} \longrightarrow f$ em $\mathcal{S}'$, ou seja,

$$\int f_{\epsilon_{j_k}}\psi \longrightarrow \int f\psi \;\; \forall\;\psi \in \mathcal{S} \subset L^q.$$

Pela unicidade do limite, $f = F$ em $\mathcal{S}'$ e daí $f \in L^p$. Portanto, $L^P = H^p$, se $p > 1$.

A prova que $H^1 \subset L^1$ pode ser encontrada na referência [16]. □

Observações:

(1) A primeira parte da demonstração acima mostra apenas que H^1 está contido no espaço das medidas de Borel.

(2) Veremos no último capítulo que podemos definir $H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1; M_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$. Daí, seguirá que $L^1 \not\subset H^1$, isto é, existe $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que não está em $H^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, basta tomar $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ não identicamente nula e $f \in L^1$ tal que $\displaystyle\int f \neq 0$. Podemos mostrar que $M_\phi f \notin L^1$. A idéia da prova é escolher um ponto $x_0 \neq 0$ tal que $|\phi(x_0)| \neq 0$ e mostrar que $|f * \phi_t(tx')| \geqslant c\,t^{-n}$ para todo x' próximo de x_0 e todo t grande.

2.2.29 Prova do Teorema Maximal

Finalmente, podemos provar o Teorema da Caracterização Maximal de H^p. Inicialmente, vamos definir as seguintes funções maximais auxiliares:

$$M_\phi^*(f)(x) \doteq \sup_{|y-x|<t} |(\phi_t * f)(y)| = \sup_{|y|<t} |(\phi_t * f)(x-y)| \quad \text{(Versão não tangencial de } M_\phi)$$

e a função maximal com peso

$$M_{\phi,N}^{**}(f)(x) \doteq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ t>0}} \left\{ |(\phi_t * f)(x-y)| \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-N} \right\}.$$

Valem as seguintes estimativas pontuais

$$M_\phi(f)(x) \leqslant M_\phi^*(f)(x) \leqslant 2^N M_{\phi,N}^{**}(f)(x). \tag{2.21}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} M_\phi^*(f)(x) &= \sup_{|y|<t} |(\phi_t * f)(x-y)| \\ &= \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ t>0}} \{|(\phi_t * f)(x-y)|\} \, \chi_{\Gamma(0)}(y,t) \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{N} \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-N} \\ &\leqslant 2^N M_{\phi,N}^{**}(f)(x), \end{aligned}$$

em que $\chi_{\Gamma(0)}$ é a função característica do cone $\Gamma(0) \doteq \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1};\ |y| < t\}$.

Notemos que a primeira desigualdade em (2.21) segue por definição. Além disso, pela Proposição 2.2.22, podemos concluir que o controle do operador maximal não tangencial M_ϕ (definido com respeito à abertura 1) conduz a um correspondente controle do operador maximal não tangencial definido com respeito a qualquer abertura.

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)dx \leqslant (1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F^*(x)dx,$$

desde que $F(x,t) = |(f * \phi_t)(x)|^p$ e $F_a^*(x) = \sup_{|x-y|<at} F(y,t)$.

Inicialmente, vamos provar a equivalência entre (1) e (2). Começamos com o seguinte lema:

Lema 2.2.30. *Se $M_\phi^*(f) \in L^p$ e $N > \dfrac{n}{p}$, então existe $C = C(p,N)$ tal que*

$$\left\| M_{\phi,N}^{**}(f) \right\|_{L^p} \leqslant C \left\| M_\phi^*(f) \right\|_{L^p}.$$

Demonstração. Temos

$$
\begin{aligned}
[M_\phi^{**}(f)(x)]^p \quad &= \quad \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ t>0}} |(\phi_t * f)(x-y)|^p \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-pN} \\
&\leqslant \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{2^{k-1}t<|y|\leqslant 2^k t} |(\phi_t * f)(x-y)|^p \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-pN} \\
&\quad + \sup_{|y|\leqslant t} |(\phi_t * f)(x-y)|^p \left(1+\frac{|y|}{t}\right)^{-pN} \\
&\leqslant \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-pN(k-1)} \sup_{2^{k-1}t<|y|\leqslant 2^k t} |(\phi_t * f)(x-y)|^p + \sup_{|y|\leqslant t} |(\phi_t * f)(x-y)|^p \\
&\leqslant \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-pN(k-1)} [F_{2^k}^*(x)]^p,
\end{aligned}
$$

com $F_a^*(x) \doteq \sup_{|x-y|<at} |(\phi_t * f)(y)|$. Agora, precisamos garantir que essa última série converge. Mas como $\int_{\mathbb{R}^n} F_{2^k}^*(x)dx \leqslant (1+2^k)^n \int_{\mathbb{R}^n} M_\phi^*(f)(x)dx$, basta verificar $\sum_{k=0}^{\infty}(1+2^k)^n 2^{-pNk} < \infty$ que, de fato, acontece, pois

$$
\sum_{k=0}^{\infty}(1+2^k)^n\, 2^{-pNk} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)n}\, 2^{-Npk} = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n-pN)},
$$

com $n - pN < 0$, por hipótese. Portanto, a última série à direita converge e, consequentemente, a primeira também. Daí,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} [M_\phi^{**}(f)(x)]^p dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-pN(k-1)} \int_{\mathbb{R}^n} [F_{2^k}^*(x)]^p dx \leqslant \tilde{C}(N,p) \int_{\mathbb{R}^n} [M_\phi^*(f)(x)]^p dx,
$$

com $\tilde{C}(N,p) = \sum_{k=0}^{\infty}(1+2^k)^N\, 2^{-pk}$. Logo,

$$
\left\| M_{\phi,N}^{**} f \right\|_{L^p} \leqslant C(N,p) \left\| M_\phi^* f \right\|_{L^p}.
$$

□

O próximo lema será muito útil na demonstração do teorema maximal. Ele nos diz que podemos passar de uma aproximação identidade qualquer para uma outra , conforme mostramos a seguir.

Lema 2.2.31. *Suponha $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Então existe $(\eta^{(k)}) \subset \mathcal{S}$ tal que*

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{(k)} * \phi_{2^{-k}}, \tag{2.22}$$

com $(\eta^{(k)})$ satisfazendo: dado $M > 0$,

$$P_{\alpha,\beta}(\eta^{(k)}) = \mathcal{O}(2^{-kM}), k \to \infty, \text{ isto é }, \ \frac{P_{\alpha,\beta}(\eta^{(k)})}{2^{-kM}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{2.23}$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ nos diz que $\hat{\phi}(0) = 1$ (em que $\hat{}$ denota a transformada de Fourier), enquanto (2.22) equivale a $\hat{\psi} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}^{(k)} * \hat{\phi}_{2^{-k}}$. Tomemos $\hat{\varphi} \in C_c^\infty$ tal que $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ em $|\xi| < 1$ e $supp(\hat{\varphi}) \subset B(0,2)$. Notemos que isso é possível, pois $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ e a transformada de Fourier é um isomorfismo. Definamos

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_0(\xi) &= \hat{\varphi}(\xi), \\
\hat{\psi}_1(\xi) &= \hat{\varphi}(2^{-1}\xi) - \hat{\varphi}(\xi), \\
&\vdots \\
\hat{\psi}_n(\xi) &= \hat{\varphi}(2^{-n}\xi) - \hat{\varphi}(2^{-(n-1)}\xi), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De $supp(\hat{\varphi}) \subset B(0,2)$ e $\{\xi; |\xi| < 2^{n-1}\} \subset \{\xi; |\xi| < 2^n\}$, $supp(\hat{\psi_n}) \subset B(0, 2^{n+1}) \backslash B(0, 2^{n-1})$, ou seja, $\hat{\psi}_n$ está suportada em $2^{n-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{n+1}$, $\forall\ n \geqslant 1$. Além disso,

$$\sum_{k=0}^{L} \hat{\psi}_k(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-L}\xi) \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e fazendo $L \to \infty$, temos $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k(\xi) = 1$ (pontualmente), pois $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ em $|\xi| \leqslant 1$. Logo, $\{\hat{\psi}_n\}$ é uma partição da unidade e ainda

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{L} \hat{\psi}_k(\xi)\hat{\psi}(\xi). \tag{2.24}$$

Como $\hat{\phi}(0) = 1$ e da continuidade da transformada de Fourier de ϕ, segue $|\hat{\phi(\xi)}| \geqslant \frac{1}{2}$ numa vizinhança de $\xi = 0$.

Caso 1: Vamos supor $|\hat{\phi}(\xi)| \geqslant \frac{1}{2}$ em $B(0,2)$.
Multiplicando e dividindo (2.24) por $\hat{\phi}_{2^{-k}}(\xi) = \hat{\phi}(2^{-k}\xi)$ [pois $\hat{\phi}_t(\xi) = \hat{\phi}(t\xi)$], obtemos

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{L} \left(\frac{\hat{\psi}_k(\xi)\hat{\psi}(\xi)}{\hat{\phi}(2^{-k}\xi)} \right) \cdot \hat{\phi}_{2^{-k}}(\xi).$$

Agora, tomemos $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \dfrac{\hat{\psi}_k(\xi)\hat{\psi}(\xi)}{\hat{\phi}(2^{-k}\xi)}$ e mostremos que $\eta^{(k)}(\xi) \in \mathcal{S}$. Observemos que $\hat{\psi}(2^{-k}\xi) \in C_c^\infty$ e, além disso, como $|\hat{\phi}(\xi)| \geqslant \frac{1}{2}$ em $supp(\hat{\psi}_k) \subset B(0, 2^{k+1})$, $\eta^{(k)}$ está bem definida e $\eta^{(k)} \in C_c^\infty \subset \mathcal{S}$. Logo, $\eta^{(k)} \in \mathcal{S}$.

Considerando $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \dfrac{\hat{\psi}_k(\xi)\hat{\psi}(\xi)}{\hat{\phi}(2^{-k}\xi)}$, com α, β fixos e pondo $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
|x^\alpha \partial_x^\beta \eta^{(k)}(x)| &\leqslant \int \left|\partial_\xi^\alpha [\xi^\beta \widehat{\eta}_k(\xi)]\right| d\xi \\
&= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |\partial_\xi^\alpha \xi^\beta \widehat{\eta}_k(\xi)| d\xi \\
&= \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \xi^{|\beta|-\alpha_1} [\partial_\xi^{\alpha_2} \widehat{\psi}_k](\xi) [\partial_\xi^{\alpha_3} \widehat{\psi}](\xi) \partial_\xi^{\alpha_4} [\widehat{\phi}^{-1}(2^{-k}\xi)] d\xi \\
&\leqslant C_1 \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |\xi|^{|\beta|-\alpha_1} |[\partial_\xi^{\alpha_3} \widehat{\psi}]|(\xi) d\xi \\
&\leqslant C_1 \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} \xi^{|\beta|-\alpha_1} C_2 |\xi|^{-M} d\xi \\
&\leqslant C_1 C_2 \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |\xi|^{|\beta|-\alpha_1-M} d\xi \\
&\leqslant C' \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} r^{n+1} r^{|\beta|-\alpha_1-M} dr \\
&\leqslant C'' \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} r^{2-M} dr \\
&= C 2^{-kM},
\end{aligned}$$

isto é, $\left\|\eta^{(k)}\right\|_{\alpha,\beta} = \mathcal{O}(2^{-kM})$, quando $k \to \infty$.

Caso 2: De $\hat{\phi}(0) = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $|\hat{\phi}(\xi)| \geqslant \frac{1}{2}$ $\forall \xi \in B(0;\delta)$.
Essencialmente, precisamos apenas mudar os termos na definição de $\hat{\eta}^{(k)}$ acima e daí obtemos $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \dfrac{\hat{\psi}_{k-k_0}(\xi)\hat{\psi}(\xi)}{\hat{\phi}(2^{-k}\xi)}$ para $k \geqslant k_0$ e $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = 0$ para $k < k_0$. Em outras

palavras, simplesmente dilatamos $\hat{\phi}$ (para que $\hat{\phi} \geqslant \frac{1}{2}$ quando $|\xi| \leqslant 2$) antes de começar a construção. Mais precisamente, escolhemos $k_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $2^{1-k_0} < \delta$ e definamos $\hat{\phi}_0(\xi) = \hat{\phi}(2^{-k_0}\xi)$. Agora, $\hat{\phi}_0$ satisfaz o caso 1 e o resultado segue análogo, pois $|\xi| \leqslant 2$ implica em $|2^{-k_0}| \leqslant 2^{1-k_0} < \delta$. Logo, $\hat{\phi}_0(\xi) \geqslant \frac{1}{2}$ e daí existe $(\eta^{(k)}) \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}^{(k)}(\xi)\hat{\phi}_0(2^{-k}\xi) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}^{(k)}(\xi)\hat{\phi}(2^{(k-k_0)}\xi) \\
&= \sum_{k=k_0}^{\infty} \hat{\eta}^{(k-k_0)}(\xi)\hat{\phi}(2^{-k}\xi).
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.2.32. Da demonstração do lema, podemos chegar à seguinte conclusão: Se

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \left\{\psi \in \mathcal{S}; \|\psi\|_{\alpha,\beta} \leqslant 1, |\alpha| \leqslant m+M+2N, |\beta| \leqslant m+2N\right\},$$

com $\phi \in \mathcal{S}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, então valem (2.22) e (2.23) do lema acima, e de (2.23) obtemos $|\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\eta^{(k)})| \leqslant C2^{-kM}$, com $C = C(\alpha,\beta,M,\psi)$ independente de $\psi \in \mathcal{F}$, desde que $|\alpha| + |\beta| \leqslant m$. De fato, seja $f \in \mathcal{S}$ e $N = \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^N}{(1+|\xi|^2)^N} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\{(1-|\Delta|)^N f\}\widehat{\ }(\xi)|}{(1+|\xi|^2)^N} \right| d\xi \\
&\leqslant C \left\| \{(1-|\Delta|)^N f\}\widehat{\ } \right\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(1-\Delta)^N f(x) dx \right| \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} (1-|\Delta|)^N |f(x)| \frac{(1+|x|^2)^N}{(1+|x|^2)^N} dx \\
&\leqslant C \left\| (1+|x|)^N (1-|\Delta|)^N f \right\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant 2N} P_{\alpha,\beta}(f).
\end{aligned}$$

Daí, para $|\beta| \leqslant m$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{0,\beta}(\eta^{(k)}) &\leqslant C\left\|\xi^{\beta}\widehat{\eta}^{(k)}\right\|_{L^1} \\
&\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\left\|\xi^{\beta}\widehat{\eta}^{(k)}\right\|_{L^1} \\
&\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^k}\frac{|\xi|^m|\widehat{\psi}_k(\xi)||\widehat{\psi}(\xi)|}{|\widehat{\phi}(2^k\xi)|}d\xi \\
&\leqslant C\sum_{|\beta|\leqslant m}\int_{2^{k-1}<|\xi|}|\xi|^{m+M}\cdot\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^M}d\xi \\
&\leqslant 2^M C\sum_{|\alpha|\leqslant m+M}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^{\alpha}\psi(\xi)}|d\xi\cdot 2^{-Mk} \\
&\leqslant \tilde{C}2^{-Mk}\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m+M+2N\\|\beta|\leqslant 2N}}\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\psi).
\end{aligned}$$

Em geral, para $|\alpha|+|\beta|\leqslant m$, temos

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\eta^{(k)}) \lesssim 2^{-Mk}\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m+M+2N\\|\beta|\leqslant m+2N}}\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\psi),$$

em que $\lesssim$ significa " $\leqslant C\,\bullet$ ", com C constante.

Observação 2.2.33. Se $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$, então $(f*g)_t(x) = (f_t*g_t)(x)$, pois

$$(f*g)_t(x) \doteq t^{-n}\int f\left(\frac{x}{t}-y\right)g(y)dy = t^{-n}t^{-n}\int f\left(\frac{x}{t}-\frac{z}{t}\right)g(z/t)dz = (f_t*g_t)(x).$$

Estamos, agora, em condições de provar que o controle do operador maximal não tangencial M_ϕ^* também permite o controle do grande operador maximal $M_{\mathcal{F}}$ para $\mathcal{F}$ apropriada e, mais precisamente, que vale a seguinte estimativa.

Lema 2.2.34. $\|M_{\mathcal{F}}f\|_{L^p} \lesssim \left\|M_\phi^* f\right\|_{L^p}$.

Demonstração. Fixemos m e definamos $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \{\psi\in\mathcal{S};\|\psi\|_{\alpha,\beta}\leqslant 1\}_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}$. Dada $\psi\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, pelo Lema 2.2.31, temos

$$\begin{aligned}
M_\psi(f)(x) &= \sup_{t>0} |(f * \psi_t)(x)| \leqslant \sup_{t>0} \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \left| [f * (\eta^{(k)} * \phi_{2^{-k}})_t](x) \right| \right\} \\
&= \sup_{t>0} \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \left| [(f * \phi_{2^{-k}t}) * \eta_t^{(k)}](x) \right| \right\} \\
&\leqslant \sup_{t>0} \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \int \left| (f * \phi_{2^{-k}t})(x-y) \frac{1}{t^n} \right| |\eta^{(k)}(y/t)| \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k}t}\right)^{N-N} dy \right\} \\
&\leqslant M^{**}_{N,\phi}(f)(x) \sup_{t>0} \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{t^n} \int |\eta^{(k)}(y/t)| \left(1 + \frac{2^k|y|}{t}\right)^N dy \right\} \\
&= M^{**}_{N,\phi}(f)(x) \sup_{t>0} \left\{ \sum_{k\geqslant 0} \int |\eta^{(k)}(y)|(1+2^k|y|)^N \frac{(1+|y|)^{n+1}}{(1+|y|)^{n+1}} dy \right\} \\
&\overset{(*)}{\leqslant} M^{**}_{N,\phi}(f)(x) \sum_{k\geqslant 0} 2^{kN} \int |\eta^{(k)}(y)| \frac{(1+|y|)^{N+n+1}}{(1+|y|)^{n+1}} dy \\
&\leqslant C' M^{**}_{N,\phi}(f)(x) \sum_{k\geqslant 0} 2^{kN} \sup_y |\eta^{(k)}(y)(1+|y|)^{N+n+1}| \\
&\leqslant C'' M^{**}_{N,\phi}(f)(x).
\end{aligned}$$

Em (*), usamos

$$(1+2^k|y|)^N \leqslant (2^k + 2^k|y|)^N = 2^{kN}(1+|y|)^N$$

e a última desigualdade segue do fato de $\eta^{(k)} \in \mathcal{S}$ e de (2.23), com $M = N+1$. Portanto,

$$M_{\mathcal{F}}(f)(x) \doteq \sup_{\psi \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}} M_\psi f(x) \leqslant C'' M^{**}_{N,\phi}(f)(x),$$

com C'' independente de ψ pela observação (2.2.32) e, além disso, pelo Lema 2.2.30, com $N > \dfrac{n}{p}$, obtemos

$$\|M_{\mathcal{F}}(f)\|_{L^p} \leqslant C'' \left\| M^{**}_{N,\phi}(f) \right\|_{L^p} \leqslant C \left\| M^*_\phi(f) \right\|_{L^p}.$$

□

Agora chegamos ao ponto de passagem na prova de que a propriedade (1), do teorema maximal, implica no controle, em L^p, de $M^*_\phi(f)$ por $M_\phi(f)$, admitindo que $M_\phi(f) \in L^p$ implica $M^*_\phi(f) \in L^p$. Provaremos essa implicação mais adiante no Lema 2.2.42.

Lema 2.2.35. $\left\|M_\phi^* f\right\|_{L^p} \lesssim \|M_\phi f\|_{L^p}$.

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que basta provar

$$M_\phi^* f \leqslant C_q \left[(\mathcal{M}(M_\phi f))^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\ q > 0. \tag{2.25}$$

De fato, admitindo (2.25) e tomando $p > q$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi^* f)^p dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left[\mathcal{M}(M_\phi f)^q\right]^{\frac{p}{q}} dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left[(M_\phi f)^q\right]^{\frac{p}{q}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi f)^p dx,$$

(Lembremos que $\mathcal{M}$ é limitado se $\frac{p}{q} > 1$). Portanto, $\left\|M_\phi^* f\right\|_{L^p} \lesssim \|M_\phi f\|_{L^p}$. Sendo assim, resta-nos provar (2.25). Fixemos $\lambda > 0$ e definamos $F = \left\{x \in \mathbb{R}^n; M_{\mathcal{F}} f(x) \leqslant \lambda M_\phi^* f(x)\right\}$. Podemos supor $\psi \in \mathcal{F} \doteq \{\psi \in \mathcal{S}; \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\psi) \leqslant 1\}_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m}$. Suponhamos $M_\phi^* f \in L^p$ e escrevamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi^* f)^p = \int_F (M_\phi^* f)^p + \int_{F^c} (M_\phi^* f)^p = I + II.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} II &< \frac{1}{\lambda^p} \int_{F^c} (M_{\mathcal{F}} f)^p dx \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\mathcal{F}} f)^p dx \\ &\leqslant \frac{C^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi^* f)^p dx, \ \text{(Lema 2.2.34)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi^* f)^p dx, \ \text{ para } \lambda >> 1 \text{ (suficientemente grande).} \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\phi^* f)^p dx \leqslant 2 \int_F (M_{\mathcal{F}} f)^p dx,$$

ou seja, basta mostrar (2.25) para $x \in F$. Para tanto, ponhamos $f(x,t) = (f * \phi_t)(x)$ e $f^*(x) = \sup_{|y-x|<t} |f(y,t)| \doteq M_\phi^* f(x)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe $(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tal que $f(y,t) \geqslant \frac{1}{2} f^*(x)$. Seja $r > 0$ (a escolher) e consideremos $B(y; rt)$. Se $x' \in B(y; rt)$, pela desigualdade do valor médio, temos

$$|f(x',t) - f(y,t)| \leqslant rt \sup_{|z-y|<rt} |\nabla_z f(z,t)|. \tag{2.26}$$

Porém, $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}(z,t) = \dfrac{1}{t}\left(f * (\phi^{(i)})_t\right)(z)$, com $\phi^{(i)} = \dfrac{\partial \phi}{\partial z_i}$, $i = 1, \cdots, n$. Se $z = x - h_t$, com

$|h_t| < (1+r)t$, seja T_h o transladado de h, isto é, $T_h f(\cdot) = f(\cdot - h)$; então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z_j}(x-h_t,t) &= \frac{1}{t}\left(f*(\phi^{(i)})_t\right)(x-h_t) \\
&= \frac{1}{t}\cdot T_{h_t}\left(f*\phi_t^{(i)}\right)(x) \\
&= \frac{1}{t}\left(f*T_{h_t}(\phi_t^{(i)})\right)(x).
\end{aligned}$$

Consideremos a família limitada de $\mathcal{S}$, $\left\{\phi^{(i)}(x-h); 1 \leqslant i \leqslant n, |h| \leqslant 1+r\right\} = \left\{T_h\phi^{(i)}\right\}$ a qual é um compacto. Logo, existe c tal que $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(T_h\phi^{(i)}) \leqslant c$, $|\alpha|,|\beta| \leqslant m$. Daí, $\{\frac{T_h\phi^{(i)}}{c}\} \subset \mathcal{F}$ e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(z,t) = \frac{c}{t}\left(f*\psi_t\right)(x), \quad \text{com } \psi_t = T_{h_t}\phi_t^{(i)}.$$

Com isso, se $x \in F$, em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}
|f(x',t)-f(y,t)| &\leqslant rt\cdot\frac{c}{c}\frac{1}{t}|f*\underbrace{(T_h\phi^{(i)})_t}_{\psi_t}|(x) \\
&\leqslant c\cdot rM_{\mathcal{F}}(f)(x) \\
&\leqslant c\lambda rM_\psi^*(f)(x) \\
&\leqslant \frac{1}{4}f^*(x),
\end{aligned}$$

para r suficientemente pequeno e $\forall x' \in B(y;rt)$. Além disso, de $|f(y,t)| \geqslant \frac{1}{2}f^*(x)$, temos

$$\begin{aligned}
|f(x',t)| &\geqslant |f(y,t)| - |f(x',t)-f(y,t)| \\
&\geqslant \frac{1}{4}f^*(x) \\
&= \frac{1}{4}M_\psi^*(f)(x), \ \forall\, x' \in B(y;rt).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\int_{B(x;(1+r)t)}|f(x',t)|^q dx' &\leqslant \frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\int_{B(x;(1+r)t)}[M_\phi f(x')]^q dx' \\
&\leqslant \mathcal{M}[(M_\phi f(x))^q].
\end{aligned}$$

Pelo que fizemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\int_{B(x;(1+r)t)}|f(x',t)|^q dx' &\geqslant \frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\int_{B(y;rt)}|f(x',t)|^q dx'\\
&\geqslant \frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\cdot\frac{(f^*(x))^q}{4^q}\int_{B(y;rt)}dx'\\
&\simeq \left(\frac{r}{1+r}\right)^n\cdot\frac{(f^*(x))^q}{4^q},
\end{aligned}$$

em que $\simeq$ significa " $= C\,\bullet$". Notemos que $B(y;rt)\subset B(x;(1+r)t)$.

Portanto,

$$f^*(x)\leqslant\left(\frac{r}{1+r}\right)^{\frac{n}{q}}\mathcal{M}[(M_\phi f(x))^q]^{\frac{1}{q}},$$

ou seja,

$$M_\phi^* f(x)\leqslant C_q\mathcal{M}[(M_\phi f(x))^q]^{\frac{1}{q}},$$

e, com isso, concluímos o resultado desejado. □

Destacamos que já provamos as equivalências entre (1) e (2) do teorema maximal admitindo que $M_\phi(f)\in L^p$ implica em $M_\phi^*(f)\in L^p$. Essa implicação será provada mais adiante, conforme Lema 2.2.42.

Afirmação 2.2.36. (2) implica em (5) e (1).

Vamos mostrar que $M_{\mathcal{F}}(f)\in L^p$ implica $M_\phi(f)\in L^p$, $\forall\ \phi\in\mathcal{S}$, $\displaystyle\int\phi\neq 0$. Com efeito, seja $\mathcal{F}\doteq\left\{\phi\in\mathcal{S};|x^\alpha\partial_x^\beta\phi|\leqslant 1,\ |\alpha|+|\beta|\leqslant N\right\}$. Dada $\phi\in\mathcal{S}$ tal que $\displaystyle\int\phi\neq 0$, consideremos $c=1+\displaystyle\max_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N}\left\{|x^\alpha\partial_x^\beta\phi|\right\}$ e definamos $\tilde{\phi}=\dfrac{\phi}{c}\in\mathcal{F}$. Daí,

$$|(\phi_t * f)(x)| = c\left|\left(\frac{\phi}{c}\right)_t * f\right|(x)\leqslant cM_{\mathcal{F}}(f)(x),$$

ou seja,

$$M_\phi(f)(x)\leqslant cM_{\mathcal{F}}(f)(x).$$

Logo, se $M_{\mathcal{F}}f\in L^p$, temos $M_\phi f\in L^p$, isto é, (2) implica em (5). É claro que (1) segue de (5).

Agora, provemos que (1) implica em (3) e (4).

Suponhamos (1) do teorema maximal. Lembremos que $f\in\mathcal{S}'_L$ se, e somente se, $f*\psi\in L^\infty$,

$\forall\, \psi \in \mathcal{S}$ e que $M^*_\psi f(x) \doteq \sup\limits_{|y-x|<t} |(f * \psi_t)(y)|$. Temos

$$|(f * \psi_t)(x)|^p \leqslant (M^*_\psi f(y))^p \quad \forall y \in B(x;t)$$

e integrando em $B(x;t)$, obtemos

$$ct^n|(f * \psi_t)(x)|^p = \int_{B(x;t)} |(f * \psi_t)(x)|^p dy \leqslant \int_{B(x;t)} [M^*_\psi f(y)]^p dy.$$

Logo,

$$|(f * \psi_t)(x)| \leqslant c' t^{-np} \left\| M^*_\psi f \right\|^p_{L^p}.$$

No entanto, notemos que $f * \psi = f * \psi_1$ que está em L^∞. Como $\psi \in \mathcal{S}$ é qualquer, concluímos que $f \in \mathcal{S}'_L$.

Seja $P(x) = \dfrac{C_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ o núcleo de Poisson em $\mathbb{R}^{n+1}_+$ e $P_t(x) = t^{-n}P(\frac{x}{t})$. Pelo que vimos, a convolução $(f * P_t)(x)$ está bem definida. Sabemos que $|D^\beta P(x)| \leqslant C_\beta |x|^{-n-1-|\beta|}$, $|\beta| > 0$. Consideremos $u^\perp(x) = \sup\limits_{t>0} |(f * P_t)(x)|$.

Afirmação 2.2.37. (1) implica em (3). Se $0 < p \leqslant 1$, admitamos, por instante, o seguinte lema:

Lema 2.2.38. *Podemos escrever $P(x) = \sum\limits_k 2^{-k}\phi^{(k)}_{2^k}$, com $\left\{\frac{\phi^{(k)}}{c}\right\} \subset \mathcal{F}$, c independente de k.*

Como a aplicação $s \mapsto s^p$ é subaditiva para $0 < p \leqslant 1$, temos

$$|f * P_t(x)|^p \leqslant \sum_k c^p 2^{-kp} |f * (c^{-1}\phi^{(k)}_{2^k t})(x)|^p \leqslant c^p \left(\sum_k 2^{-kp}\right) [M_\mathcal{F} f(x)]^p.$$

Integrando, obtemos

$$\left\| u^\perp \right\|^p_{L^p} \leqslant c \left\| M_\mathcal{F} f \right\|^p_{L^p}.$$

Portanto, $u^\perp \in L^p$, para $0 < p \leqslant 1$.

Agora, provaremos o Lema 2.2.38. Escolha $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi = 1$ em $B(0; \frac{1}{2})$ e $supp(\phi) \subset B(0;1)$. Como antes,

$$1 = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)\right)$$

e

$$P(x) = \underbrace{P(x)\phi(x)}_{\phi^0(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(x)\left[\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)\right]}_{2^{-k}\phi^{(k)}_{2^k}(x)}.$$

Queremos que

$$2^{-k} \cdot \frac{\phi^{(k)}(2^{-k}x)}{2^{nk}} = P(x)\left[\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)\right],$$

ou seja, definamos

$$\phi^{(k)}(x) = 2^{(n+1)k} P(2^k x)\left[\phi(x/2) - \phi(x)\right].$$

Queremos mostrar que

$$\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\phi^{(k)}) \leqslant C_{\alpha,\beta}, \tag{2.27}$$

com $C_{\alpha,\beta}$ independente de k. Notemos que $supp(\phi^{(k)}) \subset B(0;2)\setminus B(0;\frac{1}{2})$. Logo, $\phi^{(k)} \in \mathcal{S}$ e para calcular (2.27), basta tomarmos $\alpha = 0$. Queremos que $\left\|D^\beta \phi^{(k)}\right\|_{L^\infty} \leqslant C_\beta$.

Para $\beta = 0$,

$$|\phi^{(k)}(x)| \leqslant 2^{(n+1)k}|2^k x|^{-(n+1)} 2\,\|\phi\|_{L^\infty} \leqslant C.$$

Para $|\beta| > 0$, como $|D^\beta P(x)| \leqslant C_\beta |x|^{-n-1-|\beta|}$, temos

$$\begin{aligned}
|D^\beta \phi^{(k)}(x)| &\leqslant 2^{(n+1)k} \sum_{\alpha \leqslant \beta} C_{\alpha,\beta} |D^\alpha[P(2^k x)]||D^{\beta-\alpha}[\phi(x/2) - \phi(x)]| \\
&\leqslant C_\beta 2^{(n+1)k} \sum_{\alpha \leqslant \beta} 2^{k|\alpha|} |(D^\alpha P)(2^k x)| \\
&\leqslant C_\beta.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a prova do Lema 2.2.38.

O caso $p > 1$, segue do Lema 2.2.26.

Afirmação 2.2.39. (1) implica em (4).

Para $p \leqslant 1$, também de modo análogo à primeira parte do lema anterior, temos

$$[u^*(x)]^p = [\sup_{|x-y|<t} |P_t * f|(y)]^p \leqslant \sum_k 2^{-kp} \sup_{|x-y|<2^k t} |\phi^{(k)}_{2^{-k}t} f|(y) \leqslant \sum_k 2^{-kp} M^*_{\phi^{(k)}} f(x).$$

Daí,

$$\|u^*\|^p_{L^p} \leqslant \sum_k 2^{-kp} \left\|M^*_{\phi^{(k)}} f\right\|^p_{L^p} \leqslant C \sum_k 2^{-kp} \|M_{\mathcal{F}} f\|^p_{L^p},$$

ou seja, $u^* \in L^p$.

Afirmação 2.2.40. (3) implica em (1), isto é, para uma função $\phi \in \mathcal{S}$ adequada, vale $\|M_\phi f\|_{L^p} \lesssim \|u^\perp\|_{L^p}$, ou ainda, $M_\phi f(x) \lesssim u^\perp(x) \lesssim u^*(x)$.

(Inicialmente, notemos que a última desigualdade é direta.)

De fato, vamos construir ϕ usando o lema a seguir.

Lema 2.2.41. *Existe $F \in C^\infty([1,\infty)) \cap L^\infty$ tal que*

$$\int_1^\infty F(s)ds \overset{(1)}{=} 1 \ \ e \ \ \int_1^\infty F(s)s^k ds \overset{(2)}{=} 0, \ \ k = 1, 2, \cdots .$$

Demonstração. Se $z \in \mathbb{C} - \{[1,\infty) \times \{0\}\}$, então $z - 1 \in \mathbb{C}\backslash\{[0,\infty) \times \{0\}\}$, e escrevendo $z - 1 = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, temos $(z-1)^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\theta}{4}}$ (para algum ramo fixo).

Seja $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Logo, $iw = \overline{w}$. Consideremos $G(z) \doteq e^{-w(z-1)^{\frac{1}{4}}}$. Para $z = s + it$, $t > 0$, definamos

$$F(s) = C \lim_{t\to 0^+} Im\left\{\frac{G(z)}{z}\right\} = C Im\left\{\frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s}\right\}.$$

Temos

$$\left|e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}\right| = \left|e^{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(s-1)^{\frac{1}{4}}}\right| = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(s-1)^{\frac{1}{4}}} \approx e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}s^{\frac{1}{4}}},$$

para s grande. Isso mostra que F tem decrescimento exponencial. Pelo Teorema de Cauchy (ver Ahlfors, [1]),

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{G(z)}{z} dz = G(0)2\pi i.$$

Fazendo $R \to \infty$ ($\Rightarrow r \to \infty$) e $\epsilon \to 0$, obtemos

$$|G(z)| = e^{Re[-w(z-1)^{\frac{1}{4}}]} = e^{-[\frac{\sqrt{2}}{2} r^{\frac{1}{4}}\cos(\frac{\theta}{4}) + r^{\frac{1}{4}} sen(\frac{\theta}{4})]} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \ 0 < \frac{\theta}{4} < \frac{\pi}{2},$$

$$2\pi G(0) = \int_1^\infty \frac{e^{-iw(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s} ds - \int_1^\infty \frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} ds.$$

Mas $e^{i\frac{\pi}{2}} = i \Rightarrow -we^{-\frac{\pi}{2}} = -iw = -\overline{w}$. Daí,

$$\int_1^\infty \frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} ds = \int_1^\infty \frac{e^{-\overline{w}(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s} ds = \overline{\int_1^\infty \frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s} ds},$$

isto é, $2\pi i e^{-1} = 2i \displaystyle\int_1^\infty Im\left\{\frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s}\right\} ds$. Tomando $C = \pi^{-1}e$, temos que F satisfaz (1) do lema, pois $\int_1^\infty F(s)ds = C\int_1^\infty Im\left\{\frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s}\right\} ds = C\pi e^{-1}$.

Uma conta inteiramente análoga, usando o Teorema dos Resíduos (ver Alhfors, [1]), nos dá

$$\int_1^\infty s^k Im\left\{\frac{e^{-w(s-1)^{\frac{1}{4}}}}{s}\right\} ds = Res\left(z^{k-1}G(z)\right)\Big|_{z=0} = 0,$$

mostrando (2) do lema. Agora vamos usar isso para a construção de ϕ:

$$\phi(x) = \int_1^\infty F(s)P_s(x)ds = \int_1^\infty F(s)\frac{P(\frac{x}{s})}{s^n}ds.$$

A função $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ possui expansão de Taylor em $t = 0$ dada por

$$\sum_{k\leqslant N} a_k t^k + t^{N+1}r(t), \quad r \in L^\infty.$$

Disso,

$$\begin{aligned} P_t(x) &= \frac{C_n t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{C_n t}{|x|^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\left(\frac{t}{|x|}\right)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= C_n \sum_{k\leqslant N} \frac{a_k t^{k+1}}{|x|^{k+n+1}} + \frac{C_n}{|x|^{N+n+2}} \cdot t^{N+2}r(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leqslant \int_1^\infty |F(s)|\frac{C_n}{|x|^{N+n+2}} s^{N+2}|r(s)|ds \\ &\leqslant \frac{C_n}{|x|^{N+n+2}}\int_1^\infty |F(s)|s^{N+2}ds \\ &\leqslant \frac{C_{n,N}}{|x|^{N+n+2}}. \end{aligned}$$

Então

$$|\phi(x)| \leqslant C_N|x|^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, mostra-se que $D^\alpha\phi$ satisfaz a "mesma estimativa". Portanto, $\phi \in \mathcal{S}$. Agora que construímos ϕ, observemos que

$$(1)\ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_1^\infty F(s)P_s(x)ds \right) dx = \int_1^\infty F(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_s(x)dx \right) ds = 1$$

$$(2) \qquad \phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t^n}\int F(s)P_s\left(\frac{x}{t}\right) ds = \int F(s)P_{st}(x)ds,$$

pois $(P_s)_t(x) = (P_{st})(x)$.

Das observações (1) e (2) acima, temos

$$\begin{aligned}
(\phi_t * f)(x) = \int \phi_t(y)f(x-y)dy &= \int_Y \left(\int_1^\infty F(s)P_{st}(y)ds \right) f(x-y)dy \\
&\overset{Fubini}{=} F(s) \int \phi_t(y)f(x-y)dy \\
&= \int_1^\infty F(s) \left(\int_Y F(s)P_{st}(y)f(x-y)dy \right) ds \\
&= \int_1^\infty F(s)(P_{st} * f)(x)ds.
\end{aligned}$$

Daí,

$$|\phi_t * f(x)| \leqslant u^\perp \int_1^\infty |F(s)|ds$$

e, portanto,

$$M_\phi f(x) \leqslant Cu^\perp(x),$$

com $C = \displaystyle\int_1^\infty |F(s)|ds$, provando o lema. □

Finalmente, para completar a prova do teorema maximal, voltamos ao ponto deixado em aberto anteriormente, ou seja, que a finitude de $\|M_\phi(f)\|_{L^p}$ implica na de $\left\|M_\phi^*(f)\right\|_{L^p}$. Em geral, a passagem de uma desigualdade como no Lema 2.2.35 é relativamente simples; entretanto, aqui as coisas são um pouco complicadas, conforme veremos no lema a seguir.

Lema 2.2.42. *Se $M_\phi(f) \in L^p$, então $M_\phi^*(f) \in L^p$.*

Para provar o lema, consideremos $0 < \epsilon \leqslant 1$ e definamos as seguintes funções maximais com peso

$$
\begin{aligned}
{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) &= \sup_{|x-y|<t<\epsilon^{-1}} \left\{ |f * \phi_t(y)| \cdot \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \right\} \\
M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x) &= \sup_{\psi \in \mathcal{F}} \left({}^{*}M_{\psi}^{\epsilon,L} f(x) \right) \\
{}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) &= \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^n \\ |x-y|<t<\epsilon^{-1}}} \left\{ |f * \phi_t(y-z)| \cdot \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \cdot \left(1 + \frac{|z|}{t}\right)^{-N} \right\}.
\end{aligned}
$$

A idéia aqui é mostrar que

$$
\left\| M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p} \lesssim \left\| {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p} \lesssim \left\| {}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p} \lesssim \| M_{\phi}(f) \|_{L^p},
$$

para L, N escolhidos adequadamente. Consequentemente, como veremos, tomando $\epsilon \to 0$, o lema estará provado.

Observação 2.2.43. Se $f \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$, então $f * \varphi$ cresce, no máximo, polinomialmente, pois se $f \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in C_c^\infty$, temos

$$
|\langle f, \psi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha \psi \|_{L^\infty}, \ \forall \ \psi \in C_c^\infty.
$$

Portanto, existe $L = L(f)$ (suficientemente grande) tal que ${}^{*}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f) \in L^p$, para cada $\epsilon > 0$. Fixemos esse $L = L(f)$.

Afirmação 2.2.44. $M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x) \leqslant C\, {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)$.

De fato, sejam $\psi \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x-y| < t < \epsilon^{-1}$. Pelo Lema 2.2.31, temos

$$
\begin{aligned}
I &\doteq |f * \psi_t(y)| \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \\
&\leqslant \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \sum_k \int |f * \phi_{t2^{-k}}(y-z)| t^{-n} \left| \eta^{(k)}\left(\frac{z}{t}\right) \right| \cdot \frac{(t2^{-k})^{L-L}}{(\epsilon + t2^{-k} + \epsilon|y-z|)^{L-L}} \left(1 + \frac{|z|}{t2^{-k}}\right)^{-N+N} dz \\
&\leqslant {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \sum_k \int \frac{(t2^{-k})^{-L}(1 + \frac{|z|}{t2^{-k}})^N}{(\epsilon + t2^{-k} + \epsilon|y-z|)^{-L}} \cdot t^{-n} \left| \eta^{(k)}\left(\frac{z}{t}\right) \right| dz.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{(\epsilon + t2^{-k} + \epsilon|y-z|)^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} &\leqslant \frac{(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon+t}|y+z|)^L}{(1+\frac{\epsilon}{\epsilon+t}|y|)^L} \\
&\leqslant \frac{(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon+t}|y| + \frac{\epsilon}{\epsilon+t}|z|)^L}{(1+\frac{\epsilon}{\epsilon+t}|y|)^L} \\
&\overset{\star}{\leqslant} \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon+t}|z|\right)^L \\
&\leqslant \left(1 + \frac{|z|}{t}\right)^L.
\end{aligned}
$$

Em $\star$ usamos a relação $1 + a + b \leqslant (1+a)(1+b)$, com $a, b \geqslant 0$.

Assim, em (I), fazendo mudança de variável, obtemos

$$
\begin{aligned}
I &\leqslant {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) \sum_k 2^{k(L+N)} \int \underbrace{(1+|z|)^L (1+2^k|z|)^N |\eta^{(k)}(z)|}_{semi-normas\, de\, S} dz \\
&\leqslant C\ {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) \sum_k 2^{k(L+N)} 2^{-kM} \\
&\leqslant \tilde{C}\ {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x) &\doteq \sup_{|x-y|<t<\epsilon^{-1}} \left\{ |f * \phi_t(y)| \cdot \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \right\} \\
&\leqslant \tilde{C}\ {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)
\end{aligned}
$$

e, consequentemente,

$$
M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x) \leqslant \tilde{C}\ {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x).
$$

Afirmação 2.2.45. Para N suficientemente grande, vale

$$
\left\| {}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p} \leqslant C \left\| {}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p}.
$$

Para provar essa afirmação, usamos a idéia da demonstração do Lema 2.2.30.

Temos

$$
\begin{aligned}
I &\doteq \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y-z|)^{Lp}}\left(1+\frac{|z|}{t}\right)^{-Np}\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|z|\leqslant 2^k t}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lp}}\left(1+\frac{|z|}{t}\right)^{-Np}\right\}\\
&+\sup_{|z|\leqslant t}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y-z|)^{Lp}}\left(1+\frac{|z|}{t}\right)^{-Np}\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}2^{(N-Nk)p}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|z|\leqslant 2^k t}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y-z|)^{Lp}}\right\}\\
&+\sup_{|z|\leqslant t}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lp}}\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}2^{(N-Nk)p}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|z|\leqslant 2^k t}\left\{|f*\phi_t(y-z)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y-z|)^{Lp}}\right\}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}2^{(N-Nk)p}\sup_{2^{k-1}t\leqslant|y-x|\leqslant 2^k t}\left\{|f*\phi_t(y)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lp}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left[{}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}2^{-(k-1)pN}\sup_{|y-x|<\,2^k t<\,\epsilon^{-1}}\left\{|f*\phi_t(x)|^p\frac{t^{Lp}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lp}}\right\}.
$$

De modo análogo ao que fizemos no Lema 2.2.30, agora com N grande suficiente, obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\left[{}^{**}M_{N,\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}\left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p\,dx,
$$

com L suficientemente grande; concluindo a prova da afirmação.

Afirmação 2.2.46. $\left\|{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)\right\|_{L^p} \leqslant C_L\,\|M_\phi(f)\|_{L^p}$.

Com efeito, analogamente à prova do Lema 2.25, basta provar

$$
{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f) \leqslant C\,[\mathcal{M}(M_\phi f)^q]^{\frac{1}{q}}\ \ \forall q>0,
$$

pois daí, tomando $q<p$, obtemos

$$
\int\left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)\right]^p \lesssim \int[\mathcal{M}(M_\phi(f))^q]^{\frac{p}{q}} \lesssim \int[M_\phi(f)]^p.
$$

Logo,

$$\left\| {}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f) \right\|_{L^p} \lesssim \|M_{\phi}(f)\|_{L^p}.$$

Análogo ao que fizemos antes, com $F = \left\{x; M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x) \leqslant \lambda\, {}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right\}$, λ a escolher, escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx = \int_F \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx + \int_{F^c} \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx.$$

Porém, pelas afirmações 2.2.44 e 2.2.45, temos

$$\begin{aligned}
\int_F \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx &\leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{F^c} \left[M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} \left[{}^{*}M^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx,
\end{aligned}$$

para $\lambda \gg 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx &\leqslant 2\int_F \left[{}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{F^c} \left[M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^p dx,
\end{aligned}$$

ou seja, basta mostrar a idéia para $x \in F$. Se $x \in F$, existe $(y,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, com $|x-y| < t$, tal que

$$|f * \phi_t(y)| \frac{t^L}{(\epsilon + t + \epsilon|y|)^L} \geqslant \frac{1}{2}\, {}^{*}M_{\phi}^{\epsilon,L} f(x). \tag{2.28}$$

Para $r > 0$, consideremos a bola $B(y; rt) \subset B(x; (1+r)t)$, pois $|x-y| < t$. Se $x' \in B(y; rt)$, $x' = y + \rho e_j$, com $|\rho| < r$. Como no Lema 2.25, supondo $\psi \in \mathcal{F}$, temos

$$|f(x',t) - f(y,t)| \leqslant rt \left|\frac{\partial f(z',t)}{\partial z_j}\right| = r|f * \psi_t(x)| \tag{2.29}$$

e, claramente,

$$|f(y,t)| \leqslant |f(x',t) - f(y,t)| + |f(x',t)|. \tag{2.30}$$

Combinando (2.28), (2.30) e (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}f(x) &\leqslant |f(y,t)|\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^L} \\
&\leqslant |f(x',t)-f(y,t)|\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^L}+|f(x',t)|\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^L} \\
&\leqslant r\,|f*\psi_t(x)|\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^L}+I \\
&\leqslant C_L\,r|f*\psi_t(x)|\cdot\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|x|)^L}+I \\
&\leqslant C_L r\,M_{\mathcal{F}}^{\epsilon,L}(f)(x)+I \\
&\leqslant C_L r\,\lambda\,{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)+I \\
&\leqslant \frac{1}{4}\,{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)+I,
\end{aligned}$$

para r suficientemente grande, em que

$$I \doteq |f(x',t)|\cdot\frac{t^L}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^L}\geqslant\frac{1}{4}\,{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x),\ \ \forall x'\in B(y;rt). \tag{2.31}$$

Por outro lado, integrando (2.31) em relação a x', segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x;(1+r)t|}\int_{B(y;rt)}|f(x',t)|^q\frac{t^{Lq}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lq}}dx' &\geqslant \frac{1}{|B(x;(1+r)t|}\int_{B(y;rt)}4^{-q}[{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)]^q dx' \\
&\geqslant \frac{r^n\,t^n}{4^q(1+r)^n t^n}[{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)]^q \\
&= \frac{r^n}{4^q(1+r)^n}[{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)]^q.
\end{aligned}$$

Da definição de $M_\phi(f)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B(x;(1+r)t)|}\int_{B(y;rt)}|f(x',t)|^q\frac{t^{Lq}}{(\epsilon+t+\epsilon|y|)^{Lq}}dx' &\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_{B(y;rt)}[M_\phi(f)(x')]^q dx' \\
&\leqslant C\mathcal{M}[M_\phi(f)(x)]^q.
\end{aligned}$$

Combinando essas duas últimas estimativas, obtemos

$$\frac{r^n}{4^q(1+r)^n}\left[{}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\right]^q\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_{B(y;rt)}[M_\phi(f)(x')]^q\,dx'\leqslant C\mathcal{M}[M_\phi(f)]^q(x),\ \ \forall q>0.$$

Portanto,

$${}^{*}\!M_{\phi}^{\epsilon,L}(f)(x)\leqslant C_q[\mathcal{M}(M_\phi f)^q(x)]^{\frac{1}{q}},\ \ \forall\ q>0.$$

Com isso, finalmente, completamos a prova do Teorema da Caracterização Maximal de H^p.

Observações: Para $\phi \in C_c^\infty$, $\phi \geqslant 0$, $supp(\phi) \subset B(0;1)$ e $\displaystyle\int \phi = 1$, definimos

$$\|f\|_{H^p} \doteq \|M_\phi f\|_{L^p}, \;\; 0 < p \leqslant \infty.$$

Vimos que

$$\|M_\phi f\|_{L^p} \sim \left\|M_\phi^* f\right\|_{L^p} \sim \|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p},$$

em que $x \sim y$ significa que existem constantes positivas c_1, c_2 satisfazendo $c_1 x \leqslant y \leqslant c_2 x$. Em particular, se $p > 1$, então $L^p = H^p$, isto é, H^p é um espaço de Banach se $p > 1$.

Para $p = 1$, $f \mapsto \|M_\phi f\|_{L^1}$ é uma norma, pois M_ϕ é sublinear.

Com efeito,

$$\begin{aligned} M_\phi(f+g)(x) &= \sup_{t>0} |(f+g) * \phi_t|(x) \\ &\leqslant \sup_{t>0} |f * \phi_t|(x) + \sup_{t>0} |g * \phi_t|(x) \\ &= M_\phi f(x) + M_\phi g(x). \end{aligned}$$

Ainda, como $\|f\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{H^1}$, segue que se $\|f\|_{H^1} = 0$, então $f = 0 \ q.t.p. \, x$.

Além disso, podemos mostrar, usando transformada de Riesz, que para $p = 1$, H^1 é completo.

Para $p < 1$, $\|f\|_{H^p}$ não é norma, porém podemos definir a distância

$$d(f,g) \doteq \|f - g\|_{H^p}^p. \tag{2.32}$$

Notemos que $\|.\|_{H^p}^p$ é subaditiva.

Além disso, se $\|f\|_{H^p} = 0$, então f é a distribuição nula. De fato, por hipótese, $\|M_{\mathcal{F}} f\|_{L^p} = 0$ e daí $M_{\mathcal{F}} f(x) = 0 \ q.t.p. \, x$, ou seja, para toda $\psi \in \mathcal{F}$, temos $M_{\mathcal{F}} f(x) = 0 \ q.t.p. \, x$ que implica em para toda $\psi \in \mathcal{F}$ e para todo $t > 0$, $t^{-n} \left\langle f, \psi(\frac{\cdot - x}{t}) \right\rangle = 0 \ q.t.p. \, x$. Então, $\langle f, \psi(\cdot - x) \rangle = 0 \ q.t.p. \, x$. Seja $x_n \to 0$ tal que $\langle f, \psi(\cdot - x_n) \rangle = 0$. Da continuidade de f, segue $\langle f, \psi(\cdot) \rangle = 0$, pois $\psi(\cdot - x_n) \to \psi(\cdot)$ em $\mathcal{S}'$. Portanto, $\langle f, \psi \rangle = 0$, $\forall\, \psi \in \mathcal{F}$. Se $\varphi \in \mathcal{S}$ é qualquer, então $\epsilon\varphi \in \mathcal{F}$, para um certo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, $\langle f, \psi \rangle = \epsilon^{-1} \langle f, \epsilon\varphi \rangle = \epsilon^{-1} \cdot 0 = 0$, isto é, f é a distribuição nula.

A métrica em 2.32 define a topologia de H^p, $p < 1$, o qual é um espaço métrico completo com essa distância. Uma prova desse resultado pode ser encontrada na referência [10].

Proposição 2.2.47. *Se $f_j \to 0$ em H^p, então $f_j \to 0$ em $\mathcal{S}'$, isto é, a topologia em H^p é mais fina do que em $\mathcal{S}'$.*

Demonstração. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{S}$, consideremos $\varphi_\tau(x) = \varphi(x-\tau) \doteq T_\tau\varphi(x), \quad |\tau| \leqslant 1$. Logo, $\{T_\tau\varphi\}_{|\tau|\leqslant 1}$ é um conjunto limitado de $\mathcal{S}$. Portanto, $\epsilon\{T_\tau\varphi\}_{|\tau|\leqslant 1} \subset \mathcal{F}$ para algum $\epsilon > 0$. Agora notemos que $f * \varphi_t(x) = \left\langle f, \check{T}_x\varphi \right\rangle$ e daí $\left\langle f, \check{\check{\psi}} \right\rangle = f * \check{\psi}(0)$.
Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
|\langle f_j, \varphi\rangle| &= |\langle f_j, T_{-\tau}T_\tau\varphi\rangle| \\
&= |\langle T_\tau f_j, T_\tau\varphi\rangle| \\
&= \left|(T_\tau f_j) * (\check{T}_\tau\varphi)\right|(0) \\
&= \left|T_\tau[f_j * (\check{T}_\tau\varphi)]\right|(0) \\
&= \left|[f_j * (\check{T}_\tau\varphi)]\right|(-\tau) \\
&\leqslant \epsilon^{-1}M_{\mathcal{F}}f_j(-\tau).
\end{aligned}
$$

Elevando a p e integrando para $\tau \in B(0;1)$, obtemos

$$
|\langle f_j, \varphi\rangle|^p \leqslant \frac{1}{|B(0;1)|\epsilon^p}\int_{B(0;1)} [M_{\mathcal{F}}f_j]^p(-\tau)d\tau \leqslant C\,\|f_j\|_{H^p}^p \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}.
$$

Portanto, $f_j \to 0 \in \mathcal{S}'$. □

Observações:

(1) $\|.\|_{H^p}$ é invariante por translações. De fato, basta notar que

$$
(T_\tau f) * \phi_t = T_\tau(f * \phi_t) \Rightarrow M_\phi(T_\tau f) = T_\tau(M_\phi)f.
$$

(2) **Compacidade fraca da bola unitária:** Se $f_n \in H^p$ com $\|f_n\|_{H^p} \leqslant A$, então existe um $f \in H^p$ e uma subsequência f_{n_k} tal que $f_{n_k} \to f$ no sentido das distribuições (ver referência [16]).

A proposição seguinte será muito usada no próximo capítulo.

PROPOSIÇÃO 2.2.48. *Seja $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0;r))$ tal que $|D^\alpha\varphi| \leqslant r^{-n-|\alpha|}$, $\forall\ |\alpha| \leqslant N$ (N definido da família $\mathcal{F}$). Então*

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant M_{\mathcal{F}}f(x_0). \tag{2.33}$$

Tal φ é chamada **concentrada** em $B(x_0;r)$.

Demonstração. Com efeito, considerando $\psi(x) \doteq r^n\varphi(rx - x_0)$, obtemos $supp(\psi) \subset B(0;1)$ e $|D^\alpha\psi(x)| = r^{n+|\alpha|}|D^\alpha\varphi(rx - x_0)| \leqslant 1 \forall\, |\alpha| \leqslant N$. Então $\psi \in \mathcal{F}$, pois

$$\left\|x^\beta D^\alpha\psi\right\|_{L^\infty(B(0;1))} \leqslant \|D^\alpha\psi\|_{L^\infty} \leqslant 1,\ \forall\ \beta \text{ e } \forall\ |\alpha| \leqslant N.$$

Temos

$$|f * \psi_t|(x_0) \leqslant M_{\mathcal{F}}f(x_0),\ \forall\ t > 0. \tag{2.34}$$

Em particular, para $t = r$, temos $\psi_r(z) = \breve{\varphi}(x_0 - z) = (T_{x_0}\breve{\varphi})(z)$. Daí,

$$f * \psi_r(x_0) = f * (T_{x_0}\breve{\varphi})(x_0) = T_{x_0}(f * \breve{\varphi})(x_0) = f * \breve{\varphi}(x_0 - x_0) = f * \breve{\varphi}(0) = \langle f,\varphi\rangle.$$

Usando isso e por (2.34), obtemos

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant M_{\mathcal{F}}f(x_0).$$

□

No próximo capítulo apresentamos o Teorema da Decomposição Atômica de H^p.

Capítulo

3

Decomposição Atômica de H^p

Os resultados aqui expostos foram retirados e adaptados dos livros do Stein [16] e [17]. Iniciamos esse capítulo apresentando duas decomposições auxiliares (a de Whitney e a de Calderón-Zygmund Generalizada), as quais são de extrema importância para o decomposição atômica de H^p. A decomposição de um dado conjunto em uma união disjunta de cubos (ou bolas) é uma ferramenta fundamental na teoria descrita neste capítulo. Já usamos esse tipo de técnica no Lema da cobertura de Vitali, no capítulo anterior. Essa idéia foi introduzida pela primeira vez por Whitney e formulada como se segue.

A Decomposição de Whitney, essencialmente, nos diz que dado um conjunto não vazio e fechado $F \subset \mathbb{R}^n$, seu complementar é a união de uma sequência de cubos Q_k, cujos interiores são mutualmente disjuntos e cujos diâmetros são proporcional à distância deles a F.

Observação 3.0.49. Por cubos entendemos cubos fechados, cujas faces são paralelas aos planos coordenados e dois cubos serão "disjuntos" se seus interiores forem disjuntos.

3.1 Decomposições Auxiliares

Teorema 3.1.1 (Decomposição de Whitney)**.** *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então existe uma coleção de cubos $\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ dois a dois "disjuntos" tais que*

(1) $\Omega = F^c = \bigcup_k Q_k$;

(2) $c_1 diam(Q_k) \leqslant d(Q_k, F) \leqslant c_2 diam(Q_k)$.

Nesse caso, dizemos que $diam(Q_k)$ e $d(Q_k, F)$ são comparáveis, e denotamos isso por $diam(Q_k) \sim d(Q_k, F)$.

Demonstração. Sejam $\Omega_k \subset \Omega, k \in \mathbb{Z}$, dados por $\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n; c2^{-k} \leqslant d(x,F) \leqslant c2^{-k+1}\right\}$, com $c > 0$ a escolher, $\mathbb{M}_0$ a malha de cubos unitários com vértices em $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{M}_k = 2^{-k}\mathbb{M}_0, k \in \mathbb{Z}$. Geometricamente, temos

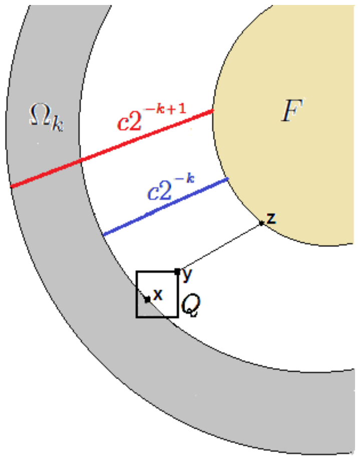

Figura 3.1: Decomposição de Whitney

Consideremos $\mathcal{F}_0 = \{Q \in \mathbb{M}_k; Q \cap \Omega_k \neq \varnothing,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Para $x \in \Omega_k \cap Q$ e $y \in Q \in \mathcal{F}_0$, temos

$$d(x,F) \leqslant d(x,y) + d(y,F) \leqslant diam(Q) + d(Q,F).$$

Logo,

$$d(Q,F) \geqslant d(x,F) - diam(Q) \geqslant c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k} = (c - \sqrt{n})2^{-k} \geqslant c_1\sqrt{n}2^{-k},$$

com c_1, c a escolher. Por outro lado,

$$d(Q,F) \leqslant d(x,F) \leqslant c^2 - k + 1 \leqslant c_2\sqrt{n}2^{-k}.$$

Agora, basta tomar $c = 2\sqrt{n}, c_1 = 1$ e $c_2 = 4$. Com isso, (1) é satisfeito e para obter os cubos dois a dois disjuntos, basta usar o axioma da escolha. □

A seguir, apresentamos a Decomposição de Calderón-Zygmund generalizada, a qual será fortemente usada mais adiante. Essencialmente, dada uma função f, queremos decompor f como $f = g + b$, sendo g uma função “good” e b uma função “bad”.

TEOREMA 3.1.2 (Decomposição de Calderón-Zygmund Generalizada). *Seja* $f \in L^1_{loc} \bigcap H^p$ *e* λ *fixo. Então existe uma decomposição* $f = g + b,\ b = \sum b_k$ *e uma coleção de cubos* Q_k^s *tal que*

(1) $g \in L^\infty,\ |g| \leqslant C\lambda$;

(2) $supp(b_k) \subset Q_k^s$ *e* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} [M_\phi b_k]^p \leqslant C \int_{Q_k^s} [M_{\mathcal{F}} f]^p$;

(3) $\{Q_k^s\}$ *tem a propriedade da interseção limitada e* $\displaystyle\bigcup_k Q_k^s = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathcal{F}}(f)(x) > \lambda\}$.

Demonstração. Notemos que $\{x \in \mathbb{R}^n; M_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda\} \subsetneq \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, pois $M_{\mathcal{F}} f$ é uma semi-contínua inferiormente.

Primeiramente, vamos provar (3). Pela decomposição de Whitney, podemos escrever

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; M_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda\} = \bigcup_k Q_k,\ Q_k = Q(x_k, l_k),$$

com $l_k \sim dist(Q_k, F)$, em que $F = \Omega^c$.

Para $0 < a < s$ fixos, consideremos $Q_k^a = Q(x_k, (1+a)l_k)$ e $Q_k^s = Q(x_k, (1+s)l_k)$. Observemos que $Q_k \subset Q_k^a \subset Q_k^s$. Se s for suficientemente pequeno, todo ponto de Ω pertence a, no máximo, $N = 2^n$ cubos $\{Q_k^s\}$, isto é, $\{Q_k^s\}$ possui a propriedade da interseção limitada, e, além disso, $\bigcup_k Q_k^s = \Omega$. Logo, (3) está provado.

Agora, vamos provar (1). Se $y \notin Q_k^s$ e $x \in Q_k^a$, então existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 < \frac{|y-x_k|}{|x-y|} \leqslant c_2$, pois, como função de $(x,y) \in Q_k^a \times ({Q^s}_k)^c$, é limitada e possui ínfimo maior que zero. Observemos que $\frac{|y-x_k|}{|x-y|}$ se aproxima de 1, quando y se afasta de x_k. Escolhamos $0 \leqslant \psi \in C_c^\infty(Q(0,a)),\ \psi \equiv 1$ em $Q = Q(0,1)$ e consideremos $\psi_k(x) = \psi(\frac{x-x_k}{l_k}) \in C^\infty(\Omega)$. Notemos que $supp(\psi_k) \subset Q_k^a$, pois $|x - x_k| \geqslant (1+a)l_k$, ou seja, $\frac{|x-x_k|}{l_k} > 1 + a$ e daí $\psi(\frac{x-x_k}{l_k}) = 0$. Assim,

$$1 \geqslant \psi(x) \doteq \sum_k \psi_k(x) \in C^\infty(\Omega).$$

Portanto, as funções

$$\eta_k(x) \doteq \frac{\psi_k(x)}{\sum_j \psi_j(x)} \in C_c^\infty(Q^a)$$

formam uma partição da unidade de Ω, subordinada à cobertura $\{Q_k^a\}$ e, consequentemente,

$$\sum_k \eta_k(x) = 1.$$

Observemos que η_k satisfaz a desigualdade

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leqslant c_\alpha \, l_k^{-|\alpha|}, \qquad \text{com } c_\alpha \text{ independente de } k.$$

Com efeito, para $|\alpha| = 1$, por exemplo, $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)$, temos

$$|\partial_1 \eta_k(x)| \leqslant \left| \frac{\partial_1 \psi_k}{\psi} \right| + \left| \psi_k \frac{\partial_1 \psi}{\psi^2} \right| \leqslant \tilde{c} \, l_k^{-1} + c \, N \, l_k^{-1} = c_1 \, l_k^{-1}.$$

Para α qualquer, aplicamos o processo de indução e obtemos

$$|D^\alpha \eta_k(x)| \leqslant \|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty} \; l_k^{-|\alpha|}.$$

Além disso, existem $\bar{x}_k \in F = \{x \in \mathbb{R}^n; M_{\mathcal{F}} f(x) > \lambda\}^c$ e $c > 0$ independente de k tais que $B(\bar{x}_k, cl_k) \supset Q_k^a \supset supp(\eta_k)$, pela decomposição de Whitney. Daí, $\dfrac{\eta_k}{cl_k^n}$ está concentrada em $B(\bar{x}_k, cl_k)$. Logo,

$$\frac{1}{|Q_k|} \left| \int f \eta_k \right| = c \left| \left\langle f, \frac{\eta_k}{cl_k^n} \right\rangle \right| \leqslant c' M_{\mathcal{F}} f(\bar{x}) \leqslant c' \lambda. \tag{3.1}$$

Finalmente, vamos construir g e b_k. Definamos $b_k = (f - c_k)\eta_k$, com $c_k = \dfrac{\int f \eta_k}{\int \eta_k}$. Então $\displaystyle\int b_k = 0$ e $supp(b_k) \subset Q_k^a \subset Q_k^s$.

Afirmação 3.1.3. $|c_k| \leqslant c \, \lambda$.

De fato, notemos que

$$\int \eta_k(x) dx \simeq l_k^n, \tag{3.2}$$

isto é, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 l_k^n \leqslant \displaystyle\int \eta_k \leqslant c_2 l_k^n$, pois $\displaystyle\int_{Q_k^a} \eta_k \leqslant |Q_k^a| = (1+a)^n \, l_k^n$ e de $\eta_k\big|_{Q_k} = \dfrac{\psi_k}{\sum_j \psi_j} = \dfrac{1}{\sum_j \psi_j} \geqslant \dfrac{1}{N}$, segue $\displaystyle\int_{Q_k^a} \eta_k \geqslant \int_{Q_k} \eta_k \geqslant \frac{1}{N} l_k^n$. Portanto, por (3.1), (3.2) e como $|Q_k^a| \simeq l_k^n$, obtemos

$$|c_k| \leqslant c' \left| \frac{\int f \eta_k}{l_k^n} \right| \leqslant c \, \lambda,$$

provando a afirmação.

Agora, definamos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \Omega \\ \sum_k c_k \eta_k(x) & \text{se } x \in \Omega \end{cases}$$

Claramente, $g + b = f$, sendo b definida por $b = f - g$.

Se $x \notin \Omega$, $M_{\mathcal{F}} f(x) \leqslant \lambda$ e daí $M_\phi f(x) \leqslant c\, M_{\mathcal{F}} f(x)$. Portanto, $|\phi_t * f(x)| \leqslant M_\phi f(x) \leqslant c\lambda$, $\forall\ t > 0$. Fazendo $t \to 0$, obtemos $|\phi_t * f(x)| \xrightarrow{q.t.p} |g(x)| = |f(x)|$ e, consequentemente, $|g(x)| \leqslant c\lambda$.

Se $x \in \Omega$, pela afirmação anterior, $|g| \leqslant \sum_k |c_k| \eta_k \leqslant c\lambda \sum_k \eta_k = c\lambda$.

Portanto, (1) está provado.

Finalmente, para mostrar a estimativa em (2), isto é, $\int_{\mathbb{R}^n} [M_\phi b_k]^p \leqslant c \int_{Q_k^s} [M_{\mathcal{F}} f]^p$ provaremos que

(a) $M_\phi b_k(x) \leqslant c M_{\mathcal{F}} f(x)$, se $x \in Q_k^s$;

(b) $M_\phi b_k(x) \leqslant c\lambda \dfrac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}}$, se $x \notin Q_k^s$.

Daí, admitindo (a) e (b), se $x \in Q_k^s$, a estimativa seguirá diretamente. Se $x \notin Q_k^s$, para $p > \dfrac{n}{n+1}$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k^s} [M_\phi b_k]^p &\leqslant c^p \lambda^p\, l_k^{(n+1)p} \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k^s} |x - x_k|^{-p(n+1)} dx \\
&\leqslant c^p \lambda^p\, l_k^{p(n+1)} \int_{B(0; \frac{l_k}{2})^c} |x|^{-p(n+1)} dx \\
&= c^p \lambda^p\, l_k^{p(n+1)} \int_{\frac{l_k}{2}}^{\infty} r^{-p(n+1)} r^{n-1} dr \\
&= c^p \lambda^p\, l_k^{p(n+1)} l_k^{-p(n+1)+n} \\
&= c^p \lambda^p\, l_k^n \\
&= c^p \lambda^p \int_{Q_k} 1 \\
&= c^p \int_{Q_k} \lambda^p \\
&\leqslant c^p \int_{Q_k} [M_{\mathcal{F}} f]^p.
\end{aligned}$$

Notemos que $B(0, \frac{l_k}{2})^c \supset \mathbb{R}^n \setminus Q_k^s$ se, e somente se, $B(0, \frac{l_k}{2}) \subset Q_k^s = Q\left(x_k, (1+b)\, l_k\right)$ e

$-p(n+1)+n-1<-1$ se, e somente se, $p>\frac{n}{n+1}$. Portanto, concluíremos

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_k^s}[M_\phi b_k]^p \leqslant C\int_{Q_k^s}[M_{\mathcal{F}}f]^p.$$

Com isso e usando (a), obteremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}[M_\phi b_k(x)]^p dx &\leqslant \int_{Q_k^s}[M_\phi b_k(x)]^p dx+\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_k^s}[M_\phi b_k(x)]^p dx\\
&\leqslant C\int_{Q_k^s}[M_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx + C\int_{Q_k^s}[M_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx\\
&= C'\int_{Q_k^s}[M_{\mathcal{F}}f(x)]^p dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim, resta-nos provar (a) e (b). Para mostrar (a), seja $x\in Q_k^s$. De $b_k=f\eta_k-c_k\eta_k$, temos $M_\phi b_k(x)\leqslant M_\phi(f\,\eta_k)(x)+M_\phi(c_k\,\eta_k)(x)$. Mas

$$\begin{aligned}
M_\phi(c_k\,\eta_k)(x) &\leqslant |c_k|M_\phi(\eta_k)(x)\\
&\leqslant c\,\lambda\sup_{t>0}|\phi_t*\eta_k|(x)\\
&= c\,\lambda\sup_{t>0}\|\phi_t\|_{L^1}\,\|\eta_k\|_{L^\infty}\\
&= c\,\lambda\\
&\leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $t\leqslant l_k$, temos

$$\begin{aligned}
M_\phi(f\,\eta_k)(x) &= \sup_{t>0}|\phi_t*(f\,\eta_k)|(x)\\
&= \sup_{t>0}\left|\int t^{-n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\eta_k(y)f(y)dy\right|\\
&= \sup_{t>0}|\langle f,\varphi\rangle|,
\end{aligned}$$

com $\varphi(y)=t^{-n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\eta_k(y)\in\mathcal{S}$ e $f\in L^1_{loc}\subset\mathcal{S}'$ e $supp(\varphi)\subset B(x,t)$.

Afirmação 3.1.4. A função $\dfrac{\varphi}{c}$ está concentrada em $B(x,t)$, isto é,

$$\left|D^\alpha\frac{\varphi}{c}\right|\leqslant t^{-n-|\alpha|},$$

com c constante. Com efeito,

- $\alpha = 0 : |\varphi| \leqslant \dfrac{c}{t^n}$

- $|\alpha| = 1$:

$$|\partial_j \varphi| \leqslant \frac{c}{t^{n+1}} + \frac{c}{t^n}|\partial \eta_k| \leqslant \frac{c}{t^{n+1}} + \frac{c}{t^n}\frac{c}{l_k} \leqslant \frac{c'}{t^{n+1}}.$$

- $|\alpha| = j$: Para $\beta + \gamma = \alpha$, temos

$$D^\alpha \varphi(y) = t^{-n}\left|D^\beta\left[\phi(\frac{x-y}{t})\right]D^\gamma \eta_k(y)\right| \leqslant \frac{c_\beta}{t^{n+|\beta|}}\frac{c_\gamma}{t^{|\gamma|}}. = \frac{c_\alpha}{t^{n+|\alpha|}},$$

concluindo a afirmação, pela regra de Leibniz.

Portanto, para $t \leqslant l_k$, temos $|\phi_t * f|(x) = |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x)$. Para $t > l_k$, $supp(\varphi) \subset B(x, \sqrt{n}(1+a)l_k)$ e, de modo análogo, mostramos que $\dfrac{\varphi}{c}$ está concentrada em $B(x, \sqrt{n}(1+a)l_k)$. Logo, obtemos a mesma estimativa $|\phi_t * f|(x) = |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x)$. Disso, concluímos que $M_\phi b_k(x) \leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x)$ e, consequentemente, (a) está provado.

Agora, mostraremos (b), isto é,

$$M_\phi b_k(x) \leqslant c\lambda\frac{l_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}, x \notin Q_k^s.$$

Temos, para $y \in Q_k^a$ e $x \notin Q_k^s$,

$$\begin{aligned}
|\phi_t * b_k|(x) &= \left|\int t^{-n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)b_k(y)dy\right| \\
&= \frac{1}{t^n}\left|\int\left[\phi(\frac{x-y}{t}) - \phi(\frac{x-x_k}{t})\right]b_k(y)dy\right| \\
&\leqslant \frac{1}{t^n}\left|\int\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]f(y)\eta_k(y)dy\right| \\
&+ \frac{1}{t^n}\left|\int\left[\phi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \phi\left(\frac{x-x_k}{t}\right)\right]c_k\eta_k(y)dy\right| \\
&\doteq J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Lembremos que $supp(b_k) \subset Q_k^a$, $\phi_t(x-y) = 0$ se $\dfrac{|x-y|}{t} > 1$ e, ainda, $|x-y| \geqslant c|x-x_k|$. Logo, basta considerar valores de $t > c|x-x_k| > c'\, l_k$. Pondo $J_1 = \langle f, \varphi\rangle$, com $\varphi(y) = [\phi_t(x-y) - \phi_t(x-x_k)]\,\eta_k(y)$, temos

- $\alpha = 0$: $|\varphi| \leqslant \dfrac{c\,|y-x_k|}{t^{n+1}} \leqslant \dfrac{c\,l_k}{|x-x_k|^{n+1}}$.

- $|\alpha| = 1$: Pela desigualdade do valor médio,

$$\begin{aligned}
|\partial_j \varphi| &\leqslant \frac{1}{t^{n+1}} \left| \partial_j \phi \left(\frac{x-y}{t} \right) - \partial_j \phi \left(\frac{x - x_k}{t} \right) \right| \cdot |\eta_k| + c \frac{|y - x_k|}{t^{n+1}} \cdot \frac{1}{l_k} \\
&\leqslant \frac{c}{t^{n+1}} \\
&\leqslant \frac{c}{|x - x_k|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

- Em geral, para $\alpha = \beta + \gamma$, obtemos $|\partial^\alpha|\varphi \leqslant \dfrac{c_\alpha l_k^{1-|\alpha|}}{|x - x_k|^{n+1}}$ e $supp(\varphi) \subset (Q_k^a) \subset B(\bar{x}_k; c\, l_k)$.

Além disso, a função $\psi \doteq \varphi \cdot \dfrac{|x - x_k|^{n+1}}{l_k^{n+1}}$ está concentrada em $B(\bar{x}_k; c\, l_k)$ e pela Proposição 2.2.48, temos

$$|\langle f, \psi \rangle| \leqslant M_{\mathcal{F}} f(\bar{x}).$$

Daí, finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
|J_1| &= |\langle f, \varphi \rangle| \\
&= c \cdot \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}} \cdot |\langle f, \psi \rangle| \\
&\leqslant c \cdot \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}} \cdot M_{\mathcal{F}} f(\bar{x}) \\
&\leqslant c\lambda \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Para J_2, lembrando que $|c_k| \leqslant c\lambda$ e $|D^\alpha \eta_k| \leqslant c \cdot \dfrac{\lambda}{l_k^{|\alpha|}}$, pela desigualdade do valor médio, obtemos uma estimativa semelhante para $|J_2|$, isto é,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leqslant \int_{Q_k^s} |\phi_t(x-y) - \phi(x - x_k)| \cdot |c_k| \cdot |\eta_k| dy && (3.3) \\
&\leqslant c \frac{|y - x_k|}{t^{n+1}} \cdot \lambda\, l_k^n && (3.4) \\
&\leqslant c\, \lambda \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}}, && (3.5)
\end{aligned}$$

com $t \geqslant c\,|x - x_k|$. Por (3.3) e (3.3), concluímos, a proposição para $\dfrac{n}{n+1} < p \leqslant 1$.

A prova para $p \leqslant \dfrac{n}{n+1}$ precisa de uma estimativa melhor para

$$M_\phi b_k(x) \leqslant c\lambda \frac{l_k^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}},\ x \notin Q_k^s.$$

Isso é feito modificando a construção das "más" funções b_k de modo que elas satisfazem uma propriedade adicional de momento, conforme veremos na seção a seguir.

3.1.5 Correção das funções b_k.

Se $p \leqslant \dfrac{n}{n+1}$, existe $d \in \mathbb{N}, d > 1$ tal que $\dfrac{n}{n+d} < p \leqslant \dfrac{n}{n+d-1}$. Fixemos esse d. Vamos procurar a seguinte estimativa:

$$M_\phi b_k(x) \leqslant c\,\lambda \frac{l_k^{n+d}}{|x-x_k|^{n+d}},\ \ x \notin Q_k^s. \tag{3.6}$$

Gostaríamos que

$$\int b_k(y)P(y)dy = 0, \tag{3.7}$$

para todo polinômio P de grau menor ou igual a d. Se vale (3.7), usamos o polinômio de Taylor de grau d da função $y \mapsto \varphi(y) \doteq \psi_t(x-y)$ em torno de x_k e obtemos (3.6). Fixemos k e consideremos $L^2(Q_k^a)$ dado pelo produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{Q_k^a} f\,\bar{g}\,\tilde{\eta}_k dy,$$

com $\tilde{\eta}_k = \dfrac{\eta_k}{\int \eta_k}$, $supp(Q_k^a)$. Observemos que

$$\|\partial^\alpha \tilde{\eta}_k\|_{L^\infty} = \frac{\|\partial^\alpha \eta_k\|_{L^\infty}}{\int \eta_k} \leqslant \frac{c_\alpha l_k^{|\alpha|}}{|Q_k|} \leqslant c_\alpha[(1+b)l_k]^{-n-|\alpha|}.$$

Sejam $P_d = \{\text{polinômio } P \text{ em } \mathbb{R}^n;\ grau(P) \leqslant d\}$, $P_{d,k} = P_d\big|_{Q_k^a} \subseteq L^2(Q_k^a)$ e a sua projeção ortogonal $P_k : L^2(Q_k^a) \longrightarrow P_{d,k}$. Vamos apresentar os novos $c_k = c_k(x)$ e b_k de modo que esses novos $c_k(x)$ substituem as constantes c_k usadas antes por polinômios $c_k(x) \in P_d$. Definamos $c_k = P_k(f)$. Daí, $f - c_k \perp P_{d,k}$, isto é,

$$\langle f - c_k, P\rangle = \int_{Q_k^a} (f-c_k)\,\tilde{\eta}_k P = 0,\ \ \forall\ P \in P_{d,k}.$$

Portanto, basta definirmos

$$b_k = (f - c_k)\,\tilde{\eta}_k.$$

Afirmação 3.1.6. Se q é um polinômio de grau menor ou igual a d, então

$$\|D^\alpha q\|_{L^\infty(Q_k^a)} \leqslant c_\alpha l_k^{-|\alpha|} \|q\|_{L^2(Q_k^a)}\,. \tag{3.8}$$

De fato, basta provar a seguinte desigualdade para o cubo unitátio Q, centrado na origem,

$$\|D^\alpha p\|_{L^\infty(Q)} \leqslant c_\alpha l_k^{-|\alpha|} \|p\|_{L^2(Q)}\,, \tag{3.9}$$

que é válida, pois em espaços normados de dimensão finita, podemos dominar qualquer semi-norma pela norma. Agora, vamos mostrar que (3.9) implica em (3.8).

Consideremos $p(x) = q(l_k\, x + x_k)$. Notemos que $x \in Q \Leftrightarrow l_k x + x_k = y \in Q_k^a$. Como

$$\|D^\alpha p\|_{L^\infty(Q)} = l_k^{|\alpha|} \|D^\alpha q\|_{L^\infty(Q_k^a)}$$

e

$$\|p\|_{L^2(Q)} = \frac{1}{|Q|}\int_Q q^2(l_k x + x_k)\eta_k(x)dx = \frac{1}{|Q_k^a|}\int_{Q_k^a} q^2(y)\eta_k dy = \|q\|_{L^2(Q_k^a)}\,,$$

obtemos

$$\|D^\alpha q\|_{L^\infty(Q_k^a)} \leqslant l_k^{-|\alpha|} \|D^\alpha p\|_{L^\infty(Q)} \leqslant l_k^{-|\alpha|} c_\alpha \|p\|_{L^2(Q)} = c_\alpha l_k^{-|\alpha|} \|q\|_{L^2(Q_k^a)}\,,$$

concluindo a afirmação.

Vale o seguinte resultado que substitue a Afirmação 3.1.3 no caso $p \leqslant \dfrac{n}{n+1}$:

Afirmação 3.1.7.

(a) $|c_k\, \eta_k| \leqslant c\,\lambda,\ \forall\ x$;

(b) $|c_k(x)\eta_k(x)| \leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x), x \in Q_k^s$.

De fato, seja $\{e_1(x), e_2(x), \cdots, e_{d+1}(x)\}$ base ortonormal de $P_{d,k}$ e completemos a uma base ortonormal de $L^2(Q_k^a)$. Daí, todo $u \in L^2(Q_k^a)$ se escreve como

$$u(x) = \sum_j \langle u, e_j\rangle e_j(x).$$

Logo,

$$P_k u(x) = \sum_{j=1}^{d+1} \langle u, e_j \rangle e_j(x)$$

e, em particular,

$$\begin{aligned}
c_k(x) &= \sum_{j=1}^{d+1} \langle f, e_j \rangle e_j(x) \\
&= \frac{1}{|Q_k^a|} \int_{Q_k^a} f(y) \sum_{j=1}^{d+1} \bar{e}_j(y) \cdot e_j(x) \tilde{\eta}_k(y) dy \\
&= \int_{Q_k^a} f(y) k(x,y) \tilde{\eta}_k(y) dy \\
&= \langle f, k(x,\cdot)\tilde{\eta}_k \rangle,
\end{aligned}$$

sendo $k(x,y) = \dfrac{1}{|Q_k^a|} \sum_{j=1}^{d+1} \bar{e}_j(y) e_j(x)$ polinômio em x e y.

Notemos que $|\partial_y^\alpha k(x,y)| \leqslant c_\alpha l_k^{-(n+|\alpha|)}$ para $x, y \in Q_k^s$, pois por (3.8), temos

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_y^\alpha k(x,.) \right\|_{L^\infty(Q_k^a)} &\leqslant c_\alpha \, l_k^{-|\alpha|} \left\| k(x,.) \right\|_{L^2(Q_k^a)} \\
&\leqslant c_\alpha \, l_k^{-|\alpha|} \left[\frac{1}{|Q_k^a|} \int |k(x,y)|^2 \eta_k(y) dy \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= c_\alpha \, l_k^{-|\alpha|} \left[\frac{1}{|Q_k^a|} \sum_{j=1}^{d+1} e_j^2(x) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|Q_k^a|^2} \\
&\leqslant c_\alpha \sum_{j=1}^{d+1} \|e_j\|_{L^\infty} \, l_k^{-(|\alpha|+n)} \\
&\leqslant c_\alpha \, l_k^{-(|\alpha|+n)}.
\end{aligned}$$

Pela regra de Leibniz, obtemos

$$\left| D_y^\alpha [k(x,y)\eta_k(y)] \right| \leqslant c_\alpha l_k^{-(|\alpha|+n)}.$$

Então $\varphi(y) \doteq c_\alpha k(x,y)\eta_k(y)$ está concentrada em $B(\bar{x}; c\, l_k)$, $\bar{x} \notin \Omega$ e, consequentemente, pela Proposição 2.2.48,

$$
\begin{aligned}
|c_k(x)| &\leqslant c|\langle f, \varphi\rangle| \\
&\leqslant cM_{\mathcal{F}}f(\bar{x}) \\
&\leqslant c\,\lambda,
\end{aligned}
$$

provando (a). Analogamente, para $x \in Q_k^s$, obtemos (b).

Agora, finalmente, mostremos (1), isto é,

$$M_\phi b_k(x) \leqslant cM_{\mathcal{F}}f(x),\ x \in Q_k^s.$$

Seja $x \in Q_k^s$ (lembremos que $\bigcup_k Q_k^s = \Omega = \{x; M_{\mathcal{F}}f(x) > \lambda\}$). Então

$$\phi_t * b_k(x) = \int \phi_t(x-y)f(y)\eta_k(y)dy - \int \phi_t(x-y)c_k(y)\eta_k(y)dy \doteq I_1 - I_2,$$

- I_2:

$$|I_2| \leqslant \|c_k\,\eta_k\|_{L^\infty} \cdot \|\phi_t\|_{L^1} \leqslant c\,\lambda \leqslant c\,M_{\mathcal{F}}f(x)$$

- I_1: $t < l_k$ e $t \geqslant l_k$:

$$|I_1| = |\langle f, \phi_t(x-.)\,\eta_k\rangle| = |\langle f, \varphi\rangle|,$$

com

$$|D^\alpha \varphi| \leqslant \begin{cases} c\,\lambda\,t^{-(n+|\alpha|)} & \text{se } t < l_k \\ c\,\lambda\,l_k^{-(n+|\alpha|)} & \text{se } t \geqslant l_k. \end{cases}$$

Em ambos os casos (como antes), vale $|I_1| \leqslant |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant c\,M_{\mathcal{F}}f(x)$.

Logo,

$$|\phi_t * b_k(x)| \leqslant c\,M_{\mathcal{F}}f(x)$$

e, portanto,

$$M_\phi b_k(x) \leqslant c\,M_{\mathcal{F}}f(x),\ x \in Q_k^s.$$

Agora, mostraremos 3.6. Seja P_d o polinômio de Taylor de grau d, centrado em x_k, da função $y \mapsto \phi_t(x-y)$ e r_{d+1} seu resto. Temos

$$\begin{aligned}
\phi_t * b_k(x) &= \int \phi_t(x-y)b_k(y)dy - \underbrace{\int P_d(y)b_k(y)dy}_{=0} \\
&= \int r_{d+1}(y)b_k(y)dy \\
&= \int r_{d+1}(y)f(y)\eta_k(y)dy - \int r_{d+1}(y)c_k(y)\eta_k(y)dy \\
&= \langle f, r_{d+1}\,\eta_k\rangle - \langle c_k, r_{d+1}\,\eta_k\rangle,
\end{aligned}$$

com $|D^\alpha r_{d+1}(y)| \leqslant c\,\lambda \dfrac{|x_k-y|^{d+1-|\alpha|}}{t^{n+d+1}}$.

Por outro lado, a função $\varphi = r_{d+1}\cdot\eta_k$ satisfaz

$$\begin{aligned}
|D^\alpha\varphi| &\leqslant c \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} |D^{\alpha_1}r_{d+1}||D^{\alpha_2}\eta_k| &\quad (3.10)\\
&\leqslant c \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{|x_k-y|^{d+1-|\alpha_1|}}{t^{n+d+1}}\frac{1}{l_k^{|\alpha_2|}} &\quad (3.11)\\
&\leqslant c\frac{l_k^{d+1-|\alpha|}}{|x-x_k|^{n+d+1}}, &\quad (3.12)
\end{aligned}$$

pois lembremos que $|x-x_k| \sim |x-y|$ e $t \geqslant |x-y| \geqslant c\,|x_k-x| \geqslant c'\,l_k$.

Logo, a função $\psi(y) \doteq \dfrac{c\,\varphi(y)|x-x_k|^{n+d+1}}{l_k^{n+d+1}}$ está concentrada na bola $B(\bar{x}, c\,l_k)$, $\bar{x} \in F$. Pela Proposição 2.2.48, temos

$$\begin{aligned}
|\langle f, \eta_k\,r_{d+1}\rangle| &= |\langle f, \psi\rangle| \cdot \frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}} \\
&\leqslant c\,M_{\mathcal{F}}f(\bar{x})\frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}} \\
&\leqslant c\,\lambda\,\frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}.
\end{aligned}$$

Com isso, em (3.10), obtemos

$$|\phi_t * b_k|(x) \leqslant \tilde{c}\,\lambda\,\frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}},$$

ou ainda,

$$M_{\phi_t}b_k(x) \doteq \sup_{t>0}|\phi_t * b_k|(x) \leqslant \tilde{c}\,\lambda\,\frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}.$$

Portanto, a prova do Teorema 3.1.2, finalmente, está completa. $\square$

Na seção seguinte, enfim, apresentamos o Teorema da Decomposição Atômica de H^p. De agora em diante, vamos supor $0 < p \leqslant 1$, pois para $p > 1$, já sabemos que $H^p = L^p$.

3.2 O Teorema da Decomposição Atômica de H^p

Dada $f \in H^p$, sabemos apenas que suas funções maximais, conforme o teorema da caracterização maximal, pertencem a L^p. Embora o esse teorema nos dê várias equivalências, ele ainda nos fornece pouca informação sobre os espaços H^p. Precisamos, então, de um resultado mais forte, isto é, que nos dê informações mais precisas sobre H^p. Uma das vantagens de caracterização atômica é que facilita a estimativa de muitos operadores (em particular, operadores de convolução) sobre os espaços H^p, pois permite que tal estimativa seja realizada apenas sobre os átomos, que são funções relativamente simples. Gostaríamos de expressar f como uma soma de elementos relativamente simples e com proriedades interessantes. Esses elementos são conhecidos como H^p-átomos, os quais apresentamos sua definição a seguir.

Definição 3.2.1 (H^p-átomo). *Uma função $a \in L^\infty$ diz-se um H^p-átomo se existe uma bola $B(x_0, r)$ tal que*

(1) $supp(a) \subseteq B(x_0, r)$;

(2) $\|a\|_{L^\infty} \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$;

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha a(x)\, dx = 0\,,\ \forall\ |\alpha| \leqslant \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor$.

Observação 3.2.2.

(1) Teríamos uma definição equivalente se em vez de bolas tivéssemos tomado cubos com lados paralelos aos eixos coordenados.

(2) Se $\dfrac{n}{n+1} < p \leqslant 1$, a propriedade (3) acima vale apenas para $\alpha = 0$.

(3) Das propriedades (1) e (2) da definição de átomo, obtemos $\displaystyle\int |a(x)|^p dx \leqslant 1$, pois

$$\int |a(x)|^p dx = \int_B |a(x)|^p dx \leqslant \|a\|_\infty^p\, |B| \leqslant \left(|B|^{-\frac{1}{p}}\right)^p |B| = 1.$$

(4) Um H^p-átomo como definido acima também é conhecido por (p,∞)-átomo devido ao fato de usarmos a norma L^∞ na propriedade (2). Em geral, para $q \geqslant 1$, definimos os (p,q)-átomos de modo inteiramente análogo à definição acima, substituindo apenas a propriedade (2) por $\|a\|_{L^q} \leqslant |B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. Além disso, todo (p,∞)-átomo é um (p,q)-átomo, para todo $q \geqslant 1$. Com efeito, basta notar que

$$\|a\|_{L^q} = \left(\int_B |a|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(|B|^{-\frac{q}{p}+1}\right)^{\frac{1}{q}} = |B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

(5) É possível mostrar que todo (p,q)-átomo pode ser escrito como soma de (p,∞)-átomos. Maiores detalhes, ver referência [8].

O próximo resultado nos diz que um H^p-átomo é, de fato, um elemento de H^p e que a "norma" em H^p de tais átomos são uniformemente limitadas (em particular, elas são independentes das bolas B). Em outras palavras, temos proposição a seguir.

Proposição 3.2.3. *Seja a um H^p-átomo. Existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que*

$$\|a\|_{H^p} \doteq \|M_\phi(a)\|_{L^p} \leqslant C. \tag{3.13}$$

com $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, *supp*$(\phi) \subset B(0,1)$.

Demonstração. Seja a um H^p-átomo suportado em $B(x_0,r)$, ϕ como na hipótese e $B^* = B(x_0;2r)$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\phi(a)(x)|^p dx = \int_{B^*} |M_\phi(a)(x)|^p dx + \int_{(B^*)^c} |M_\phi(a)(x)|^p dx = I + II$$

(I):

$$|(\phi_t * a)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)|a(x-y)|dy \leqslant \|a\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$$

Logo,

$$M_\phi(a)(x) \doteq \sup_{t>0} |(\phi_t * a)(x)| \leqslant |B|^{-\frac{1}{p}}$$

e, portanto,

$$\int_{B^*} |M_\phi(a)(x)|^p dx \leqslant |B|^{-1} \int_{B^*} 1dx = |B|^{-1}|B^*| = |B|^{-1}|B| \cdot 2^n \doteq C_1(n).$$

Outra forma (usando a limitação em L^2):

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B*} |M_\phi(a)(x)|^p dx \\
&= \int_{B*} [|M_\phi(a)(x)|^p \chi_{B*}]\chi_{B*} dx \\
&\leqslant \left(\int_{B*} |M_\phi(a)(x)|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{B*} 1 dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C \int_{B*} |\mathcal{M}_\phi(a)(x)|^2 dx |B^*|^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C_1 \|a\|_{L^2}^p |B^*|^{\frac{2-p}{2}} \\
&= C_1 \left(\int_{B*} |a|^2\right)^{\frac{p}{2}} (|B|2^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C_1 \left(\int_{B*} |B|^{-\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}} |B|^{\frac{2-p}{2}} (2^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&= C_1 |B|^{-1} \left(\int_{B*} 1\right)^{\frac{p}{2}} |B|^{\frac{2-p}{2}} (2^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&= C_1 |B|^{-1} |B^*|^{\frac{p}{2}} |B|^{\frac{2-p}{2}} (2^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&= C_1 (2^n)^{\frac{2-p}{2}} 2^{\frac{np}{2}} \\
&= C_1(n,p).
\end{aligned}
$$

(II): Temos

$$(\phi_t * a)(x) = \int_B \phi_t(x-y)a(y)dy,$$

com $x \notin B^* = B(x_0; 2r)$. Como $\phi \in C_c^\infty$, usamos a expansão de Taylor sobre x_0 da função $y \mapsto \phi_t(x-y)$ dada por

$$\phi_t(x-y) = \sum_{|\alpha| \leqslant n\cdot(p^{-1}-1)} \partial_y^\alpha \frac{\phi_t(x-x_0)(x_0-y)^\alpha}{\alpha!} + R_{n\cdot(p^{-1}-1)}(t,x,x_0,y),$$

com $|R_{d+1}| \leqslant \dfrac{C|x_0-y|^{d+1}}{t^{n+d+1}}$, $d = \lfloor n\cdot(p^{-1}-1)\rfloor$. Substituindo em (II), temos

$$|(\phi_t * a)(x)| \leqslant \int_B |a(y)| \left(\sum_{|\alpha|\leqslant d} \frac{\partial_y^\alpha \phi_t(x-x_0)(x_0-y)^\alpha}{\alpha!} + \frac{C|x_0-y|^{d+1}}{t^{n+d+1}}\right) dy \qquad (3.14)$$

$$= C \int_B \frac{|a(y)||x_0-y|^{d+1}}{t^{n+d+1}} dy. \qquad (3.15)$$

Como $y \in B$, $x \notin B^*$ e $|x-y| \leqslant t$ (t suficientemente pequeno), temos $|x_0-y| \leqslant r$,

$|x-x_0| \geqslant 2r$ e, por conseguinte, $|y-x_0| \leqslant r \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}$. Logo,

$$t \geqslant |x-y| \geqslant |x-x_0| - |x_0-y| \geqslant \frac{|x-x_0|}{2},$$

ou seja, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{2}{|x-x_0|}$. Com isso, em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} M_\phi(a)(x) &\lesssim |B|^{-\frac{1}{p}} \int_B \frac{|x_0-y|^{d+1}}{|x_0-x|^{n+d+1}} dy \\ &\simeq \frac{|B|^{-\frac{1}{p}}}{|x_0-x|^{n+d+1}} \int_0^r \lambda^{d+1+n-1} d\lambda \\ &\simeq \frac{|B|^{-\frac{1}{p}} r^{n+d+1}}{|x-x_0|^{n+d+1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B^{*c}} (M_\phi(a)(x))^p dx &\lesssim |B|^{-1} r^{p(n+d+1)} \int_{B^{*c}} |x-x_0|^{-p(n+d+1)} dx \\ &\simeq |B|^{-1} r^{p(n+d+1)} \int_{2r}^{\infty} \lambda^{-p(n+d+1)+n-1} d\lambda \\ &= C_2(n,p). \end{aligned}$$

Notemos que a integral imprópria acima converge, pois $-p(n+d+1)+n-1+1 < 0$, sendo $d = \left\lfloor n \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right) \right\rfloor$.

Portanto, por (I) e (II), concluímos a prova da proposição. $\square$

Observação 3.2.4. Se $f(x) = \sum_k^{\infty} \lambda_k a_k(x)$ em $\mathcal{S}'$, com $\lambda_k \in l^p$ e a_k são H^p-átomos, então $f \in H^p$. Em outras palavras, se $\{a_k\}$ é uma coleção de H^p-átomos e (λ_k) é uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = f \tag{3.16}$$

converge no sentido das distribuições e $f \in H^p$, com

$$\|f\|_{H^p} \leqslant C \left(\sum_k^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.17}$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a soma finita em (3.16), isto é, $f_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_k a_k$. Para $n < m$, temos

$$\|f_m - f_n\|_{H^p} = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k a_k \right\|_{H^p} \leqslant C \left(\sum_{k=n+1}^{m} |\lambda_k| \right)^{1/p} \longrightarrow 0,$$

quando $m, n \to \infty$. Logo, (f_n) é uma sequência de Cauchy em H^p, o qual é completo. Então existe $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em H^p. Pela Proposição 2.2.47, obtemos a convergência em $\mathcal{S}'$ e, com isso, provamos o resultado. Observemos que 3.17 é uma consequência da Proposição 3.2.3 e poderíamos ter provado a Observação 3.2.4 de outra forma, conforme apresentamos a seguir.

Consideremos $f_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_k a_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$M_\phi(f_n) = M_\phi \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| M_\phi(a_k). \tag{3.18}$$

Como $p \leqslant 1$, segue

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| M_\phi(a_k) \right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \left[M_\phi(a_k) \right]^p. \tag{3.19}$$

Combinando (3.18) e (3.19), e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{H^p}^p &= \int [M_\phi(f_n)(x)]^p \, dx \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \int [M_\phi a_k]^p \, dx \\ &\leqslant c \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p, \end{aligned}$$

que dá a convergência absoluta de (3.16) na métrica de H^p. Pela Proposição 2.2.47, obtemos a convergência em $\mathcal{S}'$.

A recíproca da Observação 3.2.4 é o esperado Teorema da Decomposição Atômica de H^p, o qual enunciamos e provamos a seguir. Para a prová-lo, admitimos o lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [16].

Lema 3.2.5. *$L^1_{loc} \bigcap H^p$ é denso em H^p, $0 < p < \infty$.*

Teorema 3.2.6 (Decomposição Atômica de H^p). *Para qualquer $f \in H^p$, podemos escrever*

$$f = \sum_j \lambda_j a_j,$$

com $\lambda_j \in l^p$, a_j átomos e $\sum_j |\lambda_j|^p \leqslant C \|f\|_{H^p}^p$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar a decomposição para $L^1_{loc} \bigcap H^p$. Seja $f \in L^1_{loc} \bigcap H^p$ o qual é denso em H^p pelo Lema 3.2.5. Dado $\lambda = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$, seja $f = g^j + b^j$ a decomposição de Calderón-Zygmund de f, isto é,

(1) $\|g^j\|_{L^\infty} \leqslant c\,2^j$;

(2)
$$b^j = \sum_k b^j_k,\ supp(b^j_k) \subset Q^{j\,*}_k,\ \int x^\alpha b^j_k(x)dx = 0,\ \forall |\alpha| \leqslant \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor$$

(3) $b^j_k = (f - c^j_k)\eta^j_k$, sendo c^j_k polinômio tal que $grau(c^j_k) \leqslant d = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right\rfloor$ e $\bigcup_k Q^{j\,*}_k = \Omega^j = \left\{x; M_{\mathcal{F}}f(x) > 2^j\right\}$.

Notemos que $\Omega^{j+1} \subset \Omega^j$ e $\bigcap_j \Omega^j = \{x; M_{\mathcal{F}}f(x) = \infty\}$. Mas como $M_{\mathcal{F}}f \in L^p$, temos $\left|\bigcap_j \Omega^j\right| = 0$. Com isso, por (2) e (3) acima, temos

$$\begin{aligned}
\|f - g^j\|_{H^p}^p &= \|b^j\|_{H^p}^p \\
&\simeq \|M_\phi b^j\|_{L^p}^p \\
&\leqslant \sum_k \int (M_\phi b^j_k)^p \\
&\leqslant c \sum_k \int_{Q^*_k} (M_{\mathcal{F}}f)^p \\
&\leqslant c \int_{\Omega^j} (M_{\mathcal{F}}f)^p \xrightarrow{j \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

pelo teorema da convergência dominada. Pela Proposição 2.2.47, $g^j \to f$ quando $j \to \infty$. Como $|g^j| \leqslant c\,2^j$, por (1), segue $g^j \longrightarrow 0$ uniformemente em $\mathcal{S}'$ quando $j \to -\infty$ e, em particular, $g^j \to 0$ em $\mathcal{S}'$, quando $j \to -\infty$. Lembremos que

$$g^j = \begin{cases} f & \text{em } (\Omega^j)^c, \\ \sum_k c_k^j \eta_k^j & \text{em } \Omega^j. \end{cases}$$

Logo,

$$g^{N+1} - g^{-N} = \sum_{j=-N}^{N} (g^{j+1} - g^j) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{S}',$$

isto é, $f = \sum_j (g^{j+1} - g^j)$ em $\mathcal{S}'$. Então,

$$f = \sum_{j,k} (g^{j+1} - g^j)\eta_k^j. \tag{3.20}$$

Como $g^{j+1} + b^{j+1} = f = g^j + b^j$, segue $g^{j+1} - g^j = b^j - b^{j+1}$ está suportada em $\Omega^{j+1} \subset \Omega^j$ e, ainda, a função $(g^{j+1} - g^j)\eta_k^j$ está suportada numa bola B_k^j (a escolher) que contém ${}^*Q_k^j$. A partir de agora, usaremos a notação ${}^*Q_k^j$ em vez de ${Q_k^j}^*$, por simplicidade. Mas observemos que a função $(g^{j+1} - g^j)\eta_k^j$ não possui momentos nulos, isto é, não satisfaz a propriedade crucial de cancelamento. Para garantir isso, precisamos duma decomposição melhor que (3.20) e na qual agora nos concentraremos. Seja $P_k = P_k^j$ a projeção usada anteriormente. Tínhamos $c_k^j = P_k^j(f)$ e, ainda, $c_l^{j+1} = P_l^{j+1}(f)$.

Agora, consideremos $c_{k,l}^j = P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]$ o polinômio de grau menor ou igual a d, $P_l^{j+1} : L^2({}^*Q_l^{j+1}) \to P_d\big|_{{}^*Q_l^{j+1}}$.

Propriedades de $c_{k,l}^j$:

(a) Se ${}^*Q_k^j \bigcap {}^*Q_l^{j+1} = \varnothing$, então $c_{k,l}^j \equiv 0$;

(b) $|c_{k,l}^j\, \eta_l^{j+1}| \leqslant c\, 2^j$.

Tomemos k, l tais que ${}^*Q_k^j \bigcap {}^*Q_l^{j+1} \neq \varnothing$ (caso contrário, $c_{k,l}^j \equiv 0$.)

Afirmação 3.2.7. *diam*$({}^*Q_k^j) \geqslant c\,$*diam*$({}^*Q_l^{j+1})$.

Com efeito, sejam $p \in {}^*Q_k^j \bigcap {}^*Q_l^{j+1}$ e δ_k^j o diâmetro de ${}^*Q_k^j$, isto é, $\delta_k^j = \sup\left\{d(p,q); p, q \in {}^*Q_k^j\right\}$. Temos $\delta_k^j \sim d({}^*Q_l^j, {}^c\Omega^j)$ e $d(p, {}^c\Omega^{j+1}) \leqslant d(p, {}^c\Omega^j)$, pois $\Omega^{j+1} \subset \Omega^j$. Logo,

$$\delta_k^{j+1} \sim d({}^*Q_l^{j+1}, {}^c\Omega^{j+1}) \sim d(p, {}^c\Omega^{j+1}).$$

Donde segue a afirmação.

Se $c^j_{k,l} \not\equiv 0$, existe $p \in {}^*\!Q^j_k \bigcap {}^*\!Q^{j+1}_l$. Daí, existem $c > 0$ e $q \notin \Omega^j$ tal que $supp(c^j_{k,l}\, \eta^{j+1}_l) \subset B(q, c\, l^j_k)$. Como antes, adaptando a notação, escrevemos

$$c^j_{k,l}(x) = \int (f(y) - c^{j+1}_l) k(x,y) \eta^j_k(y) \eta^{j+1}_l(y) dy = \left\langle f, k(x,.) \eta^{j+1}_l \eta^{j+1}_l \right\rangle,$$

com k polinômio em x, y. De modo análogo, adaptando os argumentos anteriores, mostramos que $|\partial^\alpha k(x,y)| \leqslant c\, l^{j(-n-|\alpha|)}_k$ e, ainda, a função $\varphi(y) \doteq c\, k(x,y) \eta^{j+1}_l(y)$ está concentrada em $B(q, c\, l^j_k)$. Portanto, obtemos

$$|c^j_{k,l}(x)| \leqslant c\, |\langle f, \varphi \rangle| \leqslant c\, M_{\mathcal{F}} f(q) \leqslant c\, 2^j, \;\; q \notin \Omega^j,$$

como queríamos, visto que $|\partial^\beta \eta^{j+1}_k| \leqslant \dfrac{c_\beta}{l^{|\beta|}_k}$, $\forall \beta$.

Voltando à decomposição em (3.20), lembremos que $f = \sum_j \sum_k (g^{j+1} - g^j) \eta^j_k$. Temos

$$f = \sum_j [b^j - b^{j+1}] = \sum_j \left[\sum_k (f - c^j_k) \eta^j_k - \sum_l (f - c^{j+1}_k) \eta^{j+1}_l \right] = \sum_j \left[\sum_k A^j_k \right],$$

em que

$$A^j_k = (f - c^j_k) \eta^j_k - \sum_l (f - c^{j+1}_l) \eta^{j+1}_l\, \eta^j_k + \sum_l c^j_{k,l} \eta^{j+1}_l,$$

com $c^j_{k,l} = P^{j+1}_l [(f - c^{j+1}_l) \eta^j_k]$ e $|c^j_{k,l} \eta^{j+1}_l| \leqslant c\, 2^j$.

Observemos que $\sum_l c^j_{k,l} \eta^{j+1}_l$ é não nulo somente se ${}^*\!Q^j_k \bigcap {}^*\!Q^{j+1}_l \neq \varnothing$. Lembremos que $\sum_k \eta^j_k = 1$ em $supp(\eta^{j+1}_l)$, pois $\Omega^{j+1} \subset \Omega^j$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\sum_k \sum_l c^j_{k,l} \eta^{j+1}_l &= \sum_k \sum_l \left\{ P^{j+1}_l [(f - c^{j+1}_l) \eta^j_k] \right\} \eta^{j+1}_l \\
&= \sum_l \left[P^{j+1}_l (f - c^{j+1}_l) \right] \eta^{j+1}_l \\
&= \sum_l \left[P^{j+1}_l (f) - P^{j+1}_l (c^{j+1}_l) \right] \eta^{j+1}_l \\
&= \sum_l \left[P^{j+1}_l (f) - [P^{j+1}_l (f)]^2 \right] \eta^{j+1}_l \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $[P^{j+1}_l(f)]^2 = P^{j+1}_l(f)$.

Agora destacamos as propriedades de A^j_k

(1) $supp(A_k^j) \subset B_k^j$, a qual contém $\overset{*}{Q}{}_k^j$ e todos $\overset{*}{Q}{}_l^j$ tais que $\overset{*}{Q}{}_k^j \bigcap \overset{*}{Q}{}_l^{j+1} \neq \emptyset$. Daí, $diam(\overset{*}{Q}{}_l^j) \leqslant c\,\overset{*}{Q}{}_k^j$ e $|B_k^j| \sim |\overset{*}{Q}{}_k^j|$;

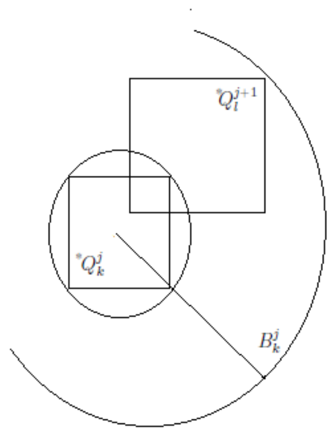

Figura 3.2: Propriedades das funções A_k^j

(2) $|A_k^j| \leqslant c\,2^j$;

(3) $\displaystyle\int x^\alpha A_k^j(x)dx = 0,\ \forall\,|\alpha| \leqslant d.$

Prova das propriedades:

(1): Segue diretamente da construção das funções A_k^j.

(2): Temos

$$A_k^j = \eta_k^j(f - \sum_l f\,\eta_l^{j+1}) - c_k^j\,\eta_k^j + \sum_l (c_l^{j+1}\,\eta_k^j + c_{k,l}^j)\eta_l^{j+1} = I_1 - I_2 + I_3$$

Mas $\displaystyle\sum_l f\,\eta_l^{j+1} = f\,\chi_\Omega^{j+1}$ em que χ^{j+1} é a função característica de Ω^{j+1}.

$$\begin{aligned} \eta_k^j\left(f - \sum_l f\,\eta_l^{j+1}\right) &= \eta_k^j(f) - \eta_k^j f\,\chi_{\Omega^{j+1}}^{j+1} \\ &= \eta_k^j\,f\,\left(1 - \chi_{\Omega^{j+1}}^{j+1}\right) \\ &= \eta_k^j\,f\chi_{\Omega^j\setminus\Omega^{j+1}}^{j+1}. \end{aligned}$$

Notemos que em $\Omega^j \backslash \Omega^{j+1}$, temos $M_{\mathcal{F}} f(x) \leqslant 2^{j+1} = 2\,2^j$. Com isso,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \lim_{t\to 0} |\phi_t * f|(x) \\ &\leqslant M_\phi f(x) \\ &\leqslant \tilde{c}\, M_{\mathcal{F}} f(x) \\ &\leqslant c'\, 2^j. \end{aligned}$$

Logo, $|I_1| \leqslant |\eta_k^j| \cdot |f| \leqslant c_1\, 2^j$.

Em I_2, já vimos que $|I_2| = |c_k^j\, \eta_k^j| \leqslant c_2\, 2^j$ e em I_3, temos $|I_3| = |c_l^{j+1}\, \eta_k^{j+1}| \leqslant c_3\, 2^j$. Portanto,

$$|A_k^j| \leqslant c\, 2^j.$$

(3): Temos

$$A_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_l \left[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j - c_{k,l}^j\right] \eta_l^{j+1}$$

e por construção, $(f - c_k^j) \perp P_d$ em $L^2({}^*\!Q_k^j)$, em que $\langle u, v\rangle_{L^2({}^*\!Q_k^j)} \doteq \dfrac{1}{|{}^*\!Q_k^j|} \displaystyle\int u\, \bar{v}\, \eta_k^j$.

Daí, $\forall\, |\alpha| \leqslant d$, temos

$$\int x^\alpha (f - c_k^j)\eta_k^j\, dx = |{}^*\!Q_k^j| \left\langle f - c_k^j, x^\alpha \right\rangle_{L^2({}^*\!Q_k^j)} = 0.$$

Analogamente,

$$\int x^\alpha \left[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j - c_{k,l}^j\right] dx = 0 \quad \forall\ |\alpha| \leqslant d$$

(definição de $c_{k,l}^j$), provando a propriedade (3).

Queremos que

$$|A_k^j| \leqslant |B_k^j|^{-\frac{1}{p}} = c\, |{}^*\!Q_k^j|^{-\frac{1}{p}}.$$

Sendo assim, consideremos $\lambda_{j,k} = c2^j |B_k^j|^{-\frac{1}{p}}$ e $a_{j,k} = (\lambda_{j,k})^{-1} A_k^j$. Então

$$f = \sum_{j,k} A_k^j = \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\, a_{j,k},$$

com

- $supp(a_{j,k}) \subset B_k^j$;
- $\|a_{j,k}\|_{L^\infty} = |\lambda_{j,k}|^{-1} A_k^j\, \|\|_{L^\infty} = c^{-1} 2^{-j} |B_k^j|^{-\frac{1}{p}} c 2^j = |B_k^j|^{-\frac{1}{p}}$;

- $\displaystyle\int x^\alpha a_{j,k}(x)dx = 0 \ \forall \ |\alpha| \leqslant d.$

Assim, vemos que os $a_{j,k}$ são os átomos procurados na decomposição de f. Além disso,

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p = \sum_{j,k} c(2^j)^p |B_k^j| \tag{3.21}$$
$$\leqslant c\sum_j (2^j)^p \sum_k |B_k^j| \tag{3.22}$$
$$= c\sum_j (2^j)^p \left| \left\{x; M_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\right\} \right|. \tag{3.23}$$

Agora, lembremos que dada $g \in L^p$, $\lambda_g(\gamma) \doteq \{x; |g(x)| > \gamma\}$ é a função distribuição de g e vale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p = \int_0^\infty \gamma^{p-1}\lambda_g(\gamma)d\gamma$. Pondo $g = M_{\mathcal{F}}(f)$ e $h(\gamma) = \gamma^{p-1}\lambda_g(\gamma)$, em (3.21), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p &= c\sum_j (2^j)^{p-1} \left| \left\{x; M_{\mathcal{F}} f(x) > 2^j\right\} \right| 2^j \\
&= c\sum_j h(2^j)\, 2^j, \ \text{(Soma de Riemann de } h) \\
&\leqslant c' \int_0^\infty \gamma^{p-1} \left| \{x; M_{\mathcal{F}} f(x) > \gamma\} \right| d\gamma \\
&= c' \int [M_{\mathcal{F}} f]^p(x)dx \\
&\simeq \|f\|_{H^p}^p .
\end{aligned}$$

Enfim, isso mostra que f possui a decomposição atômica desejada, desde que $f \in L^1_{loc} \bigcap H^p$.

Afirmação 3.2.8. Se a decomposição vale para $f \in L^1_{loc} \bigcap H^p$, denso em H^p, então vale para $f \in H^p$.

Com efeito, pelo Lema 3.2.5, dada $f \in H^p$, podemos encontrar uma sequência $f_i \in L^1_{loc} \bigcap H^p$ tal que

$$f_0 \equiv 0, \ f_i \xrightarrow{i\to\infty} f \ \text{ em } H^p \ \text{ e } \ \|f_{i+1} - f_i\|_{H^p}^p \leqslant 2^{-i-1} \|f\|_{H^p}^p .$$

Logo, $f = \displaystyle\sum_{i=0}^\infty (f_{i+1} - f_i)$ incondicionalmente em H^p e, portanto, converge em $\mathcal{S}'$, pela Proposição 2.2.47. Aplicando a decomposição atômica para cada $f_{i+1} - f_i$, temos

$f_{i+1} - f_i = \sum_{j,k} \lambda^i_{j,k} a^i_{j,k}$. Logo,

$$f = \sum_{i,j,k} \lambda^i_{j,k} a^i_{j,k},$$

com $\sum_{i,j,k} |\lambda^i_{j,k}|^p \leqslant c \sum_i \|f_{i+1} - f_i\|^p_{H^p} \simeq \|f\|^p_{H^p}$ e obtendo, finalmente, a decomposição atômica para $f \in H^p$.

□

Observação 3.2.9.

(1) A decomposição atômica não é única.

(2) Dada $f \in H^p$, podemos escolher uma decomposição atômica da forma $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$, em que os átomos $a_j's$ satisfazem

$$\int x^\alpha a_k(x) dx = 0 \ \ \forall \ |\alpha| \leqslant N,$$

com $N \geqslant \lfloor n(p^{-1} - 1) \rfloor$ natural fixo.

(3) Uma condição necessária para que $f \in H^1$ é $\int f = 0$, ou ainda, se $\int f \neq 0$, então $f \notin H^1$. De fato, se $f \in H^1$, pelo teorema da decomposição atômica, $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ a qual converge em L^1. Pelo teorema da convergência dominada e da propriedade (3) da definição de H^1-átomo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} a_k(x) dx = 0.$$

(4) Se a é um átomo com $\int x^\alpha a(x) dx = 0 \ \forall \ \alpha$, então $a \equiv 0$.
Com efeito, pelo Teorema de Paley-Wiener, $\hat{a}(\xi)$ é uma função inteira em $\mathbb{C}^n$, com $\hat{a}(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha_\xi \hat{a}(0)}{\alpha!} \xi^\alpha$. Mas para todo α, temos

$$\partial^\alpha_\xi \hat{a}(0) = \partial^\alpha_\xi \int e^{-ix\cdot\xi} a(x) dx \Big|_{\xi=0} = (-i)^{|\alpha|} \int x^\alpha e^{-ix\cdot\xi} a(x) dx \Big|_{\xi=0} = (-i)^{|\alpha|} \int x^\alpha a(x) dx = 0.$$

Logo, $\hat{a} \equiv 0$ e, como a transformada de Fourier é um isomorfismo, segue $a \equiv 0$.

3.2.10 Dualidade dos espaços de Hardy

Nesta seção, citaremos algumas observações sobre dualidade dos espaços de Hardy, cujas demonstrações ser podem encontradas na referência [16].

Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e Q um cubo em $\mathbb{R}^n$, escrevemos $g_Q = \fint_Q g \doteq \frac{1}{|Q|}\int_Q g$ e definimos a função "sharp" associada a f por

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x \in Q}\left\{\int_Q |f(y) - f_Q| dy\right\}.$$

Definimos o espaço vetorial normado de funções de oscilação média limitada (Bounded Mean Oscillation) por

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n); \sup_Q \inf_c \fint_Q |f(x) - c| dx < \infty\right\}$$

com a norma $\|f\|_{BMO} \doteq \sup_Q \inf_c \fint_Q |f(x) - c| dx$.

Um passo importante no desenvolvimeto da teoria dos espaços de Hardy foi dado por C. Fefferman, que caracterizou o dual de H^1 como o espaço BMO, isto é,

$$(H^1(\mathbb{R}^n))^* = BMO(\mathbb{R}^n).$$

Os espaços BMO também pode ser definido como

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1_{loc}; M^\sharp f \in L^\infty\right\}$$

com a norma $\|f\|_{BMO} \doteq \left\|M^\sharp f\right\|_{L^\infty}$

Além disso, vale a inclusão $L^\infty \subsetneq BMO$; basta tomar $f(x) = ln|x|$ que não pertence a L^∞. Esse espaço, que contém estritamente o espaço L^∞, foi introduzido por John e Niremberg. Posteriormente, R. Coifman forneceu uma caracterização dos espaços H^p, $0 < p \leqslant 1$, em termos dos átomos, construindo os átomos por meio da função maximal de Fefferman-Stein, conforme vimos anteriormente.

Para $0 < p < 1$, o dual do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Lipschitz homogêneo de ordem $n\left(\frac{1}{p} - 1\right)$, denotado por $\Lambda_*^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}$. Para mais detalhes ver referência [7].

Para $p = 1$, já sabemos que H^1 é Banach e, mais, vale o teorema de Hahn-Banach. Mas para H^p, $0 < p < 1$, não vale o teorema de Hahn-Banach, pois H^p não é localmente convexo.

No capítulo seguinte, iniciamos a segunda parte do trabalho apresentando uma aplicação dos espaços de Hardy referente à teoria de Compacidade Compensada.

Capítulo

4

Aplicação - Compacidade Compensada

4.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentamos alguns resultados retirados e adaptados do artigo [4]. Como uma aplicação da teoria dos espaços de Hardy, provaremos, por meio de um resultado conhecido como Lema tipo $\operatorname{div} - \operatorname{rot}$, que quantidades não-lineares (como o jacobiano, divergente e o rotacional), identificadas pela teoria Compacidade Compensada pertencem, em condições naturais, aos espaços de Hardy multimensionais. A teoria Compacidade Compensada identificou classes de tais quantidades não-lineares, bem como algumas ferramentas gerais para determiná-las de forma sistemática. Conforme mencionado na introdução do trabalho, essa teoria surgiu a partir de resultados obtidos do problema de entender como oscilações de equações diferenciais parciais criam oscilações em suas soluções.

Inicialmente, lembremos que definimos

$$H^1 = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); M_\phi(f) \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

em que

$$M_\phi(f)(x) \doteq \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|,$$

e $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, $\phi > 0$ e $supp(\phi) \subset B(0,1)$.

Poderíamos também ter definido esse espaço como

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} |\phi_t * f| \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

pois claramente, $\mathcal{H}^1 \subseteq H^1$, (lembremos que $L^1 \subset \mathcal{S}'$) e como $H^1 \subsetneq L^1$, segue $H^1 \subseteq \mathcal{H}^1$.

Daqui em diante, vamos adotar essa segunda definição.

Lembremos também que

$$\mathcal{M}(f)(x) \doteq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

como a função Maximal de Hardy-Littlewood.

Observação 4.1.1. A seguir, vamos trabalhar com quantidades como o Jacobiano, Divergente e o Rotacional de um campo vetorial definido em $\mathbb{R}^n$. Uma abordagem mais detalhada sobre tais quantidades pode ser encontrada na referência [3].

Começamos com o exemplo do Jacobiano já mencionado na introdução.

Seja u satisfazendo

$$u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)^n \ \forall\ q < \infty, \ \ \nabla u \in L^n(\mathbb{R}^n)^{n\times n}. \tag{4.1}$$

Vamos considerar o Jacobiano $J(u) = \det(\nabla u)$ que pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Um segundo exemplo trata de campos vetoriais E, B em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$E \in L^p(\mathbb{R}^n)^n, \ \ B \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)^n \text{ com } 1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{4.2}$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \ \operatorname{rot}(B) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{4.3}$$

Em seguida, formamos o produto escalar $E.B$ que claramente está em $L^1(\mathbb{R}^n)$ (pela desigualdade de Hölder). Finalmente, consideremos uma função escalar u e um campo vetorial v em $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, satisfazendo

$$\begin{cases} \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)^n, \ \ u \in L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n), & \text{se } \ n \geqslant 3, \\ \quad u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, q < \infty, & \text{se } \ n = 2, \end{cases}, \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)^{n\times n}, & \operatorname{div}(v) = 0, \\ u \in L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)^n, & \text{se } n \geqslant 3 \\ v \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)^n \qquad \forall\, q < \infty, & \text{se } \ n = 2 \end{cases} \tag{4.5}$$

e formamos $\nabla u \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ para algum $i \in \{1, \dots n\}$.

Finalmente, temos o principal resultado deste capítulo que é o teorema a seguir sobre Compacidade Compensada, também conhecido como Lema tipo div − rot.

Teorema 4.1.2.

(1) Seja u satisfazendo (4.1)*, então $J(u) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(2) Se E, B satisfazem (4.2) *e* (4.3)*, então $E.B \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(3) Sejam u, v satisfazendo (4.4) *e* (4.5)*, então $\nabla u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Observação 4.1.3.

Além das pertinências, o resultado acima proporciona também estimativas a priori em $H^1(\mathbb{R}^n)$ em termos de $\|\nabla u\|_{L^n}^n$ (no caso de (1)), $\|E\|_{L^p} \|B\|_{L^{p'}}$ (no caso de (2)) e $\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla\|_{L^2}$ (no caso de (3)).

Demonstração.

Inicialmente, vamos provar (2) e, em seguida, afirmamos que (2) implica (1) e (3). Para provar (2), vamos admitir o seguinte lema fundamental, cuja demonstração será apresentada mais adiante na seção 4.2.

Lema 4.1.4. *Sejam E, B satisfazendo* (4.2) *e* (4.3)*. Para quaisquer α, β tais que*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{n}, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \ 1 < \beta \leqslant p', \tag{4.6}$$

existe uma constante $C = C(\phi, \alpha, \beta)$ tal que

$$|[\phi_t * (E.B)](x)| \leqslant C \left(\fint_{B(x,t)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\fint_{B(x,t)} |B|^\beta \right)^{1/\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

Aqui $B(x,t)$ é a bola aberta de centro x e raio t, e $\fint_X$ denota $\dfrac{1}{|X|} \displaystyle\int_X$, $|X|$ medida do conjunto X.

Inicialmente, notemos que basta provar a desigualdade para cada função coordenada e, em seguida, utilizar a norma da soma.

Sejam $1 < p, p' < \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e consideremos $\epsilon_1 = \dfrac{p-1}{n\,p}$, $\epsilon_2 = \dfrac{p'-1}{n\,p'}$. Então $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \dfrac{1}{n}$. Observemos que $\epsilon_1 p + 1 < p$ e $\epsilon_2 p' + 1 < p'$.

Agora, tomemos $\alpha = \dfrac{p}{1+\epsilon_1 p} < p$, $\beta = \dfrac{p'}{1+\epsilon_2 p'} < p'$. Claramente, $\dfrac{p}{1+\epsilon_1 p} > 1$ e $\dfrac{p'}{1+\epsilon_2 p'} > 1$. Ainda,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1+\epsilon_1 p}{p} + \frac{1+\epsilon_2 p'}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \epsilon_1 + \epsilon_2 = 1 + \frac{1}{n}.$$

Pelo Lema 4.1.4, existe $C = C(\phi, \alpha, \beta)$ tal que

$$|[\phi_r * (E.B)](x)| \leqslant C \left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\fint_{B(x,r)} |B|^\beta \right)^{1/\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0. \tag{4.7}$$

De $\alpha < p$ e $\left(\fint_{B(x,r)} |E|^p \right)^{1/p} < \infty$, temos $\left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} < \infty$, pois $L^p(\bar{B}(x,r)) \subset L^\alpha(\bar{B}(x,r))$. De modo análogo,

$$\left(\fint_{B(x,r)} |B|^\beta \right)^{1/\beta} < \infty.$$

Tomando o supremo à direita de (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{r>0} \left\{ \left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\fint_{B(x,r)} |B|^\beta \right)^{1/\beta} \right\} &\leqslant \sup_{r>0} \left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \sup_{r>0} \left(\fint_{B(x,r)} |B|^\beta \right)^{1/\beta} \\ &\leqslant \left(\sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |B|^\beta \right)^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Notemos que a última desigualdade é válida, pois

$$\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \leqslant \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \ \text{ para cada } r > 0$$

e, consequentemente,

$$\left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} \doteq M \ \text{ para cada } r > 0,$$

ou ainda, M é cota superior de $\left\{ \left(\fint_{B(x,r)} |E|^\alpha \right)^{1/\alpha} : r > 0 \right\}$.

Logo,

$$\sup_{r>0}\left(\fint_{B(x,r)}|E|^\alpha\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\sup_{r>0}\fint_{B(x,r)}|E|^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Analogamente,

$$\sup_{r>0}\left(\fint_{B(x,r)}|B|^\beta\right)^{1/\beta}\leqslant\left(\sup_{r>0}\fint_{B(x,r)}|B|^\beta\right)^{1/\beta}.$$

Pela definição de função Maximal de Hardy-Littlewood, temos

$$\sup_{r>0}|[\phi_r*(E.B)](x)|\leqslant C\left[\mathcal{M}(|E|^\alpha)(x)\right]^{1/\alpha}\left[\mathcal{M}(|B|^\beta)(x)\right]^{1/\beta}. \tag{4.8}$$

Como $E\in L^p$ e $1<\alpha<p$, $|E|^\alpha\in L^{\frac{p}{\alpha}}$, com $\dfrac{p}{\alpha}>1$. Além disso, já vimos que para $1<q\leqslant\infty$, o operador $\mathcal{M}:L^q\to L^q$ é limitado, isto é, $\forall f\in L^q$, $\mathcal{M}(f)\in L^q$, e mais, $\exists\, C>0$ tal que $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^q}\leqslant C\|f\|_{L^q}$. Sendo assim, $\mathcal{M}(|E|^\alpha)\in L^{\frac{p}{\alpha}}$. Analogamente, $\mathcal{M}(|B|^\beta)\in L^{\frac{p'}{\beta}}$. Com isso, em (4.8), usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{R^n}\sup_{r>0}|[\phi_r*(E.B)](x)|dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}[\mathcal{M}(|E|^\alpha)]^{1/\alpha}[\mathcal{M}(|B|^\beta)]^{\frac{1}{\beta}}dx\\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{M}(|E|^\alpha)|\frac{p}{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{M}(|B|^\beta)|^{\frac{p'}{\beta}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\simeq \|\mathcal{M}(|E|^\alpha)\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^{\frac{p}{\alpha}}}\left\|\mathcal{M}(|B|^\beta)\right\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^{\frac{p'}{\beta}}}\\
&\lesssim \||E|^\alpha\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^{\frac{p}{\alpha}}}C_2\left\||B|^\beta\right\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^{\frac{p'}{\beta}}}\\
&\simeq \||E|\|_{L^p}\||B|\|_{L^{p'}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{R^n}\sup_{r>0}|[\phi_r*(E.B)](x)|dx<\infty.$$

Portanto, $E.B\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, com $\|E\cdot B\|_{\mathcal{H}^1}\lesssim\|E\|_{L^p}\cdot\|B\|_{L^q}$.

Afirmação 4.1.5. (2) implica (1).

Suponha (2) e seja u satisfazendo

$$u\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)^n\ \forall\ q<\infty,\ \ \nabla u\in L^n(\mathbb{R}^n)^{n\times n}. \tag{4.9}$$

Queremos mostrar que $J(u)=\det(\nabla u)\in\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Faremos o caso $n=3$, isto é, $u=$

$(u_1, u_2, u_3) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$, com $u_i \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ e $\nabla u_i \in L^3(\mathbb{R}^3)^3$, $i = 1, 2, 3$.

(a) Primeiramente, vamos supor que $u_i \in C^\infty_c$, $i = 1, 2, 3$.

Temos

$$\det(\nabla u) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

Daí, tomamos

$$E = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$$

e

$$B = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \nabla u_1.$$

Com isso, $\mathrm{rot}(B) = 0$ e, por hipótese, $B \in L^3(\mathbb{R}^3)^3$.

(b) Se $u_i \notin C^\infty_c$, $i = 1, 2, 3$, seja $\varphi \in C^\infty_c$; então uma conta simples nos mostra que $\langle \mathrm{rot}(B), \varphi \rangle = 0$, isto é, $\mathrm{rot}(B) = 0$ em $\mathcal{D}'$.

(a') Novamente, supondo $u_i \in C^\infty_c$, $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$\mathrm{div}(E) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} -$$

$$- \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} = 0.$$

(b') Se para cada $i = 1, 2, 3$, $u_i \notin C^\infty_c$, existem sequências (ξ^n), (η^n) em C^∞_c tais que $u_2 = \lim \xi^n$ e $u_3 = \lim \eta^n$ em $\mathcal{D}'$. Por outro lado, sabemos que se uma sequência de funções (f_n) em C^∞_c converge a f em $\mathcal{D}'$, então a derivada $\partial_j f_n$ converge a derivada $\partial_j f, \forall j \in \mathbb{N}$. Daí, $\forall \varphi \in C^\infty_c$, após alguns cálculos, obtemos $\langle \mathrm{div}(E), \varphi \rangle = 0$, ou seja, $\mathrm{div}(E) = 0$ em $\mathcal{D}'$.

Agora verificaremos que $E \in L^{n'}(\mathbb{R}^3)^3$. Notemos que $n' = \frac{3}{2}$. Sejam E_1, E_2, E_3 as coordenadas de E. Vamos verificar que $E_i \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, para cada $i = 1, 2, 3$. Para tanto, basta mostrar que cada parcela da soma de cada E_i está em $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Observemos que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^3(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 1, 2, 3$, daí podemos aplicar a desigualdade de

Hölder para os expoentes conjugados $(2,2)$, isto é,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right|^{\frac{3}{2}}\left|\frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right|^{\frac{3}{2}} &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right|^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right|^3\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= \left\|\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right\|_{L^3}^{\frac{3}{2}}\left\|\frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right\|_{L^3}^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Logo, $E \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$. Donde concluímos, pela hipótese, que $E.B = J(u) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Afirmação 4.1.6. (2) implica (3).

Suponha (2) e sejam u, v satisfazendo (4.4) e (4.5). Mostremos que $\nabla u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $i \in \{1, \dots n\}$ fixado. De fato, basta tomar $B = \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ e $E = \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. Claramente,

$$\operatorname{rot}(B) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \;\; \operatorname{div}(E) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial(\operatorname{div}(v))}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, usando a hipótese para $p = p' = 2$, obtemos $E \cdot B = \nabla u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Com isso, concluímos que se (1), (2) e (3) valem, então $J(u)$, $E.B$, $\nabla u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Observação 4.1.7.

Para mostrar que (1), (3) segue de (2) quando $n > 3$, fazemos de modo inteiramente anólogo ao caso $n = 3$ observando que $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ enquanto

$$\operatorname{rot}(\nabla u) = 0 \;\text{ e }\; \operatorname{div}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}(v)) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, como antes, só temos que definir $E = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}, B = \nabla u_1$ para provar a afirmação que (2) implica (3) (com $p = 2$). Para a outra implicação, como antes, também escrevemos

$$J(u) = \det(\nabla u) = \nabla u_1 \cdot \sigma,$$

com

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad |\sigma| \leqslant \prod_{j=2}^{n} |\nabla u_j| \; q.t.p.,$$

e com isso, novamente, retornamos ao caso (2) com

$$B = \nabla u_1 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ e } E = \sigma \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)^n,$$

e σ representa a "permutação" que surge conforme o caso $n = 3$.

Agora, na seção a seguir, por fim, provaremos o lema fundamental admitido anteriormente para provar o Teorema .

4.2 Demonstração do Lema 4.1.4

Como $\mathrm{rot}(B) = 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, seja Π uma função escalar tal que $\nabla\Pi = B \in (L^{p'})^n$, isto é, $\partial_j\Pi \in L^{p'}$, $j = 1, \ldots, n$ (ver apêndice).

Afirmação 4.2.1. $\Pi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para algum $1 < q < \infty$.

Dividimos essa afirmação em 2 casos: $p' < n$ e $p' \geqslant n$.

(1) $\Pi \in L^{p'^*}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se $p' < n$, em que $p'^* \doteq \frac{n\,p'}{n-p'}$ é o expoente conjugado de Sobolev de p'. De fato, notemos que $\frac{1}{p'^*} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{n}$ e daí $p' < p'^*$. Seja F solução fundamental do operador $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j}$, ou seja, $\Delta F = \delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, em que δ o usual Delta de Dirac (elemento neutro da operação convolução). Então podemos escrever

$$\Pi(x) = \Delta F * \Pi(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_j F * \Pi)(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j F * \partial_j \Pi)(x) \tag{4.10}$$

Adaptando o Teorema 2.1.45, com $1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{n}$, $p' = p$, $q = p'^*$, obtemos

$$\left\|\partial_j F * \partial_j \Pi\right\|_{p'^*} \leqslant c \left\|\partial_j \Pi\right\|_{p'}.$$

Observemos que a expressão à direita tem valor finito para cada $j = 1, \ldots, n$, pois $\partial_j\Pi \in L^{p'}$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Logo, $\partial_j F * \partial_j \Pi \in L^{p'^*}$ e por (4.10), $\Pi \in L^{p'^*}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, com $p'^* > 1$, desde que $p' < n$, pois $p'^* = \frac{np'}{n-p'}$.

(2) $\Pi \in L^q_{loc}$, $\forall 1 < q < \infty$, se $p' \geqslant n$. Com efeito,

- se $p' = n$, então pelo Corolário 2.1.52, como $\partial_j\Pi \in L^{p'}, j = 1, \ldots, n$, segue $\Pi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 < q < \infty$.

- se $p' > n$, pelo teorema 2.1.51, como $\partial_j \Pi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$, Π é Hölder contínua, em particular, Π é contínua. Logo, $\Pi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 < q < \infty$.

Com isso, concluímos que $\Pi \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 < q < \infty$, como afirmamos.

Afirmação 4.2.2. $E.B = div(E\,\Pi)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Inicialmente, fazemos a seguinte observação:

Observação 4.2.3.

Se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $E_j\Pi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \ldots, n$. De fato,

- se $\Pi \in L^q_{loc}$, $\forall 1 < q < \infty$, para $p' \geqslant n$, tomemos $q = p'$. Como $E_j \in L^p$, então $E_j\Pi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E_j \Pi \partial_j < \infty$, pois

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} E_j \Pi \partial_j \right| \leqslant \|E_j\|_{L^p} \|\Pi\|_{L^{p'}} \|\partial_j \varphi\|_{L^\infty}.$$

- se $\Pi \in L^{p'^*}$, para $p' < n$, então $\Pi \in L^{p'}_{loc}$, pois $p' < p'^*$. Logo, $E_j\Pi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para cada $j = 1, \ldots, n$, também temos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E_j \Pi \partial_j < \infty$, pois

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} E_j \Pi \partial_j \right| \leqslant \|E_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Pi\|_{L^{p'}(supp(\partial_j\varphi))} \|\partial_j \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Agora, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $supp(\varphi) \subset K$. Pela observação acima, para $E = (E_1, \ldots, E_n)$ e $E\,\Pi = (E_1\Pi, \ldots, E_n\Pi)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle div(E\,\Pi), \varphi\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j (E_j \Pi), \varphi\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \langle E_j \Pi, \partial_j \varphi\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_K E_j \Pi \partial_j \varphi \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_K E_j \left[\partial_j (\Pi\varphi) - \varphi \partial_j \Pi\right] \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_K E_j \partial_j (\Pi\varphi) + \sum_{j=1}^{n} \int_K E_j \varphi \partial_j \Pi \\
&\overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_K \partial_j E_j \varphi \Pi + \sum_{j=1}^{n} \int_K (E_j \partial_j \Pi)\, \varphi \\
&= \int_K \Pi \,\langle \mathrm{div}(E), \varphi\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle E_j \partial_j \Pi, \varphi\rangle \\
&= \langle E.\nabla\Pi, \varphi\rangle \\
&= \langle E.B, \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

Notemos que em $\overset{*}{=}$ aplicamos integração por partes e o termo não integrado é nulo, pois φ se anula fora de seu suporte. Portanto,

$$\mathrm{div}(E\,\Pi) = E.B \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Daí, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e $t > 0$ escrevemos $(\check{\phi}_t)_x(y) \doteq \phi_t(x-y) \doteq t^{-n}\phi(\frac{x-y}{t})$, com $E.B \in \mathcal{D}'$, $\phi_t \in C_c^{\infty}$ e

$$
\begin{aligned}
[\phi_t * (E.B)](x) &= \left\langle E.B, (\check{\phi}_t)_x \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{div}(E\,\Pi), (\check{\phi}_t)_x \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial (E_j \Pi)}{y_j}, (\check{\phi}_t)_x \right\rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle E_j \Pi, \frac{\partial (\check{\phi}_t)_x}{\partial y_j} \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(y) E_j(y) \frac{1}{t^n} \frac{\partial \phi(\frac{x-y}{t})}{\partial y_j} \frac{1}{t} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \nabla \phi(\frac{x-y}{t}) \frac{1}{t^{n+1}} \Pi(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \phi(\frac{x-y}{t}) \frac{1}{t^{n+1}} E(y) \left[\Pi(y) - ⨍_{B_t^x} \Pi(y) \right] dy.
\end{aligned}
$$

Na última última igualdade, usamos o seguinte resultado:

Afirmação 4.2.4. $\mathrm{div}(E.\Pi) = \mathrm{div}(E.(\Pi + C)),$ para qualquer constante C, desde que $\mathrm{div}(E) = 0$ em $\mathcal{D}'$. Com efeito, dado $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{div}(E\,\Pi + C), \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j (E_j(\Pi + C)), \varphi \rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \langle E_j(\Pi + C), \partial_j \varphi \rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_K E_j(\Pi + C) \partial_j \varphi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_K \partial_j E_j (\Pi + C) \varphi \\
&\overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_K \partial_j E_j \Pi \varphi + \sum_{j=1}^{n} \int_K C \partial_j E_j \varphi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j E_j \Pi, \varphi \rangle + C \sum_{j=1}^{n} \langle D_j E_j, \varphi \rangle \\
&= \langle \mathrm{div}(E\,\Pi), \varphi \rangle + C \langle \mathrm{div}(E\,\Pi), \varphi \rangle \\
&\overset{**}{=} \langle \mathrm{div}(E\,\Pi), \varphi \rangle .
\end{aligned}
$$

Na igualdade $\overset{*}{=}$ aplicamos integração por partes como antes e tomando $C = -⨍_{B_t^x} \Pi(y) dy$, obtemos a igualdade $\stackrel{**}{=}$ acima.

Notemos que como $supp(\phi) \subset B(0,1)$, então $supp(\phi(\frac{x-y}{t})) \subset B(x,t)$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
|[\phi_t * (E.B)](x)| &\leqslant \int_{B_t^x} \left| \nabla\phi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{1}{t^n}\frac{1}{t} E(y) \left[\Pi(y) - \fint_{B_t^x} \Pi(y) \right] \right| dy \\
&\leqslant C \int_{B_t^x} \left| \frac{1}{|B_t^x|^{1/\alpha}} \frac{1}{|B_t^x|^{1/\alpha'}} E(y) \left[\left(\Pi(y) - \fint_{B_t^x} \Pi(y) \right) \frac{1}{t} \right] \right| dy \\
&\leqslant C \frac{1}{|B_t^x|^{1/\alpha}} \left[\int_{B_t^x} |E(y)|^\alpha \right]^{1/\alpha} \frac{1}{|B_t^x|^{1/\alpha'}} \left[\int_{B_t^x} \left| \left(\Pi(y) - \fint_{B_t^x} \Pi \right) \frac{1}{t} \right|^{\alpha'} \right]^{1/\alpha'} \\
&\leqslant C \left[\fint_{B_t^x} |E(y)|^\alpha \right]^{1/\alpha} \left[\fint_{B_t^x} \left| \left(\Pi(y) - \fint_{B_t^x} \Pi \right) \frac{1}{t} \right|^{\alpha'} \right]^{1/\alpha'}
\end{aligned}
$$

Queremos aplicar a desigualdade de Sobolev-Poincaré sobre a bola (ver referência [5]) para $p = \beta$, com $1 \leqslant p < n$ e $1 < \beta \leqslant p' < p'^*$. Notemos que $\alpha' = \beta^*$, pois $\dfrac{1}{\beta^*} = \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha'}$. Vimos que:

- Se $p' \geqslant n$, então $\Pi \in L^q(B_t^x)$, $\forall 1 < q < \infty$. Tomando $q = \beta$, temos $\Pi \in L^1(B_t^x)$. Além disso, como $\beta \leqslant p'$ e $\partial_j \Pi \in L^{p'}(\bar{B}_t^x)$, então $\partial_j \Pi \in L^\beta(\bar{B}_t^x)$, $j = 1, \ldots, n$.

- se $p' < n$, então $\Pi \in L^{p'^*}(\bar{B}_t^x) \subset L^{p'}(\bar{B}_t^x) \subset L^\beta(\bar{B}_t^x) \subset L^1(\bar{B}_t^x)$. Ainda, $\partial_j \Pi \in L^{p'}(\bar{B}_t^x) \subset L^\beta(\bar{B}_t^x)$.

Em outras palavras, $\Pi \in \mathcal{W}^{1,\beta}(\bar{B}_t^x)$ (o usual espaço de Sobolev das funções de L^β que tem a primeira derivada no sentido das distribuições em L^β dotado da topologia usual.) Pela desigualdade de Sobolev-Poincaré, obtemos

$$
|[\phi_t * (E.B)](x)| \leqslant C' \left[\fint_{B_t^x} |E|^\alpha \right]^{1/\alpha} \left(\fint_{B_t^x} |\nabla \Pi|^\beta \right)^{1/\beta} \quad \forall\ t > 0
$$

e o lema, enfim, está provado.

Observações:

(a) O item (1) do teorema 4.1.1 ainda vale se assumirmos que $\nabla u_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$, em que $1 < p_i < \infty$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

(b) Se usarmos a estimativa (4.8) nas "reduções" de (1) ou (3) a (2) do teorema 4.1.1, deduzimos, no caso de (1) e escolhendo $\beta = (n-1)\alpha$ que

$$\sup_{t>0} |\phi_t * \det(\nabla u)| \leqslant \mathcal{M}(|\nabla u|^\alpha)^{n/\alpha}, \tag{4.11}$$

em que $\alpha = \dfrac{n^2}{n+1}$.

No caso de (3), escolhemos $\alpha = \beta$ (por simetria) e assim $\alpha = \dfrac{2n}{n+1}$, e encontramos

$$\sup_{t>0} \left| \phi_t * \left(\nabla u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right| \leqslant \mathcal{M}(|\nabla u|^\alpha)^{1/\alpha} \mathcal{M} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^\alpha \right)^{1/\alpha}. \tag{4.12}$$

Agora, vamos enunciar uma extensão do teorema 4.1.1. Antes recordemos que, para $0 < p < 1$, definimos

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} |\phi_t * f| \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Usando 4.8, 4.11 ou 4.12, deduzimos um resultado mais forte do que o teorema 4.1.1. Primeiramente, vamos detalhar as condições necessárais para indicá-lo de forma concisa:

$$\begin{cases} \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n, \quad \text{para algum } \; n \geqslant p > \dfrac{n^2}{n+1}, \\ u \in L^{p*}(\mathbb{R}^n) \;\text{ se }\; p < n, \;\; u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \; \forall\, q < \infty, \;\text{ se }\; q = n, \\ E \in L^p(\mathbb{R}^n)^n, \quad B \in L^q(\mathbb{R}^n)^n, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} \text{com} \\ 1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < 1 + \dfrac{1}{n}, \\ \operatorname{rot}(E) = 0, \;\; \operatorname{div}(B) = 0 \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\begin{cases} \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)^n, \quad u \in L^{p*}(\mathbb{R}^n) & \text{se } \; p < n, \\ u \in L^r(\mathbb{R}^n), \;\; \forall \; r > 0 & \text{se } \; p \geqslant n, \\ \nabla v \in L^r(\mathbb{R}^n)^{n\times n}, \;\; v \in L^{p*}(\mathbb{R}^n)^n & \text{se } \; q < n, \\ v \in L^r(\mathbb{R}^n)^n, \;\; \forall \; r > 0 & \text{se } \; q \geqslant n, \;\; \operatorname{div}(v) = 0, \\ 1 < p < \infty, \; 1 < q < \infty, \;\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < 1 + \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{4.15}$$

Finalmente, apresentamos a seguir o teorema que estende 4.1.1.

Teorema 4.2.5.

(1) Seja u satisfazendo (4.13)*, então* $J(u) \in H^{p/n}(\mathbb{R}^n)$*.*

(2) Sejam E, B satisfazendo (4.14)*, então* $E \cdot B \in H^r(\mathbb{R}^n)$*, com* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*.*

(3) Seja u, v satisfazendo (4.15)*, então* $\nabla u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^r(\mathbb{R}^n)$*, com* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*.*

Demonstração.

A demonstração e maiores detalhes desse resultado podem ser encontrados na referência [4]. □

Capítulo

5

Apêndice

Existência da função escalar Π tal que $B = \nabla\Pi$ **e** $\mathrm{rot}(B) = 0$.

Vamos reescrever o problema no contexto de formas. Inicialmente, faremos algumas considerações, a saber, introduziremos a noção de formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$.

5.1 Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$

Definição 5.1.1. *Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathbb{R}^n_p$ ao conjunto (espaço vetorial) dos vetores $q - p$, $q \in \mathbb{R}^n$, com origem em p, chamado espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p. Sendo $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_0$, denotamos por $(e_i)_p = e_i - p \in \mathbb{R}^n_p$. Observe que $\{(e_1), \cdots, (e_n)_p\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n_p$. Chamamos campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ a uma aplicação ν, que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ associa um vetor $\nu(p) \in \mathbb{R}^n_p$. Podemos escrevemos $\nu(v) = a_1(p)e_1 + \cdots a_n(p)e_n$, sendo $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções que caracterizam ν. Diremos que ν é de classe C^∞ quando cada a_i o for.*

Denotemos por $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção na $i-$ésima coordenada e consideremos $(\mathbb{R}^n_p)^*$ o espaço dual de $\mathbb{R}^n_p$. Notemos que o conjunto $\{(dx_i)_p; i = 1, \cdots, n\}$ é a base dual de $\{(e_i)_p; i = 1, \cdots, n\}$, pois $(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário.

Seja $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ o espaço vetorial de todas as funções $k-$lineares alternadas $\varphi : \mathbb{R}^n_p \times \cdots \times \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$. Dados $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in (\mathbb{R}^n_p)^*$, notemos que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, em que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \det(\varphi_i(v_j))$. Em particular, o elemento $(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$, que denotaremos simplesmente por $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p$, é um elemento de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$.

Proposição 5.1.2. *O conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p; i_1 < 1_2 < \cdots < i_k,\ i_j \in \{1, \cdots, n\}\}$ é uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$.*

DEFINIÇÃO 5.1.3. *Uma $k-$forma exterior em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ associa um elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$, que em virtude da proposição anterior pode ser escrito como*

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{1_1 \cdots i_k}(p)(dx_{i_i} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_p, \;\; i_j \in \{1, \cdots, n\},$$

em que $a_{i_1 \cdots i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são aplicações. ω é dito de classe C^∞ quando cada $a_{i_1 \cdots i_k}$ o for. Convencionamos, a partir de agora, que todas as $k-$formas exteriores consideradas serão de classe C^∞. Diremos somente que ω é uma $k-$forma exterior.

Denotando simplesmente por I a $k-$upla $(i_1, \cdots, i_k)$, com $i_1 < \cdots < i_j$ e $i_j \in \{1, \cdots, n\}$, escrevemos a $k-$forma exterior ω como $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Por convenção, dizemos que uma $0-$forma exterior é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^∞.

DEFINIÇÃO 5.1.4. *Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_I b_I dx_I$ $k-$formas diferenciais. Definimos a soma de ω e φ por $\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$. E sendo $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\varphi = \sum_J b_J dx_J$, com $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $i_1 < \cdots < i_k$ e $J = (j_1, \cdots, j_s)$, $j_1 < \cdots < j_s$, definimos o produto exterior $\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$.*

PROPOSIÇÃO 5.1.5. *Sejam ω uma $k-$forma, φ uma $s-$forma e θ uma $r-$forma. Então,*

(1) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;

(2) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$;

(3) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, *se* $r = s$.

DEFINIÇÃO 5.1.6. *Seja $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma $k-$forma exterior em $\mathbb{R}^n$. Definimos a derivada exterior $d\omega$ de ω por $d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$, em que para cada função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem-se a $1-$forma exterior $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, por definição.*

PROPOSIÇÃO 5.1.7. *Com relação a derivada exterior, seguem as seguintes propriedades:*

(1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + \omega_2$;

(2) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$, *em que ω é uma $k-$forma e φ é uma $s-$forma;*

(3) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

Agora, denotamos por $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço das k-formas suaves em $\mathbb{R}^n$ e $u = \sum_{|I|=k} u_I dx_I$ um elemento típico do espaço. Dizemos que uma k-forma $u \in L^p(\mathbb{R}^n)^k$ (analogamente $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) se para cada $|I| = k$, temos $u_I \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $u_I \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$). O produto no espaço $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ pode ser definido como

$$u \cdot v = \sum_{|I|=k} u_I v_I.$$

Consideremos o complexo de De Rham dado pela derivada exterior $d : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ e $d^* : \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ a derivada co-exterior dada por

$$\langle du, v \rangle = \langle u, d^* v \rangle, \quad u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

de modo que $\langle\, , \,\rangle : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|I|=k} \int_{\mathbb{R}} u_I(x) v_I(x) dx.$$

Agora, retornemos à existência II. Queremos π tal que $d^*\pi = u$ e $d\pi = 0$. Daí, fazemos $k = 1$ ou $k = n - 1$ e obtemos o problema original com $u = E$

Como $d^*u = 0$, podemos escrever $u = d^*\pi$ tal que $d\pi = 0$. De fato, consideremos a identidade $v = (\Delta E) * v$, sendo Δ o operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e E uma solução fundamental para Δ; em paticular, $E(x) = c\,|x|^{2-n}$, $n \geqslant 3$. Reescrevendo $\Delta = dd^* + d^*d$, obtemos

$$\begin{aligned}
u &= (dd^* + d^*d)E * u \\
u &= d(E * d^*u) + d^*(E * du) \qquad (d^*u = 0) \\
u &= d^*(E * du) \qquad (\pi = E * du) \\
u &= d^*\pi.
\end{aligned}$$

Claramente, $d\pi = E * ddu = 0$, como queríamos.

Bibliografia

[1] AHLFORS, L., **Complex Analysis**, McGraw-Hill Education, New York, 1979.

[2] BREZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, 2010.

[3] CARMO, Manfredo do, **Differential Forms and Applications**, Springer-Verlag, 1994.

[4] COIFMAN, R., LIONS, P.L., MEYER, L.;, SEMMES, S. **Compensadet Compactness and Hardy Spaces**, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 72, 1993, p 247-286.

[5] EVANS, L. C., **Partial Differential Equations: Graduate Studies in Mathematics**, second edition, AMS, 2010.

[6] FOLLAND, G.B., **Real Analysis Real: Modern Techniques and Their Applications**, 2nd Edition, New York: John Wiley e Sons, 1999.

[7] FOLLAND, G.B., STEIN, E.M., **Hardy Spaces on Homogeneous Groups**, Princeton University, Press, 1982.

[8] GARCIA-CUERVA, J. and RUBIO De FRANCIA, J.L., **Weighted Norm Inequqlities and Related Topics**, Mathematics Studies 116, North-Hollan: 1985. (document), 1.1,1.2

[9] HOEPFNER, G., **Introdução aos Espaços de Hardy no Disco Unitário**, Dissertação de Mestrado: Universidade Federal de São Carlos, 2003.

[10] HOEPFNER, G., **Hardy Spaces, its Variants and Applications**, IV Workshop on Geometric Analysis of PDE and Several Complex Variable, Serra Negra: Temple University, 2007.

[11] HORMANDER, L., **The Analysis of Linear Partial Differential Operators**, Berlin: Springer-Verlag, v.1, 1983.

[12] HOUNIE, J.G., **Teoria Elementar das Distribuições**, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[13] KRANTZ, Steven G., **Explorations in Harmonic Analysis: With Applications to Complex Function Theory and the Heisenberg Group**, Birkhäuser, Boston, 2000.

[14] KRANTZ, Steven G., **A Panorama of Harmonic Analysis**, The Mathematical Association of America, Washington, 1999.

[15] RUDIN, W., **Functional Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics**, McGraw-Hill companies. New York, 1991.

[16] STEIN, E.M., **Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals**, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993.

[17] STEIN, E.M., **Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions**, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.