UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUCAS COSTA AMORIM

SIMETRIA CENTRAL NA TEORIA DAS MATRIZES: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS.

SÃO CARLOS – SP
2025

LUCAS COSTA AMORIM

SIMETRIA CENTRAL NA TEORIA DAS MATRIZES: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS.

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira

SÃO CARLOS – SP
2025

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 5/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUCAS COSTA AMORIM

SIMETRIA CENTRAL NA TEORIA DAS MATRIZES: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 19 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Leandro Nery de Oliveira
Membro da Banca 1	Adriana Ramos Pereira
Membro da Banca 2	Luis Antonio Carvalho dos Santos

Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 24/03/2025, às 16:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Carvalho dos Santos**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 25/03/2025, às 09:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Ramos Pereira**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 25/03/2025, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1781614** e o código CRC **DE5B7207**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007461/2025-16

SEI nº 1781614

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedico este trabalho a todos que de alguma forma participaram deste momento.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira pela sua orientação, apoio, paciência e incentivo durante todo o processo de elaboração deste TCC.

Sou grato à minha família e amigos pelo apoio incondicional durante toda a minha trajetória acadêmica. Agradeço aos meus pais, Salete e Vicente, por acreditarem em mim e me incentivarem a sempre buscar meus sonhos. Agradeço também aos meus amigos, Beatriz, Ghiovanna, João Vitor, Julio, Luis Felipe, Marcela, Sabrina, Stefany, pelo companheirismo, por serem meus pilares durante essa trajetória, e pelas vivênvcias, sem vocês isso não seria possível.

Finalmente, agradeço à Universidade Federal de São Carlos por me proporcionar a oportunidade de realizar este TCC. Agradeço especialmente ào Departamento de Matemática pelo acesso aos recursos e infraestrutura necessários para o desenvolvimento da pesquisa.

"Seja a mudança que você quer ver no mundo"

Mahatma Gandhi.

RESUMO

Este estudo propõe investigar o desenvolvimento das matrizes centrossimétricas ao longo dos anos. Para isso, analisaremos autores que realizaram pesquisas sobre o determinante, a inversa, os autovalores e os autovetores de matrizes centrossimétricas. A investigação abrangerá uma análise de fontes primárias e secundárias, com o objetivo de traçar o contexto histórico no qual as matrizes centrossimétricas emergiram como um tópico distinto de pesquisa matemática.

Ao analisar essas raízes históricas, poderemos estabelecer as bases do desenvolvimento inicial das matrizes centrossimétricas. Posteriormente, este estudo se concentrará em quatro marcos principais: o cálculo do determinante, da inversa, dos autovalores e dos autovetores das matrizes centrossimétricas. Explorar a relação entre esses estudos e como eles se complementaram será essencial para entender a progressão do conhecimento nesse campo.

À medida que avançamos nessa investigação histórica, obteremos uma compreensão mais profunda das origens e da evolução das matrizes centrossimétricas. Essa compreensão permitirá contextualizar melhor as contribuições significativas de Zehfuss, Muir, Hanus, Ray e Good, além de reconhecer a importância desses avanços na formação da compreensão moderna das matrizes e suas aplicações.

Palavras-chave: Matrizes centrossimétricas. Determinante. Autovalor. Autovetor. Inversa.

ABSTRACT

This study aims to investigate the development of centrosymmetric matrices over the years. To do so, we will analyze authors who conducted research on the determinant, the inverse, the eigenvalues, and the eigenvectors of centrosymmetric matrices. The investigation will encompass an analysis of primary and secondary sources, with the goal of outlining the historical context in which centrosymmetric matrices emerged as a distinct topic of mathematical research.

By analyzing these historical roots, we will be able to establish the foundations of the early development of centrosymmetric matrices. Subsequently, this study will focus on four main milestones: the calculation of the determinant, the inverse, the eigenvalues, and the eigenvectors of centrosymmetric matrices. Exploring the relationship between these studies and how they complemented each other will be essential to understanding the progression of knowledge in this field.

As we advance in this historical investigation, we will gain a deeper understanding of the origins and evolution of centrosymmetric matrices. This understanding will allow us to better contextualize the significant contributions of Zehfuss, Muir, Hanus, Ray, and Good, as well as recognize the importance of these advancements in shaping modern understanding of matrices and their applications.

Keywords: Centrosymmetric matrices. Determinant. Eigenvalue. Eigenvector. Inverse.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Johann Georg Zehfuss - Fonte: MathsHistory (**mathshistory**). 36
Figura 2 – Destaque do periódico Zeitschrift fur Mathematik und Physik 37
Figura 3 – Imagem das matrizes no periódico 37
Figura 4 – Imagem das matrizes no periódico 39
Figura 5 – Paul Hanus - Fonte: (**wikisource**) 40
Figura 6 – Capa do livro de Paul Hanus 40
Figura 7 – Thomas Muir - Fonte:(**wikipedia**) 41
Figura 8 – Capa do livro de Thomas Muir - Edição publicada em 1933 41

Figura 9 – Irving John Good (**RadioSefarad**) 46
Figura 10 – Fonte:(**newcastle**) 53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 PRELIMINARES 10

2.1 DEFINIÇÃO 11

2.2 OPERAÇÃO COM MATRIZES 11

2.2.1 Multiplicação de Matrizes 17

2.3 TIPOS DE MATRIZES 20

2.3.1 Diagonal principal e secundária 21

2.4 DETERMINANTE 26

2.5 ESPAÇO VETORIAL 29

2.6 TRANSFORMAÇÕES LINEARES 32

2.7 AUTOVALORES E AUTOVETORES 33

3 AS MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS NO SÉCULO XIX E PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XX 35

3.1 PRIMEIRA DEFINIÇÃO - JOHANN GEORG ZEHFUSS 36

3.2 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ CENTROSSIMÉTRICA 39

3.2.1 Exemplo A 42

4 AS MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS NA DÉCADA DE 1970 45

4.1 A INVERSA DE UMA MATRIZ CENTROSSIMÉTRICA 45

4.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS SIMÉTRICAS 52

4.2.1 Propriedades das matrizes de V_n 54

4.2.2 Principais teoremas 62

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

REFERÊNCIAS 70

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo investigar a evolução das matrizes centrossimétricas, desde seu primeiro registro com Zehfuss no século XIX até os avanços significativos ocorridos no século XX, com ênfase especial na análise do artigo (Cantoni; Butler, 1976). Para isso, a monografia está organizada em capítulos que apresentam uma abordagem progressiva do tema, cobrindo desde os conceitos preliminares até as aplicações mais avançadas.

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos fundamentais da álgebra linear, conforme expostos por Boldrini (**boldrini1980algebra**) e Nery (**nery2023algebra**), com o objetivo de fornecer uma base teórica sólida para o estudo das matrizes centrossimétricas. Inicialmente, são introduzidas as definições básicas de matrizes e suas principais classificações, incluindo matrizes quadradas, nulas, coluna, linha, diagonais e identidade. Em seguida, são exploradas as operações matriciais essenciais, como adição, multiplicação e transposição, fundamentais para a manipulação e análise dessas estruturas.

Além disso, o capítulo discute a importância dos determinantes e das transformações lineares, conceitos indispensáveis para a investigação das propriedades algébricas das matrizes centrossimétricas. Dessa forma, este capítulo estabelece os alicerces teóricos necessários para o aprofundamento do tema nos capítulos subsequentes, garantindo uma abordagem consistente e estruturada ao longo do trabalho.

O Capítulo 3 apresenta a origem histórica das matrizes centrossimétricas, destacando as primeiras pesquisas realizadas sobre o tema. O primeiro registro formal dessas matrizes foi feito por Johann Georg Zehfuss, no século XIX. Zehfuss foi um dos pioneiros no estudo das propriedades estruturais das matrizes, e seus trabalhos lançaram as bases para investigações posteriores. Além dele, são analisadas as contribuições de Thomas Muir e Paul Hanus, que deram continuidade ao estudo, formando uma base de conhecimento para que, posteriormente, outros matemáticos pudessem dar sequência a suas pesquisas.

No Capítulo 4, são explorados os avanços ocorridos no século XX, especialmente durante a década de 1970. Primeiramente, são apresentadas as contribuições de Ray e Good, que desenvolveram métodos mais eficientes para o cálculo da inversa das matrizes centrossimétricas. Esses métodos trouxeram um avanço significativo para a manipulação dessas matrizes e influenciaram estudos posteriores sobre suas propriedades algébricas.

Na sequência, o capítulo foca no artigo de Cantoni e Butler (1976), um dos trabalhos mais relevantes já publicados sobre matrizes centrossimétricas simétricas. O artigo traz uma análise detalhada sobre os autovalores e autovetores dessas matrizes, introduzindo teoremas fundamentais que consolidam e ampliam o conhecimento sobre o tema. A investigação dos resultados obtidos por Cantoni e Butler é um dos principais objetivos deste trabalho, pois sua pesquisa representa um marco na evolução do estudo das matrizes centrossimétricas e suas aplicações.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos a definição e os tipos de matrizes, bem como suas principais propriedades.

Afinal, o que é uma matriz? Matrizes são tabelas retangulares organizadas em linhas e colunas, formadas por números ou expressões, que pertencem a um conjunto numérico. Elas são usadas em várias áreas da matemática e ciência, como álgebra linear, para representar e manipular sistemas de equações lineares, transformações lineares e muitos outros conceitos.

Considere as tabelas a seguir. Na primeira tabela, ao recolhermos os dados referentes a idade (em anos), altura (em cm) e peso (em kg) de um grupo de 3 pessoas, temos.

Nome	Idade	Altura	Peso
João	23	175	70
Maria	31	182	85
Isabela	24	181	73

A representação dos dados da tabela acima pode ser feita como no exemplo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 23 & 175 & 70 \\ 31 & 182 & 85 \\ 24 & 181 & 73 \end{pmatrix}.$$

Chamamos tal representação de matriz. Agora, na segunda tabela, temos uma tabela com informações de três produtos vendidos ao longo de três meses: shampoo, condicionador e sabonete. Sendo vendidos em janeiro, fevereiro e março.

Produto	Janeiro	Fevereiro	Março
Shampoo	120	135	140
Condicionador	80	90	85
Sabonete	200	180	190

A representação da tabela acima pode ser feita como no exemplo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 120 & 135 & 140 \\ 80 & 90 & 85 \\ 200 & 180 & 190 \end{pmatrix}.$$

Quando pegamos uma tabela e a organizamos em linhas e colunas, eliminando os **elementos variáveis** e **convertendo as informações em dados numéricos**, criamos uma estrutura mais clara e objetiva, que facilita a análise, a manipulação e a visualização das informações.

2.1 DEFINIÇÃO

Como vimos anteriormente, podemos afirmar que uma matriz nada mais é do que uma tabela disposta em linhas e colunas. Anton dá uma definição interessante sobre matrizes, diz ele:

Definição 2.1. *"Uma matriz é um agrupamento retangular de números. Os números neste agrupamento são chamados entradas da matriz"* (**anton2012algebra**).

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções ou até mesmo outras matrizes.

Abaixo, veremos uma demonstração de uma matriz em sua forma geral. A matriz A abaixo é de forma $m \times n$, onde m representa o número de linhas e n representa o número de colunas. Podemos notar que o nome da matriz A é sempre dada em letra maíuscula, e as letras referentes ao número de linhas m e colunas n são sempre em letras minusculas; veja no exemplo abaixo:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

A notação $A_{m\times n}$ indica a quantidade de linhas e colunas da matriz e, neste caso, diz-se que a matriz $A_{m\times n}$ tem *ordem* m por n. Indicamos o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Também podemos encontrar da seguinte maneira, onde A representa a matriz e a_{ij} representam os elementos.

$$A = [a_{ij}]_{n\times n},$$

onde a_{ij} representa o elemento na linha i e coluna j da matriz, e n é o número de linhas (ou colunas) da matriz.

2.2 OPERAÇÃO COM MATRIZES

Como vimos anteriormente, matrizes podem ser entendidas como representações de tabelas. Dito isso, podemos fazer operações com tabelas? E a resposta é sim, a seguir, veremos um pouco sobre adição de matrizes.

Adição

A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, é também uma matriz $m \times n$ que denotaremos por $A + B$ onde os elementos são a soma dos elementos correspondetes de A e B. Isto é,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplo 2.1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrizes pertencentes ao conjunto $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, então

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dada as matrizes $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$ temos que o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ possui as seguintes propriedades:

a) **Comutatividade da adição de matrizes:**

$$A + B = B + A.$$

Demonstração: Usando a notação para matrizes definidas anteriormente, temos

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= (b_{ij} + a_{ij}) \\ &= (b_{ij}) + (a_{ij}) \\ &= B + A. \end{aligned}$$

b) **Associatividade da adição de matrizes:**

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= (a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij})) \\ &= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) \\ &= ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) \\ &= ((a_{ij})+(b_{ij})+(c_{ij})) \\ &= (A+B)+C. \end{aligned}$$

c) **Existência do elemento neutro para a adição:**

$$A+0=A,$$

onde 0 é a matriz nula $m \times n$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} A+0 &= (a_{ij})+(0) \\ &= (a_{ij}+0) \\ &= (0+a_{ij}) \\ &= (a_{ij}) \\ &= A. \end{aligned}$$

d) **Existência do elemento oposto:** Para toda matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe uma matriz $-A$ tal que:

$$A+(-A)=0.$$

Demonstração: Se definimos $-A=(-a_{ij})$, então

$$\begin{aligned} A+(-A) &= (a_{ij})+(-a_{ij}) \\ &= (a_{ij}+(-a_{ij})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicação por escalar

A multiplicação de uma matriz A por um escalar λ, denotada por λA, resulta em uma nova matriz B de mesma ordem que A. Onde cada elemento b_{ij} de B é obtido multiplicando o elemento correspondente a_{ij} de A pelo escalar λ:

Exemplo 2.2. Seja $\lambda=-3$, e considere a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Então:

$$-3 \cdot A = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3. Seja $\lambda = 2$, e considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Então:

$$2 \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.4. Seja $\lambda = \frac{1}{2}$, e considere a matriz $C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$. Então:

$$\frac{1}{2} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriedades: Dada as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e os números k, k_1 e k_2, temos:

a) **Distributividade sobre a soma de matrizes:**

$$k(A+B) = kA + kB$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k(a_{ij} + b_{ij}) \\ &= (k(a_{ij} + b_{ij})) \\ &= (ka_{ij}) + (kb_{ij}) \\ &= kA + kB. \end{aligned}$$

b) **Distributividade sobre a soma de escalares:**

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)A &= (k_1 + k_2)(a_{ij}) \\ &= (k_1a_{ij}) + (k_2a_{ij}) \\ &= k_1A + k_2A. \end{aligned}$$

Além disso, a propriedade:

$$0 \cdot A = 0,$$

isto é, se multiplicarmos o número 0 por qualquer matriz, teremos a matriz nula.

c) **Associatividade da multiplicação por escalares:**

$$k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} k_1(k_2A) &= k_1((k_2a_{ij})) \\ &= (k_1(k_2.a_{ij})) \\ &= ((k_1k_2)a_{ij}) \\ &= (k_1k_2)A. \end{aligned}$$

d) **Elemento neutro multiplicativo (número** 1**):**

$$1 \cdot A = A$$

Demonstração: De fato, note que

$$1 \cdot A = (a_{ij}) \cdot 1 = (a_{ij} \cdot 1) = A.$$

Transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, podemos obter uma nova matriz $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada **transposta de** A.

A transposta de uma matriz possui as seguintes propriedades:

a) $(A^T)^T = A$, ou seja, a transposta da transposta é a própria matriz.

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$, ou seja, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.

c) $(k \times A)^T = k \times A^T$, onde k é qualquer escalar.

Exemplo 2.5. Dada a matriz A, sua transposta é calculada como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para a matriz B, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.6. Exemplificando a propriedade $(A^T)^T = A$, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A^T)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Exemplo 2.7. Exemplificando a propriedade $(A+B)^T = A^T + B^T$, considere:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (A+B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

E:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Matriz Simétrica

Uma **matriz simétrica** é uma matriz quadrada em que os elementos são simétricos em relação à sua diagonal principal, ou seja, a entrada na linha i e coluna j é igual à entrada na linha j e coluna i para todas as posições i e j, isto é, quando

$$a_{ij} = a_{ji}, \ \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mais ainda, a matriz transposta de uma matriz simétrica é a própria matriz, i.e., se a matriz A é simétrica então $A^T = A$.

Exemplo 2.8. Abaixo vemos as matrizes L, J e K, e suas respectivas transpostas L^T, J^T e K^T:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad K^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes L e J são matrizes simétricas enquanto a matriz K não é simétrica.

2.2.1 Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de duas matrizes só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda. Dados $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto $C = A \times B$ resulta em uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, onde cada elemento c_{ij} é calculado como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$

.

Segue abaixo o cálculo detalhado de alguns exemplos de multiplicação entre matrizes:

Exemplo 2.9. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Os produtos são calculados como segue:

Exemplo 2.10. a) O produto BA:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\times 1+6\times 3 & 5\times 2+6\times 4 \\ 7\times 1+8\times 3 & 7\times 2+8\times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) O produto AC:

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\times 9+2\times 11 & 1\times 10+2\times 12 \\ 3\times 9+4\times 11 & 3\times 10+4\times 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 31 & 34 \\ 67 & 74 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) O produto CA:

$$\begin{aligned} CA &= \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9\times 1+10\times 3 & 9\times 2+10\times 4 \\ 11\times 1+12\times 3 & 11\times 2+12\times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 39 & 58 \\ 47 & 70 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) O produto CB:

$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9\times 5+10\times 7 & 9\times 6+10\times 8 \\ 11\times 5+12\times 7 & 11\times 6+12\times 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 125 & 146 \\ 139 & 176 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes quaisquer e I a matriz identidade. Se o produto entre as matrizes está bem definido, então a multiplicação de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

a) Em muito dos casos $A\times B \neq B\times A$ (podendo um estar definido e outro não).

b) $A\times I = I\times A = A$.

c) $A\times (B+C) = AB+AC$ (distributiva à esquerda da multiplicação em relação a soma).

d) $(A+B)\times C = AC+BC$ (distributiva à direita da multiplicação em relação a soma).

e) $(A\times B)\times C = A\times (B\times C)$ (associatividade).

f) $(A\times B)^t = B^t\times A^t$.

g) $0\times A = 0$ e $A\times 0 = 0$

h) $(kA)B = k(AB)$

Matriz contraidentidade quadrada

Uma **matriz contraidentidade** (ou **matriz anti-identidade**) é uma matriz quadrada em que os elementos da diagonal secundária (a diagonal que vai do canto inferior esquerdo ao canto superior direito) são iguais a 1, e todos os outros elementos são iguais a 0. Em outras palavras, sendo $J = (j_{ij})_{n\times n}$ uma matriz contraidentidade, então

$$j_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i+j = n+1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.11. Seja a matriz contraidentidade J_3 de ordem 3×3 e a matriz A também de ordem 3×3:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vamos calcular o efeito da matriz contraidentidade J_3 sobre A:

– **Produto J_3A:** O produto J_3A é dado por:

$$J_3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Efetuando a multiplicação (linha por coluna):

$$J_3A = \begin{pmatrix} (0\cdot 1+0\cdot 4+1\cdot 7) & (0\cdot 2+0\cdot 5+1\cdot 8) & (0\cdot 3+0\cdot 6+1\cdot 9) \\ (0\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 7) & (0\cdot 2+1\cdot 5+0\cdot 8) & (0\cdot 3+1\cdot 6+0\cdot 9) \\ (1\cdot 1+0\cdot 4+0\cdot 7) & (1\cdot 2+0\cdot 5+0\cdot 8) & (1\cdot 3+0\cdot 6+0\cdot 9) \end{pmatrix}.$$

Simplificando:

$$J_3A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, a multiplicação à esquerda por J_3 resultou em uma permutação entre as linhas da matriz A.

– **Produto AJ_3:** O produto AJ_3 é dado por:

$$AJ_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efetuando a multiplicação (linha por coluna):

$$AJ_3 = \begin{pmatrix} (1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1) & (1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0) & (1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0) \\ (4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 1) & (4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 0) & (4\cdot 1+5\cdot 0+6\cdot 0) \\ (7\cdot 0+8\cdot 0+9\cdot 1) & (7\cdot 0+8\cdot 1+9\cdot 0) & (7\cdot 1+8\cdot 0+9\cdot 0) \end{pmatrix}.$$

Simplificando:

$$AJ_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, a multiplicação à direita por J_3 resultou em uma permutação entre as colunas da matriz A.

Assim, observamos uma característica importante das matrizes contraidentidade: quando multiplicadas pela esquerda de uma matriz qualquer, elas invertem a ordem das linhas dessa matriz. Por outro lado, ao serem multiplicadas pela direita, ocorre a inversão da ordem das colunas da matriz multiplicada.

2.3 TIPOS DE MATRIZES

Nesta seção, apresentamos os tipos de matrizes mais usuais e que serão usadas como meio para compreender o estudo acerca das matrizes centrossimetricas.

Matriz Quadrada

Uma **matriz quadrada** é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, ou seja, sua ordem é $n \times n$, onde n representa o número de linhas e também o número de colunas. Uma matriz quadrada A de ordem n é geralmente definida da seguinte maneira:

Exemplo 2.12. Temos como exemplos de matrizes quadradas, as matrizes A, B e C dadas abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

2.3.1 Diagonal principal e secundária

Uma matriz quadrada é uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Em uma matriz quadrada, existem duas diagonais importantes: a **diagonal principal** e a **diagonal secundária.**

A seguir, apresentamos as definições formais dessas duas diagonais para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$:

A **diagonal principal** de uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ é composta pelos elementos a_{ii}, onde o índice da linha é igual ao índice da coluna ($i = j$). Esses elementos se estendem da posição superior esquerda (a_{11}) até a posição inferior direita (a_{nn}) da matriz.

Por exemplo, para a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix},$$

os elementos da diagonal principal são a_{11}, a_{22}, a_{33}.

A **diagonal secundária** de uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ é composta pelos elementos $a_{i,n+1-i}$, onde a soma dos índices de linha e coluna é igual a $n+1$. Esses elementos vão da posição superior direita (a_{1n}) até a posição inferior esquerda (a_{n1}) da matriz.

Por exemplo, para a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

os elementos da diagonal secundária são a_{13}, a_{22}, a_{31}, destacados a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Termo principal

O **termo principal** de uma matriz é dado pela multiplicação de todos os elementos da diagonal principal.

Exemplo 2.13. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

O termo principal dessa matriz é dado pelo produto de a_{11}, a_{22} e a_{33}.

Termo secundário

Similar ao que vimos anteriormente. O **termo secundario** é dado pelo produto dos elementos da diagonal secundaria.

Exemplo 2.14. Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

O termo secundario na matriz B é dado pela multiplicação dos elementos da diagonal secundaria que são b_{13}, b_{22} e b_{31}

Exemplo 2.15. Sejam as matrizes B e C, dadas por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

a) O termo principal de $B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} = 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$.

b) O termo secundário de $B = b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

c) O termo principal de $C = a_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot c_{44} = 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 = 2112$

d) O termo secundário de $C = c_{14} \cdot c_{23} \cdot c_{32} \cdot c_{41} = 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 = 3640$.

Matriz Nula

Uma **matriz nula**, também conhecida como **matriz zero**, é uma matriz em que todas as suas entradas são iguais a zero. Formalmente, uma matriz nula O de ordem $m \times n$ é definida da seguinte maneira:

$$O = [o_{ij}]_{m \times n},$$

onde $o_{ij} = 0$ para todos os valores válidos de i e j.

Exemplo 2.16. As matrizes A, B e C abaixo são matrizes nulas de ordem 3, 2 e 1, respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{1\times 1}. \end{aligned}$$

Matriz Coluna

Uma matriz que tem apenas uma coluna e m linhas é formalmente chamada de **matriz coluna**.

Exemplo 2.17. As matrizes abaixo são exemplo de matrizes colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{m\times 1}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{4\times 1} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}_{3\times 1},$$

onde:

- m é o número de linhas (ou elementos) da matriz;
- Cada a_i é um elemento da matriz, localizado na i-ésima linha.

Matriz linha

Uma **matriz linha** é uma matriz $1 \times n$ que consiste em n elementos distribuídos em uma única linha e n colunas. Ela é representada da seguinte forma, onde c_i denota o elemento na i

-ésima linha da matriz coluna.

Como veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 2.18. As matrizes a seguir são matrizes linhas:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}_{1\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_{1\times 2}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 3}.$$

Matriz Diagonal

Uma **matriz quadrada diagonal** $m = n$ é definida formalmente como uma matriz onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Em outras palavras, todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

De forma mais intuitiva, podemos dizer que uma matriz diagonal é uma matriz quadrada cuja única característica notável é que os elementos diferentes dos da diagonal principal são todos iguais a zero. Seguem abaixo alguns exemplos:

Exemplo 2.19. As matrizes a seguir são diagonais

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

A seguir, veremos um caso especial de matriz diagonal, a matriz identidade quadrada.

Matriz Identidade Quadrada

A **matriz identidade quadrada** , denotada por I_n, é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ cujos elementos na diagonal principal são iguais a 1, enquanto todos os demais elementos são iguais a 0. Em notação formal:

$$I_n = \left(i_{ij}\right), \quad \text{onde} \quad i_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplo 2.20. Abaixo vemos exemplos de matrizes identidade quadrada:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2},$$

onde n é a ordem da matriz (número de linhas e colunas). A matriz identidade é notável porque, quando multiplicada por uma outra matriz A, deixa a matriz A inalterada, sem afetar suas

propriedades.

Matriz Inversa

Uma **matriz inversa** é definida para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ que seja invertível (ou seja, não singular). Dizemos que A possui inversa se existir uma matriz $B \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz A^{-1} é única e denotada por A^{-1}. É importante notar que A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Exemplo 2.21. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O determinante de A é calculado por

$$\det(A) = 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível e sua inversa é dada por

$$A^{-'} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifica-se que:

$$AA^{-'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\cdot 2 + 3\cdot(-1)) & (2\cdot(-3) + 3\cdot 2) \\ (1\cdot 2 + 2\cdot(-1)) & (1\cdot(-3) + 2\cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Exemplo 2.22. Seja

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

O determinante de B é

$$\det(B) = 4\cdot 6 - 7\cdot 2 = 24 - 14 = 10 \neq 0.$$

Logo, B é invertível e sua inversa é dada por

$$B^{-'} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

2.4 DETERMINANTE

Determinante é uma função numérica associada a uma matriz quadrada A de ordem n, denotada por $\det(A)$. Ele é amplamente utilizado na álgebra linear para verificar se uma matriz é invertível, para calcular volumes em transformações lineares e em diversos outros contextos matemáticos e computacionais.

Para uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, o determinante é definido por meio de uma soma alternada dos produtos dos elementos da matriz por seus respectivos cofatores.

A este método dá-se o nome de **método de Laplace**, também conhecido como **expansão por cofatores**, é uma técnica utilizada para calcular o determinante de matrizes quadradas de qualquer ordem. Esse método se baseia na ideia de decompor o determinante de uma matriz maior em determinantes de matrizes menores, chamadas submatrizes.

A essência do método está em escolher uma linha ou coluna da matriz original e calcular o determinante como uma soma alternada dos produtos dos elementos dessa linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores. O cofator de um elemento é obtido a partir do determinante da submatriz formada ao eliminar a linha e a coluna do elemento em questão.

Matematicamente, dado uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, o determinante pode ser calculado por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times C_{ij} \quad \text{(linha } i \text{ fixada)},$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times C_{ij} \quad \text{(coluna } j \text{ fixada)},$$

onde:

- a_{ij} é o elemento da matriz na posição i, j,
- C_{ij} é o cofator correspondente, dado por $C_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$,
- A_{ij} é a submatriz obtida ao remover a linha i e a coluna j de A.

O método de Laplace é especialmente vantajoso quando há linhas ou colunas com muitos zeros, pois simplifica os cálculos ao eliminar termos associados aos zeros. Por este método, o determinante de uma matriz de ordem n é calculado por

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot C_{i1},$$

onde a_{i1} é o elemento da i-ésima linha e primeira coluna de A, e C_{i1} é o cofator correspondente a

esse elemento. Os cofatores são calculados pela fórmula:

$$C_{i1} = (-1)^{i+1} \cdot \det(A_{i1}),$$

onde A_{i1} é a submatriz obtida ao remover a i-ésima linha e a primeira coluna de A.

O determinante pode ser representado simbolicamente como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A seguir, apresentamos três exemplos práticos:

Exemplo 2.23. Considere a matriz quadrada A de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

O determinante de A é calculado pelo método de Laplace, expandindo pela primeira linha:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}),$$

onde A_{11} e A_{12} são os menores complementares associados a a_{11} e a_{12}, respectivamente. Para uma matriz 2×2, esses menores são números escalares. Assim:

$$\det(A) = 3 \cdot (2) - 5 \cdot (7).$$

Efetuando os cálculos:

$$\det(A) = (3 \cdot 2) - (5 \cdot 7) = 6 - 35 = -29.$$

Portanto, o determinante de A é $\det(A) = -29$.

Exemplo 2.24. Considere a matriz quadrada B de ordem 3:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

O determinante de B é dado por:

$$\det(B) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os cofatores:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = (4\cdot 6) - (5\cdot 0) = 24,$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 6) - (5\cdot 1) = -5,$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0\cdot 0) - (4\cdot 1) = -4.$$

Portanto:

$$\det(B) = 1\cdot 24 - 2\cdot(-5) + 3\cdot(-4) = 24 + 10 - 12 = 22.$$

Exemplo 2.25. Considere a matriz quadrada C de ordem 4:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\det(C)$, expandimos pela **primeira linha**:

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j}\cdot c_{1j}\cdot \det(C_{1j}) \\ &= 2\cdot\det(C_{11}) - 1\cdot\det(C_{12}) + 3\cdot\det(C_{13}) + 0\cdot\det(C_{14}). \end{aligned}$$

Calculamos os determinantes das submatrizes C_{1j}:

1. Cálculo de $\det(C_{11})$:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ \det(C_{11}) &= 4\times(6\times 8 - 2\times 0) - 5\times(0\times 8 - 2\times 1) + 1\times(0\times 0 - 6\times 1) \\ &= 4\times 48 + 5\times 2 - 6 \\ &= 192 + 10 - 6 \\ &= 196. \end{aligned}$$

2. Cálculo de $\det(C_{12})$:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ \det(C_{12}) &= 0\times(6\times 8-2\times 0)-5\times(1\times 8-2\times 3)+1\times(1\times 0-6\times 3) \\ &= 0-5\times(8-6)-18 \\ &= -10-18 \\ &= -28. \end{aligned}$$

3. Cálculo de $\det(C_{13})$:

$$\begin{aligned} C_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \\ \det(C_{13}) &= 0-4\times(1\times 8-2\times 3)+1\times(1\times 1-0\times 3) \\ &= -4\times 2+1 \\ &= -8+1 \\ &= -7. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados:

$$\begin{aligned} \det(C) &= 2\times 196-1\times(-28)+3\times(-7) \\ &= 392+28-21 \\ &= 399. \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz C é:

$$\det(C) = 399.$$

2.5 ESPAÇO VETORIAL

Nesta seção, apresentaremos a definição em seguida as propriedades a respeito de um espaço vetorial.

Definição de Espaço Vetorial

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo (tipicamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e V um conjunto no qual estão definidas as seguintes operações

$$\begin{array}{rlccc} \text{Soma:} & + : & V \times V & \to & V \\ & & (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

$$\begin{array}{rlccc} \text{Produto:} & \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & & (a,v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

Tal conjunto V é chamado de **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ se para cada $u,v,w \in V$ e $a,b \in \mathbb{K}$, o conjunto V satisfaz as seguintes propriedades:

a) **Comutativa**: $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

b) **Associativa**: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.

c) **Elemento Neutro**: Existe um vetor nulo $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

d) **Elemento Oposto**: Para cada $\mathbf{v} \in V$, existe um vetor $-\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

e) **Distributividade Escalar sobre a Adição Vetorial**: $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$.

f) **Distributividade de um Vetor sobre a Adição de Escalares**: $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$.

g) **Associatividade da Multiplicação Escalar**: $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$.

h) **Elemento Neutro Multiplicativo**: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$, onde 1 é o elemento neutro multiplicativo em $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.26. O conjunto $\mathbb{R}^2$, juntamente com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Devemos verificar que as propriedades que definem um espaço vetorial são satisfeitas.

a) **Associatividade da adição:**

Para $\mathbf{u} = (x_1,y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2,y_2)$ e $\mathbf{w} = (x_3,y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= [(x_1+x_2)+(y_1+y_2)]+(x_3,y_3) \\ &= ((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3) \\ &= (x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3)) \\ &= (x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3) \\ &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}). \end{aligned}$$

b) **Comutatividade da adição:**

Para $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (x_1+x_2, y_1+y_2), \\ &= (x_2+x_1, y_2+y_1) \\ &= \mathbf{v}+\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Como $x_1+x_2 = x_2+x_1$ e $y_1+y_2 = y_2+y_1$, pois são elementos do corpo $\mathbb{R}$ concluímos que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$. Logo, a adição é comutativa.

c) **Elemento neutro aditivo:**

O vetor $\mathbf{0} = (0,0)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{0} &= (x_1, y_1)+(0,0) \\ &= (x_1+0, y_1+0) \\ &= (x_1, y_1) = \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{0}$ é o elemento neutro aditivo.

d) **Elemento oposto:**

Para cada $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, existe $-\mathbf{u} = (-x_1, -y_1)$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= (x_1, y_1)+(-x_1, -y_1) \\ &= (x_1-x_1, y_1-y_1) \\ &= (0,0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Portanto, $-\mathbf{u}$ é o elemento oposto aditivo.

e) **Distributividade do produto escalar em relação à adição de escalares:** Para escalares k_1 e k_2 e vetor $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, temos:

$$\begin{aligned} (k_1+k_2)\cdot\mathbf{u} &= ((k_1+k_2)x_1, (k_1+k_2)y_1) \\ &= (k_1x_1+k_2x_1, k_1y_1+k_2y_2) \\ &= (k_1x_1, k_1y_1)+(k_2x_1, k_2y_1) \\ &= k_1(x_1, y_1)+k_2(x_1, y_1) \\ &= k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Logo, a propriedade é satisfeita.

f) **Associatividade do produto escalar:** Para escalares k_1, k_2 e vetor $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, temos:

$$\begin{aligned}(k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbf{u} &= ((k_1 k_2)x_1, (k_1 k_2)y_1) \\ &= (k_1(k_2 x_1), k_1(k_2 y_1)) \\ &= k_1(k_2 x_1, k_2 y_1) \\ &= k_1[k_2(x_1, y_1)] \\ &= k_1(k_2 \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Logo, a propriedade é satisfeita.

g) **Elemento neutro multiplicativo:** Para o escalar 1 e vetor $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, temos:

$$1 \cdot \mathbf{u} = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = \mathbf{u}$$

Logo, 1 é o elemento neutro multiplicativo.

h) **Distributividade do produto escalar em relação à adição de vetores:** Para um escalar k e vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, temos:

$$\begin{aligned}k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2)) \\ &= (kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2) \\ &= (kx_1, ky_1) + (kx_2, ky_2) \\ &= k(x_1, y_1) + k(x_2, y_2) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Logo, a propriedade é satisfeita.

2.6 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Uma **transformação linear** é uma aplicação entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição e multiplicação por escalar. Formalmente, uma transformação $T : V \to W$ é linear se satisfaz:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \\ T(c\mathbf{u}) &= c \cdot T(\mathbf{u}),\end{aligned}$$

$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$.

Quando $V = W$, a transformação $T : V \to V$ é chamada de *operador linear*.

Quando V e W são finito-dimensionais, a transformação linear $T : V \to W$ pode ser representada por uma matriz A. Por exemplo, se $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$, então a matriz da transformação T tem ordem $m \times n$. Para uma discussão mais detalhada sobre transformações lineares e matrizes, verifique os textos de (**boldrini1980algebra**), (**anton2012algebra**) e (**nery2023algebra**).

Exemplo 2.27. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza uma rotação no plano cartesiano. A matriz que representa essa transformação para um ângulo θ é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Se aplicarmos T a um vetor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, o resultado é:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser definida por $T(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$.

2.7 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um vetor v é um autovetor de T se existir um escalar $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é chamado de autovalor de T.

Seja $A = [T]$ a matriz de T em relação à base canônica. Considere $v \in V$, com v não nulo, um autovetor de A. Então, temos que:

$$Av = \lambda v \implies Av - \lambda v = 0 \implies Av - \lambda Iv = 0 \implies (A - \lambda I)v = 0,$$

onde $Iv = v$, sendo I a matriz identidade de ordem n. Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, então $v \neq 0$ é o único vetor que satisfaz a equação acima. Como estamos supondo que $v \neq 0$, deve-se concluir que $\det(A - \lambda I) = 0$.

De modo geral, se X é uma matriz tal que $\det(X) \neq 0$, então $v = 0$ é a única solução para $Xv = 0$. Isso pode ser resumido na seguinte afirmação: "Se v é um autovetor de A associado a um autovalor λ, então $\det(A - \lambda I) = 0$".

Exemplo 2.28. Seja a matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar os autovalores e autovetores dessa matriz.

a) **Encontre os autovalores:**

Para encontrar os autovalores λ, precisamos resolver a equação característica: $\det(A - \lambda I) = 0$. Onde I é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Subtraindo λI de A, obtemos

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Agora, calculamos o determinante:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 1$$

Simplificando:

$$(2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Agora, resolvemos $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ usando a fórmula de Bhaskara:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

b) **Encontre os autovetores:**

Para cada autovalor, precisamos resolver o sistema $(A - \lambda I)v = 0$ para encontrar o autovetor correspondente.

c) Para $\lambda_1 = 3$:

Substituindo $\lambda_1 = 3$ em $A - \lambda I$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo $(A - 3I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isso nos dá o sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

3 AS MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS NO SÉCULO XIX E PRIMEIRA METADE DO SÉCULO XX

Neste capítulo, daremos início as matrizes centrossimétricas, desde seus primeiro registro com Georg Zehfuss (**Georg Zehfuss**). Posteriormente o seu desenvolvimento com outros autores, como Thomas Muir e Paul Hanus. Começamos definindo matrizes centrossimétricas.

Definição 3.1. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é dita centrossimétrica se for simétrica em relação ao seu centro. Isto é, se

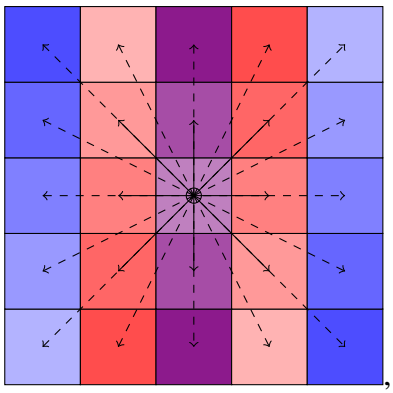
$$a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}.$$

Se $a_{ij} = -a_{n+1-i,n+1-j}$ a matriz A é chamada *anticentrossimétrica*.

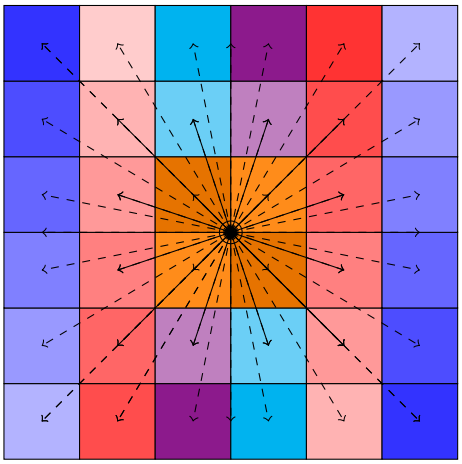
Exemplo 3.1. As matrizes a seguir são centrossimétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com esta imagem podemos observar melhor o padrão representativo de uma matriz centrossimétrica de ordem 5:

 ,

Já nessa nova imagem, podemos observar uma matriz centrossimétrica de ordem 6:



3.1 PRIMEIRA DEFINIÇÃO - JOHANN GEORG ZEHFUSS

Nesta seção, falamos sobre o primeiro registro de matrizes centrossimétricas, feito por Johann Georg Zehfuss.

Johann Georg Zehfuss (1832–1901) foi um matemático alemão conhecido por suas contribuições significativas na área de álgebra linear, especialmente no estudo de matrizes e determinantes. Seu trabalho ajudou a fundamentar e expandir o entendimento dessas áreas, que são essenciais para diversas aplicações em matemática pura e aplicada.

Figura 1 – Johann Georg Zehfuss - Fonte: MathsHistory (**mathshistory**).

Zehfuss é notável por introduzir uma formulação específica de determinantes, que hoje leva seu nome: a matriz de Zehfuss. Essa matriz especial é utilizada para simplificar cálculos de determinantes, proporcionando uma maneira sistemática de trabalhar com sistemas lineares. Além disso, ele foi o primeiro autor a escrever sobre matrizes centrossimétricas, que são matrizes que permanecem inalteradas quando refletidas através de seu centro. Este trabalho foi crucial para o desenvolvimento posterior de métodos para resolver sistemas de equações lineares e para o estudo das propriedades dessas matrizes.

As contribuições de Zehfuss ajudaram a solidificar a base teórica da álgebra linear, uma área que tem aplicações vastas em matemática, física, engenharia e ciências da computação. Seu trabalho permanece relevante e é estudado por matemáticos em todo o mundo.

Dentre as valiosas contribuições de Zehfuss detaca-se a definição de matrizes centrossimétricas. Na verdade, Zehfuss não chamou tais matrizes por esse nome. De fato, Zehfuss usou o seguintes termos: "symmetrisch sind in Bezug auf den Mittelpunkt dieses Quadrates"(**zehfuss**), ou em português, numa tradução livre, "são simétricos em relação ao centro deste quadrado".

A imagem a seguir foi extraida do sumário do periódico *Zeitschrift fur Mathematik und Physik*, onde consta o artigo *Zwei Sätze über Determinanten* (**zehfuss**), no qual Zehfuss define matrizes centrossimétricas.

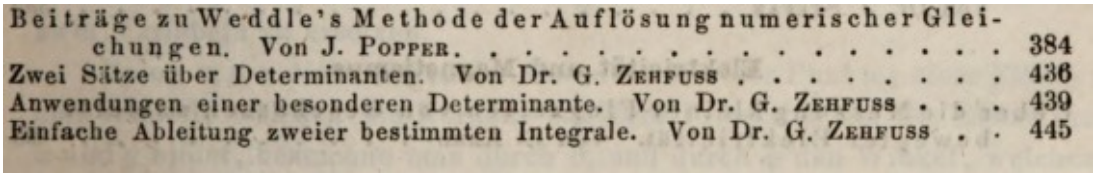
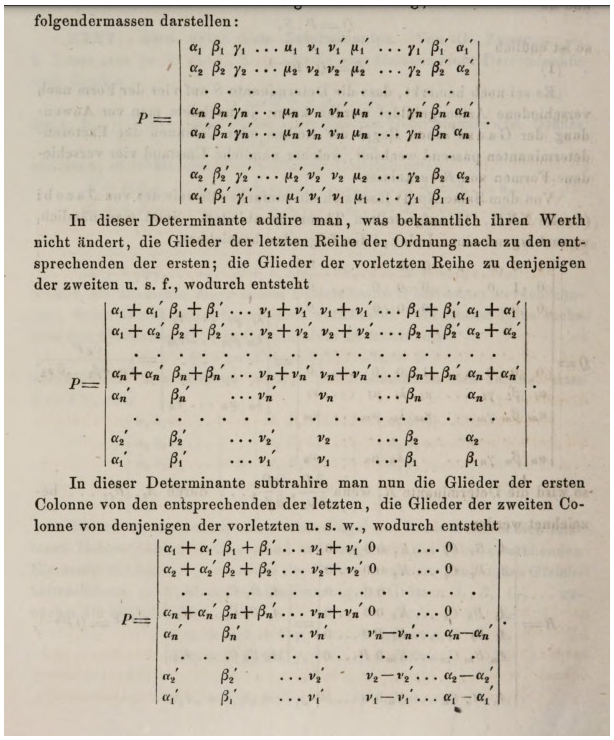

Beiträge zu Weddle's Methode der Auflösung numerischer Gleichungen. Von J. Popper 384
Zwei Sätze über Determinanten. Von Dr. G. Zehfuss 436
Anwendungen einer besonderen Determinante. Von Dr. G. Zehfuss . . . 439
Einfache Ableitung zweier bestimmten Integrale. Von Dr. G. Zehfuss . . 445

Figura 2 – Destaque do periódico Zeitschrift fur Mathematik und Physik

Neste artigo, Zehfuss apresentou a matriz quadrada de ordem $2n$:

$$P = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdots & u_1 & v_1 & v_1' & u_1' & \cdots & \gamma_1' & \beta_1' & \alpha_1' \\
\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & u_2 & v_2 & v_2' & u_2' & \cdots & \gamma_2' & \beta_2' & \alpha_2' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \cdots & u_n & v_n & v_n' & u_n' & \cdots & \gamma_n' & \beta_n' & \alpha_n' \\
\alpha_n' & \beta_n' & \gamma_n' & \cdots & u_n' & v_n' & v_n & u_n & \cdots & \gamma_n & \beta_n & \alpha_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & \cdots & u_2' & v_2' & v_2 & u_2 & \cdots & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & \cdots & u_1' & v_1' & v_1 & u_1 & \cdots & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1
\end{pmatrix}.$$

Apesar de Zehfuss não usar a definição que apresentamos anteriormente, a forma como ele apresentou a matriz deixa bem clara a sua estrutura. Em seguida, Zehfuss esboçou uma maneira de calcular o determinante dessa matriz, como vemos na figura a seguir, e no qual reproduzimos adiante.


folgendermassen darstellen:

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & u_1 & v_1 & v_1' & \mu_1' & \dots & \gamma_1' & \beta_1' & \alpha_1' \\
\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \mu_2 & \nu_2 & \nu_2' & \mu_2' & \dots & \gamma_2' & \beta_2' & \alpha_2' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \dots & \mu_n & \nu_n & \nu_n' & \mu_n' & \dots & \gamma_n' & \beta_n' & \alpha_n' \\
\alpha_n' & \beta_n' & \gamma_n' & \dots & \mu_n' & \nu_n' & \nu_n & \mu_n & \dots & \gamma_n & \beta_n & \alpha_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & \dots & \mu_2' & \nu_2' & \nu_2 & \mu_2 & \dots & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & \dots & \mu_1' & \nu_1' & \nu_1 & \mu_1 & \dots & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1
\end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante addire man, was bekanntlich ihren Werth nicht ändert, die Glieder der letzten Reihe der Ordnung nach zu den entsprechenden der ersten; die Glieder der vorletzten Reihe zu denjenigen der zweiten u. s. f., wodurch entsteht

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \nu_1+\nu_1' & \nu_1+\nu_1' & \dots & \beta_1+\beta_1' & \alpha_1+\alpha_1' \\
\alpha_1+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \nu_2+\nu_2' & \nu_2+\nu_2' & \dots & \beta_2+\beta_2' & \alpha_2+\alpha_2' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \dots & \nu_n+\nu_n' & \nu_n+\nu_n' & \dots & \beta_n+\beta_n' & \alpha_n+\alpha_n' \\
\alpha_n' & \beta_n' & \dots & \nu_n' & \nu_n & \dots & \beta_n & \alpha_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \dots & \nu_2' & \nu_2 & \dots & \beta_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1' & \beta_1' & \dots & \nu_1' & \nu_1 & \dots & \beta_1 & \beta_1
\end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante subtrahire man nun die Glieder der ersten Colonne von den entsprechenden der letzten, die Glieder der zweiten Colonne von denjenigen der vorletzten u. s. w., wodurch entsteht

$$P = \begin{vmatrix}
\alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \nu_1+\nu_1' & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \nu_2+\nu_2' & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \dots & \nu_n+\nu_n' & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_n' & \beta_n' & \dots & \nu_n' & \nu_n-\nu_n' & \dots & \alpha_n-\alpha_n' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_2' & \beta_2' & \dots & \nu_2' & \nu_2-\nu_2' & \dots & \alpha_2-\alpha_2' \\
\alpha_1' & \beta_1' & \dots & \nu_1' & \nu_1-\nu_1' & \dots & \alpha_1-\alpha_1'
\end{vmatrix}.$$

Figura 3 – Imagem das matrizes no periódico

Zehfuss soma a última linha da matriz P à primeira linha, a penúltima linha à segunda linha e assim por diante, até somar a $n+1$-ésima linha à n-ésima linha de P, resultando no determinante da matriz a seguir.

$$det(P) = \begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \nu_1+\nu_1' & \nu_1'+\nu_1 & \dots & \beta_1'+\beta_1 & \alpha_1'+\alpha_1 \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \nu_2+\nu_2' & \nu_2'+\nu_2 & \dots & \beta_2'+\beta_2 & \alpha_2'+\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \dots & \nu_n+\nu_n' & \nu_n'+\nu_n & \dots & \beta_n'+\beta_n & \alpha_n'+\alpha_n \\ \alpha_n' & \beta_n' & \dots & \nu_n' & \nu_n & \dots & \beta_n & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_2' & \beta_2' & \dots & \nu_2' & \nu_2 & \dots & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \beta_1' & \dots & \nu_1' & \nu_1 & \dots & \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Em seguida, Zehfuss subtrai os elementos da primeira coluna ao elementos da última coluna, os elementos da segunda colunas aos elementos da penúltima coluna, assim por diante, até subtrair os elementos da n-ésima coluna aos elementos da $(n+1)$-ésima colunha. Resultando no seguinte determinante:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \nu_1+\nu_1' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \nu_2+\nu_2' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \dots & \nu_n+\nu_n' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n' & \beta_n' & \dots & \nu_n' & \nu_n-\nu_n' & \dots & \beta_n-\beta_n' & \alpha_n-\alpha_n' \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_2' & \beta_2' & \dots & \nu_2' & \nu_2-\nu_2' & \dots & \beta_2-\beta_2' & \alpha_2-\alpha_2' \\ \alpha_1' & \beta_1' & \dots & \nu_1' & \nu_1-\nu_1' & \dots & \beta_1-\beta_1' & \alpha_1-\alpha_1' \end{vmatrix}$$

Note que o determinante da matriz P pode ser calculado a partir do produto dos determinantes das matrizes dos blocos diagonais:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} = \det(P_1)\cdot\det(P_2),$$

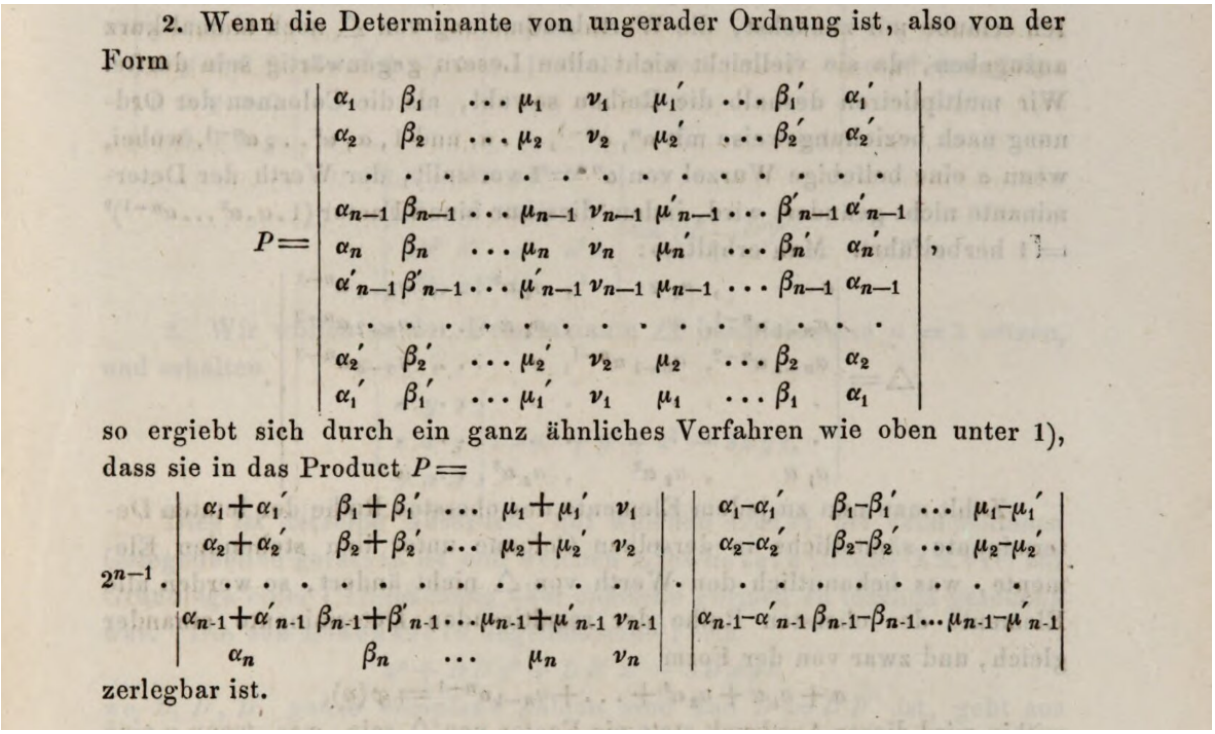
onde

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \nu_1+\nu_1' \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \nu_2+\nu_2' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_n+\alpha_n' & \beta_n+\beta_n' & \dots & \nu_n+\nu_n' \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} \nu_n'-\nu_n & \dots & \beta_n-\beta_n' & \alpha_n-\alpha_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \nu_2'-\nu_2 & \dots & \beta_2-\beta_2' & \alpha_2-\alpha_2' \\ \nu_1'-\nu_1 & \dots & \beta_1-\beta_1' & \alpha_1-\alpha_1' \end{pmatrix}.$$

Isso nos proporciona uma redução de cálculos do determinante de uma matriz centrossimétrica

de ordem par.

De modo análogo, Zehfuss faz o cálculo do determinante para o caso ímpar $2n-1$, mostrando que este caso também pode ser resumido como a soma do determinante de uma matriz de ordem n com uma matriz de ordem $n-1$. Veja na figura a seguir.



2. Wenn die Determinante von ungerader Ordnung ist, also von der Form

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \mu_1 & \nu_1 & \mu_1' & \dots & \beta_1' & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \mu_2 & \nu_2 & \mu_2' & \dots & \beta_2' & \alpha_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \dots & \mu_{n-1} & \nu_{n-1} & \mu'_{n-1} & \dots & \beta'_{n-1} & \alpha'_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & \dots & \mu_n & \nu_n & \mu_n' & \dots & \beta_n' & \alpha_n' \\ \alpha'_{n-1} & \beta'_{n-1} & \dots & \mu'_{n-1} & \nu_{n-1} & \mu_{n-1} & \dots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2' & \beta_2' & \dots & \mu_2' & \nu_2 & \mu_2 & \dots & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \beta_1' & \dots & \mu_1' & \nu_1 & \mu_1 & \dots & \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich durch ein ganz ähnliches Verfahren wie oben unter 1), dass sie in das Product $P =$

$$2^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_1' & \beta_1+\beta_1' & \dots & \mu_1+\mu_1' & \nu_1 \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \dots & \mu_2+\mu_2' & \nu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}+\alpha'_{n-1} & \beta_{n-1}+\beta'_{n-1} & \dots & \mu_{n-1}+\mu'_{n-1} & \nu_{n-1} \\ \alpha_n & \beta_n & \dots & \mu_n & \nu_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_1' & \beta_1-\beta_1' & \dots & \mu_1-\mu_1' \\ \alpha_2-\alpha_2' & \beta_2-\beta_2' & \dots & \mu_2-\mu_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}-\alpha'_{n-1} & \beta_{n-1}-\beta_{n-1} & \dots & \mu_{n-1}-\mu'_{n-1} \end{vmatrix}$$

zerlegbar ist.

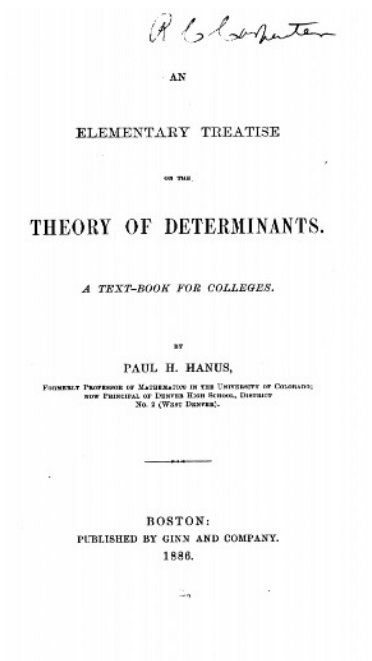
Figura 4 – Imagem das matrizes no periódico

3.2 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ CENTROSSIMÉTRICA

Após os trabalhos publicados por Zehfuss, autores como Thomas Muir e Paul Hanus usaram as matrizes centrossimétricas de formas distintas. Hanus escreveu um livro sobre matrizes, incluindo as matrizes definidas por Zehfuss bem como seu método de cálculo do determinante. Muir pesquisou mais sobre o assunto aplicando o conceito de agregados de determinantes para matrizes centrossimétricas e lançando uma nova edicão de seu livro sobre matrizes em 1933, um ano antes da sua morte, reunindo tudo o que se sabia na época sobre matrizes e determinantes.

Figura 5 – Paul Hanus - Fonte: (**wikisource**)

Hanus, em seu livro *An elementary treatise on the theory of determinants. A text-book for colleges* (Hanus, 1886), aborda noções básicas de matrizes, determinantes bem como suas propriedades. Além disso, ele mostra como calcular o determinante de matrizes centrossimétricas, tal como feito por Zehfuss.



AN

ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF DETERMINANTS.

A TEXT-BOOK FOR COLLEGES.

BY

PAUL H. HANUS,

FORMERLY PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF COLORADO; NOW PRINCIPAL OF DENVER HIGH SCHOOL, DISTRICT No. 1 (WEST DENVER).

BOSTON:
PUBLISHED BY GINN AND COMPANY.
1886.

Figura 6 – Capa do livro de Paul Hanus

No livro *A treatise on the theory of determinants* (MUIR, 1933), Muir cita uma propriedade exclusiva do determinante dessa classe de matrizes: “Em um determinante centrossimétrico, a r-ésima linha invertida corresponde, em todos os casos, à r-ésima linha contada a partir do

final, ou seja, o determinante permanece o mesmo quando lido de trás para frente ou de frente para trás" (MUIR, 1933) .

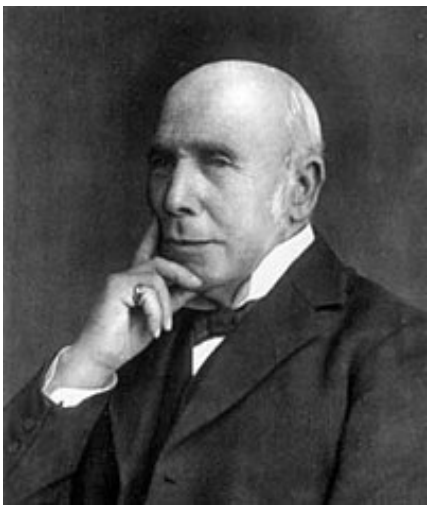
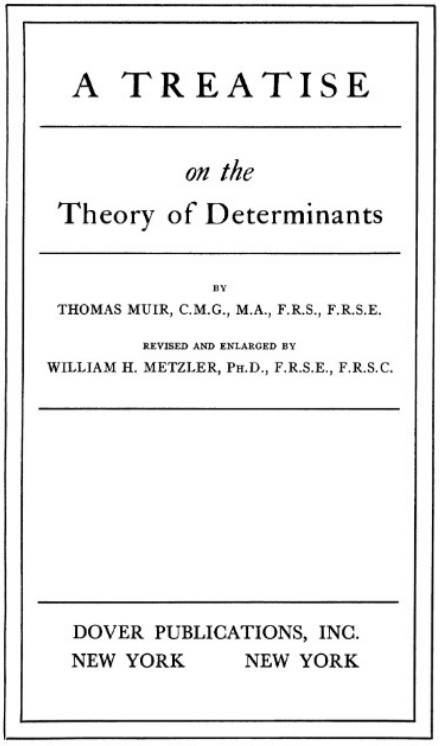


Figura 7 – Thomas Muir - Fonte:(**wikipedia**)

O livro do Muir dedica não mais que cinco páginas para falar de matrizes centrossimétricas, isso mostra que pouco foi pesquisado sobre esse tema até 1933. De fato, em nossa pesquisa não encontramos qualquer registro relevante dessas matrizes no período de 1900 até o livro de Muir, em 1933.


A TREATISE

on the

Theory of Determinants

BY

THOMAS MUIR, C.M.G., M.A., F.R.S., F.R.S.E.

REVISED AND ENLARGED BY

WILLIAM H. METZLER, PH.D., F.R.S.E., F.R.S.C.

DOVER PUBLICATIONS, INC.

NEW YORK NEW YORK

Figura 8 – Capa do livro de Thomas Muir - Edição publicada em 1933

Apresentamos a seguir dois exemplos, casos de ordem par e ímpar, para ilustrar o método desenvolvido por Hanus.

3.2.1 Exemplo A

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace, tem-se que

$$\det(A) = 81.$$

Porém, façamos como Hanus.

O primeiro passo é somar as últimas colunas às primeiras até a coluna central da matriz. Para matrizes de ordem $2n$, soma-se até a coluna n. Assim, obtemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (1+3) & (2-1) & (7+0) & 0 & -1 & 3 \\ (0-1) & (2+0) & (1-1) & -1 & 0 & -1 \\ (-2+1) & (1+1) & (3+0) & 0 & 1 & 1 \\ (1-2) & (1+1) & (0+3) & 3 & 1 & -2 \\ (-1+0) & (0+2) & (-1+1) & 1 & 2 & 0 \\ (3+1) & (-1+2) & (0+7) & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Em seguida, subtrai-se as primeiras linhas das últimas, até a linha central:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (1+3) & (2-1) & (7+0) & 0 & -1 & 3 \\ (0-1) & (2+0) & (1-1) & -1 & 0 & -1 \\ (-2+1) & (1+1) & (3+0) & 0 & 1 & 1 \\ (1-2)-(-2+1) & (1+1) & (0+3)-(3+0) & 3 & 1 & -2 \\ (-1+0)-(0-1) & (0+2)-(2+0) & (-1+1)-(1-1) & 1 & 2 & 0 \\ (3+1)-(3+1) & (-1+2)-(2-1) & (0+7)-(7+0) & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Após essas operações, a matriz A é reduzida a uma forma em bloco diagonal, de onde se

extrai duas submatrizes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os determinantes das submatrizes, obtém-se:

$$\det(A_1) = 27 \quad \text{e} \quad \det(A_2) = 3.$$

Assim, pelo método de Hanus,

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) = 27 \cdot 3 = 81.$$

Exemplo B

Seja a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace, obtém-se:

$$\det(B) = -99.$$

Seguindo o método de Hanus, o primeiro passo é somar as últimas colunas às primeiras até a coluna central. Para matrizes de ordem $2n+1$, soma-se até a coluna $\frac{1}{2}(n+1)$; observe que, nesse caso, a linha central é duplicada.

Realizando essa soma, chega-se a:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} (1+2) & (0+0) & (-2+2) & (-1-1) & 2 & 0 & 2 \\ (0+0) & (-3-1) & (2+1) & (0+0) & 1 & -1 & 0 \\ (-2-1) & (0+1) & (1+5) & (-1-1) & 5 & 1 & -1 \\ (1+1) & (-2-2) & (0+0) & (-1-1) & 0 & -2 & 1 \\ (-1-2) & (1+0) & (5+1) & (-1-1) & 1 & 0 & -2 \\ (0+0) & (-1-3) & (1+2) & (0+0) & 2 & -3 & 0 \\ (2+1) & (0+0) & (2-2) & (-1-1) & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Em seguida, subtrai-se as primeiras linhas das últimas, até a linha central:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} (1+2) & (0+0) & (-2+2) & (-1-1) & 2 & 0 & 2 \\ (0+0) & (-3-1) & (2+1) & (0+0) & 1 & -1 & 0 \\ (-2-1) & (0+1) & (1+5) & (-1-1) & 5 & 1 & -1 \\ (1+4) & (-2+0) & (0+3) & (-1-1) & 3 & 0 & 1 \\ (-1-2)-(-2-1) & (1+0)-(0+1) & (5+1)-(1+5) & (-1-1)-(-1-1) & 1 & 0 & -2 \\ (0+0)-(0+0) & (-1-3)-(-3-1) & (1+2)-(2+1) & (0+0)-(0+0) & 2 & -3 & 0 \\ (2+1)-(1+2) & (0+0)-(0+0) & (2-2)-(-2+2) & (-1-1)-(-1-1) & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Após essas operações, a matriz B é separada em duas submatrizes:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Segundo o método de Hanus,

$$\det(B) = \det(B_1) \cdot \det(B_2).$$

De fato, calculou-se que $\det(B_1) = 99$ e $\det(B_2) = -1$, de modo que:

$$\det(B) = 99 \cdot (-1) = -99.$$

Este resultado confirma a validade do método de Hanus para matrizes de ordem ímpar.

4 AS MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS NA DÉCADA DE 1970

Neste capítulo, concentramos nossa análise nos avanços ocorridos na década de 1970, período em que se consolidaram importantes estudos sobre matrizes centrossimétricas. O interesse renovado pelo tema levou ao desenvolvimento de métodos para o cálculo da inversa dessas matrizes, destacando-se a contribuição de Good (Good, 1970).

Em 1970, no seu artigo *The Inverse of a Finite Toeplitz Matrix*, Ray (Ray, 1970) propôs um método específico para calcular a inversa de matrizes de Toeplitz. Posteriormente, Good generalizou esse resultado ao apresentar um procedimento para matrizes centrossimétricas.

No decorrer do capítulo, exploramos a formulação matemática proposta por Good, destacando sua abordagem para matrizes de ordem par e ímpar. No caso par, demonstraremos como a decomposição estrutural dessas matrizes permite um cálculo mais eficiente de sua inversa. Já no caso ímpar, analisaremos as condições necessárias para garantir a não singularidade da matriz e os ajustes necessários na metodologia.

Para finalizar este capítulo, apresentamos também o estudo de Cantoni e Butler (Cantoni; Butler, 1976) sobre os autovalores e autovetores de matrizes centrossimétrica simétricas.

4.1 A INVERSA DE UMA MATRIZ CENTROSSIMÉTRICA

Os artigos de Good (Good, 1970) e Ray (Ray, 1970) foram um marco na década de 70, visto que há muito tempo não havia um estudo mais aprofundado sobre matrizes centrossimétricas. Ray estudou a matriz de Toeplitz, a qual sua diagonal principal é composta por um elemento, as outras diagonais tem o mesmo padrão de ter apenas um elemento, como veremos a seguir

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{pmatrix}.$$

De fato, uma matriz $A = (a_{ij})$ é de Toeplitz se $a_{ij} = a_{i+1,j+1}$. Uma matriz de Toeplitz não é necessariamente quadrada.

Após isso, Good baseou-se no conhecimento de Ray para conseguir achar a inversa de uma centrossimétrica. Na verdade, imagina-se que Good percebeu que a interseção do conjunto das matrizes de Toeplitz e do conjunto das matrizes centrossimétricas é não vazio e nem finito. Assim, a aplicação das técnicas de Ray para o cálculo das matrizes centrossimétricas torna-se natural.

Figura 9 – Irving John Good (**RadioSefarad**)

Em seus estudos, Good começou trabalhando para achar a inversa de uma matriz de ordem par $2n$. Definindo J como a matriz contraidentidade

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

pode-se definir qualquer matriz centrossimétrica R, de ordem par $2n$, por

$$R = \begin{pmatrix} A & BJ \\ JB & JAJ \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

sendo A e B matrizes de ordem n.

Sabemos que J é contraidentidade, logo $J^2 = I_n$. Agora precisamos calcular a inversa de R. Na verdade, segundo Good, o método apresentado em seu artigo pode ser aplicado para qualquer matriz, escrita como R, onde J deve satisfazer duas propriedades:

a) $J^2 = I_n$;

b) J deve ser esparsa, i.e., a maioria dos seus elementos são nulos.

Desta forma, seus resultados se aplicam de forma ainda mais geral do que apenas para matrizes centrosimétricas. As equações abaixo, caso par (posteriormente o caso de matrizes de ordem ímpar), são válidas sempre que J for uma raiz quadrada da identidade. Portanto, pode-se escrever

a inversa da matriz centrossimétrica R como

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} C & DJ \\ JD & JCJ \end{pmatrix}.$$

Ao realizarmos o produto entre R e R^{-1}, temos:

$$\begin{aligned} R \cdot R^{-1} &= \begin{pmatrix} A & BJ \\ JB & JAJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & DJ \\ JD & JCJ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AC+BD & ADJ+BCJ \\ JBC+JAD & JBDJ+JACJ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AC+BD & (AD+BC)J \\ J(AD+BC) & J(AC+BD)J \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como o produto de R e R^{-1} tem que ser a matriz identidade, temos o sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} AC+BD = I_n & (I) \\ AD+BC = 0 & (II) \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II), temos

$$\begin{aligned} AC+BD+AD+BC &= I_n \\ (A+B)(C+D) &= I_n \\ C+D &= (A+B)^{-1}, \quad (III) \end{aligned}$$

e subtraindo a equação (II) da equação (I), obtemos

$$\begin{aligned} AC-AD+BD-BC &= I_n \\ (A-B)C-(A-B)D &= I_n \\ (A-B)(C-D) &= I_n \\ C-D &= (A-B)^{-1}. \quad (IV) \end{aligned}$$

Note que uma primeira condição para a existência do inverso da uma matriz centrossimétrica (4.1) é que $A+B$ e $A-B$ não sejam singulares.

Agora, somando as equações (III) e (IV), obtemos

$$2C = (A+B)^{-1} + (A-B)^{-1},$$

e as subtraindo, temos

$$2D = (A+B)^{-1} - (A-B)^{-1}.$$

Fazendo os mesmo cálculos para $R^{-1} \cdot R = I_{2n}$, chegamos ao mesmo resultado.

Portanto, dada a matriz centrossimétrica (4.1) invertível, sua inversa pode ser escrita em termos das matrizes A e B:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((A+B)^{-1} + (A-B)^{-1}) & \frac{1}{2}((A+B)^{-1} - (A-B)^{-1})J \\ \\ \frac{1}{2}J((A+B)^{-1} - (A-B)^{-1}) & \frac{1}{2}J((A+B)^{-1} + (A-B)^{-1})J \end{pmatrix}$$

Da mesma forma que Good demonstrou em seu artigo.

Em seguida, Good trabalha com o caso da ordem da matriz ser ímpar. No caso da matriz centrossimétrica de ordem $2n+1$, Good nos apresenta a matriz em blocos

$$S = \begin{pmatrix} A & Jx & BJ \\ y^T J & \beta & y^T \\ JB & x & JAJ \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

onde A e B são matrizes quadradas de ordem n, J a matriz contraidentidade de ordem n, x e y são vetores de $\mathbb{R}^n$ escritos como vetores coluna e β é um número real. Pelo mesmo argumento para matrizes de ordem par, sendo S invertível, Good supõe que a inversa da matriz S é da forma

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C & Jz & DJ \\ w^T J & \alpha & w^T \\ JD & z & JCJ \end{pmatrix}.$$

O produto dessas duas matrizes, resulta na matriz identidade de ordem $2n+1$, que podemos definir em blocos como na matriz S:

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Suponha, inicialmente, $\beta \neq 0$. Assim, temos o seguinte sistema de equações matriciais:

$$(*): \begin{cases} AC + Jxw^TJ + BD &= I_n & (1) \\ y^TJC + \beta w^TJ + y^TJD &= 0_{1\times n} & (2) \\ y^TJDJ + \beta w^T + y^TJCJ &= 0_{1\times n} & (3) \\ AJz + \alpha Jx + BJz &= 0_{n\times 1} & (4) \\ ADJ + Jxw^T + BCJ &= 0_{n\times n} & (5) \\ y^Tz + \alpha\beta + y^Tz &= 1 & (6) \\ JBC + xw^TJ + JAD &= 0_{n\times n} & (7) \\ JBJz + \alpha x + JAJz &= 0_{n\times 1} & (8) \\ JBDJ + xw^T + JACJ &= I_n & (9) \end{cases} \tag{4.3}$$

Temos que ter um especial cuidado ao tratar de equações matriciais, ao considerar as ordens das matrizes. Não é demais lembrar que o produto de matrizes não é comutativo. Desta forma, notamos que algumas equações são equivalentes: $(1) = (9)$, $(2) = (3)$, $(4) = (8)$, $(5) = (7)$.

Da Equação (4), temos

$$\begin{aligned} (A+B)Jz + \alpha Jx &= 0 \\ (A+B)Jz &= -\alpha Jx \\ Jz &= -\alpha(A+B)^{-1}Jx \\ z &= -\alpha J(A+B)^{-1}Jx, \end{aligned}$$

sendo que multiplicamos por J à esquerda na penúltima igualdade.

Multiplicando a equação (1) por J à direita e somando à equação (5), obtemos:

$$\begin{aligned} (ACJ + Jxw^T + BDJ) + (ADJ + Jxw^T + BCJ) &= J \\ ACJ + ADJ + 2Jxw^T + BDJ + BCJ &= J \\ A(C+D)J + 2Jxw^T + B(C+D)J &= J \\ (A+B)(C+D)J &= J - 2Jxw^T \\ (A+B)(C+D) &= I_n - 2Jxw^TJ \\ C+D &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ) \end{aligned}$$

Agora, substraindo as mesmas equações, temos

$$\begin{aligned}(ACJ + Jxw^T + BDJ) - (ADJ + Jxw^T + BCJ) &= J \\ ACJ - ADJ + BDJ - BCJ &= J \\ A(C-D)J - B(C-D)J &= J \\ (A-B)(C-D) &= I_n \\ C-D &= (A-B)^{-1}.\end{aligned}$$

Note que chegamos novamente nas condições em que, para a existência da inversa da matriz S (4.2), é necessário que $A+B$ e $A-B$ sejam não singulares.

Com isso, chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned}C+D &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ); \\ C-D &= (A-B)^{-1}.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo essas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}2C &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ) + (A-B)^{-1}; \\ 2D &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ) - (A-B)^{-1},\end{aligned}$$

respectivamente. Isto não está inteiramente resolvido para C eD, pois ambas ainda dependem de w. Assim, defina

$$M^{-1} = C + D = (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ). \tag{4.4}$$

Da equação (3), temos

$$y^TJ(C+D) + \beta w^TJ = 0 \implies w^T = -\beta^{-1}y^TJM^{-1}J.$$

Disso, substituindo na Equação (4.4), temos que:

$$\begin{aligned}M^{-1} &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jxw^TJ) \\ M^{-1} &= (A+B)^{-1}(I_n - 2Jx(-\beta^{-1}y^TJM^{-1}J)J) \\ M^{-1} &= (A+B)^{-1} + 2\beta^{-1}(A+B)^{-1}Jxy^TJM^{-1} \\ (A+B)^{-1} &= M^{-1} - 2\beta^{-1}(A+B)^{-1}Jxy^TJM^{-1} \\ (A+B)^{-1} &= (I_n - 2\beta^{-1}(A+B)^{-1}Jxy^TJ)M^{-1} \\ M &= A + B(I_n - 2\beta^{-1}(A+B)^{-1}Jxy^TJ) \\ M &= A + B - 2\beta^{-1}Jxy^TJ.\end{aligned}$$

Portanto, $C+D$ depende apenas dos blocos da matriz S.

Da equação (6), obtemos

$$y^T z = \frac{1-\alpha\beta}{2}.$$

Substituindo na equação (4), obtemos

$$\begin{aligned}
AJz+\alpha Jx+BJz &= 0\\
(A+B)Jz+\alpha Jx &= 0\\
(M+2\beta^{-1}Jxy^TJ)Jz+\alpha Jx &= 0\\
MJz+2\beta^{-1}Jxy^Tz+\alpha Jx &= 0\\
MJz+2\beta^{-1}Jx(\frac{1-\alpha\beta}{2})+\alpha Jx &= 0\\
MJz+\beta^{-1}Jx &= 0\\
MJz &= -\beta^{-1}Jx\\
z &= -\beta^{-1}JM^{-1}Jx.
\end{aligned}$$

Portanto, a inversa da matriz S é

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C & Jz & DJ \\ w^TJ & \alpha & w^T \\ JD & z & JCJ \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{cases}
2C &= M^{-1}+(A-B)^{-1}\\
2D &= M^{-1}-(A-B)^{-1}\\
M &= A+B-2\beta^{-1}Jxy^TJ\\
z &= -\beta^{-1}JM^{-1}Jx\\
w &= -\beta^{-1}JM^{-1}Jy\\
\alpha &= \beta^{-1}(1-2y^Tz)
\end{cases}.$$

No caso em que $\beta = 0$ o sistema (4.3) se reduz ao sistema

$$\begin{cases}
AC+Jxw^TJ+BD &= I_n\\
y^TJ(C+D) &= 0_{1\times n}\\
AJz+\alpha Jx+BJz &= 0_{n\times 1}\\
ADJ+Jxw^T+BCJ &= 0_{n\times n}\\
2y^Tz &= 1
\end{cases}$$

a solução é dada implicitamente, por

$$\begin{cases} 2C &= N+(A-B)^{-1} \\ 2D &= N-(A-B)^{-1} \\ N &= (A+B)^{-1}(I_n-2Jxw^TJ) \\ z &= -\alpha J(A+B)^{-1}Jx \\ \alpha &= -\dfrac{1}{k}, \text{ com } k=2y^TJ(A+B)^{-1}Jx. \end{cases}.$$

Good, conclui seu artigo justificando o porque é necessário que $A+B$ e $A-B$ precisa ser não singulares no caso par e $A-B$ e M são não singulares no caso ímpar. Basta usar o algoritmo criado por Zehfuss, no qual Good atribui a Muir. Ele resume o algoritmo da seguinte forma, para cada um dos casos. Note que

$$\begin{pmatrix} I & J \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & BJ \\ JB & JAJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & J \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & (A+B)J \\ J(A-B) & JAJ \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\det(S)=\begin{vmatrix} 0 & (A+B)J \\ J(A-B) & JAJ \end{vmatrix}=\det(A+B)\det(A-B).$$

Portanto, justifica-se que $A+B$ e $A-B$ são não singulares.

Da mesma forma, para o caso ímpar, temos

$$\begin{pmatrix} I & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & Jx & BJ \\ y^TJ & \beta & y^T \\ JB & x & JAJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -J & 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2Jx & (A+B)J \\ 0 & \beta & y^T \\ J(A-B) & x & JAJ \end{pmatrix}.$$

Pela regra do determinante para matriz em blocos temos que

$$\det(S)=(-a)^n\beta\det(A-B)\det(A+B-2\beta^{-1}Jxy^TJ).$$

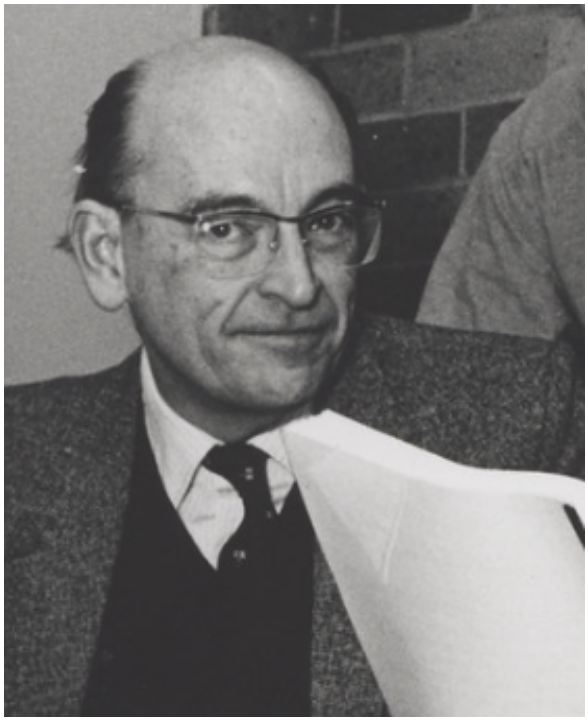
Assim, $A-B$ e M são não singulares.

4.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES CENTROSSIMÉTRICAS SIMÉTRICAS

Um dos marcos no estudo de matrizes centrossimétricas é o artigo "Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices", publicado em 1976 (Cantoni; Butler, 1976), de autoria de Antonio Cantoni e Paul Butler, ambos da Universidade de Newcastle, Autrália.

Definição 4.1. Considere a matriz contraidentidade J, definida anteriormente. Diz-se que um

(a) Antonio Cantoni



(b) Paul Butler

Figura 10 – Fonte:(**newcastle**)

vetor v é simétrico se

$$Jv = v$$

e é antissimétrico se

$$Jv = -v.$$

Uma definição mais simples: considere $v = (v_1, \cdots, v_m)$. Diz-se que v é simétrico se

$$v_i = v_{m+1-i}$$

e antissimétrico se

$$v_i = -v_{m+1-i}.$$

No artigo, Cantoni e Butler provaram que os autovalores de matrizes centrossimétricas simétricas são simétricos ou antissimétricos. Ele conseguiram também estimar a quantidade de vetores simétricos e antissimétricos.

Nesta seção, faremos uma revisão desses resultados.

Definição 4.2. A seguir, as principais definições e notações usadas no artigo de Cantoni (Cantoni; Butler, 1976):

a) $\lceil \alpha \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual que α;

b) $\lfloor \alpha \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual que α;

c) $I(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$;

d) Se $v = (x_1, \cdots, x_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ e $\lceil n/2 \rceil = r$. É claro que se v é simétrico então pode ser escrito como

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} u & Ju \end{pmatrix}^T, \quad \textit{para } n \text{ par e } u \in \mathbb{R}^r; \\ v &= \begin{pmatrix} u & x_r & Ju \end{pmatrix}^T, \quad \textit{para } n \text{ ímpar e } u \in \mathbb{R}^{r-1}. \end{aligned}$$

e) Da mesma forma, se v é antissimétrico então pode ser escrito como

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} u & -Ju \end{pmatrix}^T, \quad \textit{para } n \text{ par e } u \in \mathbb{R}^r; \\ v &= \begin{pmatrix} u & 0 & -Ju \end{pmatrix}^T, \quad \textit{para } n \text{ ímpar e } u \in \mathbb{R}^{r-1}. \end{aligned}$$

f) Indicamos por V_n o conjuntos das matrizes centrossimétricas simétricas com entradas reais, i.e., se $A = (a_{ij}) \in V_n$ então

$$a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j} = a_{n+1-j,n+1-i}.$$

g) Como nos restringimos às matrizes de V_n, indicamos uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ simplesmente por $A = (a_{ij})$, para simplificar a notação.

Proposição 4.1. *Seja J a matriz contraidentidade. A matriz A é centrossimétrica se, e somente se, $JAJ = A$.*

Demonstração. Seja $B = JAJ$, com

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} j_{ik} a_{k\ell} j_{\ell j}.$$

Usando a definição de J (veja (2.1)), temos que j_{ik} só é 1 quando $k = n+1-i$, e $j_{\ell j}$ só é 1 quando $\ell = n+1-j$. Assim,

$$b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}.$$

Como A é centrossimétrica, ou seja, $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$, segue que $b_{ij} = a_{ij}$. Logo, $B = A$. □

Observação 4.1. Note, pela Proposição 4.1, que se A é centrossimétrica então $JA = AJ$.

4.2.1 Propriedades das matrizes de V_n

Inicialmente, note que V_n é um espaço vetorial real. De fato, sejam $X, Y \in V_n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$X + \lambda Y = (x_{ij}) + \lambda (y_{ij}) = (x_{ij} + \lambda y_{ij}) = (z_{ij}) = Z.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} z_{ij} &= x_{ij} + \lambda y_{ij} \\ &= x_{n+1-i,n+1-j} + \lambda y_{n+1-i,n+1-j} \\ &= z_{n+1-i,n+1-j}. \end{aligned}$$

O que mostra que Z é centrossimétrica. Analogamente, mostra-se que Z é simétrica. Logo, $Z \in V_n$.

Lema 4.1. *Se $X \in V_n$ então*

a) $X^T \in V_n$;

b) Se $\det(X) \neq 0$ *então* $X^{-1} \in V_n$;

c) $JX \in V_n$;

d) V_n *é um grupo abeliano aditivo;*

e) Os membros não singulares de V_n *forma um grupo não abeliano multiplicativo.*

Demonstração. a) Sendo $X \in V_n$ temos que $X = JXJ$ e $X = X^T$. Assim, $X^T = JX^TJ$, i.e., X^T é centrossimétrica. Como $(X^T)^T = X$, segue que X^T é simétrica.

b) Como X é centrossimétrica, segue que $X = JXJ$. Aplicando a inversa em ambos os lados e sabendo que $J^{-1} = J$, temos

$$X^{-1} = (JXJ)^{-1} = JX^{-1}J,$$

de onde segue que X^{-1} é centrossimétrica. Como, por hipótese, X é simétrica e usando as propriedades da inversa e transposta de uma matriz, temos

$$(X^{-1})^T = (X^T)^{-1} = X^{-1}.$$

Logo, X^{-1} é simétrica.

c) Pela Proposição 4.1, uma matriz centrossimétrica tem a propriedade de que $JXJ = X$. Suponha $X \in V_n$, então

$$J(JX)J = (JJ)XJ = XJ = JX.$$

Assim, JX é centrossimétrica. Como $X^T = X$ e $J^2 = J$, temos que

$$(JX)^T = X^TJ^T = XJ = JX.$$

Logo, JX é simétrica.

d) Imediato, pois V_n é um espaço vetorial real.

e) Seja $V_n^* = \{X \in V_n : \det(X) \neq 0\}$. Note que a identidade I_n pertence a V_n^*. Se $X, Y \in V_n^*$ então $XY \in V_n^*$, pois

$$\det(XY^{-1}) = \det(X)\det(Y^{-1}) \neq 0.$$

Logo, V_n^* é um grupo multiplicativo.

□

Cantoni e Butler investigaram as características de uma matriz $X \in V_n$. Assim como Good, eles dividiram em dois casos: quando n é par e quando é ímpar.

Lema 4.2 ((Cantoni; Butler, 1976), Lemma 2)**.** *Seja $Q \in V_n$.*

a) Se n é par, qualquer matriz $Q \in V_n$ pode ser escrita como

$$Q = \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & JAJ \end{pmatrix},$$

onde A e C são matrizes de ordem $n/2$ e $A^T = A$ e $C^T = JCJ$.

b) Se n é ímpar, qualquer matriz $Q \in V_n$ pode ser escrita como

$$Q = \begin{pmatrix} A & x & C^T \\ x^T & q & x^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix},$$

onde A, J e C são matrizes de ordem $\lfloor n/2 \rfloor$ e $A^T = A$ e $C^T = JCJ$.

Demonstração. a) Seja Q uma matriz $n \times n$ (onde n é par), particionada da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

onde A, B, C e D são matrizes de ordem $\dfrac{n}{2}$. Como $Q \in V_n$ então $QJ = JQ$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Isto implica que

$$\begin{pmatrix} BJ & AJ \\ DJ & CJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JC & JD \\ JA & JB \end{pmatrix}.$$

Assim, pela igualdade de matrizes, temos que

$$BJ = JC \implies B = JCJ,$$
$$DJ = JA \implies D = JAJ.$$

Como $Q \in V_n$, temos que $Q = Q^T$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ (JCJ)^T & (JAJ)^T \end{pmatrix}.$$

Comparando os blocos correspondentes, obtemos $A = A^T$ e $C^T = JCJ$. Segue daí que

$$Q = \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & JAJ \end{pmatrix}.$$

b) Seja Q uma matriz de ordem ímpar. Defina $\lfloor n/2 \rfloor = f$. A matriz Q de ordem $(2f+1)$ pode ser particionada da seguinte forma:

$$Q = \begin{pmatrix} A & x & B \\ y^T & q & z^T \\ C & w & D \end{pmatrix},$$

onde A, B, C e D são matrizes de ordem f, x, y, z e w são vetores de $\mathbb{R}^f$ e q é um número real. Como $Q \in V_n$, então $QJ = JQ$, onde J é a matriz contraidentidade. Expandindo essa condição para a forma particionada de Q, temos:

$$\begin{pmatrix} A & x & B \\ y^T & q & z^T \\ C & w & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 \\ J & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & x & B \\ y^T & q & z^T \\ C & w & D \end{pmatrix},$$

isto implica que

$$\begin{pmatrix} BJ & x & AJ \\ z^T J & q & y^T J \\ DJ & w & CJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JC & Jw & JD \\ y^T & q & z^T \\ JA & Jx & JB \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} BJ = JC &\implies B = JCJ, \\ Jw = x &\implies w = Jx, \\ JD = AJ &\implies D = JAJ, \\ y^T J = z^T &\implies z = Jy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ y^T & q & y^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix}.$$

Como, além disso, Q é simétrica, segue que

$$\begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ y^T & q & y^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & y & C^T \\ x^T & q & x^T J \\ (JCJ)^T & Jy & (JAJ)^T \end{pmatrix}.$$

Logo, $A^T = A$, $C^T = JCJ$ e $x = y$. Desta forma, Q pode ser escrita como

$$Q = \begin{pmatrix} A & x & C^T \\ x^T & q & x^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix},$$

onde A, J e C são matrizes de ordem $\lfloor n/2 \rfloor$.

□

Em seguida, Cantoni e Butler mostraram que qualquer matriz em V_n é semelhante a uma matriz diagonal em blocos. Antes, porém, lembre que uma matriz K é ortogonal se a sua inversa coincide com a sua transposta, i.e.,

$$K^{-1} = K^T.$$

Lema 4.3 ((Cantoni; Butler, 1976), Lemma 3)**.** *Considere a matriz Q definida no Lema 4.2. Então*

a) Se n é par, as matrizes

$$Q = \begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} A - JC & 0 \\ 0 & A + JC \end{pmatrix}$$

são ortogonalmente semelhantes.

b) Se n é ímpar, as matrizes

$$Q = \begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ x^T & q & x^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} A-JC & 0 & 0 \\ 0 & q & \sqrt{2}x^T \\ 0 & \sqrt{2}x & A+JC \end{pmatrix}$$

são ortogonalmente semelhantes.

Demonstração. a) Basta considerar a matriz K dada por:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix},$$

onde I é a matriz identidade e J é a matriz contraidentidade. Afirmamos que K é uma matriz ortogonal. De fato, a transposta de K é

$$K^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} KK^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+J^2 & I-J^2 \\ I-J^2 & I+J^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Da mesma forma $K^T K = I_n$. Logo, K é ortogonal. Agora, façamos o produto KQK^T, onde

$$Q = \begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix}.$$

Temos daí que

$$\begin{aligned}
KQK^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -J \\ I & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-JC & A+JC \\ C-JA & C+JA \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A-JC-J(C-JA) & A+JC-J(C+JA) \\ A-JC+J(C-JA) & A+JC+J(C+JA) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A-JC & 0 \\ 0 & A+JC \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, segue a semelhança ortogonal entre as matrizes.

b) Suponha que a ordem de Q é impar. Se definirmos

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{pmatrix},$$

não é difícil verificar que essa matriz é ortogonal. De fato, veja que $HH^T = I_{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
HH^T &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{bmatrix}^T \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -J & 0 & J \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} \\
&= I_{2n+1},
\end{aligned}$$

onde I_{2n+1} é a matriz identidade. Assim,

$$\begin{aligned}
HQH^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ x^T & q & x^TJ \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & 0 & -J \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ I & 0 & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ x^T & q & x^TJ \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -J & 0 & J \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A-JC & 0 & JCJ-AJ \\ \sqrt{2}x^T & \sqrt{2}q & \sqrt{2}x^TJ \\ A+JC & 2x & JCJ+AJ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & I \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -J & 0 & J \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(A-JC) & 0 & 0 \\ 0 & 2q & 2\sqrt{2}x^T \\ 0 & 2\sqrt{2}x & 2(A+JC) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A-JC & 0 & 0 \\ 0 & q & \sqrt{2}x^T \\ 0 & \sqrt{2}x & A+JC \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, segue a semelhança ortogonal entre as matrizes.

□

Corolário 4.1 ((Cantoni; Butler, 1976), Lemma 4)**.** *Uma matriz de ordem par da forma*

$$R = \begin{pmatrix} A-JC & 0 \\ 0 & A+JC \end{pmatrix}$$

ou de ordem ímpar da forma

$$S = \begin{pmatrix} A-JC & 0 & 0 \\ 0 & q & \sqrt{2}x^T \\ 0 & \sqrt{2}x & A+JC \end{pmatrix},$$

onde A e JC são matrizes simétricas de ordem f, podem ser transformadas, via semelhança ortogonal, a uma matriz de V_n.

Demonstração. Basta fazer os mesmos cálculos da demonstração do Lema 4.3 usando as matrizes K e H, respectivamente. No Lema 4.3, provou-se que $KQK^T = R$, daí

$$KQK^T = R \implies Q = K^TRK.$$

Analogamente, temos $Q = H^TSH$, para o caso ímpar. Como $Q \in V_n$, segue o resultado. □

4.2.2 Principais teoremas

Antes de prosseguir para o próximo resultado, vamos lembrar de alguns resultados da álgebra linear. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e considere o operador linear $T : V \to V$. Diz-se que T é diagonalizável se os autovetores de T formam uma base para V.

Teorema 4.1 (Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos)**.** *Se $T : V \to V$ é um operador autoadjunto então V admite uma base formada pelos autovetores de T.*

Como a matriz de um operador autoadjunto é simétrica então podemos dizer um corolário do teorema espectral é que toda matriz simétrica é diagonalizável.

Lembre também que o produto e a soma de matrizes ortogonais é também ortogonal. Além disso, se U e Y são ortogonais então a matriz

$$Z = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$ZZ^T = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ 0 & Y^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UU^T & 0 \\ 0 & YY^T \end{bmatrix} = I.$$

Para motivar os resultados apresentados por Cantoni e Butler, vamos exibir dois exemplos.

Exemplo 4.1. Considere a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$A - JC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$A + JC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores de $A - JC$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ e os autoespaços associados são

$$E_{-2} = [u_1 = (-2,1)] \text{ e } E_3 = [u_2 = (1,2)].$$

Os autovetores de $A+JC$ são autovetores são $p_1=-1$ e $p_2=4$. Seus autoespaços associados são

$$E_{-1}=[y_1=(1,-2)] \text{ e } E_4=[y_2=(2,1)].$$

Quando calculamos os autovetores e autovalores da matriz Q, encontramos como autovalores $\lambda_1=-2,\lambda_2=3,p_1=-1$ e $p_2=4$, que são exatamente os mesmos autovalores de $A-JC$ e $A+JC$. Além disso, seus autovetores associados são

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= [(-2,1,-1,2)], \\ E_{\lambda_2} &= [(1,2,-2,-1)], \end{aligned}$$

que são gerados por vetores antissimétricos e

$$\begin{aligned} E_{p_1} &= [(1,-2,-2,1)], \\ E_{p_2} &= [(2,1,1,2)], \end{aligned}$$

que são gerados por vetores simétricos. Assim, os autovetores associados aos autovalores de Q podem ser calculados a partir de $A-JC$ e $A+JC$ e podem ser escritos como

$$v_i=\begin{pmatrix} u_i & -Ju_i \end{pmatrix}^T$$

e

$$w_i=\begin{pmatrix} y_i & Jy_i \end{pmatrix}^T.$$

Exemplo 4.2. Agora, vejamos o caso de uma matriz centrossimétrica simétrica de ordem ímpar. Considere

$$Q=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os autovetores dessa matriz são $\lambda_1=2$, com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2=4$, com multiplicidade algébrica igual a 3. O autoespaço associado a $\lambda_1=2$ é

$$E_{\lambda_1}=[(0,-1,0,1,0),(-1,0,0,0,1)].$$

Observe que os autovetores são antissimétricos. O autoespaço associado a $\lambda_2=4$ é

$$E_{\lambda_2}=[(0,0,1,0,0),(0,1,0,1,0),(1,0,0,0,1)].$$

Aqui, os autovetores associados a λ_2 são simétricos. Vamos ilustrar, ainda, o método desenvolvido no artigo de Cantoni e Butler no Lema 4.3. Identificamos as matrizes A e C, definidas no Lema 4.3,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos que

$$A - JC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A + JC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Então, pelo Lema 4.3, a matriz Q é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos explícito os autovalores de Q bem como suas multiplidades.

Agora vamos entender o Teorema 2 do artigo de Cantoni e Butler. Todavia, achamos melhor dividí-lo em dois teoremas, um para cada caso (ordens par e ímpar). O exemplo anterior ajuda a entender o enunciado desse teorema.

Teorema 4.2 ((Cantoni; Butler, 1976), Theorem 2a)**.** *Suponha n par e*

$$Q = \begin{pmatrix} A & JCJ \\ C & JAJ \end{pmatrix}$$

uma matriz de V_n. Podemos determinar $n/2$ autovetores ortonormais antissimétricos v_i de Q e correspondentes autovalores λ_i a partir da solução da equação

$$(A - JC)u_i = \lambda_i u_i$$

onde $i \in I(n/2)$ e $v_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_i & -Ju_i \end{pmatrix}^T$, e os vetores u_i formam um conjunto ortogonal. Adicionalmente, existem $n/2$ autovetores ortonormais simétricos w_i e os autovalores correspondentes p_i podem ser determinados a partir da solução da equação

$$(A + JC)y_i = p_i y_i,$$

onde $i \in I(n/2)$, $w_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_i & Jy_i \end{pmatrix}^T$ *e os vetores* y_i *formam um conjunto ortogonal. Além disso, o conjunto* $\{v_1, \ldots, v_{n/2}, w_1, \ldots, w_{n/2}\}$ *de n autovetores de Q forma um conjunto ortogonal, ao qual gera o autoespaco de Q.*

Demonstração. Pelo Lema 4.3, temos que Q é ortogonalmente semelhante à matriz

$$R = \begin{pmatrix} A - JC & 0 \\ 0 & A + JC \end{pmatrix}.$$

Como Q é simétrica segue que R é simétrica e assim também são simétricas as matrizes $A - JC$ e $A + JC$. Sendo assim, pelo teorema espectral para operadores autoadjuntos, segue que $A - JC$ e $A + JC$ são diagonalizáveis. Desta forma, sendo λ_i os autovalores associados $A - JC$ e p_i os autovalores associados a $A + JC$, então existem matrizes ortogonais U e Y, cujas colunas são formadas pelos autovetores associados u_i e w_i de $A - JC$ e $A + JC$, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} U^T(A - JC)U &= \operatorname{diag}(\lambda_i), \\ Y^T(A + JC)Y &= \operatorname{diag}(p_i), \end{aligned}$$

com $i \in I(n/2)$. Como U e Y são ortogonais, segue que

$$Z = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

é ortogonal. Assim,

$$\begin{aligned} Z^T K Q K^T Z = Z^T R Z &= \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & Y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - JC & 0 \\ 0 & A + JC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U^T(A - JC)U & 0 \\ 0 & Y^T(A + JC)Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}(p_i) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que $K^T Z$ é ortogonal, segue que as colunas de $K^T Z$ são os autovetores de Q, correspondentes aos autovalores λ_i e p_i. Além disso,

$$K^T Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -J & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} U & Y \\ -JU & JY \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que os autovetores v_i e w_i de Q são ortonormais e satisfazem a relação

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_i & -Ju_i \end{pmatrix}^T \text{ e } w_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_i & Jy_i \end{pmatrix}^T.$$

Daí, percebe-se que temos $n/2$ vetores v_i antissimétricos e $n/2$ vetores w_i simétricos. □

Teorema 4.3 ((Cantoni; Butler, 1976), Theorem 2b)**.** *Suponha n ímpar e*

$$Q = \begin{pmatrix} A & x & JCJ \\ x^T & q & x^T J \\ C & Jx & JAJ \end{pmatrix}$$

uma matriz de V_n. Podemos determinar $\lfloor n/2 \rfloor$ autovetores ortonormais antissimétricos v_i de Q e correspondentes autovalores λ_i a partir da solução da equação

$$(A - JC)u_i = \lambda_i u_i$$

onde $i \in I(\lfloor n/2 \rfloor)$ e $v_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_i & 0 & -Ju_i \end{pmatrix}^T$, e os vetores u_i formam um conjunto ortogonal. Adicionalmente, existem $\lceil n/2 \rceil$ autovetores ortonormais simétricos w_i e os autovalores correspondentes p_i podem ser determinados a partir da solução da equação

$$\begin{pmatrix} A + JC & \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}x^T & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} y_i = p_i \begin{pmatrix} y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},$$

onde $i \in I(\lceil n/2 \rceil)$, $w_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_i & 2\alpha_i & Jy_i \end{pmatrix}^T$ e os vetores $\begin{pmatrix} y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ formam um conjunto ortogonal. Além disso, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_f, w_1, \ldots, w_{n/2}\}$ de n autovetores de Q forma um conjunto ortogonal, ao qual gera o autoespaco de Q.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos para o caso par. □

A inversa do Teorema 4.2 e do Teorema 4.3 é apresentada por Cantoni e Butler sem demonstração.

Teorema 4.4 ((Cantoni; Butler, 1976), Theorem 3)**.** *Qualquer matriz real G de ordem n e que tenham um conjunto de n autovetores ortonormais, cada um dos quais é simétrico ou antissimétrico, é um membro de V_n.*

Demonstração. Considere o conjunto $\{x_1, \cdots, x_r, y_{r+1}, \cdots, y_n\}$ de autovetores ortonormais de G, com os autovetores x_i simétricos e os autovetores y_j antissimétricos. Considere os autovetores simétricos x_i de G. Então, por definição, $Jx_i = x_i$ e $Gx_i = \lambda_i x_i$, sendo $\lambda_i \neq 0$ um autovalor associado a x_i. Daí, multiplicando J à esquerda, temos

$$Gx_i = \lambda_i x_i \implies JGx_i = \lambda_i Jx_i \implies JGx_i = \lambda_i x_i.$$

Por outro lado, tomando $Jx_i = x_i$, multiplicando λ_i em ambos os lados e depois aplicando G à

esquerda, temos

$$\lambda_i Jx_i = \lambda_i x_i \implies \lambda_i GJx_i = \lambda_i Gx_i \implies \lambda_i GJx_i = \lambda_i^2 x_i \implies GJx_i = \lambda_i x_i.$$

Portanto,

$$JGx_i - GJx_i = 0 \implies (JG - GJ)x_i = 0,$$

para cada vetor simétrico x_i. Agora suponha y_j autovetor de G antissimétrico com autovalor $p_j \neq 0$, i.e., $Jy_j = -y_j$. De forma similar, temos

$$JGy_j = p_j Jy_j \implies JGy_j = -p_j y_j.$$

Além disso, multiplicando p_i a ambos os lados de $Jy_j = -y_j$ e aplicando G, temos

$$p_j Jy_j = -p_j y_i \implies p_j GJy_j = -p_j Gy_j \implies GJy_j = -p_j y_j.$$

Daí,

$$JGy_j - GJy_j = 0 \implies (JG - GJ)y_j = 0,$$

para cada vetor antissimétrico y_j. Como $\{x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_n\}$ formam uma base ortonormal completa de $\mathbb{R}^n$, qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear desses autovetores. Logo, para qualquer vetor v, temos:

$$(JG - GJ)v = 0.$$

Isso implica que $JG = GJ$, ou seja, G é centrossimétrica. Uma matriz G é simétrica se $\langle Gv, w\rangle = \langle v, Gw\rangle$. Sejam

$$v = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{r+1}^{n} b_j y_j \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i + \sum_{r+1}^{n} d_j y_j$$

. De um lado, considerando que a conjunto é ortonormal, temos

$$\begin{aligned}
\langle Gv, w\rangle &= \langle G(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{r+1}^{n} b_j y_j), \sum_{i=1}^{r} c_i x_i + \sum_{r+1}^{n} d_j y_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i Gx_i + \sum_{r+1}^{n} b_j Gy_j, \sum_{i=1}^{r} c_i x_i + \sum_{r+1}^{n} d_j y_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i Gx_i, \sum_{i=1}^{r} c_i x_i\rangle + \langle \sum_{r+1}^{n} b_j Gy_j, \sum_{r+1}^{n} d_j y_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{r} c_i x_i\rangle + \langle \sum_{r+1}^{n} b_j p_j y_j, \sum_{r+1}^{n} d_j y_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i c_i + \sum_{r+1}^{n} b_j p_j d_j.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle v, Gw\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{r+1}^{n} b_j y_j, G(\sum_{i=1}^{r} c_i x_i + \sum_{r+1}^{n} d_j y_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \sum_{r+1}^{n} b_j y_j, \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_i x_i + \sum_{r+1}^{n} d_j p_j y_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i, \sum_{i=1}^{r} c_i \lambda_i x_i\rangle + \langle \sum_{r+1}^{n} b_j y_j, \sum_{r+1}^{n} d_j p_j y_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i c_i + \sum_{r+1}^{n} b_j p_j d_j.
\end{aligned}$$

Portanto, G é simétrica. Logo, $G \in V_n$. □

Cantoni e Butler concluem seu artigo comentando sobre os determinantes das matrizes em V_n. Usando K e H definidas no Lema 4.3, temos que

$$\det(KQK^T) = \det(A - JC)\det(A + JC),$$

no caso par e

$$\det(HQH^T) = \det(A - JC)\det\begin{pmatrix} q & \sqrt{2}x^T \\ \sqrt{2}x & A + JC \end{pmatrix},$$

para o caso ímpar. Isso mostra que o método usado no Teorema 4.2 e no Teorema 4.3 encontra os aurovalores de Q com as multiplicidades corretas.

Como consequência dos teoremas, temos que um autovalor de Q é também autovalor de $A - JC$ ou $A + JC$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação sobre as matrizes centrossimétricas permitiu compreender sua importância dentro da teoria das matrizes e sua evolução ao longo do tempo. Desde as primeiras definições formuladas por Zehfuss no século XIX até as contribuições mais recentes, percebe-se que essas matrizes desempenham um papel relevante no desenvolvimento da álgebra linear, especialmente no que se refere ao estudo de suas propriedades estruturais e computacionais.

Os avanços mais expressivos ocorreram a partir da década de 1970, quando Cantoni e Butler apresentaram teoremas fundamentais sobre as matrizes centrossimétricas simétricas, aprofundando o entendimento sobre seus autovalores e autovetores. Além disso, o trabalho de Ray e Good proporcionou métodos mais eficientes para a obtenção da inversa dessas matrizes, tornando suas aplicações mais viáveis em diferentes contextos matemáticos e computacionais.

Dessa forma, as matrizes centrossimétricas não apenas possuem relevância teórica, mas também desempenham um papel significativo em aplicações práticas, como na solução de sistemas lineares e no processamento de sinais. O estudo contínuo dessas matrizes contribui para a ampliação do conhecimento algébrico e para o desenvolvimento de novas abordagens que possam otimizar seu uso em diversas áreas da matemática aplicada.

Com isso, reforça-se a importância de revisitar conceitos matemáticos históricos, explorando suas evoluções e impactos na ciência contemporânea. A pesquisa sobre matrizes centrossimétricas demonstra como a matemática é um campo dinâmico, onde a interseção entre teoria e aplicação impulsiona novos avanços e descobertas.

REFERÊNCIAS

CANTONI, 4 _ A; BUTLER, P. Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices. **Linear Algebra and its Applications**, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 275–288, 1976. Citado nas pp. 9, 45, 52, 53, 56, 58, 61, 64, 66.

GOOD, IJ. The inverse of a centrosymmetric matrix. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 12, n. 4, p. 925–928, 1970. Citado na p. 45.

HANUS, Paul Henry. **An elementary treatise on the theory of determinants: a text-book for colleges**. [S.l.]: Ginn, 1886. Citado na p. 40.

MUIR, THOMAS. **A Treatise on the Theory of Determinants. London: Constable**. [S.l.]: New York, Dover, 1933. Citado nas pp. 40, 41.

RAY, WD. The inverse of a finite Toeplitz matrix. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 12, n. 1, p. 153–156, 1970. Citado na p. 45.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil