



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies de Weingarten regradas em geometrias de Thurston

Anderson Felipe Viveiros

São Carlos-SP
Janeiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies de Weingarten regradas em geometrias de Thurston

Anderson Felipe Viveiros

Orientador(a): Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Janeiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Anderson Felipe Viveiros, realizada em 28/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto (UFSCar)

Prof. Dr. Dirk Toben (UFSCar)

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra (UFSCar)

Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto (UFF)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (UFC)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico a meu primo, Ricardo,
que nos deixou tão cedo
e nos faz tanta falta;
Todo meu carinho a seus pais,
Sebastiana e Luís, meus padrinhos;
à prima Cristina e demais familiares.*

Agradecimentos

Este trabalho é fruto de uma longa jornada, envolvendo uma correlação complexa entre vontades e desafios, oportunidades e obstáculos. É justo agradecer a cada um daqueles que contribuíram, de uma forma ou de outra, para a sua concretização. Contudo, não é simples precisar sequer em que momento se inicia tal jornada, de forma a delimitar os personagens envolvidos.

Como dizem os budistas, há todo um universo de entidades em ação para que seja possível, por exemplo, o preparo de um simples prato de comida. Ao se dizer *itadakimasu* antes das refeições, agradece-se a todos esses personagens: desde os mais visíveis, como o cozinheiro; até os invisíveis, mas indispensáveis, como a abelha que poliniza e torna possível a colheita do grão.

Naturalmente, não é possível listar os invisíveis, mas é possível agradecer a alguns dos nitidamente visíveis (e apenas alguns, pois estes já são muitos).

Aos amigos Lucas Thiago Batista, Artur Artimonte e Gabriel Silva de Campos, incluindo os demais amigos e colegas do Ensino Médio. Ao Professor Clovis Macedo, cujas aulas instigantes não me deixaram outra escolha que não fosse cursar Matemática. Estendo o agradecimento a todos os outros professores e professoras que já tive, desde o início da alfabetização escolar até o presente momento.

Aos amigos de graduação, em especial, Lino Chiozzini e José Ramos Araujo dos Santos. Vocês são muito queridos e extremamente importantes para mim. Não teria chegado até aqui sem vocês.

Aos amigos enxadristas, pelos tão necessários momentos de distração: Douglas Augusto Galbiatti, Enio Augusto de Oliveira, Ézio Carvalho de Santana, Lila Angélica Romero, Marcos Vinícius Inácio da Silva, Eduarda Rodrigues Machado, Gabriel Mascarenhas e Rafael Passos. Ao mestre Marcos Vinicius Torsani: o que seria de mim sem suas *lives* de xadrez durante a pandemia... Ao “Velho MB”, Mario Silas Biava, que me fez amar este jogo como poucas coisas na vida. O agradecimento ao Velho se estende a todos os amigos do Clube de Xadrez de Matão. E a meu tio, Marcos Antonio Viveiros, por ser o primeiro a me apresentar o xadrez, ainda quando eu tinha 12 anos, e pelos jogos descontraídos nas festas e churrascos da família.

Às amigas, Tainara Rodrigues dos Santos e Rafaella Mendes Zambetta.

À amiga Wang Zi Xuan: 特别感谢我的中国朋友，林霖，感谢都好有意思的聊天和学习。

A meus pais, Paulo Barbosa Viveiros e Marciana Cristina Benvindo; e irmãos, Mateus Henrique Viveiros e Bianca Emanuelle Viveiros. A meus padrinhos, Luís Abel Viveiros e Sebastiana Viveiros. Estendo este agradecimento a toda a família.

Ao amigo e companheiro de curso, Mannaim Gennaro Vitti.

Ao orientador, Alexandre Paiva Barreto, por toda a paciência, insistência, puxões de orelha e apoio durante todos esses mais de 12 anos de trabalho juntos.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que forneceu condições materiais para que este trabalho se concretizasse.

Sou grato a cada um de vocês!

Resumo

Neste trabalho, classificamos todas as superfícies de Weingarten regradas de classe $\mathcal{C}^3$ imersas no grupo de Heisenberg Nil_3 , obtendo parametrizações explícitas de cada caso. Classificamos também as superfícies de translação do tipo gráfico em Nil_3 que são Weingarten-lineares ou que possuem norma da segunda forma constante.

Classificamos também as superfícies de Weingarten regradas nos espaços produto, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. No espaço $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, fizemos um estudo inicial no qual classificamos as superfícies regradas dos tipos vertical e horizontal com uma das curvaturas, média ou gaussiana, constante.

Incluimos ainda um capítulo a respeito de superfícies de Bishop (ou superfícies de Monge) em $\mathbb{R}^3$, no qual classificamos todas tais superfícies de classe $\mathcal{C}^2$ satisfazendo uma relação de Weingarten polinomial.

Palavras-chave: Superfícies de Weingarten, superfícies regradas, grupo de Heisenberg, espaços produto, grupo linear especial.

Abstract

In this work, we classify all the ruled Weingarten surfaces of class $\mathcal{C}^3$ immersed in the Heisenberg group Nil_3 , obtaining explicit parametrizations for each case. We also classify translation surfaces of the graph type in Nil_3 which are linear-Weingarten or whose norm of the second fundamental form is constant.

We also classify ruled Weingarten surfaces in the product spaces, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. In the space $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, we did an initial study in which we classified vertical and horizontal ruled surfaces whose one of the curvatures, either mean or gaussian, is constant.

We included yet a chapter considering Bishop surfaces (or Monge surfaces) in $\mathbb{R}^3$, in which we classified all such surfaces of class $\mathcal{C}^2$ satisfying some polynomial Weingarten relation.

Keywords: Weingarten surfaces, ruled surfaces, Heisenberg group, product spaces, special linear group.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	9
1.1 Superfícies de Kühnel	9
1.2 Superfícies regradas em variedades riemannianas	15
1.3 O Teorema de Beltrami–Dini	18
2 O grupo de Heisenberg Nil_3	29
2.1 Preliminares	29
2.2 Superfícies regradas	36
2.2.1 Verticais	40
2.2.2 Horizontais	42
2.2.3 Oblíquas	57
2.2.4 Classificação geral	86
2.3 Superfícies de translação	87
2.3.1 Weingarten Lineares: $aH + bK = c$	94
2.3.2 Norma da segunda forma constante: $4H^2 - 2K = c$	117
3 Espaços produto	121
3.1 Superfícies regradas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	122
3.1.1 Verticais	124
3.1.2 Horizontais	126
3.1.3 Oblíquas e caso geral	133
3.2 Superfícies regradas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	144
3.2.1 Modelo do hiperboloide para $\mathbb{H}^2$	144
3.2.2 Verticais	149
3.2.3 Horizontais	151
3.2.4 Oblíquas e caso geral	165

4	O espaço $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$	181
4.1	Construção de um modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$	181
4.2	Superfícies regradas em $U\mathbb{H}^2$	205
4.2.1	Verticais	212
4.2.2	Horizontais	215
5	Superfícies de Bishop em $\mathbb{R}^3$	229
5.1	Referenciais de Bishop	229
5.2	Superfícies de Bishop	239
5.3	Curvaturas	244
5.4	Weingarten-polinomiais sobre as curvaturas principais	246
5.4.1	Caso da curva central plana	247
5.4.2	Caso geral	254
5.5	Weingarten-polinomiais sobre (H, K)	263
A	Polinômios	265
A.1	Teorema de Bézout	265
A.2	Eliminante	265
A.3	Polítopos de Newton	268
A.4	Lista de polinômios irredutíveis	273
B	Geodésicas em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ - Verificação	283
B.1	Tipo espaço, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4})$	283
B.2	Tipo luz, $\alpha = \frac{\pi}{4}$	288
B.3	Tipo tempo, $\alpha > \frac{\pi}{4}$	289
C	Estudo das geodésicas no espaço Sol	295
	Referências Bibliográficas	309

Introdução

Superfícies de Weingarten são superfícies cujas curvaturas média e gaussiana, H e K , satisfazem uma relação não trivial $\Psi(H, K) = 0$. Estas superfícies constituem um tema de estudo clássico e de especial interesse em geometria diferencial. Há também um interesse do ponto de vista computacional, uma vez que, conhecendo o valor de uma das curvaturas sobre um dado ponto da superfície, seria possível conhecer (ou aproximar, a depender da complexidade de Ψ) o valor da outra. Veja por exemplo [CDW].

Uma das principais linhas de pesquisa nesse tema trata de classificar tais superfícies. Ainda há muito o que ser descoberto, pois em geral os resultados da literatura tratam de famílias particulares de superfícies satisfazendo alguma relação de Weingarten específica.

As possibilidades de particularizações são muitas, fornecendo muitos diferentes caminhos a serem seguidos. Podemos por exemplo considerar classes particulares de superfícies como superfícies regradas, tubulares, cíclicas, de revolução, de translação, dentre outras. Podemos também considerar diferentes espaços ambientes, sendo necessário, neste caso, olhar para possíveis generalizações dessas famílias.

Dentre estes muitos caminhos possíveis, neste trabalho optamos como principal direção, mas não se limitando a ela, a investigação da classe das superfícies regradas, i.e. daquelas superfícies folheadas por geodésicas. Quanto aos ambientes tridimensionais, buscamos investigar as geometrias modelo de Thurston. Optamos por essa família de superfícies por se tratar de uma classe bem definida em qualquer variedade riemanniana tridimensional, i.e. sem necessidade de generalizações, sejam elas artificiais ou não. Essa universalidade nos diz que a classe das superfícies regradas é de fundamental importância.

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, as superfícies de Weingarten regradas não desenvolvíveis ($K = 0$) foram completamente classificadas, independentemente, por Beltrami e Dini em 1865 ([Blt], [Dn]). Em [Khn], Kühnel fornece uma demonstração dessa classificação, na qual apresenta uma importante técnica que viria a ser utilizada extensivamente na investigação das superfícies de Weingarten de modo geral, i.e. não apenas para o caso das superfícies regradas. Basicamente, essa técnica se resume a observar que, se uma superfície é de Weingarten, então suas curvaturas satisfazem a equação

$$H_s K_t - H_t K_s = 0, \tag{1}$$

na qual os subíndices indicam as derivadas parciais com respeito a uma parametrização da superfície.

Desde então, essa relação é tida como equivalente ao fato de a superfície ser de Weingarten, i.e. à existência de uma relação Ψ , sendo tratada como uma definição alternativa para superfícies de Weingarten. Contudo, embora toda superfície de Weingarten satisfaça (1), a recíproca não é verdadeira. Ao se tentar demonstrar essa equivalência, nota-se que a aplicação dada pelo par-curvatura (H, K) e sua imagem sobre o plano $\mathbb{R}^2$ é de fundamental importância. É preciso encontrar uma relação não trivial Ψ que se anule sobre sua imagem. O caminho que nos vem à mente para construir uma tal relação é utilizar o teorema do posto ou similar. Mas então nos deparamos com o seguinte problema: as conclusões fornecidas por estes teoremas são apenas locais, enquanto Ψ deve ser uma relação global (a menos que queiramos explorar o conceito de superfície “localmente de Weingarten” ou “Weingarten local”). Além disso, o resultado se aplica apenas para os casos em que o posto de (H, K) é constante, uma informação sobre a qual não temos controle. A equação (1) nos garante apenas que o posto de (H, K) é menor ou igual que 1. Surge daí o questionamento a respeito da suposta equivalência.

De fato, apresentamos neste trabalho um contra-exemplo. Trata-se de uma classe de superfícies de revolução em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a condição de Kühnel (1) acima, mas que não é, no nosso melhor entendimento, de Weingarten. Dizemos no “nosso melhor entendimento” pois essa equivalência depende, naturalmente e fundamentalmente, do que queremos dizer com uma **relação funcional não trivial**. Dentre os trabalhos envolvendo superfícies de Weingarten, poucos se dedicam a definir este conceito com precisão. A definição que escolhemos é essencialmente a mesma adotada em [Sds]. Este conceito e o respectivo contra-exemplo são apresentados no Capítulo 1 a seguir, onde tratamos das preliminares deste trabalho e exemplificamos o uso de algumas técnicas, dentre elas o uso da equação (1).

Voltemos à discussão das superfícies regradas em espaços tridimensionais, em particular, nas geometrias modelo de Thurston.

Como comentamos acima, as superfícies regradas em $\mathbb{R}^3$ são completamente classificadas, sendo as superfícies desenvolvíveis uma subclasse à parte. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema (Beltrami, Dini, 1865). *Uma superfície regrada em $\mathbb{R}^3$ é de Weingarten se, e somente se, é desenvolvível ($K = 0$) ou uma screw motion surface (superfície de movimento helicoidal). Em particular, todas elas são Weingarten polinomiais.*

Os casos da esfera $\mathbb{S}^3$ e do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ constam como casos particulares na tese de doutorado de B. Valério, [Vlr, 2004], no qual ela estuda hipersuperfícies regradas em formas espaciais, i.e. $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$. Contudo, seus resultados fornecem uma classificação parcial, i.e. sob uma hipótese adicional envolvendo uma condição técnica. Essa hipótese adicional permite concluir que as superfícies regradas de Weingarten são desenvolvíveis ou helicoidais, como no caso de $\mathbb{R}^3$.

De fato, não encontramos na literatura uma classificação completa para os casos de $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Entretanto, convém mencionar alguns resultados nessa direção.

A. Asperti e B. Valério classificaram as hipersuperfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, para $n \geq 3$, o que curiosamente não inclui os casos de nosso interesse, i.e. os espaços $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$ (veja

[AV] e [ALV]).

Para $\mathbb{S}^{n+1}$, temos

Teorema (Asperti, Valério, 2008). *Seja M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Weingarten regradada conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

- (i) *Ou M^n possui curvatura seccional constante igual a 1;*
- (ii) *Ou M^n é um conjunto aberto do fibrado normal unitário de uma superfície mínima regradada em uma $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$, ou de um produto de dois círculos em uma $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$.*

Já para $\mathbb{H}^{n+1}$, temos

Teorema (Asperti, Lymberopoulos, Valério, 2014). *Seja M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície de Weingarten regradada conexa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Então um, e somente um, dos seguintes é verdade:*

- (i) *M^n tem curvatura seccional constante -1 e, neste caso, M^n é um fibrado vetorial unitário sobre uma curva do tipo espaço no espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$;*
- (ii) *M^n é um subconjunto aberto de um fibrado normal unitário sobre uma superfície regradada mínima em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ ou sobre o produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$;*
- (iii) *M^n é um subconjunto aberto de um fibrado normal unitário sobre uma superfície maximal do tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$.*

Em [AV2, 2007], Asperti e Valério mostram que uma superfície regradada em $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$ é de Weingarten se, e somente se, as curvaturas H e K são constantes ao longo do parâmetro da curva diretriz, i.e. daquela curva sobre a qual variam as geodésicas. Esta é a chamada parametrização padrão, em que uma superfície regradada é dada por uma família a um parâmetro de geodésicas. Este resultado também vale em $\mathbb{R}^3$.

Das oito geometrias modelo de Thurston, resta ainda olhar para os espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e os espaços dados pelos grupos de Lie: o grupo de Heisenberg Nil_3 , o recobrimento universal do grupo linear especial $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ e o grupo solúvel Sol .

Quanto a Nil_3 , o artigo [Kim, 2013] classifica as superfícies regradadas mínimas, i.e. satisfazendo $H = 0$. Este artigo traz uma abordagem livre de coordenadas bastante interessante para este caso, mas difícil de estender para o caso de superfícies de Weingarten em geral. Além deste artigo, não encontramos outros trabalhos que tratem especificamente de superfícies de Weingarten regradadas em Nil_3 . Felizmente, as expressões das geodésicas em Nil_3 são conhecidas e isto nos permitiu avançar nessa direção e classificar todas tais superfícies.

Quanto aos espaços produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, o mesmo caso das regradadas mínimas é classificado em [Mts, 2004]. Também não encontramos outros trabalhos na direção de classificar as superfícies

de Weingarten regradas nestes espaços. Para os espaços $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ e Sol, os resultados nesta direção aparentam ser ainda mais escassos.

Neste trabalho, fomos capazes de classificar completamente as superfícies regradas em Nil_3 . Depois, conseguimos estender as técnicas utilizadas no caso de Nil_3 para os espaços $S^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Em Nil_3 , obtemos parametrizações explícitas para as superfícies, listando 7 famílias possíveis de superfícies. Há nesta lista, por exemplo, uma família de superfícies a três parâmetros reais, o que dificulta a confecção de imagens que possam ilustrar “toda” a família. Por esse motivo, além de algumas figuras, fornecemos links que direcionam para o Geogebra, onde é possível variar o(s) parâmetro(s) de cada família e observar seu efeito sobre a superfície parametrizada.

Já nos espaços produto $S^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ a classificação não é explícita, mas sabemos que a curva diretriz e a curva “direcional” (ou seja, aquela que fornece as direções das geodésicas sobre um ponto da diretriz) devem satisfazer um certo sistema de equações diferenciais ordinárias, com existência e unicidade de soluções.

Optamos por não incluir essas classificações nessa introdução, pois são enunciados longos e com tecnicidades. Contudo, gostaríamos de destacar um par corolários interessantes que decorrem desses resultados.

Em particular, dizemos que uma superfície é Weingarten polinomial se ela é de Weingarten com respeito a uma relação dada por um polinômio não nulo $\Psi \in \mathbb{R}[X, Y]$. Naturalmente, uma superfície de Weingarten não precisa, em geral, ser Weingarten polinomial. O primeiro resultado que gostaríamos de destacar é que, no caso de superfícies regradas nos três espaços mencionados acima, esses conceitos coincidem. Vale lembrar que, como vimos acima, este também é o caso de $\mathbb{R}^3$.

Teorema (A. Viveiros, 2025). *Uma superfície regrada imersa em um dos espaços $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 é de Weingarten se, e somente se, é Weingarten polinomial.*

Dessa constatação surge a seguinte pergunta natural:

Existem superfícies regradas de Weingarten que não sejam polinomiais?

De fato, essa pergunta se estende a todas as demais classes de superfícies, não apenas regradas. Os trabalhos a respeito de superfícies de Weingarten tratam, em sua grande maioria, apenas de superfícies de Weingarten do tipo polinomial. Muitas vezes, apenas dos casos lineares, i.e. com uma relação do tipo $aH + bK = c$, ou com a norma da segunda forma constante, i.e. $4H^2 - 2K = c$. Mas existem superfícies satisfazendo, por exemplo, relações como $\exp(H) = K$ ou $\sin(H) = \cos(K)$?

Antes de destacar o segundo resultado, chamamos a atenção para o fato de que todos os espaços $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 , $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ e Sol podem ser vistos como fibrações da reta sobre uma superfície (a saber, respectivamente, sobre S^2 , $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{R}^2$). Portanto, em todos eles é possível falar em fibras verticais, difeomorfas a $\mathbb{R}$ que são, em particular, geodésicas. Consequentemente, isso define, nestes espaços, uma estrutura de contato ou, se preferirmos, uma “direção horizontal” em cada ponto.

Basta considerar, em cada ponto, o subespaço do espaço tangente dado pelo complemento ortogonal da direção vertical segundo a métrica riemanniana de cada espaço. De forma similar, podemos pensar na inclinação de um vetor com respeito à direção vertical.

Nos espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3 , a noção de inclinação de um vetor com respeito à direção vertical se estende à noção de inclinação de uma geodésica (sempre com respeito à direção vertical). Em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, essa noção também é possível, embora talvez seja mais interessante, neste caso, falar em geodésicas do tipo-espaço, tipo-luz e tipo-tempo. Já em Sol, a noção de inclinação de uma geodésica não funciona, com exceção das fibras verticais. Por exemplo, em Sol, ainda que o vetor inicial de uma geodésica seja horizontal, seu vetor tangente não se mantém horizontal ao longo da geodésica.

Das nossas classificações, é possível enunciar o seguinte resultado.

Teorema (A. Viveiros, 2025). *Se uma superfície regrada imersa em espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou Nil_3 é de Weingarten, então a inclinação das geodésicas que compõem a superfície é constante.*

Este resultado lembra um pouco o conceito de superfícies de ângulo constante, i.e. superfícies cujo vetor normal unitário faz um ângulo constante com a direção vertical do espaço. Há muitos trabalhos que tratam dessa classe de superfície.

Quanto ao espaço $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, este impôs sérias restrições às nossas técnicas, fundamentalmente limitações de caráter computacional. Isto porque, embora tenhamos as expressões das geodésicas, elas são consideravelmente mais complicadas, dificultando a análise do problema. Portanto, os resultados obtidos ainda estão em fase inicial e tratamos apenas dos casos de curvatura média ou gaussiana constantes, restritos a superfícies regradas verticais e horizontais.

Para o caso do espaço Sol, a situação é ainda mais delicada pois neste espaço nem sequer é possível encontrar expressões para as geodésicas em termos de funções elementares. Portanto, uma classificação exigiria, necessariamente, alguma técnica “livre de coordenadas”. Uma tal técnica poderia, quem sabe, até mesmo jogar uma nova luz sobre os casos anteriores ou de outros espaços. Ao final da tese, acrescentamos um apêndice com um estudo das geodésicas em Sol que pode ser útil em estudos posteriores.

Além do caso das superfícies regradas, estudamos ainda alguns casos adicionais, como o das superfícies de translação em Nil_3 , no qual classificamos as superfícies de Weingarten lineares e com norma da segunda forma constante e o de superfícies de Bishop (ou superfícies de Monge) em $\mathbb{R}^3$, no qual classificamos as superfícies do tipo Weingarten polinomial.

Preliminares

1.1 Superfícies de Kühnel

Começamos nosso trabalho com uma discussão à respeito da noção clássica de superfícies de Weingarten. Motivados por [Sds, p. 118], definimos primeiramente o que significa dizer que duas funções são funcionalmente relacionadas.

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são ditas *funcionalmente relacionadas* se existe uma função $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, sendo $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo a imagem de $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

- i) $\Psi(f(x), g(x)) = 0$, para todo $x \in X$;
- ii) se $U_0 \subset U$ é um aberto intersectando a imagem de (f, g) , então Ψ não é constante sobre U_0 .

Dizemos que Ψ é uma *relação funcional não trivial* entre f e g .

Este conceito nos permite definir superfícies de Weingarten.

Definição 1.2. Uma superfície imersa numa 3-variedade riemanniana é dita de *Weingarten* se existe uma relação funcional não trivial entre suas curvaturas média e gaussiana.

Observação 1.3. A condição ii) da Definição 1.1 descreve a não trivialidade da relação funcional. Alguma condição deste tipo é necessária pois, do contrário, poderíamos tomar $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a função identicamente nula e quaisquer duas funções seriam funcionalmente relacionadas (consequentemente, qualquer superfície seria de Weingarten). Em [Sds, p. 118], a condição escolhida pede que Ψ não seja identicamente nula sobre nenhum aberto. Aqui, apenas enfraquecemos essa condição: Ψ não precisa satisfazer condição alguma sobre vizinhanças abertas que estejam distantes do conjunto de interesse, i.e. da imagem de (f, g) . Observe ainda que a condição ii) contempla, por exemplo, todas as funções polinomiais não nulas.

Convém fazer um comentário a respeito da curvatura gaussiana no contexto riemanniano. Sabemos que a curvatura gaussiana para superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, embora definida por meio de um objeto extrínseco à superfície (o campo normal unitário), pode ser calculada de forma intrínseca, i.e. apenas por meio de medidas feitas sobre a superfície, não importando a forma com que ela esteja imersa no ambiente. Isso se deve ao fato de $\mathbb{R}^3$ possuir curvatura seccional constante nula e não é verdade para 3-variedades riemannianas em geral. De fato, o teorema de Gauss para superfícies [Crm, p. 145] nos diz que

$$K_{\text{int}} - \bar{K} = K,$$

sendo $\bar{K}$ a curvatura seccional do ambiente, K_{int} a curvatura seccional intrínseca à superfície e K a curvatura extrínseca.

Portanto, há duas generalizações naturais possíveis para a noção de curvatura gaussiana: aquela definida pelo determinante da segunda forma fundamental (extrínseca) e aquela dada pela curvatura seccional (intrínseca) da superfície. Adotaremos a primeira opção, estando de acordo com a definição de curvatura de Gauss-Kronecker de [Crm, p. 142].

Mais precisamente, considere uma superfície imersa numa 3-variedade M descrita por $\phi : U \rightarrow M$ e munida de um campo normal unitário $N : U \rightarrow TM$. Definimos as curvaturas *média* e de **Gauss-Kronecker** (ou simplesmente *gaussiana*) sobre U respectivamente por

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

sendo E, F, G e e, f, g os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle, & F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle, & G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle, \\ e &= \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, N \rangle, & f &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, N \rangle, & g &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, N \rangle, \end{aligned}$$

onde, por exemplo, $\nabla_{\phi_t} \phi_s$ significa a derivada covariante de ϕ_s com relação à variável t . Assim como em $\mathbb{R}^3$, essas expressões são oriundas da definição em que H e K são dadas, respectivamente, por metade do traço e pelo determinante do operador forma numa base ortonormal.

Dito isso, iniciamos a seção com um lema que descreve uma propriedade importante das superfícies de Weingarten de classe $\mathcal{C}^3$ e que fornece uma ferramenta promissora, embora computacionalmente custosa, na classificação de superfícies de Weingarten. Essa ferramenta foi utilizada primeiramente por Kühnel em [Khn] e em outros trabalhos posteriores.

Lema 1.4 (Condição de Kühnel). *Considere uma superfície de classe $\mathcal{C}^3$ imersa numa 3-variedade riemanniana e denote por H_s, H_t, K_s, K_t as derivadas parciais de suas curvaturas média e gaussiana com respeito a uma parametrização local. Se a superfície é de Weingarten, então*

$$\det \begin{bmatrix} H_s & H_t \\ K_s & K_t \end{bmatrix} = H_s K_t - H_t K_s \equiv 0.$$

Demonstração. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização sobre a superfície. Considere a aplicação $\mathcal{K} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathcal{K}(s, t) = (H(s, t), K(s, t))$.

Suponha que a superfície seja de Weingarten com respeito a uma relação não trivial Ψ . Por definição, temos $\Psi \circ \mathcal{K} \equiv 0$ sobre U . Como a superfície é de classe $\mathcal{C}^3$, a aplicação $\mathcal{K}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Note então que o determinante do enunciado é o determinante jacobiano de $\mathcal{K}$. Suponha por contradição que ele seja diferente de zero sobre $(s_0, t_0) \in U$. Pelo teorema da função inversa, existe um aberto U_0 em torno de (s_0, t_0) sobre o qual $\mathcal{K}$ define um difeomorfismo. Isso implica que a imagem de $\mathcal{K}$ contém um aberto não vazio, a saber, $\mathcal{K}(U_0)$. Como $\Psi \circ \mathcal{K} \equiv 0$, isso implica que Ψ é constante sobre um aberto tocando a imagem de $\mathcal{K}$, o que contradiz a condição ii) da Definição 1.1. $\square$

Este lema impõe uma condição necessária para que uma superfície seja de Weingarten. Assim, se estamos interessados no estudo das superfícies de Weingarten de uma determinada classe de superfícies, podemos nos restringir apenas àquelas que satisfazem tal condição. Mas surge então uma pergunta natural: todas tais superfícies são de fato de Weingarten ou existem superfícies “em excesso”? Em outras palavras, a condição necessária é também suficiente?

Antes de responder a essa pergunta, somos motivados a dar a seguinte definição.

Definição 1.5. Uma superfície de classe $\mathcal{C}^3$ imersa numa 3-variedade riemanniana será dita de *Kühnel* se as derivadas parciais de suas curvaturas média e gaussiana com respeito a qualquer parametrização satisfazem a condição de Kühnel

$$\det \begin{bmatrix} H_s & H_t \\ K_s & K_t \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Nessa nomenclatura, o lema mostra simplesmente que toda superfície de Weingarten é de Kühnel. Mas existem superfícies de Kühnel que não sejam de Weingarten? Muitos trabalhos (e.g. [Khnl, p. 476], [DGW, p. 2], [Sds, p. ix], [Vlr, p. iv], [Mnt, p. 12], dentre outros) mencionam rapidamente que essas noções são equivalentes, sem contudo fornecer uma demonstração. A seguir, fazemos uma breve discussão para mostrar que tal equivalência é de fato falsa, exibindo um exemplo de uma superfície de Kühnel-Weingarten que não é de Weingarten.

A condição de Kühnel nos diz que a imagem do par curvatura (H, K) é essencialmente uma curva em $\mathbb{R}^2$, no sentido de que o determinante jacobiano é nulo e portanto o rank de (H, K) é no máximo 1. Já no caso em que a superfície é de Weingarten, sabemos mais que isso: a imagem de (H, K) está contida na curva de nível 0 de uma relação funcional não trivial Ψ .

A seguir, provamos um resultado que fornece uma equivalência com a Definição 1.2 e que nos ajuda a entender com maior precisão o que falta na condição de Kühnel com relação à definição de Weingarten, fornecendo uma condição necessária para uma superfície candidata a contra-exemplo.

Proposição 1.6. *Uma superfície imersa numa 3-variedade riemanniana é de Weingarten se, e somente se, o fecho da imagem do par curvatura (H, K) possui interior vazio em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Denote por $F \subset \mathbb{R}^2$ o fecho da imagem em $\mathbb{R}^2$ do par curvatura (H, K) . Suponha que a superfície é de Weingarten com respeito a $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Como $\Psi(H, K) \equiv 0$ e Ψ é contínua, temos que Ψ se anula também sobre $F \cap U$ (note que a interseção com U se faz necessária pois, embora a imagem de (H, K) esteja contida no domínio U , seu fecho F pode “vazar” para fora deste conjunto, situação na qual Ψ não está sequer definida). Suponha por contradição que F não possui interior vazio, i.e. contém um aberto não vazio U_0 . Como F é o fecho da imagem de (H, K) , temos necessariamente que U_0 intersecta (H, K) e, portanto, intersecta U . Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $U_0 \subset U$. Pelo que acabamos de observar, devemos ter $\Psi \equiv 0$ sobre U_0 . Mas isso contradiz o item ii) da Definição 1.1, uma vez que U_0 intersecta a imagem de (H, K) .

Reciprocamente, suponha que F possui interior vazio. Faremos uso do seguinte resultado:

Teorema 1.7. [L, p. 47] *Seja M uma variedade suave. Se F é um subconjunto fechado de M , então existe uma função suave não negativa $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = F$.*

Tome Ψ como sendo a função fornecida por esse teorema. Naturalmente, como a imagem de (H, K) está contida em F , teremos $\Psi(H, K) = 0$ sobre toda a superfície. Considere $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ um aberto tocando a imagem de (H, K) . Como F possui interior vazio, U_0 possui ao menos um ponto no complementar $\mathbb{R}^2 - F$. Uma vez que Ψ se anula somente sobre os pontos de F , isso garante que Ψ não é constante sobre U_0 . Logo, Ψ define uma relação funcional não trivial entre H e K e a superfície é de Weingarten. $\square$

Essa proposição nos diz que um exemplo de superfície de Kühnel que não seja Weingarten, caso exista, deverá necessariamente possuir a propriedade de que, embora a imagem de (H, K) seja descrita por uma “curva”, seu fecho possui interior **não** vazio.

Como toda superfície de Kühnel-Weingarten é, por definição, de classe $\mathcal{C}^3$, temos que a aplicação (H, K) é de classe $\mathcal{C}^1$. É sabido que não existem curvas *space filling* de classe $\mathcal{C}^1$, i.e. nenhuma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ pode preencher uma região aberta (ou todo) do plano. As chamadas curvas de Peano são apenas contínuas e possuem um comportamento fractal. Contudo, existem curvas suaves ($\mathcal{C}^\infty$) cuja imagem é densa em alguma região do plano e, portanto, seu fecho possui interior não vazio. É aí que reside a possibilidade do contra-exemplo que buscamos.

Antes de construir nosso exemplo, olhemos para as superfícies de revolução em $\mathbb{R}^3$. Uma tal superfície é dada, por exemplo, pela rotação em torno do eixo- z de uma curva contida no plano $x = 0$ que não toca o eixo de rotação. Mais precisamente, considere uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ dada por $\gamma(t) = (y(t), z(t))$ e suponha que $y(t) > 0$, para todo $t \in I$. A superfície de revolução associada a γ é dada pela imersão $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(s, t) = (y(t) \cos s, y(t) \sin s, z(t)).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que γ está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, existe função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma' = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Tomando o campo normal unitário ao

longo de ϕ como sendo $N = \frac{\phi_s \times \phi_t}{|\phi_s \times \phi_t|}$, as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{y} + \theta' \right), \quad K = \frac{\cos \theta}{y} \theta'.$$

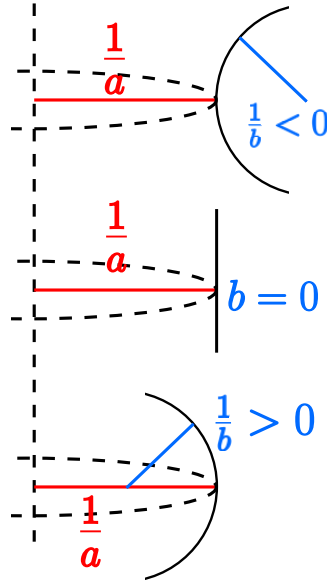
Note que H e K dependem apenas do parâmetro t . Portanto, superfícies de revolução são trivialmente de Kühnel.

Começamos agora a construção do nosso contra-exemplo. Para cada ponto $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, com $a > 0$, associe a curva $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma_p(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}(1 - \cos(bt)), \frac{1}{b} \sin(bt) \right), & \text{se } b \neq 0, \\ \left(\frac{1}{a}, t \right), & \text{se } b = 0. \end{cases}$$

Destacamos que o parâmetro $\varepsilon > 0$ que define o domínio de γ_p é qualquer desde que faça com que a coordenada y de γ_p seja sempre positiva (mera condição para que a curva não cruze o eixo de rotação). Note que sempre existe um tal $\varepsilon > 0$, pois γ_p descreve um círculo ou segmento de reta cujo ponto $\gamma_p(0) = (\frac{1}{a}, 0)$ está a uma distância $\frac{1}{a} > 0$ do eixo de rotação. Observe ainda que γ_p é suave.

A figura abaixo exemplifica γ_p em cada caso.



Além disso, a curva γ_p está parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto, podemos utilizar as fórmulas mencionadas anteriormente para as curvaturas média e gaussiana da superfície de revolução obtida de γ_p . Em particular, sobre $t = 0$ obtemos

$$H(0) = -\frac{1}{2}(a+b), \quad K(0) = ab.$$

Exemplo 1.8 (Superfície de Kühnel que não é Weingarten). Considere subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}(a+b), ab \right) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

e observe que A possui interior não vazio.

Mostramos acima que, para cada ponto $q = (-\frac{1}{2}(a+b), ab) \in A$, a curva $\gamma_p : I_p \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $p = (a, b)$, é tal que a superfície de revolução gerada por γ_p possui q como imagem do par curvatura (H, K) para ao menos um de seus pontos.

Considere então o conjunto $D := A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, i.e. o conjunto dado pelos pontos de A com coordenadas racionais. Note que D é denso em A . Além disso, D é enumerável e pode ser escrito como $D = \{q_n \in U : n \in \mathbb{N}\}$. Consideramos então as curvas $\gamma_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, sendo $\gamma_n := \gamma_{q_n}$ a curva construída acima e os intervalos de definição da forma $I_n = [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$. Definiremos curvas $\tilde{\gamma}_n : J_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por reparametrizações das respectivas curvas γ_n . Faça $J_n := [n + 2\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i, n + 2\sum_{i=0}^n \varepsilon_i]$. Dito de forma mais simples, J_n é obtido a partir de um reposicionamento de I_n em $\mathbb{R}$, de forma que J_n esteja à esquerda de J_{n+1} e haja um intervalo de comprimento 1 entre eles. Consideramos então a reparametrização $\tilde{\gamma}_n : J_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ de γ_n dada por

$$\tilde{\gamma}_n(t) := \gamma_n \left(t - \varepsilon_n - n - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right).$$

Denote por K_n o intervalo de comprimento 1 que separa os intervalos J_n e J_{n+1} . Considere uma curva suave $\lambda_n : K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo traço ligue o ponto final de $\tilde{\gamma}_n$ ao ponto inicial de $\tilde{\gamma}_{n+1}$, de forma que a concatenação $\tilde{\gamma}_n * \lambda_n * \tilde{\gamma}_{n+1}$ também seja suave e cujo traço não cruze o eixo de rotação. Isso nos fornece uma curva suave $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ que percorre todos os traços das curvas $\tilde{\gamma}_n$. Como já observamos, a superfície de revolução gerada por γ é trivialmente de Kühnel-Weingarten. Contudo, a imagem do par curvatura (H, K) dessa superfície contém todos os pontos de D . Logo, seu fecho contém o conjunto A e portanto possui interior não vazio. Segue da Proposição 1.6 que tal superfície não pode ser de Weingarten.

Este exemplo nos mostra que ao se utilizar a condição de Kühnel como técnica para classificar superfícies de Weingarten, obteremos uma classe possivelmente maior. Distinguir quais dessas superfícies são de fato de Weingarten exigirá sempre alguma argumentação adicional.

Para encerrar a seção, fornecemos uma versão equivalente da condição de Kühnel. Com ela, nos livramos do cálculo de derivadas dos quocientes envolvidos na equação $H_t K_s - H_s K_t = 0$. Contudo, pagamos o preço de ter que calcular um determinante 3×3 . Naturalmente, sendo equivalentes, as duas formas codificam a mesma informação em termos de custo computacional, tornando a escolha entre elas uma mera questão de preferência. No nosso trabalho, utilizaremos sempre a versão abaixo.

Lema 1.9. *Uma superfície $\phi : U \rightarrow M$ de classe $\mathcal{C}^3$ imersa numa 3-variedade riemanniana M é de Kühnel se, e somente se,*

$$\det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_s & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \equiv 0,$$

sendo E, F, G os símbolos da primeira forma fundamental e $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$ os símbolos não normalizados da segunda forma fundamental, i.e. se $W = (EG - F^2)^{-1/2}$ e e, f, g são os símbolos da segunda forma fundamental, então $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$ são definidos por $e = \tilde{e}W$, $f = \tilde{f}W$, $g = \tilde{g}W$. Os subíndices s e t indicam as derivadas parciais com respeito às variáveis (s, t) de U .

Demonstração. Denote $h = \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F$ e $k = \tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2$ e observe que $H = \frac{1}{2}W^3h$, $K = W^4k$. Logo,

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{1}{2}(3W^2W_sh + W^3h_s), & H_t &= \frac{1}{2}(3W^2W_th + W^3h_t), \\ K_s &= 4W^3W_sk + W^4k_s, & K_t &= 4W^3W_tk + W^4k_t. \end{aligned}$$

Por definição, a superfície é de Kühnel se

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} H_s & H_t \\ K_s & K_t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3W^2W_sh + W^3h_s) & \frac{1}{2}(3W^2W_th + W^3h_t) \\ 4W^3W_sk + W^4k_s & 4W^3W_tk + W^4k_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}W^6(3hW_sk_t - 3hW_tk_s - 4kW_sh_t + 4kW_th_s + Wh_sk_t - Wh_tk_s) \\ &= \frac{1}{2}W^6 \det \begin{bmatrix} W & W_s & W_t \\ -3h & h_s & h_t \\ -4k & k_s & k_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note então que

$$W_s = -\frac{1}{2}(EG - F^2)^{-\frac{3}{2}}(EG - F^2)_s = -\frac{1}{2}W^3(EG - F^2)_s.$$

Analogamente, $W_t = -\frac{1}{2}W^3(EG - F^2)_t$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}W^6 \det \begin{bmatrix} W & W_s & W_t \\ -3h & h_s & h_t \\ -4k & k_s & k_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}W^6 \det \begin{bmatrix} W & -\frac{1}{2}W^3(EG - F^2)_s & -\frac{1}{2}W^3(EG - F^2)_t \\ -3h & h_s & h_t \\ -4k & k_s & k_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}W^9 \det \begin{bmatrix} 2W^{-2} & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3h & h_s & h_t \\ 4k & k_s & k_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Este é precisamente o determinante do enunciado. Como $W \neq 0$, o resultado segue. $\square$

1.2 Superfícies regradas em variedades riemannianas

Nesta seção, exploramos o conceito de superfícies regradas imersas em 3-variedades riemannianas, fazendo uma breve discussão a respeito de curvas de estrição e propondo curvas satisfazendo uma condição alternativa mais simples, a que nos referimos como condição de ortogonalidade.

Dado um ponto p em uma variedade riemanniana tridimensional completa (M, g) , denote por $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ a aplicação exponencial sobre p . Recorde que, para cada $v \in T_p M$, a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ é a geodésica em M satisfazendo as condições iniciais $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Definição 1.10 (Superfícies regradas). Seja M uma 3-variedade riemanniana completa. Considere uma curva $p : I \rightarrow M$ e um campo de vetores unitários $v : I \rightarrow TM$ ao longo de p , ambos de classe $\mathcal{C}^2$. Se a aplicação $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $\phi(s, t) = \exp_{p(s)}(tv(s))$ é imersão, dizemos que $\Sigma(p, v) := \phi(I \times \mathbb{R})$ é a **superfície regrada** gerada pela **curva diretriz** p com **curva direcional** v .

Observação 1.11. Em alguns casos, iremos requerer menos da aplicação ϕ , permitindo que ela possua algumas singularidades, i.e. permitindo que ela deixe de ser imersão em alguns pontos, desde que respeitada alguma condição de tolerância que poderá depender do contexto. De forma geral, a condição implicará que ϕ é imersão num aberto denso de $I \times \mathbb{R}$.

Podemos dar a seguinte interpretação geométrica à Definição 1.10. Geodésicas podem ser vistas como trajetórias percorridas por raios de luz. Naturalmente, seu formato depende da geometria do ambiente. Com essa interpretação, uma superfície regrada seria o conjunto dos pontos iluminados por um fonte de luz unidimensional que caminha no espaço. A trajetória descrita pela posição da fonte de luz e as direções em que a fonte de luz aponta forneceriam, respectivamente, as curvas base e direcional da superfície regrada.

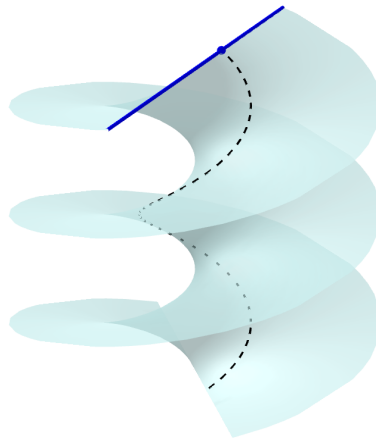


Figura 1.1: Superfície gerada por feixes de luz

Não é difícil ver que uma superfície regrada é gerada por mais de uma (de fato, por infinitas) curva diretriz. Podemos nos perguntar portanto se há uma escolha particular da curva diretriz que possua propriedades interessantes.

Podemos falar por exemplo da condição de estrição. No caso em que $M = \mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano, superfícies regradas possuem a forma $\phi(s, t) = p(s) + tv(s)$. Pedir então que a curva diretriz

satisfaça a condição de estrição é pedir que $\langle p', v' \rangle \equiv 0$. Se a superfície regrada não é cilíndrica, i.e. $v' \neq 0$, então é possível mostrar que existe uma única curva diretriz sobre a superfície satisfazendo a condição de estrição (v. [Crm2, p. 226, 227] ou seção 1.3 a seguir). Portanto, neste caso faz sentido falar da (única) curva de estrição da superfície. Quanto ao contexto riemanniano, podemos estender essa noção, pedindo que a curva diretriz p satisfaça

$$g(p', \nabla_{p'} \phi_t) \equiv 0,$$

sendo ∇ a conexão de Levi-Civita do ambiente (M, g) .

Contudo, no contexto riemanniano a existência e unicidade da curva de estrição é uma questão mais delicada, como mostra o trabalho recente [LRS]. Nele, os autores apresentam exemplos interessantes, como o de uma superfície regrada em $\mathbb{H}^3$ que não admite curvas de estrição, uma superfície regrada num espaço produto com uma quantidade enumerável de curvas de estrição e ainda uma superfície num espaço com métrica *warped* com uma quantidade arbitrária de curvas de estrição.

Tendo em vista tal complexidade, propomos uma condição alternativa que, embora não admita unicidade, sempre admite existência de uma curva diretriz que a satisfaz. Antes de falar dessa condição, provamos o seguinte lema.

Lema 1.12. *Seja $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$ uma superfície regrada como na Definição 1.10. Se ϕ é imersão sobre um aberto denso de $I \times \mathbb{R}$, então o produto interno entre os vetores tangentes ϕ_s e ϕ_t é constante ao longo de cada geodésica ou, mais precisamente, a função $(s, t) \mapsto g(\phi_s(s, t), \phi_t(s, t))$ depende apenas de $s \in I$.*

Demonstração. Em torno de cada ponto de imersão, podemos considerar uma vizinhança aberta em que ϕ é um mergulho. Portanto, sobre uma tal vizinhança temos $[\phi_s, \phi_t] = 0$, além de $\nabla_{\phi_t} \phi_t = 0$ e $g(\phi_t, \phi_t) = 1$, pois $t \mapsto \phi(s, t)$ é geodésica com $\phi_t(s, 0) = v(s)$ unitário. Portanto, sobre o aberto em que ϕ é imersão vale que

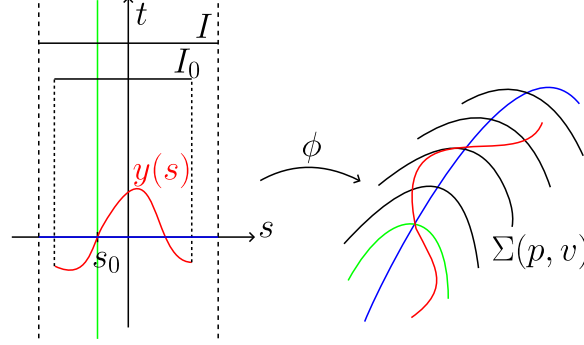
$$\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_s, \phi_t) = g(\nabla_{\phi_t} \phi_s, \phi_t) + g(\phi_s, \nabla_{\phi_t} \phi_t) = g(\nabla_{\phi_t} \phi_s, \phi_t) = g(\nabla_{\phi_s} \phi_t, \phi_t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(\phi_t, \phi_t) = 0.$$

Como $\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_s, \phi_t) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e o aberto sobre o qual ϕ é imersão é denso em $I \times \mathbb{R}$, vale que $\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_s, \phi_t) = 0$ sobre todo $I \times \mathbb{R}$. $\square$

Considere uma superfície regrada dada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$ e denote por p e v suas curvas base e direcional. Considere uma função $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Dizemos então que $\tilde{p} : I \rightarrow M$ definida por $\tilde{p}(s) = \phi(s, y(s))$ é a curva diretriz obtida de p pelo *ajuste* y . Naturalmente, fazendo-se $\tilde{v}(s) = \phi_t(s, y(s))$, a superfície regrada de curva diretriz $\tilde{p}$ e curva direcional $\tilde{v}$ define a mesma superfície dada por ϕ .

Proposição 1.13 (Condição de ortogonalidade). *Toda superfície regrada pode ser descrita por uma curva diretriz ortogonal às direções das geodésicas, i.e. satisfazendo a condição de ortogonalidade dada por $\langle p', v \rangle \equiv 0$. Quaisquer duas tais curvas base diferem por um ajuste constante.*

Demonstração. Considere uma superfície regrada $\Sigma(p, v)$ numa variedade M e seja $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M$ como na Definição 1.10. Suponha que $\tilde{p} : I \rightarrow M$ e $\tilde{v} : I \rightarrow TM$ sejam as curvas base e direcional obtidas de p e v pelo ajuste $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ e que satisfaçam $g(\tilde{p}', \tilde{v}) \equiv 0$.



Essa condição equivale a

$$\begin{aligned} 0 &= g(\tilde{p}'(s), \tilde{v}(s)) = g(\phi_s(s, y(s)) + y'(s)\phi_t(s, y(s)), \phi_t(s, y(s))) \\ &= g(\phi_s(s, y(s)), \phi_t(s, y(s))) + y'(s)g(\phi_t(s, y(s)), \phi_t(s, y(s))) \\ &= g(\phi_s(s, 0), \phi_t(s, 0)) + y'(s) = g(p'(s), v(s)) + y'(s). \end{aligned}$$

Acima, utilizamos que $g(\phi_t, \phi_t) \equiv 1$ e o Lema 1.12. Portanto, conseguimos ajustar uma curva diretriz inicial p por uma função y de forma a satisfazer a condição de ortogonalidade se, e somente se, y é solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem dada por

$$y'(s) = -g(p'(s), v(s)).$$

Dada condição inicial $y(s_0) = y_0$ sobre $s_0 \in I$, temos a solução globalmente definida em I dada por

$$y(s) = y_0 - \int_{s_0}^s g(p'(\tau), v(\tau)) d\tau.$$

Isso também mostra que duas tais curvas ortogonais às direções das geodésicas diferem por uma constante. $\square$

Observação 1.14. Em alguns casos, pode ser útil considerar superfícies regradas cuja curva direcional $v \neq 0$ não seja unitária. Observamos que a condição de ortogonalidade continua válida mesmo neste caso. Basta reparametrizar a superfície por meio da curva direcional unitária $\tilde{v} := \frac{v}{|v|}$. Pela proposição acima, existe uma curva diretriz ortogonal p satisfazendo $g(p', \tilde{v}) = 0$. Mas então essa mesma curva satisfaz $g(p', v) = 0$.

1.3 O Teorema de Beltrami–Dini

A classificação das superfícies regradas de Weingarten no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é conhecido como Teorema de Beltrami–Dini e diz que toda superfície regrada de Weingarten em $\mathbb{R}^3$ não desenvolvível

é uma *screw motion surface* (superfície de movimento helicoidal). Este resultado por ser visto como uma generalização do Teorema de Catalan que diz que as únicas superfícies regradas mínimas ($H = 0$) em $\mathbb{R}^3$ são o plano e o helicóide.

Uma demonstração do teorema de Beltrami–Dini é fornecida em [Khn] e será apresentada aqui com detalhes adicionais e para fins de ilustração da aplicação do Lema 1.9, da condição de tolerância e de algumas ferramentas que serão utilizadas mais adiante, como a técnica da eliminante (v. Apêndice A.2).

Seguindo a Definição 1.10, uma superfície regrada em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de uma aplicação $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma $\phi(s, t) = \exp_{p(s)}(tv(s))$, em que $p : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a curva base da superfície, $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a curva direcional ao longo de p . No caso de $\mathbb{R}^3$, sabemos que

$$\exp_p(tv) = p + tv, t \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, ϕ é dada simplesmente por

$$\phi(s, t) = p(s) + tv(s).$$

Da Proposição 1.13, poderíamos supor, sem perda de generalidade, que a curva diretriz satisfaz a condição de ortogonalidade, mais precisamente dada por $\langle p', v \rangle \equiv 0$. Contudo, não iremos requerer essa condição pois, no caso de $\mathbb{R}^3$, vale a clássica condição de estrição, que enunciaremos mais adiante.

Quanto à regularidade de ϕ , iremos supor que ϕ é de classe $\mathcal{C}^3$ e “quase” imersão. Fazemos isso para que algumas superfícies relevantes, como cones por exemplo, não sejam excluídas da nossa classe. Contudo, é necessário mensurar a tolerância a tais pontos singulares para que a superfície não seja degenerada. Assim, iremos supor que ϕ satisfaz a seguinte

Condição de tolerância. Se ϕ não é imersão, então existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que, se $(\phi_s \times \phi_t)(s, t) = \vec{0}$, então $t = h(s)$.

Essa condição nos diz essencialmente que ϕ admite no máximo um ponto singular por geodésica e que esse possível ponto singular varia continuamente. Note que a condição $\phi_s \times \phi_t = \vec{0}$ equivale a dizer que os vetores $\phi_s \times \phi_t$ são paralelos e, portanto, ϕ deixa de ser imersão sobre tais pontos.

Sigamos com os cálculos usuais das curvaturas sobre os pontos regulares da superfície. Os vetores tangentes são dados por

$$\phi_s = p' + tv', \quad \phi_t = v.$$

O campo normal associado é dado por

$$\phi_s \times \phi_t = p' \times v + t(v' \times v).$$

Denotando $W = |\phi_s \times \phi_t|^{-1}$, temos o campo normal unitário sobre a superfície dado por $N = W(\phi_s \times \phi_t)$.

As derivadas de segunda ordem são dadas por

$$\phi_{s,s} = p'' + tv'', \quad \phi_{s,t} = v', \quad \phi_{t,t} = 0.$$

Temos então a primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = |p'|^2 + 2\langle p', v' \rangle t + |v'|^2 t^2, \\ F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = \langle p', v \rangle, \\ G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1, \\ e &= \langle \phi_{s,s}, N \rangle = W \langle p'' + tv'', p' \times v + t(v' \times v) \rangle \\ &= W (\langle p'', p' \times v \rangle + (\langle p'', v' \times v \rangle + \langle v'', p' \times v \rangle) t + \langle v'', v' \times v \rangle t^2), \\ f &= \langle \phi_{s,t}, N \rangle = W \langle v', p' \times v + t(v' \times v) \rangle = W \langle v', p' \times v \rangle, \\ g &= \langle \phi_{t,t}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Note que em $F = \langle p', v \rangle$ e $G = 1$ usamos o fato de que v é unitário.

Naturalmente, temos

$$\begin{aligned} W^2 &= |\phi_s \times \phi_t|^{-2} = \left(|p' \times v|^2 + 2t \langle p' \times v, v' \times v \rangle + t^2 |v' \times v|^2 \right)^{-1} \\ &= \left(|p'|^2 |v|^2 - \langle p', v \rangle^2 + t^2 (|v'|^2 |v|^2 - \langle v', v \rangle^2) + 2t (\langle p', v' \rangle \langle v, v \rangle - \langle p', v \rangle \langle v, v' \rangle) \right)^{-1} \\ &= \left(|p'|^2 + 2t \langle p', v' \rangle + t^2 |v'|^2 - \langle p', v \rangle^2 \right)^{-1} \\ &= (EG - F^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Seguindo a notação do Lema 1.9, as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{W^3}{2}(\tilde{e} - 2\tilde{f}F), \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -W^4 \tilde{f}^2. \end{aligned}$$

Começamos nossa discussão das superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{R}^3$ com um caso a parte: o das chamadas superfícies desenvolvíveis. Uma superfície é dita desenvolvível se sua curvatura gaussiana é identicamente nula. Essas superfícies são localmente isométricas ao plano e podem ser pensadas como aquelas superfícies obtidas “curvando-se” uma folha de papel no espaço, sem esticar ou rasgar.

Essa classe de superfícies é rica em exemplos. O teorema a seguir é bem conhecido e nos traz uma classificação que nos diz que tais superfícies são obtidas, essencialmente, a partir da colagem de planos, superfícies cilíndricas, cones e superfícies tangentes.

Teorema 1.15. *Se a superfície regrada $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de curva diretriz $p : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e curva direcional $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ é desenvolvível ($K \equiv 0$) então todo intervalo aberto $I_0 \subset I$ não vazio contém um intervalo aberto J não vazio sobre o qual a restrição $\phi : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de um dos seguintes tipos*

- (i) superfície cilíndrica: as retas $t \mapsto p(s) + tv(s)$ são paralelas;
- (ii) superfície cônica: as retas $t \mapsto p(s) + tv(s)$ se intersectam num único ponto;
- (iii) superfície tangente: as retas $t \mapsto p(s) + tv(s)$ são as retas tangentes a uma curva γ em s .

Note que cada um desses casos pode estar contido num plano.

Demonstração. Primeiramente, note que $K \equiv 0$ se e somente se

$$f = W \langle v', p' \times v \rangle \equiv 0 \iff \langle v', p' \times v \rangle \equiv 0.$$

Suponha que a superfície é desenvolvível e considere um intervalo aberto não vazio qualquer $I_0 \subset I$.

Se a restrição da curva direcional $v : I_0 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é constante, então temos o caso (i) para $J = I_0$.

Se $v : I_0 \rightarrow \mathbb{S}^2$ não é constante, então existe $I_1 \subset I_0$ aberto não vazio sobre o qual $v' \neq 0$. Neste caso, $\left\{ v, \frac{v'}{|v'|}, \frac{v' \times v}{|v' \times v|} \right\}$ fornece uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, para todo $s \in I_1$. Usando que $\langle v', p' \times v \rangle \equiv 0$ e escrevendo $p' \times v$ nesta base, obtemos

$$p' \times v = \frac{\langle p' \times v, v' \times v \rangle}{|v' \times v|^2} (v' \times v).$$

Lembrando que $\phi_s \times \phi_t = p' \times v + t(v' \times v)$, conclui-se que para todo $s \in I_1$, a reta da superfície associada a s possui um ponto singular em $t = h(s) := \frac{-\langle p' \times v, v' \times v \rangle}{|v' \times v|^2}(s)$. Consideremos a curva dada por esses pontos singulares, i.e. $\gamma : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(s) = \phi(s, h(s)).$$

Se γ é constante, então todas as retas associadas a $s \in I_1$ se intersectam em γ e estamos no caso (ii) para $J = I_1$.

Suponha que γ não seja constante. Note que γ é de classe $\mathcal{C}^1$. Então existe $I_2 \subset I_1$ intervalo aberto não vazio sobre o qual $\gamma' \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \phi_s(s, h(s)) + h'(s) \phi_t(s, h(s)) \\ &= p'(s) + h(s) v'(s) + h'(s) v(s) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$h = \frac{-\langle p' \times v, v' \times v \rangle}{|v' \times v|^2} = \frac{-(\langle p', v' \rangle \langle v, v \rangle - \langle p', v \rangle \langle v, v' \rangle)}{|v'|^2 |v|^2 - \langle v', v \rangle^2} = -\frac{\langle p', v' \rangle}{|v'|^2}.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \langle \gamma', v' \rangle &= \langle p' + hv' + h'v, v' \rangle = \langle p', v' \rangle + h \langle v', v' \rangle = 0, \\ \langle \gamma', v' \times v \rangle &= \langle p' + hv' + h'v, v' \times v \rangle = \langle p', v' \times v \rangle = -\langle p' \times v, v' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\left\{v, \frac{v'}{|v'|}, \frac{v' \times v}{|v' \times v|}\right\}$ é uma base ortonormal, segue que γ' é um múltiplo de v . Ora, mas então a reta $t \mapsto p + tv$ passa por γ (basta tomar $t = h$) e além disso, seu vetor tangente é v , que possui a mesma direção de γ' . Isso mostra que estamos no caso (iii), para $J = I_2$. Note que em todos os casos, nada impede que ϕ esteja contida em planos. $\square$

A respeito das superfícies desenvolvíveis, nos contentaremos com o teorema acima, considerando-as uma classe à parte.

Elaboramos agora a noção de curva de estrição.

Lema 1.16 (Condição de estrição). *Se a curva direcional $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ de uma superfície regrada satisfaz $v' \neq 0$ sobre I , então existe uma única escolha da curva diretriz p de forma a satisfazer a condição $\langle p', v' \rangle \equiv 0$. Tal curva é chamada **curva de estrição** da superfície regrada.*

Demonstração. Considere $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi = p + tv$ com $v' \neq 0$ sobre I . Considere $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ de mesma classe de diferenciabilidade que ϕ . Isso fornece uma reparametrização $\tilde{\phi} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície definida por

$$\tilde{\phi}(s, t) = \phi(s, t + h(s)) = p(s) + (t + h(s))v(s).$$

Iremos encontrar h de forma que $\tilde{p}(s) := \tilde{\phi}(s, 0) = p(s) + h(s)v(s)$ satisfaça a condição de estrição $\langle \tilde{p}', v' \rangle = 0$.

Como v é unitário, temos $\langle v, v' \rangle = 0$. Segue daí que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}', v' \rangle &= \langle p' + h'v + hv', v' \rangle \\ &= \langle p', v' \rangle + h \langle v', v' \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomar $h = -\frac{\langle p', v' \rangle}{\langle v', v' \rangle}$. Isso mostra a existência da curva de estrição.

Suponha que a família em $s \in I$ de retas descrevendo a superfície possa ser descrita, com o mesmo parâmetro s , por duas curvas de estrição, p, q . Portanto, estamos supondo que $\langle p', v' \rangle = \langle q', v' \rangle = 0$. Note então que, como $p(s)$ e $q(s)$ estão sobre uma mesma reta sobre a superfície, deve existir $h = h(s) \in \mathbb{R}$ tal que $q(s) = p(s) + h(s)v(s)$. Além disso, h deve ser diferenciável. Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p', v' \rangle - \langle q', v' \rangle = \langle p' - q', v' \rangle = \langle p' - p' - h'v - hv', v' \rangle \\ &= h \langle v', v' \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle v', v' \rangle \neq 0$, isso mostra que $h \equiv 0$. Portanto, $q \equiv p$. $\square$

Antes de seguir com o teorema de classificação das superfícies regradas de Weingarten, damos mais um exemplo importante de superfícies regradas em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.17 (*Screw motion surfaces*). Essas superfícies são definidas como sendo aquelas cuja curva de estrição é uma hélice e a curva direcional descreve um círculo ortogonal ao eixo dessa hélice. Mais precisamente, a menos de isometrias, toda tal superfície possui a forma

$$\phi(s, t) = (\cos^2 \eta) \begin{bmatrix} (a - b \tan \eta) \sin s \\ -(a - b \tan \eta) \cos s \\ (a \tan \eta + b)s \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \cos \eta \cos s \\ \cos \eta \sin s \\ \sin \eta \end{bmatrix},$$

definida para todo $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sendo constantes $\eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a, b \in \mathbb{R}$. As figuras abaixo exemplificam alguns casos (curva de estrição em vermelho).

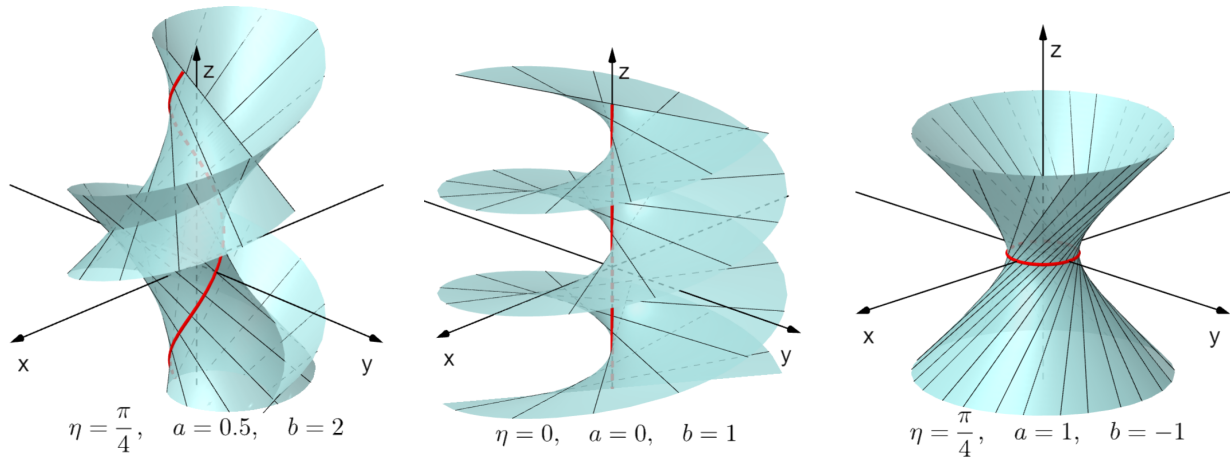


Figura 1.2: <https://www.geogebra.org/m/mhezykbw>

Como podemos ver, uma *screw motion surface* pode ser um helicóide, se a curva de estrição se degenerar em uma reta ou um hiperboloide de uma folha, caso em que a curva de estrição se degenera em um círculo.

Olhemos agora para as curvaturas dessas superfícies. Fazendo os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} E &= (\cos^2 \eta) (a^2 + b^2 + t^2), \\ F &= (\cos \eta) a, \quad G = 1, \\ W &= (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} = (\cos \eta)^{-1} (b^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ e &= W (\cos^2 \eta) (b(a \cos \eta - b \sin \eta) - t^2 \sin \eta), \\ f &= W b \cos^2 \eta, \quad g = 0. \end{aligned}$$

Assim, as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{W^3}{2} (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) = \frac{W^3}{2} (\tilde{e} - 2\tilde{f}F) = \frac{-(b^2 + t^2) \tan \eta - ab}{2(b^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ K &= -W^4 \tilde{f}^2 = -\frac{b^2}{(b^2 + t^2)^2}. \end{aligned}$$

Isso mostra em particular que a curvatura gaussiana de uma tal superfície se anula em algum ponto se, e somente se, ela é desenvolvível.

Para fins de ilustração, mostremos que essas superfícies são de Weingarten do tipo polinomial. Para isso, precisamos exibir um polinômio não identicamente nulo $\Psi(X, Y)$ tal que $\Psi(H, K) \equiv 0$. As expressões de H e K acima dependem, ambas, apenas de $t \in \mathbb{R}$. Eliminamos essa variável por meio da ferramenta da eliminante (v. Apêndice A.2). Primeiro, note que as expressões acima implicam

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 4(b^2 + t^2)^3 H^2 - ((b^2 + t^2) \tan \eta + ab)^2, \\ 0 &\equiv K(b^2 + t^2)^2 + b^2. \end{aligned}$$

Isso equivale a dizer que $(H, b^2 + t^2)$ e $(K, b^2 + t^2)$ anulam, respectivamente, os polinômios

$$\begin{aligned} P(X, Z) &:= 4Z^3 X^2 - (Z \tan \eta + ab)^2, \\ Q(Y, Z) &:= YZ^2 + b^2. \end{aligned}$$

O método da eliminante nos diz então que (H, K) anula o polinômio Ψ dado por $\Psi(X, Y) = \text{Elm}_Z(P, Q)$. Abrindo a expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y) &= \det \begin{bmatrix} 4X^2 & 0 & Y & 0 & 0 \\ -\tan^2 \eta & 4X^2 & 0 & Y & 0 \\ -2ab \tan \eta & -\tan^2 \eta & b^2 & 0 & Y \\ -a^2 b^2 & -2ab \tan \eta & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 b^2 & 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix} \\ &= b^4 (16b^2 X^4 + 16ab(\tan \eta) X^2 Y + a^4 Y^3 + 2a^2 (\tan^2 \eta) Y^2 + (\tan^4 \eta) Y) \end{aligned}$$

Portanto, se $b = 0$ a superfície é desenvolvível e satisfaz $K \equiv 0$. Se $b \neq 0$, a superfície é Weingarten polinomial, satisfazendo

$$0 = 16b^2 H^4 + 16ab(\tan \eta) H^2 K + a^4 K^3 + 2a^2 (\tan^2 \eta) K^2 + (\tan^4 \eta) K.$$

Convém destacar que em [Khn], o autor apresenta uma relação de Weingarten entre H, K que não é polinomial (pois envolve raízes), embora sua expressão seja mais concisa.

Apresentamos agora a classificação das superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{R}^3$. Essa classificação foi dada, de forma independente, por Beltrami e Dini em 1865 ([Bl], [Dn]). Este é o principal resultado que gostaríamos de generalizar em outras variedades ambiente, em particular para as geometrias modelo de Thurston. A prova que fornecemos aqui é essencialmente a mesma dada por Kühnel em [Khn].

Teorema 1.18 (Beltrami, Dini, 1865/66). *A classe das superfícies regradas de Weingarten de classe $\mathcal{C}^3$ em $\mathbb{R}^3$ é dada pelas superfícies desenvolvíveis e screw motion surfaces. Em particular, todas são Weingarten polinomiais.*

Demonstração. Considere $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regrada de classe $\mathcal{C}^3$. Se ϕ é de Weingarten, então pelo Lema 1.9 e dos cálculos anteriores, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2(E - F^2) & (E - F^2)_s & (E - F^2)_t \\ 3(\tilde{e} - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_t \\ -4\tilde{f}^2 & (-\tilde{f}^2)_s & (-\tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \\ &= -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(E - F^2) & (E - F^2)_s & (E - F^2)_t \\ 3(\tilde{e} - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Suponha que ϕ não é desenvolvível. Então existe $(s_0, t_0) \in I \times \mathbb{R}$ sobre o qual $K \neq 0$, i.e. $\tilde{f}(s_0) = \langle v'(s_0), (p' \times v)(s_0) \rangle \neq 0$. Como $\tilde{f}$ não depende de t e é contínua, existe um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ maximal com respeito à propriedade $\tilde{f} \neq 0$. Em particular, isso implica que $v' \neq 0$ sobre I_1 .

Sem perda de generalidade, podemos supor que v' é unitário sobre I_1 . Isso porque, sendo $v' \neq 0$ neste intervalo, podemos reparametrizar a curva $v : I_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ por seu comprimento de arco. Note que isso não altera em nada a condição de estrição $\langle p', v' \rangle = 0$ sobre I_1 . Com essas hipóteses, temos

$$E = |p'|^2 + t^2, \quad F = \langle p', v \rangle, \quad G = 1.$$

Antes de exibir a segunda forma fundamental, note que $\{v, v', v \times v'\}$ fornece um referencial ortonormal ao longo de p . Usando a condição de estrição temos que

$$\begin{aligned} p' &= \langle p', v \rangle v + \langle p', v' \rangle v' + \langle p', v \times v' \rangle (v \times v') \\ &= \langle p', v \rangle v + \langle p', v \times v' \rangle (v \times v') \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} p' \times v &= (\langle p', v \rangle v + \langle p', v \times v' \rangle (v \times v')) \times v \\ &= \langle p', v \times v' \rangle ((v \times v') \times v) \\ &= \langle p', v \times v' \rangle v'. \end{aligned}$$

Derivando p' e usando novamente a condição de estrição, obtemos

$$\begin{aligned} p'' &= \langle p'', v \rangle v + \langle p', v \rangle v' + \langle p'', v \times v' \rangle (v \times v') \\ &\quad + \langle p', v \times v'' \rangle (v \times v') + \langle p', v \times v' \rangle (v \times v''). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \langle p'', p' \times v \rangle &= \langle p', v \times v' \rangle (\langle p', v \rangle + \langle p', v \times v' \rangle \langle v', v \times v'' \rangle) \\ &= \langle p', v \times v' \rangle (\langle p', v \rangle - \langle p', v \times v' \rangle \langle v'', v \times v' \rangle). \end{aligned}$$

Olhemos agora para a derivada da função $\tilde{f} := \langle p', v \times v' \rangle$. Temos

$$\begin{aligned}\tilde{f}' &= \langle p'', v \times v' \rangle + \langle p', v \times v'' \rangle \\ &= -\langle p'', v' \times v \rangle - \langle v'', v \times v' \rangle \langle p', v' \rangle \\ &= -\langle p'', v' \times v \rangle.\end{aligned}$$

De forma semelhante, mostra-se que $\langle v'', p' \times v \rangle = 0$. Desses cálculos temos que a segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned}e &= W(\langle p'', p' \times v \rangle + (\langle p'', v' \times v \rangle + \langle v'', p' \times v \rangle)t + \langle v'', v' \times v \rangle t^2) \\ &= W(\langle p', v \times v' \rangle (\langle p', v \rangle - \langle p', v \times v' \rangle \langle v'', v \times v' \rangle) + \langle p'', v' \times v \rangle t + \langle v'', v' \times v \rangle t^2) \\ f &= W(\langle v', p' \times v + t(v' \times v) \rangle) = W(\langle v', p' \times v \rangle) = W(\langle p', v \times v' \rangle) \\ g &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, denotando $V = \langle v'', v' \times v \rangle$, podemos escrever

$$\begin{aligned}E &= F^2 + \tilde{f}^2 + t^2, \quad F = \langle p', v \rangle, \quad G = 1, \\ e &= W(\tilde{f}(F + V\tilde{f}) - \tilde{f}'t + Vt^2), \\ \tilde{f} &= \langle p', v \times v' \rangle, \quad f = W\tilde{f}, \quad g = 0.\end{aligned}$$

Sobre I_1 , a condição do Lema 1.9 nos diz que

$$\begin{aligned}0 &= \det \begin{bmatrix} 2(E - F^2) & (E - F^2)_s & (E - F^2)_t \\ 3(\tilde{e} - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e} - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 2(\tilde{f}^2 + t^2) & 2\tilde{f}\tilde{f}' & 2t \\ 3 \begin{pmatrix} \tilde{f}(F + V\tilde{f}) \\ -\tilde{f}'t + Vt^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{f}'(F + V\tilde{f}) \\ +\tilde{f}(F' + V'\tilde{f} + V\tilde{f}') \\ -\tilde{f}''t + V't^2 \end{pmatrix} & -\tilde{f}' + 2Vt \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}' & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2(V\tilde{f}' - 2\tilde{f}V')t^3 + (4\tilde{f}\tilde{f}'' - 4(\tilde{f}')^2)t^2 \\ &\quad + (2F\tilde{f}\tilde{f}' - 4\tilde{f}^3V' - 4\tilde{f}^2F' + 2V\tilde{f}^2\tilde{f}')t - 2\tilde{f}^2(\tilde{f}')^2\end{aligned}$$

Essa equação nos diz que a função do lado direito se anula para todo $(s, t) \in I_1 \times \mathbb{R}$. Isso nos diz que os coeficientes em t devem ser todos nulos sobre I_1 . Como $\tilde{f} \neq 0$ sobre I_1 , o coeficiente independente nos diz que $\tilde{f}' \equiv 0$ sobre I_1 , i.e. $\tilde{f}$ é constante em I_1 . Da maximalidade de I_1 com respeito à condição $\tilde{f} \neq 0$, isso implica que $I_1 = I$. O coeficiente de t^3 nos mostra então que $V' \equiv 0$ sobre I e o coeficiente de t nos mostra que $F' \equiv 0$ sobre I .

Portanto, concluímos que toda superfície regrada não desenvolvível em $\mathbb{R}^3$ pode ser parametrizada globalmente satisfazendo a condição de estrição unitária e deve possuir $\tilde{f}, V, F$ constantes. Mostramos agora que toda tal superfície é uma *screw motion surface*.

Primeiro, observamos que a condição de que $\langle v'', v' \times v \rangle = V$ é constante implica que a curva $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ é plana e portanto descreve um (arco de) círculo. Derivando a equação $\langle v, v \rangle = 1$, obtemos

$$\langle v', v \rangle = 0 \implies \langle v'', v \rangle + \langle v', v' \rangle = 0 \implies \langle v'', v \rangle + 1 = 0.$$

Derivando também $\langle v', v' \rangle = 1$, obtemos que $\langle v'', v' \rangle = 0$. Como $\{v, v', v \times v'\}$ fornece uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, essas equações mostram que $v'' = -v - V(v \times v')$. Derivando essa equação, temos

$$\begin{aligned} v''' &= -v' - V(v \times v'') \\ &= -v' - V(v \times (-v - V(v \times v'))) \\ &= -v' + V^2(v \times (v \times v')) \\ &= -(1 + V^2)v'. \end{aligned}$$

Daí, a fórmula paramétrica da torção de v nos diz que

$$\tau = \frac{\langle v' \times v'', v''' \rangle}{|v' \times v''|^2} \equiv 0,$$

pois mostramos que v''' é um múltiplo de v' . Sabemos do estudo de curvas em geometria diferencial que isso implica que v descreve uma curva plana. Como v' é unitário, v não é constante e, portanto, descreve de fato um círculo.

A menos de uma isometria dada por uma aplicação ortogonal, podemos supor que esse círculo é descrito por

$$v = (r \cos \theta, r \sin \theta, R),$$

para certa função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ e constantes $r, R \in \mathbb{R}$ com $r > 0$ e $r^2 + R^2 = 1$. Note que existe um único $\eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $(r, R) = (\cos \eta, \sin \eta)$.

Como estamos supondo que v está parametrizada pelo comprimento de arco, devemos ter que $v' = (-r\theta' \sin \theta, r\theta' \cos \theta, 0)$ é unitário. Segue daí que devemos ter $\theta' = \pm \frac{1}{r}$. A menos de inverter a orientação da parametrização em s , podemos supor que $\theta' = \frac{1}{r}$. Além disso, é esperado que r e R tenham alguma relação com V . Para encontrar essa relação, observe que

$$\begin{aligned} v' &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ v'' &= \left(-\frac{1}{r} \cos \theta, -\frac{1}{r} \sin \theta, 0\right), \\ v' \times v &= (R \cos \theta, R \sin \theta, -r). \end{aligned}$$

Portanto, r e R devem satisfazer

$$V = \langle v'', v' \times v \rangle = -\frac{R}{r} = -\tan \eta.$$

Isso mostra que r, R ficam unicamente determinados por V .

Olhamos agora para a curva de estrição p . Concluimos acima que $F = \langle p', v \rangle$ e $\tilde{f} = \langle p', v \times v' \rangle$ são constantes. Por definição, p satisfaz $\langle p', v' \rangle = 0$.

Portanto, p' é dada por

$$\begin{aligned} p' &= Fv + \tilde{f}(v \times v') \\ &= ((Fr - R\tilde{f}) \cos \theta, (Fr - R\tilde{f}) \sin \theta, FR + r\tilde{f}). \end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$p = (r(Fr - R\tilde{f}) \sin \theta, -r(Fr - R\tilde{f}) \cos \theta, (FR + r\tilde{f})s) + p_0,$$

sendo $p_0 \in \mathbb{R}^3$ constante dado pelas constantes de integração de cada coordenada. Como a parametrização da superfície é dada por $\phi = p + tv$, a menos da isometria dada pela translação por $-p_0$ podemos supor que $p_0 = 0$. Aplicando uma rotação em torno do eixo z , podemos supor também que $\theta = \frac{s}{r}$. Por fim, a menos de reparametrizar a superfície por $\tilde{\phi}(s, t) = \phi(rs, t)$, p assume a forma de uma hélice,

$$p = (r(Fr - R\tilde{f}) \sin s, -r(Fr - R\tilde{f}) \cos s, (FR + r\tilde{f})rs).$$

Isso mostra que a superfície é do tipo *screw motion* (basta tomar $a = F$, $b = \tilde{f}$ no Exemplo 1.17). □

O grupo de Heisenberg Nil_3

2.1 Preliminares

Definição 2.1. O grupo (ou espaço) de Heisenberg Nil_3 é o conjunto $\mathbb{R}^3$ munido da operação de grupo

$$(x, y, z) * (a, b, c) = \left(x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(xb - ay) \right)$$

e da métrica riemanniana dada por

$$g_{(x,y,z)}(e_i, e_j) = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{4} + 1 & \frac{-xy}{4} & \frac{y}{2} \\ \frac{-xy}{4} & \frac{x^2}{4} + 1 & \frac{-x}{2} \\ \frac{y}{2} & \frac{-x}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3 \approx T_{(x,y,z)}\text{Nil}_3$.

Proposição 2.2. Nil_3 é um grupo de Lie e g uma métrica invariante à esquerda.

Demonstração. É fácil ver que Nil_3 é um grupo de Lie. Mostremos que toda translação à esquerda $L_p : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3$, definida por $L_p(q) := p * q$, é uma isometria.

Sendo $q \in \text{Nil}_3$ e $v \in T_q\text{Nil}_3 \approx \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} D(L_p)_q v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 L_p(q + tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 p * (q + tv) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left(x_p + (x_q + tx_v), y_p + (y_q + ty_v), \right. \\ &\quad \left. z_p + (z_q + tz_v) + \frac{1}{2}(x_p(y_q + ty_v) - (x_q + tx_v)y_p) \right) \\ &= \left(x_v, y_v, z_v + \frac{1}{2}(x_p y_v - x_v y_p) \right). \end{aligned}$$

Verifica-se diretamente que

$$\begin{aligned}
g_{L_p(q)}(D(L_p)_q v, D(L_p)_q u) &= \\
&= \begin{bmatrix} x_v & y_v & z_v + \frac{1}{2}(x_p y_v - x_v y_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(y_p + y_q)^2}{4} + 1 & \frac{-(x_p + x_q)(y_p + y_q)}{4} & \frac{y_p + y_q}{2} \\ \frac{-(x_p + x_q)(y_p + y_q)}{4} & \frac{(x_p + x_q)^2}{4} + 1 & \frac{-(x_p + x_q)}{2} \\ \frac{y_p + y_q}{2} & \frac{-(x_p + x_q)}{2} & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u + \frac{1}{2}(x_p y_u - x_u y_p) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_q^2}{4} + 1 & \frac{-x_q y_q}{4} & \frac{y_q}{2} \\ \frac{-x_q y_q}{4} & \frac{x_q^2}{4} + 1 & \frac{-x_q}{2} \\ \frac{y_q}{2} & \frac{-x_q}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \\
&= g_q(u, v).
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *Os campos de vetores em Nil_3 dados por*

$$E_1 = \partial_x - \frac{y}{2} \partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \frac{x}{2} \partial_z, \quad E_3 = \partial_z,$$

forneem um referencial ortonormal invariante à esquerda.

Demonstração. Seja $p = (x_p, y_p, z_p)$ e considere $L_p : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3$ a aplicação $L_p(x) := p * x$. Sejam $q = (x_q, y_q, z_q) \in \text{Nil}_3$ e $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \approx T_q \text{Nil}_3$ e considere uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em Nil_3 tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = u$. Temos

$$\begin{aligned}
D(L_p)_q u &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (L_p \circ \gamma)(t) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left(x_p + x(t), y_p + y(t), z_p + z(t) + \frac{1}{2}(x_p y(t) - x(t) y_p) \right) \\
&= \left(u_1, u_2, u_3 + \frac{1}{2}(x_p u_2 - u_1 y_p) \right).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
D(L_p)_q E_1(q) &= D(L_p)_q \left(1, 0, -\frac{y_q}{2} \right) = \left(1, 0, -\frac{y_q}{2} + \frac{1}{2}(x_p \cdot 0 - 1 \cdot y_p) \right) \\
&= \left(1, 0, -\frac{(y_p + y_q)}{2} \right) = E_1(L_p(q)), \\
D(L_p)_q E_2(q) &= D(L_p)_q \left(0, 1, \frac{x_q}{2} \right) = \left(0, 1, \frac{x_q}{2} + \frac{1}{2}(x_p \cdot 1 - 0 \cdot y_p) \right) \\
&= \left(0, 1, \frac{x_p + x_q}{2} \right) = E_2(L_p(q)), \\
D(L_p)_q E_3(q) &= D(L_p)_q (0, 0, 1) = \left(0, 0, 1 + \frac{1}{2}(x_p \cdot 0 - 0 \cdot y_p) \right) \\
&= (0, 0, 1) = E_3(L_p(q)).
\end{aligned}$$

Isso mostra que os campos são invariantes à esquerda. Além disso, temos

$$\begin{aligned} g_p(E_1, E_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{y_p}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_p^2}{4} + 1 & \frac{-x_p y_p}{4} & \frac{y_p}{2} \\ \frac{-x_p y_p}{4} & \frac{x_p^2}{4} + 1 & \frac{-x_p}{2} \\ \frac{y_p}{2} & \frac{-x_p}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y_p}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y_p}{2} \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Similarmente, temos $g_p(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, i.e. $\{E_1, E_2, E_3\}$ é ortonormal. $\square$

Proposição 2.4. *O referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ satisfaz*

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = 0, \quad [E_1, E_3] = 0.$$

Demonstração. De fato, seja $f : \text{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Temos

$$\begin{aligned} [E_1, E_2](f) &= E_1(E_2(f)) - E_2(E_1(f)) \\ &= \partial_x E_2(f) - \frac{y}{2} \partial_z E_2(f) - \partial_y E_1(f) - \frac{x}{2} \partial_z E_1(f) \\ &= \partial_x \left(\partial_y f + \frac{x}{2} \partial_z f \right) - \frac{y}{2} \partial_z \left(\partial_y f + \frac{x}{2} \partial_z f \right) \\ &\quad - \partial_y \left(\partial_x f - \frac{y}{2} \partial_z f \right) - \frac{x}{2} \partial_z \left(\partial_x f - \frac{y}{2} \partial_z f \right) \\ &= \partial_z f = E_3(f), \\ [E_2, E_3](f) &= E_2(E_3(f)) - E_3(E_2(f)) = \partial_y E_3(f) + \frac{x}{2} \partial_z E_3(f) - \partial_z E_2(f) \\ &= \partial_y \partial_z f + \frac{x}{2} \partial_z \partial_z f - \partial_z \left(\partial_y f + \frac{x}{2} \partial_z f \right) = 0. \end{aligned}$$

Similarmente $[E_1, E_3] = 0$. $\square$

Proposição 2.5. *A conexão de Levi-Civita de Nil_3 sobre o referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ é dada por*

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0, & \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2} E_3, & \nabla_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2} E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= -\frac{1}{2} E_3, & \nabla_{E_2} E_2 &= 0, & \nabla_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2} E_1, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= -\frac{1}{2} E_2, & \nabla_{E_3} E_2 &= \frac{1}{2} E_1, & \nabla_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Como o referencial é ortonormal, temos

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^3 g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) E_k.$$

Em outras palavras, o campo $\nabla_{E_i} E_j$ fica determinado por suas coordenadas com respeito ao referencial. Basta então aplicar a fórmula de Koszul para encontrar essas coordenadas:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(Y, X)) \\ &\quad - g([Y, X], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Em particular, como o referencial é ortonormal, temos $E_i(g(E_j, E_k)) = E_i(\delta_{jk}) = 0$ e a fórmula se reduz a

$$g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = \frac{1}{2} \left(-g([E_j, E_i], E_k) - g([E_i, E_k], E_j) - g([E_j, E_k], E_i) \right).$$

A conclusão segue agora da igualdade acima. $\square$

Dado um campo de vetores $X = \sum_{i=1}^3 X_i E_i$ sobre Nil_3 , podemos considerar o seu **conjugado** $\bar{X}$, que definimos como sendo o campo de vetores dado por $\bar{X} := \sum_{i=1}^2 X_i E_i - X_3 E_3$. Note ainda que, dados dois vetores $u, v \in T_p \text{Nil}_3$, podemos definir um **produto vetorial riemanniano** usando o referencial ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ fazendo simplesmente

$$u \times_g v := \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix},$$

sendo $u = \sum_{i=1}^3 u_i E_i$, $v = \sum_{i=1}^3 v_i E_i$. Não é difícil ver que este produto possui as mesmas propriedades do produto vetorial usual de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.6. *Dados dois campos de vetores X e $Y = \sum_{j=1}^3 Y_j E_j$ sobre Nil_3 , vale que*

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \frac{1}{2} \bar{X} \times_g Y.$$

Demonstração. Basta verificar. Sendo $X = \sum_{i=1}^3 X_i E_i$ e $Y = \sum_{j=1}^3 Y_j E_j$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \sum_{j=1}^3 Y_j \nabla_X E_j = \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \sum_{i,j=1}^3 Y_j X_i \nabla_{E_i} E_j \\ &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{E_1} E_1 & \nabla_{E_1} E_2 & \nabla_{E_1} E_3 \\ \nabla_{E_2} E_1 & \nabla_{E_2} E_2 & \nabla_{E_2} E_3 \\ \nabla_{E_3} E_1 & \nabla_{E_3} E_2 & \nabla_{E_3} E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_3 & -E_2 \\ -E_3 & 0 & E_1 \\ -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j \\ &\quad + \frac{1}{2} ((X_2 Y_3 + X_3 Y_2) E_1 + (-X_1 Y_3 - X_3 Y_1) E_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) E_3) \\ &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & -X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^3 X(Y_j) E_j + \frac{1}{2} \bar{X} \times_g Y. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.7. A componente conexa $\mathfrak{Is}_0(\text{Nil}_3)$ do grupo das isometrias de Nil_3 contendo a identidade é dada por

$$\mathfrak{Is}_0(\text{Nil}_3, g) = \{L_h \circ \rho_\theta : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3 : h \in \text{Nil}_3, \theta \in \mathbb{R}\},$$

sendo $L_h : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3$ a translação à esquerda por h , $L_h(p) := h * p$ e $\rho_\theta : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3$ a rotação de ângulo θ em torno do eixo- z , $\rho_\theta(x, y, z) := (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$.

O grupo completo das isometrias $\mathfrak{Is}(\text{Nil}_3)$ é obtido compondo-se os elementos de $\mathfrak{Is}_0(\text{Nil}_3)$ com a reflexão $\phi : \text{Nil}_3 \rightarrow \text{Nil}_3$ definida por $\phi(x, y, z) := (-x, y, -z)$.

Demonstração. Ver *Invariant Surfaces of the Heisenberg Groups* (Christiam B. Figueroa, Francesco Mercuri, Renato H. L. Pedrosa) e *Transformation Groups in Differential Geometry* (Soshichi Kobayashi). $\square$

Observação 2.8. Se $h = (a, b, c)$, então a isometria $L_h \circ \rho_\theta$ pode ser escrita como

$$L_h \circ \rho_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{2}(a \sin \theta - b \cos \theta) & \frac{1}{2}(a \cos \theta + b \sin \theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

A seguir, vamos estudar as geodésicas do espaço de Heisenberg. Primeiro, mostramos que todas as geodésicas podem ser expressas em termos das geodésicas partindo da origem. Para enunciar esse lema, estabelecemos antes uma notação.

Considere a aplicação $\pi : \text{Nil}_3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow T\text{Nil}_3$ definida por

$$\pi(p, (v_1, v_2, v_3)) = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(p) \in T_p \text{Nil}_3.$$

Iremos denotar simplesmente $\pi(p, v) = v_p$. Fixado p , π induz um isomorfismo linear entre $\mathbb{R}^3$ e $T_p \text{Nil}_3$. Com isso, enxergamos v_p como sendo “o vetor v ” em $T_p \text{Nil}_3$.

Lema 2.9. Se $\gamma_{p, v_p} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ denota a geodésica satisfazendo $\gamma_{p, v_p}(0) = p$ e $\gamma'_{p, v_p}(0) = v_p$, então

$$\gamma_{p, v_p} = p * \gamma_{0, v_0}.$$

Demonstração. Como translações à esquerda são isometrias, temos que $\gamma = p * \gamma_{0, v_0}$ é geodésica.

Temos ainda $\gamma(0) = p * \gamma_{0, v_0}(0) = p * 0 = p$. Por fim, denotando $v = (v_1, v_2, v_3)$ e usando que o referencial ortonormal é invariante à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= D(L_p)_{\gamma_{0, v_0}(0)} \gamma'_{0, v_0}(0) = D(L_p)_0 v_0 = D(L_p)_0 \sum_{i=1}^3 v_i E_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i D(L_p)_0 E_i(0) = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(L_p(0)) = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(p) = v_p. \end{aligned}$$

Segue da existência e unicidade de geodésicas (dados ponto de origem e vetor tangente) que $\gamma_{p, v_p} = p * \gamma_{0, v_0}$. $\square$

A proposição a seguir fornece as geodésicas partindo da origem com vetor unitário.

Proposição 2.10. *Considere $v = (r \cos \theta, r \sin \theta, w) \in \mathbb{S}^2$, com $r \geq 0$. Se $w = 0$, então $\gamma_{0,v_0}(t) = ((\cos \theta)t, (\sin \theta)t, 0)$.*

Se $w \neq 0$, então

$$\gamma_{0,v_0}(t) = \begin{pmatrix} \frac{r}{w}(\sin(\theta + wt) - \sin \theta) \\ -\frac{r}{w}(\cos(\theta + wt) - \cos \theta) \\ \left(\frac{1+w^2}{2w}\right)t - \frac{r^2}{2w^2} \sin wt \end{pmatrix}$$

Demonstração. Suponha $w = 0$. Note que isso implica $r = 1$. Considere $\gamma(t) = ((\cos \theta)t, (\sin \theta)t, 0)$. Temos $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma'(0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos \theta E_1(0) + \sin \theta E_2 = v_0$. Resta verificar que γ é geodésica, i.e. $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos \theta \left(1, 0, \frac{-(\sin \theta)t}{2}\right) + \sin \theta \left(0, 1, \frac{(\cos \theta)t}{2}\right) \\ &= \cos \theta E_1(\gamma(t)) + \sin \theta E_2(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = (\cos \theta)' E_1 + (\sin \theta)' E_2 + \frac{1}{2} \overline{\gamma'} \times \gamma' = 0,$$

pois $\cos \theta, \sin \theta$ são constantes e $\overline{\gamma'} = \gamma'$, o que implica $\overline{\gamma'} \times \gamma' = 0$.

Suponha agora $w \neq 0$ e seja γ como no enunciado. Novamente, temos $\gamma(0) = 0$ e o campo γ' é dado por

$$\begin{aligned} \gamma' &= \begin{pmatrix} r \cos(\theta + wt) \\ r \sin(\theta + wt) \\ \left(\frac{1+w^2}{2w}\right)t - \frac{r^2}{2w} \cos wt \end{pmatrix} \\ &= r \cos(\theta + wt) E_1 + r \sin(\theta + wt) E_2 + w E_3. \end{aligned}$$

Isso leva em conta o fato de o referencial ao longo de γ ser dado por

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(1, 0, \frac{r}{2w}(\cos(\theta + wt) - \cos \theta)\right), \\ E_2 &= \left(0, 1, \frac{r}{2w}(\sin(\theta + wt) - \sin \theta)\right), \\ E_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim, $\gamma'(0) = r(\cos \theta) E_1 + r(\sin \theta) E_2 + w E_3 = v_0$. Resta apenas verificar que γ é geodésica:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= (r \cos(\theta + wt))' E_1 + (r \sin(\theta + wt))' E_2 + w' E_3 + \frac{1}{2} \overline{\gamma'} \times \gamma' \\ &= -rw \sin(\theta + wt) E_1 + rw \cos(\theta + wt) E_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} r \cos(\theta + wt) & r \sin(\theta + wt) & -w \\ r \cos(\theta + wt) & r \sin(\theta + wt) & w \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Observação 2.11. Na proposição acima, tomamos o vetor v como sendo unitário. Assim, as geodésicas obtidas estão parametrizadas pelo comprimento de arco. As geodésicas com $v \in \mathbb{R}^3$ qualquer são obtidas pela reparametrização $\gamma_{p,v_p}(t) = \gamma_{p,u_p}(|v|t)$ sendo $u = \frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^2$.

Definição 2.12. Um vetor não nulo $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ será dito

- **vertical**, se $v_1 = v_2 = 0$;
- **horizontal**, se $v_3 = 0$;
- **oblíquo**, se $(v_1^2 + v_2^2) v_3 \neq 0$.

Da mesma forma, dizemos que $V \in T_p \text{Nil}_3$ é vertical (resp. horizontal, oblíquo) se $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v_p = V$ é vertical (resp. horizontal, oblíquo).

Proposição 2.13. Se $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ é geodésica, então $\gamma'(0)$ é vertical (resp. horizontal, oblíquo) se, e somente se, $\gamma'(t)$ é vertical (resp. horizontal, oblíquo) para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma'(0) = v_0$, sendo $v = (r \cos \theta, r \sin \theta, w) \in \mathbb{S}^2$. Resgatando os cálculos da Proposição 2.10, se v é vertical, então $\gamma'(t) = (0, 0, \pm 1) = E_3$ é vertical para todo $t \in \mathbb{R}$. Se v é horizontal, então $\gamma'(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2$ é horizontal para todo $t \in \mathbb{R}$. Por fim, se v é oblíquo, então $\gamma'(t) = r \cos(\theta + wt)E_1 + r \sin(\theta + wt)E_2 + wE_3$. Mas se v é oblíquo, então $rw \neq 0$ e essa expressão mostra que $\gamma'(t)$ é oblíquo para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note por fim que $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ é vertical (resp. horizontal, oblíquo) se, e somente se, $\frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^2$ e $D(L_p)_q v_p = v_q$ são verticais (resp. horizontais, oblíquos). Como toda geodésica pode ser obtida a partir de uma geodésica partindo da origem com vetor unitário, por meio de uma reparametrização e uma translação à esquerda, segue que a proposição é válida para qualquer geodésica em Nil_3 . $\square$

Essa proposição nos permite dar a seguinte definição.

Definição 2.14. Dizemos que uma geodésica γ é **vertical** (resp. **horizontal**, **oblíqua**) se $\gamma'(0)$ é vertical (resp. horizontal, oblíqua).

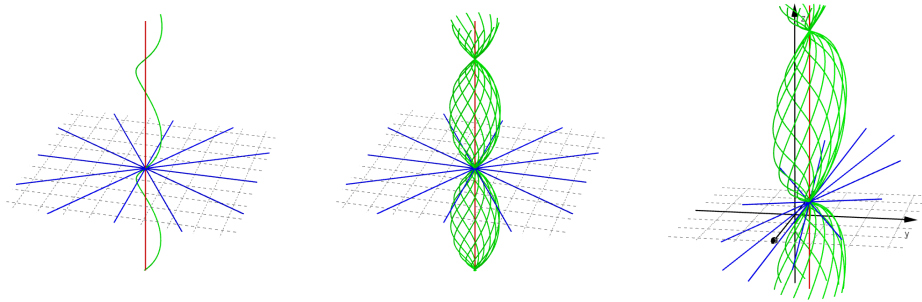


Figura 2.1: À esquerda, feixe de geodésicas horizontais (azul), uma geodésica vertical (vermelho) e uma geodésica oblíqua (verde), partindo da origem. Ao centro, feixe de geodésicas oblíquas ao se fazer $r = cte > 0$. À direita, geodésicas partindo de $(1, 1, 1)$.

2.2 Superfícies regradas

Daqui em diante, iremos abandonar o subíndice p na notação v_p , identificando o vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ com o vetor $v_p = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(p)$, deixando p implícito pelo contexto, sempre que não houver risco de confusão.

Relembremos a definição de superfícies regradas (Definição 1.10) para o caso particular do grupo de Heisenberg Nil_3 .

Definição 2.15. Dadas curvas $p : I \rightarrow \text{Nil}_3$ e $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$, considere a aplicação $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ definida por $\phi(s, t) = \gamma_{p(s), v(s)}(t)$. Se ϕ é imersão, dizemos que $\Sigma(p, v) := \phi(I \times \mathbb{R})$ é a **superfície regradada** de **curva central** p e **curva direcional** v .

Embora a definição acima seja natural, ela deixa de incluir superfícies importantes que gostaríamos de considerar como superfícies regradas em Nil_3 . É o caso do plano $z = 0$, como mostraremos a seguir.

Por todo ponto do plano $z = 0$ passa uma geodésica inteiramente contida neste plano. De fato, se $p = (x, y, 0) \in \text{Nil}_3$, com $(x, y) \neq (0, 0)$, então $\gamma(t) = (xt, yt, 0)$ é uma geodésica (horizontal) inteiramente contida em $z = 0$ e que passa pelo ponto $(x, y, 0)$. Pelo ponto da origem, $(0, 0, 0)$, existe todo um feixe de geodésicas contido em $z = 0$. Isso é suficiente para que queiramos considerar este plano como uma superfície regradada. Contudo, mostraremos que esta superfície não se adequa à Definição 2.15 que propomos acima.

Suponha que exista uma superfície regradada $\Sigma(p, v)$ nos termos da Definição 2.15 e que esteja contida no plano $z = 0$. Denotemos a curva direcional por $v = (r \cos \theta, r \sin \theta, w)$ e analisemos primeiro o caso em que w não é identicamente nula. Mostraremos que isso leva a uma contradição. Digamos que $w(s_0) \neq 0$ para certo $s_0 \in I$. Assim, $\phi(s_0, \cdot)$ é dada por

$$\phi = \gamma_{p, v} = p * \gamma_{0, v} = p * \begin{pmatrix} \frac{r}{w} (\sin(\theta + wt) - \sin \theta) \\ -\frac{r}{w} (\cos(\theta + wt) - \cos \theta) \\ \left(\frac{1+w^2}{2w}\right)t - \frac{r^2}{2w} \sin wt \end{pmatrix}$$

Por simplicidade, denote $\gamma_{0, v(s_0)}(t) = (a(s_0, t), b(s_0, t), c(s_0, t))$. Se $p = (x, y, z)$, então

$$\phi = \left(x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(xb - ya) \right).$$

Observe que a função $(z + \frac{1}{2}(xb - ya))(s_0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, é limitada, pois sua dependência em t envolve apenas as funções trigonométricas seno e cosseno (note que $s_0 \in I$ está fixado). Contudo,

$$c = \frac{1+w^2}{2w}t - \frac{r^2}{2w^2} \sin wt$$

é ilimitada em t . Portanto, não é possível que a terceira coordenada de ϕ seja identicamente nula, como é necessário para que $\Sigma(p, v)$ esteja contida no plano $z = 0$. Essa contradição vem de supor que $w(s_0) \neq 0$.

Portanto, devemos ter $w \equiv 0$. Segue daí que $r \equiv 1$ e ϕ é dada por

$$\begin{aligned}\phi &= \gamma_{p,v} = p * ((\cos \theta)t, (\sin \theta)t, 0) \\ &= \left(x + (\cos \theta)t, y + (\sin \theta)t, z + \frac{1}{2}(x \sin \theta - y \cos \theta)t \right).\end{aligned}$$

Fazendo $t = 0$, vemos que z também é identicamente nula, o que implica $x \sin \theta - y \cos \theta \equiv 0$. Segue então que

$$\begin{aligned}\phi_s &= (x' - \theta'(\sin \theta)t, y' + \theta'(\sin \theta)t, 0), \\ \phi_t &= (\cos \theta, \sin \theta, 0).\end{aligned}$$

Para verificar que ϕ é imersão, podemos utilizar o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$, pois ele fornece informações a respeito da dependência linear entre dois vetores. Se ϕ é imersão, devemos ter

$$\begin{aligned}\vec{0} &\neq \phi_s \times \phi_t = (0, 0, \theta'(-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)t + x' \sin \theta - y' \cos \theta) \\ &= (0, 0, -\theta't + x' \sin \theta - y' \cos \theta), \text{ sobre todo } I \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Isso implica em particular que $\theta' \equiv 0$ pois, do contrário, $\phi_s \times \phi_t$ se anularia para $t = \frac{-(x' \sin \theta - y' \cos \theta)}{\theta'}$. Derivando $x \sin \theta - y \cos \theta = 0$, segue que

$$0 = x' \sin \theta - y' \cos \theta + \theta'(x \cos \theta + y \sin \theta) = x' \sin \theta - y' \cos \theta.$$

Mas isso implica $\phi_s \times \phi_t \equiv 0$. Isso mostra que ϕ não é imersão.

Isso mostra que o plano $z = 0$ (ou partes dele) não pode ser obtido como imagem de uma imersão da forma descrita na Definição 2.15. Como não queremos abrir mão desta superfície, precisamos refinar nossa definição. Com este intuito, propomos a seguinte condição de tolerância a pontos de não imersão. Embora possa parecer estranha à primeira vista, essa condição será justificada por exemplos interessantes de superfícies que aparecerão mais adiante.

Condição de tolerância: Se ϕ não é imersão, então existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\tau \geq 0$ constante tais que, se $(\phi_s \times_g \phi_t)(s, t) = 0$, então $t = h(s) + k\tau$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Note que nesta condição utilizamos o produto vetorial riemanniano $\phi_s \times_g \phi_t = \vec{0}$. Isso porque $\phi_s \times \phi_t = \vec{0}$ se, e somente se, $\phi_s \times_g \phi_t = \vec{0}$. Basta notar que, identificando $T_p \text{Nil}_3$ com $\mathbb{R}^3$ via o isomorfismo que leva o referencial E_1, E_2, E_3 sobre a base canônica de $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial riemanniano está identificado com o produto vetorial usual de $\mathbb{R}^3$. Portanto, teremos que $\phi_s \times_g \phi_t = \vec{0}$ se, e somente se, ϕ_s e ϕ_t são linearmente dependentes.

Com isso, nossa condição de tolerância nos diz que, se ϕ não é imersão, então o retângulo $I \times \mathbb{R}$ pode ser dividido em “faixas” abertas sobre as quais ϕ é imersão. No caso em que $\tau = 0$, ϕ é imersão sobre

$$\{(s, t) \in I \times \mathbb{R} : t < h(s)\} \text{ e } \{(s, t) \in I \times \mathbb{R} : h(s) < t\}.$$

Se $\tau > 0$, então para cada $k \in \mathbb{Z}$, ϕ é imersão sobre

$$F_k = \{(s, t) \in I \times \mathbb{R} : h(s) + k\tau < t < h(s) + (k+1)\tau\}.$$

Note que a condição de tolerância acima é invariante por difeomorfismos de $I \times \mathbb{R}$. Portanto, a condição de ortogonalidade da Proposição 1.13 continua válida se adicionarmos a condição de tolerância à nossa definição. Assim, sempre iremos supor que ϕ , além de estar sujeita à condição de tolerância, satisfaz a condição de ortogonalidade, i.e. a sua curva central cruza as geodésicas da superfície ortogonalmente.

Estabelecida esta definição, nosso objetivo é classificar as superfícies regradas de Weingarten no grupo de Heisenberg Nil_3 .

A seguir, fazemos a distinção entre três tipos especiais de superfícies regradas em Nil_3 e fornecemos alguns exemplos.

Definição 2.16. Uma superfície regrada em Nil_3 é dita **vertical** se pode ser descrita como $\Sigma(p, v)$ sendo $v(s)$ vertical para todo $s \in I$. Ela será dita **horizontal** (resp. **oblíqua**) se não está contida em nenhuma superfície vertical e $v(s)$ é horizontal (resp. oblíquo) para todo $s \in I$.

Exemplo 2.17. A superfície regrada obtida tomando-se $p(s) = (s, 0, 0)$ e $v(s) = (\sin s)E_2 + (\cos s)E_3$ não é de nenhum dos três tipos definidos em 2.16. De fato, é constituída por geodésicas verticais, horizontais e oblíquas. As figuras a seguir exibem, de diferentes ângulos, a imagem de ϕ correspondente ao retângulo $[-5, 5] \times [-5, 5]$. A linha em vermelho indica a curva central e as linhas pretas indicam as geodésicas sobre a superfície. Esta parametrização satisfaz a condição de ortogonalidade sobre p e v .

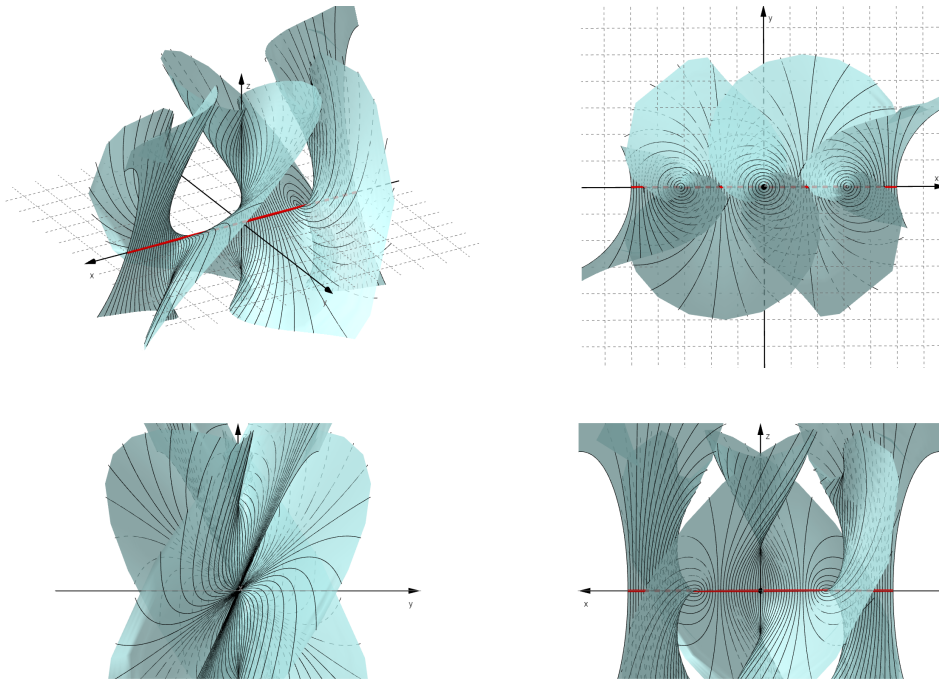
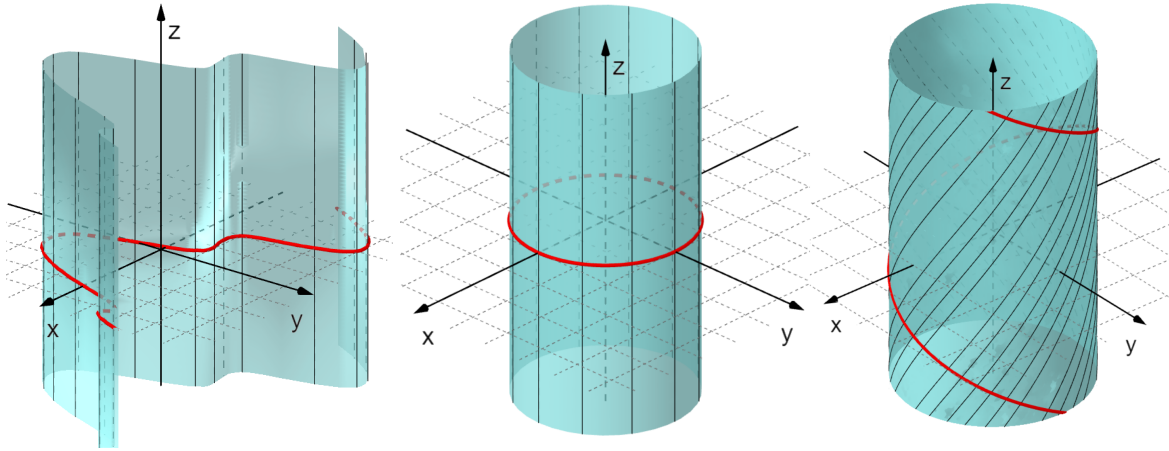


Figura 2.2: Link do Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/bvw36ze8>

Exemplo 2.18. Superfícies regradas verticais são, em particular, superfícies cilíndricas. Sua projeção sobre o plano $z = 0$ descreve uma curva regular que podemos tomar como curva central.



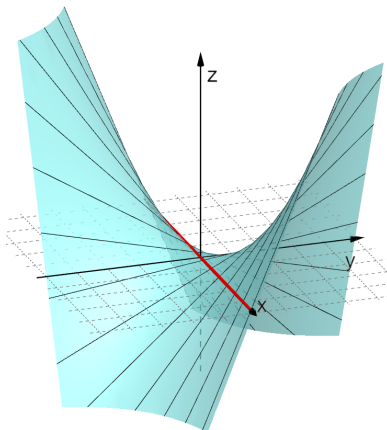
Um caso especial é o dos cilindros. Essas superfícies admitem tanto parametrizações verticais quanto oblíquas. Por exemplo, o cilindro vertical de raio 1 centrado no eixo- z é obtido tomando-se $p(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ e $v(s) = E_3$, mas também podemos tomar $p(s) = (\sin(s), -\cos(s), \frac{-s}{2})$ e $v(s) = \cos s E_1 + \sin s E_2 + E_3$.

Outro exemplo similar é o plano $y = 0$. Essa superfície admite parametrização vertical e horizontal.

Este é o motivo pelo qual, na Definição 2.16, optamos por explicitar que uma superfície regrada horizontal ou oblíqua é, antes de tudo, uma superfície regrada que não é vertical. Com este cuidado, apesar de admitirem parametrizações dos dois tipos, cilindros ou planos como $y = 0$ serão considerados como sendo do tipo vertical, mas não do tipo oblíquo ou horizontal.

Exemplo 2.19. Tomando $p(s) = (s, 0, 0)$ e $v(s) = E_2$, obtemos a superfície regrada horizontal da figura a seguir, dada por

$$\phi(s, t) = (s, 0, 0) * (0, t, 0) = \left(s, t, \frac{st}{2}\right).$$



Trata-se do parabolóide hiperbólico de equação $z = \frac{xy}{2}$. Note que todas as geodésicas dadas por essa parametrização possuem a direção horizontal (em Nil_3) do campo E_2 , embora a superfície não nos remeta ao conceito de horizontalidade euclidiana a que estamos acostumados.

Exemplo 2.20. Tomando $p(s) = (s, 0, 0)$ e $v(s) = E_2 + E_3$, obtemos a superfície regrada oblíqua da figura a seguir, dada por

$$\phi(s, t) = \left(s + \cos t - 1, \sin t, \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}(\sin t)(s - 1) \right).$$

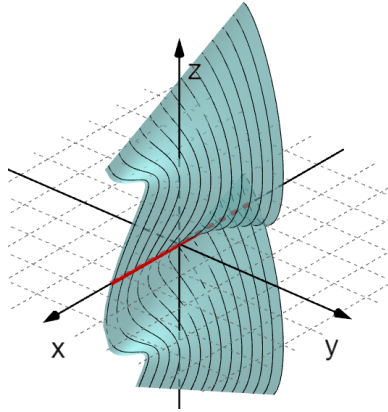


Figura 2.3: Link do Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/cpnpxv79>

Observação 2.21. Obliquidade é uma condição aberta, mas horizontalidade e verticalidade não. De fato, dada uma superfície regrada $\Sigma(p, v)$, se $(v_1^2 + v_2^2)v_3$ é diferente de zero em $s_0 \in I$, i.e. a geodésica em s_0 não é horizontal e nem vertical, então há uma vizinhança aberta em torno de s_0 sobre a qual as geodésicas não são horizontais e nem verticais. Em contrapartida, se $v_3(s_0) = 0$, a geodésica associada a s_0 é horizontal, mas não há como garantir que a superfície admita uma vizinhança horizontal em torno de $\phi(s_0, t)$.

No restante do capítulo, iremos fornecer a classificação dos três tipos (vertical, horizontal e oblíquo) de superfícies regradas de Weingarten em Nil_3 e, ao final, demonstraremos como essas subclassificações culminarão na classificação de todas as superfícies regradas de Weingarten em Nil_3 .

Começamos com o caso mais simples das regradas verticais.

2.2.1 Verticais

Considere uma superfície regrada vertical $\Sigma(p, v)$ com curva central $p : I \rightarrow \text{Nil}_3$ e curva direcional $v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$. Neste caso, não iremos supor que p e v satisfazem a condição de ortogonalidade. Ao invés disso, iremos supor uma condição ainda mais simples.

Não é difícil ver que toda superfície regrada do tipo vertical pode ser descrita, sem perda de generalidade, tomando curvas centrais da forma $p = (x, y, 0)$ e curvas direcionais $v \equiv (0, 0, 1)$.

Assim, trabalharemos com $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ sujeita à condição de tolerância e dada por

$$\phi(s, t) := (x(s), y(s), t).$$

A condição de tolerância requer que p seja regular. De fato, temos

$$\begin{aligned}\phi_s &= (x', y', 0) = x'E_1 + y'E_2 - \frac{1}{2}(xy' - x'y)E_3, \\ \phi_t &= (0, 0, 1) = E_3.\end{aligned}$$

Se p não fosse regular, com $p'(s_0) = 0$, então teríamos $\phi_s(s_0, t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e isso feriria nossa condição de tolerância.

Isso mostra que p regular é uma condição necessária. Por outro lado, as mesmas expressões acima mostram que essa condição é também suficiente para que ϕ seja imersão.

Dito isso, podemos supor que (x, y) está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, i.e. satisfaz $(x', y') = (\cos \theta, \sin \theta)$ para uma certa função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Além disso, vamos denotar $\kappa = \cos \theta$ e $\sigma = \sin \theta$.

O produto vetorial riemanniano $\phi_s \times_g \phi_t$ é dado por

$$\begin{aligned}\phi_s \times_g \phi_t &= \det \begin{bmatrix} x' & y' & -\frac{1}{2}(xy' - x'y) \\ 0 & 0 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = y'E_1 - x'E_2 \\ &= \sigma E_1 - \kappa E_2.\end{aligned}$$

Assim, temos o campo normal unitário sobre $\Sigma(p, v)$ definido por

$$N = \sigma E_1 - \kappa E_2.$$

As derivadas covariantes são dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s} \phi_s &= \kappa' E_1 + \sigma' E_2 - \frac{1}{2}(x\sigma - \kappa y)' E_3 + \frac{1}{2} \overline{\phi_s} \times \phi_s \\ &= (-\sigma \theta') E_1 + \kappa \theta' E_2 - \frac{1}{2}(\kappa \sigma + x \kappa \theta' - \kappa \sigma - (-\sigma \theta') y) E_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \kappa & \sigma & \frac{1}{2}(x\sigma - \kappa y) \\ \kappa & \sigma & -\frac{1}{2}(x\sigma - \kappa y) \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(2\theta' + x\sigma - y\kappa)(-\sigma E_1 + \kappa E_2) - \frac{1}{2}\theta'(x\kappa + y\sigma) E_3 \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= \left(\frac{\partial}{\partial t} x'\right) E_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t} y'\right) E_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (xy' - x'y) E_3 + \frac{1}{2} \overline{\phi_t} \times \phi_s \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \kappa & \sigma & -\frac{1}{2}(x\sigma - \kappa y) \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma E_1 - \kappa E_2) \\ \nabla_{\phi_t} \phi_t &= \nabla_{E_3} E_3 = 0.\end{aligned}$$

Segue daí que as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{2}\theta', \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a classificação das superfícies neste caso é trivial.

Teorema 2.22. *Toda superfície regradada vertical em Nil_3 é de Weingarten, satisfazendo a relação $\Psi(H, K) = K + \frac{1}{4} = 0$.*

Podemos provar ainda o seguinte corolário.

Corolário 2.23. *As únicas superfícies regradas verticais completas em Nil_3 Weingarten Weingarten polinomiais com respeito a um polinômio $P(H, K) = 0$ tal que $K + \frac{1}{4}$ não é fator de $P(H, K)$ são cilindros circulares verticais e planos verticais. Em particular, tais superfícies possuem também curvatura média constante.*

Demonstração. Nossa hipótese diz que $p(X) := P(X, -\frac{1}{4})$ não é o polinômio nulo. Segue de $0 \equiv p(H)$ que H deve ser constante, donde θ' é constante. Como θ' representa a curvatura euclidiana da curva $(x, y, 0)$ que define a superfície, devemos ter que essa curva é uma reta ou um círculo.

Reciprocamente, retas e círculos possuem curvatura euclidiana constante e, portanto, $H \equiv c$ é constante. Logo, cilindros e planos verticais satisfazem uma relação do tipo $P(H, K) = H - c = 0$, que não possui $K + \frac{1}{4}$ como fator. $\square$

2.2.2 Horizontais

Consideramos agora superfícies regradas horizontais $\Sigma(p, v)$ satisfazendo a condição de ortogonalidade e com v unitário. Por simplicidade, denote

$$v = \kappa E_1 + \sigma E_2,$$

sendo $\kappa(s) := \cos \theta(s)$ e $\sigma(s) := \sin \theta(s)$, $s \in I$.

A condição de ortogonalidade neste caso é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p', v \rangle = \langle (x', y', z'), \kappa E_1 + \sigma E_2 \rangle \\ &= \left\langle x' E_1 + y' E_2 + \left(z' - \frac{1}{2}(xy' - x'y) \right) E_3, \kappa E_1 + \sigma E_2 \right\rangle \\ &= \kappa x' + \sigma y'. \end{aligned}$$

A aplicação ϕ é dada por

$$\phi = p * (t\kappa, t\sigma, 0) = \left(x + t\kappa, y + t\sigma, z + \frac{t}{2}(x\sigma - y\kappa) \right).$$

Os vetores tangentes à superfície são dados por

$$\begin{aligned}\phi_s &= \left(x' - \theta' t \sigma, y' + \theta' t \kappa, z' + \frac{t}{2} (x' \sigma - y' \kappa + \theta' (x \kappa + y \sigma)) \right) \\ &= (x' - \theta' t \sigma) E_1 + (y' + \theta' t \kappa) E_2 \\ &\quad + \left(z' - \frac{1}{2} (xy' - yx') - \frac{1}{2} t^2 \theta' + (x' \sigma - y' \kappa) t \right) E_3 \\ \phi_t &= \left(\kappa, \sigma, \frac{1}{2} (x \sigma - y \kappa) \right) = \kappa E_1 + \sigma E_2.\end{aligned}$$

O produto vetorial riemanniano $\phi_s \times_g \phi_t$ é dado por

$$\begin{aligned}\phi_s \times_g \phi_t &= \det \begin{bmatrix} (x' - \theta' t \sigma) & (y' + \theta' t \kappa) & (z' - \frac{1}{2} (xy' - yx') - \frac{1}{2} t^2 \theta' + (x' \sigma - y' \kappa) t) \\ \kappa & \sigma & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sigma (-2z' + xy' - yx' + t^2 \theta' - 2tx' \sigma + 2ty' \kappa) E_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa (-2z' + xy' - yx' + t^2 \theta' - 2tx' \sigma + 2ty' \kappa) E_2 \\ &\quad + (x' \sigma - y' \kappa - t \theta') E_3.\end{aligned}$$

Seja $U \subset I \times \mathbb{R}$ o aberto maximal sobre o qual ϕ é imersão. Pela nossa condição de tolerância, se ϕ não é imersão, então U é a união de duas faixas abertas ou então a união de uma quantidade enumerável de faixas abertas. Sobre U , podemos definir o campo normal unitário dado por

$$N = \frac{\phi_s \times_g \phi_t}{|\phi_s \times_g \phi_t|}.$$

Por simplicidade, denotaremos

$$\phi_s \times_g \phi_t = \frac{1}{2} (t^2 \theta' - 2N_1 t + N_2) (\sigma E_1 - \kappa E_2) + (N_1 - \theta' t) E_3,$$

sendo $N_1 = x' \sigma - y' \kappa$ e $N_2 = -2z' + xy' - yx'$.

Com essa notação, ϕ_s se escreve como

$$\phi_s = (x' - \theta' \sigma t) E_1 + (y' + \theta' \kappa t) E_2 + \left(-\frac{1}{2} \theta' t^2 + N_1 t - \frac{1}{2} N_2 \right) E_3.$$

Assim, a derivada covariante $\nabla_{\phi_s} \phi_s$ é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s} \phi_s &= (x' - \theta' \sigma t)_s E_1 + (y' + \theta' \kappa t)_s E_2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} t^2 \theta' + N_1 t - \frac{1}{2} N_2 \right)_s E_3 + \frac{1}{2} \overline{\phi_s} \times \phi_s \\ &= (x'' - (\theta'' \sigma + (\theta')^2 \kappa) t) E_1 + (y'' + (\theta'' \kappa - (\theta')^2 \sigma) t) E_2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} t^2 \theta'' + N_1' t - \frac{1}{2} N_2' \right) E_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x' - \theta' \sigma t & y' + \theta' \kappa t & -\frac{1}{2} t^2 \theta' - N_1 t + \frac{1}{2} N_2 \\ x' - \theta' \sigma t & y' + \theta' \kappa t & -\frac{1}{2} t^2 \theta' + N_1 t - \frac{1}{2} N_2 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{2}\kappa(\theta')^2 t^3 + e_{12}\theta' t^2 + e_{11}t + e_{10} \right) E_1 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\sigma(\theta')^2 t^3 + e_{22}\theta' t^2 + e_{21}t + e_{20} \right) E_2 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\theta'' t^2 + N_1' t - \frac{1}{2}N_2' \right) E_3
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \kappa N_1 - \frac{1}{2}y', & e_{22} &= \frac{1}{2}x' + \sigma N_1, \\
e_{11} &= -\sigma\theta'' - \kappa(\theta')^2 - \frac{1}{2}\kappa N_2\theta' + y'N_1, \\
e_{21} &= \kappa\theta'' - \sigma(\theta')^2 - \frac{1}{2}\sigma N_2\theta' - x'N_1, \\
e_{10} &= x'' - \frac{1}{2}y'N_2, & e_{20} &= y'' + \frac{1}{2}x'N_2.
\end{aligned}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}
\nabla_{\phi_t}\phi_s &= (x' - \theta'\sigma t)_t E_1 + (y' + \theta'\kappa t)_t E_2 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}t^2\theta' + N_1 t - \frac{1}{2}N_2 \right)_t E_3 + \frac{1}{2}\overline{\phi_t} \times \phi_s \\
&= (-\theta'\sigma) E_1 + (\theta'\kappa) E_2 + (-\theta' t + N_1) E_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \kappa & \sigma & 0 \\ x' - \theta'\sigma t & y' + \theta'\kappa t & -\frac{1}{2}t^2\theta' + N_1 t - \frac{1}{2}N_2 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} (-\theta' t^2 + 2N_1 t - (4\theta' + N_2)) (\sigma E_1 - \kappa E_2) + \frac{1}{2} (N_1 - \theta' t) E_3 \\
\nabla_{\phi_t}\phi_t &= \kappa_t E_1 + \sigma_t E_2 + \frac{1}{2}\overline{\phi_t} \times \phi_t = 0.
\end{aligned}$$

Note que já sabíamos de antemão que deveríamos ter $\nabla_{\phi_t}\phi_t = 0$, uma vez que $t \mapsto \phi(s, t)$ é geodésica.

Por fim, a primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&= \frac{1}{4}(\theta')^2 t^4 - \theta' N_1 t^3 + \frac{1}{2}(2(\theta')^2 + 2N_1^2 + \theta' N_2) t^2 - N_1(2\theta' + N_2) t \\
&\quad + \left((x')^2 + (y')^2 + \frac{1}{4}N_2^2 \right) \\
F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = (x'\kappa + y'\sigma) = 0 && \text{(condição de ortogonalidade)} \\
G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 \\
W &:= |\phi_s \times_g \phi_t|^{-1} = (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} = E^{-\frac{1}{2}} \\
e &= \langle \nabla_{\phi_s}\phi_s, N \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= W \left(-\frac{1}{2} (\theta' N_1' - \theta'' N_1) t^2 + \frac{1}{2} (\theta' N_2' - \theta'' N_2) t + \frac{1}{2} (N_1' N_2 - N_2' N_1) \right) \\
f &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, N \rangle \\
&= W \left(-\frac{1}{8} (\theta')^2 t^4 + \frac{1}{2} \theta' N_1 t^3 - \frac{1}{4} (2N_1^2 + \theta' N_2) t^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} N_1 N_2 t - \frac{1}{2} N_2 \theta' + \frac{1}{2} N_1^2 - \frac{1}{8} N_2^2 \right) \\
g &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, N \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Convém destacar que algumas simplificações puderam ser feitas nas expressões de e e f , graças à condição de ortogonalidade.

Denotando $e = W\tilde{e}$, $f = W\tilde{f}$, as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} W^3 \tilde{e} = \frac{\tilde{e}}{2E^{\frac{3}{2}}}, \\
K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -W^4 \tilde{f}^2 = -\frac{\tilde{f}^2}{E^2}.
\end{aligned}$$

A seguir, damos a classificação das superfícies regradas de Weingarten do tipo horizontal em Nil_3 sob a hipótese adicional de que sejam de classe $\mathcal{C}^3$. Essa hipótese nos permite tomar derivadas das curvaturas e utilizar a técnica da condição de Kühnel (ver seção 1.1 do Capítulo 1).

Teorema 2.24. *Uma superfície de classe $\mathcal{C}^3$ regrada do tipo horizontal e completa em Nil_3 é de Weingarten se, e somente se, é isométrica a uma das superfícies abaixo:*

(i) plano $z = 0$. Satisfaz $H = 0$;

(ii) parabolóide hiperbólico de equação $z = -\frac{1}{2}y(x - 2ay)$, com $a \in \mathbb{R}$ constante. É de Weingarten com respeito a

$$\Psi(H, K) = 64H^4 + 16a^2(12K - 1)H^2 + a^4(4K + 1)^3.$$

(iii) superfície regrada horizontal $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ dada por

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} a(\sin s - s \cos s) + t \cos s \\ -a(\cos s + s \sin s) + t \sin s \\ \frac{1}{2}(at - bs) \end{bmatrix},$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$ constantes com $a^2 + b^2 > 0$. É de Weingarten com

$$\begin{aligned}
\Psi(H, K) &= 16Ka^4 \left(\frac{32(4K(1+b) - 3b - 1)H^2}{-a^2(12K - 1)(4K - 3)} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1024b(b+1)H^4 - 64a^2(4(3b+2)K - b)H^2}{-a^4(4K - 1)(16K^2 - 56K + 1)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Observação 2.25. Naturalmente, no item (iii), os parênteses maiores indicam apenas quebras de linha da expressão e não uma matriz coluna. Ainda sobre o item (iii), se $a = 0$, obtemos um helicóide da forma $\tan\left(-\frac{2}{b}z\right) = \frac{y}{x}$. Para $b = a^2$, temos um hiperboloide de uma folha da forma $x^2 + y^2 = a^2 + \frac{4}{a^2}z^2$.

Demonstração. Considere uma superfície de classe $\mathcal{C}^3$ regrada do tipo horizontal completa e de Weingarten em Nil_3 dada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ satisfazendo as condições de ortogonalidade e sujeita à condição de tolerância a pontos de não imersão.

Observando que

$$EG - F^2 = E, \quad \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F = \tilde{e}, \quad \tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2 = -\tilde{f}^2,$$

segue do Lema 1.9 que, sobre os pontos de imersão de ϕ , vale

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ -4\tilde{f}^2 & (-\tilde{f}^2)_s & (-\tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} = -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix}.$$

Os pontos de não imersão de ϕ são um conjunto bem comportado e de interior vazio em $I \times \mathbb{R}$. Assim, por continuidade, podemos escrever que

$$\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } (s, t) \in I \times \mathbb{R}.$$

Olhando para a expressão de cada símbolo envolvido, vemos que essa equação é polinomial em t e, portanto, seus coeficientes em $s \in I$ devem ser identicamente nulos.

Observemos agora que, para cada $s \in I$ fixado, o polinômio em t definido por $\tilde{f}(s, t)$ não é identicamente nulo. Dessa forma, podemos eliminar o fator $\tilde{f}$ da equação ficando apenas com o do determinante.

De fato, recordemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & -\frac{1}{8}(\theta')^2 t^4 + \frac{1}{2}\theta' N_1 t^3 - \frac{1}{4}(2N_1^2 + \theta' N_2) t^2 + \frac{1}{2}N_1 N_2 t - \frac{1}{2}N_2 \theta' \\ & + \frac{1}{2}\left(N_1^2 - \frac{1}{4}N_2^2\right). \end{aligned}$$

Assim, se $\tilde{f}(s_0, t)$ é nulo em t , então a expressão acima impõe que $\theta'(s_0) = N_1(s_0) = N_2(s_0) = 0$. Lembrando então que

$$\phi_s \times_g \phi_t = \frac{1}{2}(t^2 \theta' - 2N_1 t + N_2)(\sigma E_1 - \kappa E_2) + (N_1 - \theta' t) E_3$$

vemos que $(\phi_s \times_g \phi_t)(s_0, t) = \vec{0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas isso fere a nossa condição de tolerância para s_0 .

Portanto, podemos eliminar o fator $\tilde{f}$ da equação e escrever que

$$\det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } (s, t) \in I \times \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Analisemos primeiramente o caso em que $\theta' \equiv 0$ sobre I . Neste caso, as funções $\kappa = \cos \theta(s)$ e $\sigma = \sin \theta(s)$ são constantes. Mostremos que, a menos de uma isometria (mais precisamente uma rotação adequada em torno do eixo- z), podemos supor que $\kappa = 1$ e $\sigma = 0$.

A aplicação ϕ tem a forma

$$\phi = \left(x + t\kappa, y + t\sigma, z + \frac{t}{2}(x\sigma - y\kappa) \right).$$

Considere a rotação em torno do eixo- z dada por

$$\psi = \begin{bmatrix} \kappa & \sigma & 0 \\ -\sigma & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que ψ é isometria de Nil_3 e obtemos

$$\psi\phi = ((x\kappa + y\sigma) + 1t, (y\kappa - x\sigma) + 0t, z + \frac{1}{2}t(x\sigma - y\kappa)).$$

Naturalmente, $\tilde{\phi} := \psi\phi$ é uma superfície regradada do tipo horizontal satisfazendo a condição de ortogonalidade mas agora com $\tilde{\kappa} = 1$ e $\tilde{\sigma} = 0$. Com essa observação, podemos supor sem perda de generalidade que $\kappa = 1$ e $\sigma = 0$ em nossa aplicação original ϕ . Sob esta hipótese, a condição de ortogonalidade se reduz a $0 = x'\kappa + y'\sigma = x'$ e temos $N_1 = x'\sigma - y'\kappa = -y'$. Os demais símbolos se reduzem a

$$\begin{aligned} E &= N_1^2 t^2 - N_1 N_2 t + N_1^2 + \frac{1}{4} N_2^2 \\ E_s &= 2N_1 N_1' t^2 - (N_1' N_2 + N_1 N_2') t + 2N_1 N_1' + \frac{1}{2} N_2 N_2' \\ E_t &= 2N_1^2 t - N_1 N_2 \\ \tilde{e} &= \frac{1}{2} N_1' N_2 - \frac{1}{2} N_2' N_1 \\ \tilde{e}_s &= \frac{1}{2} N_1'' N_2 - \frac{1}{2} N_2'' N_1 \\ \tilde{e}_t &= 0 \\ \tilde{f} &= -\frac{1}{2} N_1^2 t^2 + \frac{1}{2} N_1 N_2 t + \frac{1}{2} N_1^2 - \frac{1}{8} N_2^2 \\ \tilde{f}_s &= -N_1 N_1' t^2 + \frac{1}{2} (N_1' N_2 + N_1 N_2') t + N_1 N_1' - \frac{1}{4} N_2 N_2' \\ \tilde{f}_t &= -N_1^2 t + \frac{1}{2} N_1 N_2 \end{aligned}$$

O polinômio em t dado por (2.1) se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= N_1^2 (2N_1 t - N_2) (3(N_1')^2 N_2 + N_2'' N_1^2 - 3N_1' N_2' N_1 - N_1'' N_1 N_2) \end{aligned}$$

Note que no caso em que estamos estudando ($\theta' \equiv 0$), a condição de tolerância impede que N_1 e N_2 se anulem simultaneamente. Portanto, podemos escrever simplesmente

$$0 = N_1 (3(N_1')^2 N_2 + N_2'' N_1^2 - 3N_1' N_2' N_1 - N_1'' N_1 N_2) \text{ sobre } I.$$

Suponha que $N_1 \equiv 0$ sobre I . Isso é solução da equação e implica $y' \equiv 0$ e $\phi_s \times_g \phi_t = z' E_2$. Portanto, da condição de imersão devemos ter $z' \neq 0$ sobre todo I . Isso corresponde à parametrização da forma $\phi = (x_0 + t, y_0, z - \frac{t}{2} y_0)$, com $z' \neq 0$ sobre I . Transladando à esquerda por $(-x_0, -y_0, 0)$, obtemos

$$(-x_0, -y_0, 0) * \phi = (t, 0, z).$$

Isso mostra que, se $\theta' \equiv 0$ com $N_1 \equiv 0$, a superfície regrada completa $\phi(I \times \mathbb{R})$ é isométrica ao plano $y = 0$. Mas este caso deve ser descartado, pois mostra que esta não é uma superfície regrada horizontal genuína, uma vez que $y = 0$ é uma regrada do tipo vertical (ver Definição 2.16).

É necessário supor portanto que $N_1 \neq 0$ sobre um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ maximal com respeito a essa propriedade. Segue que

$$0 = 3(N_1')^2 N_2 + N_2'' N_1^2 - 3N_1' N_2' N_1 - N_1'' N_1 N_2 \text{ sobre } I_1.$$

Substituindo $0 \neq N_1 = -y'$ e $N_2 = -2z' + x_0 y'$, a equação se reduz a

$$0 = 3(y'')^2 z' + (y')^2 z''' - 3y' y'' z'' - y' z' y''' \text{ sobre } I_1.$$

Ou ainda,

$$z''' = -\frac{1}{(y')^2} (3(y'')^2 z' - 3y' y'' z'' - y' z' y''') \text{ sobre } I_1.$$

Isso mostra que z existe e é única, dados y com $y' \neq 0$ sobre I_1 , e condições iniciais $z(s_0) = z_0$, $z'(s_0) = z'_0$, $z''(s_0) = z''_0$ sobre $s_0 \in I_1$.

Suponha que z seja da forma $z(s) = u(y(s))$. Teremos

$$z' = u' y', \quad z'' = u'' (y')^2 + u' y'', \quad z''' = y''' u' + (y')^3 u''' + 3y' y'' u''.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} y''' u' + (y')^3 u''' + 3y' y'' u'' &= y''' u' + 3y' y'' u'' \\ \implies (y')^3 u''' &= 0 \\ \implies u''' &= 0 \text{ (pois } y' \neq 0 \text{ sobre } I_1). \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $u(y) = c_1 y^2 + c_2 y + c_3$, para certas constantes $c_i \in \mathbb{R}$, donde $z(s) = u(y(s)) = c_1 y^2 + c_2 y + c_3$. Essa é de fato a solução geral da equação, pois é possível escolher as constantes c_i de forma a satisfazer quaisquer condições iniciais do p.v.i. Denotando $y^{(i)}(s_0) = y_0^{(i)}$, basta tomar

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2(y_0')^2} \left(z_0'' - \frac{1}{y_0'} y_0'' z_0' \right), \\ c_2 &= \frac{1}{(y_0')^3} (z_0'(y_0')^2 - z_0'' y_0 y_0' + y_0'' z_0' y_0), \\ c_3 &= \frac{1}{2(y_0')^3} (2z_0(y_0')^3 - 2z_0'(y_0')^2 y_0 + z_0'' y_0 y_0'^2 - y_0'' z_0' y_0^2). \end{aligned}$$

Isso implica que, sobre I_1 , temos

$$N_2 = -2z' + x_0y' = -2(2c_1yy' + c_2y') + x_0y' = -y'(2c_2 - x_0 + 4yc_1).$$

Logo, sobre I_1 , N_2 é múltiplo de $N_1 = -y'$. Como não podemos ter N_1 , N_2 e θ' nulos simultaneamente (imposição advinda da condição de imersão), a maximalidade de I_1 implica que $I_1 = I$.

Sob tais conclusões, nossa aplicação assume a forma

$$\phi = \left(x_0 + t, y, c_1y^2 + c_2y + c_3 - \frac{t}{2}y\right).$$

Mostremos que $\phi(I \times \mathbb{R})$ é isométrica ao parabolóide hiperbólico de equação $z = -\frac{1}{2}y(x - 2c_1y)$ em Nil_3 . De fato, aplicando a translação à esquerda por $(-c_2 - \frac{1}{2}x_0, 0, -c_3)$ sobre ϕ , obtemos

$$\left(-c_2 - \frac{1}{2}x_0, 0, -c_3\right) * \phi = \left(t - c_2 + \frac{x_0}{2}, y, -\frac{1}{2}y\left(t - c_2 + \frac{x_0}{2} - 2c_1y\right)\right),$$

onde fica evidenciado as coordenadas da imagem dessa composição satisfazem a equação $z = -\frac{1}{2}y(x - 2c_1y)$ (não confundir as funções (x, y, z) que definem a curva central da superfície com as coordenadas canônicas x, y, z de Nil_3).

Com isso, obtemos uma família a um parâmetro ($c_1 \in \mathbb{R}$) de superfícies.

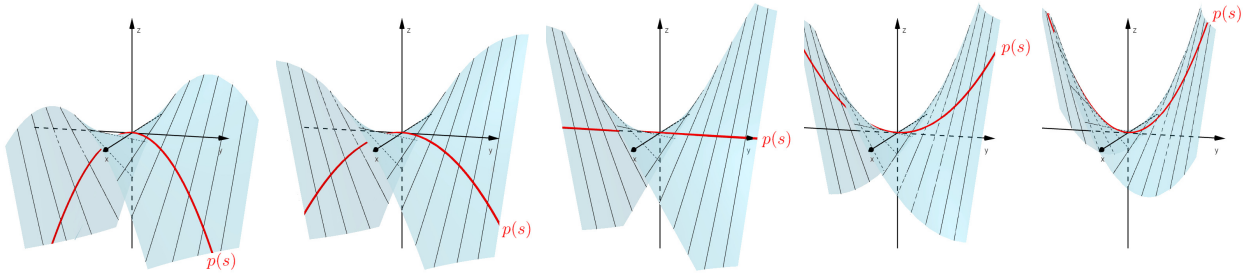


Figura 2.4: Deformação das superfícies quando variamos c_1 .

Tendo em vista que o Lema 1.9 fornece apenas uma condição necessária para que uma superfície seja de Weingarten, não sabemos a priori se as superfícies dessa classe são, de fato, de Weingarten. Para isso, é necessário exibir uma relação global Ψ entre as curvaturas H e K , nos termos da Definição 1.2. É isso que verificamos a seguir.

Começamos parametrizando nossa superfície $z = -\frac{1}{2}y(x - 2c_1y)$ por $\phi(s, t) = (t, s, -\frac{1}{2}s(t - 2c_1s))$, com $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} p &= (0, s, c_1s^2), \quad v = E_1, \quad N_1 = -1, \quad N_2 = -4c_1s, \\ E &= (2c_1s - t)^2 + 1, \quad \tilde{e} = -2c_1, \quad \tilde{f} = -\frac{1}{2}((2sc_1 - t)^2 - 1). \end{aligned}$$

Note que $\tilde{f} = -\frac{1}{2}(E - 2)$. Assim,

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\tilde{f}^2}{E^2} = -\frac{(E-2)^2}{4E^2}, \\ H &= \frac{\tilde{e}}{2E^{\frac{3}{2}}} = \frac{-c_1}{E^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} 0 &= H^2 E^3 - c_1^2, \\ 0 &= (4K + 1)E^2 - 4(E - 1). \end{aligned}$$

Usando a técnica da eliminante (ver Apêndice A.2) para desaparecer com E , obtemos

$$64H^4 + 16c_1^2(12K - 1)H^2 + c_1^4(4K + 1)^3 = 0.$$

Isso mostra que a superfície regrada horizontal $z = -\frac{1}{2}y(x - 2c_1y)$ é de Weingarten (de fato, Weingarten polinomial), para todo $c_1 \in \mathbb{R}$. Isso conclui o caso em que $\theta' \equiv 0$ sobre I .

Suponha agora que $\theta' \neq 0$ sobre um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ maximal com respeito a essa propriedade.

Temos que E , $\tilde{e}$ e $\tilde{f}$ se escrevem como $E = \sum_{n=0}^4 E_n t^n$, $\tilde{e} = \sum_{n=0}^2 e_n t^n$ e $\tilde{f} = \sum_{n=0}^4 f_n t^n$, sendo

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{1}{4}(\theta')^2, \quad E_3 = -\theta'N_1, \quad E_2 = \frac{1}{2}(2(\theta')^2 + 2N_1^2 + \theta'N_2), \\ E_1 &= -N_1(2\theta' + N_2), \quad E_0 = (x')^2 + (y')^2 + \frac{1}{4}N_2^2 \\ e_2 &= -\frac{1}{2}(\theta'N_1' - \theta''N_1), \quad e_1 = \frac{1}{2}(\theta'N_2' - \theta''N_2), \\ e_0 &= \frac{1}{2}(N_1'N_2 - N_2'N_1) \\ f_4 &= -\frac{1}{8}(\theta')^2 = -\frac{1}{2}E_4, \quad f_3 = \frac{1}{2}\theta'N_1 = -\frac{1}{2}E_3, \\ f_2 &= -\frac{1}{4}(2N_1^2 + \theta'N_2) = -\frac{1}{2}E_2 + 2E_4, \\ f_1 &= \frac{1}{2}N_1N_2 = -\frac{1}{2}E_1 + E_3, \quad f_0 = -\frac{1}{2}N_2\theta' + \frac{1}{2}\left(N_1^2 - \frac{1}{4}N_2^2\right). \end{aligned}$$

Com ajuda do computador para coletar a equação (2.1) em t , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -4E_4(2e_2'E_4 - 3E_4'e_2)t^7 \\ &\quad - (8e_1'E_4^2 + 10e_2'E_3E_4 - 11E_3E_4'e_2 - 4E_4E_3'e_2 - 12E_4E_4'e_1)t^6 + \dots \end{aligned}$$

Note que $E_4 = \frac{1}{4}(\theta')^2 \neq 0$ sobre I_1 . Portanto, sobre este intervalo devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= 2e_2'E_4 - 3E_4'e_2 \\ &= -\frac{1}{4}\theta'((\theta')^2N_1'' + 3(\theta'')^2N_1 - 3\theta'\theta''N_1' - \theta'\theta'''N_1) \\ \implies 0 &= (\theta')^2N_1'' + 3(\theta'')^2N_1 - 3\theta'\theta''N_1' - \theta'\theta'''N_1. \end{aligned}$$

Essa equação garante a existência e unicidade de N_1 sobre I_1 , dadas θ com $\theta' \neq 0$ sobre I_1 e condições iniciais $N_1(s_0) = N_{1,0}$ e $N_1'(s_0) = N_{1,0}'$. Verifica-se diretamente que a solução geral possui a forma

$$N_1 = (c_1\theta + c_2)\theta',$$

sendo c_1 e c_2 constantes dadas por

$$c_1 = \frac{\theta_0' N_{1,0}' - \theta_0'' N_{1,0}}{(\theta_0')^3},$$

$$c_2 = \frac{N_{1,0}}{\theta_0'} - \frac{\theta_0}{(\theta_0')^3} (\theta_0' N_{1,0}' - \theta_0'' N_{1,0}).$$

sendo $\theta_0^{(i)} := \theta^{(i)}(s_0)$.

Seguimos para o próximo coeficiente, i.e. do termo t^6 . Usando a expressão obtida para N_1 , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (8e_1'E_4^2 + 10e_2'E_3E_4 - 11E_3E_4'e_2 - 4E_4E_3'e_2 - 12E_4E_4'e_1) \\ &= -\frac{1}{4}(\theta')^3 \left(2(\theta')^5 c_1^2 - (\theta')^2 N_2'' - 3(\theta'')^2 N_2 + 3\theta'\theta''N_2' + \theta'\theta'''N_2 \right) \\ \implies 0 &= 2(\theta')^5 c_1^2 - (\theta')^2 N_2'' - 3(\theta'')^2 N_2 + 3\theta'\theta''N_2' + \theta'\theta'''N_2. \end{aligned}$$

Essa equação garante existência e unicidade de N_2 sobre I_1 , dadas condições iniciais $N_2(s_0) = N_{2,0}$ e $N_2'(s_0) = N_{2,0}'$. Podemos verificar diretamente que a solução geral tem a forma

$$N_2 = (c_1^2\theta^2 + c_3\theta + c_4)\theta',$$

sendo c_3 e c_4 constantes dadas por

$$c_3 = -\frac{1}{(\theta_0')^3} (2\theta_0(\theta_0')^3 c_1^2 - N_{2,0}'\theta_0' + \theta_0''N_{2,0})$$

$$c_4 = \frac{1}{(\theta_0')^3} (\theta_0^2(\theta_0')^3 c_1^2 - N_{2,0}'\theta_0\theta_0' + \theta_0''N_{2,0}\theta_0 + N_{2,0}(\theta_0')^2).$$

Isso mostra que N_1 e N_2 são múltiplos de θ' em I_1 . A maximalidade de I_1 com respeito à condição $\theta' \neq 0$ junto da condição de imersão implica que $I_1 = I$.

Agora que conhecemos o comportamento de N_1 e N_2 , voltemos nossa atenção para a curva central $p = (x, y, z)$. Note que

$$x' = \kappa(x'\kappa + y'\sigma) + \sigma(x'\sigma - y'\kappa) = \sigma N_1,$$

uma vez que $x'\kappa + y'\sigma \equiv 0$ (condição de ortogonalidade) e $N_1 := x'\sigma - y'\kappa$. Dessa igualdade e da expressão que encontramos para N_1 , segue que $x' = \sigma(c_1\theta + c_2)\theta'$. Podemos integrar essa equação de forma exata, obtendo

$$x = c_1(\sigma - \kappa\theta) - c_2\kappa + c_5,$$

sendo $c_5 = x_0 - (c_1(\sigma_0 - \kappa_0\theta_0) - c_2\kappa_0)$.

De forma análoga, temos $y' = -\kappa N_1 = -\kappa(c_1\theta + c_2)\theta'$. Vem daí que

$$y = -c_1(\kappa + \sigma\theta) - c_2\sigma + c_6,$$

com $c_6 = y_0 + c_1(\kappa_0 + \sigma_0\theta_0) + c_2\sigma_0$.

Por fim, de $N_2 = -2z' + xy' - yx'$ vem que

$$\begin{aligned} z' = & -\frac{1}{2}c_1c_5\kappa\theta\theta' - \frac{1}{2}c_2c_5\kappa\theta' - \frac{1}{2}c_1c_6\sigma\theta\theta' - \frac{1}{2}c_2c_6\sigma\theta' + \frac{1}{2}(2c_1c_2 - c_3)\theta\theta' \\ & + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_4)\theta'. \end{aligned}$$

Novamente, integrando em s obtemos

$$\begin{aligned} z = & \frac{1}{2}(-c_1c_5 + c_2c_6 + \theta c_1c_6)\kappa - \frac{1}{2}(c_1c_6 + c_2c_5 + \theta c_1c_5)\sigma \\ & + \frac{1}{4}\theta(-2c_4 + 2c_2^2 - \theta c_3 + 2\theta c_1c_2) + c_7, \end{aligned}$$

sendo c_7 mais uma constante de integração definida pelas condições iniciais sobre s_0 .

Como $\theta' \neq 0$ sobre todo I , temos que $\theta : I \rightarrow \theta(I) \subset \mathbb{R}$ admite inversa θ^{-1} . A menos de tomar a reparametrização $\tilde{\phi} : \theta(I) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ de ϕ dada por $\tilde{\phi}(\tilde{s}, t) = \phi(\theta^{-1}(\tilde{s}), t)$, podemos supor que $\theta(s) = s$.

Note que os dois primeiros coeficientes em t da equação (2.1) já foram suficientes para determinar a superfície. Contudo, as equações nos demais coeficientes também devem ser satisfeitas e é natural esperar que isso imponha mais algumas condições sobre as constantes c_i .

Com as informações que temos, sabemos que os símbolos E , $\tilde{e}$ e $\tilde{f}$ possuem a forma

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{4}t^4 - (c_1s + c_2)t^3 + \frac{1}{2}\left(2 + 2(c_1s + c_2)^2 + (c_1^2s^2 + c_3s + c_4)\right)t^2 \\ & - (c_1s + c_2)\left(2 + (c_1^2s^2 + c_3s + c_4)\right)t \\ & + (c_1s + c_2)^2 + \frac{1}{4}(c_1^2s^2 + c_3s + c_4)^2 \\ \tilde{e} = & -\frac{1}{2}c_1t^2 + \frac{1}{2}(2c_1^2s + c_3)t \\ & + \frac{1}{2}(c_1(c_1^2s^2 + c_3s + c_4) - (2c_1^2s + c_3)(c_1s + c_2)) \\ \tilde{f} = & -\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}(c_1s + c_2)t^3 - \frac{1}{4}\left(2(c_1s + c_2)^2 + (c_1^2s^2 + c_3s + c_4)\right)t^2 \\ & + \frac{1}{2}(c_1s + c_2)(c_1^2s^2 + c_3s + c_4)t - \frac{1}{2}(c_1^2s^2 + c_3s + c_4) \\ & + \frac{1}{2}\left((c_1s + c_2)^2 - \frac{1}{4}(c_1^2s^2 + c_3s + c_4)^2\right) \end{aligned}$$

Com a ajuda do computador, verifica-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{8}(2c_1c_2 - c_3)\left(-4c_1t^5 + (20c_1^2s + 2c_2c_1 + 9c_3)t^4 + \dots\right). \end{aligned}$$

Essa equação impõe que

$$c_3 = 2c_1c_2.$$

De fato, se não tivéssemos essa condição, então $2c_1c_2 - c_3 \neq 0$ e, como o polinômio em t deve ser nulo, do coeficiente de t^5 viria que $c_1 = 0$. Mas então do coeficiente de t^4 viria que $20c_1^2s + 2c_2c_1 + 9c_3 \equiv 0$, donde $c_3 = 0$. Mas nestas condições vale que $c_3 = 2c_1c_2$, uma contradição.

Por outro lado, esta condição é suficiente para que a superfície satisfaça a condição de Kühnel–Dillen necessária para que ela seja de Weingarten.

Usando as expressões encontradas acima para a curva central (x, y, z) vemos que ϕ é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} c_1(\sigma - \kappa s) + \kappa(t - c_2) + c_5 \\ -c_1(\kappa + \sigma s) + \sigma(t - c_2) + c_6 \\ \left(\frac{1}{2}(-c_1c_5 + c_2c_6 + c_1c_6s)\kappa - \frac{1}{2}(c_1c_6 + c_2c_5 + c_1c_5s)\sigma \right) \\ + \frac{1}{2}(-c_4 + c_2^2)s + \frac{t}{2}(c_1 - c_6\kappa + c_5\sigma) + c_7 \end{bmatrix}$$

Aplicando sobre ϕ a translação à esquerda por $(-c_5, -c_6, -c_7 - \frac{1}{2}c_2c_1)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -c_5 \\ -c_6 \\ -c_7 - \frac{1}{2}c_2c_1 \end{bmatrix} \phi = \begin{bmatrix} c_1(\sigma - \kappa s) + \kappa(t - c_2) \\ -c_1(\kappa + \sigma s) + \sigma(t - c_2) \\ \frac{1}{2}(c_1(t - c_2) - c_4s) \end{bmatrix}$$

Isso nos mostra que, a menos de uma isometria, podemos supor $c_5 = c_6 = c_7 = 0$. Note ainda que, a menos de uma reparametrização em t , podemos supor também $c_2 = 0$.

Portanto, concluímos que no caso em que a superfície regradada satisfaz $\theta' \neq 0$, ela é isométrica a uma superfície da forma

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} c_1(\sin s - s \cos s) + t \cos s \\ -c_1(\cos s + s \sin s) + t \sin s \\ \frac{1}{2}(c_1 t - c_4 s) \end{bmatrix}, \quad (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

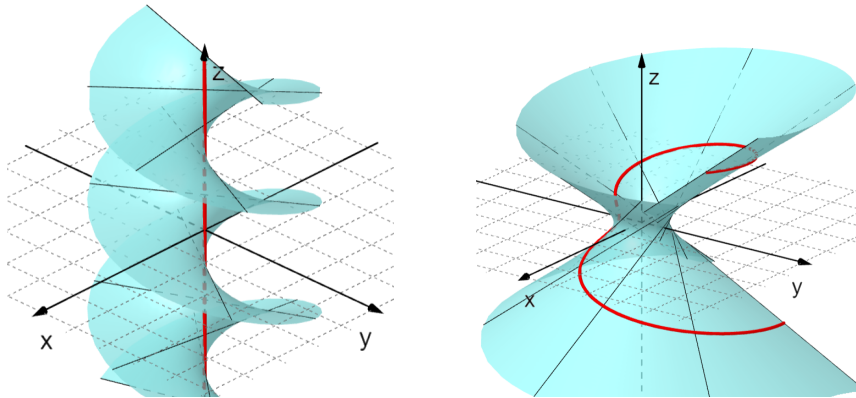


Figura 2.5: Link do Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/xstjfvjb>.

Precisamos verificar que essas superfícies são, de fato, de Weingarten.

Retomando as expressões de E , $\tilde{e}$ e $\tilde{f}$ para tais superfícies, vemos que

$$\begin{aligned} E &= X + \frac{1}{4}(X + c_4)^2 \\ \tilde{e} &= -\frac{1}{2}c_1(X - c_4) \\ \tilde{f} &= -\frac{1}{8}\left((X + c_4)^2 + 4c_4\right) \end{aligned}$$

sendo $X := (c_1s - t)^2$. Note que, se $c_4 \neq 0$, então $EG - F^2 = E > 0$ e ϕ é imersão. Por outro lado, se $c_4 = 0$, então $E(s, c_1s) = 0$, i.e. ϕ deixa de ser imersão nos pontos (s, t) com $t = c_1s$. Isso está de acordo com a nossa condição de tolerância sobre ϕ .

Com essas expressões, das definições de H e K encontramos duas equações polinomiais em H, X e em K, X . Aplicando então o método da eliminante em X (Apêndice A.2), encontra-se uma relação polinomial entre H e K , provando que a superfície é de fato de Weingarten.

Acontece que, se seguirmos este roteiro, iremos nos deparar com um determinante 10×10 , com um custo computacional elevado e cuja relação obtida é muito extensa, sendo de pouco interesse.

Contudo, fomos capazes de encontrar uma relação mais simples entre H e K de outra forma.

Em particular, começemos notando que as expressões obtidas implicam

$$0 = 2\tilde{e} + c_1(2\tilde{f} + E).$$

Se $c_1 = 0$, temos $\tilde{e} \equiv 0$, donde $H = \frac{\tilde{e}}{2E^{3/2}} = 0$, i.e. a superfície é mínima e, portanto, de Weingarten. Suponha então que $c_1 \neq 0$ e denote $Y = E^{1/2}$. Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\tilde{e} + c_1(2\tilde{f} + E) = 4Y^3 \frac{\tilde{e}}{2Y^3} + c_1(2\tilde{f} + Y^2) \\ &= 4HY^3 + c_1(2\tilde{f} + Y^2) \\ \implies 0 &= (4HY^3 + c_1Y^2)^2 - 4c_1^2\tilde{f}^2 = (4HY^3 + c_1Y^2)^2 + 4c_1^2Y^4 \frac{\tilde{f}^2}{Y^4} \\ \implies 0 &= (4HY^3 + c_1Y^2)^2 + 4c_1^2Y^4K = Y^4((4HY + c_1)^2 + 4c_1^2K) \\ \implies 0 &= (4HY + c_1)^2 + 4c_1^2K \end{aligned}$$

Supondo que estamos sobre um ponto em que $H \neq 0$, isolando Y^2 nessa equação nos fornece

$$Y^2 = -\frac{(8Hc_1Y + (c_1^2 + 4Kc_1^2))}{16H^2}.$$

Multiplicando essa equação por Y e substituindo Y^2 no lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} Y^3 &= -\frac{(8Hc_1Y + (c_1^2 + 4Kc_1^2))}{16H^2}Y = -\frac{c_1}{2H}Y^2 - \frac{(c_1^2 + 4Kc_1^2)}{16H^2}Y \\ &= -\frac{c_1}{2H} \left(-\frac{(8Hc_1Y + (c_1^2 + 4Kc_1^2))}{16H^2} \right) - \frac{(c_1^2 + 4Kc_1^2)}{16H^2}Y \\ &= \frac{-c_1^2(4K - 3)}{16H^2}Y + \frac{c_1^3(4K + 1)}{32H^3} \end{aligned}$$

Podemos escrever ainda

$$\begin{aligned}
 Y^6 &= (Y^3)^2 = \left(\frac{-c_1^2(4K-3)}{16H^2}Y + \frac{c_1^3(4K+1)}{32H^3} \right)^2 \\
 &= \frac{c_1^4(4K-3)^2}{256H^4}Y^2 - \frac{c_1^5(4K+1)(4K-3)}{256H^5}Y + \frac{c_1^6(4K+1)^2}{1024H^6} \\
 &= \frac{c_1^4(4K-3)^2}{256H^4} \left(-\frac{(8Hc_1Y + (c_1^2 + 4Kc_1^2))}{16H^2} \right) \\
 &\quad - \frac{c_1^5(4K+1)(4K-3)}{256H^5}Y + \frac{c_1^6(4K+1)^2}{1024H^6} \\
 &= -\frac{c_1^5(12K-1)(4K-3)}{512H^5}Y - \frac{c_1^6(4K+1)(-40K+16K^2+5)}{4096H^6}
 \end{aligned}$$

Tais equações nos permitirão trocar Y^6 , Y^3 e Y^2 por uma expressão de grau 1 em Y .

De $\tilde{e} = 2Y^3H$ vem que

$$-\frac{1}{2}c_1(X - c_4) = 2HY^3 \implies X = \frac{1}{c_1}(c_4c_1 - 4HY^3).$$

Ao substituir essa expressão para X na equação $Y^2 := E = X + \frac{1}{4}(X + c_4)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= Y^2 - X - \frac{1}{4}(X + c_4)^2 \\
 &= Y^2 - \frac{1}{c_1}(c_4c_1 - 4HY^3) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_1}(c_4c_1 - 4HY^3) + c_4 \right)^2 \\
 &= \frac{-4H^2}{c_1^2}Y^6 + \frac{4H(c_4+1)}{c_1}Y^3 + Y^2 - c_4(c_4+1)
 \end{aligned}$$

Com as expressões obtidas anteriormente, reduzimos o grau de Y , obtendo

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{-4H^2}{c_1^2} \left(\begin{aligned} &-\frac{c_1^5(12K-1)(4K-3)}{512H^5}Y \\ &-\frac{c_1^6(4K+1)(-40K+16K^2+5)}{4096H^6} \end{aligned} \right) \\
 &\quad + \frac{4H(c_4+1)}{c_1} \left(\frac{-c_1^2(4K-3)}{16H^2}Y + \frac{c_1^3(4K+1)}{32H^3} \right) \\
 &\quad + \left(-\frac{(8Hc_1Y + (c_1^2 + 4Kc_1^2))}{16H^2} \right) - c_4(c_4+1) \\
 &= \frac{-c_1}{128H^3} \left(\begin{aligned} &-48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ &+ 40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{aligned} \right) Y \\
 &\quad - \frac{1}{1024H^4} \left(\begin{aligned} &-64H^2c_1^2 + 1024H^4c_4^2 + 144K^2c_1^4 - 64K^3c_1^4 \\ &-5c_1^4 + 1024H^4c_4 + 20Kc_1^4 - 256H^2Kc_1^2 \\ &-128H^2c_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2c_4 \end{aligned} \right).
 \end{aligned}$$

Naturalmente, os parênteses maiores na expressão acima indicam apenas quebras de linhas internas aos parênteses e não uma matriz coluna.

Multiplicando essa equação por $-1024H^4$, obtemos

$$0 = 8c_1 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right) HY \\ + \left(\begin{array}{c} -64H^2c_1^2 + 1024H^4c_4^2 + 144K^2c_1^4 - 64K^3c_1^4 \\ -5c_1^4 + 1024H^4c_4 + 20Kc_1^4 - 256H^2Kc_1^2 \\ -128H^2c_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2c_4 \end{array} \right)$$

Agora fazemos o truque final para desaparecer com Y da equação, obtendo uma equação relacionando H e K . Iremos transformar HY em $c_1 + 4HY$, depois em $(c_1 + 4HY)^2$ e finalmente substituir por $-4c_1^2K$.

$$0 = 8c_1 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right) HY \\ + \left(\begin{array}{c} -64H^2c_1^2 + 1024H^4c_4^2 + 144K^2c_1^4 - 64K^3c_1^4 \\ -5c_1^4 + 1024H^4c_4 + 20Kc_1^4 - 256H^2Kc_1^2 \\ -128H^2c_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2c_4 \end{array} \right) \\ = 2c_1 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right) (c_1 + 4HY) \\ - 2c_1 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right) c_1 \\ + \left(\begin{array}{c} -64H^2c_1^2 + 1024H^4c_4^2 + 144K^2c_1^4 - 64K^3c_1^4 \\ -5c_1^4 + 1024H^4c_4 + 20Kc_1^4 - 256H^2Kc_1^2 \\ -128H^2c_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2c_4 \end{array} \right) \\ = 2c_1 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right) (c_1 + 4HY) \\ + \left(\begin{array}{c} 1024H^4c_4^2 + 1024H^4c_4 - 768H^2Kc_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2 \\ +64H^2c_1^2c_4 - 64K^3c_1^4 + 240K^2c_1^4 - 60Kc_1^4 + c_1^4 \end{array} \right)$$

Isso implica

$$0 = 4c_1^2 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right)^2 (c_1 + 4HY)^2 \\ - \left(\begin{array}{c} 1024H^4c_4^2 + 1024H^4c_4 - 768H^2Kc_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2 \\ +64H^2c_1^2c_4 - 64K^3c_1^4 + 240K^2c_1^4 - 60Kc_1^4 + c_1^4 \end{array} \right)^2 \\ = 4c_1^2 \left(\begin{array}{c} -48K^2c_1^2 - 3c_1^2 + 128H^2K - 96H^2c_4 \\ +40Kc_1^2 - 32H^2 + 128H^2Kc_4 \end{array} \right)^2 (-4c_1^2K) \\ - \left(\begin{array}{c} 1024H^4c_4^2 + 1024H^4c_4 - 768H^2Kc_1^2c_4 - 512H^2Kc_1^2 \\ +64H^2c_1^2c_4 - 64K^3c_1^4 + 240K^2c_1^4 - 60Kc_1^4 + c_1^4 \end{array} \right)^2 \\ = -16Kc_1^4 \left(\begin{array}{c} 32(4K(1+c_4) - 3c_4 - 1)H^2 \\ -c_1^2(12K - 1)(4K - 3) \end{array} \right)^2 \\ - \left(\begin{array}{c} 1024c_4(c_4 + 1)H^4 - 64c_1^2(4(3c_4 + 2)K - c_4)H^2 \\ -c_1^4(4K - 1)(16K^2 - 56K + 1) \end{array} \right)^2$$

Nas passagens para se obter essa equação, havíamos suposto que $H \neq 0$. Acontece que ela se mantém verdadeira para quaisquer H, K possuindo as formas que obtemos anteriormente.

Isso encerra nossa demonstração. $\square$

2.2.3 Oblíquas

Consideramos agora o caso mais sofisticado das superfícies regradas oblíquas. Isso corresponde ao caso em que a curva direcional tem a forma

$$v = r\kappa E_1 + r\sigma E_2 + wE_3, \text{ com } rw \neq 0, \text{ e } r^2 + w^2 = 1 \text{ sobre } I.$$

Como anteriormente, estamos denotando $\kappa(s) := \cos \theta(s)$ e $\sigma(s) := \sin \theta(s)$, $s \in I$. Sendo $p = (x, y, z) : I \rightarrow \text{Nil}_3$ sua curva central, a aplicação $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma(p, v)$ é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} x + \frac{r}{w} (\sin(wt + \theta) - \sin \theta) \\ y - \frac{r}{w} (\cos(wt + \theta) - \cos \theta) \\ z - \frac{r^2}{2w^2} \sin(wt) + \left(w + \frac{r^2}{2w}\right)t - \frac{r}{2w} \begin{pmatrix} x(\cos(wt + \theta) - \cos \theta) \\ +y(\sin(wt + \theta) - \sin \theta) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Mostremos que, abrindo mão da condição $r^2 + w^2 = 1$, uma tal superfície pode ser reparametrizada de forma a se ter $w \equiv 1$. De fato, considerando o difeomorfismo $(s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \left(s, \frac{t}{w(s)}\right) \in I \times \mathbb{R}$, temos que $\tilde{\phi} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ dada por $\tilde{\phi}(s, t) := \phi\left(s, \frac{t}{w(s)}\right)$ parametriza a mesma superfície $\Sigma(p, v)$. Além disso, $\tilde{\phi}$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \begin{bmatrix} x + \frac{r}{w} (\sin(t + \theta) - \sin \theta) \\ y - \frac{r}{w} (\cos(t + \theta) - \cos \theta) \\ z - \frac{r^2}{2w^2} \sin t + \left(w + \frac{r^2}{2w}\right) \frac{t}{w} - \frac{r}{2w} \begin{pmatrix} x(\cos(t + \theta) - \cos \theta) \\ +y(\sin(t + \theta) - \sin \theta) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + \tilde{r} (\sin(t + \theta) - \sin \theta) \\ y - \tilde{r} (\cos(t + \theta) - \cos \theta) \\ z - \frac{\tilde{r}^2}{2} \sin t + \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{2}\right)t - \frac{\tilde{r}}{2} \begin{pmatrix} x(\cos(t + \theta) - \cos \theta) \\ +y(\sin(t + \theta) - \sin \theta) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \gamma_{p, \tilde{v}}(t), \end{aligned}$$

sendo $\tilde{v} := \tilde{r}\kappa E_1 + \tilde{r}\sigma E_2 + E_3$ com $\tilde{r} = \frac{r}{w} \neq 0$. Portanto, sem perda de generalidade iremos supor que $w \equiv 1$.

Denote $C(s, t) := \cos(t + \theta(s))$ e $S(s, t) := \sin(t + \theta(s))$ e observe que

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin(t + \theta - \theta) = \sin(t + \theta) \cos \theta - \sin \theta \cos(t + \theta) \\ &= S\kappa - \sigma C. \end{aligned}$$

Sob tais considerações, ϕ se escreve como

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2} \sin t + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2} (x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2} (S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2} (x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como já observamos anteriormente, podemos supor que p e v satisfazem a condição de ortogonalidade. Daí, lembrando que

$$p' = (x', y', z') = x'E_1 + y'E_2 + \left(z' - \frac{1}{2}(xy' - yx')\right)E_3,$$

essa tal condição é dada por

$$0 = \langle p', v \rangle_p = z' - \frac{1}{2}(xy' - yx') + r(x'\kappa + y'\sigma).$$

Calculemos os vetores tangentes sobre a superfície, ϕ_s e ϕ_t . Primeiramente, temos as derivadas parciais

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{\partial}{\partial s} \cos(t + \theta) = -\theta' \sin(t + \theta) = -\theta' S, \\ S_s &= \frac{\partial}{\partial s} \sin(t + \theta) = \theta' \cos(t + \theta) = \theta' C, \\ \kappa' &= \frac{d}{ds} \cos \theta = -\theta' \sin \theta = -\theta' \sigma, \\ \sigma' &= \frac{d}{ds} \sin \theta = \theta' \cos \theta = \theta' \kappa. \end{aligned}$$

Usando essas relações, vemos que as duas primeiras coordenadas de ϕ_s no referencial canônico de Nil₃ são dadas por

$$\begin{aligned} \partial_s(x + r(S - \sigma)) &= x' + r'(S - \sigma) + r\theta'(C - \kappa), \\ \partial_s(y - r(C - \kappa)) &= y' - r'(C - \kappa) + r\theta'(S - \sigma). \end{aligned}$$

Já a terceira coordenada é dada por

$$\begin{aligned} &\partial_s \left(z - \frac{r^2}{2}(S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \right) \\ &= z' - rr'(S\kappa - \sigma C) - \frac{r^2}{2}\theta'(C\kappa + \sigma S - S\sigma - \kappa C) + rr't \\ &\quad - \frac{r'}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \\ &\quad - \frac{r}{2}(x'(C - \kappa) + y'(S - \sigma) + x\theta'(-S - (-\sigma)) + y\theta'(C - \kappa)) \\ &= z' - rr'(S\kappa - \sigma C) + rr't \\ &\quad - \frac{r'}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \\ &\quad - \frac{r}{2}(x'(C - \kappa) + y'(S - \sigma) + \theta'(-x(S - \sigma) + y(C - \kappa))) \end{aligned}$$

Usando a condição de ortogonalidade para fazer $z' = \frac{1}{2}(xy' - yx') - r(x'\kappa + y'\sigma)$ e coletando a expressão em t, C, S , obtemos que a terceira coordenada de ϕ_s é dada por

$$\begin{aligned} &rr't - \frac{1}{2}(rx' + xr' + ry\theta' - 2rr'\sigma)C \\ &+ \frac{1}{2}(-ry' - yr' + rx\theta' - 2rr'\kappa)S \\ &- \frac{1}{2}(yx' - xy' + r(x'\kappa + y'\sigma) - r'(x\kappa + y\sigma) + r\theta'(x\sigma - y\kappa)) \end{aligned}$$

Precisamos dos vetores tangentes no referencial E_i . Sobre ϕ , ele é dado por

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(1, 0, \frac{-(y - r(C - \kappa))}{2}\right), \\ E_2 &= \left(0, 1, \frac{x + r(S - \sigma)}{2}\right), \\ E_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Escrevendo $\phi_s = \sum_{i=1}^3 a_i E_i$ e usando as coordenadas obtidas acima, vemos que ϕ_s se escreve como

$$\begin{aligned} \phi_s &= (x' + r'(S - \sigma) + r\theta'(C - \kappa)) E_1 \\ &\quad + (y' - r'(C - \kappa) + r\theta'(S - \sigma)) E_2 \\ &\quad + r(r't + r\theta'(C\kappa + S\sigma - 1) + r'(C\sigma - S\kappa) - (Cx' + Sy')) E_3 \end{aligned}$$

Olhemos agora para o outro vetor tangente, ϕ_t . Temos

$$\phi_t = \begin{bmatrix} rC \\ rS \\ -\frac{r^2}{2}(C\kappa + \sigma S) + 1 + \frac{r^2}{2} - \frac{r}{2}(-xS + yC) \end{bmatrix}.$$

No referencial E_i , obtemos simplesmente

$$\phi_t = rCE_1 + rSE_2 + E_3.$$

Defina as seguintes funções sobre I :

$$\begin{aligned} a &= x' - r'\sigma - r\kappa\theta', \\ b &= y' + r'\kappa - r\sigma\theta'. \end{aligned}$$

Podemos reescrever ϕ_s como

$$\begin{aligned} \phi_s &= (a + Sr' + Cr\theta') E_1 + (b - Cr' + Sr\theta') E_2 \\ &\quad - r(r\theta' - r't + Ca + Sb) E_3. \end{aligned}$$

O campo normal sobre a superfície é dado por

$$\begin{aligned} \phi_s \times_g \phi_t &= \det \begin{bmatrix} a + Sr' + Cr\theta' & b - Cr' + Sr\theta' & -r(r\theta' - r't + Ca + Sb) \\ rC & rS & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= (b - Cr' + Sr\theta' + Sr^3\theta' + S^2br^2 + CSar^2 - Sr^2tr') E_1 \\ &\quad + (Cr^2tr' - Sr' - Cr\theta' - Cr^3\theta' - C^2ar^2 - CSbr^2 - a) E_2 \\ &\quad + (rr'C^2 - brC + rr'S^2 + arS) E_3 \\ &= (b - Cr' + Sr\theta' + Sr^3\theta' + S^2br^2 + CSar^2 - Sr^2tr') E_1 \\ &\quad + (Cr^2tr' - Sr' - Cr\theta' - Cr^3\theta' - C^2ar^2 - CSbr^2 - a) E_2 \\ &\quad + (rr' - brC + arS) E_3. \end{aligned}$$

Relembramos que estamos supondo que ϕ satisfaz a

Condição de tolerância: Se ϕ não é imersão, então existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\tau \geq 0$ constante tais que, se $(\phi_s \times_g \phi_t)(s, t) = 0$, então $t = h(s) + k\tau$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Definimos o campo normal unitário sobre os pontos de imersão da superfície por

$$N = \frac{\phi_s \times_g \phi_t}{|\phi_s \times_g \phi_t|}.$$

Calculemos agora as derivadas covariantes de ϕ . Temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\phi_s} \phi_s &= (a + Sr' + Cr\theta')_s E_1 + (b - Cr' + Sr\theta')_s E_2 \\ &\quad - (r(r\theta' - r't + Ca + Sb))_s E_3 + \frac{1}{2} \overline{\phi_s} \times_g \phi_s \\ &= \left(a' + C\theta' r' + Sr'' - Sr(\theta')^2 + Cr'\theta' + Cr\theta'' \right) E_1 \\ &\quad + \left(b' + S\theta' r' - Cr'' + Cr(\theta')^2 + Sr'\theta' + Sr\theta'' \right) E_2 \\ &\quad - \left(\begin{array}{c} r'(r\theta' - r't + Ca + Sb) \\ + r(r'\theta' + r\theta'' - r''t + \theta'(Cb - Sa) + Ca' + Sb') \end{array} \right) E_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} a + Sr' + Cr\theta' & b - Cr' + Sr\theta' & r(r\theta' - r't + Ca + Sb) \\ a + Sr' + Cr\theta' & b - Cr' + Sr\theta' & -r(r\theta' - r't + Ca + Sb) \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c} rr'(b - Cr' + Sr\theta')t + arr'C^2 + r(br' - ar\theta')CS \\ + (r\theta'' + 2r'\theta' + r^2r'\theta' - abr)C + (-br^2\theta')S^2 \\ + (r'' - r^3(\theta')^2 - r(\theta')^2 - b^2r)S + a' - br^2\theta' \end{array} \right) E_1 \\ &\quad + \left(\begin{array}{c} -rr'(a + Sr' + Cr\theta')t + ar^2\theta'C^2 + r(b\theta'r + ar')CS \\ + (a^2r + r^3(\theta')^2 + r(\theta')^2 - r'')C + brr'S^2 \\ + (r\theta'' + 2r'\theta' + r^2r'\theta' + abr)S + b' + ar^2\theta' \end{array} \right) E_2 \\ &\quad + \left(\begin{array}{c} ((r')^2 + rr'')t - (ar' + r(a' + b\theta'))C \\ - (br' + r(b' - a\theta'))S - r(r\theta'' + 2r'\theta') \end{array} \right) E_3, \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= (a + Sr' + Cr\theta')_t E_1 + (b - Cr' + Sr\theta')_t E_2 \\ &\quad - (r(r\theta' - r't + Ca + Sb))_t E_3 + \frac{1}{2} \overline{\phi_t} \times_g \phi_s \\ &= (Cr' - Sr\theta') E_1 + (-(-S)r' + Cr\theta') E_2 \\ &\quad - r(-r' - Sa + Cb) E_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} rC & rS & -1 \\ a + Sr' + Cr\theta' & b - Cr' + Sr\theta' & -r(r\theta' - r't + Ca + Sb) \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} Sr^2 r't - \frac{1}{2} (ar^2 CS - r'C + br^2 S^2 + r\theta'(r^2 + 1)S - b) \right) E_1 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} Cr^2 r't + \frac{1}{2} (ar^2 C^2 + br^2 CS + r\theta'(r^2 + 1)C + r'S - a) \right) E_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} r(r' - Cb + Sa) E_3 \\ \nabla_{\phi_t} \phi_t &= 0 \text{ (direção das geodésicas).} \end{aligned}$$

Com isso, temos que os vetores tangentes, o campo normal e as derivadas covariantes sobre a

superfície possuem a forma

$$\begin{aligned}
\phi_s &= A_1 E_1 + A_2 E_2 - r(-r't + A_3) E_3, \\
\phi_t &= rCE_1 + rSE_2 + E_3, \\
N &= W((-Sr^2r't + N_1) E_1 + (Cr^2r't + N_2) E_2 + N_3 E_3) \\
\text{sendo } W &= |\phi_s \times \phi_t|^{-1}, \\
\nabla_{\phi_s} \phi_s &= (rr'(b - Cr' + Sr\theta')t + B_1) E_1 \\
&\quad + (-rr'(a + Sr' + Cr\theta')t + B_2) E_2 \\
&\quad + (((r')^2 + rr'')t + B_3) E_3, \\
\nabla_{\phi_t} \phi_s &= \left(\frac{1}{2}Sr^2r't + C_1\right) E_1 + \left(-\frac{1}{2}Cr^2r't + C_2\right) E_2 + C_3 E_3
\end{aligned}$$

em que os símbolos A_i , B_i e C_i dependem de s e t , mas a dependência em t se dá apenas através das funções C e S . Com essas notações, a primeira forma fundamental possui a forma

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = r^2(r')^2t^2 + (-2r^2r'A_3)t + (r^2A_3^2 + A_1^2 + A_2^2) \\
F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = rr't \\
G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = r^2 + 1
\end{aligned}$$

A segunda forma fundamental possui a forma

$$\begin{aligned}
e &= W \left(\begin{aligned} &-r^3(r')^2(Ca + Sb + r\theta')t^2 \\ &+ \left(\begin{aligned} &N_3((r')^2 + rr'') - rr'N_2(a + Sr' + Cr\theta') \\ &+ rr'N_1(b - Cr' + Sr\theta') + r^2r'(CB_2 - SB_1) \\ &+ (B_1N_1 + B_2N_2 + B_3N_3) \end{aligned} \right) t \end{aligned} \right), \\
f &= W \left(\begin{aligned} &-\frac{1}{2}r^4(r')^2t^2 + \frac{1}{2}r^2r'(2CC_2 - CN_2 - 2SC_1 + SN_1)t \\ &+ (C_1N_1 + C_2N_2 + C_3N_3) \end{aligned} \right), \\
g &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é classificar as superfícies regradas de Weingarten do tipo oblíquo, sob a hipótese de serem de classe C^3 e aplicando a técnica de Kühnel-Dillen como nas seções anteriores. Para este caso específico, usaremos também o seguinte lema técnico.

Lema 2.26. *Considere um polinômio $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Escreva $P = \sum_{i=0}^n Q_i Z^i$ com $Q_i \in \mathbb{R}[X, Y]$. Se*

$$P(\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0), t) \equiv 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

$$\text{então } Q_i(\cos t, \sin t) \equiv 0, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, considere o polinômio $p_{t_0} \in \mathbb{R}[Z]$ definido por

$$p_{t_0}(Z) := P(\cos(t_0 + \theta_0), \sin(t_0 + \theta_0), Z).$$

Note então que todos os elementos do conjunto infinito

$$\{t_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

são raízes de $p_{t_0}(Z)$. De fato, utilizando a periodicidade das funções seno e cosseno, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_{t_0}(t_0 + 2k\pi) &= P(\cos(t_0 + \theta_0), \sin(t_0 + \theta_0), t_0 + 2k\pi) \\ &= P(\cos(t_0 + 2k\pi + \theta_0), \sin(t_0 + 2k\pi + \theta_0), t_0 + 2k\pi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, p_{t_0} deve ser o polinômio nulo. Observando que

$$p_{t_0}(Z) = \sum_{i=0}^n Q_i(\cos(t_0 + \theta_0), \sin(t_0 + \theta_0)) Z^i,$$

conclui-se que $Q_i(\cos(t_0 + \theta_0), \sin(t_0 + \theta_0)) = 0$, para todo $i = 0, \dots, n$. Como $t_0 \in \mathbb{R}$ é qualquer, tomando $t_0 = t - \theta_0$ vemos que

$$Q_i(\cos t, \sin t) = 0, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

□

Nosso primeiro passo na direção da classificação das superfícies regradas do tipo oblíquo é mostrar que a função $r \neq 0$ que aparece na parametrização ϕ é constante.

Proposição 2.27. *Se uma superfície regrada oblíqua de classe C^3 é de Weingarten, então a função r é constante.*

Demonstração. Aplicando o Lema 1.9, e observando que $\tilde{g} \equiv 0$, devemos ter

$$0 = \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \text{ sobre } I \times \mathbb{R}.$$

Fixando $s \in I$ e aplicando o Lema 2.26 acima, concluímos que os coeficientes dessa equação quando coletada em t são polinômios em C, S e que se anulam para $(C, S) = (\cos t, \sin t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Coletando essa equação em t com o auxílio do computador, obtemos

$$0 = -r^{16}(r')^9(Cb - Sa)t^8 + \text{termos de grau } \leq 7 \text{ em } t.$$

Ora, o coeficiente $-r^{16}(r')^9(Cb - Sa)$ deve se anular sobre $(C, S) = (\cos t, \sin t)$. Isso implica que ele deve possuir $C^2 + S^2 - 1 = 0$ como fator. Consequentemente, ele deve ser identicamente nulo em C, S . Estamos usando aqui o argumento de curvas algébricas que diz que duas curvas algébricas possuem interseção infinita se, e somente se, seus respectivos polinômios possuem um fator em comum. No

nosso caso, $C^2 + S^2 - 1$ é irredutível em C, S e $-r^{16}(r')^9(Cb - Sa)$ possui grau 1 em C, S . Como $r \neq 0$, segue daí que

$$r'b = r'a \equiv 0 \text{ sobre } I.$$

Usando essa informação, a equação assume a forma

$$0 = r^{13}(r')^8\theta'(r^2 + 1)(r'S^2 + (r\theta' - r')SC + (-r\theta')C^2 + r^2r')t^7 + \dots$$

Novamente, aplicando o Lema 2.26, devemos ter que o coeficiente de t^7 se anula sobre $(C, S) = (\cos t, \sin t)$. Fazendo $S^2 = 1 - C^2$ e aplicando novamente o argumento das curvas algébricas, obtemos o seguinte polinômio nulo em C, S :

$$\begin{aligned} & -r^{13}(r')^8\theta'(r^2 + 1)(r' + r\theta')C^2 + r^{13}(r')^8\theta'(r^2 + 1)(-r' + r\theta')CS \\ & + r^{13}(r')^9\theta'(r^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

O termo independente nos diz que

$$r'\theta' \equiv 0 \text{ sobre } I.$$

Note que isso zera também os demais coeficientes.

Buscamos agora o próximo coeficiente, i.e. de t^6 . Usando as informações obtidas até aqui, ele se reduz a

$$\begin{aligned} & -r^8(r')^8 \left((r^2 + 1) \begin{pmatrix} (a + Cr\theta')^2 + (b + Sr\theta')^2 \\ + (r')^2 + r^2(r\theta' + Ca + Sb)^2 \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - r^2)(r')^2 - \frac{1}{2}C^2a^2r^4 \\ + (-CS)abr^2 - \frac{1}{2}S^2b^2r^4 + (\frac{1}{2}S^2)a^2r^2 \\ + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - CSabr^4 - Ca\theta'r^5 \\ - Ca\theta'r^3 + (\frac{1}{2}C^2)b^2r^2 - Sb\theta'r^5 \\ - Sb\theta'r^3 - \frac{1}{2}(\theta')^2r^6 - (\theta')^2r^4 - \frac{1}{2}(\theta')^2r^2 \end{pmatrix} \right) \\ & = -r^8(r')^8 \left((r^2 + 1)(r')^2 + 2 \left(-\frac{1}{2}(1 - r^2)(r')^2 \right) \right) \\ & = -2r^{10}(r')^{10} \end{aligned}$$

Note que, na equação acima, distribuímos o fator $(r')^8$ sobre a expressão maior e este zera, sempre que se encontra com um dos termos a, b ou θ' . É assim que simplificamos a expressão.

Mas então temos que $rr' \equiv 0$. Isso implica que $r' \equiv 0$, i.e. r é constante sobre todo I . Basta notar que $rr' = \frac{1}{2}(r^2)'$. $\square$

A proposição acima nos traz uma implicação geométrica muito importante. Se retomarmos as expressões do feixe de geodésicas partindo de um ponto, veremos que, sob a nossa hipótese de que $w = 1$, a função r controla a inclinação do vetor de saída da geodésica. Observa-se que duas geodésicas oblíquas associadas a uma mesma tal inclinação podem ser levadas uma na outra por uma

isometria. Supondo, sem perda de generalidade, que o ponto base é a origem de Nil_3 , essa isometria é dada por uma rotação em torno do eixo- z . Já para geodésicas oblíquas com inclinações diferentes isso não acontece. Podemos interpretar duas tais geodésicas como tendo “formatos” geometricamente diferentes. Dito isso, o resultado acima nos diz que, se uma superfície regrada oblíqua de classe C^3 é de Weingarten, então as geodésicas ao longo da superfície possuem o mesmo formato, i.e. diferem apenas por um movimento rígido de Nil_3 .

Isso implica também o seguinte corolário, crucial para a nossa classificação geral. Ele pode ser visto como um resultado de rigidez que mostra que não existem superfícies regradas de Weingarten do tipo “misto”. Dessa forma, ao classificarmos as superfícies regradas de cada tipo particular (vertical, horizontal, oblíquo), estaremos classificando todas as superfícies regradas de Weingarten em Nil_3 .

Corolário 2.28. *Se uma superfície regrada de classe C^3 em Nil_3 é de Weingarten, então ela é de um dos três tipos: vertical, horizontal ou oblíquo.*

Demonstração. Considere uma superfície regrada de classe C^3 de Weingarten dada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$ e que não admita parametrização do tipo vertical.

Suponha que $s_0 \in I$ seja tal que a geodésica $t \mapsto \phi(s_0, t)$ seja do tipo oblíquo. Como ϕ é contínua e não é difícil ver que obliquidade é uma condição aberta, isso implica que existe intervalo aberto não vazio $I_0 \subset I$ em torno de s_0 sobre o qual todas as geodésicas são oblíquas. Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que I_0 é maximal com respeito a essa propriedade.

Assim, a restrição de ϕ a $I_0 \times \mathbb{R}$ nos fornece uma superfície regrada do tipo oblíquo. Sem perda de generalidade, podemos reparametrizar esse trecho da superfície fazendo $w = 1$ como fizemos anteriormente. Então a Proposição 2.27 nos diz que $r \neq 0$ é constante. Ora, isso torna impossível que as geodésicas mudem de tipo, i.e. passem para o tipo vertical ou horizontal nos extremos de I_0 . Daí, a maximalidade de I_0 implica que $I_0 = I$.

Em outras palavras, a presença de uma única geodésica oblíqua faz com que todas as geodésicas dadas pela parametrização sejam oblíquas e do mesmo “formato”. Como, por hipótese, a superfície não admite parametrização do tipo vertical, concluímos que ela é do tipo oblíquo.

Suponha agora que um tal s_0 não exista. Como, por hipótese, ϕ não é uma parametrização vertical, deve existir $s_0 \in I$ sobre o qual a geodésica é horizontal. Contudo, não há como passar do tipo horizontal ao tipo vertical sem antes passar por uma geodésica do tipo oblíquo (lembrando que ϕ é contínua e I é conexo). Como a superfície não possui geodésicas oblíquas, isso implica que as geodésicas de ϕ devem ser todas horizontais. $\square$

Voltemos ao caso das oblíquas. A condição $r' \equiv 0$ traz uma considerável simplificação das funções envolvidas em nosso estudo. Em particular, temos $F = rr't \equiv 0$, o que nos diz que $\langle \phi_s, \phi_t \rangle \equiv 0$ ao longo

de toda a superfície. Além disso, $G = r^2 + 1$ também é constante. Obtemos ainda

$$\begin{aligned}
 E &= (a + Cr\theta')^2 + (b + Sr\theta')^2 + r^2 (r\theta' + Ca + Sb)^2 \\
 \tilde{e} &= \begin{pmatrix} (-ar^2\theta')CS + r(\theta'' - ab)C + (-br^2\theta')S^2 \\ -r(b^2 + (r^2 + 1)(\theta')^2)S + (a' - br^2\theta') \end{pmatrix} \\
 &\quad \times ((ar^2)CS + (br^2)S^2 + r(r^2 + 1)\theta'S + b) \\
 &\quad + \begin{pmatrix} br^2\theta'CS + r(\theta'' + ab)S + ar^2\theta'C^2 \\ +r(a^2 + (r^2 + 1)(\theta')^2)C + (b' + a\theta'r^2) \end{pmatrix} \\
 &\quad \times ((-ar^2)C^2 + (-br^2)CS - r(r^2 + 1)\theta'C - a) \\
 &\quad + r^2(Cb - Sa)((a' + b\theta')C + (b' - a\theta')S + r\theta'') \\
 \tilde{f} &= \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}S^2br^2 - \frac{1}{2}Sr\theta'(r^2 + 1) - \frac{1}{2}CSar^2 \right) \\
 &\quad \times (bS^2r^2 + \theta'Sr^3 + CaSr^2 + \theta'Sr + b) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}C^2ar^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}Cr\theta'(r^2 + 1) + \frac{1}{2}CSbr^2 \right) \\
 &\quad \times (-aC^2r^2 - \theta'Cr^3 - SbCr^2 - \theta'Cr - a) \\
 &\quad + \frac{1}{2}r^2(Cb - Sa)^2
 \end{aligned}$$

Trabalhando com essas expressões, podemos reescrevê-las como

$$\begin{aligned}
 E &= r^2(Ca + Sb)^2 + 2r\theta'(r^2 + 1)(Ca + Sb) \\
 &\quad + r^2(r^2 + 1)(\theta')^2 + a^2 + b^2 \\
 \tilde{e} &= -r^3(Ca + Sb)^3 - 3r^2(r^2 + 1)\theta'(Ca + Sb)^2 \\
 &\quad - r((3r^2 + 1)(r^2 + 1)(\theta')^2 + a^2 + b^2)(Ca + Sb) \\
 &\quad + r(r^2 + 1)((Cb - Sa)\theta'' + (Sa' - Cb')\theta') \\
 &\quad - (r^2 + 1)(r^2(r^2 + 1)(\theta')^3 + ab' - ba') \\
 \tilde{f} &= \frac{1}{2}(r^2 + 1)\left(-r^2(r\theta' + Ca + Sb)^2 + a^2 + b^2 - r^2(\theta')^2\right)
 \end{aligned}$$

Finalmente, podemos enunciar e provar o teorema principal dessa seção.

Teorema 2.29. *Uma superfície regrada completa de classe $\mathcal{C}^3$ do tipo oblíquo em Nil_3 é de Weingarten se, e somente se, é dada a menos de isometrias por uma das superfícies descritas abaixo.*

A primeira família de superfícies é dada por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} s + r \cos t \\ r \sin t \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t + \frac{1}{2}rs \sin t \end{bmatrix}, \quad \text{com } r \neq 0.$$

Essa família satisfaz

$$64(r^2 + 1)^2 H^4 - 16(r^2 + 1) H^2 + 4K + 1 = 0.$$

A segunda família de superfícies é dada por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} Rs + r \cos(t + s) \\ r \sin(t + s) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{r^2}{2}s + \frac{1}{2}Rrs \sin(t + s) \end{bmatrix},$$

para certos $r, R \in \mathbb{R}$ com $Rr \neq 0$. Neste caso, a superfície é Weingarten polinomial satisfazendo $\Psi(H, K) = 0$, em que $\Psi(X, Y) = \text{Elm}_Z(P, Q)$ é o polinômio dado pela eliminante em Z (ver Apêndice A.2) dos polinômios

$$\begin{aligned} P(Y, Z) &= 4 \left((r^2 + 1)(RZ + r)^2 - R^2(Z^2 - 1) \right)^2 Y \\ &\quad + \left(R^2 - r^2(r + RZ)^2 - r^2 \right)^2 \\ Q(X, Z) &= 4 \left(\frac{r^2 R^2 Z^2 + 2r(r^2 + 1)RZ}{+r^2(r^2 + 1) + R^2} \right)^3 (r^2 + 1) X^2 \\ &\quad - \left(\frac{-r^3 R^3 Z^3 - 3r^2(r^2 + 1)R^2 Z^2}{-rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1) + R^2)Z - r^2(r^2 + 1)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

A terceira família de superfícies é dada por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} R \sin s + r \sin(t + cs) \\ -R \cos s - r \cos(t + cs) \\ \frac{1}{2}(R^2 - cr^2)s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + \frac{1}{2}Rr \sin(t + cs - s) \end{bmatrix},$$

para certos $c, r, R \in \mathbb{R}$ com $Rr \neq 0$. A superfície é Weingarten polinomial satisfazendo $\Psi(H, K) = 0$, em que $\Psi(X, Y) = \text{Elm}_Z(P, Q)$ é o polinômio dado pela eliminante em Z dos polinômios

$$\begin{aligned} P(Y, Z) &= 4 \left((r^2 + 1)(RZ + cr)^2 - R^2(Z^2 - 1) \right)^2 Y \\ &\quad + \left(R^2 - r^2(rc + RZ)^2 - r^2 c^2 \right)^2 \\ Q(X, Z) &= 4 \left(\frac{r^2 R^2 Z^2 + 2r(r^2 + 1)cRZ}{+r^2(r^2 + 1)c^2 + R^2} \right)^3 (r^2 + 1) X^2 \\ &\quad - \left(\frac{-r^3 R^3 Z^3 - 3r^2(r^2 + 1)cR^2 Z^2}{-rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1)c^2 + R^2 + c(r^2 + 1))Z - (r^2 + 1)(r^2(r^2 + 1)c^3 + R^2)} \right)^2 \end{aligned}$$

Destacamos que os parênteses maiores nas expressões acima indicam apenas quebras de linha e não um vetor-coluna. Matrizes e vetores-coluna são denotados por colchetes.

Demonstração. A condição de Kühnel–Dillen junto ao fato de que $G = r^2 + 1 \neq 0$ é constante, nos diz que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG) & (EG)_s & (EG)_t \\ 3(\tilde{e}G) & (\tilde{e}G)_s & (\tilde{e}G)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \text{ sobre } I \times \mathbb{R} \\ &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \text{ sobre } I \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nosso primeiro passo é mostrar que podemos eliminar o fator $\tilde{f}$ dessa equação. Para isso, basta mostrar que $\tilde{f}$ não se anula sobre nenhum aberto de $I \times \mathbb{R}$. De fato, suponha que $\tilde{f}$ se anule sobre um retângulo aberto $I_0 \times J_0 \subset I \times \mathbb{R}$. Recuperando essa equação em termos de C, S e substituindo $S^2 = 1 - C^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2}r^2(r^2+1)(a^2-b^2)C^2 + (-abr^2(r^2+1))CS \\ & -r^3(r^2+1)a\theta'C - r^3(r^2+1)b\theta'S \\ & +\frac{1}{2}(r^2+1)(-r^2(\theta')^2 - r^4(\theta')^2 - b^2r^2 + a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Essa equação nos diz que, para cada $s \in I_0$ fixado, a respectiva curva $t \in J_0 \mapsto (C, S)$ está contida na curva algébrica associada ao polinômio

$$\begin{aligned} P(X, Y) = & -\frac{1}{2}r^2(r^2+1)(a^2-b^2)X^2 + (-abr^2(r^2+1))XY \\ & -r^3(r^2+1)a\theta'X - r^3(r^2+1)b\theta'Y \\ & +\frac{1}{2}(r^2+1)(-r^2(\theta')^2 - r^4(\theta')^2 - b^2r^2 + a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Essa curva também está contida na curva algébrica associada a $X^2 + Y^2 - 1$. Como a curva $t \in J_0 \mapsto (C, S)$ possui infinitos pontos, conclui-se que as duas curvas algébricas se intersectam sobre um conjunto infinito. A teoria de Geometria Algébrica nos diz que P e $X^2 + Y^2 - 1$ possuem um fator em comum. Como $X^2 + Y^2 - 1$ é irredutível, este deve ser o fator. Contudo, como o grau em Y de P é menor ou igual a 1, devemos ter que P é o polinômio identicamente nulo. Segue então do primeiro coeficiente que $a^2 = b^2$. Do segundo, vem que $ab = 0$ e, conseqüentemente, $a = b = 0$. Por fim, do último coeficiente vem que $\theta' = 0$. Como $s \in I_0$ fixado é qualquer, isso nos diz que $a = b = \theta' \equiv 0$ sobre I_0 . Mas isso implica que

$$\begin{aligned} \phi_s \times_g \phi_t = & (b - Cr' + Sr\theta' + Sr^3\theta' + S^2br^2 + CSar^2 - Sr^2tr')E_1 \\ & + (Cr^2tr' - Sr' - Cr\theta' - Cr^3\theta' - C^2ar^2 - CSbr^2 - a)E_2 \\ & + (rr' - brC + arS)E_3 \\ = & 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 \text{ sobre } I_0. \end{aligned}$$

Isso contradiz nossa condição de tolerância a pontos de não imersão.

Portanto, os pontos de $I \times \mathbb{R}$ sobre os quais $\tilde{f}$ se anula formam um conjunto de interior vazio. Por continuidade, podemos inferir portanto que

$$0 \equiv \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \text{ sobre } I \times \mathbb{R}$$

Começamos analisando a possibilidade $(a, b) \equiv (0, 0)$.

Fazendo $a = b = a' = b' \equiv 0$ nas expressões obtidas anteriormente, os símbolos $E, \tilde{e}, \tilde{f}$ se reduzem a

$$\begin{aligned} E &= r^2 (r^2 + 1) (\theta')^2 \\ \tilde{e} &= -r^2 (r^2 + 1)^2 (\theta')^3 \\ \tilde{f} &= -\frac{1}{2} r^2 (r^2 + 1)^2 (\theta')^2 \end{aligned}$$

Em particular, nenhuma dessas funções depende de t . Portanto, a coluna $[E_t \ \tilde{e}_t \ \tilde{f}_t]^T$ é identicamente nula, donde a condição de Kühnel é prontamente satisfeita. Vamos mostrar, contudo, que a condição $(a, b) \equiv (0, 0)$ implica que a superfície regrada é do tipo vertical, contradizendo a hipótese de obliquidade. De fato, como $r' \equiv 0$, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= a := x' - r' \sigma - r \kappa \theta' = x' - r \kappa \theta', \\ 0 &= b := y' + r' \kappa - r \sigma \theta' = y' - r \sigma \theta'. \end{aligned}$$

Isso implica que ,

Lembrando que $\kappa = \cos \theta$, $\sigma = \sin \theta$, segue das igualdades acima que $x = r \sigma + c_1$ e $y = -r \kappa + c_2$, para algumas constantes de integração c_1 e c_2 . Isso nos diz que a parametrização ϕ tem a forma

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2}(S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + rS \\ c_2 - rC \\ z - \frac{r^2}{2}(S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de onde se conclui que superfície dada pela imagem de ϕ está contida no cilindro de equação $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$. Em particular, a imagem de ϕ é uma superfície vertical, contradizendo a hipótese de que a superfície é do tipo oblíquo.

Portanto, a curva (a, b) não pode ser identicamente nula em I .

Assim, deve existir um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ maximal com a propriedade $a^2 + b^2 > 0$.

Sobre I_1 , a curva (a, b) pode ser descrita por $(a, b) = R(\cos \eta, \sin \eta)$, para certas funções $R : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, com $R \neq 0$, e $\eta : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Por simplicidade, iremos denotar $\cos \eta = \alpha$ e $\sin \eta = \beta$. Nestes termos, nossas funções se escrevem como

$$\begin{aligned} E &= r^2 R^2 (C\alpha + S\beta)^2 + 2r (r^2 + 1) \theta' R (C\alpha + S\beta) \\ &\quad + r^2 (r^2 + 1) (\theta')^2 + R^2 \\ \tilde{e} &= -r^3 R^3 (C\alpha + S\beta)^3 - 3r^2 (r^2 + 1) \theta' R^2 (C\alpha + S\beta)^2 \\ &\quad - rR ((3r^2 + 1) (r^2 + 1) (\theta')^2 + R^2) (C\alpha + S\beta) \\ &\quad + r (r^2 + 1) (R(C\beta - S\alpha) \theta'' + (R'(S\alpha - C\beta) - R\eta' (C\alpha + S\beta)) \theta') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (r^2 + 1) (r^2 (r^2 + 1) (\theta')^3 + R^2 \eta') \\
\tilde{f} &= \frac{1}{2} (r^2 + 1) \left(-r^2 (r\theta' + R(C\alpha + S\beta))^2 + R^2 - r^2 (\theta')^2 \right)
\end{aligned}$$

Denote ainda $U := C\alpha + S\beta$ e $V := C\beta - S\alpha$. Podemos reescrever as funções usando U e V como

$$\begin{aligned}
E &= r^2 R^2 U^2 + 2r (r^2 + 1) \theta' R U + r^2 (r^2 + 1) (\theta')^2 + R^2 \\
\tilde{e} &= -r^3 R^3 U^3 - 3r^2 (r^2 + 1) \theta' R^2 U^2 \\
&\quad - rR ((3r^2 + 1) (r^2 + 1) (\theta')^2 + R^2 + \eta' (r^2 + 1) \theta') U \\
&\quad + r (r^2 + 1) (R\theta'' - \theta' R') V \\
&\quad - (r^2 + 1) (r^2 (r^2 + 1) (\theta')^3 + R^2 \eta') \\
\tilde{f} &= \frac{1}{2} (r^2 + 1) \left(-r^2 (r\theta' + RU)^2 + R^2 - r^2 (\theta')^2 \right)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
U^2 + V^2 &= (C\alpha + S\beta)^2 + (C\beta - S\alpha)^2 \\
&= (\alpha^2 + \beta^2) (C^2 + S^2) = 1.
\end{aligned}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}
U_s &= -S\theta'\alpha + C\theta'\beta + C(-\beta\eta') + S(\alpha\eta') \\
&= (\theta' - \eta') (C\beta - S\alpha) = (\theta' - \eta') V \\
U_t &= -S\alpha + C\beta = V \\
V_s &= -S\theta'\beta - C\theta'\alpha + C(\alpha\eta') - S(-\beta\eta') \\
&= -(\theta' - \eta') (C\alpha + S\beta) = -(\theta' - \eta') U \\
V_t &= -S\beta - C\alpha = -U
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, obtemos as seguintes expressões para as derivadas parciais

$$\begin{aligned}
E_s &= 2r^2 R R' U^2 + 2R^2 r^2 (\theta' - \eta') UV + 2r (r^2 + 1) (R\theta'' + \theta' R') U \\
&\quad + 2Rr\theta' (r^2 + 1) (\theta' - \eta') V + 2(RR' + r^2 (r^2 + 1) \theta' \theta'') \\
E_t &= 2rR (rRU + (r^2 + 1) \theta') V \\
\tilde{e}_s &= -3R^2 r^3 R' U^3 - 3R^3 r^3 (\theta' - \eta') U^2 V \\
&\quad - 3Rr^2 (r^2 + 1) (R\theta'' + 2\theta' R') U^2 - 6R^2 r^2 \theta' (r^2 + 1) (\theta' - \eta') UV \\
&\quad - r \left(\begin{aligned} & 3R^2 R' + 3R\theta' \theta'' + R\theta' \eta'' + 3r^2 (\theta')^2 R' \\ & + 3r^4 (\theta')^2 R' + 2\theta' \eta' R' + 2r^2 \theta' \eta' R' \\ & + 9Rr^2 \theta' \theta'' + 6Rr^4 \theta' \theta'' + Rr^2 \theta' \eta'' \end{aligned} \right) U \\
&\quad + r \left(\begin{aligned} & -R^3 \theta' + R^3 \eta' - 3Rr^4 (\theta')^3 \\ & + 3Rr^4 (\theta')^2 \eta' - 4Rr^2 (\theta')^3 + 3Rr^2 (\theta')^2 \eta' \\ & + Rr^2 \theta' (\eta')^2 + \theta''' Rr^2 - R(\theta')^3 \\ & + R\theta' (\eta')^2 + \theta''' R - R'' r^2 \theta' - R'' \theta' \end{aligned} \right) V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (r^2 + 1) \left(\eta'' R^2 + 2\eta' R' R + 3\theta'' r^4 (\theta')^2 + 3\theta'' r^2 (\theta')^2 \right) \\
\tilde{e}_t &= -3R^3 r^3 U^2 V - 6R^2 r^2 (r^2 + 1) \theta' UV - r(r^2 + 1) (R\theta'' - \theta' R') U \\
& - rR \left(R^2 + 3r^4 (\theta')^2 + 4r^2 (\theta')^2 + \eta' r^2 \theta' + (\theta')^2 + \eta' \theta' \right) V \\
\tilde{f}_s &= -Rr^2 R' (r^2 + 1) U^2 - R^2 r^2 (r^2 + 1) (\theta' - \eta') UV \\
& - r^3 (r^2 + 1) (R\theta'' + \theta' R') U - Rr^3 \theta' (r^2 + 1) (\theta' - \eta') V \\
& - (r^2 + 1) (\theta' \theta'' r^4 + \theta' \theta'' r^2 - RR') \\
\tilde{f}_t &= -RVr^2 (r\theta' + RU) (r^2 + 1)
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na equação da condição de Kühnel–Dillen, fazendo $V^2 = 1 - U^2$ e coletando em U, V , obtemos a seguinte equação sobre $I_1 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\
&= 2(\tilde{e}_s \tilde{f}_t - \tilde{e}_t \tilde{f}_s) E + 3(E_t \tilde{f}_s - E_s \tilde{f}_t) \tilde{e} + 2(E_s \tilde{e}_t - E_t \tilde{e}_s) \tilde{f} \\
&= 6R^4 r^4 \theta'' (r^2 + 1) U^3 V \\
& + 2Rr^3 (r^2 + 1)^2 (\theta''' R^2 - \theta'' RR' - \theta' R'' R + \theta' (R')^2) U^3 \\
& + 2R^3 r^3 (r^2 + 1) \left(\begin{array}{l} 5RR' + 2\theta' \theta'' + \theta' \eta'' + \theta'' \eta' \\ + 2r^2 \theta' \theta'' + r^2 \theta' \eta'' + r^2 \theta'' \eta' \end{array} \right) U^2 V \\
& - 2r^4 (r^2 + 1)^2 \left(\begin{array}{l} -\theta''' R^2 \theta' + R^2 (\theta'')^2 \\ + R'' R (\theta')^2 - (\theta')^2 (R')^2 \end{array} \right) U^2 \\
& + 2R^2 r^2 (r^2 + 1) \left(\begin{array}{l} R^2 \eta'' - R^2 r^2 \theta'' + R^2 r^2 \eta'' \\ - 2r^2 (\theta')^2 \theta'' - 2r^4 (\theta')^2 \theta'' \\ + r^2 (\theta')^2 \eta'' + r^4 (\theta')^2 \eta'' \\ + 6R\theta' R' + 2R\eta' R' \\ + 8Rr^2 \theta' R' + 2Rr^2 \eta' R' \end{array} \right) UV \\
& - 2r (r^2 + 1)^2 \left(\begin{array}{l} \theta''' R^3 r^2 - R'' R^2 r^2 \theta' \\ - R^2 \theta'' R' + Rr^4 \theta' (\theta'')^2 \\ + Rr^2 \theta' (\theta'')^2 + R\theta' (R')^2 \\ - r^4 (\theta')^2 \theta'' R' - r^2 (\theta')^2 \theta'' R' \end{array} \right) U \\
& + 2Rr (r^2 + 1) \left(\begin{array}{l} R^3 R' - r^2 (\theta')^3 \theta'' - 2r^4 (\theta')^3 \theta'' \\ - r^6 (\theta')^3 \theta'' + R(\theta')^2 R' \\ - R^2 r^2 \theta' \theta'' - R^2 r^4 \theta' \theta'' \\ + R^2 r^2 \theta' \eta'' + R^2 r^4 \theta' \eta'' \\ + 4Rr^2 (\theta')^2 R' + 3Rr^4 (\theta')^2 R' \\ - r^2 (\theta')^2 \theta'' \eta' - 2r^4 (\theta')^2 \theta'' \eta' \\ - r^6 (\theta')^2 \theta'' \eta' + R\theta' \eta' R' \\ + 3Rr^2 \theta' \eta' R' + 2Rr^4 \theta' \eta' R' \end{array} \right) V \\
& - 2Rr^4 \theta' (r^2 + 1)^2 (R\theta''' - \theta' R'')
\end{aligned}$$

Fixando $s \in I_1$ e olhando para a curva $t \mapsto (U, V)$ para tal s fixado, vemos que essa equação nos diz que o traço de tal curva está contido numa curva algébrica de polinômio dado pelo lado direito

da equação, fazendo $(U, V) = (X, Y)$. Acontece que essa curva também mora na curva algébrica associada ao polinômio $X^2 + Y^2 - 1$. Note então que a curva $t \mapsto (U, V)$ não é constante, pois

$$\begin{aligned}(U, V) &= (C\alpha + S\beta, C\beta - S\alpha) \\ &= (\cos(t + \theta - \eta), -\sin(t + \theta - \eta)).\end{aligned}$$

Isso nos diz que as curvas algébricas que mencionamos acima possuem infinitos pontos em comum. Segue então da teoria de geometria algébrica que os polinômios associados devem possuir um fator em comum. Acontece que o grau de V na equação é menor ou igual a 1. Portanto, o fator comum só pode fazer sentido se o polinômio associado à equação é identicamente nulo. Como $s \in I_1$ é qualquer, concluímos que os coeficientes de U e V na equação são identicamente nulos sobre I_1 .

O coeficiente de U^3V nos diz que $6R^4r^4\theta''(r^2 + 1) \equiv 0$ sobre I_1 . Como $R \neq 0$ e $r \neq 0$, segue que $\theta'' \equiv 0$ sobre I_1 .

Fazendo então $\theta''' = \theta'' \equiv 0$ a equação assume a forma

$$\begin{aligned}0 &= -2Rr^3\theta'(RR'' - (R')^2)(r^2 + 1)^2U^3 \\ &\quad + 2R^3r^3(r^2 + 1)(5RR' + \theta'\eta''(r^2 + 1))U^2V \\ &\quad - 2r^4(\theta')^2(RR'' - (R')^2)(r^2 + 1)^2U^2 \\ &\quad + 2R^2r^2(r^2 + 1)\left(\begin{array}{c} R^2\eta'' + R^2r^2\eta'' \\ + r^2(\theta')^2\eta'' + r^4(\theta')^2\eta'' \\ + 6R\theta'R' + 2R\eta'R' \\ + 8Rr^2\theta'R' + 2Rr^2\eta'R' \end{array}\right)UV \\ &\quad + 2rR\theta'(-(R')^2 + Rr^2R'')(r^2 + 1)^2U \\ &\quad + 2Rr(r^2 + 1)\left(\begin{array}{c} R^3R' + R(\theta')^2R' \\ + R^2r^2\theta'\eta'' + R^2r^4\theta'\eta'' \\ + 4Rr^2(\theta')^2R' + 3Rr^4(\theta')^2R' \\ + R\theta'\eta'R' + 3Rr^2\theta'\eta'R' + 2Rr^4\theta'\eta'R' \end{array}\right)V \\ &\quad + 2Rr^4(\theta')^2R''(r^2 + 1)^2\end{aligned}$$

Sabemos agora que θ' é constante sobre I_1 . Analisemos os casos em que $\theta' = 0$ e $\theta' \neq 0$.

Se $\theta' = 0$, então o coeficiente de U^2V se reduz a $10R^4r^3R'(r^2 + 1) \equiv 0$ sobre I_1 , donde $R' \equiv 0$ sobre I_1 .

Por outro lado, se $\theta' \neq 0$, o termo independente nos diz que, sobre I_1 , $2Rr^4(\theta')^2R''(r^2 + 1)^2 \equiv 0$, o que implica $R'' \equiv 0$. Do coeficiente de U^3 obtemos que

$$-2Rr^3\theta'(RR'' - (R')^2)(r^2 + 1)^2 = 2Rr^3\theta'(R')^2(r^2 + 1)^2 \equiv 0,$$

de onde se conclui que $R' \equiv 0$ sobre I_1 .

Portanto, em qualquer dos casos concluímos que $R' \equiv 0$, i.e. R é constante sobre I_1 .

Isso nos diz que $a^2 + b^2$ é constante igual a $R^2 > 0$ sobre I_1 . Como I_1 é um intervalo maximal com a propriedade de que $a^2 + b^2 > 0$, conclui-se que $I_1 = I$.

Fazendo $R'' = R' \equiv 0$ na equação, ela se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= 2R^3 r^3 \theta' \eta'' (r^2 + 1)^2 U^2 V \\ &\quad + 2R^2 r^2 (r^2 + 1)^2 \eta'' (r^2 (\theta')^2 + R^2) UV \\ &\quad + 2R^3 r^3 (r^2 + 1)^2 \theta' \eta'' V \end{aligned}$$

Segue então do coeficiente de UV que $\eta'' \equiv 0$ sobre I . Note que isso zera também os demais coeficientes.

Portanto, a conclusão é que $R \neq 0$ é constante e θ, η possuem a forma

$$\theta(s) = c_1 s + c_2, \quad \eta(s) = c_3 s + c_4,$$

para certas constantes de integração $c_i \in \mathbb{R}$.

Mostremos agora que, sob tais condições, ϕ fornece de fato uma superfície regrada satisfazendo a condição de tolerância. Temos

$$\begin{aligned} \phi_s \times_g \phi_t &= (b - Cr' + Sr\theta' + Sr^3\theta' + S^2br^2 + CSar^2 - Sr^2tr') E_1 \\ &\quad + (Cr^2tr' - Sr' - Cr\theta' - Cr^3\theta' - C^2ar^2 - CSbr^2 - a) E_2 \\ &\quad + (rr' - brC + arS) E_3 \\ &= (b + Src_1 + Sr^3c_1 + S^2br^2 + CSar^2) E_1 \\ &\quad + (-a - Crc_1 - Cr^3c_1 - C^2ar^2 - CSbr^2) E_2 \\ &\quad - r(Cb - Sa) E_3 \end{aligned}$$

Note que coordenada E_3 é dada por $-r(Cb - Sa) = Rr \sin(t + \theta - \eta)$. Portanto, $\phi_s \times_g \phi_t$ só tem a possibilidade de se anular se $t = \eta(s) - \theta(s) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Isso nos garante que ϕ está de acordo com a nossa condição de tolerância. Portanto, ϕ define de fato uma superfície regrada em Nil_3 .

Em toda a demonstração, utilizamos o fato de que a hipótese de Weingarten implica a condição de Kühnel–Dillen. Portanto, é necessário que mostremos que a superfície é, de fato, de Weingarten. Temos

$$\begin{aligned} E &= r^2 R^2 U^2 + 2r(r^2 + 1) c_1 R U + r^2 (r^2 + 1) c_1^2 + R^2 \\ \tilde{e} &= -r^3 R^3 U^3 - 3r^2 (r^2 + 1) c_1 R^2 U^2 \\ &\quad - rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1) c_1^2 + R^2 + c_1 c_3 (r^2 + 1)) U \\ &\quad - (r^2 + 1)(r^2 (r^2 + 1) c_1^3 + R^2 c_3) \\ \tilde{f} &= \frac{1}{2} (r^2 + 1) (R^2 - r^2 (rc_1 + RU)^2 - r^2 c_1^2) \end{aligned}$$

Lembremos que

$$\begin{aligned} K &= -W^4 \tilde{f}^2 = \frac{-\tilde{f}^2}{(EG)^2}, \\ H &= \frac{W^3}{2} \tilde{e} G = \frac{\tilde{e} G}{2(EG)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Vem daí que

$$0 = 4(EG)^2 K + 4\tilde{f}^2,$$

$$0 = 4E^3 GH^2 - \tilde{e}^2.$$

Substituindo as expressões de $E, \tilde{e}, \tilde{f}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= P(K, U) := 4 \left(\frac{r^2 R^2 U^2 + 2r(r^2 + 1)c_1 RU}{+r^2(r^2 + 1)c_1^2 + R^2} \right)^2 K \\ &\quad + \left(R^2 - r^2(rc_1 + RU)^2 - r^2 c_1^2 \right)^2 \\ 0 &= Q(H, U) := 4 \left(\frac{r^2 R^2 U^2 + 2r(r^2 + 1)c_1 RU}{+r^2(r^2 + 1)c_1^2 + R^2} \right)^3 (r^2 + 1) H^2 \\ &\quad - \left(\frac{-r^3 R^3 U^3 - 3r^2(r^2 + 1)c_1 R^2 U^2}{-rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1)c_1^2 + R^2 + c_1 c_3(r^2 + 1))U} \right. \\ &\quad \left. - (r^2 + 1)(r^2(r^2 + 1)c_1^3 + R^2 c_3) \right)^2 \end{aligned}$$

Podemos eliminar a variável U , obtendo uma relação polinomial entre H e K através da técnica da eliminante (veja Apêndice A.2). Mais precisamente, temos $\Psi(H, K) \equiv 0$, sendo

$$\Psi(H, K) := \text{Elm}_U(P, Q).$$

Optamos por não explicitar a expressão de Ψ , pois o cálculo possui um custo computacional elevado, uma vez que envolve o determinante de uma matriz de dimensão 10×10 (a dimensão da matriz envolvida no cálculo da eliminante possui dimensão dada pela soma dos graus em U dos polinômios, no caso, 4 e 6 respectivamente). Contudo, podemos e precisamos garantir apenas que Ψ não é o polinômio identicamente nulo.

Para mostrar este fato, começamos observando que P é irredutível em K, U . Para isso, utilizaremos o critério do polítopo de Newton (Apêndice A.3). Coletando P em K, U , temos

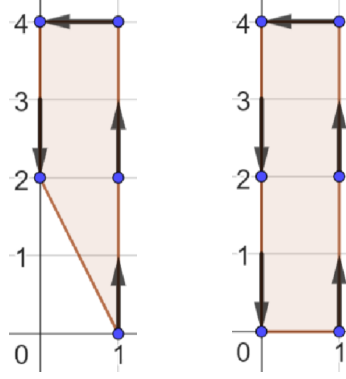
$$\begin{aligned} P(K, U) &= (4R^4 r^4) KU^4 + 16R^3 r^3 c_1 (r^2 + 1) KU^3 \\ &\quad + 8R^2 r^2 (5r^2 c_1^2 + 3r^4 c_1^2 + 2c_1^2 + R^2) KU^2 \\ &\quad + 16Rrc_1 (R^2 + r^2 c_1^2 (r^2 + 1)) (r^2 + 1) KU \\ &\quad + 4(r^2 c_1^2 + r^4 c_1^2 + R^2)^2 K + (R^4 r^4) U^4 \\ &\quad + 4R^3 r^5 c_1 U^3 - 2R^2 r^2 (-r^2 c_1^2 - 3r^4 c_1^2 + R^2) U^2 \\ &\quad + 4Rr^3 c_1 (r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2) U + (r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2)^2 \end{aligned}$$

Marcamos então sobre o reticulado $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ os pontos (i, j) para os quais o coeficiente de $K^i U^j$ é não nulo. Como $Rr \neq 0$, sabemos com certeza que os pontos $(1, 4)$, $(1, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 4)$ fazem parte do polítopo de Newton de P . Analisamos agora os dois casos: $r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2 = 0$ e $\neq 0$.

Se $r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2 = 0$, então como $R \neq 0$ devemos ter também $c_1 \neq 0$. Temos então

$$-2R^2 r^2 (-r^2 c_1^2 - 3r^4 c_1^2 + R^2) = 4R^2 r^6 c_1^2 \neq 0$$

e isso nos diz que $(0,2)$ pertence ao polítopo. Como o polítopo é dado pelo fecho convexo dos pontos para os quais os coeficientes são não nulos, estes pontos que destacamos já são suficientes para determiná-lo. O polítopo é dado então pela figura abaixo à esquerda



A sequência de vetores associada ao bordo do polítopo possui quantidade par. Tomando uma sequência alternada (como a destacada em preto na figura), vemos que sua soma não é zero. Isso nos diz que o polítopo não é decomponível. Segue do critério do polítopo de Newton que P é irredutível neste caso, i.e. quando $r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2 = 0$.

Por outro lado, se $r^4 c_1^2 - R^2 + r^2 c_1^2 \neq 0$, então $(0,0)$ deve pertencer ao polítopo. Isso o determina neste caso e ele será dado pela figura acima à direita. Novamente a sequência de vetores possui uma quantidade par, cuja soma de uma de suas sequências alternadas não é nula. Portanto, P também é irredutível neste caso. Concluimos que P é irredutível.

Como Q é não nulo e não possui a variável K , conclui-se que P e Q não possuem fator comum de grau ≥ 1 . Segue agora da Proposição do Apêndice A.2 que a eliminante $\Psi(H, K) := \text{Elm}_U(P, Q)$ não é o polinômio identicamente nulo em H, K . Portanto, Ψ fornece de fato uma relação de Weingarten, polinomial e não identicamente nula para nossa superfície. Com isso, provamos que a superfície é de Weingarten do tipo polinomial.

Dedicamos o restante da demonstração a descrever de forma mais precisa a classe de superfícies que encontramos. Ao fazer isso, estabeleceremos “formas canônicas” para elas, i.e. iremos classificar cada caso a menos de isometrias e reparametrizações.

Recuperando a definição de a, b , temos

$$\begin{aligned} R\alpha &= a = x' - r'\sigma - r\kappa\theta' = x' - rc_1\kappa, \\ R\beta &= b = y' + r'\kappa - r\sigma\theta' = y' - rc_1\sigma. \end{aligned}$$

Começamos analisando o caso $c_1 = c_3 = 0$. Neste caso, teremos $\kappa, \sigma, \alpha, \beta$ constantes e x e y terão a forma

$$\begin{aligned} x(s) &= R\alpha s + c_5, \\ y(s) &= R\beta s + c_6, \end{aligned}$$

sendo $c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ constantes de integração. Da condição de ortogonalidade vem que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} (xy' - yx') - r(x'\kappa + y'\sigma) \\ &= \frac{1}{2} ((R\alpha s + c_5)(R\beta) - (R\beta s + c_6)(R\alpha)) \\ &\quad - r((R\alpha)\kappa + (R\beta)\sigma) \\ &= -\frac{1}{2} R(\alpha c_6 - \beta c_5 + 2r\alpha\kappa + 2r\sigma\beta) \end{aligned}$$

Portanto, z tem a forma

$$z(s) = -\frac{1}{2} R(\alpha c_6 - \beta c_5 + 2r\alpha\kappa + 2r\sigma\beta) s + c_7,$$

sendo $c_7 \in \mathbb{R}$ nova constante de integração.

Lembremos que ϕ é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2}(S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2}(x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix}.$$

Como κ, σ são constantes, podemos aplicar sobre ϕ a isometria dada pela translação à esquerda por $\psi_1 = (r\sigma, -r\kappa, 0)$. Obtemos,

$$\begin{aligned} \psi_1 * \phi &= \begin{bmatrix} x + rS \\ y - rC \\ z + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + rx\kappa + ry\sigma - \frac{1}{2}Crx - \frac{1}{2}Sry \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R\alpha s + c_5 + rS \\ R\beta s + c_6 - rC \\ \left(-\frac{1}{2}R(\alpha c_6 - \beta c_5 + 2r\alpha\kappa + 2r\sigma\beta)s + c_7 \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + r(R\alpha s + c_5)\kappa + r(R\beta s + c_6)\sigma \right. \\ \left. - \frac{1}{2}Cr(R\alpha s + c_5) - \frac{1}{2}Sr(R\beta s + c_6) \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R\alpha s + c_5 + rS \\ R\beta s + c_6 - rC \\ \left(-\frac{1}{2}R(\alpha c_6 - \beta c_5 + Cr\alpha + Sr\beta)s \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t \right. \\ \left. + c_7 - \frac{1}{2}Crc_5 - \frac{1}{2}Src_6 + r\kappa c_5 + r\sigma c_6 \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transladando à esquerda por $\psi_2 = (-c_5, -c_6, -c_7 - r\kappa c_5 - r\sigma c_6)$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_2 * \psi_1 * \phi &= \begin{bmatrix} R\alpha s + rS \\ R\beta s - rC \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{1}{2}Rrs(C\alpha + S\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Rs \cos c_4 + r \sin(t + c_2) \\ Rs \sin c_4 - r \cos(t + c_2) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{1}{2}Rrs \cos(t + c_2 - c_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando agora a isometria ψ_4 dada pela rotação de c_4 em torno do eixo- z , obtemos

$$\begin{aligned}\psi_4(\psi_2 * \psi_1 * \phi) &= \begin{bmatrix} \cos c_4 & \sin c_4 & 0 \\ -\sin c_4 & \cos c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} Rs \cos c_4 + r \sin(t + c_2) \\ Rs \sin c_4 - r \cos(t + c_2) \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)t - \frac{1}{2}Rrs \cos(t + c_2 - c_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Rs + r \sin(t + c_2 - c_4) \\ -r \cos(t + c_2 - c_4) \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)t - \frac{1}{2}Rrs \cos(t + c_2 - c_4) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Transladando à esquerda por $\psi_5 = (0, 0, (\frac{1}{2}r^2 + 1)(c_2 - c_4))$,

$$\psi_5 * \psi_4(\psi_2 * \psi_1 * \phi) = \begin{bmatrix} Rs + r \sin(t + c_2 - c_4) \\ -r \cos(t + c_2 - c_4) \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)(t + c_2 - c_4) - \frac{1}{2}Rrs \cos(t + c_2 - c_4) \end{bmatrix}$$

Note que uma reparametrização em s não fere a condição de ortogonalidade, uma vez que corresponde apenas a uma reparametrização da curva central. Assim, considere a reparametrização

$$\phi_1(s, t) := \psi_5 * \psi_4 \left(\psi_2 * \psi_1 * \phi \left(\frac{s}{R}, t \right) \right).$$

Temos que ϕ_1 tem a forma

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} s + r \sin(t + c_2 - c_4) \\ -r \cos(t + c_2 - c_4) \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)(t + c_2 - c_4) - \frac{1}{2}rs \cos(t + c_2 - c_4) \end{bmatrix}$$

Isso nos mostra que podemos supor $R = 1$.

Considere agora a reparametrização $\phi_2(s, t) = \phi_1(s, t + \frac{\pi}{2} - c_2 + c_4)$.

Destacamos que, após este passo, a nossa representação da superfície não necessariamente satisfaz a condição de ortogonalidade. Obtemos,

$$\phi_2(s, t) = \begin{bmatrix} s + r \cos t \\ r \sin t \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)(t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}rs \sin t \end{bmatrix}$$

Por fim, transladando à esquerda por $\psi_6 = (0, 0, -(\frac{1}{2}r^2 + 1)\frac{\pi}{2})$, estabelecemos uma forma canônica para a superfície neste caso:

$$\tilde{\phi}(s, t) = \begin{bmatrix} s + r \cos t \\ r \sin t \\ (\frac{1}{2}r^2 + 1)t + \frac{1}{2}rs \sin t \end{bmatrix}$$

A figura abaixo exhibe a imagem de $\tilde{\phi}$ para alguns valores de r :

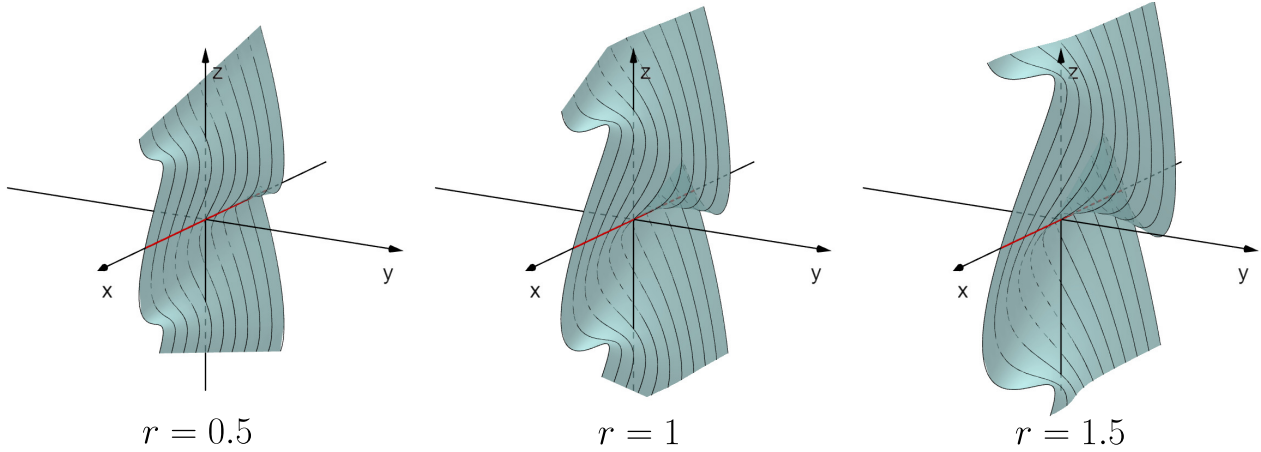


Figura 2.6: <https://www.geogebra.org/m/fjktbjjw>

Fazendo $c_1 = c_3 = 0$ e $R = 1$ nos polinômios P e Q , obtemos

$$\begin{aligned} P(K, U) &= 4(r^2 U^2 + 1)^2 K + (1 - r^2 U^2)^2 \\ Q(H, U) &= (U^2 r^2 + 1)^2 (4(r^2 U^2 + 1)(r^2 + 1)H^2 - U^2 r^2) \end{aligned}$$

Podemos eliminar o fator $(U^2 r^2 + 1)^2 \neq 0$ de Q e denotar esse polinômio por $\tilde{Q}$. Neste caso, a eliminante é suficientemente simples para que possamos fornecê-la explicitamente. Além disso, note que podemos tomar a eliminante em U^2 ao invés de U . Teremos

$$\begin{aligned} \text{Elm}_{U^2}(P, \tilde{Q}) &= \det \begin{bmatrix} 4Kr^4 + r^4 & 4H^2 r^2 (r^2 + 1) - r^2 & 0 \\ 8Kr^2 - 2r^2 & 4H^2 (r^2 + 1) & 4H^2 r^2 (r^2 + 1) - r^2 \\ 4K + 1 & 0 & 4H^2 (r^2 + 1) \end{bmatrix} \\ &= r^4 (64(r^2 + 1)^2 H^4 - 16(r^2 + 1)H^2 + 4K + 1) \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a superfície é Weingarten polinomial satisfazendo $\Psi(H, K) = 0$, sendo $\Psi(X, Y) = 64(r^2 + 1)^2 X^4 - 16(r^2 + 1)X^2 + 4Y + 1$.

Analisemos agora o caso em que $c_1 = 0$ e $c_3 \neq 0$. Neste caso, teremos

$$\begin{aligned} x' &= R\alpha \implies x(s) = \frac{R}{c_3}\beta + c_5 \\ y' &= R\beta \implies y(s) = -\frac{R}{c_3}\alpha + c_6 \end{aligned}$$

Da condição de ortogonalidade vem que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2}(xy' - yx') - r(x'\kappa + y'\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R}{c_3}\beta + c_5\right)R\beta - \left(-\frac{R}{c_3}\alpha + c_6\right)R\alpha\right) \\ &\quad - r(R\alpha\kappa + R\beta\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 + \beta^2}{c_3}R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} \beta c_5 - \frac{1}{2} \alpha c_6 - r(\alpha \kappa + \sigma \beta) \right) R \\
& = \frac{1}{2c_3} R^2 + \left(\frac{1}{2} \beta c_5 - \frac{1}{2} \alpha c_6 - r(\alpha \kappa + \sigma \beta) \right) R
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
z(s) &= \left(-\frac{1}{2c_3} \alpha c_5 - \frac{1}{2c_3} \beta c_6 - \frac{r}{c_3} (\beta \kappa - \sigma \alpha) \right) R \\
&+ \frac{1}{2c_3} R^2 s + c_7
\end{aligned}$$

Como no caso anterior, κ, σ são constantes. Aplicando a translação à esquerda por $\psi_1 = (r\sigma, -r\kappa, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_1 * \phi &= \begin{bmatrix} x + rS \\ y - rC \\ z + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + rx\kappa + ry\sigma - \frac{1}{2}Crx - \frac{1}{2}Sry \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + c_5 + rS \\ -\frac{R}{c_3}\alpha + c_6 - rC \\ \left(-\frac{1}{2c_3}\alpha c_5 - \frac{1}{2c_3}\beta c_6 - \frac{r}{c_3}(\beta \kappa - \sigma \alpha) \right) R \\ + \frac{1}{2c_3}R^2 s + c_7 + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t \\ + r\left(\frac{R}{c_3}\beta + c_5\right)\kappa + r\left(-\frac{R}{c_3}\alpha + c_6\right)\sigma \\ - \frac{1}{2}Cr\left(\frac{R}{c_3}\beta + c_5\right) - \frac{1}{2}Sr\left(-\frac{R}{c_3}\alpha + c_6\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + c_5 + rS \\ -\frac{R}{c_3}\alpha + c_6 - rC \\ \left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{c_3}s + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{1}{2}R\frac{r}{c_3}(C\beta - S\alpha) \right) \\ - \frac{1}{2}\frac{R}{c_3}(\alpha c_5 + \beta c_6) - \frac{1}{2}r(Cc_5 + Sc_6) \\ + c_7 + r\kappa c_5 + r\sigma c_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aplicando a translação à esquerda por $\psi_2 = (-c_5, -c_6, -c_7 - r\kappa c_5 - r\sigma c_6)$, obtemos

$$\psi_2 * \psi_1 * \phi = \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + rS \\ -\frac{R}{c_3}\alpha - rC \\ \frac{1}{2}\frac{R^2}{c_3}s + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{1}{2}R\frac{r}{c_3}(C\beta - S\alpha) \end{bmatrix}$$

Transladando à esquerda por $\psi_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\frac{R^2}{c_3}c_4 + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)c_2\right)$, obtemos

$$\psi_3 * \psi_2 * \psi_1 * \phi = \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \sin(c_3 s + c_4) + r \sin(t + c_2) \\ -\frac{R}{c_3} \cos(c_3 s + c_4) - r \cos(t + c_2) \\ \left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{c_3}(c_3 s + c_4) + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)(t + c_2) \right) \\ + \frac{1}{2}R\frac{r}{c_3} \sin(t + c_2 - (c_3 s + c_4)) \end{bmatrix}$$

Note que uma reparametrização em s não altera o traço da curva central e, portanto, não fere a condição de ortogonalidade. Assim, considere a reparametrização dada por $\phi_1(s, t) = \psi_3 * \psi_2 * \psi_1 *$

$\phi\left(\frac{1}{c_3}(s - c_4), t\right)$. Teremos

$$\phi_1(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \operatorname{sen} s + r \operatorname{sen}(t + c_2) \\ -\frac{R}{c_3} \cos s - r \cos(t + c_2) \\ \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{c_3^2} s + \left(\frac{1}{2} r^2 + 1 \right) (t + c_2) \right) \\ + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} \operatorname{sen}(t + c_2 - s) \end{bmatrix}$$

Definindo $\tilde{R} := \frac{R}{c_3} \neq 0$, podemos tomar, sem perda de generalidade, $c_3 = 1, c_4 = 0$.

Por fim, reparametrizando em t (e agora sim abrindo mão da condição de ortogonalidade) por $\tilde{\phi}(s, t) = \phi_1(s, t - c_2)$, estabelecemos uma forma canônica para a superfície neste caso:

$$\tilde{\phi}(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R} \operatorname{sen} s + r \operatorname{sen} t \\ -\tilde{R} \cos s - r \cos t \\ \frac{1}{2} \tilde{R}^2 s + \left(\frac{1}{2} r^2 + 1 \right) t + \frac{1}{2} \tilde{R} r \operatorname{sen}(t - s) \end{bmatrix}$$

A figura a seguir exibe alguns exemplos extraídos dessa família de superfícies.

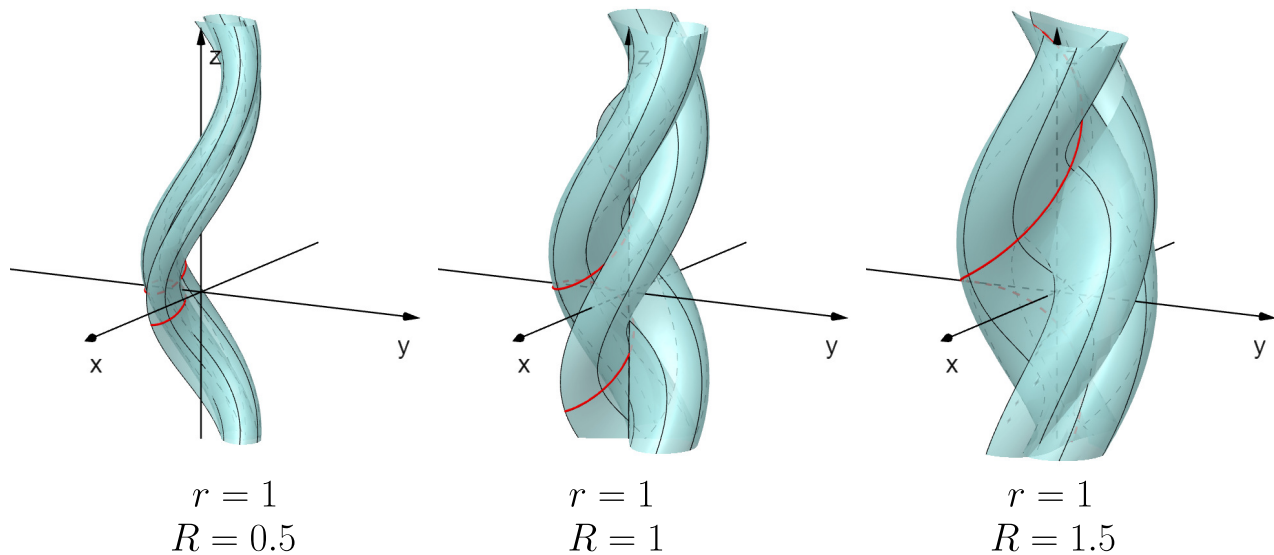


Figura 2.7: <https://www.geogebra.org/m/yrhwxpta>

Analisemos agora o caso $c_1 \neq 0 = c_3$. Neste caso, α, β são constantes. Temos

$$x' = R\alpha + rc_1\kappa \implies x(s) = R\alpha s + r\sigma + c_5$$

$$y' = R\beta + rc_1\sigma \implies y(s) = R\beta s - r\kappa + c_6$$

Da condição de ortogonalidade vem que

$$\begin{aligned}
 z' &= \frac{1}{2} (xy' - yx') - r (x' \kappa + y' \sigma) \\
 &= \frac{1}{2} ((R\alpha s + r\sigma + c_5)(R\beta + rc_1\sigma) - (R\beta s - r\kappa + c_6)(R\alpha + rc_1\kappa)) \\
 &\quad - r((R\alpha + rc_1\kappa)\kappa + (R\beta + rc_1\sigma)\sigma) \\
 &= -\frac{1}{2}c_1r^2 - \frac{1}{2}R(\alpha c_6 - \beta c_5) - \frac{1}{2}Rr\beta c_1s\kappa + \frac{1}{2}Rr\alpha c_1s\sigma \\
 &\quad - \frac{1}{2}r(R\alpha + c_1c_6)\kappa - \frac{1}{2}r(R\beta - c_1c_5)\sigma
 \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int s\kappa ds &= \int s \cos(c_1s + c_2) ds = \frac{1}{c_1^2} (\cos(c_1s + c_2) + sc_1 \sin(c_1s + c_2)) \\
 &= \frac{1}{c_1^2} (\kappa + sc_1\sigma) \\
 \int s\sigma ds &= \int s \sin(c_1s + c_2) ds = \frac{1}{c_1^2} (\sin(c_1s + c_2) - sc_1 \cos(c_1s + c_2)) \\
 &= \frac{1}{c_1^2} (\sigma - sc_1\kappa)
 \end{aligned}$$

Assim, podemos integrar a condição de ortogonalidade, obtendo

$$\begin{aligned}
 z(s) &= -\frac{1}{2} (r^2c_1 + R\alpha c_6 - R\beta c_5) s \\
 &\quad - \frac{1}{2} Rr\beta c_1 \left(\frac{1}{c_1^2} (\kappa + sc_1\sigma) \right) + \frac{1}{2} Rr\alpha c_1 \left(\frac{1}{c_1^2} (\sigma - sc_1\kappa) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} r(R\alpha + c_1c_6) \frac{1}{c_1} \sigma - \frac{1}{2} r(R\beta - c_1c_5) \frac{1}{c_1} (-\kappa) + c_7 \\
 &= -\frac{1}{2} Rrs(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \frac{1}{2} (r^2c_1 + R\alpha c_6 - R\beta c_5) s \\
 &\quad - \frac{1}{2} r(\kappa c_5 + \sigma c_6) + c_7
 \end{aligned}$$

Assim, nossa parametrização é dada por

$$\begin{aligned}
 \phi &= \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2} (S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2} (x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R\alpha s + r\sigma + c_5 + r(S - \sigma) \\ R\beta s - r\kappa + c_6 - r(C - \kappa) \\ \left(-\frac{1}{2} Rrs(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \frac{1}{2} (r^2c_1 + R\alpha c_6 - R\beta c_5) s \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} r(\kappa c_5 + \sigma c_6) + c_7 \right. \\ \quad \left. - \frac{r^2}{2} (S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t \right. \\ \quad \left. - \frac{r}{2} \begin{pmatrix} (R\alpha s + r\sigma + c_5)(C - \kappa) \\ + (R\beta s - r\kappa + c_6)(S - \sigma) \end{pmatrix} \right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} R\alpha s + rS + c_5 \\ R\beta s - rC + c_6 \\ \left(-\frac{1}{2}Rrs(C\alpha + S\beta) - \frac{1}{2}(r^2c_1 + R\alpha c_6 - R\beta c_5)s \right) \\ + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r(c_5C + c_6S) + c_7 \end{bmatrix}$$

Fazendo uma translação à esquerda por $\psi_1 = (-c_5, -c_6, -c_7)$

$$\begin{aligned} \psi_1 * \phi &= \begin{bmatrix} R\alpha s + rS \\ R\beta s - rC \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2c_1s - \frac{1}{2}Rrs(C\alpha + S\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R(\cos c_4)s + r\sin(t + \theta) \\ R(\sin c_4)s - r\cos(t + \theta) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2c_1s - \frac{1}{2}Rrs\cos(t + \theta - c_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo ψ_2 a isometria dada pela rotação de c_4 em torno do eixo- z , obtemos

$$\begin{aligned} \psi_2(\psi_1 * \phi) &= \begin{bmatrix} \cos c_4 & \sin c_4 & 0 \\ -\sin c_4 & \cos c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} R(\cos c_4)s + r\sin(t + \theta) \\ R(\sin c_4)s - r\cos(t + \theta) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2c_1s - \frac{1}{2}Rrs\cos(t + \theta - c_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Rs + r\sin(t + \theta - c_4) \\ -r\cos(t + \theta - c_4) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2c_1s - \frac{1}{2}Rrs\cos(t + \theta - c_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando a reparametrização em s (que não fere a condição de ortogonalidade) dada por $\phi_1(s, t) = \psi_2\left(\psi_1 * \phi\left(\frac{1}{c_1}s, t\right)\right)$ e lembrando que $\theta(s) = c_1s + c_2$, obtemos

$$\phi_1(s, t) = \begin{bmatrix} \frac{R}{c_1}s + r\sin(t + s + c_2 - c_4) \\ -r\cos(t + s + c_2 - c_4) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2s - \frac{1}{2}\frac{R}{c_1}rs\cos(t + s + c_2 - c_4) \end{bmatrix}$$

Fazendo $\tilde{R} := \frac{R}{c_1} \neq 0$, isso mostra que podemos supor $c_1 = 1$. Por fim, reparametrizando em t (e agora sim abrindo mão da condição de ortogonalidade) por $\tilde{\phi}_2(s, t) := \phi_1\left(s, t + \frac{\pi}{2} - c_2 + c_4\right)$ seguido da translação à esquerda por $(0, 0, -(\frac{1}{2}r^2 + 1)\frac{\pi}{2})$, estabelecemos a forma canônica para este caso:

$$\tilde{\phi}(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R}s + r\cos(t + s) \\ r\sin(t + s) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1 \right)t - \frac{1}{2}r^2s + \frac{1}{2}\tilde{R}rs\sin(t + s) \end{bmatrix}$$

Antes de seguir para o próximo caso, fazemos um comentário a respeito dessa família.

Considere a parametrização $\tilde{\phi}$ para o caso em que $\tilde{R} = r = 1$. Neste caso, o vetor tangente na direção de s é dado por

$$\tilde{\phi}_s = \begin{bmatrix} 1 - \sin(t + s) \\ \cos(t + s) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(t + s) + \frac{1}{2}s\cos(t + s) \end{bmatrix}.$$

Observe então que, para $t = \frac{\pi}{2} - s + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos $\tilde{\phi}_s(s, t) = \vec{0}$. Portanto, $\tilde{\phi}$ não é imersão. Contudo, este exemplo se enquadra precisamente na nossa condição de tolerância. De fato, enunciamos a condição de tolerância, estranha à primeira vista, justamente para não abrir mão deste exemplo. Na figura a seguir, ilustramos este e mais alguns exemplos desta família.

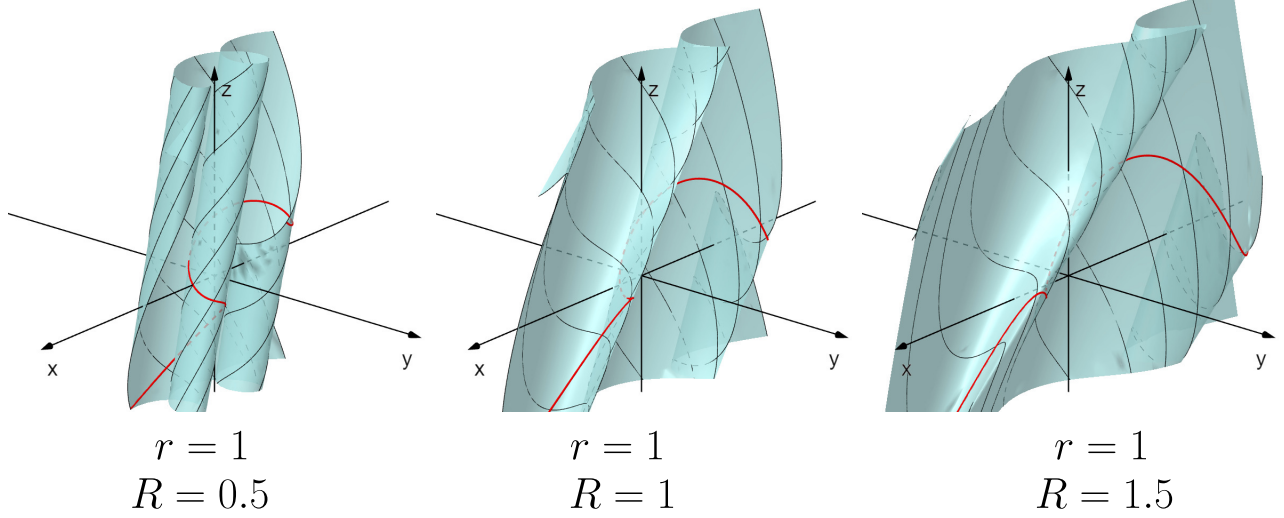


Figura 2.8: <https://www.geogebra.org/m/cwu4esqz>

Por fim, analisamos o caso $c_1 \neq 0 \neq c_3$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} x' &= R\alpha + rc_1\kappa \implies x(s) = \frac{R}{c_3}\beta + r\sigma + c_5 \\ y' &= R\beta + rc_1\sigma \implies y(s) = -\frac{R}{c_3}\alpha - r\kappa + c_6 \end{aligned}$$

Da condição de ortogonalidade vem que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2}(xy' - yx') - r(x'\kappa + y'\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{R}{c_3}\beta + r\sigma + c_5\right)(R\beta + rc_1\sigma) - \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{c_3}\alpha - r\kappa + c_6\right)(R\alpha + rc_1\kappa) \\ &\quad - r((R\alpha + rc_1\kappa)\kappa + (R\beta + rc_1\sigma)\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{c_3} - c_1r^2\right) + \frac{1}{2}R\frac{r}{c_3}(c_1 - c_3)(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \frac{1}{2}rc_1(-\sigma c_5 + \kappa c_6) \\ &\quad - \frac{1}{2}R(\alpha c_6 - \beta c_5) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \alpha\kappa + \sigma\beta &= \cos(c_3s + c_4)\cos(c_1s + c_2) + \sin(c_1s + c_2)\sin(c_3s + c_4) \\ &= \cos((c_1 - c_3)s + c_2 - c_4) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int (c_1 - c_3)(\alpha\kappa + \sigma\beta) ds &= \text{sen}((c_1 - c_3)s + c_2 - c_4) + c \\ &= \sigma\alpha - \kappa\beta + c \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3} - c_1 r^2 \right) s + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} (\sigma\alpha - \kappa\beta) - \frac{1}{2} r (\kappa c_5 + \sigma c_6) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{R}{c_3} (\beta c_6 + \alpha c_5) + c_7 \end{aligned}$$

A parametrização será dada por

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{bmatrix} x + r(S - \sigma) \\ y - r(C - \kappa) \\ z - \frac{r^2}{2} (S\kappa - \sigma C) + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{r}{2} (x(C - \kappa) + y(S - \sigma)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + r\sigma + c_5 + r(S - \sigma) \\ -\frac{R}{c_3}\alpha - r\kappa + c_6 - r(C - \kappa) \\ \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3} - c_1 r^2 \right) s + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} (\sigma\alpha - \kappa\beta) \\ &- \frac{1}{2} r (\kappa c_5 + \sigma c_6) - \frac{1}{2} \frac{R}{c_3} (\beta c_6 + \alpha c_5) + c_7 \\ &- \frac{r^2}{2} (S\kappa - \sigma C) \\ &+ \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t \end{aligned} \right) \\ -\frac{r}{2} \left(\begin{aligned} &\left(\frac{R}{c_3}\beta + r\sigma + c_5 \right) (C - \kappa) \\ &+ \left(-\frac{R}{c_3}\alpha - r\kappa + c_6 \right) (S - \sigma) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + rS + c_5 \\ -\frac{R}{c_3}\alpha - rC + c_6 \\ \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3} - c_1 r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t \\ &- \frac{1}{2} \frac{R}{c_3} r (C\beta - S\alpha) - \frac{1}{2} \frac{R}{c_3} (\alpha c_5 + \beta c_6) \\ &- \frac{1}{2} r (C c_5 + S c_6) + c_7 \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transladando à esquerda por $\psi_1 = (-c_5, -c_6, -c_7)$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_1 * \phi &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3}\beta + rS \\ -\frac{R}{c_3}\alpha - rC \\ \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3} - c_1 r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t - \frac{1}{2} \frac{R}{c_3} r (C\beta - S\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \text{sen}(c_3 s + c_4) + r \text{sen}(t + c_1 s + c_2) \\ -\frac{R}{c_3} \cos(c_3 s + c_4) - r \cos(t + c_1 s + c_2) \\ \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3} - c_1 r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t \\ &+ \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} \text{sen}(t + (c_1 - c_3)s + c_2 - c_4) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando a rotação ψ_2 de ângulo c_4 em torno do eixo- z , obtemos

$$\begin{aligned}\psi_2(\psi_1 * \phi) &= \begin{bmatrix} \cos c_4 & \sin c_4 & 0 \\ -\sin c_4 & \cos c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \sin(c_3 s + c_4) + r \sin(t + c_1 s + c_2) \\ -\frac{R}{c_3} \cos(c_3 s + c_4) - r \cos(t + c_1 s + c_2) \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3^2} - c_1 r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} \sin(t + (c_1 - c_3)s + c_2 - c_4) \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \sin(c_3 s) + r \sin(t + c_1 s + c_2 - c_4) \\ -\frac{R}{c_3} \cos(c_3 s) - r \cos(t + c_1 s + c_2 - c_4) \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3^2} - c_1 r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} \sin(t + (c_1 - c_3)s + c_2 - c_4) \right) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Considere a reparametrização em s dada por $\phi_1(s, t) = \psi_2(\psi_1 * \phi(\frac{1}{c_3}s, t))$. Essa reparametrização não interfere na condição de ortogonalidade. Temos

$$\begin{aligned}\phi_1(s, t) &= \begin{bmatrix} \frac{R}{c_3} \sin s + r \sin\left(t + \frac{c_1}{c_3}s + c_2 - c_4\right) \\ -\frac{R}{c_3} \cos s - r \cos\left(t + \frac{c_1}{c_3}s + c_2 - c_4\right) \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{c_3^2} - \frac{c_1}{c_3} r^2 \right) s + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R \frac{r}{c_3} \sin\left(t + \left(\frac{c_1}{c_3} - 1\right)s + c_2 - c_4\right) \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{R} \sin s + r \sin(t + \tilde{c}_1 s + c_2 - c_4) \\ -\tilde{R} \cos s - r \cos(t + \tilde{c}_1 s + c_2 - c_4) \\ \left(\frac{1}{2} (\tilde{R}^2 - \tilde{c}_1 r^2) s + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tilde{R} r \sin(t + (\tilde{c}_1 - 1)s + c_2 - c_4) \right) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sendo $\tilde{c}_1 := \frac{c_1}{c_3} \neq 0$ e $\tilde{R} := \frac{R}{c_3} \neq 0$. Isso mostra que podemos supor $c_3 = 1$.

Aplicando a translação à esquerda por $\psi_3 = \left(0, 0, \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)(c_2 - c_4)\right)$ e tomando a reparametrização $\tilde{\phi}(s, t) = \psi_3 * \phi_1(s, t - c_2 + c_4)$, estabelecemos a forma canônica para este caso:

$$\tilde{\phi}(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R} \sin s + r \sin(t + \tilde{c}_1 s) \\ -\tilde{R} \cos s - r \cos(t + \tilde{c}_1 s) \\ \frac{1}{2} (\tilde{R}^2 - \tilde{c}_1 r^2) s + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) t + \frac{1}{2} \tilde{R} r \sin(t + \tilde{c}_1 s - s) \end{bmatrix}.$$

Abaixo, a figura exhibe dois exemplos de superfícies dessa família.

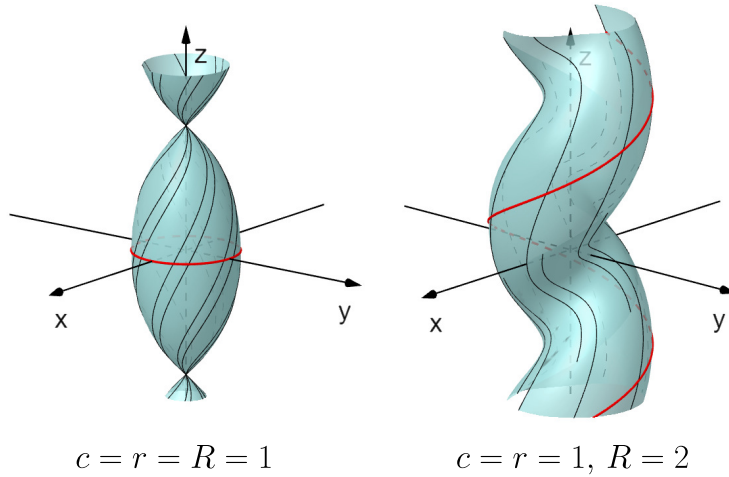


Figura 2.9: <https://www.geogebra.org/classic/v24pf2sj>

Por se tratar de uma família a três parâmetros (o mesmo vale para as famílias a dois parâmetros), sugerimos o link do Geogebra, onde é possível explorar as deformações através de controles deslizantes.

Listemos todos os casos obtidos:

(i) $c_1 = 0$ e $c_3 = 0$:

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} Rs + r \cos t \\ r \sin t \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t + \frac{1}{2}Rrs \sin t \end{bmatrix}$$

(ii) $c_1 = 0$ e $c_3 \neq 0$:

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R} \sin s + r \sin t \\ -\tilde{R} \cos s - r \cos t \\ \frac{1}{2}\tilde{R}^2 s + \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t + \frac{1}{2}\tilde{R}r \sin(t - s) \end{bmatrix}$$

(iii) $c_1 \neq 0$ e $c_3 = 0$:

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R}s + r \cos(t + s) \\ r \sin(t + s) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{1}{2}r^2 s + \frac{1}{2}\tilde{R}r \sin(t + s) \end{bmatrix}$$

(iv) $c_1 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$:

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} \tilde{R} \sin s + r \sin(t + \tilde{c}_1 s) \\ -\tilde{R} \cos s - r \cos(t + \tilde{c}_1 s) \\ \frac{1}{2}(\tilde{R}^2 - \tilde{c}_1 r^2)s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + \frac{1}{2}\tilde{R}r \sin(t + \tilde{c}_1 s - s) \end{bmatrix}$$

Observe que podemos condensar de forma “contínua” os casos (ii) e (iv). Assim obtemos os três casos do enunciado. □

2.2.4 Classificação geral

Em vista do Corolário 2.28, a junção da classificação das superfícies regradas de Weingarten em Nil_3 de cada tipo particular (vertical, horizontal e oblíquo), nos fornece a classificação geral das superfícies regradas de Weingarten em Nil_3 . A seguir, recapitulamos as principais conclusões das últimas seções sob a forma de um único teorema de classificação.

Teorema 2.30. *Toda superfície regrada completa de Weingarten de classe $\mathcal{C}^3$ em Nil_3 é Weingarten polinomial. A lista a seguir esgota, a menos de isometrias, todas tais superfícies:*

- (i) *Todas as superfícies regradas verticais. Estas satisfazem $K = -\frac{1}{4}$. Destas, as únicas com curvatura média constante são cilindros e planos verticais.*
- (ii) *A superfície regrada horizontal dada pelo plano de equação $z = 0$. Satisfaz $H = 0$.*
- (iii) *A família a um parâmetro $a \in \mathbb{R}$ de superfícies regradas horizontais dada pelas superfícies de equação $z = -\frac{1}{2}y(x - 2ay)$. Satisfaz*

$$64H^4 + 16a^2(12K - 1)H^2 + a^4(4K + 1)^3 = 0.$$

- (iv) *A família a dois parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2 + b^2 > 0$ de superfícies regradas horizontais dadas por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$, sendo*

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} a(\sin s - s \cos s) + t \cos s \\ -a(\cos s + s \sin s) + t \sin s \\ \frac{1}{2}(at - bs) \end{bmatrix}.$$

Satisfaz

$$0 = 16Ka^4 \left(\begin{array}{c} 32(4K(1+b) - 3b - 1)H^2 \\ -a^2(12K - 1)(4K - 3) \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{c} 1024b(b+1)H^4 - 64a^2(4(3b+2)K - b)H^2 \\ -a^4(4K - 1)(16K^2 - 56K + 1) \end{array} \right)^2$$

- (v) *A família a um parâmetro $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ de superfícies regradas oblíquas dadas por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$, sendo*

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} s + r \cos t \\ r \sin t \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t + \frac{1}{2}rs \sin t \end{bmatrix}.$$

Satisfaz

$$64(r^2 + 1)^2 H^4 - 16(r^2 + 1)H^2 + 4K + 1 = 0.$$

- (vi) A família a dois parâmetros $r, R \in \mathbb{R}$, com $rR \neq 0$, de superfícies regradas oblíquas dadas por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} Rs + r \cos(t + s) \\ r \sin(t + s) \\ \left(\frac{1}{2}r^2 + 1\right)t - \frac{r^2}{2}s + \frac{1}{2}Rrs \sin(t + s) \end{bmatrix}.$$

Satisfaz $\Psi(H, K) = 0$, sendo $\Psi(X, Y) = \text{Elm}_Z(P, Q)$ o polinômio dado pela eliminante em Z (ver Apêndice A.2) dos polinômios

$$\begin{aligned} P(Y, Z) &= 4 \left((r^2 + 1)(RZ + r)^2 - R^2(Z^2 - 1) \right)^2 Y \\ &\quad + \left(R^2 - r^2(r + RZ)^2 - r^2 \right)^2 \\ Q(X, Z) &= 4 \left(\frac{r^2 R^2 Z^2 + 2r(r^2 + 1)RZ}{+r^2(r^2 + 1) + R^2} \right)^3 (r^2 + 1) X^2 \\ &\quad - \left(\frac{-r^3 R^3 Z^3 - 3r^2(r^2 + 1)R^2 Z^2}{-rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1) + R^2)Z - r^2(r^2 + 1)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

- (vii) A família a três parâmetros $c, r, R \in \mathbb{R}$, com $rR \neq 0$, de superfícies regradas oblíquas dadas por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Nil}_3$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} R \sin s + r \sin(t + cs) \\ -R \cos s - r \cos(t + cs) \\ \frac{1}{2}(R^2 - cr^2)s + \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)t + \frac{1}{2}Rr \sin(t + cs - s) \end{bmatrix},$$

Satisfaz $\Psi(H, K) = 0$, sendo $\Psi(X, Y) = \text{Elm}_Z(P, Q)$ o polinômio dado pela eliminante em Z dos polinômios

$$\begin{aligned} P(Y, Z) &= 4 \left((r^2 + 1)(RZ + cr)^2 - R^2(Z^2 - 1) \right)^2 Y \\ &\quad + \left(R^2 - r^2(rc + RZ)^2 - r^2 c^2 \right)^2 \\ Q(X, Z) &= 4 \left(\frac{r^2 R^2 Z^2 + 2r(r^2 + 1)cRZ}{+r^2(r^2 + 1)c^2 + R^2} \right)^3 (r^2 + 1) X^2 \\ &\quad - \left(\frac{-r^3 R^3 Z^3 - 3r^2(r^2 + 1)cR^2 Z^2}{-rR((3r^2 + 1)(r^2 + 1)c^2 + R^2 + c(r^2 + 1))Z - (r^2 + 1)(r^2 + 1)c^3 + R^2} \right)^2. \end{aligned}$$

2.3 Superfícies de translação

Na busca por outras classes de superfícies em Nil_3 que não a das superfícies regradas, nos deparamos com outra classe natural, a das chamadas superfícies de translação. Em $\mathbb{R}^3$, a interpretação mais geral de uma superfície de translação é aquela de uma superfície dada pela soma de duas curvas, i.e. dada por uma imersão $\phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma $\phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$. Uma tal superfície

pode ser vista como a translação da curva β por $\alpha(s)$, para cada $s \in I$ e portanto configura um caso particular de superfícies de Darboux, i.e. uma superfície dada pela ação de uma família de isometrias sobre uma curva dada. Naturalmente, no caso de $\mathbb{R}^3$, podemos olhar também β como a família de isometrias agindo sobre α . O problema de classificar as superfícies de Weingarten dessa classe nessa generalidade é bastante desafiador. Em [DGW], os autores classificam o caso em que a superfície é um gráfico de função, i.e. ϕ tem a forma $\phi(s, t) = (s, t, f(s) + g(t))$.

A estrutura de Nil_3 sugere duas possíveis generalizações. A primeira é considerar as superfícies da forma $\phi(s, t) = \alpha(s) * \beta(t)$ em que $*$ é a operação de grupo de Nil_3 . Em [ILM], os autores classificam as superfícies mínimas para alguns casos dessa definição (essencialmente o caso em que a superfície é gráfico de função). Note que, para essa definição, assim como em $\mathbb{R}^3$, a superfície é um caso particular de superfície de Darboux pois é dada pela ação da família de isometrias $\alpha(s)$ sobre a curva β (mas não o contrário, uma vez que a métrica de Nil_3 é invariante somente à esquerda).

Outra definição possível é aquela que faz uso da estrutura de espaço vetorial do modelo adotado para o grupo de Heisenberg Nil_3 , i.e. a estrutura vetorial usual de $\mathbb{R}^3$. Em outras palavras, esta seria a mesma definição de $\mathbb{R}^3$ porém considerando a métrica de Nil_3 . Contudo, essa generalização, embora possível, possui a desvantagem de não possuir uma significação geométrica clara (a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ não “conversa” com a métrica de Nil_3).

Trabalharemos com as duas definições, dando preferência à primeira (geométrica).

Como em $\mathbb{R}^3$, cada um dos casos (tanto o geométrico quanto o vetorial) em toda sua generalidade se mostra de difícil tratamento. Portanto, consideraremos alguns casos particulares de especial interesse, como o caso das superfícies Weingarten lineares ou o caso da norma da segunda forma constante, para os casos em que a superfície é da forma gráfico de função ou em que a curva transladada satisfaça alguma condição particular (como por exemplo estar contida em algum plano ou ser Nil_3 -horizontal).

Nas seções a seguir, tornamos mais precisas cada uma dessas definições e provamos o teorema de classificação para cada caso.

Definição 2.31. Uma **superfície de translação geométrica** em Nil_3 é a imagem de uma imersão $\phi : I \times J \rightarrow \text{Nil}_3$ da forma

$$\phi(s, t) = \tau(s) * \gamma(t),$$

sendo $\tau : I \rightarrow \text{Nil}_3$ e $\gamma : J \rightarrow \text{Nil}_3$ duas curvas de classe $\mathcal{C}^2$. Chamamos as curvas τ e γ , respectivamente, de **curva de translação** e **curva shape** da superfície.

Observação 2.32. Uma tal superfície é um caso particular de superfície de Darboux. Basta observar que a curva de translação é uma família a um parâmetro de isometrias que age sobre a curva shape.

O espaço Nil_3 é uma fibração riemanniana de base $\mathbb{R}^2$ e fibras dadas por retas verticais. Podemos olhar então para o caso em que a superfície de translação é um gráfico de função da base sobre as fibras. Mais precisamente, estamos interessados em superfícies de translação da forma $\phi(s, t) =$

$(s, t, f(s, t))$. Seguindo a rigor a Definição 2.31, isso implica que as curvas de translação e shape possuam a forma $\tau(s) = (s, 0, u(s))$ e $\gamma(t) = (0, t, v(t))$. Contudo, existe ainda um outro caso similar se permitirmos a troca dos parâmetros s e t , ou seja, se permitirmos que o parâmetro s (à esquerda do par ordenado (s, t)) seja o parâmetro da curva shape e t (à direita) seja o parâmetro da curva de translação. Assim, obtemos um gráfico de função se τ e γ tiverem a forma $\tau(t) = (0, t, u(t))$ e $\gamma(s) = (s, 0, v(s))$. Embora semelhantes, esses casos são, a priori, geometricamente diferentes pois a operação de grupo de Nil_3 não é comutativa.

No primeiro caso, a superfície terá a forma

$$\phi(s, t) = (s, 0, u(s)) * (0, t, v(t)) = \left(s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2}\right).$$

Já no segundo,

$$\phi(s, t) = (0, t, u(t)) * (s, 0, v(s)) = \left(s, t, u(t) + v(s) - \frac{st}{2}\right).$$

Mas essas duas classes de superfícies diferem por uma isometria, como mostraremos agora. Aplicando a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo- z sobre a superfície do primeiro tipo, obtemos

$$\rho_{\frac{\pi}{2}} \circ \phi(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u + v + \frac{st}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -s \\ u + v + \frac{1}{2}st \end{bmatrix}.$$

Se o domínio de ϕ é $I \times J$, a superfície obtida após a rotação pode ser reparametrizada por $\tilde{\phi}$ definida em $J \times (-I)$ por

$$\tilde{\phi}(\tilde{s}, \tilde{t}) := \rho_{\frac{\pi}{2}} \circ \phi(-\tilde{t}, \tilde{s}) = \left(\tilde{s}, \tilde{t}, v(\tilde{s}) + u(-\tilde{t}) - \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{2}\right).$$

Isso mostra que $\tilde{\phi}$ é do segundo tipo. Portanto, a menos de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$, podemos considerar apenas a classe das superfícies do primeiro tipo.

Observamos ainda que sempre podemos supor que $(0, 0) \in I \times J$. De fato, tome $(s_0, t_0) \in I \times J$ qualquer. Aplicando a translação à esquerda por $(-s_0, -t_0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} (-s_0, -t_0, 0) * \phi(s, t) &= \left(s - s_0, t - t_0, u(s) + v(t) + \frac{1}{2}st + \frac{1}{2}(-s_0t - (-t_0)s)\right) \\ &= \left(s - s_0, t - t_0, u(s) + \frac{t_0s}{2} + v(t) - \frac{s_0t}{2} + \frac{1}{2}st\right). \end{aligned}$$

Temos então a reparametrização $\tilde{\phi}$ sobre $(I - s_0) \times (J - t_0)$ definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{s}, \tilde{t}) &= (-s_0, -t_0, 0) * \phi(\tilde{s} + s_0, \tilde{t} + t_0) \\ &= \left(\tilde{s}, \tilde{t}, u(\tilde{s} + s_0) + \frac{t_0(\tilde{s} + s_0)}{2} + v(\tilde{t} + t_0) - \frac{s_0(\tilde{t} + t_0)}{2} + \frac{1}{2}(\tilde{s} + s_0)(\tilde{t} + t_0)\right) \\ &= \left(\tilde{s}, \tilde{t}, u(\tilde{s} + s_0) + t_0\tilde{s} + v(\tilde{t} + t_0) + \frac{1}{2}s_0t_0 + \frac{1}{2}\tilde{s}\tilde{t}\right). \end{aligned}$$

Então fazendo por exemplo $\tilde{u}(\tilde{s}) := u(\tilde{s} + s_0) + t_0\tilde{s}$ e $\tilde{v}(\tilde{t}) := v(\tilde{t} + t_0) + \frac{1}{2}s_0t_0$, isso nos mostra que podemos sempre supor que $(0, 0) \in I \times J$.

Observando que o referencial ortonormal E_i ao longo de ϕ é dado por $E_1 = (1, 0, -\frac{t}{2})$, $E_2 = (0, 1, \frac{s}{2})$, $E_3 = (0, 0, 1)$, verifica-se que os vetores tangentes são dados por

$$\begin{aligned}\phi_s &= \left(1, 0, u' + \frac{1}{2}t\right) = E_1 + (u' + t)E_3, \\ \phi_t &= \left(0, 1, v' + \frac{1}{2}s\right) = E_2 + v'E_3.\end{aligned}$$

Em particular, como a superfície é dada por um gráfico de função, sabemos que ϕ é mais que uma imersão, é um mergulho. O campo normal sobre a superfície é dado por

$$\phi_s \times \phi_t = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & u' + t \\ 0 & 1 & v' \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = -(u' + t)E_1 - v'E_2 + E_3.$$

As derivadas covariantes são dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s}\phi_s &= 1_s E_1 + (u' + t)_s E_3 + \frac{1}{2}\bar{\phi}_s \times \phi_s = u''E_3 + \frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u' - t \\ 1 & 0 & u' + t \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= -(u' + t)E_2 + u''E_3, \\ \nabla_{\phi_t}\phi_s &= 1_t E_1 + (u' + t)_t E_3 + \frac{1}{2}\bar{\phi}_t \times \phi_s = E_3 + \frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -v' \\ 1 & 0 & u' + t \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(u' + t)E_1 - \frac{1}{2}v'E_2 + \frac{1}{2}E_3, \\ \nabla_{\phi_t}\phi_t &= 1_t E_2 + (v')_t E_3 + \frac{1}{2}\bar{\phi}_t \times \phi_t = v''E_3 + \frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -v' \\ 0 & 1 & v' \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= v'E_1 + v''E_3.\end{aligned}$$

A primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$\begin{aligned}E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = 1 + (u' + t)^2, \\ F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = (u' + t)v', \\ G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 + (v')^2, \\ W &= |\phi_s \times \phi_t|^{-1} = (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} \\ e &= \langle \nabla_{\phi_s}\phi_s, N \rangle = W(u'' + (u' + t)v'), \\ f &= \langle \nabla_{\phi_t}\phi_s, N \rangle = \frac{W}{2}((v')^2 + 1 - (u' + t)^2), \\ g &= \langle \nabla_{\phi_t}\phi_t, N \rangle = W(v'' - (u' + t)v').\end{aligned}$$

Segue daí que as curvaturas são dadas por

$$H = \frac{v'' \left((t+u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t+u')}{2 \left((t+u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.2)$$

$$K = \frac{(u'' + (u' + t)v') (v'' - (u' + t)v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2}{\left((t+u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^2}. \quad (2.3)$$

Tendo em vista os bons resultados da aplicação da técnica de Kühnel no caso das superfícies regradas (ou mesmo para superfícies de translação em $\mathbb{R}^3$, como em [DGW]), nosso primeiro ímpeto é olhar para a condição de Kühnel. Contudo, o simples resultado abaixo indica, como discutiremos a seguir, que tal técnica é pouco viável para o caso de superfícies de translação em Nil_3 .

Proposição 2.33. *Se $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma $u(s) = as + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, então a superfície de translação é de Kühnel-Weingarten, para qualquer escolha de $v: J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. As curvaturas média e gaussiana são dadas por*

$$H(s, t) = \frac{v'' \left((a+t)^2 + 1 \right) - v' (a+t)}{2 \left((a+t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

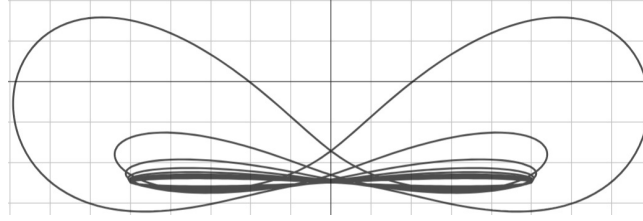
$$K(s, t) = \frac{(a+t)v'v'' - (a+t)^2(v')^2 - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (a+t)^2 \right)^2}{\left((a+t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^2}.$$

Demonstração. Basta observar que, se $u(s) = as + b$, então todos os símbolos da primeira e segunda formas e, consequentemente as curvas H e K , não dependem de s . Assim, a condição de Kühnel $H_t K_s - H_s K_t = 0$ é trivialmente satisfeita. As fórmulas das curvaturas seguem do cálculo direto. $\square$

Essa proposição nos diz que mesmo o caso simples em que u é uma função afim nos fornece uma classe rica de exemplos, de difícil classificação. Tais superfícies são trivialmente de Kühnel-Weingarten, embora seja pouco que sejam (ou quais delas sejam) de Weingarten. As expressões de suas curvaturas dependem de três “variáveis”, i.e. t, v' e v'' , de forma que não podemos aplicar a técnica da eliminante em uma delas para se obter uma relação envolvendo unicamente H e K . De fato, tendo em conta a construção do exemplo apresentado no Capítulo 1, é de se esperar que tal classe possua superfícies de Kühnel-Weingarten que não sejam Weingarten, porque se trata, assim como no caso de superfícies de revolução em $\mathbb{R}^3$, de uma classe que é trivialmente de Kühnel-Weingarten, mas que não é trivial como classe de superfícies. Lá podíamos escolher qualquer curva geratriz para a revolução, aqui podemos escolher qualquer função v .

Convém mencionar que a classe análoga em $\mathbb{R}^3$ não apresenta o mesmo dilema. Numa superfície de translação do tipo gráfico de função em $\mathbb{R}^3$, se uma das funções é do tipo $u(s) = as + b$, então a superfície é desenvolvível, i.e. possui curvatura gaussiana identicamente nula e, portanto, é trivialmente de Weingarten.

Exemplo 2.34. Mesmo escolhas simples de v podem fornecer pares curvatura (H, K) curiosos. É o caso da escolha $u \equiv 0$ e $v(t) = t \cos t$, como mostra a figura abaixo.



A superfície com $u \equiv 0$ e $v(t) = t \cos t$ se parece com

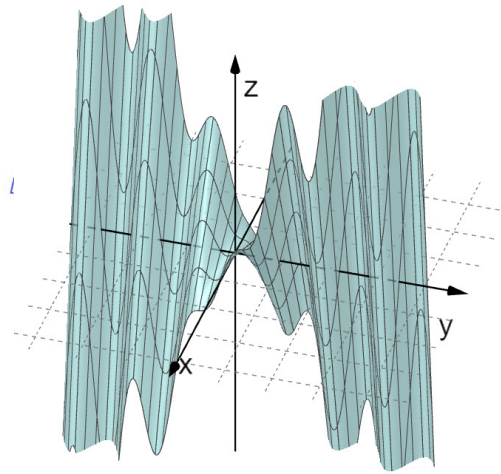


Figura 2.10: <https://www.geogebra.org/classic/y78hvraa>

A proposição acima nos mostra que a condição de Kühnel é pouco promissora. Mas qual é, de fato, a condição de Kühnel neste caso? Omitindo os cálculos, é possível obter que a condição possui a forma

$$\begin{aligned}
 0 &= \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_s & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \\
 &= A_{1,1}u'''v''' + A_{1,0}u''' + A_{0,1}v''' + A_{0,0}
 \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= 2((v')^2 + 1)((v')^2 + (t + u')^2 + 1)u'' \\
 &\quad - 2((v')^2 + (t + u')^2 + 1)((t + u')^2 + 1)v'' \\
 &\quad + 2((v')^2 + (t + u')^2 + 1)(v'(t + u')^2 + (v')^3 + 2v')(u' + t) \\
 A_{1,0} &= (-4v'(t + u')^2 - 6v'((v')^2 + 1))u''(v'')^2 \\
 &\quad + (2(t + u')^3((v')^2 - 1) + 4((v')^4 - 1)(t + u'))u''v''
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2v'((v')^2 + 1)^2 u'' + 6v'((t + u')^2 + 1)(v'')^3 \\
& -2\left((t + u')^2(2(v')^2 - 3) + 3(3(v')^2 + (v')^4 - 1)\right)(t + u')(v'')^2 \\
& + \left(-4v'(t + u')^4 - 2v'(3(v')^2 + 11)(t + u')^2 + 2v'((v')^2 + 2)((v')^2 + 1)\right)v'' \\
& + 2\left(((v')^2 + 2)((v')^2 + 1) - 2(t + u')^2\right)(t + u') \\
A_{0,1} = & -6((v')^2 + 1)(t + u')(u'')^3 + 2(t + u')(3(t + u')^2 + 2(v')^2 + 3)(u'')^2 v'' \\
& -2v'(t + u')^2(3(t + u')^2 + 2(v')^2 + 3)(u'')^2 \\
& + 2v'\left(2(t + u')^4 + ((v')^2 + 1)((t + u')^2 - 1)\right)u''v'' \\
& + 2\left(2(t + u')^4 - ((v')^2 + 2)((v')^2 + 1)\right)(t + u')u'' \\
A_{0,0} = & 16v'(t + u')(u'')^3(v'')^2 - 16v'(t + u')(u'')^2(v'')^3 \\
& + \left(-6((v')^2 - 1)(t + u')^2 - 2(v')^2((v')^2 + 1)\right)(u'')^3v'' \\
& + \left(2(t + u')^4 + 12((v')^2 - 1)(t + u')^2 + 2(v')^2((v')^2 + 2)\right)(u'')^2(v'')^2 \\
& + 2v'(t + u')(5(t + u')^2 + ((v')^2 + 2))(u'')^2v'' \\
& + \left(-2(t + u')^4 - 2(3(v')^2 + 1)(t + u')^2 + 6(v')^2\right)u''(v'')^3 \\
& -2v'(t + u')(3(t + u')^2 - ((v')^2 + 6))u''(v'')^2 \\
& + 4(t + u')^2(1 - (t + u')^2)u''v''
\end{aligned}$$

Abordamos a seguir algumas das possíveis técnicas que vêm à mente para abordar a equação acima e a inconveniência de cada uma delas.

Uma primeira possibilidade seria olhar para a equação do ponto de vista de equações diferenciais. Nossa equação envolve duas funções, u e v , de variáveis independentes, s e t respectivamente. Trata-se de uma equação de terceira ordem não-linear, do tipo polinomial. A variável t aparece explicitamente na equação, mas s não. Além disso, os coeficientes são extensos e obter sucesso por esse caminho parece pouco provável.

Uma segunda tentativa seria utilizar técnicas de Geometria Algébrica. Se coletarmos nossa equação em todos os símbolos que dependem, por exemplo, de s , iremos obter uma equação da forma

$$P_t(u', u'', u''') = 0,$$

para uma família de polinômios $\{P_t \in \mathbb{R}[X, Y, Z]\}_{t \in J}$. Isso nos diz que a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) := (u', u'', u''')(s)$ está contida em todas (e, portanto na interseção das) as superfícies algébricas em $\mathbb{R}^3$ definidas por $P_t(X, Y, Z) = 0$. Contudo, a teoria de interseção para superfícies algébricas é bastante mais delicada do que a de curvas algébricas em $\mathbb{R}^2$ e não há uma ferramenta tão clara como o teorema de Bézout para se atacar a equação.

Outra abordagem possível seria a partir de uma análise dimensional, como em [DGW]. A equação pode ser escrita como $\sum_{i=0}^n U_i(s) V_i(t) = 0$ para certas funções $U_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $V_i: J \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos

olhar essa soma como um produto interno $\langle U(s), V(t) \rangle = 0$, sendo U, V curvas no $\mathbb{R}^n$ definidas por $U = (U_1, \dots, U_n), V = (V_1, \dots, V_n)$. Como s e t são variáveis independentes, isso nos diz que a curva U mora no complemento ortogonal do subespaço gerado $\text{span}(V)$ e vice-versa. Em particular, devemos ter $\dim \text{span}(U) + \dim \text{span}(V) \leq n$. Faz-se então uma análise das possíveis dimensões de $\text{span}(U)$ e $\text{span}(V)$. Em [DGW], os autores conseguem expressar sua equação como um produto interno em $\mathbb{R}^6$, cuja análise das possíveis combinações de dimensões já impõe considerável dificuldade. No nosso caso, a dimensão n seria grande o suficiente para que a análise de todas as combinações possíveis das dimensões dos gerados ortogonais aparente ser praticamente impossível.

Com isso, esperamos convencer o leitor de que a técnica da condição de Kühnel é de fato inviável para classificar as superfícies neste caso. Isso serve para mostrar também o quão desafiador é o caso mais geral das superfícies de translação, i.e. sem necessariamente ser do tipo gráfico de função (este caso é desafiador mesmo em $\mathbb{R}^3$).

Portanto, nas próximas seções nos voltamos ao estudo de alguns casos clássicos, embora particulares, de superfícies de Weingarten, mais especificamente o das superfícies de Weingarten lineares, i.e. com relação da forma $aH + bK = c$, com $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, e o das superfícies com norma da segunda forma constante, i.e. $4H^2 - 2K = c$. Os resultados obtidos podem ser sumarizados no seguinte teorema.

Teorema 2.35. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função, i.e. da forma $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$, é Weingarten linear ou possui a norma da segunda forma constante se, e somente se, u é da forma $u(s) = u'_0 s + u_0$, para certas constantes $u_0, u'_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é solução da equação diferencial imposta pela respectiva relação de Weingarten.*

Esse teorema levanta a seguinte conjectura.

Conjectura: *Para que uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função, i.e. da forma $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$, seja de Weingarten, é necessário que u seja da forma $u(s) = u'_0 s + u_0$, para certas constantes $u_0, u'_0 \in \mathbb{R}$.*

Essa conjectura é reforçada pela seguinte observação. As fórmulas de H e K em (2.2) e (2.3) possuem uma dependência explícita da variável t , mesmo no caso em que v' e v'' sejam constantes. A presença dessa dependência “inevitável” em t impediria que H e K , sob uma relação de Weingarten, dependessem da variável s , “forçando” u' a ser constante.

2.3.1 Weingarten Lineares: $aH + bK = c$

Destacamos que em [ILM] os autores classificaram o caso das mínimas, i.e. $H = 0$. Incluiremos aqui uma prova alternativa deste caso, pois nossa técnica não requer que a superfície seja de classe $\mathcal{C}^3$ (veja o final da página 3, em que eles tomam uma derivada da equação que define a superfície mínima).

Teorema 2.36. [ILM] Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função, i.e. da forma $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ é mínima se, e somente se, a menos de isometrias, u e v possuem a forma

$$\begin{aligned} u(s) &= as, \\ v(t) &= b \left((a+t) \sqrt{1+(a+t)^2} + \ln \left(a+t + \sqrt{1+(a+t)^2} \right) \right), \end{aligned}$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

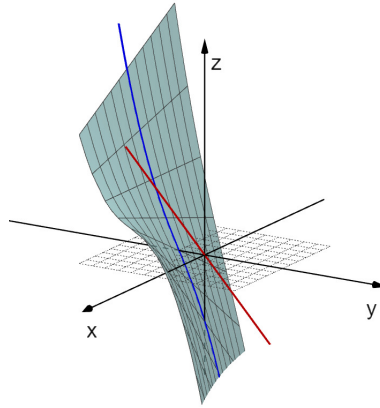


Figura 2.11: Exemplo com $a = -b = 1$. Curva de translação em vermelho e curva shape em azul.

<https://www.geogebra.org/classic/tewryvbb>

Demonstração. Olhando para as expressões encontradas para a primeira e segunda formas, vemos que a superfície é mínima se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F \\ &= (u'' + (u' + t)v') (1 + (v')^2) + (v'' - (u' + t)v') (1 + (u' + t)^2) \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{2} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right) \right) (u' + t)v' \\ &= ((v')^2 + 1)u'' + ((u' + t)^2 + 1)v'' - (u' + t)v'. \end{aligned}$$

Essa é a mesma equação obtida em (3) na página 3 de [ILM]. Em seguida, os autores derivam a equação com respeito a s . É aqui que nossa técnica difere da deles.

Considere a família de polinômios a um parâmetro $t \in J$ definida por

$$P_t(X, Y) = ((v')^2 + 1)Y + v''(X^2 + 1) - v'X.$$

Naturalmente, todos tais polinômios são não nulos e lineares em Y . Em particular, isso implica que são irredutíveis para todo $t \in J$.

Considere também a família a um parâmetro de curvas $\gamma_t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in J$, definidas por

$$\gamma_t(s) := (u'(s) + t, u''(s)).$$

Nossa equação nos diz que a superfície é mínima se, e somente se, $P_t(\gamma_t(s)) = 0$, para todo $(s, t) \in I \times J$. Em outras palavras, o traço da curva γ_t mora na curva algébrica em $\mathbb{R}^2$ associada ao polinômio P_t .

Lembre que podemos supor que $(0, 0) \in I \times J$. Defina então a família de polinômios $Q_t(X, Y) := P_0(X - t, Y)$. Observe que Q_t também é irredutível, para todo $t \in J$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} Q_t(\gamma_t(s)) &= P_0((u'(s) + t) - t, u''(s)) = P_0(u'(s), u''(s)) \\ &= P_0(\gamma_0(s)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o traço de γ_t também mora na curva algébrica associada a Q_t .

Vamos usar esses fatos para mostrar que a curva $\gamma_0(s) = (u'(s), u''(s))$ é constante.

Suponha que não. Consequentemente, cada curva γ_t não é constante e, portanto, percorre infinitos pontos. Isso implica que as curvas algébricas associadas a P_t e Q_t possuem infinitos pontos em comum. Segue do teorema de Bézout que P_t e Q_t devem possuir um fator comum não constante. Como ambos são irredutíveis e não nulos, isso implica que esses polinômios coincidem, a menos de uma constante. Assim, deve existir $\lambda_t \in \mathbb{R}$, $\lambda_t \neq 0$ tal que $Q_t = \lambda P_t$. Denotando os valores tomados pelas funções v' e v'' em 0 com um subíndice 0, isso implica que

$$\lambda_t((v')^2 + 1)Y + v''(X^2 + 1) - v'X = ((v'_0)^2 + 1)Y + v''_0((X - t)^2 + 1) - v'_0(X - t).$$

Essa igualdade de polinômios deve valer para todo $t \in J$. Colocando todos os termos num mesmo lado da equação e igualando ao polinômio identicamente nulo em X, Y , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (v''\lambda_t - v''_0)X^2 + (v'_0 - v'\lambda_t - 2v''_0(-t))X + (\lambda_t((v')^2 + 1) - 1 - (v'_0)^2)Y \\ &\quad + (v''\lambda_t - v'_0t - v''_0(t^2 + 1)). \end{aligned}$$

Do coeficiente de X^2 vem que $v''\lambda_t = v''_0$. Substituindo no coeficiente independente, obtemos

$$0 = v''_0 - v'_0t - v''_0(t^2 + 1) = -v'_0t - v''_0t^2.$$

Como isso vale para todo $t \in J$, isso implica que $v'_0 = v''_0 = 0$. Como $\lambda_t \neq 0$, o coeficiente de X^2 e X no traz que $v'' = v' \equiv 0$. Mas então, voltando à equação $P_t(\gamma_t) \equiv 0$ teríamos

$$0 = ((v')^2 + 1)u'' + ((u' + t)^2 + 1)v'' - (u' + t)v' = u''.$$

Mas, ora, isso equivale a dizer que a curva $\gamma_0 = (u', u'')$ é constante, uma contradição.

Com isso, concluímos que γ_0 é constante. Em particular, $u'' \equiv 0$. A partir daí, a prova segue como no artigo e u, v devem ter a forma

$$\begin{aligned} u(s) &= as + u_0, \\ v(t) &= c \left((a+t) \sqrt{1 + (a+t)^2} + \ln \left(a+t + \sqrt{1 + (a+t)^2} \right) \right) + v_0, \end{aligned}$$

para certas constantes $a, c, u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Aplicando então a isometria ao longo das fibras dada pela translação à esquerda por $(0, 0, -u_0 - v_0)$, obtemos a forma do enunciado. $\square$

A técnica desenvolvida na demonstração acima, além de não exigir a hipótese de classe de diferenciabilidade $\mathcal{C}^3$, possui a vantagem de ser algébrica em oposição à técnica utilizada em [ILM] que aborda o problema mais do ponto de vista da resolução direta de equações diferenciais. A opção algébrica pode ser aplicada com maior facilidade em outros casos, cuja resolução direta da equação diferencial é pouco clara.

A seguir, estendemos o teorema anterior para o caso da curvatura média constante.

Teorema 2.37. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ possui curvatura média constante $H = c$ se, e somente se, u tem a forma $u(s) = as + u_0$, para certas constantes $a, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é uma solução da equação*

$$v'' = \frac{1}{(a+t)^2 + 1} \left(2c \left((a+t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + (a+t)v' \right).$$

Demonstração. Olhamos para a equação

$$0 \neq c = H = \frac{1}{2} \frac{\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{((v')^2 + 1)u'' + ((u' + t)^2 + 1)v'' - (u' + t)v'}{2 \left((u' + t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Elevando a equação ao quadrado, multiplicando pelo denominador e passando todos os termos para um mesmo lado da equação, obtemos

$$0 = 4c^2 \left((u' + t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^3 - \left(((v')^2 + 1)u'' + ((u' + t)^2 + 1)v'' - (u' + t)v' \right)^2$$

Podemos aplicar a mesma técnica da demonstração anterior, com $\gamma(s) = (u'(s) + t, u''(s))$ e

$$\begin{aligned} P_t &= 4c^2 (X^2 + (v')^2 + 1)^3 - \left(((v')^2 + 1)Y + (X^2 + 1)v'' - Xv' \right)^2, \\ Q_t &= 4c^2 \left((X - t)^2 + (v'_0)^2 + 1 \right)^3 - \left(((v'_0)^2 + 1)Y + \left((X - t)^2 + 1 \right)v''_0 - (X - t)v'_0 \right)^2. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que γ_0 é constante.

O Exemplo A.16 do Apêndice A.4 mostra que P_t é irredutível, para todo $t \in J$. Isso implica que Q_t também é irredutível, para todo $t \in J$. De fato, se $Q_t(X, Y)$ se escrevesse como $R_t(X, Y)S_t(X, Y)$ com R_t, S_t não constantes, então fazendo a mudança de variáveis $X = \tilde{X} + t$, teríamos

$$\begin{aligned} P_0(\tilde{X}, Y) &= P_0(X - t, Y) = Q_t(X, Y) = R_t(X, Y)S_t(X, Y) \\ &= R_t(\tilde{X} + t, Y)S_t(\tilde{X} + t, Y), \end{aligned}$$

o que forneceria uma fatoração não trivial para o polinômio irredutível P_0 , uma contradição.

Suponha que γ_0 não é constante. Então nossa técnica nos diz que Q_t e P_t devem possuir um fator comum não constante. Como ambos são irredutíveis, isso implica que existe $0 \neq \lambda_t \in \mathbb{R}$ tal que

$Q_t = \lambda_t P_t$. Coletando a equação $0 \equiv Q_t - \lambda_t P_t$ em Y , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\lambda_t ((v')^2 + 1)^2 - ((v'_0)^2 + 1)^2 \right) Y^2 \\ & + \left(\begin{aligned} & 2((v'_0)^2 + 1) \left(v'_0 (X - t) - v''_0 ((X - t)^2 + 1) \right) \\ & + 2\lambda_t (v'' (X^2 + 1) - X v') ((v')^2 + 1) \end{aligned} \right) Y \\ & + \left(\begin{aligned} & 4c^2 ((v'_0)^2 + (X - t)^2 + 1)^3 \\ & - \left(v'_0 (X - t) - v''_0 ((X - t)^2 + 1) \right)^2 \\ & + \lambda_t \left(\begin{aligned} & (v'' (X^2 + 1) - X v')^2 \\ & - 4c^2 (X^2 + (v')^2 + 1)^3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Do coeficiente de Y^2 , vem que

$$\lambda_t = \frac{((v'_0)^2 + 1)^2}{((v')^2 + 1)^2}.$$

Substituindo no coeficiente de Y e coletando em X , devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = & 2((v'_0)^2 + 1) \left(\frac{v''}{(v')^2 + 1} ((v'_0)^2 + 1) - v''_0 \right) X^2 \\ & + 2((v'_0)^2 + 1) \left((v'_0 + 2tv''_0) - \frac{v'}{(v')^2 + 1} ((v'_0)^2 + 1) \right) X \\ & + 2((v'_0)^2 + 1) \left(\frac{v''}{(v')^2 + 1} ((v'_0)^2 + 1) - (v''_0 (t^2 + 1) + tv''_0) \right). \end{aligned}$$

Do coeficiente de X^2 vem que

$$\frac{v''}{(v')^2 + 1} = \frac{v''_0}{(v'_0)^2 + 1}.$$

Substituindo no termo independente, vem que

$$0 = \frac{v''_0}{(v'_0)^2 + 1} ((v'_0)^2 + 1) - (v''_0 (t^2 + 1) + tv''_0) = -t (v'_0 + tv''_0).$$

Como $t \in J$ é qualquer, isso implica que $v'_0 = v''_0 = 0$. Mas daí o coeficiente de X implica que

$$0 = (v'_0 + 2tv''_0) - \frac{v'}{(v')^2 + 1} ((v'_0)^2 + 1) = -\frac{v'}{(v')^2 + 1}.$$

Portanto, devemos ter $v' = v'' \equiv 0$ sobre J . Retornando à equação original dada por $H = c$, isso implica que

$$0 = 4c^2 ((u' + t)^2 + 1)^3 - (u'')^2,$$

para todo $(s, t) \in I \times J$. Acontece que, para cada $s \in I$ fixado, o lado direito fornece um polinômio não nulo em t e, portanto, não pode se anular para todo $t \in J$. Essa contradição veio de supor que a curva $\gamma_0 = (u', u'')$ não é constante.

Isso mostra que γ_0 é constante e, portanto, $u'' \equiv 0$ e $u' \equiv a$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Substituindo essas informações na equação $H = c$, vemos que v deve satisfazer

$$c = \frac{\left((a+t)^2 + 1\right) v'' - (a+t) v'}{2 \left((a+t)^2 + (v')^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$v'' = \frac{1}{(a+t)^2 + 1} \left(2c \left((a+t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} + (a+t) v' \right).$$

Isso mostra que a equação admite existência e unicidade de solução dadas condições iniciais $v(0) = v_0$ e $v'(0) = v'_0$. Convém mencionar que, se fizermos $c = 0$ na equação acima, recuperamos precisamente a equação do caso das superfícies mínimas. $\square$

c técnica, agora para os casos da curvatura gaussiana constante.

Teorema 2.38. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ possui curvatura gaussiana nula $K = 0$ se, e somente se, u tem a forma $u(s) = as + u_0$, para certas constantes $a, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é uma solução da equação*

$$0 = 4(a+t) v' v'' - \left((v')^2 - (a+t)^2 + 1 \right)^2 - 4(v')^2 (a+t)^2.$$

Demonstração. O caso $K = 0$ equivale a $\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2 = 0$, que em termos da nossa parametrização equivale à equação

$$0 = 4(u'' + (u' + t) v') (v'' - (u' + t) v') - \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2.$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} P_t &= 4(Y + v'X) (v'' - v'X) - \left((v')^2 + 1 - X^2 \right)^2, \\ Q_t &= 4(Y + v'_0(X - t)) (v''_0 - v'_0(X - t)) - \left((v'_0)^2 + 1 - (X - t)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Mostremos que, assim como nos casos anteriores, u' é constante. De fato, comecemos com o caso em que $v'_0 = v''_0 = 0$. Sob essa hipótese, temos

$$0 \equiv Q_t(\gamma) = - \left(1 - (u')^2 \right)^2.$$

Neste caso, devemos ter $(u')^2 = 1$ e portanto u' é constante.

Olhemos agora para o caso $(v'_0)^2 + (v''_0)^2 > 0$. O Exemplo A.17, Apêndice A.4, mostra que Q_t é irredutível para todo $t \in J$. Suponha que $\gamma_0 = (u', u'')$ não seja constante. Então nossa técnica diz que P_t e Q_t possuem um fator comum não constante. Como Q_t é irredutível, isso implica que este é o fator comum, a menos de uma constante. Como P_t não pode possuir grau maior que Q_t e P_t é não nulo, isso implica a existência de $\lambda_t \neq 0$ tal que $P_t = \lambda_t Q_t$.

Coletando $0 = P_t - \lambda_t Q_t$ em Y , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & (-4(v' - v'_0 \lambda_t) X - 4(-v'' + \lambda_t(v''_0 + t v'_0))) Y + (\lambda_t - 1) X^4 \\ & + (-4t \lambda_t) X^3 + 2(-\lambda_t - (v')^2 + 3t^2 \lambda_t + (v'_0)^2 \lambda_t + 1) X^2 \\ & - 4(-t \lambda_t - v' v'' + t^3 \lambda_t + v'_0 v''_0 \lambda_t + t(v'_0)^2 \lambda_t) X \\ & + \left(\lambda_t \left((v'_0)^2 - t^2 + 1 \right)^2 + 4t v'_0 (v''_0 + t v'_0) - ((v')^2 + 1)^2 \right) \end{aligned}$$

O coeficiente de X^4 impõe a condição $\lambda_t = 1$. Olhando então para o coeficiente de XY , devemos ter $0 = v' - v'_0 \lambda_t = v' - v'_0$. Portanto, $v' \equiv v'_0$ é constante sobre J . Isso implica também que $v'' \equiv 0$. Mas então o coeficiente de Y implica que

$$0 = -v'' + \lambda_t(v''_0 + t v'_0) = t v'_0.$$

Como $t \in J$ é qualquer, isso implica $v'_0 = 0$. Mas então temos $v''_0 = v'_0 = 0$, uma contradição com a hipótese $(v'_0)^2 + (v''_0)^2 > 0$.

Essa contradição vem de supor que γ_0 não é constante.

Portanto, γ_0 é constante e temos $u'' = 0$, em quaisquer dos casos.

Denotando $u' \equiv a$, voltando à equação inicial obtida de $K = 0$, vemos que v deve satisfazer

$$\begin{aligned} 0 = & 4((a+t)v')(v'' - (a+t)v') - \left((v')^2 + 1 - (a+t)^2 \right)^2 \\ = & 4(a+t)v'v'' - \left(\left((v')^2 - (a+t)^2 + 1 \right)^2 + 4(v')^2(a+t)^2 \right). \end{aligned}$$

A equação nos dá uma condição necessária para que a superfície satisfaça $K = 0$. Reciprocamente, se uma função v satisfaz uma equação como essa, para certa constante $a \in \mathbb{R}$, então toda u satisfazendo $u' = a$ é tal que a respectiva superfície definida por elas possui a propriedade $K = 0$. $\square$

Teorema 2.39. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ possui curvatura gaussiana constante $K = c \neq 0$ se, e somente se, u tem a forma $u(s) = as + u_0$, para certas constantes $a, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é uma solução da equação*

$$0 = 4(a+t)v'v'' - \left((v')^2 - (a+t)^2 + 1 \right)^2 - 4c \left((v')^2 + (a+t)^2 + 1 \right)^2 - 4(v')^2(a+t)^2.$$

Demonstração. Devemos ter $c = K = \frac{\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2}{(EG - F)^2}$, que equivale a

$$\begin{aligned} 0 = & c(EG - F)^2 - (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) = c \left((u' + t)^2 + (v')^2 + 1 \right)^2 - (u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') \\ & + \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2 \end{aligned}$$

Neste caso, temos os polinômios

$$\begin{aligned} P_t(X, Y) &= 4c(X^2 + (v')^2 + 1)^2 - 4(Y + Xv')(v'' - Xv') + ((v')^2 + 1 - X^2)^2 \\ Q_t(X, Y) &= 4c((X-t)^2 + (v'_0)^2 + 1)^2 - 4(Y + (X-t)v'_0)(v''_0 - (X-t)v'_0) \\ &\quad + ((v'_0)^2 + 1 - (X-t)^2)^2 \end{aligned}$$

Novamente, vamos mostrar que $\gamma_0 = (u', u'')$ é constante.

Primeiro, olhemos para o caso em que $v'_0 = v''_0 = 0$, no qual temos

$$Q_t(X, Y) = (4c+1)(X-t)^4 + 2(4c-1)(X-t)^2 + (4c+1)$$

De $Q_t(\gamma) = 0$, vem que

$$0 = (4c+1)(u')^4 + 2(4c-1)(u')^2 + (4c+1).$$

Como Q_t é não nulo, isso implica que u' é constante.

Suponha agora que $(v'_0)^2 + (v''_0)^2 > 0$. Em particular, isso implica a existência de um intervalo aberto não vazio J_0 em torno de $0 \in J$ sobre o qual $(v')^2 + (v'')^2 > 0$, o qual podemos supor, sem perda de generalidade, maximal com respeito a essa propriedade.

Suponha por contradição que $\gamma_0 = (u', u'')$ não é constante. Isso implica que $\gamma_t = (u' + t, u'')$ não é constante, em particular quando $t \in J_0$. Portanto, pelo teorema de Bézout, P_t e Q_t devem possuir um fator não constante em comum, para cada $t \in J_0$ fixado. Agora, utilizaremos uma abordagem diferente daquela feita até aqui. No presente caso, analisar a irreduzibilidade dos polinômios P_t e Q_t é inviável, pois envolve vários casos possíveis a serem analisados. Apresentamos uma abordagem mais elegante, fazendo novamente o uso da eliminante (v. Apêndice A.2).

Coletando P_t e Q_t em Y , temos

$$\begin{aligned} P_t(X, Y) &= (4Xv' - 4v'')Y + ((v')^2 - X^2 + 1)^2 + 4c(X^2 + (v')^2 + 1)^2 - 4Xv'(v'' - Xv'), \\ Q_t(X, Y) &= (4v'_0(X-t) - 4v''_0)Y + ((v'_0)^2 - (X-t)^2 + 1)^2 + 4c((v'_0)^2 + (X-t)^2 + 1)^2 \\ &\quad - 4v'_0(X-t)(v''_0 - v'_0(X-t)). \end{aligned}$$

Note que, para $t \in J_0$, temos que os termos de maior grau em Y de cada polinômio, i.e. $4Xv' - 4v''$ e $4v'_0(X-t) - 4v''_0$ não são identicamente nulos em X . Observe que o fator comum entre P_t e Q_t deve possuir grau em Y maior ou igual a 1. Isso porque se esse fator comum depende apenas de X , isso impõe que u' seja constante, o que estamos supondo, por contradição, que não acontece. Portanto, segue do Lema A.6 (Apêndice A.2) que a eliminante $\text{Elm}_Y(P_t, Q_t)$ deve ser o polinômio identicamente nulo em X .

Calculando essa eliminante, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Elm}_Y(P_t, Q_t) &= \det \begin{bmatrix} 4Xv' - 4v'' & \begin{pmatrix} ((v')^2 - X^2 + 1)^2 + 4c(X^2 + (v')^2 + 1)^2 \\ -4Xv'(v'' - Xv') \end{pmatrix} \\ 4v'_0(X - t) - 4v''_0 & \begin{pmatrix} ((v'_0)^2 - (X - t)^2 + 1)^2 \\ +4c((v'_0)^2 + (X - t)^2 + 1)^2 \\ -4v'_0(X - t)(v''_0 - v'_0(X - t)) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= 4(4c + 1)(v' - v'_0)X^5 - 4(4c + 1)(v'' - v''_0 + 4tv' - tv'_0)X^4 + \dots \end{aligned}$$

Devemos ter, em particular, $(4c + 1)(v' - v'_0) = 0$. Portanto, temos duas possibilidades: $4c + 1 = 0$ ou $4c + 1 \neq 0$ e devemos ter $v' \equiv v'_0$ sobre J_0 . Em particular, o segundo caso implica $v'' \equiv 0$ e, de $(v')^2 + (v'')^2 > 0$ sobre J_0 , vem que $v'_0 \neq 0$. Analisemos este segundo caso.

Suponha então $v' \equiv v'_0$ sobre J_0 . Note em particular que a maximalidade de J_0 implica $J_0 = J$. Essa hipótese reduz a eliminante acima a

$$\text{Elm}_Y(P_t, Q_t) = -12tv'_0(4c + 1)X^4 + \dots$$

Mas então, como $t \in J$ é qualquer e $4c + 1 \neq 0$, isso implica $v'_0 = 0$, uma contradição.

Portanto, devemos ter $4c + 1 = 0$, i.e. $c = -\frac{1}{4}$. O efeito dessa hipótese sobre a eliminante é

$$\begin{aligned} \text{Elm}_Y(P_t, Q_t) &= -16(v' - v'_0)X^3 + 16(v'' - v''_0 + 2tv' - tv'_0 + v'v''v'_0 - v'v'_0v''_0)X^2 \\ &\quad - 16(2tv'' + t^2v' + v'v''v''_0 - v''v'_0v''_0 + tv'v''v'_0 - tv'v'_0v''_0)X + 16tv''(t - v'_0v''_0) \end{aligned}$$

O coeficiente de X^3 novamente nos diz que devemos ter $v' = v'_0 \neq 0$ sobre J_0 e, consequentemente, sobre J . Mas então tanto o coeficiente de X^2 quanto o de X apresentarão contradições. De fato, o coeficiente de X por exemplo se reduz a

$$0 = -16(2tv'' + t^2v' + v'v''v''_0 - v''v'_0v''_0 + tv'v''v'_0 - tv'v'_0v''_0) = -16t^2v'_0.$$

Como $t \in J$ é qualquer, isso implica $v'_0 = 0$, uma contradição.

Portanto, se supormos que γ_0 não é constante, obtemos uma contradição em qualquer dos casos possíveis.

Logo, devemos ter $\gamma_0 = (u', u'')$ constante e, consequentemente, u deve ter a forma $u(s) = as + b$, para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Voltando à equação inicial, devemos ter que $v = v(t)$ é solução da equação

$$0 = 4v'(a + t)v'' - \left((v')^2 - (a + t)^2 + 1\right)^2 - 4c\left((v')^2 + (a + t)^2 + 1\right)^2 - 4(v')^2(a + t)^2.$$

□

Com isso, estudamos todos os casos em que uma das curvaturas, média ou gaussiana, é constante. Em todos eles, concluímos que a função u que caracteriza a curva de translações deve ter a forma $u(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, enquanto que v deve ser solução de uma equação diferencial imposta pela condição $H = c$, $K = c$ em cada caso.

Abordamos agora a relação $aH + bK = c$, em que $ab \neq 0$, começando pelo caso $c = 0$.

Teorema 2.40. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ é de Weingarten com $aH + bK = 0$, para constantes $a, b \in \mathbb{R}$ não nulas se, e somente se, u tem a forma $u(s) = u'_0 s + u_0$, para certas constantes $u'_0, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é solução da equação diferencial ordinária*

$$0 = a \frac{v'' \left((t + u'_0)^2 + 1 \right) - v' (t + u'_0)}{2 \left((t + u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} + b \frac{(u'_0 + t) v' (v'' - (u'_0 + t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u'_0 + t)^2 \right)^2}{\left((t + u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^2}.$$

Demonstração. Note que a equação $aH + bK = 0$ implica $a^2 H^2 - b^2 K^2 = 0$. Destacando que as curvaturas são dadas por

$$H = \frac{v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t + u')}{2 \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{(u'' + (u' + t) v') (v'' - (u' + t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2}{\left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^2},$$

a equação $a^2 H^2 - b^2 K^2 = 0$ é dada por

$$0 = a^2 \frac{\left(v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t + u') \right)^2}{4 \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^3} - b^2 \frac{\left((u'' + (u' + t) v') (v'' - (u' + t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2 \right)^2}{\left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^4}.$$

e equivale a

$$0 = a^2 \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) \left(v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t + u') \right)^2 - 4b^2 \left((u'' + (u' + t) v') (v'' - (u' + t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2 \right)^2.$$

Seguimos aplicando nossa técnica. Temos

$$\begin{aligned}
 P_t &= a^2 (X^2 + (v')^2 + 1) (v'' (X^2 + 1) + Y ((v')^2 + 1) - v'X)^2 \\
 &\quad - 4b^2 \left((Y + Xv') (v'' - Xv') - \frac{1}{4} ((v')^2 + 1 - X^2)^2 \right)^2, \\
 Q_t &= a^2 \left((X-t)^2 + (v'_0)^2 + 1 \right) \left(v''_0 \left((X-t)^2 + 1 \right) + Y ((v'_0)^2 + 1) - v'_0 (X-t) \right)^2 \\
 &\quad - 4b^2 \left((Y + (X-t)v'_0) (v''_0 - (X-t)v'_0) - \frac{1}{4} ((v'_0)^2 + 1 - (X-t)^2)^2 \right)^2.
 \end{aligned}$$

Nossa primeira afirmação é a de que os polinômios P_t e Q_t possuem grau 2 em Y . Coletando P_t em Y , obtemos

$$P_t = \left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 (X^2 + (v')^2 + 1) - 4b^2 (v'' - Xv')^2 \right) Y^2 + \dots$$

Coletando esse coeficiente em X , obtemos

$$\left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 - 4b^2 (v')^2 \right) X^2 + 8b^2 v' v'' X + \left(a^2 ((v')^2 + 1)^3 - 4b^2 (v'')^2 \right).$$

Suponha que ele seja identicamente nulo em X . Do coeficiente de X^2 vem que $a^2 = 4b^2 \frac{(v')^2}{((v')^2 + 1)^2}$. Substituindo no coeficiente independente vem que $0 = 4b^2 ((v')^2 - (v'')^2 + (v')^4)$. Como $b \neq 0$, isso implica $(v'')^2 = (v')^2 ((v')^2 + 1)$. Junto da condição $v'v'' = 0$ imposta pelo coeficiente de X , isso implica que $v' = v'' = 0$. Mas então, voltando ao coeficiente de X^2 temos $a^2 = 4b^2 \frac{(v')^2}{((v')^2 + 1)^2} = 0$, contradizendo a hipótese de que $a \neq 0$. Isso prova que o referido polinômio em X não é identicamente nulo e, portanto, $\deg_Y P_t = 2$.

Para Q_t , temos

$$Q_t = \left(a^2 ((v'_0)^2 + 1)^2 \left((v'_0)^2 + (X-t)^2 + 1 \right) - 4b^2 (v''_0 - v'_0 (X-t))^2 \right) Y^2 + \dots$$

Coletando em X o coeficiente de Y^2 ,

$$\begin{aligned}
 &\left(a^2 ((v'_0)^2 + 1)^2 - 4b^2 (v'_0)^2 \right) X^2 + \left(8b^2 v'_0 (v''_0 + tv'_0) - 2a^2 t ((v'_0)^2 + 1)^2 \right) X \\
 &+ \left(a^2 ((v'_0)^2 + 1)^2 (t^2 + (v'_0)^2 + 1) - 4b^2 (v''_0 + tv'_0)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Supondo que ele é identicamente nulo, devemos ter $a^2 = 4b^2 \frac{(v'_0)^2}{((v'_0)^2 + 1)^2}$, o que implica

$$\begin{aligned}
 0 &= 4b^2 \frac{(v'_0)^2}{((v'_0)^2 + 1)^2} ((v'_0)^2 + 1)^2 (t^2 + (v'_0)^2 + 1) - 4b^2 (v''_0 + tv'_0)^2 \\
 &= 4b^2 ((v'_0)^4 + (v'_0)^2 - 2tv'_0 v''_0 - (v''_0)^2) \text{ e} \\
 0 &= 8b^2 v'_0 (v''_0 + tv'_0) - 2 \left(4b^2 \frac{(v'_0)^2}{((v'_0)^2 + 1)^2} \right) t ((v'_0)^2 + 1)^2 = 8b^2 v'_0 v''_0.
 \end{aligned}$$

A condição $v'_0 v''_0 = 0$ imposta pela segunda equação, quando aplicada na primeira equação fornece $0 = (v'_0)^4 + (v'_0)^2 - (v''_0)^2$ que, por sua vez, implica $v'_0 = v''_0 = 0$. Mas então novamente o coeficiente de X^2 nos dirá que $a = 0$, uma contradição com nossa hipótese $a \neq 0$.

Isso prova que P_t e Q_t possuem grau 2 em Y . Conhecer o grau desses polinômios é importante para determinar a dimensão correta da matriz de Sylvester da qual se obtém a eliminante.

Como vimos na demonstração do teorema anterior, supor que $\gamma_0 = (u', u'')$ não é constante, em última análise, implica que a eliminante $\text{Elm}_Y(P_t, Q_t)$ é o polinômio identicamente nulo em X .

Embora a matriz de Sylvester possua apenas dimensão 4, a expressão total e explícita dessa eliminante tem imposto um custo computacional elevado. A versão do ano 2024 do Maple, por exemplo, ao tentarmos calcular essa eliminante, exibe a mensagem

[O comprimento da saída excede o limite de 10000000]

Contudo, é possível contornar essa situação da seguinte forma. Através de um truque, conseguimos obter o termo de maior grau em X da expressão dessa eliminante. Por sorte, esse coeficiente é suficiente para resolver o nosso problema.

O truque consiste em “maximizar” o grau em X de cada fator presente na expressão, deletando os termos de menor grau. Descatamos novamente, isso deve ser feito a cada fator. Coleta-se então a expressão em X . O termo de maior grau dessa expressão será o mesmo da expressão correta da eliminante.

Façamos esse truque. Primeiro, coletamos P_t e Q_t em Y :

$$\begin{aligned}
 P_t &= \left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 (X^2 + (v')^2 + 1) - 4b^2 (v'' - Xv')^2 \right) Y^2 \\
 &\quad + \left(8b^2 \left(\frac{1}{4} ((v')^2 - X^2 + 1)^2 - Xv' (v'' - Xv') \right) (v'' - Xv') \right. \\
 &\quad \left. + 2a^2 (v'' (X^2 + 1) - Xv') ((v')^2 + 1) (X^2 + (v')^2 + 1) \right) Y \\
 &\quad + \left(a^2 (v'' (X^2 + 1) - Xv')^2 (X^2 + (v')^2 + 1) - 4b^2 \left(\frac{1}{4} ((v')^2 - X^2 + 1)^2 - Xv' (v'' - Xv') \right)^2 \right) \\
 Q_t &= \left(a^2 ((v'_0)^2 + 1)^2 ((v'_0)^2 + (X - t)^2 + 1) - 4b^2 (v''_0 - v'_0 (X - t))^2 \right) Y^2 \\
 &\quad + \left(8b^2 \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (X - t)^2 + 1)^2 - v'_0 (X - t) (v''_0 - v'_0 (X - t)) \right) (v''_0 - v'_0 (X - t)) \right. \\
 &\quad \left. - 2a^2 ((v'_0)^2 + 1) (v'_0 (X - t) - v''_0 ((X - t)^2 + 1)) ((v'_0)^2 + (X - t)^2 + 1) \right) Y \\
 &\quad + \left(a^2 (v'_0 (X - t) - v''_0 ((X - t)^2 + 1))^2 ((v'_0)^2 + (X - t)^2 + 1) \right. \\
 &\quad \left. - 4b^2 \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (X - t)^2 + 1)^2 - v'_0 (X - t) (v''_0 - v'_0 (X - t)) \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Maximizando o grau em X de cada fator das expressões, obtemos os polinômios $\tilde{P}_t$ e $\tilde{Q}_t$ dados por

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_t &= \left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 - 4b^2 (v')^2 \right) X^2 Y^2 + (-2b^2 v') X^5 Y + \left(-\frac{1}{4} b^2 \right) X^8, \\
 \tilde{Q}_t &= \left(a^2 ((v'_0)^2 + 1)^2 - 4b^2 (v'_0)^2 \right) X^2 Y^2 + (-2b^2 v'_0) X^5 Y + \left(-\frac{1}{4} b^2 \right) X^8.
 \end{aligned}$$

Nosso truque nos diz que o termo de maior grau em X na expressão de $\text{Elm}_Y(\tilde{P}_t, \tilde{Q}_t)$ é o mesmo que na expressão $\text{Elm}_Y(P_t, Q_t)$. Temos

$$\begin{aligned} & \text{Elm}_Y(\tilde{P}_t, \tilde{Q}_t) \\ &= \det \begin{bmatrix} \left(a^2((v')^2+1)^2 - 4b^2(v')^2\right)X^2 & 0 & \left(a^2((v'_0)^2+1)^2 - 4b^2(v'_0)^2\right)X^2 & 0 \\ -2b^2v'X^5 & \left(a^2((v')^2+1)^2 - 4b^2(v')^2\right)X^2 & -2b^2v'_0X^5 & \left(a^2((v'_0)^2+1)^2 - 4b^2(v'_0)^2\right)X^2 \\ -\frac{1}{4}b^2X^8 & -2b^2v'X^5 & -\frac{1}{4}b^2X^8 & -2b^2v'_0X^5 \\ 0 & -\frac{1}{4}b^2X^8 & 0 & -\frac{1}{4}b^2X^8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16}b^4(v' - v'_0)^2(2b + av' + av'_0)(2a - 2bv' + 2bv'_0 + a(v')^2 + a(v'_0)^2) \times \\ & \quad (2a + 2bv' - 2bv'_0 + a(v')^2 + a(v'_0)^2)(-2b + av' + av'_0)X^{20} \end{aligned}$$

Como $\text{Elm}_Y(P_t, Q_t)$ é indeticamente nula em X , o coeficiente acima, em particular, deve ser identicamente nulo sobre J . Observe então que, por sorte (acasou ou não?), ele define um polinômio não identicamente nulo em v' , i.e. não envolve as outras variáveis dependentes de t , como v'' e o próprio t . Como um polinômio não nulo de uma variável possui uma quantidade finita de raízes, isso implica que v' é constante sobre J . Portanto, devemos ter $v' \equiv v'_0$ e $v'' \equiv 0$.

Voltemos então à nossa equação original, advinda de $a^2H^2 - b^2K^2 = 0$. Ela se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 \left((t+u')^2 + (v'_0)^2 + 1 \right) (u''((v'_0)^2 + 1) - v'_0(t+u'))^2 \\ & \quad - 4b^2 \left((u'' + (u'+t)v'_0)(-(u'+t)v'_0) - \frac{1}{4} \left((v'_0)^2 + 1 - (u'+t)^2 \right)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Coletando em t , obtemos

$$0 = -\frac{1}{4}b^2t^8 - 2b^2u't^7 + \dots$$

Como b é diferente de zero, essa expressão define um polinômio não nulo em t que se anula para todo $t \in J$, uma contradição.

Essa contradição vem de supor que $\gamma_0 = (u', u'')$ não é constante.

Portanto, devemos ter, mais uma vez, que u é da forma $u(s) = u'_0s + u_0$, para certas constantes $u'_0, u_0 \in \mathbb{R}$. Impondo essa condição à equação $aH + bK = 0$, vemos que v deve ser solução da equação diferencial ordinária

$$0 = a \frac{v'' \left((t+u'_0)^2 + 1 \right) - v' (t+u'_0)}{2 \left((t+u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} + b \frac{(u'_0+t)v'(v'' - (u'_0+t)v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u'_0+t)^2 \right)^2}{\left((t+u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^2}.$$

□

Teorema 2.41. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ é de Weingarten com $aH + bK = c$, para constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ não nulas se, e somente se, u tem a forma $u(s) = u'_0s + u_0$, para certas constantes $u'_0, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é solução da equação diferencial ordinária*

$$a \frac{v'' \left((t+u'_0)^2 + 1 \right) - v' (t+u'_0)}{2 \left((t+u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} + b \frac{(u'_0+t)v'(v'' - (u'_0+t)v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u'_0+t)^2 \right)^2}{\left((t+u'_0)^2 + (v')^2 + 1 \right)^2} = c.$$

Demonstração. Suponha que a superfície satisfaça a equação $aH + bK = c$, com $abc \neq 0$. Considere as seguintes função $Z : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Z = \sqrt{(t + u')^2 + (v')^2 + 1}.$$

Denote ainda $Z_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $Z_0(s) = Z(s, 0)$. A equação equivale a

$$\begin{aligned} 0 &= 2Z^4(aH + bK - c) \\ &= a \left(v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t + u') \right) Z \\ &\quad + 2b \left((u'' + (u' + t) v') (v'' - (u' + t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u' + t)^2 \right)^2 \right) \\ &\quad - 2cZ^4. \end{aligned}$$

Substituindo $Z^4 = \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^2$ e coletando a equação em u'' , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (2b(v'' - v'(t + u')) + Za((v')^2 + 1))u'' \\ &\quad + Za \left(v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) - v'(t + u') \right) - 2c \left((v')^2 + (t + u')^2 + 1 \right)^2 \\ &\quad - 2b \left(\frac{1}{4} \left((v')^2 - (t + u')^2 + 1 \right)^2 - v'(t + u') (v'' - v'(t + u')) \right). \end{aligned}$$

Note que essa equação é polinomial e linear em u'' . Fazendo $t = 0$ e denotando $v'(0) = v'_0$ e $v''(0) = v''_0$, temos também a equação

$$\begin{aligned} 0 &= (2b(v''_0 - v'_0 u') + Za((v'_0)^2 + 1))u'' \\ &\quad + Za \left(v''_0 \left((u')^2 + 1 \right) - v'_0 u' \right) - 2c \left((v'_0)^2 + (u')^2 + 1 \right)^2 \\ &\quad - 2b \left(\frac{1}{4} \left((v'_0)^2 - (u')^2 + 1 \right)^2 - v'_0 u' (v''_0 - v'_0 u') \right). \end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned} P_1 &= a((v')^2 + 1), \\ P_2 &= 2b(v'' - v'(t + u')), \\ P_3 &= a \left(v'' \left((t + u')^2 + 1 \right) - v'(t + u') \right), \\ P_4 &= -2c \left((v')^2 + (t + u')^2 + 1 \right)^2 - 2b \left(\frac{1}{4} \left((v')^2 - (t + u')^2 + 1 \right)^2 - v'(t + u') (v'' - v'(t + u')) \right), \\ P_{1,0} &= a((v'_0)^2 + 1), \\ P_{2,0} &= 2b(v''_0 - v'_0 u'), \\ P_{3,0} &= a \left(v''_0 \left((u')^2 + 1 \right) - v'_0 u' \right), \\ P_{4,0} &= -2c \left((v'_0)^2 + (u')^2 + 1 \right)^2 - 2b \left(\frac{1}{4} \left((v'_0)^2 - (u')^2 + 1 \right)^2 - v'_0 u' (v''_0 - v'_0 u') \right). \end{aligned}$$

Com essas notações, as equações se escrevem como

$$\begin{aligned} 0 &= (P_1Z + P_2)u'' + (P_3Z + P_4), \\ 0 &= (P_{1,0}Z_0 + P_{2,0})u'' + (P_{3,0}Z_0 + P_{4,0}). \end{aligned}$$

Portanto, tomando a eliminante em u'' dessas equações, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} P_1Z + P_2 & P_3Z + P_4 \\ P_{1,0}Z_0 + P_{2,0} & P_{3,0}Z_0 + P_{4,0} \end{bmatrix} \\ &= (P_1P_{3,0} - P_3P_{1,0})ZZ_0 + (P_1P_{4,0} - P_3P_{2,0})Z + (P_2P_{3,0} - P_4P_{1,0})Z_0 + (P_2P_{4,0} - P_4P_{2,0}). \end{aligned}$$

Por simplicidade, denote

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= P_1P_{3,0} - P_3P_{1,0}, \\ Q_{1,0} &= P_1P_{4,0} - P_3P_{2,0}, \\ Q_{0,1} &= P_2P_{3,0} - P_4P_{1,0}, \\ Q_{0,0} &= P_2P_{4,0} - P_4P_{2,0}. \end{aligned}$$

Assim, nossa equação se reescreve como

$$0 = Q_{1,1}ZZ_0 + Q_{1,0}Z + Q_{0,1}Z_0 + Q_{0,0}.$$

Observe então que Z satisfaz

$$0 = Z^2 - \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right).$$

Fazendo a eliminante em Z dessas equações, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} Z_0Q_{1,1} + Q_{1,0} & 0 & 1 \\ Z_0Q_{0,1} + Q_{0,0} & Z_0Q_{1,1} + Q_{1,0} & 0 \\ 0 & Z_0Q_{0,1} + Q_{0,0} & -\left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) \end{bmatrix} \\ &= \left(Q_{0,1}^2 - \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) Q_{1,1}^2 \right) Z_0^2 \\ &\quad + 2 \left(Q_{0,0}Q_{0,1} - \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) Q_{1,0}Q_{1,1} \right) Z_0 \\ &\quad + \left(Q_{0,0}^2 - \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) Q_{1,0}^2 \right). \end{aligned}$$

Temos ainda que Z_0 satisfaz $0 = Z_0^2 - \left((u')^2 + (v'_0)^2 + 1 \right)$. Denotando $A = (t + u')^2 + (v')^2 + 1$ e $A_0 = (u')^2 + (v'_0)^2 + 1$ e fazendo a eliminante em Z_0 dessas equações, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} Q_{0,1}^2 - AQ_{1,1}^2 & 0 & 1 & 0 \\ 2(Q_{0,0}Q_{0,1} - AQ_{1,0}Q_{1,1}) & Q_{0,1}^2 - AQ_{1,1}^2 & 0 & 1 \\ Q_{0,0}^2 - AQ_{1,0}^2 & 2(Q_{0,0}Q_{0,1} - AQ_{1,0}Q_{1,1}) & -A_0 & 0 \\ 0 & Q_{0,0}^2 - AQ_{1,0}^2 & 0 & -A_0 \end{bmatrix} \\ &= A^2A_0^2Q_{1,1}^4 - 2A^2A_0Q_{1,1}^2Q_{1,0}^2 - 2AA_0^2Q_{1,1}^2Q_{0,1}^2 - 2AA_0Q_{1,1}^2Q_{0,0}^2 \\ &\quad + 8AA_0Q_{1,1}Q_{1,0}Q_{0,1}Q_{0,0} + A^2Q_{1,0}^4 - 2AA_0Q_{1,0}^2Q_{0,1}^2 - 2AQ_{1,0}^2Q_{0,0}^2 + A_0^2Q_{0,1}^4 \\ &\quad - 2A_0Q_{0,1}^2Q_{0,0}^2 + Q_{0,0}^4. \end{aligned}$$

Essa equação é polinomial (não envolve raízes) em u' e esta é a única dependência em $s \in I$ na equação, uma vez que eliminamos u'' no primeiro passo do processo. Provemos por contradição que u' deve ser constante. Se este não fosse o caso, então a equação que obtemos acima deve definir um polinômio identicamente nulo em u' . Façamos uma análise dos graus em u' dessa expressão. Primeiro, recuperando todos os símbolos e olhando para os termos de maior grau em u' de cada expressão, obtemos

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= P_1 P_{3,0} - P_3 P_{1,0} = a^2 (v_0'' ((v')^2 + 1) - v'' ((v_0')^2 + 1)) (u')^2 + \dots \\ Q_{1,0} &= P_1 P_{4,0} - P_3 P_{2,0} = -\frac{1}{2} a ((v')^2 + 1) (b + 4c) (u')^4 + \dots \\ Q_{0,1} &= P_2 P_{3,0} - P_4 P_{1,0} = \frac{1}{2} a ((v_0')^2 + 1) (b + 4c) (u')^4 + \dots \\ Q_{0,0} &= P_2 P_{4,0} - P_4 P_{2,0} = b (v' - v_0') (b + 4c) (u')^5 + \dots \\ A &= (u')^2 + \dots \\ A_0 &= (u')^2 + \dots \end{aligned}$$

Com isso, podemos estimar o grau em u' de cada parcela da nossa equação, listados na tabela abaixo

P	$\deg_{u'} P \leq$
$A^2 A_0^2 Q_{1,1}^4$	16
$A^2 A_0 Q_{1,1}^2 Q_{1,0}^2$	18
$AA_0^2 Q_{1,1}^2 Q_{0,1}^2$	18
$AA_0 Q_{1,1}^2 Q_{0,0}^2$	18
$AA_0 Q_{1,1} Q_{1,0} Q_{0,1} Q_{0,0}$	19
$A^2 Q_{1,0}^4$	20
$AA_0 Q_{1,0}^2 Q_{0,1}^2$	20
$AQ_{1,0}^2 Q_{0,0}^2$	20
$A_0^2 Q_{0,1}^4$	20
$A_0 Q_{0,1}^2 Q_{0,0}^2$	20
$Q_{0,0}^4$	20

Assim, o termo de maior grau em u' na expressão da nossa equação é dado pelo termo de maior grau da soma das parcelas que aparecem com grau ≤ 20 na tabela. Mais precisamente, este termo é dado pelo termo líder da expressão

$$\begin{aligned} &A^2 Q_{1,0}^4 - 2AA_0 Q_{1,0}^2 Q_{0,1}^2 - 2AQ_{1,0}^2 Q_{0,0}^2 + A_0^2 Q_{0,1}^4 - 2A_0 Q_{0,1}^2 Q_{0,0}^2 + Q_{0,0}^4 \\ &= (b + 4c)^4 \left(\frac{1}{16} a^4 (v')^8 + \dots \right) (u')^{20} \end{aligned}$$

Isso nos diz que $b + 4c = 0$ ou então o fator $(\frac{1}{16} a^4 (v')^8 + \dots)$ é identicamente nulo sobre J . Acontece que esse fator é polinomial em v' , com termo líder dado por $\frac{1}{16} a^4 (v')^8$. Como $a \neq 0$, esse fator define um polinômio não nulo em v' . Portanto, se $b + 4c \neq 0$, isso implica que v' é constante sobre J . Mais adiante iremos mostrar que isso não pode ocorrer.

Suponha portanto que $b + 4c = 0$. Fazendo $c = -\frac{1}{4}b$ nas nossas expressões, obtemos

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1} &= a^2 (v_0'' ((v')^2 + 1) - v'' ((v_0')^2 + 1)) (u')^2 + \dots \\
 Q_{1,0} &= 2abv'' v_0' (u')^3 + \dots \\
 Q_{0,1} &= -2abv' v_0'' (u')^3 + \dots \\
 Q_{0,0} &= -4b^2 (v' - v_0') (u')^3 + \dots \\
 A &= (u')^2 + \dots \\
 A_0 &= (u')^2 + \dots
 \end{aligned}$$

P	$\deg_{u'} P \leq$
$A^2 A_0^2 Q_{1,1}^4$	16
$A^2 A_0 Q_{1,1}^2 Q_{1,0}^2$	16
$AA_0^2 Q_{1,1}^2 Q_{0,1}^2$	16
$AA_0 Q_{1,1}^2 Q_{0,0}^2$	14
$AA_0 Q_{1,1} Q_{1,0} Q_{0,1} Q_{0,0}$	15
$A^2 Q_{1,0}^4$	16
$AA_0 Q_{1,0}^2 Q_{0,1}^2$	16
$A Q_{1,0}^2 Q_{0,0}^2$	14
$A_0^2 Q_{0,1}^4$	16
$A_0 Q_{0,1}^2 Q_{0,0}^2$	14
$Q_{0,0}^4$	12

Olhando agora para o termo líder da soma das parcelas de grau ≤ 16 da nossa equação, obtemos

$$\begin{aligned}
 &A^2 A_0^2 Q_{1,1}^4 - 2A^2 A_0 Q_{1,1}^2 Q_{1,0}^2 - 2AA_0^2 Q_{1,1}^2 Q_{0,1}^2 + A^2 Q_{1,0}^4 - 2AA_0 Q_{1,0}^2 Q_{0,1}^2 + A_0^2 Q_{0,1}^4 \\
 = &a^4 ((2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a + 2bv' + a(v')^2)) \\
 &\cdot ((2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2)) \\
 &\cdot ((-a(v_0')^2 - 2bv_0' - a) v'' + v_0'' (a + 2bv' + a(v')^2)) \\
 &\cdot ((-a(v_0')^2 - 2bv_0' - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2)) (u')^{16} + \dots
 \end{aligned}$$

Analisemos o caso $v_0'' = 0$. Neste caso, o coeficiente acima nos diz que devemos ter

$$0 = (a - 2bv_0' + a(v_0')^2)^2 (a + 2bv_0' + a(v_0')^2)^2 (v'')^4.$$

Se a constante $(a - 2bv_0' + a(v_0')^2)^2 (a + 2bv_0' + a(v_0')^2)^2$ for não nula, então isso implica $v'' \equiv 0$, i.e. $v' \equiv v_0'$ é constante. Mostremos que isso não pode acontecer, mesmo para $abc \neq 0$ quaisquer (lembre-se: estamos analisando um caso em que $c = -\frac{1}{4}b$). Para isso, voltemos à equação original e façamos $v' \equiv v_0'$ e $v'' \equiv 0$. Obtemos

$$\begin{aligned}
 0 = &(au'' ((v_0')^2 + 1) - av_0' (t + u')) Z \\
 &- \left(2b \left(\frac{1}{4} ((v_0')^2 - (t + u')^2 + 1) \right)^2 + (v_0')^2 (t + u')^2 \right) + 2c ((v_0')^2 + (t + u')^2 + 1)^2 + 2bu'' v_0' (t + u')
 \end{aligned}$$

Eliminando a raiz quadrada de Z e coletando a equação em $t \in J$, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= (au''((v'_0)^2 + 1) - av'_0(t + u'))^2 Z^2 \\
 &\quad - \left(2b \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (t + u')^2 + 1)^2 + (v'_0)^2 (t + u')^2 \right) + 2c ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1)^2 + 2bu''v'_0(t + u') \right)^2 \\
 &= (au''((v'_0)^2 + 1) - av'_0(t + u'))^2 ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1) \\
 &\quad - \left(2b \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (t + u')^2 + 1)^2 + (v'_0)^2 (t + u')^2 \right) + 2c ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1)^2 + 2bu''v'_0(t + u') \right)^2 \\
 &= -\frac{1}{4}(b + 4c)^2 t^8 + \dots
 \end{aligned}$$

Portanto, o termo de t^8 nos diz que devemos ter $c = -\frac{1}{4}b$ (como já tínhamos antes). Impondo essa condição e coletando novamente em t , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= (au''((v'_0)^2 + 1) - av'_0(t + u'))^2 ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1) \\
 &\quad - \left(2b \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (t + u')^2 + 1)^2 + (v'_0)^2 (t + u')^2 \right) + 2 \left(-\frac{1}{4}b \right) ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1)^2 + 2bu''v'_0(t + u') \right)^2 \\
 &= (-2b + av'_0)(2b + av'_0)t^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Segue daí que $b = \frac{av'_0}{2}$ ou $b = -\frac{av'_0}{2}$. Se fazemos $b = \frac{av'_0}{2}$ e coletamos a equação em t , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= (au''((v'_0)^2 + 1) - av'_0(t + u'))^2 ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1) \\
 &\quad - \left(2 \left(\frac{av'_0}{2} \right) \left(\frac{1}{4} ((v'_0)^2 - (t + u')^2 + 1)^2 + (v'_0)^2 (t + u')^2 \right) + 2 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{av'_0}{2} \right) \right) ((v'_0)^2 + (t + u')^2 + 1)^2 + 2 \left(\frac{av'_0}{2} \right) u''v'_0(t + u') \right)^2 \\
 &= -2a^2 u''v'_0 t^3 + a^2 (2(u'')^2 (v'_0)^2 + (u'')^2 - 6u'u''v'_0 + (v'_0)^4 + (v'_0)^2) t^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Se $v'_0 \neq 0$, então o coeficiente de t^3 nos diz que $u'' \equiv 0$, uma contradição com nossa hipótese inicial, i.e. a de que u' não é constante.

Isso prova que não podemos ter $v''_0 = 0$.

Mostremos, com raciocínio semelhante, que não podemos ter $v'_0 = 0$. Fazendo $v'_0 = 0$ na equação inicial e coletando em t , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= (au'' + av''_0((t + u')^2 + 1))Z + \left(2bu''v''_0 - 2c((t + u')^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}b((t + u')^2 - 1)^2 \right) \\
 \implies 0 &= (au'' + av''_0((t + u')^2 + 1))^2 Z^2 - \left(2bu''v''_0 - 2c((t + u')^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}b((t + u')^2 - 1)^2 \right)^2 \\
 &= (au'' + av''_0((t + u')^2 + 1))^2 ((t + u')^2 + 1) \\
 &\quad - \left(2bu''v''_0 - 2c((t + u')^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}b((t + u')^2 - 1)^2 \right)^2 \\
 &= -\frac{1}{4}(b + 4c)^2 t^8 + \dots
 \end{aligned}$$

Primeiramente, novamente devemos ter $c = -\frac{1}{4}b$. Coletando em t , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(au'' + av_0'' \left((t+u')^2 + 1 \right) \right)^2 \left((t+u')^2 + 1 \right) \\ &\quad - \left(2bu''v_0'' - 2 \left(-\frac{1}{4}b \right) \left((t+u')^2 + 1 \right)^2 - \frac{1}{2}b \left((t+u')^2 - 1 \right)^2 \right)^2 \\ &= a^2(v_0'')^2 t^6 + \dots \end{aligned}$$

Devemos ter então $a^2(v_0'')^2 = 0$, donde $v_0'' = 0$, caso que analisamos acima e que não pode ocorrer. Isso mostra que $v_0' \neq 0$. Note que essa mesma demonstração mostra que, não apenas $v_0''v_0' \neq 0$ mas, de fato, v'' e v' não se anulam sobre nenhum ponto.

Voltemos para a análise do coeficiente de $(u')^{16}$. Olhemos para dois de seus quatro fatores calculados em $t = 0$. Usando que $v_0'v_0'' \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \left((2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a + 2bv' + a(v')^2) \right)_{t=0} &= 4bv_0'v_0'' \neq 0, \\ \left((-a(v_0')^2 - 2bv_0' - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2) \right)_{t=0} &= -4bv_0'v_0'' \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, por continuidade, deve existir um intervalo aberto não vazio $J_0 \subset J$ em torno de $t = 0$ maximal com a propriedade de que os seguintes fatores não se anulem:

$$\left((2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a + 2bv' + a(v')^2) \right) \left((-a(v_0')^2 - 2bv_0' - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2) \right).$$

Portanto, sobre J_0 , vale que

$$0 = \left((2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2) \right) \left((-a(v_0')^2 - 2bv_0' - a) v'' + v_0'' (a + 2bv' + a(v')^2) \right).$$

Suponhamos que $(2bv_0' - a(v_0')^2 - a) v'' + v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2) \equiv 0$ sobre J_0 . Note que isso implica $(2bv_0' - a(v_0')^2 - a) \neq 0$ pois, do contrário, teríamos $v_0'' (a - 2bv' + a(v')^2) \equiv 0$ sobre J_0 e, portanto, v' é constante sobre J_0 (note que $v_0'' \neq 0$). Mas isso implica $v'' \equiv 0$ sobre J_0 e, portanto, $v''(0) = 0 = v_0''$, uma contradição. Portanto, nossa hipótese implica $(2bv_0' - a(v_0')^2 - a) \neq 0$, donde

$$v'' = \frac{a(v')^2 - 2bv' + a}{a(v_0')^2 - 2bv_0' + a} v_0'' \text{ sobre } J_0.$$

Denotando $k = \frac{v_0''}{a(v_0')^2 - 2bv_0' + a}$, temos $v'' = k(a(v')^2 - 2bv' + a)$ sobre J_0 .

Portanto, lembrando que $c = -\frac{1}{4}b$, a equação inicial sobre J_0 se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= a \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) \left((t+u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t+u') \right) \sqrt{(u'+t)^2 + (v')^2 + 1} \\ &\quad + 2b \left(\left((u'' + (u'+t)v') (k(a(v')^2 - 2bv' + a) - (u'+t)v') \right) + ((v')^2 + 1) (t+u')^2 \right). \end{aligned}$$

Essa equação nos diz que a curva $s \mapsto (u'(s), u''(s))$ mora na curva algébrica de equação $P_t(X, Y) = 0$, $t \in J_0$, sendo

$$\begin{aligned} P_t(X, Y) &= a^2 \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) \left((t+X)^2 + 1 \right) - v' (t+X) + ((v')^2 + 1) Y \right)^2 \left((X+t)^2 + (v')^2 + 1 \right) \\ &\quad - 4b^2 \left(\left((Y + (X+t)v') (k(a(v')^2 - 2bv' + a) - (X+t)v') \right) + ((v')^2 + 1) (t+X)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Da técnica da eliminante, sabemos que devemos ter $\text{Elm}_Y(P_t, P_0) = 0$. Coletando P_t em Y , obtemos que ele tem a forma $P_t = R_{2,t}Y^2 + R_{1,t}Y + R_{0,t}$, sendo

$$\begin{aligned} R_{2,t} &= \left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right) - 4b^2 \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) - v'(X+t) \right)^2 \right), \\ R_{1,t} &= \begin{pmatrix} -8b^2 \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) - v'(X+t) \right) \\ \cdot \left(((v')^2 + 1)(X+t)^2 + v'(t+X) \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) - v'(X+t) \right) \right) \\ -2a^2 \left(v'(X+t) - k \left((X+t)^2 + 1 \right) (a(v')^2 - 2bv' + a) \right) ((v')^2 + 1) \\ \cdot \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right) \end{pmatrix}, \\ R_{0,t} &= \begin{pmatrix} a^2 \left(v'(X+t) - k \left((X+t)^2 + 1 \right) (a(v')^2 - 2bv' + a) \right)^2 \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right) \\ -4b^2 \left(((v')^2 + 1)(X+t)^2 + v'(t+X) \left(k(a(v')^2 - 2bv' + a) - v'(X+t) \right) \right)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com auxílio do computador, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Elm}_Y(P_t, P_0) = \det \begin{bmatrix} R_{2,t} & 0 & R_{2,0} & 0 \\ R_{1,t} & R_{2,t} & R_{1,0} & R_{2,0} \\ R_{0,t} & R_{1,t} & R_{0,0} & R_{1,0} \\ 0 & R_{0,t} & 0 & R_{0,0} \end{bmatrix} \\ &= (R_{0,0}R_{2,t} - R_{2,0}R_{0,t})^2 - (R_{0,0}R_{1,t} - R_{1,0}R_{0,t})(R_{1,0}R_{2,t} - R_{2,0}R_{1,t}) \\ &= -64a^4b^3k^3v'_0(v' - v'_0)(v'v'_0 - 1)(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)(a - 2bv' + a(v')^2) \\ &\quad \cdot \left(\begin{aligned} &2ak(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)(a - 2bv' + a(v')^2)t \\ &+ (v' - v'_0)(-a^2 + 4b^2 - 2abv' - 2abv'_0 + a^2v'v'_0) \end{aligned} \right) X^{15} + \dots \end{aligned}$$

Como $v'_0 \neq 0 \neq v''_0$, deve existir vizinhança aberta $J_1 \subset J_0$ de $t = 0$ não vazia sobre a qual $v'v'_0(v' - v'_0)(v'v'_0 - 1)(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)(a - 2bv' + a(v')^2) \neq 0$, a menos do ponto $t = 0$. Por continuidade, podemos concluir que sobre J_1 vale que

$$0 = 2ak(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)(a - 2bv' + a(v')^2)t + (v' - v'_0)(-a^2 + 4b^2 - 2abv' - 2abv'_0 + a^2v'v'_0).$$

Derivando essa equação em t e substituindo $v'' = k(a(v')^2 - 2bv' + a)$ e coletando em t , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2ak(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2) \\ &\quad \cdot ((-2bv'' + 2a(v')v'')t + (a - 2bv' + a(v')^2)) + v''(-a^2 + 4b^2 - 2abv' - 2abv'_0 + a^2v'v'_0) \\ &\quad + (v' - v'_0)(-2abv'' + a^2v''v'_0) \\ &= 4ak^2(-b + av')(a - 2bv' + a(v')^2)(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)t \\ &\quad + k(a - 2bv' + a(v')^2)(a^2(v'_0)^2 + a^2 + 4b^2 - 4abv' - 4abv'_0 + 2a^2v'v'_0). \end{aligned}$$

Tomando a eliminante em t dessas duas equações, obtemos

$$0 = -2ak^2(a - 2bv'_0 + a(v'_0)^2)^2(a - 2bv' + a(v')^2)(3a^2(v')^2 + a^2 + 4b^2 - 8abv').$$

Mas isso mostra que v' é raiz de um polinômio não nulo e, portanto, deve ser constante sobre J_1 . Isso contradiz o fato de que $v''(0) = v''_0 \neq 0$.

Voltamos então à equação sobre J_0

$$0 = ((2bv'_0 - a(v'_0)^2 - a) v'' + v''_0 (a - 2bv' + a(v')^2)) ((-a(v'_0)^2 - 2bv'_0 - a) v'' + v''_0 (a + 2bv' + a(v')^2)).$$

Acabamos de mostrar que o primeiro fator dessa equação não pode ser identicamente nulo sobre J_0 . Portanto, deve existir um intervalo aberto não vazio $J_1 \subset J_0$ sobre o qual o primeiro fator não se anula e, portanto, o segundo fator $(-a(v'_0)^2 - 2bv'_0 - a) v'' + v''_0 (a + 2bv' + a(v')^2)$ é identicamente nulo sobre J_1 . Chamamos a atenção para o detalhe de que $t = 0 \notin J_1$, uma vez que o primeiro fator se anula para $t = 0$.

Mostremos que a constante $-a(v'_0)^2 - 2bv'_0 - a$ é não nula. De fato, se $-a(v'_0)^2 - 2bv'_0 - a = 0$, então devemos ter $v''_0 (a + 2bv' + a(v')^2) = 0$ sobre J_1 e, como $v''_0 \neq 0$, isso implica que v' é constante sobre J_1 , digamos, $v' \equiv v'_1 \in \mathbb{R}$ sobre J_1 . Note que sob estas condições v'_1 não pode ser zero. Olhando para a versão sem raiz quadrada da nossa equação sobre J_1 e coletando em t , devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 (u'' ((v'_1)^2 + 1) - v'_1 (t + u'))^2 ((u' + t)^2 + (v'_1)^2 + 1) \\ &\quad - 4b^2 ((u'' + (u' + t) v'_1) (- (u' + t) v'_1)) + ((v'_1)^2 + 1) (t + u')^2)^2 \\ &= (a^2 (v'_1)^2 - 4b^2) t^4 \\ &\quad + 2 (-8b^2 u' + 2a^2 u' (v'_1)^2 - a^2 u'' (v'_1)^3 - a^2 u'' v'_1 + 4b^2 u'' v'_1) t^3 + \dots \end{aligned}$$

O primeiro coeficiente nos diz que $b^2 = \frac{a^2 (v'_1)^2}{4}$. Substituindo no segundo coeficiente, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-8 \left(\frac{a^2 (v'_1)^2}{4} \right) u' + 2a^2 u' (v'_1)^2 - a^2 u'' (v'_1)^3 - a^2 u'' v'_1 + 4 \left(\frac{a^2 (v'_1)^2}{4} \right) u'' v'_1 \right) \\ &= -a^2 u'' v'_1. \end{aligned}$$

Isso implica $u'' \equiv 0$ sobre I , contradizendo nossa hipótese.

Portanto, devemos ter $-a(v'_0)^2 - 2bv'_0 - a \neq 0$. Portanto, sobre J_1 podemos escrever que

$$v'' = v''_0 \frac{a + 2bv' + a(v')^2}{a + 2bv'_0 + a(v'_0)^2}.$$

Como no caso anterior, denotemos $k = \frac{v''_0}{a + 2bv'_0 + a(v'_0)^2} \neq 0$, de forma que $v'' = k(a + 2bv' + a(v')^2)$ sobre J_1 . Assim, nossa equação sobre J_1 se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= a \left(k(a + 2bv' + a(v')^2) ((t + u')^2 + 1) - v' (t + u') + ((v')^2 + 1) u'' \right) \sqrt{(u' + t)^2 + (v')^2 + 1} \\ &\quad + 2b \left(((u'' + (u' + t) v') (k(a + 2bv' + a(v')^2) - (u' + t) v')) + ((v')^2 + 1) (t + u')^2 \right). \end{aligned}$$

Essa equação nos diz que a curva $s \mapsto (u'(s), u''(s))$ mora na curva algébrica de equação $P_t(X, Y) = 0$, $t \in J_1$, sendo

$$\begin{aligned} P_t(X, Y) &= a^2 \left(k(a + 2bv' + a(v')^2) ((t + X)^2 + 1) - v' (t + X) + ((v')^2 + 1) Y \right)^2 ((X + t)^2 + (v')^2 + 1) \\ &\quad - 4b^2 \left(((Y + (X + t) v') (k(a + 2bv' + a(v')^2) - (X + t) v')) + ((v')^2 + 1) (t + X)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Para cada par de parâmetros $t, t_1 \in J_1$, sabemos da técnica da eliminante que devemos ter $\text{Elm}_Y(P_t, P_{t_1}) = 0$. Coletando P_t em Y , obtemos que ele tem a forma $P_t = R_{2,t}Y^2 + R_{1,t}Y + R_{0,t}$, sendo

$$\begin{aligned} R_{2,t} &= \left(a^2 ((v')^2 + 1)^2 \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right) - 4b^2 \left(k(a(v')^2 + 2bv' + a) - v'(X+t) \right)^2 \right), \\ R_{1,t} &= -8b^2 \left(k(a(v')^2 + 2bv' + a) - v'(X+t) \right) \\ &\quad \cdot \left(((v')^2 + 1)(X+t)^2 + v'(k(a(v')^2 + 2bv' + a) - v'(X+t))(X+t) \right) \\ &\quad - 2a^2 \left(v'(X+t) - k((X+t)^2 + 1)(a(v')^2 + 2bv' + a) \right) ((v')^2 + 1) \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right), \\ R_{0,t} &= a^2 \left(v'(X+t) - k((X+t)^2 + 1)(a(v')^2 + 2bv' + a) \right)^2 \left((v')^2 + (X+t)^2 + 1 \right) \\ &\quad - 4b^2 \left(((v')^2 + 1)(X+t)^2 + v'(k(a(v')^2 + 2bv' + a) - v'(X+t))(X+t) \right)^2. \end{aligned}$$

Observe que a equação $v'' = k(a + 2bv' + a(v')^2)$ sobre J_1 impede que v' seja identicamente nula sobre J_1 . Portanto, é possível encontrar $t_1 \in J_1$ sobre o qual $v'(t_1) = v'_1 \neq 0 \neq v''_1 = v''(t_1)$. Além disso, podemos pedir também que $a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2 \neq 0$. Com o auxílio do computador, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \text{Elm}_Y(P_t, P_{t_1}) &= \det \begin{bmatrix} R_{2,t} & 0 & R_{2,t_1} & 0 \\ R_{1,t} & R_{2,t} & R_{1,t_1} & R_{2,t_1} \\ R_{0,t} & R_{1,t} & R_{0,t_1} & R_{1,t_1} \\ 0 & R_{0,t} & 0 & R_{0,t_1} \end{bmatrix} \\ &= (R_{0,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{0,t})^2 - (R_{0,t_1}R_{1,t} - R_{1,t_1}R_{0,t})(R_{1,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{1,t}) \end{aligned}$$

Com o auxílio do computador, vemos que os fatores acima possuem a forma

$$\begin{aligned} R_{0,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{0,t} &= \sum_{i=0}^8 A_i X^i, \\ R_{0,t_1}R_{1,t} - R_{1,t_1}R_{0,t} &= \sum_{i=0}^{10} B_i X^i, \\ R_{1,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{1,t} &= \sum_{i=0}^6 C_i X^i. \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} 0 = \text{Elm}_Y(P_t, P_{t_1}) &= (R_{0,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{0,t})^2 - (R_{0,t_1}R_{1,t} - R_{1,t_1}R_{0,t})(R_{1,t_1}R_{2,t} - R_{2,t_1}R_{1,t}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^8 A_i X^i \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{10} B_i X^i \right) \left(\sum_{i=0}^6 C_i X^i \right) \\ &= (A_8^2 - C_6 B_{10}) X^{16} + (2A_7 A_8 - C_6 B_9 - C_5 B_{10}) X^{15} + \dots \end{aligned}$$

Fazendo as contas, obtemos

$$\begin{aligned}
A_8 &= 4a^3bk^2(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2), \\
A_7 &= -2a^2k(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \\
&\quad \cdot \left(\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &2ka^2(v')^2(v'_1)^2 + 2ka^2(v')^2 + 2ka^2(v'_1)^2 \\ &+ 2ka^2 - 8kab(v')^2v'_1 + 8kabv'(v'_1)^2 \\ &+ 8kabv' - 8kabv'_1 - 8kb^2v'v'_1 \end{aligned} \right) t \\ &+ \left(\begin{aligned} &8kabv'(v'_1)^2 - 2ka^2(v')^2 - 2ka^2(v'_1)^2 \\ &- 2ka^2 - 8kab(v')^2v'_1 - 2ka^2(v')^2(v'_1)^2 \\ &+ 8kabv' - 8kabv'_1 + 8kb^2v'v'_1 \\ &+ a(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(4b^2k^2 + 1) \end{aligned} \right) t_1 \end{aligned} \right), \\
B_{10} &= 4a^4bk^3(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2), \\
B_9 &= -4a^4k^3(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \left(\begin{aligned} &a + 6bv' - 4bv'_1 + a(v')^2 + a(v'_1)^2 \\ &+ a(v')^2(v'_1)^2 + 6bv'(v'_1)^2 - 4b(v')^2v'_1 \end{aligned} \right) t \\
&\quad + 4a^4k^3(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \left(\begin{aligned} &a - 4bv' + 6bv'_1 + a(v')^2 + a(v'_1)^2 \\ &+ a(v')^2(v'_1)^2 - 4bv'(v'_1)^2 + 6b(v')^2v'_1 \end{aligned} \right) t_1 \\
&\quad - 2a^2k^2(v' - v'_1) \left(\begin{aligned} &-a^4(v')^2 - a^4(v'_1)^2 - 4a^2b^2 - a^4 + a^4v'(v'_1)^3 + a^4(v')^3v'_1 \\ &-4a^3bv' - 4a^3bv'_1 - a^4(v')^2(v'_1)^2 + a^4(v')^3(v'_1)^3 + a^4v'v'_1 \\ &+ 16b^4v'v'_1 + 16a^2b^2(v')^2(v'_1)^2 - 4a^2b^2v'v'_1 + 16ab^3v'(v'_1)^2 \\ &+ 16ab^3(v')^2v'_1 + 4a^2b^2v'(v'_1)^3 + 4a^2b^2(v')^3v'_1 \\ &+ 4a^3b(v')^2(v'_1)^3 + 4a^3b(v')^3(v'_1)^2 \end{aligned} \right), \\
C_6 &= 4a^2bk(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2), \\
C_5 &= -4a^2k(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \left(\begin{aligned} &a + 2bv' - 4bv'_1 + a(v')^2 + a(v'_1)^2 \\ &+ a(v')^2(v'_1)^2 + 2bv'(v'_1)^2 - 4b(v')^2v'_1 \end{aligned} \right) t \\
&\quad + 4a^2k(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \left(\begin{aligned} &a - 4bv' + 2bv'_1 + a(v')^2 + a(v'_1)^2 \\ &+ a(v')^2(v'_1)^2 - 4bv'(v'_1)^2 + 2b(v')^2v'_1 \end{aligned} \right) t_1 \\
&\quad - 2(v' - v'_1) \left(\begin{aligned} &-a^4(v')^2 - a^4(v'_1)^2 + 4a^2b^2 - a^4 + a^4v'(v'_1)^3 + a^4(v')^3v'_1 - 8a^4b^2k^2 \\ &-a^4(v')^2(v'_1)^2 + a^4(v')^3(v'_1)^3 + a^4v'v'_1 + 16b^4v'v'_1 - 12a^2b^2v'v'_1 \\ &-16a^3b^3k^2v' - 16a^3b^3k^2v'_1 - 4a^2b^2v'(v'_1)^3 - 4a^2b^2(v')^3v'_1 - 8a^4b^2k^2(v')^2 \\ &-8a^4b^2k^2(v'_1)^2 + 8a^4b^2k^2v'(v'_1)^3 + 8a^4b^2k^2(v')^3v'_1 + 32a^2b^4k^2(v')^2(v'_1)^2 \\ &-8a^4b^2k^2(v')^2(v'_1)^2 + 16a^3b^3k^2(v')^2(v'_1)^3 + 16a^3b^3k^2(v')^3(v'_1)^2 \\ &+ 8a^4b^2k^2(v')^3(v'_1)^3 - 32a^2b^4k^2v'v'_1 + 8a^4b^2k^2v'v'_1 \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Como já era esperado, verifica-se que $A_8^2 - C_6B_{10} = 0$. Quanto a $2A_7A_8 - C_6B_9 - C_5B_{10}$, coletando em t , obtemos

$$\begin{aligned}
2A_7A_8 - C_6B_9 - C_5B_{10} &= 64a^4b^3k^3v'v'_1(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \\
&\quad \cdot \left(\begin{aligned} &2ak(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2)(t - t_1) \\ &+ (v' - v'_1)(-a^2 + 4b^2 + 2abv' + 2abv'_1 + a^2v'v'_1) \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

Como $v'_1v''_1 \neq 0$, existe intervalo aberto não vazio $J_2 \subset J_1$ em torno de t_1 sobre o qual

$$v'v'_1(v' - v'_1)(v'v'_1 - 1)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2) \neq 0,$$

com exceção do ponto $t = t_1$. Portanto, sobre J_2 devemos ter

$$0 = 2ak(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(a + 2bv' + a(v')^2)(t - t_1) + (v' - v'_1)(-a^2 + 4b^2 + 2abv' + 2abv'_1 + a^2v'v'_1).$$

Derivando essa equação e utilizando que $v'' = k(a + 2bv' + a(v')^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2ak(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2) \left((2bv'' + 2av'v'')(t - t_1) + (a + 2bv' + a(v')^2) \right) \\ &\quad + v''(-a^2 + 4b^2 + 2abv' + 2abv'_1 + a^2v'v'_1) + (v' - v'_1)(2abv'' + a^2v'v'_1) \\ &= 4ak^2(b + av')(a + 2bv' + a(v')^2)(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)(t - t_1) \\ &\quad + k(a + 2bv' + a(v')^2)(a^2(v'_1)^2 + a^2 + 4b^2 + 4abv' + 4abv'_1 + 2a^2v'v'_1). \end{aligned}$$

Tomando a eliminante em $t - t_1$, obtemos que sobre J_2 vale

$$0 = 2ak^2(a + 2bv'_1 + a(v'_1)^2)^2(a + 2bv' + a(v')^2)(3a^2(v')^2 + a^2 + 4b^2 + 8abv').$$

Mas isso implica que v' é constante sobre J_2 e, portanto, $v''(t_1) = v'_1 = 0$, uma contradição.

Isso finalmente prova que a hipótese de que u' não é constante leva a uma contradição. Portanto, devemos ter u' constante e o resultado segue. $\square$

2.3.2 Norma da segunda forma constante: $4H^2 - 2K = c$

Nesta seção, iremos analisar a relação de Weingarten da norma da segunda forma constante, mais precisamente

$$4H^2 - 2K = c.$$

Substituindo as fórmulas das curvaturas H e K , obtemos

$$\begin{aligned} c &= 4H^2 - 2K = 4 \left(\frac{v''((t + u')^2 + 1) + u''((v')^2 + 1) - v'(t + u')}{2((t + u')^2 + (v')^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \\ &\quad - 2 \left(\frac{(u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') - \frac{1}{4}((v')^2 + 1 - (u' + t)^2)^2}{((t + u')^2 + (v')^2 + 1)^2} \right) \\ &= \frac{(v''((t + u')^2 + 1) + u''((v')^2 + 1) - v'(t + u'))^2}{((t + u')^2 + (v')^2 + 1)^3} \\ &\quad - \frac{2 \left((u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') - \frac{1}{4}((v')^2 + 1 - (u' + t)^2)^2 \right)}{((t + u')^2 + (v')^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{((t + u')^2 + (v')^2 + 1)^3} \left((v''((t + u')^2 + 1) + u''((v')^2 + 1) - v'(t + u'))^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left((u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') - \frac{1}{4}((v')^2 + 1 - (u' + t)^2)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot ((t + u')^2 + (v')^2 + 1) \right). \end{aligned}$$

Essa equação equivale a

$$\begin{aligned} 0 = & \left(v'' \left((t+u')^2 + 1 \right) + u'' \left((v')^2 + 1 \right) - v' (t+u') \right)^2 \\ & - 2 \left((u'' + (u'+t) v') (v'' - (u'+t) v') - \frac{1}{4} \left((v')^2 + 1 - (u'+t)^2 \right)^2 \right) \\ & \cdot \left((t+u')^2 + (v')^2 + 1 \right) - c \left((t+u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^3. \end{aligned}$$

Isso define uma família de polinômios $P_t(X, Y)$, $t \in J$, tal que $P_t(u'(s), u''(s)) \equiv 0$ sobre $I \times J$.

Utilizando a técnica da eliminante, podemos obter uma equação livre de u'' . Coletando $P_t(u, u'')$ em u'' , obtemos

$$\begin{aligned} P_t = & \left((v')^2 + 1 \right)^2 (u'')^2 + 2v' (t+u')^2 (t+u' + v'v'') u'' \\ & + 2 \left(\frac{1}{4} \left((v')^2 - (t+u')^2 + 1 \right)^2 - v' (t+u') (v'' - v' (t+u')) \right) \left((v')^2 + (t+u')^2 + 1 \right) \\ & - c \left((v')^2 + (t+u')^2 + 1 \right)^3 + \left(v'' \left((t+u')^2 + 1 \right) - v' (t+u') \right)^2 \\ = & : Q_t (u'')^2 + R_t (u') u'' + S_t (u'). \end{aligned}$$

Com o auxílio do computador, coletando em u' , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \text{Elm}_{u''}(P_t, P_0) &= \det \begin{bmatrix} Q_t & 0 & Q_0 & 0 \\ R_t & Q_t & R_0 & Q_0 \\ S_t & R_t & S_0 & R_0 \\ 0 & S_t & 0 & S_0 \end{bmatrix} \\ &= (Q_0 S_t - S_0 Q_t)^2 - (R_0 S_t - S_0 R_t) (Q_0 R_t - R_0 Q_t) \\ &= (2c-1) \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4} (v' + v'_0)^2 (v' - v'_0)^2 ((v')^2 + (v'_0)^2 + 2)^2 (2c-1) \\ & + 2 (v' - v'_0)^2 ((v')^2 (v'_0)^2 + 2v'v'_0 + v'(v'_0)^3 + (v')^3 v'_0 - 1) \end{aligned} \right) (u')^{12} + \dots \end{aligned}$$

Queremos mostrar que, assim como no caso linear, devemos ter u' constante. Suponha que isso não acontece. Neste caso, o polinômio obtido na equação acima deve ser identicamente nulo em u' . Em particular, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = & (2c-1) \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4} (v' + v'_0)^2 (v' - v'_0)^2 ((v')^2 + (v'_0)^2 + 2)^2 (2c-1) \\ & + 2 (v' - v'_0)^2 ((v')^2 (v'_0)^2 + 2v'v'_0 + v'(v'_0)^3 + (v')^3 v'_0 - 1) \end{aligned} \right) \\ = & (2c-1) \left(\frac{1}{4} (2c-1) (v')^8 + \dots \right). \end{aligned}$$

Assim, se $2c-1 \neq 0$, então temos um polinômio não nulo em v' e, portanto, devemos ter v' constante. Voltemos à equação inicial com essa hipótese para ver que isso não pode acontecer. Fazendo

$v' \equiv v'_0$ e $v'' \equiv 0$ na equação inicial e coletando em t , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (u''((v'_0)^2 + 1) - v'_0(t + u'))^2 \\ &\quad - 2 \left((u'' + (u' + t)v'_0)(-(u' + t)v'_0) - \frac{1}{4}((v'_0)^2 + 1 - (u' + t)^2)^2 \right) \\ &\quad \cdot \left((t + u')^2 + (v'_0)^2 + 1 \right) - c \left((t + u')^2 + (v'_0)^2 + 1 \right)^3 \\ &= -\frac{1}{2}(2c - 1)t^6 + \dots \end{aligned}$$

Como $t \in J$ é qualquer, isso é impossível se $2c - 1 \neq 0$.

Portanto, se u' não é constante, devemos ter $2c - 1 = 0 \iff c = \frac{1}{2}$. Fazendo essa substituição na equação inicial, ela se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= P_t(u', u'') = \left(v''((t + u')^2 + 1) + u''((v')^2 + 1) - v'(t + u') \right)^2 \\ &\quad - 2 \left((u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') - \frac{1}{4}((v')^2 + 1 - (u' + t)^2)^2 \right) \\ &\quad \cdot \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right)^3 \\ &= \left(v''((t + u')^2 + 1) + u''((v')^2 + 1) - v'(t + u') \right)^2 \\ &\quad - 2 \left((u'' + (u' + t)v')(v'' - (u' + t)v') + ((v')^2 + 1)(t + u')^2 \right) \\ &\quad \cdot \left((t + u')^2 + (v')^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

O Exemplo A.19 do Apêndice A.4 mostra que $P_t(X, Y)$ é irredutível, para todo $t \in J$. Assim, se a curva $\gamma(s) = (u'(s), u''(s))$ não é constante, como estamos supondo, então, pelo argumento usual via curvas algébricas, para cada $t \in J$ deve existir $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_t(X, Y) = \lambda_t P_0(X, Y).$$

Coletando em Y , obtemos

$$P_t = ((v')^2 + 1)^2 Y^2 + \dots$$

Portanto, em particular devemos ter $((v')^2 + 1)^2 = \lambda_t ((v'_0)^2 + 1)^2$ e, portanto,

$$\lambda_t = \frac{((v')^2 + 1)^2}{((v'_0)^2 + 1)^2}.$$

Coletando $0 = P_t - \lambda_t P_0$ em X, Y , os primeiros termos obtidos são

$$\begin{aligned} 0 &= P_t - \lambda_t P_0 \\ &= \frac{-(v' - v'_0)(v' + v'_0)((v')^2 + (v'_0)^2 + 2)((v'')^2 - 2)}{((v'_0)^2 + 1)^2} X^4 \\ &\quad + \frac{-2v'(v' - v'_0)(v' + v'_0)((v')^2 + (v'_0)^2 + 2)}{((v'_0)^2 + 1)^2} X^3 Y + \dots \end{aligned}$$

Para que o coeficiente de X^3Y seja identicamente nulo, devemos ter $v' \equiv v'_0$. Fazendo essa substituição, além de $v'' \equiv 0$, e coletando em X, Y , obtemos

$$0 = P_t - \lambda_t P_0 = -8tX^3 + \dots$$

Mas isso implica $t = 0$ para todo $t \in J$, uma contradição.

Isso mostra que devemos ter, necessariamente, u' constante. Assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.42. *Uma superfície de translação geométrica em Nil_3 do tipo gráfico de função parametrizada por $\phi(s, t) = (s, t, u(s) + v(t) + \frac{st}{2})$ é de Weingarten com $4H^2 - 2K = c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $u(s) = u'_0 s + u_0$ para certas constantes $u_0, u'_0 \in \mathbb{R}$ e $v = v(t)$ é solução da equação diferencial ordinária*

$$c = 4H^2 - 2K = \frac{\left(v'' \left((t + u'_0)^2 + 1\right) - v' (t + u'_0)\right)^2}{\left((t + u'_0)^2 + (v')^2 + 1\right)^3} - \frac{4(u'_0 + t) v' (v'' - (u'_0 + t) v') - \left((v')^2 + 1 - (u'_0 + t)^2\right)^2}{2 \left((t + u'_0)^2 + (v')^2 + 1\right)^2}.$$

Espaços produto

Definição 3.1. Definimos o **espaço produto** de duas variedades riemannianas (M_1, g_1) e (M_2, g_2) como sendo a variedade produto $M_1 \times M_2$ munida da métrica $g = g_1 + g_2$.

Observação 3.2. O espaço tangente $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ pode ser identificado com $T_p M_1 \oplus T_q M_2$. Assim, quando dizemos que a métrica g sobre $M_1 \times M_2$ é dada por $g_1 + g_2$, queremos dizer

$$g_{(p,q)}(u, v) = g_{1,p}(u_1, v_1) + g_{2,q}(u_2, v_2)$$

sendo $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2 \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$, com $u_1, v_1 \in T_p M_1$ e $u_2, v_2 \in T_q M_2$.

Proposição 3.3. A conexão de Levi-Civita ∇ do espaço produto $M_1 \times M_2$ é dada por

$$\nabla_X Y = \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2$$

sendo $X, Y \in \chi(M_1 \times M_2)$ campos de vetores e X_i, Y_i as componentes de X e Y em $\chi(M_i)$ e $\overset{i}{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de M_i .

Demonstração. Basta mostrar que $\tilde{\nabla}_X Y := \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2$ define uma conexão simétrica e compatível com a métrica $g = g_1 + g_2$. Por unicidade da conexão de Levi-Civita, isso implica $\tilde{\nabla} = \nabla$.

Primeiro, mostramos que se $X \in \chi(M_1)$ e $Y \in \chi(M_2)$, então $[X, Y] = 0$.

Seja $\left\{ \overset{1}{\partial}_1, \dots, \overset{1}{\partial}_n, \overset{2}{\partial}_1, \dots, \overset{2}{\partial}_m \right\}$ uma base coordenada sobre M , com $\overset{i}{\partial}_j \in TM_i$ e escreva $X = \sum_{i=1}^n X_i \overset{1}{\partial}_i, Y = \sum_{j=1}^m Y_j \overset{2}{\partial}_j$. Note que X_i são funções que não dependem das variáveis de M_2 e, análogamente, Y_j não dependem das variáveis de M_1 . Usando as propriedades de colchetes, temos

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\sum_{i=1}^n X_i \overset{1}{\partial}_i, \sum_{j=1}^m Y_j \overset{2}{\partial}_j \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[X_i \overset{1}{\partial}_i, Y_j \overset{2}{\partial}_j \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(X_i \overset{1}{\partial}_i (Y_j) \overset{2}{\partial}_j + Y_j \left[X_i \overset{1}{\partial}_i, \overset{2}{\partial}_j \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(X_i \overset{1}{\partial}_i (Y_j) \overset{2}{\partial}_j - Y_j \left[\overset{2}{\partial}_j, X_i \overset{1}{\partial}_i \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(X_i \overset{1}{\partial}_i (Y_j) \overset{2}{\partial}_j - Y_j \left(\overset{2}{\partial}_j (X_i) \overset{1}{\partial}_i + X_i \left[\overset{2}{\partial}_j, \overset{1}{\partial}_i \right] \right) \right) \end{aligned}$$

Como Y_j não depende das variáveis de M_1 , temos $\overset{1}{\partial}_i(Y_j) = 0$. Analogamente, temos $\overset{2}{\partial}_j(X_i) = 0$. Por fim, $\left[\overset{2}{\partial}_j, \overset{1}{\partial}_i\right] = 0$ por se tratar de campos coordenados. Isso mostra que $[X, Y] = 0$.

Segue daí que, se $X = X_1 + X_2, Y = Y_1 + Y_2 \in \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M_1) \oplus \mathcal{X}(M_2)$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X &= \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2 - \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 - \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2 = \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 - \overset{1}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2 - \overset{2}{\nabla}_{X_2} Y_2 \\ &= [X_1, Y_1] + [X_2, Y_2] = [X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2] \\ &= [X_1 + Y_1, X_2 + Y_2] = [X, Y].\end{aligned}$$

Considere ainda $Z = Z_1 + Z_2 \in \mathcal{X}(M_1) \oplus \mathcal{X}(M_2)$. Observe então que

$$\begin{aligned}Z(g(X, Y)) &= Z(g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)) \\ &= Z_1(g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)) + Z_2(g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)) \\ &= Z_1(g_1(X_1, Y_1)) + Z_2(g_2(X_2, Y_2))\end{aligned}$$

pois $g_1(X_1, Y_1)$ não depende das variáveis de M_2 e vice-versa. Usando então a compatibilidade de cada métrica g_i , obtemos

$$\begin{aligned}Z(g(X, Y)) &= g_1\left(\overset{1}{\nabla}_{Z_1} X_1, Y_1\right) + g_1\left(X_1, \overset{1}{\nabla}_{Z_1} Y_1\right) + g_2\left(\overset{2}{\nabla}_{Z_2} X_2, Y_2\right) + g_2\left(X_2, \overset{2}{\nabla}_{Z_2} Y_2\right) \\ &= g_1\left(\overset{1}{\nabla}_{Z_1} X_1, Y_1\right) + g_2\left(\overset{2}{\nabla}_{Z_2} X_2, Y_2\right) + g_1\left(X_1, \overset{1}{\nabla}_{Z_1} Y_1\right) + g_2\left(X_2, \overset{2}{\nabla}_{Z_2} Y_2\right) \\ &= g\left(\overset{1}{\nabla}_{Z_1} X_1 + \overset{2}{\nabla}_{Z_2} X_2, Y\right) + g\left(X, \overset{1}{\nabla}_{Z_1} Y_1 + \overset{2}{\nabla}_{Z_2} Y_2\right) = g(\tilde{\nabla}_Z X, Y) + g(X, \tilde{\nabla}_Z Y).\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\nabla}$ é compatível com g . □

Proposição 3.4. *Suponha que M_1 e M_2 sejam variedades completas e considere $(p_1, p_2) \in M = M_1 \times M_2$, e $v_1 + v_2 \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$. Se $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$ são as geodésicas satisfazendo $\gamma_i(0) = p_i$ e $\gamma'_i(0) = v_i$, então $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ é a geodésica em M satisfazendo $\gamma(0) = (p_1, p_2)$ e $\gamma'(0) = v_1 + v_2$.*

Demonstração. Naturalmente, temos $\gamma(0) = (p_1, p_2)$ e $\gamma'(0) = v_1 + v_2$. Basta então usar a proposição anterior para verificar que

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'_1 + \gamma'_2} (\gamma'_1 + \gamma'_2) = \overset{1}{\nabla}_{\gamma'_1} \gamma'_1 + \overset{2}{\nabla}_{\gamma'_2} \gamma'_2 = 0.$$

Portanto, γ é geodésica. □

3.1 Superfícies regradas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Consideremos o espaço produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, em que $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária com a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$. Na seção anterior mostramos que as geodésicas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ podem ser descritas a partir das geodésicas de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}$. Façamos uma breve discussão a respeito dessas geodésicas.

Sendo $\mathbb{S}^2$ uma subvariedade com métrica induzida do ambiente $\mathbb{R}^3$, sua conexão de Levi-Civita é dada simplesmente pela componente tangente a $\mathbb{S}^2$ da conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^3$. Com isso, podemos verificar que a geodésica em $\mathbb{S}^2$ partindo de $p \in \mathbb{S}^2$ com vetor tangente unitário $v \in T_p\mathbb{S}^2$ é dada por

$$\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v.$$

De fato, observe que, no caso da esfera, o plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ é dado pelo complemento ortogonal de p em $\mathbb{R}^3$. Assim, $v \in T_p\mathbb{S}^2$ se, e somente se, $\langle p, v \rangle = 0$. Segue dessa ortogonalidade e do fato de p e v serem unitários que $|\gamma|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Isso mostra que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ está bem definida.

Temos $\gamma' = (-\sin t)p + (\cos t)v$. Portanto, γ satisfaz as condições iniciais $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Por fim, γ satisfaz a definição de geodésica, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. De fato,

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = (\gamma'')^T = ((-\cos t)p + (-\sin t)v)^T = (-\gamma)^T = 0,$$

pois o plano tangente $T_{\gamma}\mathbb{S}^2$ é dado pelo complemento ortogonal de γ e, portanto, a componente tangente de $-\gamma$ no ponto γ é nula. Isso mostra que γ é geodésica.

Se quisermos olhar para o caso em que $v \neq 0$ não é necessariamente unitário, basta tomar a reparametrização dada por

$$\gamma(t) = (\cos t|v|)p + (\sin t|v|)\frac{v}{|v|}.$$

Por fim, temos ainda o caso em que a geodésica é trivial, i.e. $v = 0$. Neste caso, γ é constante dada por $\gamma(t) \equiv p$.

Quanto às geodésicas de $\mathbb{R}$, é fácil verificar que a geodésica partindo de $r \in \mathbb{R}$ com vetor tangente $u \in T_r\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ é dada simplesmente por $\lambda(t) = r + tu$.

Com isso, podemos descrever as geodésicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Considere $P = (p, r) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $V = (v, u) \in T_{(p,r)}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = T_p\mathbb{S}^2 \oplus T_r\mathbb{R}$ unitário. Note que isso significa que $\langle p, v \rangle = 0$ em $\mathbb{R}^3$ e que $|v|^2 + u^2 = 1$. Se $v \neq 0$, então a geodésica $\gamma_{P,V}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ partindo de P com vetor V é dada por

$$\gamma_{P,V}(t) = \left((\cos t|v|)p + (\sin t|v|)\frac{v}{|v|}, r + tu \right). \quad (3.1)$$

Se $v = 0$, então temos simplesmente $\gamma_{P,V}(t) = (p, ut + r)$.

Podemos distinguir três tipos de geodésicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Definição 3.5. Dizemos que uma geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é

- (i) **vertical**, se $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}\mathbb{R}$;
- (ii) **horizontal**, se $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^2$;
- (iii) **oblíqua**, se não for vertical nem horizontal.

Observação 3.6. Observe que a definição acima se aplica, de fato, ao traço de $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, i.e. a definição não depende do ponto inicial $\gamma(0)$. Para ver isto, basta olhar para a expressão de γ em (3.1), observando que a mudança de ponto inicial sobre o traço da geodésica corresponde a uma translação do parâmetro t por uma constante e que se $\gamma'(0)$ satisfaz uma das condições (i), (ii) e (iii), então $\gamma'(t)$ satisfaz a mesma condição para todo $t \in \mathbb{R}$.

Olhemos agora para as superfícies regradas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Pela Definição 1.10, uma superfície regrada em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é uma aplicação $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(s, t) = \exp_{P(s)}(tV(s)),$$

sendo $P : I \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ a curva base e $V : I \rightarrow T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ um campo de vetores unitários ao longo de P , chamado de curva direcional.

Iremos permitir que ϕ possua algumas singularidades, desde que respeitada a seguinte

Condição de tolerância. Se ϕ não é imersão, então existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\tau \geq 0$ tais que, se $\{\phi_s, \phi_t\}$ é linearmente dependente sobre $(s_0, t_0) \in I \times \mathbb{R}$, então $t_0 = h(s_0) + k\tau$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Sendo essa condição invariante por difeomorfismos do domínio $I \times \mathbb{R}$, sabemos ainda que podemos supor que a curva base é ortogonal à curva direcional, i.e. P e V satisfazem a condição de ortogonalidade

$$\langle P', V \rangle = 0.$$

Naturalmente, os três tipos de geodésicas definidos acima nos leva à distinção de três tipos particulares de superfícies regradas.

Definição 3.7. Dizemos que uma superfície regrada em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é do tipo

- (i) **vertical**, se está contida numa superfície regrada que pode ser descrita por uma parametrização em que todas as geodésicas são verticais;
- (ii) **horizontal**, se não é vertical e está contida numa superfície regrada que pode ser descrita por uma parametrização em que todas as geodésicas são horizontais;
- (iii) **oblíqua**, se não é vertical nem horizontal e está contida numa superfície regrada que pode ser descrita por uma parametrização em que todas as geodésicas são oblíquas.

3.1.1 Verticais

Começamos nosso estudo com o caso mais simples das superfícies regradas verticais. Neste caso, a curva direcional tem a forma $V(s) = (0, u(s))$. Como estamos supondo V ser unitário, podemos supor sem perda de generalidade que $u(s) \equiv 1$. Assim, podemos supor que nossa superfície está parametrizada por $\phi(s, t) = \exp_{P(s)}(tV(s)) = (p(s), r(s) + t)$.

Observando que $P' = (p', r')$ e $V = (0, 1) \in T_p(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$, a condição de ortogonalidade nos diz que $0 = \langle P', V \rangle = r'$, i.e. podemos supor r constante. A menos de uma reparametrização em t , podemos supor então que a superfície é dada por $\phi(s, t) = (p(s), t)$, para alguma curva $p : I \rightarrow \mathbb{S}^2$. Os vetores tangentes são dados por

$$\phi_s = (p', 0) \text{ e } \phi_t = (0, 1).$$

Note então que se $p'(s_0) = 0$ para algum $s_0 \in I$, então ϕ deixa de ser imersão ao longo de toda a geodésica $\phi(s_0, t)$, excedendo nossa condição de tolerância. Portanto, é necessário que p seja regular. Com isso, podemos supor ainda que p está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano, i.e. $|p'| = 1$. Isso nos permite definir um campo normal unitário ao longo de ϕ , dado por

$$N = (p \times p', 0).$$

Note que o campo está bem definido, pois $\langle p \times p', p \rangle = 0$ nos diz que $p \times p' \in T_p \mathbb{S}^2$.

Olhemos agora para as derivadas covariantes de ϕ , começando por $\nabla_{\phi_s} \phi_s = ((p'')^T, 0)$. Primeiro observe que $\langle p', p' \rangle = 1$ implica que $\langle p'', p' \rangle = 0$ e $\langle p', p \rangle = 0$ implica que $\langle p'', p \rangle = -1$. Observando que $\{p, p', p \times p'\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, essas observações nos dizem que $p'' = -p + \langle p'', p \times p' \rangle (p \times p')$. Portanto, a componente tangente de p'' em p é dada por $(p'')^T = \langle p'', p \times p' \rangle (p \times p')$.

Quanto às outras derivadas covariantes, usando a decomposição da conexão de Levi-Civita para o espaço produto, temos $\nabla_{\phi_t} \phi_s = (\bar{\nabla}_0 p', \bar{\nabla}_1 0) = (0, 0)$ e $\nabla_{\phi_t} \phi_t = 0$ (direção das geodésicas). Em suma,

$$\begin{aligned} \nabla_{\phi_s} \phi_s &= (\langle p'', p \times p' \rangle (p \times p'), 0), \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= \nabla_{\phi_t} \phi_t = (0, 0). \end{aligned}$$

Com isso, obtemos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = 1, \quad F = \langle \phi_s, \phi_t \rangle = 0, \quad G = \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1, \\ e &= \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, N \rangle = \langle p'', p \times p' \rangle, \quad f = \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, N \rangle = 0, \quad g = \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Segue daí que as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{\langle p'', p \times p' \rangle}{2}, \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0. \end{aligned}$$

Com isso, provamos que

Proposição 3.8. *Toda superfície regrada vertical em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten com $K \equiv 0$. Toda tal superfície pode ser parametrizada na forma $\phi(s, t) = (p(s), t)$ com $p(s) \in \mathbb{S}^2$ satisfazendo $|p'| \equiv 1$. Sob essa parametrização, sua curvatura média é dada por*

$$H = \frac{\langle p'', p \times p' \rangle}{2}.$$

3.1.2 Horizontais

Consideramos agora o caso das superfícies regradas horizontais. Este é o caso em que a curva direcional tem a forma $V(s) = (v(s), 0)$, com $v \in T_p \mathbb{S}^2$ unitário, i.e. com $\langle p, v \rangle \equiv 0$ e $\langle v, v \rangle = 1$ na métrica de $\mathbb{R}^3$. A aplicação ϕ será dada por

$$\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), r(s)).$$

Neste caso, a condição de ortogonalidade $\langle P', V \rangle = 0$ se traduz como $\langle (p', r'), (v, 0) \rangle = \langle p', v \rangle = 0$. Dessa condição e do fato de que $\langle p, v \rangle = 0$, derivando essa condição vem também que $\langle p, v' \rangle = 0$.

Por simplicidade, denotemos $\kappa = \cos t$ e $\sigma = \sin t$. Os vetores tangentes à superfície são dados por

$$\phi_s = (\kappa p' + \sigma v', r'), \quad \phi_t = (-\sigma p + \kappa v, 0).$$

Como p e v são ortogonais, temos em particular que $\phi_t \neq 0$, para todo $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$. Temos ainda $\langle \phi_s, \phi_t \rangle = 0$. Portanto, sabemos que ϕ é imersão precisamente sobre os pontos satisfazendo $|\phi_s|^2 = |\kappa p' + \sigma v'|^2 + (r')^2 > 0$.

Podemos considerar o referencial ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ ao longo de ϕ dado por

$$E_1 = (-\sigma p + \kappa v, 0), \quad E_2 = (p \times v, 0), \quad E_3 = (0, 1).$$

Observe que esse referencial está bem definido, i.e. todos os vetores da componente $T\mathbb{S}^2$ são ortogonais, segundo a métrica de $\mathbb{R}^3$, ao vetor posição $\kappa p + \sigma v$, correspondente à componente de $\mathbb{S}^2$ do ponto $\phi = (\kappa p + \sigma v, r)$ no espaço produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Do fato de p ser unitário, temos $\langle p', p \rangle = 0$. Da condição de ortogonalidade, vem que $\langle p', v \rangle = 0$. Como $\{p, v, p \times v\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, isso implica que $p' = \alpha(p \times v)$, com $\alpha := \langle p', p \times v \rangle = \det(p', p, v)$. De forma similar, temos $v' = \beta(p \times v)$, com $\beta := \langle v', p \times v \rangle = \det(v', p, v)$. Assim, escrevendo ϕ_s na base E_i com, digamos, $\phi_s = aE_1 + bE_2 + cE_3$, os coeficientes a, b, c devem satisfazer

$$\begin{aligned} ((\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v), r') &= (\kappa p' + \sigma v', r') = \phi_s = a(-\sigma p + \kappa v, 0) + b(p \times v, 0) + c(0, 1) \\ &= (-a\sigma p + a\kappa v + b(p \times v), c). \end{aligned}$$

Isso implica $a = 0$, $b = \kappa\alpha + \sigma\beta$ e $c = r'$. Observe que $\phi_t = E_1$. Assim, temos

$$\phi_s = (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_2 + r'E_3, \quad \phi_t = E_1.$$

Essa escrita é útil para definir um campo normal ao longo da superfície. Basta tomar por exemplo

$$v := \det \begin{bmatrix} 0 & \kappa\alpha + \sigma\beta & r' \\ 1 & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = r'E_2 - (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_3 = (r'(p \times v), -(\kappa\alpha + \sigma\beta)).$$

Isso nos permite considerar o campo normal unitário $N = \frac{v}{|v|}$ sobre os pontos em que ϕ é imersão. Olhemos agora para as derivadas covariantes. Teremos

$$\nabla_{\phi_s} \phi_s = \left((\kappa p' + \sigma v')_s^T, r'' \right).$$

Precisamos encontrar a componente tangente a $\mathbb{S}^2$ de $(\kappa p' + \sigma v')_s$ sobre o ponto $\kappa p + \sigma v$. Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} (\kappa p' + \sigma v')_s &= ((\kappa \alpha + \sigma \beta)(p \times v))_s \\ &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(p' \times v + p \times v') \\ &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)((\alpha(p \times v)) \times v + p \times (\beta(p \times v))) \\ &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(-\alpha p - \beta v). \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \langle (\kappa p' + \sigma v')_s, \kappa p + \sigma v \rangle &= \langle (\kappa \alpha + \sigma \beta)(-\alpha p - \beta v), \kappa p + \sigma v \rangle \\ &= (\kappa \alpha + \sigma \beta) \langle -\alpha p - \beta v, \kappa p + \sigma v \rangle = -(\kappa \alpha + \sigma \beta)^2. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} (\kappa p' + \sigma v')_s^T &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(-\alpha p - \beta v) - (-(\kappa \alpha + \sigma \beta)^2)(\kappa p + \sigma v) \\ &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\alpha \kappa + \sigma \beta)(-\alpha + \alpha \kappa^2 + \kappa \sigma \beta)p \\ &\quad + (-\beta + \sigma^2 \beta + \alpha \kappa \sigma)(\alpha \kappa + \sigma \beta)v \\ &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) - (\alpha \kappa + \sigma \beta)(\alpha \sigma - \kappa \beta)(\sigma p - \kappa v) \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\nabla_{\phi_s} \phi_s = \left[\begin{array}{c} (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) - (\alpha \kappa + \sigma \beta)(\alpha \sigma - \kappa \beta)(\sigma p - \kappa v) \\ r'' \end{array} \right].$$

Temos também

$$\nabla_{\phi_t} \phi_s = \left((\kappa p' + \sigma v')_t^T, 0 \right).$$

Procedendo como anteriormente, teremos

$$(\kappa p' + \sigma v')_t = ((\kappa \alpha + \sigma \beta)(p \times v))_t = (-\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v).$$

Portanto,

$$\langle (\kappa p' + \sigma v')_t, \kappa p + \sigma v \rangle = \langle (-\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v), \kappa p + \sigma v \rangle = 0.$$

Assim, a componente tangente é dada por

$$(\kappa p' + \sigma v')_t^T = (-\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v).$$

Concluimos daí que

$$\nabla_{\phi_t} \phi_s = \begin{bmatrix} (-\sigma\alpha + \kappa\beta)(p \times v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, sabemos que $\nabla_{\phi_t} \phi_t = (0, 0)$ pois essa é a direção das geodésicas. Com isso, obtemos a primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = (\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 \\ F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = 0 \\ G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 \\ W^{-2} &= (EG - F^2) = E \\ \tilde{e} &= \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, v \rangle = r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta) \\ \tilde{f} &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, v \rangle = r'(-\sigma\alpha + \kappa\beta) \\ \tilde{g} &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

As curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}W^3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) = \frac{r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta)}{2\left((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ K &= W^4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) = \frac{-(r')^2(-\sigma\alpha + \kappa\beta)^2}{\left((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Analisemos o caso $K \equiv 0$, equivalente à equação $r'(-\sigma\alpha + \kappa\beta) \equiv 0$.

Suponha que $r' \neq 0$ sobre um certo intervalo maximal $I_1 \subset I$. Sobre $I_1 \times \mathbb{R}$, a equação se reduz a $-\sigma\alpha + \kappa\beta = 0$. Isso implica $\alpha = \beta \equiv 0$ sobre I_1 . Mas então lembrando que $p' = \alpha(p \times v)$ e $v' = \beta(p \times v)$, isso implica que $p' = v' \equiv 0$ sobre I_1 . Notando que $v = (r'(p \times v), -(\kappa\alpha + \sigma\beta)) = (r'(p \times v), 0)$ sobre I_1 , a maximalidade de I_1 implica que $I_1 = I$. Do contrário, por continuidade haveria um ponto interior de I (extremo de I_1) sobre o qual $v = 0$ e ϕ deixaria de ser imersão sobre toda uma geodésica, excendo nossa condição de tolerância.

Conclusão: se $r' \neq 0$ sobre algum ponto, então $r' \neq 0$ sobre todo I e $p = p_0$ e $v = v_0$ são constantes. A superfície é dada por

$$\phi(s, t) = ((\cos t)p_0 + (\sin t)v_0, r(s)).$$

Naturalmente, como $r' \neq 0$, podemos reparametrizá-la de modo a assumir a forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p_0 + (\sin t)v_0, s)$. Mas isso nos mostra que a superfície é do tipo vertical, contradizendo a hipótese de ser horizontal.

Portanto, se $K \equiv 0$, devemos ter $r' \equiv 0$. Isso nos diz que $r \equiv r_0$ é constante e ϕ tem a forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), r_0)$, i.e. a imagem de ϕ descreve um subconjunto da esfera horizontal de altura $r = r_0$ no produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Podemos obter a esfera completa tomando por exemplo $p(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ e $v(s) = (0, 0, 1)$. Essa escolha fornece a parametrização dada por

$\phi(s, t) = ((\cos t \cos s, \cos t \sin s, \sin t), r_0)$ e podemos verificar que ϕ deixa de ser imersão precisamente sobre pontos da forma $t = k\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Este fato faz com que ϕ , além de estar de acordo, justifique a escolha da condição de tolerância. Observe da fórmula acima que tais esferas horizontais também satisfazem $H = 0$, i.e. são superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Sabemos também que tais esferas são totalmente geodésicas (fato geral em espaços produto).

Suponha agora que exista algum ponto com $K \neq 0$. Sejam $R, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $(\alpha, \beta) = R(\cos \theta, \sin \theta)$. Fazendo as contas, é possível verificar que

$$\begin{aligned} E &= R^2 \cos^2(\theta - t) + (r')^2, \\ \tilde{e} &= (r'R' - Rr'') \cos(\theta - t) - Rr'\theta' \sin(\theta - t), \\ \tilde{f} &= Rr' \sin(\theta - t). \end{aligned}$$

Note que existência de pontos com $K \neq 0$ implica em particular na existência de um intervalo aberto maximal $I_1 \subset I$ sobre o qual $r'R \neq 0$.

Suponha ainda que a superfície é de classe $\mathcal{C}^3$. Podemos considerar então a condição de Kühnel, dada neste caso por

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_s & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 4(-\tilde{f}^2) & (-\tilde{f}^2)_s & (-\tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} = -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fixe $s_0 \in I_1$. Note então que deve existir um intervalo aberto $J_{s_0} \subset \mathbb{R}$ tal que o fator $\tilde{f} = Rr' \sin(\theta - t)$ não se anula sobre $\{s_0\} \times J_{s_0}$. Assim, fixando $s = s_0$, temos que podemos eliminar o fator $\tilde{f}$ da equação para todo $t \in J_{s_0}$. Por simplicidade, denote $C = \cos(\theta - t)$, $S = \sin(\theta - t)$. Coletando a equação em S , fazendo $S^2 = 1 - C^2$ e em seguida coletando em C, S obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= (4R^4(r'')^2 - 2r'''R^4r' + 2R''R^3(r')^2 - 2R^3r'r''R' - 2R^2(r')^2(R')^2)C^4 \\ &\quad + (2R^4r'r'' - 2R^3(r')^2R' - 2R^4(r')^2\theta'' + 2R^3(r')^2\theta'R')C^3S \\ &\quad + \left(\begin{aligned} &4r'''R^4r' - 4R^4(r'')^2 - 4R''R^3(r')^2 - 4R^3r'r''R' + 2r'''R^2(r')^3 \\ &- 4R^2(r')^2(r'')^2 + 8R^2(r')^2(R')^2 - 2R''R(r')^4 + 2R(r')^3r''R' + 2(r')^4(R')^2 \end{aligned} \right) C^2 \\ &\quad + \left(\begin{aligned} &2R^2(r')^4\theta'' - 2R^2(r')^3r'' + 4R^4(r')^2\theta'' + 4R^3(r')^2R' \\ &- 4R^4r'r'' + 2R(r')^4R' - 2R(r')^4\theta'R' - 6R^3(r')^2\theta'R' + 2R^4r'r''\theta' \end{aligned} \right) CS \\ &\quad - 2(r')^2(Rr'' - r'R')^2. \end{aligned}$$

Argumentamos que os coeficientes em C, S dessa expressão são identicamente nulos sobre I_1 . De fato, basta observar que a equação nos diz que a curva não constante $\gamma : J_{s_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$\gamma(t) = (C(s_0, t), S(s_0, t))$ está contida numa curva algébrica dada por $P(X, Y) = 0$, em que P é o polinômio obtido da equação ao se substituir C, S por X, Y . Por outro lado, γ também está contida na curva algébrica de equação $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Isso significa que elas possuem infinitos pontos em sua interseção. Segue do teorema de Bézout para curvas algébricas no plano $\mathbb{R}^2$ que esses polinômios devem possuir um fator comum não constante. Mas como $X^2 + Y^2 - 1$ é irredutível, ele deve ser esse fator. Contudo, o grau em Y de P é no máximo 1. Isso implica que P é o polinômio identicamente nulo. Como $s_0 \in I_1$ é qualquer, isso implica que as funções definidas por cada coeficiente são identicamente nulas sobre I_1 . Em particular, como $r'R \neq 0$ sobre I_1 , o termo independente nos diz que $Rr'' - r'R' \equiv 0$ ou ainda

$$\frac{r''}{r'} = \frac{R'}{R} \text{ sobre } I_1.$$

Note que essa equação admite existência e unicidade de solução para R , dadas r e condição inicial $R(s_0) = R_0$. Essa solução deve ser dada por

$$R(s) = \frac{R_0}{r'_0} r'(s),$$

sendo $r'_0 := r'(s_0)$. Essa equação também traz a implicação importante de que $I_1 = I$. De fato, da maximalidade de I_1 com respeito à condição $Rr' \neq 0$, se $I_1 \subset I$ fosse próprio em I , haveria um ponto interior de I e extremo de I_1 sobre o qual $Rr' = 0$. Mas fazendo o limite via pontos do interior de I_1 (no qual agora conhecemos a relação entre R e r'), por continuidade teríamos $R = r' = 0$ sobre este ponto. Mas, se olharmos para a condição de imersão neste caso, veremos que isso faria com que ϕ deixasse de ser imersão sobre toda uma geodésica, excedendo a condição de tolerância. Segue daí que $I_1 = I$.

Denotando $a = \frac{R_0}{r'_0}$ e fazendo $R = ar'$, podemos verificar que a equação advinda do coeficiente de C^4 é satisfeita. Fazendo isso para o coeficiente de C^3S , obtemos a equação

$$0 = -2a^4(r')^5 (r'\theta'' - r''\theta').$$

Como $ar' \neq 0$ sobre I , isso equivale a $r'\theta'' - r''\theta' \equiv 0$. Essa equação admite existência e unicidade de soluções para θ dadas condições $\theta(s_0) = \theta_0$ e $\theta'(s_0) = \theta'_0$. Em termos de r , a solução é dada por

$$\theta(s) = \frac{\theta'_0}{r'_0} (r(s) - r_0) + \theta_0.$$

É possível verificar então que as equações dos demais coeficientes também são satisfeitas.

Em suma, denotando $b = \frac{\theta'_0}{r'_0}$ e $c = \theta_0 - r_0 \frac{\theta'_0}{r'_0}$, concluímos que $p, v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ devem satisfazer

$$p' = \alpha(p \times v) = ar' \cos(br + c)(p \times v),$$

$$v' = \beta(p \times v) = ar' \sin(br + c)(p \times v).$$

Mostremos que, quaisquer que sejam as condições iniciais sobre $s_0 \in I$ e função $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $r' \neq 0$ dadas, o problema admite uma única solução maximal para p e v . Basta observar que o

sistema de equações pode ser visto como uma equação diferencial de primeira ordem em $\mathbb{R}^6$, mais precisamente dada por $(p, v)' = (\alpha(p \times v), \beta(p \times v))$. Portanto, dadas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e condições iniciais p_0, v_0 sobre $s_0 \in I$, vemos que a solução existe e é única. Observe que, para que essa solução seja admissível no nosso contexto, nossas condições iniciais devem satisfazer

$$\langle p_0, v_0 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle p_0, p_0 \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle = 1.$$

e a solução (p, v) deve satisfazer essas mesmas condições, além da condição de ortogonalidade $\langle p', v \rangle \equiv 0$. Precisamos garantir ainda que a solução esteja definida sobre todo o intervalo I .

Primeiramente, se (p, v) é solução do problema, temos

$$\langle p, v \rangle' = \langle p', v \rangle + \langle p, v' \rangle = \alpha \langle p \times v, v \rangle + \beta \langle p, p \times v \rangle = 0.$$

Isso garante que $\langle p, v \rangle$ é constante. Como $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$, a solução automaticamente satisfaz $\langle p, v \rangle \equiv 0$. Essa é a condição necessária para que tenhamos a interpretação $v \in T_p \mathbb{S}^2$. Temos ainda

$$\begin{aligned} \langle p, p \rangle' &= 2 \langle p', p \rangle = 2\alpha \langle p \times v, p \rangle = 0, \\ \langle v, v \rangle' &= 2 \langle v', v \rangle = 2\beta \langle p \times v, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle p, p \rangle$ e $\langle v, v \rangle$ são constantes. Segue da escolha das condições iniciais satisfazendo $\langle p_0, p_0 \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle = 1$ que $\langle p, p \rangle \equiv \langle v, v \rangle \equiv 1$. Isso nos diz que a solução bem define uma curva $p : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{S}^2$ e um campo de vetores unitários $v : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ao longo de p com $v \in T_p \mathbb{S}^2$. Temos ainda $\langle p', v \rangle = \alpha \langle p \times v, v \rangle = 0$ e portanto p satisfaz automaticamente a condição de ortogonalidade. Se $\tilde{I} = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo máximo de definição da solução (p, v) , sabemos que $(s, p(s), v(s))$ deve tender ao bordo de $I \times \mathbb{R}^6$, quando $s \rightarrow \omega_{\pm}$. Acontece que $(p, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é limitada. Portanto, devemos ter $\tilde{I} = I$.

Portanto, com isso mostramos que a superfície fica unicamente determinada dada função $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $r' \neq 0$ e condições iniciais $\theta(s_0) = \theta_0$, $\theta'(s_0) = \theta'_0$ e $R(s_0) = R_0$.

Olhemos agora para as curvaturas de uma tal superfície. Temos $R = ar'$, $\theta' = br'$ para certas constantes $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$. Substituindo nas expressões de $E, \tilde{e}, \tilde{f}$, obtemos

$$\begin{aligned} E &= R^2 \cos^2(\theta - t) + (r')^2 = (ar')^2 \cos^2(\theta - t) + (r')^2 \\ &= (r')^2 (1 + a^2 (1 - \sin^2(\theta - t))), \\ \tilde{e} &= (r'R' - Rr'') \cos(\theta - t) - Rr'\theta' \sin(\theta - t) \\ &= -ab(r')^3 \sin(\theta - t), \\ \tilde{f} &= a(r')^2 \sin(\theta - t). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$H^2 = \frac{\tilde{e}^2}{4E^3} = \frac{(-ab(r')^3 \sin(\theta - t))^2}{4 \left((r')^2 (1 + a^2 (1 - \sin^2(\theta - t))) \right)^3} = \frac{(ab \sin(\theta - t))^2}{4 (1 + a^2 (1 - \sin^2(\theta - t)))^3},$$

$$K = \frac{-\tilde{f}^2}{E^2} = \frac{-\left(a(r')^2 \sin(\theta - t) \right)^2}{\left((r')^2 (1 + a^2 (1 - \sin^2(\theta - t))) \right)^2} = \frac{-(a \sin(\theta - t))^2}{(1 + a^2 (1 - \sin^2(\theta - t)))^2}.$$

Assim, se denotarmos $Z = \sin^2(\theta - t)$, podemos escrever

$$0 = P(K, Z) =: K(1 + a^2(1 - Z))^2 + a^2 Z,$$

$$0 = Q(H, Z) =: 4H^2(1 + a^2(1 - Z))^3 - (ab)^2 Z.$$

Usando a técnica da eliminante (ver. Apêndice A.2), obtemos que

$$0 = \Psi(H, K) = \text{Elm}_Z(P, Q)$$

$$= a^{12} (a^2 + 1)^2 (16(a^2 + 1)H^4 + 4b^2 H^2 K + b^4 K^3)$$

Isso prova que a superfície é de Weingarten, em particular, do tipo polinomial. Se $b = 0$, então ela é uma superfície mínima.

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Proposição 3.9. *Uma superfície regradada de classe $\mathcal{C}^3$ do tipo horizontal em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten se, e somente se,*

- (i) *está contida numa esfera horizontal $\mathbb{S}^2 \times \{r_0\}$ e satisfaz $H = K \equiv 0$; ou*
- (ii) *possui a forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), r(s))$, para alguma função $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $r' \neq 0$ e $p, v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ são soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma*

$$p' = ar' \cos(br + c)(p \times v),$$

$$v' = ar' \sin(br + c)(p \times v),$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e condições iniciais $p(s_0) = p_0$ e $v(s_0) = v_0$ satisfazendo $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$ e $|p_0| = |v_0| = 1$. A superfície é de Weingarten com respeito à relação polinomial

$$\Psi(H, K) = 16(a^2 + 1)H^4 + 4b^2 H^2 K + b^4 K^3.$$

3.1.3 Oblíquas e caso geral

Olhemos agora para as superfícies regradas do tipo oblíquo. Essas possuem a forma

$$\phi(s, t) = \left((\cos t |v(s)|) p(s) + (\sin t |v(s)|) \frac{v(s)}{|v(s)|}, tu(s) + r(s) \right),$$

com $u(s)v(s) \neq 0$, sendo $P(s) = (p(s), r(s)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ a curva central e $V(s) = (v(s), u(s)) \in T_p\mathbb{S}^2 \oplus T_r\mathbb{R}$ a curva direcional unitária. Além disso, podemos supor que P e V satisfazem a condição de ortogonalidade $\langle P', V \rangle = 0$.

Considere então a reparametrização da superfície dada por

$$\tilde{\phi}(s, t) := \phi\left(s, \frac{1}{|v|}t\right) = \left((\cos t) p(s) + (\sin t) \frac{v(s)}{|v(s)|}, t \frac{u(s)}{|v(s)|} + r(s) \right).$$

Tomando $\tilde{V} := \left(\frac{v}{|v|}, \frac{u}{|v|}\right)$, isso nos mostra que podemos supor, sem perda de generalidade mas abrindo mão da condição de que V é unitário, que $v \in \mathbb{R}^3$ é unitário (i.e. $v \in \mathbb{S}^2$) e $u \neq 0$. Note que a condição de ortogonalidade é mantida: $\langle P', \tilde{V} \rangle = \frac{1}{|v|} \langle P', V \rangle = 0$.

Sob estas hipóteses, ϕ assume a forma $\phi = (\kappa p + \sigma v, tu + r)$ sendo, como antes, $\kappa = \cos t$, $\sigma = \sin t$. Observando que $P' = (p', r')$ e $V = (v, u)$. Assim, a condição de ortogonalidade é expressa por

$$0 = \langle p', v \rangle + ur'.$$

Os vetores tangentes são dados por

$$\begin{aligned} \phi_s &= (\kappa p' + \sigma v', tu' + r') \\ \phi_t &= (-\sigma p + \kappa v, u) \end{aligned}$$

Como no caso anterior, podemos considerar o referencial ortonormal ao longo da superfície,

$$E_1 = (-\sigma p + \kappa v, 0), \quad E_2 = (p \times v, 0), \quad E_3 = (0, 1).$$

Usando que $\{p, v, p \times v\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, da condição de ortogonalidade e do fato de que $p \in \mathbb{S}^2$ vem que

$$\begin{aligned} p' &= \langle p', p \rangle p + \langle p', v \rangle v + \langle p', p \times v \rangle (p \times v) \\ &= -ur'v + \alpha(p \times v), \end{aligned}$$

onde estamos denotando, como no caso anterior, $\alpha := \langle p', p \times v \rangle$.

De $\langle p, v \rangle = 0$ e da condição de ortogonalidade, vem também que $\langle p, v' \rangle = ur'$. Usando o mesmo argumento anterior, segue que

$$v' = ur'p + \beta(p \times v),$$

sendo $\beta := \langle v', p \times v \rangle$. Segue daí que

$$\begin{aligned}\phi_s &= (ur'(\sigma p - \kappa v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v), tu' + r') \\ &= -ur'E_1 + (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_2 + (tu' + r')E_3, \\ \phi_t &= (-\sigma p + \kappa v, u) = E_1 + uE_3.\end{aligned}$$

Assim, podemos definir um campo normal ao longo da superfície fazendo

$$\begin{aligned}v &= \det \begin{bmatrix} -ur' & \kappa\alpha + \sigma\beta & tu' + r' \\ 1 & 0 & u \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= u(\kappa\alpha + \sigma\beta)E_1 + (r'(u^2 + 1) + tu')E_2 - (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_3.\end{aligned}$$

Note que os pontos de imersão são aqueles em que $(r'(u^2 + 1) + tu')^2 + (\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 > 0$. Com isso, definimos um campo normal unitário sobre os pontos de imersão da superfície, fazendo $N = \frac{v}{|v|}$.

Calculamos agora as derivadas covariantes de ϕ . Temos

$$\nabla_{\phi_s} \phi_s = \left((ur'(\sigma p - \kappa v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v))_s^T, (tu' + r')_s \right).$$

Denotando $w = ur'(\sigma p - \kappa v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v)$ e derivando em s , obtemos

$$\begin{aligned}w_s &= u'r'(\sigma p - \kappa v) + ur''(\sigma p - \kappa v) + ur'(\sigma p' - \kappa v') + (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) \\ &\quad + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p' \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v') \\ &= u'r'(\sigma p - \kappa v) + ur''(\sigma p - \kappa v) + ur'(\sigma(-ur'v + \alpha(p \times v)) - \kappa(ur'p + \beta(p \times v))) \\ &\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)((-ur'v + \alpha(p \times v)) \times v) \\ &\quad + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times (ur'p + \beta(p \times v))) \\ &= u'r'(\sigma p - \kappa v) + ur''(\sigma p - \kappa v) + ur'(\sigma(-ur'v + \alpha(p \times v)) - \kappa(ur'p + \beta(p \times v))) \\ &\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(-\alpha p) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(-\beta v) \\ &= (r''\sigma u - \kappa u^2(r')^2 + u'\sigma r' - \alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta))p + (-\sigma u^2(r')^2 - r''\kappa u - u'\kappa r' - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta))v \\ &\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' + ur'(\alpha\sigma - \kappa\beta))(p \times v)\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\langle w_s, \kappa p + \sigma v \rangle &= \kappa(r''\sigma u - \kappa u^2(r')^2 + u'\sigma r' - \alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta)) \\ &\quad + \sigma(-\sigma u^2(r')^2 - r''\kappa u - u'\kappa r' - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta)) \\ &= -u^2(r')^2(\kappa^2 + \sigma^2) - (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 \\ &= -u^2(r')^2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2\end{aligned}$$

Portanto, a componente de w_s tangente a $\mathbb{S}^2$ em $\kappa p + \sigma v$ é dada por

$$\begin{aligned}
 w_s^T &= w_s - \langle w_s, \kappa p + \sigma v \rangle (\kappa p + \sigma v) = w_s + (u^2(r')^2 + (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2) (\kappa p + \sigma v) \\
 &= (r''\sigma u - \kappa u^2(r')^2 + u'\sigma r' - \alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta)) p + (-\sigma u^2(r')^2 - r''\kappa u - u'\kappa r' - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta)) v \\
 &\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' + ur'(\alpha\sigma - \kappa\beta)) (p \times v) + (u^2(r')^2 + (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2) (\kappa p + \sigma v) \\
 &= \left(\kappa(\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 - \alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) + \sigma(ur'' + r'u') \right) p \\
 &\quad + \left(\sigma(\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u') \right) v + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' + ur'(\alpha\sigma - \kappa\beta)) (p \times v) \\
 &= -(ur'' + r'u' - (\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma - \kappa\beta)) (-\sigma p + \kappa v) + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' + ur'(\alpha\sigma - \kappa\beta)) (p \times v).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\phi_s} \phi_s &= (w_s^T, tu'' + r'') = -(ur'' + r'u' - (\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma - \kappa\beta)) E_1 \\
 &\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' + ur'(\alpha\sigma - \kappa\beta)) E_2 + (tu'' + r'') E_3.
 \end{aligned}$$

Quanto a $\nabla_{\phi_t} \phi_s$, temos $w_t = ur'(\kappa p + \sigma v) + (-\sigma\alpha + \kappa\beta)(p \times v)$, donde $\langle w_t, \kappa p + \sigma v \rangle = ur'$ e $w_t^T = w_t - \langle w_t, \kappa p + \sigma v \rangle (\kappa p + \sigma v) = (-\sigma\alpha + \kappa\beta)(p \times v)$.

Segue que

$$\nabla_{\phi_t} \phi_s = (w_t^T, u') = (-\sigma\alpha + \kappa\beta) E_2 + u' E_3.$$

Por fim, sabemos que $\nabla_{\phi_t} \phi_t = 0$ por se tratar das direções das geodésicas.

Introduza as funções $R, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $(\alpha, \beta) = R(\cos \theta, \sin \theta)$ e denote $C = \cos(\theta - t)$, $S = \sin(\theta - t)$. Note que

$$\begin{aligned}
 \alpha\kappa + \sigma\beta &= R(\cos \theta \cos t + \sin \theta \sin t) = RC, \\
 \alpha\sigma - \kappa\beta &= R(\cos \theta \sin t - \sin \theta \cos t) = -RS, \\
 \kappa\alpha' + \sigma\beta' &= (\alpha\kappa + \sigma\beta)_s = (RC)_s = R'C - R\theta'S.
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 \phi_s &= -ur'E_1 + RCE_2 + (tu' + r') E_3, \quad \phi_t = E_1 + uE_3, \\
 v &= uRCE_1 + (r'(u^2 + 1) + tu') E_2 - RCE_3, \\
 \nabla_{\phi_s} \phi_s &= -(ur'' + r'u' + R^2CS) E_1 + (R'C - (\theta' + ur') RS) E_2 + (tu'' + r'') E_3, \\
 \nabla_{\phi_t} \phi_s &= RSE_2 + u'E_3, \quad \nabla_{\phi_t} \phi_t = 0.
 \end{aligned}$$

Temos então a primeira e segunda formas fundamentais

$$\begin{aligned}
 E &= u^2(r')^2 + (r' + tu')^2 + C^2R^2, \quad F = uu't, \quad G = u^2 + 1, \\
 W^{-2} &= EG - F^2 = ((u^2 + 1)r' + tu')^2 + R^2(u^2 + 1)C^2 \\
 e &= W \left((r'(u^2 + 1) + tu')(CR' - RS(\theta' + ur')) - CR(r'' + tu'') - CRu(CSR^2 + ur'' + r'u') \right), \\
 f &= W(RS(r'(u^2 + 1) + tu') - CRu'), \quad g = 0.
 \end{aligned}$$

Começemos estudando o caso $(\alpha, \beta) \equiv (0, 0)$ (ou equivalentemente $R \equiv 0$) sobre I . Essa condição implica $p' = -ur'v$ e $v' = ur'p$. Segue daí que

$$(p \times v)' = p' \times v + p \times v' = -ur'(v \times v) + ur'(p \times p) = 0.$$

Portanto, $p \times v$ é constante. Isso sugere que p e v estão contidos num círculo máximo de $\mathbb{S}^2$. É isso que verificamos a seguir. Seja $s_0 \in I$ e denote $p(s_0) = p_0$, $v(s_0) = v_0$. Defina $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $\eta(s) = -\int_{s_0}^s u(x)r'(x)dx$. Afirmamos que

$$p = (\cos \eta)p_0 + (\sin \eta)v_0, \quad v = (-\sin \eta)p_0 + (\cos \eta)v_0.$$

De fato, o sistema satisfeito por p e v pode ser visto como uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^6$, dada por $(p, v)' = (-ur'v, ur'p)$ e admite existência e unicidade de soluções. Portanto, basta verificar que p e v acima definidas satisfazem as condições iniciais, além de satisfazer as equações

$$\begin{aligned} p' &= \eta'((-\sin \eta)p_0 + (\cos \eta)v_0) = -ur'v, \\ v' &= \eta'((-\cos \eta)p_0 + (-\sin \eta)v_0) = ur'p. \end{aligned}$$

Observe então que

$$\begin{aligned} \phi &= (\kappa p + \sigma v, tu + r) \\ &= ((\cos t)((\cos \eta)p_0 + (\sin \eta)v_0) + (\sin t)((-\sin \eta)p_0 + (\cos \eta)v_0), tu + r) \\ &= ((\cos(\eta + t))p_0 + (\sin(\eta + t))v_0, tu + r). \end{aligned}$$

Ora, isso mostra que a imagem de ϕ está contida na superfície regradada vertical $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dada por $\psi(s, t) = ((\cos s)p_0 + (\sin s)v_0, t)$. Isso contradiz a hipótese de que ϕ é oblíqua.

Portanto, deve existir intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ sobre o qual $R \neq 0$. Podemos supor que I_1 é maximal com respeito a essa propriedade.

Coletando em t cada uma das expressões abaixo, obtemos

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= A_2 t^2 + A_1 t + A_0, \\ \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F &= B_2 t^2 + B_1 t + B_0, \\ \tilde{f} &= C_1 t + C_0, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} A_2 &= (u')^2, \quad A_1 = 2r'u'(u^2 + 1), \quad A_0 = (u^2 + 1)((u^2 + 1)(r')^2 + C^2 R^2), \\ B_2 &= -2RSu(u')^2, \\ B_1 &= ((u'(CR' - RS(\theta' + ur')) - CRu'')(u^2 + 1) + 2uu'(CRu' - RSr'(u^2 + 1))), \\ B_0 &= -(u^2 + 1)(CRr'' - r'(CR' - RS(\theta' + ur'))(u^2 + 1) + CRu(CSR^2 + ur'' + r'u')), \\ C_1 &= RSu', \quad C_0 = (RSr'(u^2 + 1) - CRu') \end{aligned}$$

Supondo que a superfície é de classe $\mathcal{C}^3$, observando que $\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2 = -\tilde{f}^2$ e que $A_{2,t} = A_{1,t} \equiv 0$, a condição de Kühnel é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_s & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \\ &= -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(A_2t^2 + A_1t + A_0) & A_{2,s}t^2 + A_{1,s}t + A_{0,s} & 2A_2t + A_1 + A_{0,t} \\ 3(B_2t^2 + B_1t + B_0) & B_{2,s}t^2 + B_{1,s}t + B_{0,s} & B_{2,t}t^2 + (2B_2 + B_{1,t})t + B_1 + B_{0,t} \\ 2(C_1t + C_0) & C_{1,s}t + C_{0,s} & C_{1,t}t + C_1 + C_{0,t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A seguir, utilizaremos um argumento que passamos a explicar. Substituindo (C, S, t) na equação por (X, Y, Z) , definimos uma família de polinômios $P_s \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ a um parâmetro $s \in I$ tal que $P_s(C(s, t), S(s, t), t) \equiv 0$, para todo $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$.

Afirmção 3.10. Denotando $P_s = \sum_{i=0}^n Q_{s,i} Z^i$, com $Q_{s,i} \in \mathbb{R}[X, Y]$, vale que $Q_{s,i}(\cos t, \sin t) \equiv 0$, para todo $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$.

De fato, fixe $(s_0, t_0) \in I \times \mathbb{R}$. Considere $\bar{P} \in \mathbb{R}[Z]$ definido por $\bar{P}(Z) := P_{s_0}(C_0, S_0, Z)$, sendo $(C_0, S_0) = (C(s_0, t_0), S(s_0, t_0))$. Segue da periodicidade das funções C e S e da equação $P_s(C, S, t) \equiv 0$ que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \bar{P}(t_0 + 2k\pi) &= P_{s_0}(C_0, S_0, t_0 + 2k\pi) = P_{s_0}(\cos(\theta_0 - t_0), \sin(\theta_0 - t_0), t_0 + 2k\pi) \\ &= P_{s_0}(\cos(\theta_0 - t_0 - 2k\pi), \sin(\theta_0 - t_0 - 2k\pi), t_0 + 2k\pi) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, todos os elementos do conjunto infinito $\{t_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ são raízes de $\bar{P}$. Isso implica que $\bar{P}$ é identicamente nulo. Acontece que os coeficientes de $\bar{P}$ são dados por $Q_{s_0,i}(C_0, S_0)$. Como $(s_0, t_0) \in I \times \mathbb{R}$ fixado é qualquer, a afirmação segue observando-se que

$$\begin{aligned} C(s, \theta(s) - t) &= \cos(\theta(s) - (\theta(s) - t)) = \cos t, \\ S(s, \theta(s) - t) &= \sin(\theta(s) - (\theta(s) - t)) = \sin t. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a afirmação nos diz que, ao se coletar a condição de Kühnel em t , os coeficientes obtidos definem polinômios em duas variáveis (trocando-se C, S por X, Y) variando a um parâmetro $s \in I$ e tais polinômios se anulam sobre $(X, Y) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Apliquemos esse argumento. Coletando a condição de Kühnel em t , obtemos

$$\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(-\tilde{f}^2) & (-\tilde{f}^2)_s & (-\tilde{f}^2)_t \end{bmatrix} \\ &= -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(A_2t^2 + A_1t + A_0) & A_{2,s}t^2 + A_{1,s}t + A_{0,s} & 2A_2t + A_1 + A_{0,t} \\ 3(B_2t^2 + B_1t + B_0) & B_{2,s}t^2 + B_{1,s}t + B_{0,s} & B_{2,t}t^2 + 2B_2t + B_{1,t}t + B_1 + B_{0,t} \\ 2(C_1t + C_0) & C_{1,s}t + C_{0,s} & C_{1,t}t + C_1 + C_{0,t} \end{bmatrix} \\ &= -2C_1(2A_2B_{2,s}C_{1,t} - 2A_2C_{1,s}B_{2,t} - 3B_2A_{2,s}C_{1,t} + 2C_1A_{2,s}B_{2,t})t^6 + \dots \end{aligned}$$

Segue do nosso argumento que, em particular, o coeficiente de t^6 define uma família de polinômios que se anulam sobre $(C, S) = (\cos t, \sin t)$.

Abrindo a expressão desse coeficiente, obtemos

$$\begin{aligned} & -2C_1(2A_2B_{2,s}C_{1,t} - 2A_2C_{1,s}B_{2,t} - 3B_2A_{2,s}C_{1,t} + 2C_1A_{2,s}B_{2,t}) = \\ & -2RSu' \left(\begin{array}{c} 2(u')^2(-2R'Su(u')^2 - 2\theta'RCu(u')^2 - 2RSu'(u')^2 - 2(2)RSu(u')u'')(-RCu') \\ -2(u')^2(R'Su' + \theta'RCu' + RSu'')(2RCu(u')^2) \\ -3(-2RSu(u')^2)(2(u')u'')(-RCu') + 2RSu'(2(u')u'')(2RCu(u')^2) \end{array} \right) \\ & = -8R^3(u')^7CS^2. \end{aligned}$$

Destacamos que sempre que utilizamos parênteses maiores, como na expressão acima, estamos indicando apenas quebras de linhas e não uma matriz-coluna. Para matrizes reservaremos a notação de colchetes.

Segue da afirmação provada acima que

$$0 = -8R^3(u')^7 \cos t \sin^2 t, \text{ para todo } (s, t) \in I \times \mathbb{R}.$$

Em particular, isso implica $u' \equiv 0$ sobre I_1 , pois neste intervalo temos $R \neq 0$. Portanto, sobre I_1 temos $u \equiv u_0 \neq 0$ e as funções A_i, B_i, C_i sobre $I_1 \times \mathbb{R}$ se reduzem a

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 = B_2 = B_1 = C_1 = 0, \\ A_0 &= (u_0^2 + 1)((u_0^2 + 1)(r')^2 + C^2R^2), \\ B_0 &= -(u_0^2 + 1)(CRr'' - r'(CR' - RS(\theta' + u_0r')))(u_0^2 + 1) + CRu_0(CSR^2 + u_0r''), \\ C_0 &= RSr'(u_0^2 + 1). \end{aligned}$$

Observe que se $r' \equiv 0$ sobre I_1 , então a equação é trivialmente satisfeita sobre I_1 . Neste caso, isso implica que o campo normal v sobre I_1 é dado por

$$v = RC(u_0E_1 - E_3).$$

A maximalidade de I_1 com respeito a $R \neq 0$ junto da condição de tolerância implicam que $I_1 = I$. Quanto às curvaturas, teremos

$$H = \frac{-u_0(u_0^2 + 1)R^3C^2S}{2((u_0^2 + 1)C^2R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad K \equiv 0.$$

Isso mostra que a superfície é de Weingarten neste caso, pois $K \equiv 0$. Observe que ϕ deixa de ser imersão para $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$ tais que $C(s, t) = \cos(\theta(s) - t) = 0$, i.e. se $t = \theta(s) + k\frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, o que está de acordo com a condição de tolerância. Note que neste caso a condição de ortogonalidade se reduz a $\langle p', v \rangle = \langle p, v' \rangle = 0$, donde p e v são soluções de $p' = RC(p \times v)$ e $v' = RS(p \times v)$.

Suponha agora que exista intervalo aberto não vazio $I_2 \subset I_1$ maximal com respeito à condição $r' \neq 0$. Olhemos para a condição de Kühnel restrita a I_2 . Primeiro, temos

$$\begin{aligned}
 A_{0,t} &= (u_0^2 + 1) (2CSR^2) \\
 A_{0,s} &= (u_0^2 + 1) (2(u_0^2 + 1)(r')r'' + 2C(-\theta'S)R^2 + 2C^2RR') \\
 B_{0,t} &= -(u_0^2 + 1) \left(\begin{aligned} &SRr'' - r'(SR' + RC(\theta' + u_0r'))(u_0^2 + 1) + SRu_0(CSR^2 + u_0r'') \\ &+ CRu_0((SS - CC)R^2) \end{aligned} \right) \\
 B_{0,s} &= -(u_0^2 + 1) \left(\begin{aligned} &-\theta'SRr'' + CR'r'' + CRr''' - r''(CR' - RS(\theta' + u_0r'))(u_0^2 + 1) \\ &-r' \left(\begin{aligned} &-\theta'SR' + CR'' - R'S(\theta' + u_0r') \\ &-R\theta'C(\theta' + u_0r') - RS(\theta'' + u_0r'') \end{aligned} \right) (u_0^2 + 1) \\ &-\theta'SRu_0(CSR^2 + u_0r'') + CR'u_0(CSR^2 + u_0r'') \\ &+ CRu_0(-\theta'SSR^2 + C\theta'CR^2 + 2CSRR' + u_0r''') \end{aligned} \right) \\
 C_{0,t} &= (-RCr'(u_0^2 + 1)) \\
 C_{0,s} &= ((R'Sr' + R\theta'Cr' + RSr'')(u_0^2 + 1))
 \end{aligned}$$

Coletando a condição de Kühnel em S , fazendo $S^2 = 1 - C^2$ e, por fim, coletando em C, S , obtemos a seguinte equação sobre I_1 :

$$\begin{aligned}
 0 &= -2C_0 \det \begin{bmatrix} 2A_0 & A_{0,s} & A_{0,t} \\ 3B_0 & B_{0,s} & B_{0,t} \\ 2C_0 & C_{0,s} & C_{0,t} \end{bmatrix} \\
 &= -4R^5r'(u_0^2 + 1)^4 (r''R^2u_0 - R'Rr'u_0 + \theta''(r')^2u_0^2 + \theta''(r')^2 - r''\theta'r'u_0^2 - r''\theta'r') C^5 \\
 &\quad + 4R^3r'(u_0^2 + 1)^5 (r'''R^2r' - 2R^2(r'')^2 - R''R(r')^2 + Rr'r''R' + (r')^2(R')^2) C^4S \\
 &\quad - 4R^3r'(u_0^2 + 1)^4 \left(\begin{aligned} &-r''R^4u_0 + R'R^3r'u_0 + r''R^2(r')^2u_0^3 - 3\theta''R^2(r')^2u_0^2 \\ &+ r''R^2(r')^2u_0 - 3\theta''R^2(r')^2 + 2r''\theta'R^2r'u_0^2 + 2r''\theta'R^2r' \\ &-R'R(r')^3u_0^3 - R'R(r')^3u_0 + \theta'R'R(r')^2u_0^2 + \theta'R'R(r')^2 \\ &-\theta''(r')^4u_0^4 - 2\theta''(r')^4u_0^2 - \theta''(r')^4 \\ &+ r''\theta'(r')^3u_0^4 + 2r''\theta'(r')^3u_0^2 + r''\theta'(r')^3 \end{aligned} \right) C^3 \\
 &\quad - 4Rr'(u_0^2 + 1)^5 \left(\begin{aligned} &2r'''R^4r' - 2R^4(r'')^2 - 2R''R^3(r')^2 - 2R^3r'r''R' \\ &+ r'''R^2(r')^3u_0^2 + r'''R^2(r')^3 - 2R^2(r')^2(r'')^2u_0^2 - 2R^2(r')^2(r'')^2 \\ &+ 4R^2(r')^2(R')^2 - R''R(r')^4u_0^2 - R''R(r')^4 \\ &+ R(r')^3r''R'u_0^2 + R(r')^3r''R' + (r')^4(R')^2u_0^2 + (r')^4(R')^2 \end{aligned} \right) C^2S \\
 &\quad + 4R^3(r')^2(u_0^2 + 1)^5 \left(\begin{aligned} &r''R^2r'u_0 - 2\theta''R^2r' + r''\theta'R^2 - R'R(r')^2u_0 \\ &+ \theta'R'Rr' - \theta''(r')^3u_0^2 - \theta''(r')^3 + r''\theta'(r')^2u_0^2 + r''\theta'(r')^2 \end{aligned} \right) C \\
 &\quad + 4R(r')^3(u_0^2 + 1)^6 (Rr'' - r'R')^2 S
 \end{aligned}$$

Segue da Afirmação 3.10 que a condição de Kühnel também se anula se trocarmos (C, S) por $(\cos t, \sin t)$. Como $C^2 + S^2 - 1 = 0$ é irreduzível e $(\cos t, \sin t)$ não é constante, o polinômio deve possuir $C^2 + S^2 - 1$ como fator (v. Apêndice A.1). Porém nossa expressão possui grau no máximo 1 em S . Isso implica que os coeficientes que obtemos nessa escrita são identicamente nulos. Portanto, do coeficiente de S vem que

$$0 \equiv 4(u_0^2 + 1)R(r')^6(Rr'' - r'R')^2.$$

Em particular, sobre I_2 devemos ter $Rr'' - r'R' \equiv 0$, pois neste intervalo $Rr' \neq 0$. Podemos escrever então

$$R' = \frac{r''}{r'} R \text{ sobre } I_2.$$

Isso mostra que, sobre I_2 , a função R é unicamente determinada por r e pela condição inicial $R(s_0) = R_0$, para algum $s_0 \in I_2$. Da unicidade de solução, podemos verificar diretamente que R é dada por $R = \frac{R_0}{r'_0} r'$. Essa relação entre R e r' e a maximalidade de I_2 implicam que $I_2 = I_1$. Olhando então para o campo normal ν sobre I_1 , fazendo $R = \frac{R_0}{r'_0} r'$ obtemos

$$\nu = r' \left(\frac{u_0 R_0}{r'_0} E_1 + (u_0^2 + 1) E_2 - \frac{R_0}{r'_0} E_3 \right).$$

Portanto, se $I_1 \subset I$ é próprio, existe um ponto interior de I e extremo de I_1 com $r' = 0$, o que faz com que $\nu(\cdot, t) \equiv 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e. ϕ deixa de ser imersão sobre toda uma geodésica, contradizendo a condição de tolerância. Portanto, segue da maximalidade de I_1 que $I_1 = I$.

Substituindo $R = \frac{R_0}{r'_0} r'$ no coeficiente de C^5 vem que

$$\begin{aligned} 0 &= -4R^5 r' (u_0^2 + 1)^4 (r'' R^2 u_0 - R' R r' u_0 + \theta''(r')^2 u_0^2 + \theta''(r')^2 - r'' \theta' r' u_0^2 - r'' \theta' r') \\ &= -4 \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right)^5 r' (u_0^2 + 1)^4 \left(\begin{aligned} &r'' \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right)^2 u_0 - \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right) \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right) r' u_0 \\ &+ \theta''(r')^2 u_0^2 + \theta''(r')^2 - r'' \theta' r' u_0^2 - r'' \theta' r' \end{aligned} \right) \\ &= -4 \frac{(r')^7}{(r'_0)^5} R_0^5 (u_0^2 + 1)^5 (r' \theta'' - r'' \theta') \end{aligned}$$

Como $-4 \frac{(r')^7}{(r'_0)^5} R_0^5 (u_0^2 + 1)^5 \neq 0$, essa equação implica

$$\theta'' = \frac{r''}{r'} \theta' \text{ sobre } I.$$

Essa equação determina θ em termos de r , dadas condições iniciais $\theta(s_0) = \theta_0$ e $\theta'(s_0) = \theta'_0$. De fato, podemos verificar que θ é dada por

$$\theta(s) = \frac{\theta'_0}{r'_0} (r(s) - r_0) + \theta_0.$$

É possível verificar que todos os demais coeficientes em C, S são identicamente nulos para tais R e θ . Observe ainda que R e θ possuem o mesmo comportamento do caso das superfícies regradas horizontais.

Denotando $a = \frac{R_0}{r'_0}$, $b = \frac{\theta'_0}{r'_0}$, as curvaturas média e gaussiana serão dadas por

$$\begin{aligned} H &= -\frac{r' (u_0^2 + 1) a (a^2 u_0 C^2 + (b + u_0) (u_0^2 + 1)) S}{|r'| \cdot 2 ((u_0^2 + 1 + a^2 C^2) (u_0^2 + 1))^{\frac{3}{2}}}, \\ K &= \frac{-(a(r')^2 (u_0^2 + 1) S)^2}{((r')^2 (u_0^2 + 1 + a^2 C^2) (u_0^2 + 1))^2} = \frac{-a^2 S^2}{(u_0^2 + 1 + a^2 C^2)^2}. \end{aligned}$$

Note que ϕ é imersão sobre todo $I \times \mathbb{R}$.

Elevando H ao quadrado, trocando em ambas as expressões S^2 por $1 - C^2$, obtemos

$$H^2 = \frac{a^2 (a^2 u_0 C^2 + (b + u_0) (u_0^2 + 1))^2 (1 - C^2)}{4 (u_0^2 + 1) (u_0^2 + 1 + a^2 C^2)^3},$$

$$K = \frac{-a^2 (1 - C^2)}{(u_0^2 + 1 + C^2 a^2)^2}.$$

Assim, existem polinômios $P, Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ que se anulam sobre (H^2, C^2) e (K, C^2) , respectivamente. Mais precisamente, temos

$$P(X, Z) := 4 (u_0^2 + 1) (u_0^2 + 1 + a^2 Z)^3 X - a^2 (a^2 u_0 Z + (b + u_0) (u_0^2 + 1))^2 (1 - Z),$$

$$Q(Y, Z) := (u_0^2 + 1 + a^2 Z)^2 Y + a^2 (1 - Z).$$

Segue da técnica da eliminante (Apêndice A.2) que H e K satisfazem uma relação polinomial $\Psi(H, K) = 0$, sendo $\Psi(X, Y) := \text{Elm}_Z(P, Q)$. Essa relação é dada por

$$\begin{aligned} \Psi(H, K) = & 16 (u_0^2 + 1)^2 (u_0^2 + a^2 + 1) H^4 + 4b (u_0^2 + 1)^2 (b + 4u_0 + 4u_0^3 + 4a^2 u_0 + bu_0^2) H^2 K \\ & + b^4 (u_0^2 + 1)^4 K^3 + 4u_0^2 (u_0^2 + 1) (u_0^2 + a^2 + 1) H^2 \\ & + 2b^2 u_0 (u_0^2 + 1)^2 (b + u_0 + u_0^3 + a^2 u_0 + bu_0^2) K^2 + u_0^2 (b + u_0 + u_0^3 + a^2 u_0 + bu_0^2)^2 K. \end{aligned}$$

Com isso, classificamos as superfícies regradas de Weingarten do tipo oblíquo. É possível verificar ainda que ao se fazer $u_0 = 0$ obtemos exatamente as conclusões do caso das horizontais.

Observe que no último caso analisado ($r' \neq 0$), a função r não aparece nas expressões das curvaturas. Isso pode indicar que a superfície não depende de fato da escolha de r com $r' \neq 0$, de forma que podemos supor, sem perda de generalidade que $r(s) \equiv s$. É isso que argumentamos a seguir.

Como $r' \neq 0$ sobre I , existe a inversa $r^{-1} : J \rightarrow I$, sendo $J := r(I)$. Consideramos então a reparametrização $\tilde{\phi} : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ definida por $\tilde{\phi}(\tilde{s}, t) := \phi(r^{-1}(\tilde{s}), t)$. Já sabemos que ϕ é dada por $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), u_0 t + r(s))$, sendo $p, v : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ soluções de um sistema da forma

$$p' = -u_0 r' v + a r' \cos(br + c)(p \times v),$$

$$v' = u_0 r' p + a r' \sin(br + c)(p \times v),$$

para certas constantes $a, b, c, u_0 \in \mathbb{R}$ com $au_0 \neq 0$ e determinadas unicamente por condições iniciais $p(s_0) = p_0, v(s_0) = v_0$ satisfazendo $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$ e $|p_0| = |v_0| = 1$.

Considere $\tilde{p}, \tilde{v} : J \rightarrow \mathbb{S}^2$ definidas por $\tilde{p} := p \circ r^{-1}, \tilde{v} := v \circ r^{-1}$. Afirmamos que $\tilde{p}, \tilde{v}$ são soluções do sistema

$$\tilde{p}' = -u_0 \tilde{v} + a \cos(b\tilde{s} + c)(\tilde{p} \times \tilde{v}),$$

$$\tilde{v}' = u_0 \tilde{p} + a \sin(b\tilde{s} + c)(\tilde{p} \times \tilde{v}).$$

Observe por exemplo que

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}'(\tilde{s}) &= (p \circ r^{-1})'(\tilde{s}) = (r^{-1})'(\tilde{s}) p'(r^{-1}(\tilde{s})) \\
 &= -u_0(r^{-1})'(\tilde{s}) r'(r^{-1}(\tilde{s})) v(r^{-1}(\tilde{s})) \\
 &\quad + (r^{-1})'(\tilde{s}) a r'(r^{-1}(\tilde{s})) \cos(br(r^{-1}(\tilde{s})) + c) ((p \circ r^{-1}(\tilde{s})) \times (v \circ r^{-1}(\tilde{s}))) \\
 &= -u_0(r^{-1} \circ r(\tilde{s}))' v(r^{-1}(\tilde{s})) + a (r \circ r^{-1}(\tilde{s}))' \cos(b\tilde{s} + c) (\tilde{p}(\tilde{s}) \times \tilde{v}(\tilde{s})) \\
 &= -u_0 \tilde{v}(\tilde{s}) + a \cos(b\tilde{s} + c) (\tilde{p}(\tilde{s}) \times \tilde{v}(\tilde{s})).
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos $\tilde{v}' = u_0 \tilde{p} + a \sin(b\tilde{s} + c) (\tilde{p} \times \tilde{v})$. As relações entre as condições iniciais de $\tilde{p}$ e $\tilde{v}$ sobre $\tilde{s}_0 := r(s_0)$ seguem trivialmente das respectivas relações nas condições iniciais de p e v .

Isso mostra que, a menos de uma reparametrização, podemos supor que ϕ possui a forma

$$\phi(s, t) = ((\cos t) p(s) + (\sin t) v(s), u_0 t + s),$$

com p e v satisfazendo o referido sistema acima. Observe que podemos considerar a superfície completa com $I = \mathbb{R}$.

Observação 3.11. Sejam $a, b, c, u_0 \in \mathbb{R}$ constantes quaisquer com $au_0 \neq 0$. Considere o sistema sobre $p, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned}
 p' &= -u_0 v + a \cos(bs + c)(p \times v), \\
 v' &= u_0 p + b \sin(bs + c)(p \times v).
 \end{aligned}$$

Esse sistema pode ser visto como uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^6$ dada por $(p, v)' = (-u_0 v + a \cos(bs + c)(p \times v), u_0 p + b \sin(bs + c)(p \times v))$. Esse sistema admite existência e unicidade de solução dadas condições iniciais $p(0) = p_0, v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3$. É pertinente mostrar que, se essas condições iniciais são ortonormais, i.e. se $|p_0| = |v_0| = 1$ e $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$, então a solução do sistema bem define uma curva $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ e um campo unitário $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ com $\langle p, v \rangle = 0$, i.e. $v \in T_p \mathbb{S}^2$.

Se p, v é solução do sistema, observe que

$$\begin{aligned}
 \langle p, p \rangle' &= 2\langle p, p' \rangle = -2u_0 \langle p, v \rangle, \\
 \langle v, v \rangle' &= 2\langle v, v' \rangle = 2u_0 \langle p, v \rangle, \\
 \langle p, v \rangle' &= \langle p', v \rangle + \langle p, v' \rangle = u_0(\langle p, p \rangle - \langle v, v \rangle).
 \end{aligned}$$

A derivada de $\langle p, v \rangle$ mostra que $\langle p, v \rangle$ é $\mathcal{C}^\infty$. Então, tomando a derivada segunda, obtemos

$$\langle p, v \rangle'' = u_0(\langle p, p \rangle' - \langle v, v \rangle') = -4u_0^2 \langle p, v \rangle.$$

Portanto, $\langle p, v \rangle$ é uma solução da equação $u'' = -4a^2 u$. Agora, essa equação possui solução geral dada por $u(s) = c_1 \cos(2u_0 s) + c_2 \sin(2u_0 s)$. Avaliando em $s = 0$, obtemos $0 = \langle p_0, v_0 \rangle = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1$. Quanto à primeira derivada, temos

$$2u_0(-c_1 \sin(2u_0 s) + c_2 \cos(2u_0 s)) = \langle p, v \rangle' = u_0(\langle p, p \rangle - \langle v, v \rangle).$$

Novamente, avaliando em $s = 0$ e usando nossa hipótese de ortonormalidade e que $u_0 \neq 0$, obtemos $c_2 = 0$. Mas então isso implica $\langle p, v \rangle \equiv 0$. Segue daí que $\langle p, p \rangle' = -2u_0 \langle p, v \rangle = 0$ e $\langle v, v \rangle' = 2u_0 \langle p, v \rangle = 0$ e portanto ambas as funções $\langle p, p \rangle$ e $\langle v, v \rangle$ devem ser constantes iguais a 1.

A seguir fazemos uma breve argumentação que nos permite ver que as classificações desses três tipos particulares (vertical, horizontal e oblíquo) fornece, de fato, a classificação geral das superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Considere uma superfície regrada qualquer em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ dada por $\phi(s, t) = \exp_{P(s)}(tV(s))$, $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$, com $V = (v, u) \in T_P(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ unitário ($|v|^2 + u^2 = 1$) e com P satisfazendo a condição de ortogonalidade $\langle P', V \rangle = 0$.

Suponha que exista $s_0 \in I$ para o qual $V(s_0)$ é oblíquo, i.e. $u(s_0)v(s_0) \neq 0$. Por continuidade, existe um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ em torno de s_0 sobre o qual $uv \neq 0$ e podemos supor que I_1 é maximal com respeito a essa propriedade. Isso implica que, se $I_1 \subset I$ é um subconjunto próprio, então os extremos de I_1 são pontos interiores de I e $uv = 0$ sobre esses pontos.

Note então que a restrição de ϕ ao intervalo I_1 define uma superfície regrada do tipo oblíquo. Podemos então aplicar as conclusões da classificação obtida para este caso. Para isso, note que as conclusões foram obtidas a respeito da curva direcional dada por $\tilde{V} := \frac{1}{|v|}V = \left(\frac{v}{|v|}, \frac{u}{|v|}\right)$. Em particular, concluímos que $\tilde{u} := \frac{u}{|v|}$ deve ser constante. Portanto, existe $0 \neq u_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u = u_0 |v|$ sobre I_1 . Da condição $|v|^2 + u^2 = 1$ vem que $1 = |v|^2(u_0^2 + 1)$ sobre I_1 . Ora, isso implica que $|v|$ também é constante sobre I_1 . Mas essa condição junto da maximalidade de I_1 implica que $I_1 = I$ (o fato de u e $|v|$ serem constantes e não nulos sobre I_1 impede que uv se anule nos extremos de I_1).

Portanto, isso mostra que se a família de geodésicas dada por ϕ possui uma única geodésica oblíqua, então, sob a condição de Weingarten, isso implica que ϕ é uma superfície regrada do tipo oblíquo. Em outras palavras, se uma das geodésicas da família é oblíqua, então todas são.

Em contrapartida, se ϕ não descreve nenhuma geodésica oblíqua, então ϕ deve descrever uma superfície regrada do tipo vertical ou horizontal. Isso porque I é conexo e ϕ contínua. Assim, não é possível transitar entre geodésicas verticais e horizontais sem descrever também geodésicas oblíquas entre elas. Com isso, provamos o principal teorema dessa seção, a versão do teorema de Beltrami–Dini para $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.12. *Uma superfície regrada de classe $\mathcal{C}^3$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten se, e somente se, possui uma das seguintes formas, a menos de reparametrização:*

- (i) *é vertical, dada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ da forma $\phi(s, t) = (p(s), t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, com p satisfazendo $|p'| \equiv 1$. Toda tal superfície satisfaz $K = 0$.*
- (ii) *é uma esfera horizontal $\mathbb{S}^2 \times \{r_0\}$. Neste caso, satisfaz $H = K = 0$.*
- (iii) *é horizontal da forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), s)$ em que $p, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ são determi-*

nadas unicamente por um sistema da forma

$$\begin{aligned} p' &= a \cos(bs + c)(p \times v) \\ v' &= a \sin(bs + c)(p \times v) \end{aligned}$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e condições iniciais $p(0) = p_0, v(0) = v_0 \in \mathbb{S}^2$ com $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$. A superfície é de Weingarten com respeito a

$$\Psi(H, K) = 16(a^2 + 1)H^4 + 4b^2H^2K + b^4K^3.$$

(iv) é oblíqua da forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), u_0t + r_0)$, sendo $u_0, r_0 \in \mathbb{R}$ constantes com $u_0 \neq 0$ e $(p, v) : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ qualquer curva satisfazendo $\langle p, v \rangle = \langle p', v \rangle = 0$ e sujeita à condição de imersão $(p', v') \neq (0, 0)$. Uma tal superfície satisfaz $K = 0$.

(v) é oblíqua da forma $\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), u_0t + s)$, sendo $(p, v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ determinada unicamente por um sistema da forma

$$\begin{aligned} p' &= -u_0v + a \cos(bs + c)(p \times v), \\ v' &= u_0p + a \sin(bs + c)(p \times v), \end{aligned}$$

para certas constantes $u_0, a, b, c \in \mathbb{R}$ com $au_0 \neq 0$ e condições iniciais $p(0) = p_0, v(0) = v_0 \in \mathbb{S}^2$ satisfazendo $\langle p_0, v_0 \rangle = 0$. Uma tal superfície é de Weingarten com relação Ψ dada por

$$\begin{aligned} \Psi(H, K) &= 16(u_0^2 + 1)^2(u_0^2 + a^2 + 1)H^4 + 4b(u_0^2 + 1)^2(b + 4u_0 + 4u_0^3 + 4a^2u_0 + bu_0^2)H^2K \\ &\quad + b^4(u_0^2 + 1)^4K^3 + 4u_0^2(u_0^2 + 1)(u_0^2 + a^2 + 1)H^2 \\ &\quad + 2b^2u_0(u_0^2 + 1)^2(b + u_0 + u_0^3 + a^2u_0 + bu_0^2)K^2 \\ &\quad + u_0^2(b + u_0 + u_0^3 + a^2u_0 + bu_0^2)^2K. \end{aligned}$$

3.2 Superfícies regradas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Antes de iniciar o estudo das superfícies regradas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, dedicamos uma seção para descrever brevemente o modelo do hiperboloide para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

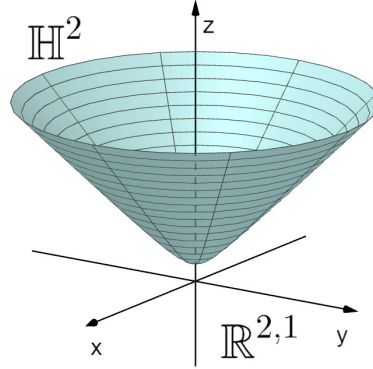
3.2.1 Modelo do hiperboloide para $\mathbb{H}^2$

Para trabalhar no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, utilizaremos o modelo do hiperboloide para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Façamos uma breve descrição desse modelo.

Primeiro, considere o espaço lorentziano $\mathbb{R}^{2,1}$, i.e. o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido da pseudo-métrica

$$q((a, b, c), (x, y, z)) = ax + by - cz.$$

Defina $\mathbb{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2,1} : q((x, y, z), (x, y, z)) = -1 \text{ e } z > 0\}$. Esse conjunto corresponde à folha superior de um hiperboloide de duas folhas em $\mathbb{R}^{2,1}$.



O conjunto $\mathbb{H}^2$ é imagem inversa de valor regular e, portanto, define uma subvariedade suave de dimensão 2 em $\mathbb{R}^{2,1}$.

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva suave com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_p\mathbb{H}^2$. Derivando a equação $q(\gamma, \gamma) = -1$ em $t = 0$, obtemos $q(p, v) = 0$. Isso mostra que

$$T_p\mathbb{H}^2 \subset \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : q(p, v) = 0\}.$$

Por outro lado, o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ tais que $q(p, v) = 0$ define um plano em $\mathbb{R}^{2,1}$. De fato, se $p \in \mathbb{H}^2$ então em particular $p = (a, b, c) \neq 0$, pois $c > 0$ e a condição $q(p, v) = 0$ é expressa pela equação $ax + by - cz = 0$, i.e. a equação de um plano em $\mathbb{R}^{2,1}$. Como $T_p\mathbb{H}^2$ possui dimensão 2, devemos portanto ter a igualdade

$$T_p\mathbb{H}^2 = \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : q(p, v) = 0\}.$$

Considere a parametrização global $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$\psi(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, (1 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Temos o campo coordenado associado

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \left(1, 0, \frac{x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right), \\ \psi_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left(0, 1, \frac{x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Os coeficientes da pseudométrica q na base $\{\psi_1, \psi_2\}$ são dados por

$$\begin{aligned} q(\psi_1, \psi_1) &= 1 - \frac{x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_2^2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \\ q(\psi_1, \psi_2) &= \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \\ q(\psi_2, \psi_2) &= 1 - \frac{x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}. \end{aligned}$$

Portanto, se $v = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$ é um vetor qualquer em $T_p\mathbb{H}^2$, $p = \psi(x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$, temos

$$\begin{aligned} q(v, v) &= a_1^2 q(\psi_1, \psi_1) + 2a_1a_2 q(\psi_1, \psi_2) + a_2^2 q(\psi_2, \psi_2) \\ &= a_1^2 \frac{x_2^2 + 1}{1 + x_1^2 + x_2^2} + 2a_1a_2 \frac{x_1x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + a_2^2 \frac{x_1^2 + 1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{(a_1x_2 + a_2x_1)^2 + a_1^2 + a_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Isso mostra que a forma bilinear simétrica q é definida positiva sobre $T_p\mathbb{H}^2$, i.e. $q(v, v) \geq 0$ com $q(v, v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Portanto, q define uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{H}^2$.

Antes de falar a respeito da conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$, façamos uma breve discussão a respeito de colchetes de Lie em subvariedades suaves.

Seja $\bar{M}$ uma variedade suave e $M \subset \bar{M}$ uma subvariedade mergulhada (por simplicidade). Sejam $\bar{X}, \bar{Y} \in \chi(\bar{M})$ dois campos de vetores sobre $\bar{M}$ tangentes a M . Em outras palavras,

$$\bar{X}(p), \bar{Y}(p) \in T_pM, \quad \forall p \in M.$$

Portanto, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ bem definem campos $X, Y \in \chi(M)$ ao se fazer $X(p) = \bar{X}(p)$ e $Y(p) = \bar{Y}(p)$ com $p \in M$. Por um lado, temos o colchete de Lie da variedade ambiente $[\bar{X}, \bar{Y}] \in \chi(\bar{M})$ e, por outro, considerando a estrutura suave induzida sobre M , temos o colchete de Lie da subvariedade $[X, Y] \in \chi(M)$. Podemos afirmar que $[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y]$? É isso que observamos agora. Seja $\bar{\psi} : \bar{U} \rightarrow \bar{M}$ uma parametrização adaptada a M , i.e. $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x_1, \dots, x_n)$ é uma parametrização local sobre $\bar{M}^n$ e a restrição $\psi(x_1, \dots, x_m) := \bar{\psi}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ fornece uma parametrização local sobre M^m (onde, é claro, $m < n$). Então se $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n\}$ denota o campo coordenado sobre $\bar{M}$ e

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{\psi}_i, \quad \bar{Y} = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j \bar{\psi}_j,$$

são as expressões dos campos $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ nessas coordenadas, então o colchete de Lie é dado por

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \sum_{i,j=1}^n \left(\bar{a}_i \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial x_i} - \bar{b}_i \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial x_i} \right) \bar{\psi}_j. \quad (1)$$

Agora, dizer que $\bar{X}|_M, \bar{Y}|_M \in \chi(M)$ significa dizer que $\bar{a}_i|_M = \bar{b}_j|_M \equiv 0$ para $i, j > m$. Denotando $a_i = \bar{a}_i|_M$ e $b_j = \bar{b}_j|_M$ para $i, j \leq m$, sabemos que, pela mesma fórmula

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \psi_j. \quad (2)$$

Aqui, claro, ψ_j denota $\bar{\psi}_j|_M$ que fornece, por hipótese, um campo coordenado sobre M . Agora, gostaríamos de restringir a equação (1) sobre M e reconhecê-la como (2). Primeiro, suponha $j \leq m$. Observe que, se $i > m$, então $\bar{a}_i|_M = \bar{b}_i|_M \equiv 0$. Para $i \leq m$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_j(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - \bar{a}_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m, 0, \dots, 0)}{t} \\ &= \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Analogamente, temos $\frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, para $i \leq m$. Segue daí que

$$[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y] + \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=1}^m \left(a_i \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial x_i} \right) \bar{\psi}_j$$

Agora, para $j > m$ e $i \leq m$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_j(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - \bar{a}_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m, 0, \dots, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{\partial \bar{b}_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = 0$. Isso implica

$$[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y].$$

Voltemos agora para $\mathbb{R}^{2,1}$. Denote por $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita usual em $\mathbb{R}^{2,1}$ visto como $\mathbb{R}^3$, i.e. se $\bar{X} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\bar{Y} = (b_1, b_2, b_3)$ são dois campos de vetores em $\mathbb{R}^{2,1}$, então

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_{j=1}^3 \left(a_1 \frac{\partial b_j}{\partial x} + a_2 \frac{\partial b_j}{\partial y} + a_3 \frac{\partial b_j}{\partial z} \right) e_j,$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Essa conexão é compatível com a pseudométrica q . De fato, denotando $\bar{Z} = (c_1, c_2, c_3)$, temos

$$\begin{aligned} \bar{Z}(q(\bar{X}, \bar{Y})) &= \bar{Z}(a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3) \\ &= c_1 \frac{\partial (a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)}{\partial x} + c_2 \frac{\partial (a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)}{\partial y} \\ &\quad + c_3 \frac{\partial (a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3)}{\partial z} \\ &= c_1 (a_{1,x} b_1 + a_1 b_{1,x} + a_{2,x} b_2 + a_2 b_{2,x} - a_{3,x} b_3 - a_3 b_{3,x}) \\ &\quad + c_2 (a_{1,y} b_1 + a_1 b_{1,y} + a_{2,y} b_2 + a_2 b_{2,y} - a_{3,y} b_3 - a_3 b_{3,y}) \\ &\quad + c_3 (a_{1,z} b_1 + a_1 b_{1,z} + a_{2,z} b_2 + a_2 b_{2,z} - a_{3,z} b_3 - a_3 b_{3,z}) \\ &= (c_1 a_{1,x} + c_2 a_{1,y} + c_3 a_{1,z}) b_1 + (c_1 a_{2,x} + c_2 a_{2,y} + c_3 a_{2,z}) b_2 \\ &\quad - (c_1 a_{3,x} + c_2 a_{3,y} + c_3 a_{3,z}) b_3 + a_1 (c_1 b_{1,x} + c_2 b_{1,y} + c_3 b_{1,z}) \\ &\quad + a_2 (c_1 b_{2,x} + c_2 b_{2,y} + c_3 b_{2,z}) - a_3 (c_1 b_{3,x} + c_2 b_{3,y} + c_3 b_{3,z}) \\ &= q((c_1 a_{1,x} + c_2 a_{1,y} + c_3 a_{1,z}, c_1 a_{2,x} + c_2 a_{2,y} + c_3 a_{2,z}, c_1 a_{3,x} + c_2 a_{3,y} + c_3 a_{3,z}), \bar{Y}) \\ &\quad + q(\bar{X}, (c_1 b_{1,x} + c_2 b_{1,y} + c_3 b_{1,z}, c_1 b_{2,x} + c_2 b_{2,y} + c_3 b_{2,z}, c_1 b_{3,x} + c_2 b_{3,y} + c_3 b_{3,z})) \\ &= q(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{X}, \bar{Y}) + q(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}) \end{aligned}$$

Estamos quase aptos a apresentar a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$. Antes, resta falar apenas da decomposição em componentes tangente e normal de um vetor $v \in T_p \mathbb{R}^{2,1}$, com $p \in \mathbb{H}^2$. Definimos simplesmente

$$v^T := v + q(v, p) p, \quad v^N := -q(v, p) p.$$

Note que $v = v^T + v^N$ e que

$$\begin{aligned} q(v^T, p) &= q(v, p) + q(v, p) q(p, p) = q(v, p) + q(v, p)(-1) = 0. \\ q(v^N, w) &= 0, \text{ para todo } w \in T_p \mathbb{H}^2. \end{aligned}$$

Em particular, a primeira equação mostra que $v^T \in T_p \mathbb{H}^2$.

Finalmente, damos a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$, a qual denotamos por ∇ . Se X, Y são dois campos de vetores tangentes a $\mathbb{H}^2$ e $\bar{X}, \bar{Y}$ são duas extensões a campos de vetores de $\mathbb{R}^{2,1}$, afirmamos que

$$(\nabla_X Y)(p) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p))^T, \quad p \in \mathbb{H}^2.$$

É possível mostrar que essa definição não depende das extensões $\bar{X}$ e $\bar{Y}$.

Para verificar que ∇ é de fato a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$, observe que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y(p) - \nabla_Y X(p) &= \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) \right)^T - \left(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p) \right)^T \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) + q\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p), p\right) p - \left(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p) + q\left(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p), p\right) p \right) \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p) + q\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}(p), p\right) p \\ &= [\bar{X}, \bar{Y}](p) + q([\bar{X}, \bar{Y}](p), p) p. \end{aligned}$$

Pela discussão feita anteriormente a respeito do colchete de Lie, temos $[\bar{X}, \bar{Y}](p) = [X, Y](p) \in T_p \mathbb{H}^2$. Isso implica $q([\bar{X}, \bar{Y}](p), p) = 0$ e, portanto,

$$\nabla_X Y(p) - \nabla_Y X(p) = [X, Y](p).$$

Isso mostra a simetria de ∇ .

Se $Z \in \chi(\mathbb{H}^2)$, $\bar{Z} \in \chi(\mathbb{R}^{2,1})$ é extensão de Z , $f \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$ e $\bar{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2,1})$ extensão de f , fazendo uso das coordenadas é possível mostrar que

$$\bar{Z}(\bar{f})|_{\mathbb{H}^2} = Z(f).$$

Segue daí que, sobre $\mathbb{H}^2$,

$$\begin{aligned} Z(q(X, Y)) &= \bar{Z}(q(\bar{X}, \bar{Y})) = q(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{X}, \bar{Y}) + q(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}) \\ &= q\left(\left(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{X}\right)^T + \left(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{X}\right)^N, Y\right) + q\left(X, \left(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}\right)^T + \left(\bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y}\right)^N\right) \\ &= q(\nabla_Z X, Y) + q(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Isso mostra que ∇ é compatível com a métrica q sobre $\mathbb{H}^2$. Portanto, ∇ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^2$.

Para finalizar nossa descrição do modelo do hiperbolóide para $\mathbb{H}^2$, falemos de suas geodésicas. Sejam $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in T_p \mathbb{H}^2$ unitário. Defina $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ por

$$\gamma(t) = (\cosh t) p + (\sinh t) v.$$

Note então que

$$\begin{aligned} q(\gamma, \gamma) &= (\cosh t)^2 q(p, p) + 2 \cosh t \sinh t q(p, v) + (\sinh t)^2 q(v, v) \\ &= -(\cosh t)^2 + (\sinh t)^2 = -1, \end{aligned}$$

onde utilizamos que $q(p, p) = -1$ pois $p \in \mathbb{H}^2$, $q(p, v) = 0$ pois $v \in T_p \mathbb{H}^2$ e $q(v, v) = 1$ pois v é unitário. Isso mostra que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$. Além disso, observando que $\cosh' t = \sinh t$ e $\sinh' t = \cosh t$, temos que $\gamma' = \gamma$. Segue daí que

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \left(\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' \right)^T = (\gamma'')^T = \gamma'^T = \gamma^T = \gamma + q(\gamma, \gamma) \gamma = \gamma - \gamma = 0.$$

Portanto, γ é geodésica. Por fim, vemos que ela satisfaz as condições iniciais $\gamma(0) = (\cosh 0) p + (\sinh 0) v = p$ e $\gamma'(0) = (\sinh 0) p + (\cosh 0) v = v$.

3.2.2 Verticais

Definimos superfícies regradas verticais, horizontais e oblíquas de forma análoga a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Primeiro, olhemos para o caso das superfícies regradas do tipo vertical. Sem perda de generalidade, podemos parametrizar uma tal superfície por $\phi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(s, t) = (p(s), t).$$

Temos $\phi_s = (p', 0)$ e $\phi_t = (0, 1)$. Portanto, para que ϕ satisfaça a nossa condição de tolerância a pontos de não imersão, é necessário e suficiente que p seja regular e isso implica na verdade que ϕ é imersão. Sem perda de generalidade, podemos supor que p está parametrizada pelo comprimento de arco de $\mathbb{H}^2$, i.e. $q(p', p') = 1$.

Para falar do campo normal, observe antes que podemos definir um produto vetorial em $\mathbb{R}^{2,1}$, fazendo

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & -e_3 \end{bmatrix},$$

sendo $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{2,1}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{2,1}$. Observe que

$$q(u \times v, u) = (u_2 v_3 - u_3 v_2) u_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) u_2 - (u_2 v_1 - u_1 v_2) u_3 = 0.$$

Analogamente, $q(u \times v, v) = 0$. Note ainda que u e v são linearmente dependentes se, e somente se, $u \times v = 0$. Basta observar que as coordenadas de $u \times v$ são as mesmas coordenadas obtidas do produto vetorial usual de $\mathbb{R}^3$, diferindo apenas por um sinal na terceira coordenada. Portanto, as coordenadas de $u \times v \in \mathbb{R}^{2,1}$ são identicamente nulas se, e somente se, as coordenadas de $u \times v \in \mathbb{R}^3$ são identicamente nulas.

Voltando para o estudo da nossa superfície, considere $v : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ definida por $v = p \times p'$. Temos $q(v, p) = 0$ e, portanto, $v : I \times \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{H}^2$. Além disso, denotando a métrica riemanniana de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos

$$\begin{aligned}\langle \phi_s, (v, 0) \rangle &= \langle (p', 0), (v, 0) \rangle = q(p', v) = 0, \\ \langle \phi_t, (v, 0) \rangle &= \langle (0, 1), (v, 0) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $(v, 0)$ define um campo normal à superfície. Denotando $p = (x, y, z)$, note ainda que

$$\begin{aligned}|p \times p'|^2 &= q(p \times p', p \times p') = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 - (yx' - xy')^2 \\ &= -(x^2 + y^2 - z^2) \left((x')^2 + (y')^2 - (z')^2 \right) + (xx' + yy' - zz')^2 \\ &= -q(p, p)q(p', p') + q(p, p')^2 = 1.\end{aligned}$$

Isso mostra que $N = (v, 0)$ é um campo normal unitário sobre a superfície.

Quanto às derivadas covariantes, temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s} \phi_s &= \left((p'')^T, 0 \right) = (p'' + q(p'', p)p, 0) = (p'' - p, 0), \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= \nabla_{\phi_t} \phi_t = (0, 0).\end{aligned}$$

No cálculo de $\nabla_{\phi_s} \phi_s$ acima, usamos que $q(p', p) = 0$ e $q(p', p') = 1$ para obter $q(p'', p) = -1$.

Segue daí a primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$\begin{aligned}E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = q(p', p') = 1, \quad F = \langle \phi_s, \phi_t \rangle = \langle (p', 0), (0, 1) \rangle = 0, \\ G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1, \\ e &= \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, N \rangle = q(p'' - p, p \times p') = q(p'', p \times p'), \\ f &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, N \rangle = 0, \quad g = \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, N \rangle = 0.\end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$\begin{aligned}H &= \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{q(p'', p \times p')}{2}, \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.\end{aligned}$$

Segue daí que

Proposição 3.13. *Toda superfície regradada vertical em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten com $K \equiv 0$. Toda tal superfície pode ser parametrizada na forma $\phi(s, t) = (p(s), t)$ com $p(s) \in \mathbb{H}^2$ satisfazendo $|p'|_{\mathbb{H}^2} = 1$. Sob essa condição, sua curvatura média é dada por*

$$H = \frac{q(p'', p \times p')}{2},$$

sendo q a pseudométrica de $\mathbb{R}^{2,1}$ e $p \times p'$ o produto vetorial em $\mathbb{R}^{2,1}$.

3.2.3 Horizontais

Seguimos agora com o estudo do caso das superfícies regradas horizontais. Podemos supor que uma tal superfície está parametrizada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), r(s)),$$

com $p : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ e $v : I \rightarrow T\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ unitário. Supomos ainda que ϕ satisfaz a condição de ortogonalidade

$$0 = \langle P', V \rangle = \langle (p', r'), (v, 0) \rangle = q(p', v).$$

Como $v \in T_p\mathbb{H}^2$, já tínhamos $q(p, v) = 0$. Derivando essa equação e utilizando a condição de ortogonalidade, vemos que temos também $q(p, v') = 0$.

Por simplicidade, denotemos $\kappa = \cosh t$ e $\sigma = \sinh t$. Os vetores tangentes à superfície são dados por

$$\phi_s = (\kappa p' + \sigma v', r'), \quad \phi_t = (\sigma p + \kappa v, 0).$$

Observamos que ϕ é imersão em $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$ se, e somente se, $\phi_s(s, t) \neq 0$. De fato, para $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$ fixado, a equação $a\phi_s + b\phi_t = 0$ para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ equivale a

$$(a(\kappa p' + \sigma v') + b(\sigma p + \kappa v), ar') = (0, 0).$$

Em particular, devemos ter $a(\kappa p' + \sigma v') + b(\sigma p + \kappa v) = 0$. Segue daí e das condições sobre p e v que

$$\begin{aligned} q(a(\kappa p' + \sigma v') + b(\sigma p + \kappa v), p) &= -\sigma b, \\ q(a(\kappa p' + \sigma v') + b(\sigma p + \kappa v), v) &= \kappa b. \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $b = 0$. Mas então isso implica $a\phi_s = 0$. Isso mostra que ϕ é imersão sobre (s, t) se, e somente se, $\phi_s(s, t) \neq 0$.

Considere o referencial ortonormal ao longo de ϕ dado por

$$E_1 = (\sigma p + \kappa v, 0), \quad E_2 = (p \times v, 0), \quad E_3 = (0, 1).$$

Destacamos que a notação $p \times v$ se refere ao produto vetorial de $\mathbb{R}^{2,1}$, definido anteriormente. Observe que este referencial está bem definido, i.e. todas as primeiras coordenadas definem de fato campos de vetores tangentes a $\mathbb{H}^2$ na respectiva posição dada por ϕ , a saber, $\kappa p + \sigma v$. De fato,

$$\begin{aligned} q(\sigma p + \kappa v, \kappa p + \sigma v) &= \kappa \sigma q(p, p) + (\sigma^2 + \kappa^2) q(p, v) + \kappa \sigma q(v, v) \\ &= \kappa \sigma (-1) + (\sigma^2 + \kappa^2) \cdot 0 + \kappa \sigma \cdot 1 = 0, \\ q(p \times v, \kappa p + \sigma v) &= 0, \quad q(0, \kappa p + \sigma v) = 0. \end{aligned}$$

Para ver que o referencial é ortonormal, basta fazer a verificação

$$\begin{aligned}\langle E_1, E_1 \rangle &= q(\sigma p + \kappa v, \sigma p + \kappa v) = -\sigma^2 + \kappa^2 = 1, \\ \langle E_2, E_2 \rangle &= q(p \times v, p \times v) = -q(p, p)q(v, v) + q(p, v)^2 = 1, \\ \langle E_3, E_3 \rangle &= 1, \\ \langle E_1, E_2 \rangle &= q(\sigma p + \kappa v, p \times v) = 0, \\ \langle E_1, E_3 \rangle &= \langle E_2, E_3 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\langle \phi_s, E_1 \rangle &= q(\kappa p' + \sigma v', \sigma p + \kappa v) = 0, \\ \langle \phi_s, E_2 \rangle &= q(\kappa p' + \sigma v', p \times v) = \kappa q(p', p \times v) + \sigma q(v', p \times v), \\ \langle \phi_s, E_3 \rangle &= r' \cdot 1 = r', \\ \langle \phi_t, E_1 \rangle &= q(\sigma p + \kappa v, \sigma p + \kappa v)\end{aligned}$$

Assim, denotando $\alpha := q(p', p \times v)$, $\beta := q(v', p \times v)$, temos

$$\begin{aligned}\phi_s &= (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_2 + r'E_3, \\ \phi_t &= E_1.\end{aligned}$$

Essa escrita nos é útil para definir um campo normal ao longo da superfície. Basta fazer

$$v = \det \begin{bmatrix} 0 & \kappa\alpha + \sigma\beta & r' \\ 1 & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = r'E_2 - (\kappa\alpha + \sigma\beta)E_3 = (r'(p \times v), -(\kappa\alpha + \sigma\beta)).$$

Assim, sobre os pontos de imersão (i.e. sobre os pontos sobre os quais $\phi_s \neq 0$), podemos considerar o campo normal unitário $N = \frac{v}{|v|}$.

Antes de calcular as derivadas covariantes de ϕ , observamos que o produto vetorial de $\mathbb{R}^{2,1}$, assim como o produto vetorial usual de $\mathbb{R}^3$, satisfaz $(p \times v)' = p' \times v + p \times v'$. Observe ainda que, como no caso de $\mathbb{R}^3$, $\{p, v, p \times v\}$ fornece uma base para $\mathbb{R}^{2,1}$. De fato, se $u := ap + bv + c(p \times v) = 0$, então

$$\begin{aligned}0 &= q(u, p) = q(ap, p) = -a, \\ 0 &= q(u, v) = q(bv, v) = b, \\ 0 &= q(u, p \times v) = q(c(p \times v), p \times v) = c.\end{aligned}$$

Isso mostra que $\{p, v, p \times v\}$ é linearmente independente. Como $\mathbb{R}^{2,1}$ possui dimensão três, esse conjunto é uma base. Além disso, a mesma conta mostra que todo vetor $u \in \mathbb{R}^{2,1}$ se escreve como

$$u = -q(u, p)p + q(u, v)v + q(u, p \times v)(p \times v).$$

Denotando $p = (x, y, z)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned}
 (p \times v) \times v &= \det \begin{bmatrix} yv_3 - zv_2 & zv_1 - xv_3 & yv_1 - xv_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & -e_3 \end{bmatrix} \\
 &= ((v_2^2 - v_3^2)x - v_1(yv_2 - zv_3))e_1 + ((v_1^2 - v_3^2)y - v_2(xv_1 - zv_3))e_2 \\
 &\quad + ((v_1^2 + v_2^2)z - v_3(xv_1 + yv_2))e_3 \\
 &= ((1 - v_1^2)x - v_1(yv_2 - zv_3))e_1 + ((1 - v_2^2)y - v_2(xv_1 - zv_3))e_2 \\
 &\quad + ((1 + v_3^2)z - v_3(xv_1 + yv_2))e_3 \\
 &= (x - v_1(xv_1 + yv_2 - zv_3))e_1 + (y - v_2(xv_1 + yv_2 - zv_3))e_2 \\
 &\quad + (z - v_3(xv_1 + yv_2 - zv_3))e_3 \\
 &= xe_1 + ye_2 + ze_3 = p.
 \end{aligned}$$

A mesma verificação direta também mostra que $p \times (p \times v) = -v$. Vale também que $u \times v = -v \times u$ e $q(u \times v, w) = -q(w \times v, u)$, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^{2,1}$.

Observe então que

$$\begin{aligned}
 p' &= -q(p', p)p + q(p', v)v + q(p', p \times v)(p \times v) \\
 &= \alpha(p \times v), \\
 v' &= -q(v', p)p + q(v', v)v + q(v', p \times v)(p \times v) \\
 &= \beta(p \times v).
 \end{aligned}$$

Usando todas essas propriedades, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\kappa p' + \sigma v')_s &= ((\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v))' \\
 &= (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p' \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times v') \\
 &= (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(\alpha(p \times v) \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(p \times \beta(p \times v)) \\
 &= (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + \alpha(\kappa\alpha + \sigma\beta)p - \beta(\kappa\alpha + \sigma\beta)v \\
 &= (\kappa\alpha' + \sigma\beta')(p \times v) + (\kappa\alpha + \sigma\beta)(\alpha p - \beta v)
 \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}
 q((\kappa p' + \sigma v')_s, \kappa p + \sigma v) &= (\kappa\alpha + \sigma\beta)(\kappa\alpha q(p, p) - \sigma\beta q(v, v)) \\
 &= -(\kappa\alpha + \sigma\beta)^2.
 \end{aligned}$$

Usando todas essas informações e lembrando que $-\kappa^2 + \sigma^2 = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\kappa p' + \sigma v')_s^T &= (\kappa p' + \sigma v')_s + q((\kappa p' + \sigma v')_s, \kappa p + \sigma v)(\kappa p + \sigma v) \\
 &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\alpha p - \beta v) - (\kappa \alpha + \sigma \beta)^2(\kappa p + \sigma v) \\
 &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\alpha p - \beta v) - (\kappa \alpha + \sigma \beta)^2(\kappa p + \sigma v) \\
 &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\alpha - \alpha \kappa^2 - \kappa \sigma \beta)p \\
 &\quad - (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\beta + \sigma^2 \beta + \alpha \kappa \sigma)v \\
 &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) + (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\alpha - \alpha(1 + \sigma^2) - \kappa \sigma \beta)p \\
 &\quad - (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\beta + (-1 + \kappa^2)\beta + \alpha \kappa \sigma)v \\
 &= (\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) - (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\sigma \alpha + \kappa \beta)(\sigma p + \kappa v).
 \end{aligned}$$

Com isso, obtemos a primeira derivada covariante:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\phi_s} \phi_s &= \left((\kappa p' + \sigma v')_s^T, r'' \right) \\
 &= \left[(\kappa \alpha' + \sigma \beta')(p \times v) - (\kappa \alpha + \sigma \beta)(\sigma \alpha + \kappa \beta)(\sigma p + \kappa v), r'' \right].
 \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
 (\kappa p' + \sigma v')_t &= ((\kappa \alpha + \sigma \beta)(p \times v))_t \\
 &= (\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v).
 \end{aligned}$$

Como $q(p \times v, \kappa p + \sigma v) = 0$, temos que $(\kappa p' + \sigma v')_t^T = (\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v)$. Portanto,

$$\nabla_{\phi_t} \phi_s = \left((\kappa p' + \sigma v')_t^T, 0 \right) = ((\sigma \alpha + \kappa \beta)(p \times v), 0).$$

Por fim, sabemos que $\nabla_{\phi_t} \phi_t \equiv (0, 0)$ por se tratar das direções geodésicas. Temos então a primeira e segunda formas fundamentais

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = (\kappa \alpha + \sigma \beta)^2 + (r')^2, \\
 F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = 0, \\
 G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1, \\
 W^{-2} &= (EG - F^2) = E, \\
 \tilde{e} &= \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, v \rangle = r'(\kappa \alpha' + \sigma \beta') - r''(\kappa \alpha + \sigma \beta), \\
 \tilde{f} &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, v \rangle = r'(\sigma \alpha + \kappa \beta), \\
 \tilde{g} &= \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, v \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

As curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$H = \frac{W^3}{2} (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) = \frac{r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta)}{2((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = W^4 (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) = \frac{-(r')^2(\sigma\alpha + \kappa\beta)^2}{((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2)^2}.$$

Vamos supor que a superfície seja de classe C^3 e estudar a condição de Kühnel. Primeiramente, note que a condição de Kühnel possui a forma

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t \\ 4(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_s & (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2)_t \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 4(-\tilde{f}^2) & -2\tilde{f}\tilde{f}_s & -2\tilde{f}\tilde{f}_t \end{bmatrix} = -2\tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix}.$$

Vamos dividir nossa análise em alguns casos.

Primeiro, consideremos o caso $r' \equiv 0$. Neste caso, segue das fórmulas que $H = K \equiv 0$ e a superfície é dada por $\phi(s, t) = (\kappa p + \sigma v, r_0)$, para alguma constante $r_0 \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, a superfície está contida no hiperboloide $\mathbb{H}^2 \times \{r_0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Suponha agora que r não seja constante. Então existe intervalo aberto $I_1 \subset I$ maximal com respeito à propriedade $r' \neq 0$.

Daqui em diante, iremos dividir nossa análise em alguns casos. Para enunciar esses casos, primeiro considere o plano lorentziano $\mathbb{R}^{1,1}$, i.e. $\mathbb{R}^2$ munido da pseudométrica

$$\tilde{q}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

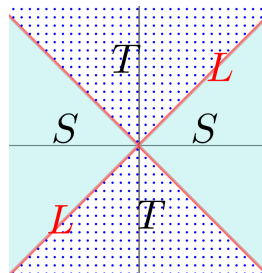
Usando $\tilde{q}$, podemos dividir $\mathbb{R}^{1,1}$ em três conjuntos dados por

$$\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^{1,1} : \tilde{q}(v, v) > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

$$\mathcal{T} = \{v \in \mathbb{R}^{1,1} : \tilde{q}(v, v) < 0\},$$

$$\mathcal{L} = \{v \in \mathbb{R}^{1,1} : \tilde{q}(v, v) = 0\} - \{(0, 0)\}.$$

Os vetores em $\mathcal{S}$ são ditos do **tipo espaço**, aqueles em $\mathcal{T}$ são ditos do **tipo tempo** e aqueles em $\mathcal{L}$ são ditos do **tipo luz**. Naturalmente, essas definições também podem ser consideradas em $\mathbb{R}^{2,1}$. A figura abaixo ilustra tais regiões.



Observe que $\mathcal{S} - \{(0,0)\}$ e $\mathcal{T}$ são abertos, enquanto que $\mathcal{L} \cup \{(0,0)\}$ é a união de duas retas dadas em coordenadas cartesianas por $x = y$ e $x = -y$.

A divisão em casos mencionada acima se dará com base na curva $(\alpha, \beta) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$.

Primeiro, suponha que $(\alpha, \beta) \equiv (0,0)$. Neste caso, a condição de imersão sobre I_1 se reduz a $0 \neq (\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 = (r')^2$. Em particular, nosso tradicional argumento de maximalidade de I_1 junto da condição de tolerância (estamos supondo a mesma condição do caso $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$), mostra que devemos ter $I_1 = I$. Isso implica que a superfície é dada por

$$\phi(s, t) = ((\cosh t)p_0 + (\sinh t)v_0, r(s)).$$

Contudo, essa é uma superfície do tipo vertical, o que contradiz a hipótese de que a superfície é do tipo horizontal.

Portanto, deve existir intervalo aberto não vazio $I_2 \subset I_1$ maximal com respeito à propriedade $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Analisemos agora o caso em que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possui pontos do tipo espaço. Neste caso, existe intervalo aberto não vazio $I_3 \subset I_2$ maximal com respeito à propriedade $(\alpha, \beta)(I_3) \subset \mathcal{S}$. Isto significa que $\alpha^2 - \beta^2 > 0$ sobre I_3 . Neste caso, podemos considerar funções $R, \theta : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$, com $R(s) \neq 0$ para todo $s \in I_3$, tais que

$$(\alpha, \beta) = (R \cosh \theta, R \sinh \theta).$$

Com essa escrita, sobre o intervalo I_3 temos

$$\begin{aligned} E &= (\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 = ((\cosh t)R(\cosh \theta) + (\sinh t)R(\sinh \theta))^2 + (r')^2 \\ &= R^2 \cosh^2(t + \theta) + (r')^2, \\ \tilde{e} &= r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta) \\ &= r'((\cosh t)(R' \cosh \theta + R\theta' \sinh \theta) + (\sinh t)(R' \sinh \theta + R\theta' \cosh \theta)) \\ &\quad - r''((\cosh t)R \cosh \theta + (\sinh t)R \sinh \theta) \\ &= Rr'\theta' \sinh(t + \theta) + (r'R' - Rr'') \cosh(t + \theta), \\ \tilde{f} &= r'(\sigma\alpha + \kappa\beta) = r'((\sinh t)R \cosh \theta + (\cosh t)R(\sinh \theta)) \\ &= Rr' \sinh(t + \theta). \end{aligned}$$

Por simplicidade, iremos denotar $C = \cosh(t + \theta)$, $S = \sinh(t + \theta)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} E &= R^2 C^2 + (r')^2, \\ E_s &= 2RR'C^2 + 2R^2\theta'CS + 2r'r'', \\ E_t &= 2R^2CS, \\ \tilde{e} &= Rr'\theta'S + (r'R' - Rr'')C, \\ \tilde{e}_s &= R'r'\theta'S + Rr''\theta'S + Rr'\theta''S + Rr'(\theta')^2C + (r'R'' - Rr''')C + (r'R' - Rr'')\theta'S, \end{aligned}$$

$$\tilde{e}_t = Rr'\theta'C + (r'R' - Rr'')S,$$

$$\tilde{f} = Rr'S,$$

$$\tilde{f}_s = R'r'S + Rr''S + Rr'\theta'C,$$

$$\tilde{f}_t = Rr'C.$$

Coletando a condição de Kühnel em S , substituindo $S^2 = C^2 - 1$ e sem seguida coletando em C, S , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} &= -2R^5(r')^2(r'\theta'' - r''\theta')C^5 \\ &+ 2R^3r'(-2R^2(r'')^2 + (r')^2(R')^2 + R^2r'r''' - R(r')^2R'' + Rr'r''R')C^4S \\ &+ 2R^3(r')^2((r')^3\theta'' + 3R^2r'\theta'' - 2R^2r''\theta' - (r')^2r''\theta' - Rr'\theta'R')C^3 \\ &- 2Rr' \left(\begin{array}{c} -2R^4(r'')^2 + (r')^4(R')^2 + R^2(r')^3r''' - 2R^3(r')^2R'' \\ -2R^2(r')^2(r'')^2 + 4R^2(r')^2(R')^2 + 2R^4r'r''' \\ -R(r')^4R'' + R(r')^3r''R' - 2R^3r'r''R' \end{array} \right) C^2S \\ &- 2R^3(r')^2((r')^3\theta'' + 2R^2r'\theta'' - R^2r''\theta' - (r')^2r''\theta' - Rr'\theta'R')C \\ &+ 2R(r')^3(Rr'' - r'R')^2S. \end{aligned}$$

Fixando $s \in I_3$ e variando $t \in \mathbb{R}$, nosso argumento de curvas algébricas nos diz que a equação deve possuir $-C^2 + S^2 + 1$ como fator. Como a equação possui grau ≤ 1 em S , isso implica que os coeficientes dessa equação são todos nulos para tal s fixado. Como s é fixado porém arbitrário, isso implica que os coeficientes são todos identicamente nulos sobre I_3 .

Como $Rr' \neq 0$ sobre I_3 , o coeficiente de S nos traz que $Rr'' - r'R' = 0$. Essa equação implica que

$$R(s) = ar'(s) \text{ sobre } I_3,$$

para certa constante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Mostremos que essa equação implica $I_3 = I_2 = I_1 = I$. Suponha por contradição que $I_3 \subsetneq I_2$. Isso implica a existência de um ponto s_0 extremal de I_3 (i.e. $s_0 = \sup I_3$ ou $s_0 = \inf I_3$) e interior a I_2 . Da maximalidade de I_3 , devemos ter $(\alpha, \beta)(s_0) \notin \mathcal{S}$ e, portanto, devemos ter $(\alpha, \beta)(s_0) \in \mathcal{L}$, i.e. $(\alpha^2 - \beta^2)(s_0) = 0$. Fazendo o limite $s \rightarrow s_0$ via pontos $s \in I_3$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 - \beta^2)(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0, s \in I_3} R^2(s) (\cosh^2 \theta(s) - \sinh^2 \theta(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0, s \in I_3} R^2(s) = \lim_{s \rightarrow s_0, s \in I_3} a^2 (r')^2(s) \\ &= a^2 (r')^2(s_0). \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$, isso implica $r'(s_0) = 0$ com $s_0 \in I_2 \subset I_1$, uma contradição. Portanto, isso mostra que devemos ter $I_3 = I_2$. Em termos das definições de cada intervalo, isso está nos dizendo que $(\alpha, \beta) \subset \mathcal{S}$, i.e. possui apenas pontos do tipo espaço. Para ver que $I_2 = I_1$, um argumento semelhante

mostra que, se este não fosse o caso, então teríamos um ponto $s_0 \in I_1$ sobre o qual $r'(s_0) = 0$, obtendo a mesma contradição. Por fim, a hipótese $I_1 \subsetneq I$ implica a existência de $s_0 \in I$ tal que ϕ deixa de ser imersão sobre (s_0, t) , para todo $t \in \mathbb{R}$, contradizendo nossa condição de tolerância. Isso prova nossa afirmação de que $I_3 = I_2 = I_1 = I$.

Olhando agora para o coeficiente de C^5 , devemos ter $r'\theta'' - r''\theta' = 0$ sobre I . Isso implica que θ é da forma

$$\theta(s) = br(s) + c, \quad s \in I,$$

para certas constantes $b, c \in \mathbb{R}$. Sob essas condições, todos os demais coeficientes são identicamente nulos.

As curvaturas neste caso são dadas por

$$H = \frac{ab(r')^3 S}{2|r'|^3 (a^2(S^2 + 1) + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = -\frac{a^2 S^2}{(a^2(S^2 + 1) + 1)^2}.$$

Usando a técnica da eliminante para desaparecer com S , obtemos que H e K satisfazem

$$16(a^2 + 1)H^4 + 4b^2H^2K - b^4K^3 = 0.$$

Como já feito anteriormente em outros casos (v. seção sobre $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$), a condição $r' \neq 0$ sobre I nos permite supor, a menos de uma reparametrização da superfície, que $r(s) = s$ sobre I . Portanto, a superfície tem a forma $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), s)$ em que $p, v : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ são uma solução do sistema

$$p' = a \cosh(bs + c)(p \times v),$$

$$v' = a \sinh(bs + c)(p \times v),$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in \mathbb{R}^{2,1}$ com $q(p_0, v_0) = 0$ e $q(v_0, v_0) = 1$. A solução de um tal sistema existe e é única dadas condições iniciais. Além disso, o próprio sistema garante que a solução satisfaz $p(s) \in \mathbb{H}^2$, $v(s) \in T_{p(s)}\mathbb{H}^2$ unitário, para todo $s \in I$.

Analisemos agora o caso em que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possui pontos do tipo tempo. Neste caso, existe intervalo aberto não vazio $I_3 \subset I_2$ maximal com respeito à propriedade $(\alpha, \beta)(I_3) \subset \mathcal{T}$. Isto significa que $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ sobre I_3 . Neste caso, podemos considerar funções $R, \theta : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$, com $R(s) \neq 0$ para todo $s \in I_3$, tais que

$$(\alpha, \beta) = (R \sinh \theta, R \cosh \theta).$$

Fazendo contas semelhantes ao caso anterior, obteremos sobre I_3

$$\begin{aligned}
E &= R^2 S^2 + (r')^2, \\
E_s &= 2RR'S^2 + 2R^2\theta'SC + 2r'r'', \\
E_t &= 2R^2SC, \\
\tilde{e} &= Rr'\theta'C + (r'R' - Rr'')S, \\
\tilde{e}_s &= R'r'\theta'C + Rr''\theta'C + Rr'\theta''C + Rr'(\theta')^2S + (r'R'' - Rr''')S + (r'R' - Rr'')\theta'C, \\
\tilde{e}_t &= Rr'\theta'S + (r'R' - Rr'')C, \\
\tilde{f} &= r'RC, \\
\tilde{f}_s &= r''RC + r'R'C + r'R\theta'S, \\
\tilde{f}_t &= r'RS.
\end{aligned}$$

Coletando a condição de Kühnel em S , substituindo $C^2 = S^2 + 1$ e sem seguida coletando em C, S , obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\
&= -2R^5(r')^2(r'\theta'' - r''\theta')S^5 \\
&\quad + 2R^3r'(r'''R^2r' - 2R^2(r'')^2 - R''R(r')^2 + Rr'r''R' + (r')^2(R')^2)S^4C \\
&\quad + 2R^3(r')^2(-3\theta''R^2r' + 2r''\theta'R^2 + \theta'R'Rr' + \theta''(r')^3 - r''\theta'(r')^2)S^3 \\
&\quad - 2Rr' \left(\begin{aligned} &-2r'''R^4r' + 2R^4(r'')^2 + 2R''R^3(r')^2 + 2R^3r'r''R' \\ &+ r'''R^2(r')^3 - 2R^2(r')^2(r'')^2 - 4R^2(r')^2(R')^2 \\ &- R''R(r')^4 + R(r')^3r''R' + (r')^4(R')^2 \end{aligned} \right) S^2C \\
&\quad + 2R^3(r')^2(-2\theta''R^2r' + r''\theta'R^2 + \theta'R'Rr' + \theta''(r')^3 - r''\theta'(r')^2)S \\
&\quad - 2R(r')^3(Rr'' - r'R')^2C.
\end{aligned}$$

Como no caso anterior, essa equação implica

$$R(s) = ar'(s), \quad \theta(s) = br(s) + c$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sobre I_3 . Por razões análogas ao caso anterior, devemos ter $I_3 = I_2 = I_1 = I$.

Neste caso, em que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}$, as curvaturas assumem a forma

$$\begin{aligned}
H &= \frac{ab(r')^3C}{2|r'|^3(a^2(C^2 - 1) + 1)^{\frac{3}{2}}}, \\
K &= \frac{-a^2C^2}{(a^2(C^2 - 1) + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Essas curvaturas satisfazem a relação de Weingarten dada por

$$-16(a^2 - 1)H^4 + 4b^2H^2K - b^4K^3 = 0.$$

Como no caso anterior, a condição $r' \neq 0$ sobre I nos permite supor, a menos de uma reparametrização da superfície, que $r(s) = s$ sobre I . Portanto, a superfície tem a forma $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), s)$ em que $p, v : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ são solução do sistema

$$\begin{aligned} p' &= a \sinh(bs + c)(p \times v), \\ v' &= a \cosh(bs + c)(p \times v), \end{aligned}$$

para certas condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in \mathbb{R}^{2,1}$ com $q(p_0, v_0) = 0$ e $q(v_0, v_0) = 1$.

Por fim, analisemos o caso em que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ não possui pontos do tipo espaço nem do tipo tempo, i.e. possui apenas pontos do tipo luz.

Primeiro, note que tal hipótese significa que $\alpha^2 = \beta^2$ sobre I_2 . Como $(\alpha, \beta)|_{I_2} \neq (0, 0)$, devemos ter $\beta = v\alpha$ sobre I_2 , para uma constante $v \in \{-1, 1\}$. Isso nos diz que, restrito a I_2 ,

$$p' = \alpha(p \times v), \quad v' = v\alpha(p \times v).$$

Argumentamos agora que podemos, sem perda de generalidade, supor que $v = 1$. Para isso, lembremos que $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é dada por $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), r(s))$. Note então que, se trocarmos $v(s)$ por $\varpi(s) = -v(s)$, estaremos parametrizando a mesma superfície. Além disso, com essa troca, teremos

$$\begin{aligned} p' &= \alpha(p \times v) = -\alpha(p \times \varpi) = \tilde{\alpha}(p \times \varpi), \\ \varpi' &= -v' = -v\alpha(p \times v) = -v(-\alpha)(p \times \varpi) = -v\tilde{\alpha}(p \times \varpi). \end{aligned}$$

Portanto, com essa reparametrização trocamos α por $\tilde{\alpha} := -\alpha$ e v por $-v$. Isso mostra que podemos supor $v = 1$.

Em resumo, se $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possui apenas pontos do tipo luz, podemos supor que $\beta = \alpha$, obtendo

$$p' = \alpha(p \times v), \quad v' = \alpha(p \times v).$$

Em particular, isso implica que $v' = p'$ que, por sua vez, nos diz que

$$v = p + u_0 \text{ sobre } I_2,$$

para algum vetor constante $u_0 \in \mathbb{R}^{2,1}$. Note que u_0 deve ser do tipo luz, uma vez que

$$\begin{aligned} q(u_0, u_0) &= q(v - p, v - p) = q(v, v) - 2q(p, v) + q(p, p) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por ser do tipo luz, denotando $u_0 = (a, b, c)$, devemos ter $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Portanto, deve existir $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $u_0 = (c \cos \theta, c \sin \theta, c)$. É possível verificar que rotações em torno do eixo- z em $\mathbb{R}^{2,1}$ são q -isometrias e, portanto, induzem isometrias sobre $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$. Considere $\rho_\theta : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ a rotação de θ em torno do eixo- z tal que $\rho_\theta(u_0) = (c, 0, c)$. Note que ρ_θ induz a isometria $\psi : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por $\psi(p, r) = (\rho_\theta(p), r)$. Notando que $\phi = ((\cosh t)p + (\sinh t)(p + u_0), r)$ e usando a linearidade de ρ_θ , temos

$$\psi \circ \phi = ((\cosh t)\rho_\theta(p) + (\sinh t)(\rho_\theta(p) + \rho_\theta(u_0)), r).$$

Isso nos permite dizer que, a menos de uma isometria, podemos supor que u_0 tem a forma $u_0 = (c, 0, c)$. Note que

$$0 = q(p, v) = q(p, p + u_0) = q(p, p) + q(p, u_0) = -1 + q(p, u_0).$$

Portanto, temos $q(p, u_0) = 1$. Logo, devemos ter $u_0 \neq 0$ e, portanto, $c \neq 0$. Denotando $p = (x, y, z)$, de $1 = q(p, u_0) = cx - cz$ vem que

$$z = x - \frac{1}{c}.$$

De $q(p, p) = -1$ vem que

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + q(p, p) = 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 1 + x^2 + y^2 - \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 \\ &= \frac{2}{c}x + y^2 + 1 - \frac{1}{c^2} \\ &\implies x = -\frac{1}{2c}(c^2y^2 + c^2 - 1). \end{aligned}$$

Portanto, fazendo as contas obtemos que p , v e $p \times v$, restritos a I_2 , possuem a forma

$$\begin{aligned} p &= (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2c}(c^2y^2 + c^2 - 1), y, -\frac{1}{2c}(c^2y^2 + c^2 + 1)\right), \\ v &= p + u_0 = \left(\frac{1}{2c}(-c^2y^2 + c^2 + 1), y, -\frac{1}{2c}(c^2y^2 - c^2 + 1)\right), \\ p \times v &= (cy, -1, cy). \end{aligned}$$

Note que, uma vez que devemos ter $z > 0$, a terceira coordenada de p nos diz em particular que $c < 0$. Derivando a expressão de p acima, obtemos

$$p' = -y'(cy, -1, cy) = -y'(p \times v).$$

Segue então de $p' = \alpha(p \times v)$ que devemos ter $\alpha = -y'$.

Todas essas conclusões vieram simplesmente da hipótese de que (α, β) é do tipo luz sobre I_2 , mas ainda não analisamos a condição de Kühnel. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta = -y', \\
 E &= (\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 \\
 &= (y')(\kappa + \sigma)^2 + (r')^2 \\
 &= (y')^2(\exp t)^2 + (r')^2, \\
 \tilde{e} &= r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta) \\
 &= (y'r'' - y''r')(\kappa + \sigma) \\
 &= (y'r'' - y''r')\exp t, \\
 \tilde{f} &= r'(\sigma\alpha + \kappa\beta) = -r'y'(\kappa + \sigma) \\
 &= -r'y'\exp t.
 \end{aligned}$$

Olhando para a condição de Kühnel, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2E & E_s & E_t \\ 3\tilde{e} & \tilde{e}_s & \tilde{e}_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\
 &= -r'y'(\exp t) \det \begin{bmatrix} 2((y')^2(\exp t)^2 + (r')^2) & 2y'y''(\exp t)^2 + 2r'r'' & 2(y')^2(\exp t)^2 \\ 3((y'r'' - y''r')\exp t) & (y'r''' - y'''r')\exp t & (y'r'' - y''r')\exp t \\ 2(-r'y'\exp t) & -(r''y' + r'y'')\exp t & -r'y'\exp t \end{bmatrix} \\
 &= -2y'r'\exp(3t)(-r' + y'\exp t)(r' + y'\exp t) \\
 &\quad \cdot (-2(y')^2(r'')^2 + (y'')^2(r')^2 - y'(r')^2y''' + (y')^2r'r''' + y'y''r'r'').
 \end{aligned}$$

Lembremos que I_2 é um intervalo maximal com a propriedade $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Como já sabemos que $(\alpha, \beta) = (-vy', -y')$, isso nos diz que $y' \neq 0$ sobre I_2 . Essa equação deve definir um polinômio identicamente nulo em $\exp t$. Essas condições implica que

$$0 = -2(y')^2(r'')^2 + (y'')^2(r')^2 - y'(r')^2y''' + (y')^2r'r''' + y'y''r'r'' \text{ sobre } I_2.$$

Tal equação pode ser reescrita como

$$y''' = \frac{(r''')(y')^2r' - 2(y')^2(r'')^2 + y'y''r'r'' + (y'')^2(r')^2}{y'(r')^2} \text{ sobre } I_2.$$

Isso mostra que, dadas condições iniciais $y'(s_0) = y'_0$, $y''(s_0) = y''_0$ e r , com $r' \neq 0$ sobre I_2 , essa equação admite existência e unicidade de solução para y' . É possível verificar diretamente que essa solução tem a forma

$$y' = ar'e^{br},$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. De fato, para que y' satisfaça as condições iniciais, basta tomar

$$b = \left(y_0'' - \frac{y_0'}{r_0'} r_0'' \right) \frac{1}{y_0' r_0'}, \quad a = \frac{y_0'}{r_0'} e^{-br_0} \neq 0.$$

Retomando nossa condição de imersão, temos

$$\begin{aligned} 0 \neq v &= (r'(p \times v), -(\kappa\alpha + \sigma\beta)) \\ &= (r'(p \times v), y'(\kappa + \sigma)) \\ &= (r'(p \times v), ar'e^{br+t}). \end{aligned}$$

Isso nos mostra que, sob pena de ferir a condição de tolerância, a maximalidade dos intervalos I_2 e I_1 implicam $I_2 = I_1 = I$. Portanto, em particular temos $r' \neq 0$ sobre todo I . Logo, existe inversa $r^{-1} : r(I) \rightarrow I$ e podemos considerar a reparametrização $\tilde{\phi} : r(I) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\phi}(\tilde{s}, t) := \phi(r^{-1}(\tilde{s}), t)$. Denotando $\tilde{y}(\tilde{s}) := y(r^{-1}(\tilde{s}))$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(\tilde{s}) &= y'(r^{-1}(\tilde{s})) (r^{-1})'(\tilde{s}) = ar'(r^{-1}(\tilde{s})) e^{br(r^{-1}(\tilde{s}))} (r^{-1})'(\tilde{s}) \\ &= ae^{b\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que, sem perda de generalidade, podemos supor $r(s) \equiv s$.

Quanto à coordenada de $\mathbb{H}^2$ de ϕ , temos

$$\begin{aligned} (\cosh t)p + (\sinh t)v &= (\cosh t)p + (\sinh t)(p + u_0) \\ &= (\cosh t + \sinh t)p + u_0 \sinh t \\ &= e^t p + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) u_0 \\ &= e^t \left(-\frac{1}{2c} (c^2 y^2 + c^2 - 1), y, -\frac{1}{2c} (c^2 y^2 + c^2 + 1) \right) \\ &\quad + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) (c, 0, c) \\ &= \left(-\frac{e^t}{2c} (c^2 y^2 + c^2 e^{-2t} - 1), ye^t, -\frac{e^t}{2c} (c^2 y^2 + c^2 e^{-2t} + 1) \right). \end{aligned}$$

Quanto às curvaturas, teremos

$$\begin{aligned} H &= \frac{r'(\kappa\alpha' + \sigma\beta') - r''(\kappa\alpha + \sigma\beta)}{2 \left((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\kappa\alpha' + \sigma\beta'}{2 \left((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\kappa(-y')' + \sigma(-y')'}{2 \left((\kappa(-y') + \sigma(-y'))^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-abe^{bs+t}}{2 \left((ae^{bs+t})^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}, \\ K &= \frac{-(r')^2 (\sigma\alpha + \kappa\beta)^2}{\left((\kappa\alpha + \sigma\beta)^2 + (r')^2 \right)^2} = \frac{-(\sigma(-y') + \kappa(-y'))^2}{\left((ae^{bs}(\sigma + \kappa))^2 + 1 \right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(ae^{bs+t})^2}{\left((ae^{bs+t})^2 + 1\right)^2}.$$

Denotando $Z = ae^{bs+t}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= 4(Z^2 + 1)^3 H^2 - b^2 Z^2, \\ 0 &= (Z^2 + 1)^2 K + Z^2. \end{aligned}$$

Tomando a eliminante em Z^2 , obtemos que H e K satisfazem

$$16H^4 + 4b^2 H^2 K - b^4 K^3 = 0.$$

Com isso, provamos o seguinte teorema de classificação para o caso das superfícies regradas horizontais em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Proposição 3.14. *Uma superfície regrada de classe $\mathcal{C}^3$ do tipo horizontal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten se, e somente se, vale algum dos seguintes itens*

- (i) *a superfície está contida num hiperboloide $\mathbb{H}^2 \times \{r_0\} \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, para algum $r_0 \in \mathbb{R}$. As curvaturas satisfazem $H = K \equiv 0$;*
- (ii) *a superfície pode ser parametrizada por $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), r(s))$ em que p e v são soluções do sistema*

$$\begin{aligned} p' &= a \cosh(bs + c)(p \times v), \\ v' &= a \sinh(bs + c)(p \times v), \end{aligned}$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ unitário. As curvaturas satisfazem a relação

$$16(a^2 + 1)H^4 + 4b^2 H^2 K - b^4 K^3 = 0.$$

- (iii) *a superfície pode ser parametrizada por $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), r(s))$ em que p e v são soluções do sistema*

$$\begin{aligned} p' &= a \sinh(bs + c)(p \times v), \\ v' &= a \cosh(bs + c)(p \times v), \end{aligned}$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ unitário. As curvaturas satisfazem a relação

$$-16(a^2 - 1)H^4 + 4b^2 H^2 K - b^4 K^3 = 0.$$

(iv) a menos de isometria, a superfície pode ser parametrizada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(s, t) = \left(\left(-\frac{e^t}{2c} (c^2 (y^2 + e^{-2t}) - 1), ye^t, -\frac{e^t}{2c} (c^2 (y^2 + e^{-2t}) + 1) \right), s \right),$$

em que $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação

$$y'(s) = ae^{bs},$$

para certas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e $c < 0$. As curvaturas satisfazem a relação

$$16H^4 + 4b^2H^2K - b^4K^3 = 0.$$

3.2.4 Oblíquas e caso geral

Finalmente, olhamos para o caso das superfícies regradas oblíquas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Essas superfícies podem ser parametrizadas por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ na forma

$$\phi(s, t) = ((\cos t)p(s) + (\sin t)v(s), tu(s) + r(s)),$$

sendo $p : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ a curva base, $v : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ um campo unitário ao longo de p e $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $u \neq 0$ sobre I . Como nos casos anteriores, iremos denotar $\kappa = \cos t$, $\sigma = \sin t$. Lembremos que podemos, e iremos, supor que a parametrização satisfaz a condição de ortogonalidade, i.e.

$$0 = g((p', r'), (v, u)) = q(p', v) + ur'.$$

Temos que $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in T_p\mathbb{H}^2$ unitário se traduzem como $q(p, p) = -1$, $q(p, v) = 0$ e $q(v, v) = 1$. Assim, como já mostrado anteriormente no caso das horizontais, $\{p, v, p \times v\}$ é base de $\mathbb{R}^{2,1}$ e temos

$$w = -q(w, p)p + q(w, v)v + q(w, p \times v)(p \times v), \quad \forall w \in \mathbb{R}^{2,1}.$$

Segue dessa escrita e da condição de ortogonalidade que

$$p' = -ur'v + \alpha(p \times v),$$

sendo $\alpha := q(p', p \times v)$. Notando que $q(p, v) = 0 \implies q(p', v) + q(p, v') = 0 \implies -ur' + q(p, v') = 0$, obteremos também

$$\begin{aligned} v' &= -q(v', p)p + q(v', p \times v)(p \times v) \\ &= -ur'p + \beta(p \times v), \end{aligned}$$

sendo $\beta := q(v', p \times v)$. A fim de definir um campo normal sobre a superfície, consideremos os campos $E_1, E_2, E_3 : I \times \mathbb{R} \rightarrow T(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ ao longo de ϕ dados por

$$E_1 = (\sigma p + \kappa v, 0), \quad E_2 = (p \times v, 0), \quad E_3 = (0, 1).$$

Para que esses campos estejam bem definidos, precisamos que as primeiras coordenadas sejam, de fato, vetores tangentes a $\mathbb{H}^2$ no respectivo ponto $\kappa p + \sigma v$. De fato, temos

$$\begin{aligned} q(\sigma p + \kappa v, \kappa p + \sigma v) &= \kappa \sigma q(p, p) + (\kappa^2 + \sigma^2) q(p, v) + \kappa \sigma q(v, v) = -\kappa \sigma + (\kappa^2 + \sigma^2) 0 + \kappa \sigma = 0, \\ q(p \times v, \kappa p + \sigma v) &= \kappa q(p \times v, p) + \sigma q(p \times v, v) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, uma verificação direta mostra também que o referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ é ortonormal. Escrevendo os campos tangentes nesse referencial, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_s &= (\kappa p' + \sigma v', tu' + r') = (\kappa(-ur'v + \alpha(p \times v)) + \sigma(-ur'p + \beta(p \times v)), tu' + r') \\ &= (-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v), tu' + r') \\ &= -ur'E_1 + (\alpha\kappa + \sigma\beta)E_2 + (tu' + r')E_3, \\ \phi_t &= (\sigma p + \kappa v, u) = E_1 + uE_3. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir um campo normal ao longo de ϕ fazendo

$$\begin{aligned} v &= \det \begin{bmatrix} -ur' & \alpha\kappa + \sigma\beta & tu' + r' \\ 1 & 0 & u \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} \\ &= u(\alpha\kappa + \sigma\beta)E_1 + (r'(u^2 + 1) + tu')E_2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta)E_3. \end{aligned}$$

Isso nos fornece a condição de imersão $(\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 + (r'(u^2 + 1) + tu')^2 > 0$. Sobre os pontos satisfazendo a condição de imersão, definimos um campo normal unitário fazendo $N = \frac{v}{|v|}$.

Quanto às derivadas covariantes, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_{\phi_s} \phi_s &= \left((-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s^T, tu'' + r'' \right), \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= \left((-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_t^T, u' \right), \\ \nabla_{\phi_t} \phi_t &= \left((\sigma p + \kappa v)_t^T, 0 \right), \end{aligned}$$

sendo a componente tangente tomada sobre o ponto $\kappa p + \sigma v$. Lembremos que a componente tangente de $w \in T_{p_0} \mathbb{R}^{2,1}$ sobre um ponto $p_0 \in \mathbb{H}^2$ é dada por $w = w + q(w, p_0)p_0$. Antes de tomar a componente tangente, calculemos a derivada em s da primeira coordenada de ϕ_s :

$$\begin{aligned} (-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s &= -(u'r' + ur'')(\sigma p + \kappa v) \\ &\quad - ur'(\sigma p' + \kappa v') + (\alpha'\kappa + \sigma\beta')(p \times v) \\ &\quad + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p' \times v + p \times v') \\ &= -(u'r' + ur'')(\sigma p + \kappa v) \\ &\quad - ur'(\sigma(-ur'v + \alpha(p \times v)) + \kappa(-ur'p + \beta(p \times v))) \\ &\quad + (\alpha'\kappa + \sigma\beta')(p \times v) \\ &\quad + (\alpha\kappa + \sigma\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot ((-ur'v + \alpha(p \times v)) \times v + p \times (-ur'p + \beta(p \times v))) \\
&= -(u'r' + ur'')(\sigma p + \kappa v) \\
&\quad - ur'(\sigma(-ur'v + \alpha(p \times v)) + \kappa(-ur'p + \beta(p \times v))) \\
&\quad + (\alpha'\kappa + \sigma\beta')(p \times v) \\
&\quad + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha(p \times v) \times v + \beta p \times (p \times v)).
\end{aligned}$$

De $q(p, p) = -1$, $q(v, v) = 1$ e $q(p, v) = 0$ vem que

$$\begin{aligned}
p \times v &= \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & -e_3 \end{bmatrix} \\
&= (yv_3 - zv_2)e_1 + (zv_1 - xv_3)e_2 + (yv_1 - xv_2)e_3, \\
(p \times v) \times v &= \det \begin{bmatrix} yv_3 - zv_2 & zv_1 - xv_3 & yv_1 - xv_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & -e_3 \end{bmatrix} \\
&= ((v_2^2 - v_3^2)x + v_1(zv_3 - yv_2))e_1 + ((v_1^2 - v_3^2)y + v_2(zv_3 - xv_1))e_2 \\
&\quad + ((v_1^2 + v_2^2)z - v_3(xv_1 + yv_2))e_3 \\
&= ((1 - v_1^2)x + v_1(xv_1))e_1 + ((1 - v_2^2)y + v_2(yv_2))e_2 \\
&\quad + ((1 + v_3^2)z - v_3(zv_3))e_3 \\
&= xe_1 + ye_2 + ze_3 = p, \\
p \times (p \times v) &= \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ yv_3 - zv_2 & zv_1 - xv_3 & yv_1 - xv_2 \\ e_1 & e_2 & -e_3 \end{bmatrix} \\
&= ((y^2 - z^2)v_1 - x(yv_2 - zv_3))e_1 + ((x^2 - z^2)v_2 - y(xv_1 - zv_3))e_2 \\
&\quad + ((x^2 + y^2)v_3 - z(xv_1 + yv_2))e_3 \\
&= ((-1 - x^2)v_1 - x(-xv_1))e_1 + ((-1 - y^2)v_2 - y(-yv_2))e_2 \\
&\quad + ((-1 + z^2)v_3 - z(zv_3))e_3 \\
&= -v_1e_1 - v_2e_2 - v_3e_3 = -v.
\end{aligned}$$

Continuando a conta, obtemos

$$\begin{aligned}
& (-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s \\
&= -(u'r' + ur'')(\sigma p + \kappa v) \\
&\quad - ur'(\sigma(-ur'v + \alpha(p \times v)) + \kappa(-ur'p + \beta(p \times v))) \\
&\quad + (\alpha'\kappa + \sigma\beta')(p \times v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha p + \beta(-v)) \\
&= (\alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \sigma(ur'' + r'u') + u^2(r')^2\kappa)p \\
&\quad + (u^2(r')^2\sigma - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u'))v \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q((-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s, \kappa p + \sigma v) \\
&= q((-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s, \kappa p) \\
&\quad + q((-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s, \sigma v) \\
&= q((\alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \sigma(ur'' + r'u') + u^2(r')^2\kappa)p, \kappa p) \\
&\quad + q((u^2(r')^2\sigma - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u'))v, \sigma v) \\
&= (\alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \sigma(ur'' + r'u') + u^2(r')^2\kappa)\kappa q(p, p) \\
&\quad + (u^2(r')^2\sigma - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u'))\sigma q(v, v) \\
&= -(\alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \sigma(ur'' + r'u') + u^2(r')^2\kappa)\kappa \\
&\quad + (u^2(r')^2\sigma - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u'))\sigma \\
&= -u^2(r')^2(\kappa^2 - \sigma^2) - (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 \\
&= -u^2(r')^2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2
\end{aligned}$$

Portanto, a componente tangente que buscamos é dada por

$$\begin{aligned}
(-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_s^T &= (\alpha(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \sigma(ur'' + r'u') + u^2(r')^2\kappa)p \\
&\quad + (u^2(r')^2\sigma - \beta(\alpha\kappa + \sigma\beta) - \kappa(ur'' + r'u'))v \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v) \\
&\quad + (-u^2(r')^2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2)(\kappa p + \sigma v) \\
&= ((\alpha - \alpha\kappa^2 - \kappa\sigma\beta)(\alpha\kappa + \sigma\beta) + (-ur'' - r'u')\sigma)p \\
&\quad + (-(\beta + \sigma^2\beta + \alpha\kappa\sigma)(\alpha\kappa + \sigma\beta) + (-ur'' - r'u')\kappa)v \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v) \\
&= ((\alpha - \alpha(1 + \sigma^2) - \kappa\sigma\beta)(\alpha\kappa + \sigma\beta) + (-ur'' - r'u')\sigma)p \\
&\quad + (-(\beta + (\kappa^2 - 1)\beta + \alpha\kappa\sigma)(\alpha\kappa + \sigma\beta) + (-ur'' - r'u')\kappa)v \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v) \\
&= \sigma(-(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u'))p \\
&\quad + \kappa(-(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u')\kappa)v \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v) \\
&= (-(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u'))(\sigma p + \kappa v) \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(p \times v).
\end{aligned}$$

Isso nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\phi_s}\phi_s &= (-(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u'))E_1 \\
&\quad + (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))E_2 \\
&\quad + (tu'' + r'')E_3.
\end{aligned}$$

Quanto a $\nabla_{\phi_t} \phi_s$, temos

$$\begin{aligned}
 (-ur'(\sigma p + \kappa v) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)(p \times v))_t^T &= (-ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v))_t^T \\
 &= -ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v) \\
 &\quad + q(-ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v), \kappa p + \sigma v)(\kappa p + \sigma v) \\
 &= -ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v) \\
 &\quad - ur'q(\kappa p + \sigma v, \kappa p + \sigma v)(\kappa p + \sigma v) \\
 &= -ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v) \\
 &\quad - ur'(\kappa^2 q(p, p) + \sigma^2 q(v, v))(\kappa p + \sigma v) \\
 &= -ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v) - ur'(-\kappa^2 + \sigma^2)(\kappa p + \sigma v) \\
 &= -ur'(\kappa p + \sigma v) + (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v) + ur'(\kappa p + \sigma v) \\
 &= (\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_{\phi_t} \phi_s = ((\alpha\sigma + \kappa\beta)(p \times v), u') = (\alpha\sigma + \kappa\beta)E_2 + u'E_3.$$

Por fim, como esperado, temos

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\phi_t} \phi_t &= ((\sigma p + \kappa v)_t^T, 0) \\
 &= ((\kappa p + \sigma v)_t^T, 0) \\
 &= (\kappa p + \sigma v + q(\kappa p + \sigma v, \kappa p + \sigma v)(\kappa p + \sigma v), 0) \\
 &= (\kappa p + \sigma v + (\kappa^2 q(p, p) + \sigma^2 q(v, v))(\kappa p + \sigma v), 0) \\
 &= (\kappa p + \sigma v + (-\kappa^2 + \sigma^2)(\kappa p + \sigma v), 0) \\
 &= (\kappa p + \sigma v - (\kappa p + \sigma v), 0) \\
 &= (0, 0).
 \end{aligned}$$

Fazendo as contas, obtemos que a primeira e segunda formas são dadas por

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle = (ur')^2 + (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 + (tu' + r')^2 \\
 F &= \langle \phi_s, \phi_t \rangle = uu't \\
 G &= \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 + u^2 \\
 W &= (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} e = W \langle \nabla_{\phi_s} \phi_s, v \rangle = W \tilde{e} \\
 &= W \begin{pmatrix} -(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u')u(\alpha\kappa + \sigma\beta) \\ +(\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta))(r'(u^2 + 1) + tu') \\ -(\alpha\kappa + \sigma\beta)(tu'' + r'') \end{pmatrix} \\
 f &= W \langle \nabla_{\phi_t} \phi_s, v \rangle = W \tilde{f} \\
 &= W((\alpha\sigma + \kappa\beta)(r'(u^2 + 1) + tu') - (\alpha\kappa + \sigma\beta)u') \\
 g &= W \langle \nabla_{\phi_t} \phi_t, v \rangle = W \tilde{g} = 0.
 \end{aligned}$$

Queremos analisar a condição de Kühnel. Antes disso, precisamos provar o seguinte resultado. Este resultado não é dado automaticamente como seu análogo para as funções $\cosh t$ e $\sinh t$ pois suas versões hiperbólicas não são periódicas.

Lema 3.15. *Seja $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ um polinômio e escreva $P = \sum_{i=0}^n Q_i Z^i$ com $Q_i \in \mathbb{R}[X, Y]$. Se $P(\cosh t, \sinh t, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $Q_i(\cosh t, \sinh t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$.*

Demonstração. Seja m definido por

$$m = \max\{\deg Q_i : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}.$$

Para cada $i = 0, \dots, n$, existe algum polinômio $\tilde{Q}_i \in \mathbb{R}[X]$ tal que

$$\begin{aligned} e^{mt} Q_i(\cosh t, \sinh t) &= e^{mt} Q_i\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\ &= \tilde{Q}_i(e^t). \end{aligned}$$

Fazendo $M = \max\{\deg \tilde{Q}_i\}$, podemos escrever $\tilde{Q}_i = \sum_{j=0}^M q_{i,j} X^j$, para certas constantes $q_{i,j} \in \mathbb{R}$. Usando a hipótese, temos

$$\begin{aligned} 0 &= e^{mt} P(\cosh t, \sinh t, t) = e^{mt} \sum_{i=0}^n Q_i(\cosh t, \sinh t) t^i \\ &= \sum_{i=0}^n \tilde{Q}_i(e^t) t^i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^M q_{i,j} e^{jt} t^i \\ &= \sum_{j=0}^M \left(\sum_{i=0}^n q_{i,j} t^i \right) (e^t)^j. \end{aligned}$$

Como a função e^t não é algébrica, os polinômios dados por $\sum_{i=0}^n q_{i,j} X^i$ devem todos ser identicamente nulos.

Segue daí que todas as constantes $q_{i,j}$ são nulas e, consequentemente, $\tilde{Q}_i$ é identicamente nulo (não apenas quando aplicado a e^t mas como polinômio!).

Mas então,

$$Q_i(\cosh t, \sinh t) = e^{-mt} \tilde{Q}_i(e^t) = e^{-mt} \cdot 0 \equiv 0,$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ e $t \in \mathbb{R}$. □

Voltando à nossa análise, começemos mostrando que o caso $(\alpha, \beta) \equiv (0, 0)$ sobre I não pode ocorrer. Essa hipótese nos diz que p e v satisfazem

$$\begin{aligned} p' &= -ur'v, \\ v' &= -ur'p. \end{aligned}$$

Seja $s_0 \in I$ e denote $p(s_0) = p_0$ e $v(s_0) = v_0$. Defina $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $\eta(s) = -\int_{s_0}^s u(\tau) r'(\tau) d\tau$. Afirmamos que

$$\begin{aligned} p &= (\cosh \eta) p_0 + (\sinh \eta) v_0, \\ v &= (\sinh \eta) p_0 + (\cosh \eta) v_0. \end{aligned}$$

Basta usar a existência e unicidade do sistema e observar que

$$\begin{aligned} ((\cosh \eta) p_0 + (\sinh \eta) v_0)' &= -ur'((\sinh \eta) p_0 + (\cosh \eta) v_0), \\ ((\sinh \eta) p_0 + (\cosh \eta) v_0)' &= -ur'((\cosh \eta) p_0 + (\sinh \eta) v_0), \\ (\cosh \eta_0) p_0 + (\sinh \eta_0) v_0 &= p_0, \\ (\sinh \eta_0) p_0 + (\cosh \eta_0) v_0 &= v_0. \end{aligned}$$

Contudo, essa conclusão leva a uma contradição com a hipótese de obliquidade. De fato, a superfície neste caso é dada por

$$\begin{aligned} \phi &= ((\cosh t) p + (\sinh t) v, ut + r) \\ &= ((\cosh t)((\cosh \eta) p_0 + (\sinh \eta) v_0) + (\sinh t)((\sinh \eta) p_0 + (\cosh \eta) v_0), ut + r) \\ &= (\cosh(t + \eta) p_0 + \sinh(t + \eta) v_0, ut + r). \end{aligned}$$

Essa superfície está contida na superfície regrada vertical dada por

$$\psi(s, t) = (\cosh(s) p_0 + \sinh(s) v_0, t).$$

Mas isso é uma contradição, pois ϕ é oblíqua.

Portanto, deve existir intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$ sobre o qual $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Nosso primeiro passo para analisar a condição de Kühnel, é mostrar que $u' = 0$ sobre I_1 , i.e. a função u é constante sobre I_1 . Com esse intuito, coletando as funções da condição de Kühnel em t , obtemos que essas funções possuem as seguintes formas:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \left((ur')^2 + (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 + (tu' + r')^2 \right) (1 + u^2) - (uu't)^2 \\ &= (u')^2 t^2 + 2r'u'(u^2 + 1)t + (u^2 + 1) \left((r')^2 (u^2 + 1) + (\alpha\kappa + \sigma\beta)^2 \right) \\ &=: A_2 t^2 + A_1 t + A_0, \\ \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F &= \left(\begin{aligned} &(-(\alpha\kappa + \sigma\beta)(\alpha\sigma + \kappa\beta) + (-ur'' - r'u')) \\ &\quad \cdot u(\alpha\kappa + \sigma\beta) \\ &+ (\kappa\alpha' + \sigma\beta' - ur'(\alpha\sigma + \kappa\beta)) \\ &\quad \cdot (r'(u^2 + 1) + tu') \\ &- (\alpha\kappa + \sigma\beta)(tu'' + r'') \end{aligned} \right) (1 + u^2) \\ &\quad - 2((\alpha\sigma + \kappa\beta)(r'(u^2 + 1) + tu') - (\alpha\kappa + \sigma\beta)u')uu't \\ &= -2u(u')^2(\alpha\sigma + \kappa\beta)t^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=: B_2 t^2 + B_1 t + B_0, \\
\tilde{f} &= ((\alpha\sigma + \kappa\beta)(r'(u^2 + 1) + tu') - (\alpha\kappa + \sigma\beta)u') \\
&= u'(\alpha\sigma + \kappa\beta)t + (r'(u^2 + 1)(\alpha\sigma + \kappa\beta) - u'(\alpha\kappa + \sigma\beta)) \\
&=: C_1 t + C_0.
\end{aligned}$$

Coletando também a condição de Kühnel em t , obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\
&= (C_1 t + C_0) \\
&\quad \cdot \det \begin{bmatrix} 2(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) & A_{2,s} t^2 + A_{1,s} t + A_{0,s} & A_{2,t} t^2 + 2A_2 t + A_{1,t} t + A_1 + A_{0,t} \\ 3(B_2 t^2 + B_1 t + B_0) & B_{2,s} t^2 + B_{1,s} t + B_{0,s} & B_{2,t} t^2 + 2B_2 t + B_{1,t} t + B_1 + B_{0,t} \\ 2(C_1 t + C_0) & C_{1,s} t + C_{0,s} & C_{1,t} t + C_1 + C_{0,t} \end{bmatrix} \\
&= C_1 \left(\begin{aligned} &2A_2 B_{2,s} C_{1,t} - 2A_2 C_{1,s} B_{2,t} - 3B_2 A_{2,s} C_{1,t} \\ &+ 3B_2 A_{2,t} C_{1,s} + 2C_1 A_{2,s} B_{2,t} - 2C_1 A_{2,t} B_{2,s} \end{aligned} \right) t^6 + \dots \\
&= -4(u')^7 (\alpha\sigma + \kappa\beta)^2 (\alpha\kappa + \sigma\beta) t^6 + \dots
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.15, devemos ter em particular

$$u'(\alpha\sigma + \kappa\beta)(\alpha\kappa + \sigma\beta) \equiv 0 \text{ sobre } I \times J.$$

Restrito a I_1 , temos $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e essa equação só é possível se $u' \equiv 0$ sobre esse intervalo.

Se $r' \equiv 0$ sobre I_1 , teremos

$$\begin{aligned}
v &= u(\alpha\kappa + \sigma\beta)E_1 + (r'(u^2 + 1) + tu')E_2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta)E_3 \\
&= (\alpha\kappa + \sigma\beta)(uE_1 - E_3) \text{ sobre } I_1.
\end{aligned}$$

Mas então nossa condição de tolerância e a maximalidade de I_1 com respeito à condição $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ implicam que $I_1 = I$.

$$\begin{aligned}
p' &= -ur'v + \alpha(p \times v) = \alpha(p \times v), \\
v' &= -ur'p + \beta(p \times v) = \beta(p \times v).
\end{aligned}$$

Isso implica também

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &= u'(\alpha\sigma + \kappa\beta)t + (r'(u^2 + 1)(\alpha\sigma + \kappa\beta) - u'(\alpha\kappa + \sigma\beta)) \\
&\equiv 0,
\end{aligned}$$

e, portanto, $K \equiv 0$. Isso mostra que a superfície é de fato Weingarten neste caso ($u' = r' \equiv 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

Suponhamos agora que exista um intervalo aberto não vazio $I_2 \subset I_1$ sobre o qual $r' \neq 0$.

Agora, como no caso das horizontais, dividimos nossa análise nos casos em que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possui pontos do tipo espaço, tempo e luz.

Suponha primeiro que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possua pontos do tipo espaço. Neste caso, existe um intervalo aberto não vazio $I_3 \subset I_2$ e funções $R, \theta : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$, com $R \neq 0$, tais que

$$(\alpha, \beta) = (R \cosh \theta, R \sinh \theta)$$

e I_3 é maximal com respeito a essa propriedade. Fazendo $u' = 0$, $u \equiv u_0$ e substituindo $(\alpha, \beta) = (R \cosh \theta, R \sinh \theta)$ e denotando $C = \cosh(t + \theta)$, $S = \sinh(t + \theta)$, sobre I_3 temos

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (u_0^2 + 1) ((r')^2 (u_0^2 + 1) + R^2 C^2), \\ (EG - F^2)_s &= (u_0^2 + 1) (2r' r'' (u_0^2 + 1) + 2RR' C^2 + 2R^2 \theta' CS), \\ (EG - F^2)_t &= (u_0^2 + 1) (2R^2 CS) \\ \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F &= (1 + u_0^2) \left(\begin{aligned} &(-R^2 CS - u_0 r'') u_0 RC \\ &+ (R'C + R\theta'S - u_0 r' RS) r' (u_0^2 + 1) \\ &- Rr'' C \end{aligned} \right), \\ (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s &= (1 + u_0^2) \left(\begin{aligned} &(-2RR'CS - R^2 \theta' S^2 - R^2 \theta' C^2 - u_0 r''') u_0 RC \\ &+ (-R^2 CS - u_0 r'') u_0 (R'C + R\theta'S) \\ &+ \begin{pmatrix} R''C + R'\theta'S + R'\theta'S \\ + R\theta''S + R(\theta')^2 C \end{pmatrix} (u_0^2 + 1) r' \\ &+ \begin{pmatrix} -u_0 r'' RS - u_0 r' R'S - u_0 r' R\theta'C \\ + (R'C + R\theta'S - u_0 r' RS) (u_0^2 + 1) r'' \\ - R'r''C - Rr'''C - Rr''\theta'S \end{pmatrix} \end{aligned} \right), \\ (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t &= (1 + u_0^2) \left(\begin{aligned} &(-R^2 (S^2 + C^2)) u_0 RC + (-R^2 CS - u_0 r'') u_0 RS \\ &+ (R'S + R\theta'C - u_0 r' RC) r' (u_0^2 + 1) \\ &- Rr'' S \end{aligned} \right), \\ \tilde{f} &= r' (u_0^2 + 1) RS, \\ \tilde{f}_s &= r'' (u_0^2 + 1) RS + r' (u_0^2 + 1) R'S + r' (u_0^2 + 1) R\theta'C, \\ \tilde{f}_t &= r' (u_0^2 + 1) RC. \end{aligned}$$

Tomando a condição de Kühnel, coletando em S , fazendo $S^2 = C^2 - 1$ e coletando em C, S , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= -2R^5 r' (u_0^2 + 1)^4 \left(\begin{aligned} &-r'' R^2 u_0 + R' R u_0 r' + \theta'' u_0^2 (r')^2 \\ &-r'' \theta' u_0^2 r' + \theta'' (r')^2 - r'' \theta' r' \end{aligned} \right) C^5 \\ &\quad + 2R^3 r' (u_0^2 + 1)^5 \left(\begin{aligned} &r''' R^2 r' - 2R^2 (r'')^2 - R'' R (r')^2 \\ &+ Rr' r'' R' + (r')^2 (R')^2 \end{aligned} \right) C^4 S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2R^3 r' (u_0^2 + 1)^4 \left(\begin{array}{l} r'' R^4 u_0 - R' R^3 u_0 r' - r'' R^2 u_0^3 (r')^2 \\ -3\theta'' R^2 u_0^2 (r')^2 + 2r'' \theta' R^2 u_0^2 r' \\ -r'' R^2 u_0 (r')^2 - 3\theta'' R^2 (r')^2 \\ +2r'' \theta' R^2 r' + R' R u_0^3 (r')^3 \\ +\theta' R' R u_0^2 (r')^2 + R' R u_0 (r')^3 \\ +\theta' R' R (r')^2 - \theta'' u_0^4 (r')^4 \\ +r'' \theta' u_0^4 (r')^3 - 2\theta'' u_0^2 (r')^4 \\ +2r'' \theta' u_0^2 (r')^3 - \theta'' (r')^4 + r'' \theta' (r')^3 \end{array} \right) C^3 \\
& -2Rr' (u_0^2 + 1)^5 \left(\begin{array}{l} 2r''' R^4 r' - 2R^4 (r'')^2 - 2R'' R^3 (r')^2 \\ -2R^3 r' r'' R' + r''' R^2 u_0^2 (r')^3 - 2R^2 u_0^2 (r')^2 (r'')^2 \\ +r''' R^2 (r')^3 - 2R^2 (r')^2 (r'')^2 + 4R^2 (r')^2 (R')^2 \\ -R'' R u_0^2 (r')^4 + R u_0^2 (r')^3 r'' R' - R'' R (r')^4 \\ +R (r')^3 r'' R' + u_0^2 (r')^4 (R')^2 + (r')^4 (R')^2 \end{array} \right) C^2 S \\
& +2R^3 (r')^2 (u_0^2 + 1)^5 \left(\begin{array}{l} -r'' R^2 u_0 r' - 2\theta'' R^2 r' + r'' \theta' R^2 + R' R u_0 (r')^2 \\ +\theta' R' R r' - \theta'' u_0^2 (r')^3 + r'' \theta' u_0^2 (r')^2 \\ -\theta'' (r')^3 + r'' \theta' (r')^2 \end{array} \right) C \\
& +2R(r')^3 (u_0^2 + 1)^6 (Rr'' - r'R')^2 S.
\end{aligned}$$

Nosso argumento padrão ("fixando s e variando t ") nos mostra que os coeficientes em C, S dessa equação devem ser identicamente nulos sobre I_3 . Em particular, o termo de S nos diz que

$$Rr'' - r'R' = 0 \text{ sobre } I_3.$$

Essa equação pode ser reescrita como $R' = \frac{r''}{r'} R$ e, portanto, admite existência e unicidade de soluções, dadas condição inicial $R(s_0) = R_0$ sobre $s_0 \in I_3$. Isso garante que R é dada por $R = \frac{R_0}{r'_0} r'$. Fazendo essa substituição no coeficiente de C^5 , obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= -2R^5 r' (u_0^2 + 1)^4 \left(\begin{array}{l} -r'' \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right)^2 u_0 + \frac{R_0}{r'_0} r'' \left(\frac{R_0}{r'_0} r' \right) u_0 r' \\ +\theta'' u_0^2 (r')^2 - r'' \theta' u_0^2 r' + \theta'' (r')^2 - r'' \theta' r' \end{array} \right) \\
&= -2R^5 (r')^2 (u_0^2 + 1)^5 (r' \theta'' - r'' \theta').
\end{aligned}$$

Essa equação implicará

$$\theta = \frac{\theta'_0}{r'_0} (r - r_0) + \theta_0.$$

Verifica-se diretamente que isso é suficiente para satisfazer a condição de Kühnel sobre I_3 .

Agora, utilizamos nosso argumento padrão para mostrar que $I_3 = I_2 = I_1 = I$. Sobre I_3 , temos

$$\begin{aligned}
v &= u(\alpha\kappa + \sigma\beta) E_1 + (r'(u^2 + 1) + tu') E_2 - (\alpha\kappa + \sigma\beta) E_3 \\
&= (\alpha\kappa + \sigma\beta) (u_0 E_1 - E_3).
\end{aligned}$$

Isso mostra que, se $I_3 \subsetneq I_2$, então haverá um ponto s_1 interior a I_2 sobre o qual $(\alpha, \beta) = 0$ e, portanto, $v(s_1, t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ferindo nossa condição habitual de tolerância. Portanto, devemos ter $I_3 = I_2$.

Como $R = \frac{R_0}{r'_0} r'$, pela mesma razão teremos $I_2 = I_1$ e $I_1 = I$.

Isso nos garante que $r' \neq 0$ sobre I e portanto é possível fazer a reparametrização usual que nos permite supor que $r(s) = s$. Portanto, a menos dessa reparametrização, nossa superfície é tal que p e v são soluções de

$$\begin{aligned} p' &= -u_0 v + R_0 \cosh(as + b)(p \times v), \\ v' &= -u_0 p + R_0 \sinh(as + b)(p \times v), \end{aligned}$$

para certas constantes $u_0, R_0, a, b \in \mathbb{R}$ com $u_0 R_0 \neq 0$ e $u(s) \equiv u_0$, $r(s) \equiv s$.

Quanto às curvaturas, teremos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} W^3 (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F) = \frac{(-C^2 R_0^3 u_0 + (u_0^2 + 1) R_0 (a - u_0)) (1 + u_0^2) S}{2 ((u_0^2 + 1) (u_0^2 + 1 + R_0^2 C^2))^{\frac{3}{2}}} \\ \implies H^2 &= \frac{R_0^2 (-C^2 R_0^2 u_0 + (u_0^2 + 1) (a - u_0))^2 (C^2 - 1)}{4 (u_0^2 + 1) (u_0^2 + 1 + R_0^2 C^2)^3}, \\ K &= W^4 (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) = \frac{-R_0^2 S^2 (u_0^2 + 1)^2}{(u_0^2 + 1)^2 (u_0^2 + 1 + R_0^2 C^2)^2} = \frac{-R_0^2 (C^2 - 1)}{(u_0^2 + 1 + R_0^2 C^2)^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a técnica da eliminante em C^2 , obtemos que as curvaturas satisfazem a relação

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(H, K) = -16 (u_0^2 + 1)^2 (R_0^2 + u_0^2 + 1) H^4 \\ &\quad - 4 (u_0^2 + 1) (a (u_0^2 + 1) (a - 4u_0 - 4R_0^2 u_0 - 4u_0^3 + au_0^2) K - u_0^2 (R_0^2 + u_0^2 + 1)) H^2 \\ &\quad + K (a^2 (u_0^2 + 1)^2 K + u_0 (a - u_0 - R_0^2 u_0 - u_0^3 + au_0^2))^2. \end{aligned}$$

Isso garante que a superfície é de fato de Weingarten.

Suponha agora que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possua pontos do tipo tempo, i.e. pontos tais que $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Neste caso, existe um intervalo aberto não vazio $I_3 \subset I_2$ e funções $R, \theta : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$, com $R \neq 0$, tais que

$$(\alpha, \beta) = (R \sinh \theta, R \cosh \theta)$$

e I_3 é maximal com respeito a essa propriedade. Fazendo uma análise análoga ao caso anterior (em que $(\alpha, \beta)|_{I_3}$ possui pontos do tipo espaço), obtemos que

- $I_3 = I_2 = I_1 = I$;
- a menos de reparametrização, $r(s) \equiv s$;
- p e v são soluções de

$$\begin{aligned} p' &= -u_0 v + R_0 \sinh(as + b)(p \times v), \\ v' &= -u_0 p + R_0 \cosh(as + b)(p \times v), \end{aligned}$$

- as curvaturas satisfazem

$$\begin{aligned} 0 = \Psi(H, K) &= 16(u_0^2 + 1)^2 (R_0^2 - u_0^2 - 1) H^4 \\ &\quad - 4(u_0^2 + 1) (a(u_0^2 + 1) (a - 4u_0 + 4R_0^2 u_0 - 4u_0^3 + au_0^2) K + R_0^2 u_0^2 - u_0^4 - u_0^2) H^2 \\ &\quad + K \left(a^2 (u_0^2 + 1)^2 K + R_0^2 u_0^2 - u_0^4 + au_0^3 - u_0^2 + au_0 \right)^2. \end{aligned}$$

Por fim, analisamos o caso em que $(\alpha, \beta)|_{I_2}$ possui apenas pontos do tipo luz, i.e. $\alpha^2 = \beta^2$. Como fizemos na análise do caso luz para as superfícies regradas horizontais, a menos de trocar (v, u) por $(-v, -u)$ (que não altera a superfície), podemos supor que $\beta = \alpha$ sobre I_2 .

$$\begin{aligned} p' &= -u_0 r' v + \alpha(p \times v), \\ v' &= -u_0 r' p + \alpha(p \times v). \end{aligned}$$

Isso implica, sobre I_2 ,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \left((u_0 r')^2 + (\alpha \kappa + \alpha \sigma)^2 + (r')^2 \right) (1 + u_0^2) \\ &= \left((u_0^2 + 1) (r')^2 + (\alpha e^t)^2 \right) (1 + u_0^2), \\ (EG - F^2)_s &= \left((u_0^2 + 1) (2r' r'') + 2\alpha e^t (\alpha' e^t) \right) (1 + u_0^2), \\ (EG - F^2)_t &= 2(\alpha e^t)^2 (1 + u_0^2), \\ \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F &= \left(\begin{aligned} &(-(\alpha \kappa + \sigma \alpha)(\alpha \sigma + \kappa \alpha) - u_0 r'') u_0 (\alpha \kappa + \sigma \alpha) \\ &+ (\kappa \alpha' + \sigma \alpha' - u_0 r' (\alpha \sigma + \kappa \alpha)) r' (u_0^2 + 1) \\ &- (\alpha \kappa + \sigma \alpha) r'' \end{aligned} \right) (1 + u_0^2) \\ &= \left(\begin{aligned} &(-(\alpha e^t)^2 - u_0 r'') u_0 \alpha e^t \\ &+ (\alpha' e^t - u_0 r' \alpha e^t) r' (u_0^2 + 1) - \alpha e^t r'' \end{aligned} \right) (1 + u_0^2), \\ (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_s &= \left(\begin{aligned} &(-2(\alpha e^t)(\alpha' e^t) - u_0 r''') u_0 \alpha e^t \\ &+ (-(\alpha e^t)^2 - u_0 r'') u_0 \alpha' e^t \\ &+ (\alpha'' e^t - u_0 r'' \alpha e^t - u_0 r' \alpha' e^t) r' (u_0^2 + 1) \\ &+ (\alpha' e^t - u_0 r' \alpha e^t) r'' (u_0^2 + 1) \\ &- \alpha' e^t r'' - \alpha e^t r''' \end{aligned} \right) (1 + u_0^2), \\ (\tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F)_t &= \left(\begin{aligned} &(-2(\alpha e^t)^2) u_0 \alpha e^t \\ &+ (-(\alpha e^t)^2 - u_0 r'') u_0 \alpha e^t \\ &+ (\alpha' e^t - u_0 r' \alpha e^t) r' (u_0^2 + 1) \\ &- \alpha e^t r'' \end{aligned} \right) (1 + u_0^2), \\ \tilde{f} &= (\alpha \sigma + \kappa \alpha) r' (u_0^2 + 1) \\ &= \alpha e^t r' (u_0^2 + 1), \\ \tilde{f}_s &= (\alpha' e^t r' + \alpha e^t r'') (u_0^2 + 1), \\ \tilde{f}_t &= \alpha e^t r' (u_0^2 + 1). \end{aligned}$$

Obtemos daí que a condição de Kühnel é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f} \det \begin{bmatrix} 2(EG - F^2) & (EG - F^2)_s & (EG - F^2)_t \\ 3(\tilde{e}G - 2\tilde{f}F) & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_s & (\tilde{e}G - 2\tilde{f}F)_t \\ 2\tilde{f} & \tilde{f}_s & \tilde{f}_t \end{bmatrix} \\ &= 2r' \alpha e^{3t} (u_0^2 + 1)^5 (-\alpha^2 e^{2t} + (r')^2 (1 + u_0^2)) \\ &\quad \cdot (2(r'')^2 \alpha^2 - (r')^2 (\alpha')^2 + (r')^2 \alpha \alpha'' - r' r''' \alpha^2 - r' r'' \alpha \alpha'). \end{aligned}$$

Como a equação define um polinômio identicamente em e^t , devemos ter

$$0 = 2(r'')^2 \alpha^2 - (r')^2 (\alpha')^2 + (r')^2 \alpha \alpha'' - r' r''' \alpha^2 - r' r'' \alpha \alpha' \text{ sobre } I_2.$$

Como $\alpha r' \neq 0$ sobre I_2 , podemos reescrever essa equação como

$$\alpha'' = - \frac{(2(r'')^2 \alpha^2 - r' r'' \alpha \alpha' - r''' r' \alpha^2 - (r')^2 (\alpha')^2)}{(r')^2 \alpha}.$$

Portanto, α é unicamente determinada por r e condições iniciais sobre $s_0 \in I_2$. Usando a unicidade, é possível verificar que α é dada por

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{r'_0} r' e^{a(r-r_0)},$$

para certa constante $a \in \mathbb{R}$ dada por

$$a = \frac{-r''_0 \alpha_0 + r'_0 \alpha'_0}{(r'_0)^2 \alpha_0}.$$

Quanto à condição de imersão, temos

$$\begin{aligned} v &= u(\alpha \kappa + \sigma \beta) E_1 + (r'(u^2 + 1) + tu') E_2 - (\alpha \kappa + \sigma \beta) E_3 \\ &= u_0 \frac{\alpha_0}{r'_0} r' e^{a(r-r_0)} e^t E_1 + r'(u_0^2 + 1) E_2 - \frac{\alpha_0}{r'_0} r' e^{a(r-r_0)} e^t E_3 \\ &= r' \left(u_0 \frac{\alpha_0}{r'_0} e^{a(r-r_0)+t} E_1 + (u_0^2 + 1) E_2 - \frac{\alpha_0}{r'_0} e^{a(r-r_0)+t} E_3 \right). \end{aligned}$$

Sob a condição de tolerância e a maximalidade dos intervalos I_1 e I_2 , isso implica que $I_2 = I_1 = I$.

Em particular, isso nos diz que $r' \neq 0$ sobre I e nos permite supor, a menos de reparametrização, que $r(s) = s$ sobre I . Assim, obteremos

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e^{a(s-s_0)}, \text{ com } a = \frac{\alpha'_0}{\alpha_0}, \\ Z &:= \alpha_0 e^{a(s-s_0)+t}, \\ EG - F^2 &= ((u_0^2 + 1) + Z^2) (1 + u_0^2), \\ \tilde{e}G + \tilde{g}E - 2\tilde{f}F &= Z(-Z^2 u_0 + (a - u_0)(u_0^2 + 1))(1 + u_0^2), \\ \tilde{f} &= Z(u_0^2 + 1). \end{aligned}$$

Assim, as curvaturas são dadas por

$$H = \frac{Z(-Z^2 u_0 + (a - u_0)(u_0^2 + 1))(1 + u_0^2)}{2((u_0^2 + 1) + Z^2)(1 + u_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = -\frac{Z^2(u_0^2 + 1)^2}{((u_0^2 + 1) + Z^2)(1 + u_0^2)^2}.$$

Usando a técnica da eliminante em Z , obtemos que H e K satisfazem a relação

$$0 = \Psi(H, K)$$

$$= 16(u_0^2 + 1)H^4 + 4(a(u_0^2 + 1)(a - 4u_0)K - u_0^2)H^2 - K(a^2(u_0^2 + 1)K + u_0(a - u_0))^2.$$

Com isso, obtemos a classificação das superfícies regradas de classe $\mathcal{C}^3$ do tipo oblíquo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.16. *Uma superfície regrada de classe $\mathcal{C}^3$ do tipo oblíquo em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é de Weingarten se, e somente, a menos de reparametrização possui uma das seguintes formas*

(i) $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), u_0 t + r_0)$, sendo $u_0, r_0 \in \mathbb{R}$ constantes com $u_0 \neq 0$ e p, v soluções de

$$p' = \alpha(p \times v),$$

$$v' = \beta(p \times v),$$

com $(\alpha, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ sobre I e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$ unitário. Neste caso, a superfície satisfaz $K \equiv 0$.

(ii) $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), u_0 t + s)$, sendo $u_0 \in \mathbb{R}$ com $u_0 \neq 0$ e p, v soluções de

$$p' = -u_0 v + R_0 \cosh(as + b)(p \times v),$$

$$v' = -u_0 p + R_0 \sinh(as + b)(p \times v),$$

com $R_0, a, b \in \mathbb{R}$ e $R_0 \neq 0$ e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$ unitário. As curvaturas satisfazem a relação de Weingarten $\Psi(H, K) = 0$ com Ψ dada por

$$\Psi(H, K) = -16(u_0^2 + 1)^2(R_0^2 + u_0^2 + 1)H^4$$

$$- 4(u_0^2 + 1)(a(u_0^2 + 1)(a - 4u_0 - 4R_0^2 u_0 - 4u_0^3 + au_0^2)K - u_0^2(R_0^2 + u_0^2 + 1))H^2$$

$$+ K(a^2(u_0^2 + 1)^2 K + u_0(a - u_0 - R_0^2 u_0 - u_0^3 + au_0^2))^2.$$

(iii) $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) + (\sinh t)v(s), u_0 t + s)$, sendo $u_0 \in \mathbb{R}$ com $u_0 \neq 0$ e p, v soluções de

$$p' = -u_0 v + R_0 \sinh(as + b)(p \times v),$$

$$v' = -u_0 p + R_0 \cosh(as + b)(p \times v),$$

com $R_0, a, b \in \mathbb{R}$ e $R_0 \neq 0$ e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$ unitário. As curvaturas satisfazem a relação de Weingarten $\Psi(H, K) = 0$ com Ψ dada por

$$\begin{aligned} \Psi(H, K) = & 16(u_0^2 + 1)^2(R_0^2 - u_0^2 - 1)H^4 \\ & - 4(u_0^2 + 1)(a(u_0^2 + 1)(a - 4u_0 + 4R_0^2u_0 - 4u_0^3 + au_0^2)K + u_0^2(R_0^2 - u_0^2 - 1))H^2 \\ & + K(a^2(u_0^2 + 1)^2K + u_0(a - u_0 + R_0^2u_0 - u_0^3 + au_0^2))^2. \end{aligned}$$

(iv) $\phi(s, t) = ((\cosh t)p(s) - (\sinh t)v(s), u_0t + s)$, sendo $u_0 \in \mathbb{R}$ com $u_0 \neq 0$ sendo p, v soluções de

$$\begin{aligned} p' &= -u_0v + \alpha_0 e^{a(s-s_0)}(p \times v), \\ v' &= -u_0p + \alpha_0 e^{a(s-s_0)}(p \times v), \end{aligned}$$

com $a, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_0 \neq 0$ e condições iniciais $p(s_0) = p_0 \in \mathbb{H}^2$ e $v(s_0) = v_0 \in T_{p_0}\mathbb{H}^2$ unitário. As curvaturas satisfazem a relação de Weingarten $\Psi(H, K) = 0$ com Ψ dada por

$$\begin{aligned} \Psi(H, K) = & 16(u_0^2 + 1)H^4 + 4(a(u_0^2 + 1)(a - 4u_0)K - u_0^2)H^2 \\ & - K(a^2(u_0^2 + 1)K + u_0(a - u_0))^2. \end{aligned}$$

Observação 3.17. Os sistemas em p, v do Teorema 3.16 fornecem soluções bem-definidas para o contexto, i.e. $p : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ e $v : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ com $q(p, v) = 0$ e $q(v, v) = 1$. De fato, em todos eles, as soluções satisfazem

$$\begin{aligned} q(p, p)' &= 2q(p, p') = -2u_0q(p, v), \\ q(v, v)' &= 2q(v, v') = -2u_0q(p, v), \\ q(p, v)' &= q(p', v) + q(p, v') = -u_0(q(v, v) + q(p, p)). \end{aligned}$$

A terceira equação mostra que $q(p, v) \in \mathcal{C}^\infty$. Derivando então mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} q(p, v)'' &= -u_0(q(v, v)' + q(p, p)') \\ &= 4u_0^2q(p, v). \end{aligned}$$

Por existência e unicidade de soluções, essa equação garante que $q(p, v)$ tem a forma

$$q(p, v) = c_1 e^{2u_0(s-s_0)} + c_2 e^{-2u_0(s-s_0)},$$

para certas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Da condição inicial $q(p_0, v_0) = 0$ vem então que

$$0 = c_1 + c_2.$$

Da equação $q(p, v)' = -u_0(q(v, v) + q(p, p))$ e das condições iniciais vem que

$$q(p, v)'(s_0) = -u_0(q(v_0, v_0) + q(p_0, p_0)) = -u_0(1 - 1) = 0.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= q(p, v)'(s_0) = 2u_0 \left(c_1 e^{2u_0(s-s_0)} - c_2 e^{-2u_0(s-s_0)} \right) \Big|_{s=s_0} \\ &= 2u_0 (c_1 - c_2). \end{aligned}$$

Como $u_0 \neq 0$, isso implica $c_1 - c_2 = 0$. Mas então devemos ter $c_1 = c_2 = 0$. Isso implica que $q(p, v) \equiv 0$ sobre I . Consequentemente, temos também

$$\begin{aligned} q(p, p)' &= -2u_0 q(p, v) \equiv 0, \\ q(v, v)' &= -2u_0 q(p, v) \equiv 0, \end{aligned}$$

donde as condições iniciais garantem que $q(p, p) \equiv -1$ e $q(v, v) \equiv 1$.

Com isso, encerramos a análise do caso das superfícies regradas oblíquas. O fato de $u \equiv u_0 \neq 0$ ser constante nos permite argumentar, como já feito anteriormente, que a classificação geral das superfícies regradas de Weingarten de classe $\mathcal{C}^3$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se decompõe nas respectivas classificações dos casos particulares das superfícies regradas verticais, horizontais e oblíquas.

O espaço $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$

4.1 Construção de um modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$

Nesta seção, fazemos uma construção extensa e em detalhes de um modelo para o espaço $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, descrevendo conceitos básicos sobre esse espaço, como sua métrica, conexão de Levi-Civita, isometrias e geodésicas, para que possamos falar em superfícies regradas. Se preferir, o leitor pode ir direto à próxima seção, pois encontrará lá um resumo dos tópicos aqui construídos em detalhes.

Denotamos por $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ o recobrimento universal de $SL_2(\mathbb{R})$ munido de uma métrica riemanniana específica. Começamos lembrando que $SL_2(\mathbb{R})$, o chamado **grupo linear especial**, é o grupo de matrizes 2×2 com entradas reais e determinante 1. Este grupo age por isometrias sobre o modelo do semiplano para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ via identificação com transformações de Möbius. Mais precisamente, considere o semiplano definido por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

munido da métrica riemanniana dada por

$$g_p(u, v) = \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle, \quad p = (x, y) \in \mathbb{H}^2, \quad u, v \in T_p \mathbb{H}^2,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Este modelo é isométrico ao modelo do hiperboloide em $\mathbb{R}^{2,1}$ apresentado na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Uma transformação de Möbius é uma aplicação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ são tais que $ad - bc \neq 0$.

Por meio da identificação $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, verifica-se que transformações de Möbius com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$ mapeiam o semiplano superior $\mathbb{H}^2$ sobre si mesmo, preservando sua orientação. Mais que isso, essas transformações de Möbius descrevem as isometrias de $\mathbb{H}^2$.

Ora, a cada matriz $A \in SL_2(\mathbb{R})$ podemos associar uma transformação de Möbius de forma natural. Basta fazer

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \mapsto f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Essa associação é um homomorfismo de grupos (i.e. a multiplicação de matrizes em $SL_2(\mathbb{R})$ corresponde à composição das respectivas transformações de Möbius).

Além disso, essa associação é sobrejetora. Basta notar que, se f é uma transformação de Möbius com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$, então fazendo $\lambda := 1/\sqrt{ad - bc} > 0$, temos

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d},$$

e a matriz A definida por

$$A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix},$$

é tal que $\det A = \lambda^2(ad - bc) = 1$.

Contudo, a associação não é injetora, uma vez que se $A \in SL_2(\mathbb{R})$, então também $-A \in SL_2(\mathbb{R})$ e $f_A = f_{-A}$. Essa ambiguidade é removida se considerarmos $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{I, -I\}$ ao invés de $SL_2(\mathbb{R})$. Com isso, identificamos o grupo de isometrias que preservam orientação de $\mathbb{H}^2$ com o quociente $PSL_2(\mathbb{R})$.

Agora, faremos a identificação de $PSL_2(\mathbb{R})$ com o **fibrado unitário** de $\mathbb{H}^2$, definido por

$$U\mathbb{H}^2 := \{(p, v) \in T\mathbb{H}^2 : p \in \mathbb{H}^2 \text{ e } v \in T_p\mathbb{H}^2 \text{ com } g_p(v, v) = 1\}.$$

O fibrado tangente de uma variedade riemanniana possui uma métrica natural que iremos descrever posteriormente. Por ora, destaquemos apenas que, sendo o fibrado unitário $U\mathbb{H}^2$ uma subvariedade de dimensão 3 do fibrado tangente $T\mathbb{H}^2$, ele possui uma métrica riemanniana natural induzida pela métrica ambiente. Essa métrica é definida de tal modo que, se $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é isometria, então sua aplicação diferencial $Df : T\mathbb{H}^2 \rightarrow T\mathbb{H}^2$ também é isometria.

Sigamos para identificar $PSL_2(\mathbb{R})$ e $U\mathbb{H}^2$. Denotando por $[A] = \{A, -A\}$ a classe de $A \in SL_2(\mathbb{R})$ em $PSL_2(\mathbb{R})$, consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \psi : PSL_2(\mathbb{R}) &\rightarrow U\mathbb{H}^2 \\ [A] &\mapsto (f_A(i), d(f_A)_i \partial_y) \end{aligned}$$

Primeiramente, observe que ψ está bem definida, pois

- $f_A = f_{-A}$;
- $(i, \partial_y) \in U\mathbb{H}^2$;
- f_A, Df_A são isometrias.

Mostremos que ψ é uma bijeção.

Suponha que $(f_A(i), D(f_A)_i \partial_y) = (f_B(i), D(f_B)_i \partial_y)$. Vem daí que $f_B^{-1} f_A(i) = i$. Usando que $A \rightarrow f_A$ é homomorfismo de grupos, isso implica $f_{B^{-1}A}(i) = i$. Portanto, $f_{B^{-1}A} \in \text{Stab}(i)$. É possível mostrar que o estabilizador de $i = (0, 1) \in \mathbb{H}^2$ é dado por transformações de Möbius da forma $f(z) = \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, isso nos diz que devemos ter $B^{-1}A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos também $D(f_A)_i \partial_y = D(f_B)_i \partial_y$. Note que

$$\begin{aligned} f_A^{-1} \circ f_A &= f_{A^{-1}A} = f_I = I \\ \implies Df_{A^{-1}} \circ Df_A &= I \implies Df_{A^{-1}} = (Df_A)^{-1} \end{aligned}$$

Assim, temos $D(f_{B^{-1}A})_i \partial_y = \partial_y$. Segue que

$$\begin{aligned} D(f_{B^{-1}A})_i \partial_y &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_{B^{-1}A}(0, 1+t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{(\cos \theta)(1+t)i + \sin \theta}{-(\sin \theta)(1+t)i + \cos \theta} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{((\cos \theta)(1+t)i + \sin \theta)((\sin \theta)(1+t)i + \cos \theta)}{(\sin \theta)^2(1+t)^2 + \cos^2 \theta} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{(\sin \theta) \cos \theta - (\sin \theta)(\cos \theta)(1+t)^2 + i(1+t)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(\sin \theta)^2(1+t)^2 + \cos^2 \theta} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{(\sin \theta) \cos \theta (1 - (1+t)^2) + i(1+t)}{(\sin \theta)^2(1+t)^2 + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{-2 \cos \theta \sin \theta (t+1)}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta t^2 + 2 \sin^2 \theta t + \sin^2 \theta)^2} - i \frac{(-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta t^2 + 2 \sin^2 \theta t + \sin^2 \theta)}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta t^2 + 2 \sin^2 \theta t + \sin^2 \theta)^2} \Big|_0 \\ &= \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2} - i \frac{(-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2} \\ &= -2 \cos \theta \sin \theta - i(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Logo, nossa hipótese de que $D(f_{B^{-1}A})_i \partial_y = \partial_y$ implica que a parte real de $D(f_{B^{-1}A})_i \partial_y$ deve ser igual a 0 e a parte imaginária igual a 1, ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cos \theta \sin \theta = \sin(2\theta), \\ 1 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Isso implica que $2\theta = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\theta = k\pi$, donde

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \{I, -I\}.$$

Isso mostra que $[A] = [B]$. Portanto, ψ é injetora.

Para mostrar que ψ é sobrejetora, considere $((x, y), (u, v)) \in U\mathbb{H}^2$. Note que $g_{(x,y)}((u, v), (u, v)) = 1$ equivale a $\frac{1}{y^2}(u^2 + v^2) = 1$. Portanto, (u, v) pode ser escrito como $(u, v) = (y \cos \theta, y \sin \theta)$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Afirmamos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

é tal que $\psi[A] = ((x, y), (u, v))$. Primeiramente, é imediato verificar que $A \in SL_2(\mathbb{R})$, uma vez que é o produto de três matrizes com determinante igual a 1 (de fato, toda matriz em $SL_2(\mathbb{R})$ possui uma tal decomposição, conhecida como decomposição de Iwasawa).

Isso nos permite considerar $\psi[A]$. Primeiro, teremos

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{y} \cos \frac{1}{2} \theta - \frac{x}{\sqrt{y}} \sin \frac{1}{2} \theta & \sqrt{y} \sin \frac{1}{2} \theta + \frac{x}{\sqrt{y}} \cos \frac{1}{2} \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{y}} \sin \frac{1}{2} \theta & \frac{1}{\sqrt{y}} \cos \frac{1}{2} \theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, f_A é dada por

$$\begin{aligned} f_A(z) &= \frac{\left(\sqrt{y} \cos \frac{1}{2} \theta - \frac{x}{\sqrt{y}} \sin \frac{1}{2} \theta \right) z + \sqrt{y} \sin \frac{1}{2} \theta + \frac{x}{\sqrt{y}} \cos \frac{1}{2} \theta}{\left(-\frac{1}{\sqrt{y}} \sin \frac{1}{2} \theta \right) z + \frac{1}{\sqrt{y}} \cos \frac{1}{2} \theta} \\ &= \frac{(y \cos \frac{1}{2} \theta - x \sin \frac{1}{2} \theta) z + (x \cos \frac{1}{2} \theta + y \sin \frac{1}{2} \theta)}{-(\sin \frac{1}{2} \theta) z + \cos \frac{1}{2} \theta} \end{aligned}$$

Verifica-se então que

$$\begin{aligned} f_A(i) &= \frac{(y \cos \frac{1}{2} \theta - x \sin \frac{1}{2} \theta) i + (x \cos \frac{1}{2} \theta + y \sin \frac{1}{2} \theta)}{-(\sin \frac{1}{2} \theta) i + \cos \frac{1}{2} \theta} \\ &= x + iy = (x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(f_A)_i \partial_y &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{(y \cos \frac{1}{2} \theta - x \sin \frac{1}{2} \theta) (i+t) + (x \cos \frac{1}{2} \theta + y \sin \frac{1}{2} \theta)}{-(\sin \frac{1}{2} \theta) (i+t) + \cos \frac{1}{2} \theta} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(\frac{\left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x \cos \theta - \frac{1}{2} y \sin \theta \right) t^2 + (y \cos \theta - x \sin \theta) t + x}{(\sin \frac{1}{2} \theta)^2 + (\cos \frac{1}{2} \theta - t \sin \frac{1}{2} \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{yi}{(\sin \frac{1}{2} \theta)^2 + (\cos \frac{1}{2} \theta - t \sin \frac{1}{2} \theta)^2} \right) \\ &= \left(\frac{8y \cos \theta + 4t^2 y - 8ty \sin \theta - 4t^2 y \cos \theta}{(t^4 - 4t^2) \cos 2\theta + 4t^3 \sin 2\theta - (16t + 8t^3) \sin \theta - (8t^2 + 4t^4) \cos \theta + 12t^2 + 3t^4 + 8} \right)_0 \\ &\quad + \left(\frac{8y (\sin \frac{1}{2} \theta) (\cos \frac{1}{2} \theta - t \sin \frac{1}{2} \theta)}{(2t \sin \theta + t^2 \cos \theta - t^2 - 2)^2} \right)_0 i \\ &= \left(\frac{8y \cos \theta}{8} \right) + \left(\frac{8y (\sin \frac{1}{2} \theta) (\cos \frac{1}{2} \theta)}{(-2)^2} \right) i \\ &= y \cos \theta + y (\sin \theta) i \\ &= (y \cos \theta, y \sin \theta) = (u, v). \end{aligned}$$

Isso mostra que ψ é bijetora. Além disso, é fácil ver que ψ e ψ^{-1} são diferenciáveis, i.e. ψ é um difeomorfismo.

Assim, identificamos $PSL(2, \mathbb{R}) \cong U\mathbb{H}^2$ como variedades diferenciáveis.

Considere a sequência de aplicações

$$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \rightarrow SL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto [A]} PSL_2(\mathbb{R}) \xleftrightarrow{\psi} U\mathbb{H}^2.$$

Observe que a aplicação $A \mapsto [A]$ é um recobrimento duplo. Isso nos mostra que $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ pode ser visto como o recobrimento universal de $U\mathbb{H}^2$. Acontece que $U\mathbb{H}^2$ possui métrica riemanniana. É assim que induzimos uma métrica riemanniana sobre $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Além disso, podemos tomar como modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ o recobrimento universal do fibrado unitário, $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$.

Agora que já temos uma proposta de modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, comentamos brevemente a respeito da métrica em fibrados tangentes. Em [Sct], P. Scott constrói uma métrica no fibrado tangente por meio de uma descrição geométrica que, embora interessante, pode ser intrincada, de difícil compreensão e de pouca utilidade para cálculos concretos. Já em [Crm], Manfredo define uma tal métrica de forma simples e direta por meio de uma fórmula. É um exercício interessante, embora não trivial, mostrar que essas métricas coincidem. Por simplicidade, descreveremos aqui a versão mais direta.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e TM seu fibrado tangente. Considere $(p, v) \in TM$ e V, W vetores tangentes a TM em (p, v) . Considere curvas que representem esses vetores, i.e. $\alpha(s) = (p(s), v(s))$ e $\beta(t) = (q(t), w(t))$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = (p, v)$ e $\alpha'(0) = V$, $\beta'(0) = W$. Se estivéssemos com $M = \mathbb{R}^n$, com $TM \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, a métrica euclidiana nos daria

$$\langle V, W \rangle = \langle (p'(0), v'(0)), (q'(0), w'(0)) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle p'(0), q'(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle v'(0), w'(0) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

No contexto abstrato, v é um campo ao longo de p , assim como w é um campo ao longo de q . Podemos considerar suas derivadas covariantes. Definimos então uma métrica $\bar{g}$ em TM fazendo

$$\bar{g}_{(p,v)}(V, W) = g_p(p'(0), q'(0)) + g_p\left(\frac{Dv}{ds}(0), \frac{Dw}{dt}(0)\right).$$

Agora que conhecemos a métrica sobre $U\mathbb{H}^2 \subset T\mathbb{H}^2$ e sabemos que $\widetilde{U\mathbb{H}^2} \cong \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, trocamos novamente $\mathbb{H}^2$ pelo modelo isométrico que julgamos mais conveniente, a saber, o modelo do hiperboloide no espaço Lorentziano $\mathbb{R}^{2,1}$ (veja Capítulo 3, seção 3.2). Olharemos com mais detalhes para a métrica sobre o fibrado tangente de $\mathbb{H}^2$ neste modelo e então forneceremos um modelo para o recobrimento universal $\widetilde{U\mathbb{H}^2}$.

Primeiramente, o fibrado tangente a $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ pode ser descrito por

$$T\mathbb{H}^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^{2,1} : p \in \mathbb{H}^2 \text{ e } q(p, v) = 0\},$$

sendo q a pseudométrica de $\mathbb{R}^{2,1}$. Vejamos como fica a métrica definida acima neste caso. Sejam V_1, V_2 tangentes a $(p, v) \in T\mathbb{H}^2$. Considere curvas $\alpha_i = (p_i, v_i)$ em $T\mathbb{H}^2$ com $\alpha_i(0) = (p, v)$ e

$\alpha'_i(0) = V_i$. Usando a estrutura de $\mathbb{R}^{2,1}$, incluindo a descrição da conexão de Levi-Civita em termos de componentes tangentes a $\mathbb{H}^2$, e aplicando a definição acima, teremos

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{(p,v)}(V_1, V_2) &= g_p(p'_1(0), p'_2(0)) + g_p\left(\frac{Dv_1}{ds}(0), \frac{Dv_2}{dt}(0)\right) \\
 &= q(p'_1(0), p'_2(0)) + q\left((v'_1)^T(0), (v'_2)^T(0)\right) \\
 &= q(p'_1(0), p'_2(0)) + q(v'_1(0), p)q(p, v'_2(0)) + q(v'_2(0), p)q(p, p) \\
 &= q(p'_1(0), p'_2(0)) + q(v'_1(0), v'_2(0)) + q(v'_2(0), p)q(v'_1(0), p) \\
 &\quad + q(v'_1(0), p)q(p, v'_2(0)) + q(v'_1(0), p)q(v'_2(0), p)q(p, p) \\
 &= q(p'_1(0), p'_2(0)) + q(v'_1(0), v'_2(0)) + q(v'_2(0), p)q(v'_1(0), p) \\
 &\quad + q(v'_1(0), p)q(p, v'_2(0)) - q(v'_1(0), p)q(p, v'_2(0)) \\
 &= q(p'_1(0), p'_2(0)) + q(v'_1(0), v'_2(0)) + q(p, v'_2(0))q(p, v'_1(0))
 \end{aligned}$$

Escrito de forma mais simples, se $V_i = (u_i, w_i) \in T_{(p,v)}T\mathbb{H}^2$, $i = 1, 2$, então

$$\bar{g}_{(p,v)}(V_1, V_2) = q(u_1, u_2) + q(w_1, w_2) + q(p, w_1)q(p, w_2).$$

Observe que $U\mathbb{H}^2$ é dado por

$$U\mathbb{H}^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^{2,1} : p \in \mathbb{H}^2, q(p, v) = 0, q(v, v) = 1\}.$$

Para descrever o recobrimento universal de $U\mathbb{H}^2$, iremos considerar o seguinte referencial ortonormal sobre $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned}
 E_1(x, y, z) &= \left(1 + \frac{x^2}{z+1}, \frac{xy}{z+1}, x\right), \\
 E_2(x, y, z) &= \left(\frac{xy}{z+1}, 1 + \frac{y^2}{z+1}, y\right), \\
 \text{com } (x, y, z) &\in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}.
 \end{aligned}$$

Com esse referencial em mãos, podemos descrever $U\mathbb{H}^2$ simplesmente por

$$U\mathbb{H}^2 = \{(p, (\cos \theta)E_1(p) + (\sin \theta)E_2(p)) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^{2,1} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Essa descrição nos fornece o recobrimento universal. Basta definir $\Upsilon : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$ por

$$\Upsilon(p, \theta) = (p, (\cos \theta)E_1(p) + (\sin \theta)E_2(p)).$$

Não é difícil observar que Υ é uma aplicação de recobrimento. Como $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é simplesmente conexo, Υ é o recobrimento universal de $U\mathbb{H}^2$. Assim, considerando a métrica induzida por Υ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, teremos um modelo para $\widetilde{U\mathbb{H}^2} \cong \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$.

Considere dois vetores $V_1, V_2 \in T_{(p,\theta)}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$. Esses vetores são da forma $V_i = (u_i, r_i)$ em que $u_i \in T_p\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ e $r_i \in T_\theta\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Sejam $p_1, p_2 : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ curvas tais que $p_i(0) = p$ e $p'_i(0) = u_i$.

Considere então as curvas $\alpha_i(t) = (p_i(t), \theta + r_i t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Estas são tais que $\alpha_i(0) = (p, \theta)$ e $\alpha_i'(0) = (u_i, r_i) = V_i$. Induzimos uma métrica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ fazendo

$$\begin{aligned} g_{(p, \theta)}(V_1, V_2) &= \bar{g}_{\Upsilon(p, \theta)}((\Upsilon \circ \alpha_1)'(0), (\Upsilon \circ \alpha_2)'(0)) \\ &= q(p_1'(0), p_2'(0)) + q\left(\left.\frac{DW_1}{dt}\right|_0, \left.\frac{DW_2}{dt}\right|_0\right). \end{aligned}$$

sendo

$$W_i(t) := \cos(\theta + r_i t) E_1(p_i(t)) + \sin(\theta + r_i t) E_2(p_i(t)).$$

Antes de calcular essas derivadas covariantes, primeiro lembremos que definimos a componente tangente de $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ em $p \in \mathbb{H}^2$ por

$$v^T = v + q(v, p)p.$$

Contudo, agora que possuímos um referencial ortonormal sobre $T_p \mathbb{H}^2$, essa componente pode ser obtida por

$$v^T = \sum_{i=1}^2 q(v^T, E_i) E_i = \sum_{i=1}^2 q(v + q(v, p)p, E_i) E_i = \sum_{i=1}^2 q(v, E_i) E_i.$$

Acima, usamos que $q(p, E_i) = 0$, pois E_i é tangente em p . Dito isso, cada derivada covariante será dada pela componente tangente de

$$W_i'(0) = -r_i \sin \theta E_1(p) + r_i \cos \theta E_2(p) + \cos \theta E_1(p_i)'(0) + \sin \theta E_2(p_i)'(0).$$

Teremos então

$$\begin{aligned} \frac{DW_i}{dt}(0) &= W_i'(0)^T = q(W_i'(0), E_1(p)) E_1(p) + q(W_i'(0), E_2(p)) E_2(p) \\ &= (-r_i \sin \theta + \cos \theta q(E_1(p_i)'(0), E_1(p)) + \sin \theta q(E_2(p_i)'(0), E_1(p))) E_1(p) \\ &\quad + (r_i \cos \theta + \cos \theta q(E_1(p_i)'(0), E_2(p)) + \sin \theta q(E_2(p_i)'(0), E_2(p))) E_2(p) \\ &= (-r_i \sin \theta + \sin \theta q(E_2(p_i)'(0), E_1(p))) E_1(p) \\ &\quad + (r_i \cos \theta + \cos \theta q(E_1(p_i)'(0), E_2(p))) E_2(p). \end{aligned}$$

Para calcular $q(E_1(p_i)'(0), E_2(p))$, usando que reiteradamente que $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ e $z' = \frac{xx' + yy'}{z}$,

obtemos

$$\begin{aligned}
 E_1(p_i)' &= x' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1}, \frac{xy}{z+1}, x \right) + y' \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1}, \frac{xy}{z+1}, x \right) \\
 &\quad + \frac{xx' + yy'}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1}, \frac{xy}{z+1}, x \right) \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{x(x'x^2 + yy'x - 2x'z^2 - 2x'z)}{z(z+1)^2} \\ \frac{-x'x^2y - y'xy^2 + y'xz^2 + y'xz + x'yz^2 + x'yz}{z(z+1)^2} \\ x' \end{bmatrix} \\
 q(E_1(p_i)', E_2(p_i)) &= \begin{bmatrix} -\frac{x(x'x^2 + yy'x - 2x'z^2 - 2x'z)}{z(z+1)^2} \\ \frac{-x'x^2y - y'xy^2 + y'xz^2 + y'xz + x'yz^2 + x'yz}{z(z+1)^2} \\ x' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{xy}{z+1}, \\ \frac{y^2+z+1}{z+1}, \\ -y \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{z(z+1)^3} \begin{pmatrix} x'x^4y + y'x^3y^2 + x'x^2y^3 - 2x'x^2yz^2 \\ -x'x^2yz + x'x^2y + y'xy^4 - y'xy^2z^2 + y'xy^2 \\ -y'xz^3 - 2y'xz^2 - y'xz - x'y^3z^2 \\ -x'y^3z + x'yz^4 + 2x'yz^3 + x'yz^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{z} \frac{xy' - yx'}{(z+1)^3} (2z + (x^2 + y^2)(z+2) + 2) \\
 &= \frac{1}{z} \frac{xy' - yx'}{(z+1)^3} (2z + (-1 + z^2)(z+2) + 2) = \frac{xy' - yx'}{z+1}.
 \end{aligned}$$

Portanto, se denotamos $p = (x, y, z)$ e $p_i'(0) = u_i = (a_i, b_i, c_i)$, então

$$q(E_1(p_i)'(0), E_2(p)) = \frac{xb_i - ya_i}{z+1}.$$

Observe que $q(E_1(p_i), E_2(p_i)) = 0$ implica que

$$q(E_2(p_i)'(0), E_1(p)) = -q(E_1(p_i)'(0), E_2(p)) = -\frac{xb_i - ya_i}{z+1}.$$

Portanto, finalmente obtemos a derivada covariante

$$\begin{aligned}
 \frac{DW_i}{dt}(0) &= -\sin \theta \left(r_i + \frac{xb_i - ya_i}{z+1} \right) E_1(p) + \cos \theta \left(r_i + \frac{xb_i - ya_i}{z+1} \right) E_2(p) \\
 &= \left(r_i + \frac{xb_i - ya_i}{z+1} \right) (-\sin \theta E_1(p) + \cos \theta E_2(p)).
 \end{aligned}$$

Logo, a métrica em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ será dada por

$$\begin{aligned}
 g_{(p, \theta)}((u_1, r_1), (u_2, r_2)) &= q(u_1, u_2) + q\left(\left.\frac{DW_1}{dt}\right|_0, \left.\frac{DW_2}{dt}\right|_0\right) \\
 &= q(u_1, u_2) + \left(r_1 + \frac{xb_1 - ya_1}{z+1}\right) \left(r_2 + \frac{xb_2 - ya_2}{z+1}\right).
 \end{aligned}$$

sendo $p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^2$ e $u_i = (a_i, b_i, c_i) \in T_p\mathbb{H}^2$. É importante destacar que esta não é a métrica produto sobre $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, espaço estudado no Capítulo 3.

Notemos que a inclusão do referencial $\{E_1, E_2\}$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ deixa de ser ortonormal. De fato,

$$\begin{aligned} g((E_1, 0), (E_1, 0)) &= q(E_1, E_1) + \left(0 + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{(z+1)^2} \\ g((E_1, 0), (E_2, 0)) &= q(E_1, E_2) + \left(0 + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right) \left(0 + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right) = \frac{-xy}{(z+1)^2}, \\ g((E_2, 0), (E_2, 0)) &= q(E_2, E_2) + \left(0 + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{(z+1)^2}, \\ g((E_1, 0), (0, 1)) &= q(E_1, 0) + \left(0 + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = -\frac{y}{z+1}, \\ g((E_2, 0), (0, 1)) &= q(E_2, 0) + \left(0 + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = \frac{x}{z+1}, \\ g((0, 1), (0, 1)) &= q(0, 0) + \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Isso pode ser consertado subtraindo a componente de $\partial_\theta = (0, 1)$ desses vetores. De fato, considere o referencial dado por

$$\begin{aligned} \chi_1 &:= (E_1, 0) + \frac{y}{z+1} (0, 1) = \left(E_1, \frac{y}{z+1}\right), \\ \chi_2 &:= (E_2, 0) - \frac{x}{z+1} (0, 1) = \left(E_2, -\frac{x}{z+1}\right), \\ \chi_3 &:= \partial_\theta = (0, 1). \end{aligned}$$

Este referencial é de fato ortonormal em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$:

$$\begin{aligned} g(\chi_1, \chi_1) &= q(E_1, E_1) + \left(\frac{y}{z+1} + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right)^2 = 1, \\ g(\chi_1, \chi_2) &= q(E_1, E_2) + \left(\frac{y}{z+1} + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right) \left(-\frac{x}{z+1} + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right) = 0, \\ g(\chi_1, \chi_3) &= q(E_1, 0) + \left(\frac{y}{z+1} + \frac{x \frac{xy}{z+1} - y \frac{x^2+z+1}{z+1}}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = 0, \\ g(\chi_2, \chi_2) &= q(E_2, E_2) + \left(-\frac{x}{z+1} + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right)^2 = 1, \\ g(\chi_2, \chi_3) &= q(E_2, 0) + \left(-\frac{x}{z+1} + \frac{x \frac{y^2+z+1}{z+1} - y \frac{xy}{z+1}}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = 0, \\ g(\chi_3, \chi_3) &= q(0, 0) + \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) \left(1 + \frac{x0 - y0}{z+1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Como nos espaços anteriores, o referencial $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ define uma estrutura de contato em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, i.e. a direção das fibras dada por χ_3 é tida como vertical e à direção dos planos gerados por χ_1, χ_2 é chamada de horizontal. Os vetores que não são nem verticais nem horizontais serão chamados de oblíquos.

Queremos descrever a conexão de Levi–Civita de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Para isso, começamos calculando os colchetes de Lie $[\chi_i, \chi_j]$.

Considere a parametrização de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x, y, \theta) = ((x, y, z(x, y)), \theta), \quad \text{sendo } z(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Escrevamos o referencial $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ no referencial coordenado $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_\theta\}$. Observe que

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{x^2 + z + 1}{z + 1}, \frac{xy}{z + 1}, x \right) = \left(\frac{x^2 + z + 1}{z + 1}, \frac{xy}{z + 1}, \frac{x(-1 + z^2 + z + 1)}{z(z + 1)} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 + z + 1}{z + 1}, \frac{xy}{z + 1}, \frac{x(x^2 + y^2 + z + 1)}{z(z + 1)} \right) = \frac{x^2 + z + 1}{z + 1} \left(1, 0, \frac{x}{z} \right) + \frac{xy}{z + 1} \left(0, 1, \frac{y}{z} \right) \\ &= \frac{x^2 + z + 1}{z + 1} (1, 0, z_x) + \frac{xy}{z + 1} (0, 1, z_y). \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que

$$E_2 = \left(\frac{xy}{z + 1}, \frac{y^2 + z + 1}{z + 1}, y \right) = \frac{xy}{z + 1} (1, 0, z_x) + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} (0, 1, z_y).$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \left(E_1, \frac{y}{z + 1} \right) = \frac{x^2 + z + 1}{z + 1} \varphi_x + \frac{xy}{z + 1} \varphi_y + \frac{y}{z + 1} \varphi_\theta, \\ \chi_2 &= \left(E_2, -\frac{x}{z + 1} \right) = \frac{xy}{z + 1} \varphi_x + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} \varphi_y - \frac{x}{z + 1} \varphi_\theta, \\ \chi_3 &= (0, 1) = \varphi_\theta. \end{aligned}$$

Considere uma função suave $f : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nas coordenadas (x, y, θ) . Teremos

$$\begin{aligned} [\chi_1, \chi_2](f) &= \chi_1(\chi_2 f) - \chi_2(\chi_1 f) \\ &= \chi_1 \left(\frac{xy}{z + 1} f_x + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} f_y - \frac{x}{z + 1} f_\theta \right) - \chi_2 \left(\frac{x^2 + z + 1}{z + 1} f_x + \frac{xy}{z + 1} f_y + \frac{y}{z + 1} f_\theta \right) \\ &= \frac{x^2 + z + 1}{z + 1} \left(\frac{xy}{z + 1} f_x + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} f_y - \frac{x}{z + 1} f_\theta \right)_x \\ &\quad + \frac{xy}{z + 1} \left(\frac{xy}{z + 1} f_x + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} f_y - \frac{x}{z + 1} f_\theta \right)_y \\ &\quad + \frac{y}{z + 1} \left(\frac{xy}{z + 1} f_x + \frac{y^2 + z + 1}{z + 1} f_y - \frac{x}{z + 1} f_\theta \right)_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{xy}{z+1} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1} f_x + \frac{xy}{z+1} f_y + \frac{y}{z+1} f_\theta \right)_x \\
& -\frac{y^2+z+1}{z+1} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1} f_x + \frac{xy}{z+1} f_y + \frac{y}{z+1} f_\theta \right)_y \\
& +\frac{x}{z+1} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1} f_x + \frac{xy}{z+1} f_y + \frac{y}{z+1} f_\theta \right)_\theta \\
& = \frac{x^2+z+1}{z+1} \left(\begin{aligned} & \frac{y(z+1)-xy(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_x \\ & + \frac{xy}{z+1} f_{x,x} + \frac{(\frac{x}{z})(z+1)-(y^2+z+1)(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_y \\ & + \frac{y^2+z+1}{z+1} f_{x,y} - \frac{(z+1)-x(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_\theta - \frac{x}{z+1} f_{x,\theta} \end{aligned} \right) \\
& + \frac{xy}{z+1} \left(\begin{aligned} & \frac{x(z+1)-xy(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_x \\ & + \frac{xy}{z+1} f_{x,y} + \frac{(2y+\frac{y}{z})(z+1)-(y^2+z+1)(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_y \\ & + \frac{y^2+z+1}{z+1} f_{y,y} - \frac{-x(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_\theta - \frac{x}{z+1} f_{y,\theta} \end{aligned} \right) \\
& + \frac{y}{z+1} \left(\frac{xy}{z+1} f_{x,\theta} + \frac{y^2+z+1}{z+1} f_{y,\theta} - \frac{x}{z+1} f_{\theta,\theta} \right) \\
& - \frac{xy}{z+1} \left(\begin{aligned} & \frac{(2x+\frac{x}{z})(z+1)-(x^2+z+1)(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_x \\ & + \frac{x^2+z+1}{z+1} f_{x,x} + \frac{y(z+1)-xy(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_y \\ & + \frac{xy}{z+1} f_{x,y} + \frac{-y(\frac{x}{z})}{(z+1)^2} f_\theta + \frac{y}{z+1} f_{x,\theta} \end{aligned} \right) \\
& - \frac{y^2+z+1}{z+1} \left(\begin{aligned} & \frac{(\frac{y}{z})(z+1)-(x^2+z+1)(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_x \\ & + \frac{x^2+z+1}{z+1} f_{x,y} + \frac{x(z+1)-xy(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_y \\ & + \frac{xy}{z+1} f_{y,y} + \frac{(z+1)-y(\frac{y}{z})}{(z+1)^2} f_\theta + \frac{y}{z+1} f_{y,\theta} \end{aligned} \right) \\
& + \frac{x}{z+1} \left(\frac{x^2+z+1}{z+1} f_{x,\theta} + \frac{xy}{z+1} f_{y,\theta} + \frac{y}{z+1} f_{\theta,\theta} \right) \\
& = \frac{y}{z+1} f_x - \frac{x}{z+1} f_y - \frac{2}{z+1} f_\theta = \left(\frac{y}{z+1} \varphi_x - \frac{x}{z+1} \varphi_y - \frac{2}{z+1} \varphi_\theta \right) (f) \\
& = \left(\frac{y}{z+1} \chi_1 - \frac{x}{z+1} \chi_2 - \chi_3 \right) (f).
\end{aligned}$$

Na última passagem utilizamos a mudança entre os referenciais, dada por

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{x^2+z+1}{z+1} & \frac{xy}{z+1} & \frac{y}{z+1} \\ \frac{xy}{z+1} & \frac{y^2+z+1}{z+1} & -\frac{x}{z+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_\theta \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{y^2+z+1}{x^2+y^2+z+1} & \frac{-xy}{x^2+y^2+z+1} & -\frac{y}{z+1} \\ \frac{-xy}{x^2+y^2+z+1} & \frac{x^2+z+1}{x^2+y^2+z+1} & \frac{x}{z+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Os demais colchetes são trivialmente nulos, por exemplo

$$\begin{aligned} [\chi_1, \chi_3](f) &= \chi_1(\chi_3 f) - \chi_3(\chi_1 f) = \chi_1(f_\theta) - \chi_3\left(\frac{x^2+z+1}{z+1}f_x + \frac{xy}{z+1}f_y + \frac{y}{z+1}f_\theta\right) \\ &= \frac{x^2+z+1}{z+1}f_{x,\theta} + \frac{xy}{z+1}f_{y,\theta} + \frac{y}{z+1}f_{\theta,\theta} - \left(\frac{x^2+z+1}{z+1}f_{x,\theta} + \frac{xy}{z+1}f_{y,\theta} + \frac{y}{z+1}f_{\theta,\theta}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sumarizando, temos

$$\begin{aligned} [\chi_1, \chi_2] &= \frac{y}{z+1}\chi_1 - \frac{x}{z+1}\chi_2 - \chi_3, \\ [\chi_1, \chi_3] &= [\chi_2, \chi_3] = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Koszul para referenciais ortonormais, obtemos

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\chi_i}\chi_j, \chi_k) &= \frac{1}{2}(g([\chi_i, \chi_j], \chi_k) - g([\chi_i, \chi_k], \chi_j) - g([\chi_j, \chi_k], \chi_i)), \\ g(\nabla_{\chi_1}\chi_1, \chi_1) &= 0, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_1, \chi_2) = -\frac{y}{z+1}, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_1, \chi_3) = 0, \\ g(\nabla_{\chi_1}\chi_2, \chi_1) &= \frac{y}{z+1}, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_2, \chi_2) = 0, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_2, \chi_3) = -\frac{1}{2}, \\ g(\nabla_{\chi_1}\chi_3, \chi_1) &= 0, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_3, \chi_2) = \frac{1}{2}, \quad g(\nabla_{\chi_1}\chi_3, \chi_3) = 0, \\ g(\nabla_{\chi_2}\chi_2, \chi_1) &= -\frac{x}{z+1}, \quad g(\nabla_{\chi_2}\chi_2, \chi_2) = 0, \quad g(\nabla_{\chi_2}\chi_2, \chi_3) = 0, \\ g(\nabla_{\chi_2}\chi_3, \chi_1) &= -\frac{1}{2}, \quad g(\nabla_{\chi_2}\chi_3, \chi_2) = 0, \quad g(\nabla_{\chi_2}\chi_3, \chi_3) = 0, \\ g(\nabla_{\chi_3}\chi_3, \chi_1) &= 0, \quad g(\nabla_{\chi_3}\chi_3, \chi_2) = 0, \quad g(\nabla_{\chi_3}\chi_3, \chi_3) = 0. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos a conexão de Levi-Civita de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ em termos do referencial χ_i :

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\chi_1}\chi_1 & \nabla_{\chi_1}\chi_2 & \nabla_{\chi_1}\chi_3 \\ \nabla_{\chi_2}\chi_1 & \nabla_{\chi_2}\chi_2 & \nabla_{\chi_2}\chi_3 \\ \nabla_{\chi_3}\chi_1 & \nabla_{\chi_3}\chi_2 & \nabla_{\chi_3}\chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{z+1}\chi_2 & \frac{y}{z+1}\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_3 & \frac{1}{2}\chi_2 \\ \frac{x}{z+1}\chi_2 + \frac{1}{2}\chi_3 & -\frac{x}{z+1}\chi_1 & -\frac{1}{2}\chi_1 \\ \frac{1}{2}\chi_2 & -\frac{1}{2}\chi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Falamos agora das geodésicas em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Primeiro, encontraremos todas as geodésicas partindo da origem $O := ((0, 0, 1), 0) \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ e obteremos as demais geodésicas do espaço por meio de isometrias.

Considere uma curva suave $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Para que γ seja geodésica, devemos ter $\nabla_{\gamma'}\gamma' \equiv 0$. Para calcular essa derivada covariante, precisamos antes escrever γ' no referencial χ_i . Denotando

$\gamma = ((x, y, z), \theta)$, temos

$$\begin{aligned} \gamma' &= ((x', y', z'), \theta') = x' \left(\left(1, 0, \frac{x}{z} \right), 0 \right) + y' \left(\left(0, 1, \frac{y}{z} \right), 0 \right) + \theta' ((0, 0, 0), 1) = x' \varphi_x + y' \varphi_y + \theta' \varphi_\theta \\ &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{y^2+z+1}{x^2+y^2+z+1} & \frac{-xy}{x^2+y^2+z+1} & -\frac{y}{z+1} \\ \frac{-xy}{x^2+y^2+z+1} & \frac{x^2+z+1}{x^2+y^2+z+1} & \frac{x}{z+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{x'(y^2+z+1)}{x^2+y^2+z+1} - \frac{y'xy}{x^2+y^2+z+1} \right) \chi_1 + \left(\frac{y'(x^2+z+1)}{x^2+y^2+z+1} - \frac{x'xy}{x^2+y^2+z+1} \right) \chi_2 \\ &\quad + \left(\theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1} \right) \chi_3 \\ &= \frac{x'(z+1) - xz'}{z+1} \chi_1 + \frac{y'(z+1) - yz'}{z+1} \chi_2 + \left(\theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1} \right) \chi_3. \end{aligned}$$

Denote

$$A := \frac{x'(z+1) - xz'}{z+1}, \quad B := \frac{y'(z+1) - yz'}{z+1}, \quad C := \theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1},$$

de forma que $\gamma' = A\chi_1 + B\chi_2 + C\chi_3$. Com essa notação, a derivada covariante é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= A' \chi_1 + B' \chi_2 + C' \chi_3 + \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{y}{z+1} \chi_2 & \frac{y}{z+1} \chi_1 - \frac{1}{2} \chi_3 & \frac{1}{2} \chi_2 \\ \frac{x}{z+1} \chi_2 + \frac{1}{2} \chi_3 & -\frac{x}{z+1} \chi_1 & -\frac{1}{2} \chi_1 \\ \frac{1}{2} \chi_2 & -\frac{1}{2} \chi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= \left(A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right) \right) \chi_1 + \left(B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right) \right) \chi_2 + C' \chi_3. \end{aligned}$$

Portanto, γ é uma geodésica partindo da origem $O \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ com vetor tangente unitário $V \in T_O \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ se, e somente se, é solução do sistema

$$\begin{aligned} 0 &= A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right), \\ 0 &= B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right), \\ 0 &= C', \\ \gamma(0) &= O, \gamma'(0) = V. \end{aligned}$$

Observe que o referencial χ_i sobre O é dado por $\chi_1 = ((1, 0, 0), 0)$, $\chi_2 = ((0, 1, 0), 0)$, $\chi_3 = ((0, 0, 0), 1)$.

Começamos analisando o caso em que V é vertical. A menos de inverter a orientação da geodésica, podemos supor que $V = (0, 1)$. Tome γ definida por

$$\gamma(t) = ((0, 0, 1), t).$$

Temos que γ satisfaz as condições iniciais e suas funções A, B, C satisfazem

$$\begin{aligned} A &= \frac{x'(z+1) - xz'}{z+1} = 0, \\ B &= \frac{y'(z+1) - yz'}{z+1} = 0, \\ C &= \theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1} = 1, \\ 0 &= A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right), \\ 0 &= B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right), \\ 0 &= C'. \end{aligned}$$

Portanto, essa é a geodésica na direção da fibra (vertical) em O .

Suponha agora que V é horizontal, i.e. da forma $V = A_0\chi_1 + B_0\chi_2$. Tome γ definida por

$$\gamma(t) = ((\cosh t)(0, 0, 1) + (\sinh t)(A_0, B_0, 0), 0).$$

Note que γ está bem definida pois $A_0^2 + B_0^2 = 1$, $q((0, 0, 1), (A_0, B_0, 0)) = 0$ e a projeção de γ sobre a base $\mathbb{H}^2$ do fibrado é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$. Tal γ é de fato solução do problema:

$$\begin{aligned} x &= A_0 \sinh t, \quad y = B_0 \sinh t, \quad z = \cosh t \\ A &= \frac{x'(z+1) - xz'}{z+1} = A_0 \frac{\cosh t + \cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh t + 1} = A_0, \\ B &= \frac{y'(z+1) - yz'}{z+1} = B_0 \frac{\cosh t + \cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh t + 1} = B_0, \\ C &= \theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1} = \frac{(A_0 \sinh t)(B_0 \cosh t) - (B_0 \sinh t)(A_0 \cosh t)}{\cosh t + 1} = 0, \\ 0 &= A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right) = B_0 \left(\frac{A_0(B_0 \sinh t) - B_0(A_0 \sinh t)}{\cosh t + 1} \right) = 0, \\ 0 &= B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C \right) = -B_0 \left(\frac{A_0(B_0 \sinh t) - B_0(A_0 \sinh t)}{\cosh t + 1} \right) = 0, \\ 0 &= C'. \end{aligned}$$

Resta agora falar das geodésicas em que V é oblíquo, i.e. com $C_0 \neq 0$ e $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$. Primeiramente, a menos de uma rotação em torno do eixo- z do hiperboloide $\mathbb{H}^2$, podemos supor que $B_0 = 0$ (esse argumento ficará mais claro posteriormente, quando estudarmos as isometrias de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$). Além disso, a menos de uma inversão na orientação da geodésica, podemos supor $C_0 > 0$. Por fim, novamente a menos de uma rotação de π em torno do eixo- z , podemos supor também $A_0 > 0$. Como o vetor $V = A_0\chi_1 + C_0\chi_3$ é unitário, sob essas hipóteses podemos escrever $A_0 = \cos \alpha$, $C_0 = \sin \alpha$, para algum $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Introduzamos coordenadas polares em torno de O , escrevendo a projeção de γ em $\mathbb{H}^2$ como

$$x = \sinh r \cos \eta,$$

$$y = \sinh r \sin \eta,$$

$$z = \cosh r,$$

para certas funções $r, \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $r(0) = 0$. As funções A, B, C se traduzem nestas coordenadas como

$$A = \frac{x'(z+1) - xz'}{z+1} = r' \cos \eta - \eta' \sin \eta \sinh r,$$

$$B = \frac{y'(z+1) - yz'}{z+1} = r' \sin \eta + \eta' \cos \eta \sinh r,$$

$$C = \theta' + \frac{xy' - yx'}{z+1} = \theta' + \eta' (\cosh r - 1),$$

Observe que o sistema nos diz que $C \equiv C_0$ é constante. Com essa observação, o sistema em coordenadas polares se traduz como

$$\begin{aligned} 0 &= A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \\ &= r'' \cos \eta - \eta'' \sinh r \sin \eta - 2r' \eta' \cosh r \sin \eta \\ &\quad - C_0 r' \sin \eta - (\eta')^2 \cosh r \sinh r \cos \eta - C_0 \eta' \sinh r \cos \eta, \\ 0 &= B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \\ &= r'' \sin \eta + \eta'' \sinh r \cos \eta + 2r' \eta' \cosh r \cos \eta \\ &\quad + C_0 r' \cos \eta - (\eta')^2 \cosh r \sinh r \sin \eta - C_0 \eta' \sinh r \sin \eta. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos \eta) \left(A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) + (\sin \eta) \left(B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) \\ &= r'' - (\eta')^2 \cosh r \sinh r - C_0 (\sinh r) \eta', \\ 0 &= (-\sin \eta) \left(A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) + (\cos \eta) \left(B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) \\ &= \eta'' \sinh r + 2r' \eta' \cosh r + r' C_0. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} 0 &= A \left(A' + B \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) + B \left(B' - A \left(\frac{Ay - Bx}{z+1} - C_0 \right) \right) \\ &= AA' + BB' = \frac{1}{2} (A^2 + B^2)', \end{aligned}$$

e portanto $A^2 + B^2 \equiv A_0^2$. Convertendo essa equação adicional em coordenadas polares, obtemos

$$A_0^2 = A^2 + B^2 = (r')^2 + (\eta')^2 \sinh^2 r.$$

Quanto às condições iniciais, devemos ter

$$\begin{aligned}
 r(0) &= 0, \\
 A_0 &= r'(0) \cos \eta(0) - \eta'(0) \sin \eta(0) \sinh r(0) = r'(0) \cos \eta(0), \\
 0 &= B_0 = r'(0) \sin \eta(0) + \eta'(0) \cos \eta(0) \sinh r(0) = r'(0) \sin \eta(0) \\
 \implies \sin \eta(0) &= 0, \\
 C_0 &= \theta'(0) + \eta'(0) (\cosh r(0) - 1) = \theta'(0).
 \end{aligned}$$

Sumarizando, nossa geodésica em coordenadas polares deve ser solução do sistema

$$\begin{aligned}
 0 &= r'' - (\eta')^2 \cosh r \sinh r - C_0 \eta' (\sinh r), \\
 0 &= \eta'' \sinh r + 2r' \eta' \cosh r + C_0 r', \\
 C_0 &= \theta' + \eta' (\cosh r - 1), \\
 A_0^2 &= (r')^2 + (\eta')^2 \sinh^2 r, \\
 r(0) &= 0, \quad r'(0) \cos \eta(0) = A_0, \quad \sin \eta(0) = 0, \quad \theta'(0) = C_0.
 \end{aligned}$$

Não faremos aqui o processo de resolução detalhado deste sistema, apenas apresentaremos suas soluções.

As soluções se dividem em três casos, conforme o ângulo de obliquidade α do vetor V . Listamos todos esses casos na tabela a seguir.

Geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ $\gamma(0) = O = ((0, 0, 1), 0), \quad \gamma'(0) = (\cos \alpha) \chi_1 + (\sin \alpha) \chi_3$ $\gamma = ((\sinh r \cos \eta, \sinh r \sin \eta, \cosh r), \theta)$	
$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$ tipo espaço	$r(t) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \sinh(\sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \frac{t}{2}) \right)$ $\eta(t) = -\tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \tanh(\sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \frac{t}{2}) \right)$ $\theta(t) = 2(\sin \alpha)t + 2\eta(t)$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$ tipo luz	$r(t) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right)$ $\eta(t) = -\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right)$ $\theta(t) = \sqrt{2}t + 2\eta(t)$
$\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ tipo tempo	$r(t) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \sinh(\sqrt{-\cos 2\alpha} \cdot \frac{t}{2}) \right)$ $\eta(t) = -\tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \tanh(\sqrt{-\cos 2\alpha} \cdot \frac{t}{2}) \right)$ $\theta(t) = 2(\sin \alpha)t + 2\eta(t)$

Note que as expressões da tabela incluem os casos horizontal ($\alpha = 0$) e vertical ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). A nomenclatura de geodésica tipo espaço, tipo luz e tipo tempo foi motivada pelo fato de que os três

casos listados na tabela correspondem a vetores do tipo espaço, luz e tempo segundo a forma bilinear simétrica $\tilde{q}$, no espaço tangente $T_O\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, com assinatura $(2, 1)$ para o referencial χ_i :

$$\tilde{q}(A_1\chi_1 + B_1\chi_2 + C_1\chi_3, A_2\chi_1 + B_2\chi_2 + C_2\chi_3) := A_1A_2 + B_1B_2 - C_1C_2.$$

Note que para a geodésica do tipo tempo, há um detalhe na definição da função η . Existirá valores $t \in \mathbb{R}$ tais que $\cos(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2}) = 0$ e portanto $\tan(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2})$ não está definida. Mesmo assim, o ângulo η estará bem definido sobre toda a reta $\mathbb{R}$. Basta pensar em η como sendo uma função contínua que satisfaz

$$\sin(-\eta(t)) \cos\left(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \sin\left(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2}\right) \cos(-\eta(t)).$$

Em termos de expressão, cada vez que o ponto $(\cos(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2}), \sin(\sqrt{-\cos 2\alpha}\frac{t}{2}))$ cruza um dos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$, soma-se π à função arcotangente “padrão” (i.e. tomando valores em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

As soluções tabeladas acima podem ser encontradas em [Dvj], com leve alterações (por escolha de modelo). Foram todas verificadas com cuidado e satisfazem, de fato, o sistema. Uma verificação detalhada foi adicionada ao Apêndice B.

Por meio da projeção estereográfica de $\mathbb{H}^2$ sobre o disco de Poincaré, somos capazes de visualizar essas geodésicas. Note que, neste modelo, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ é representado pelo interior de um cilindro vertical.

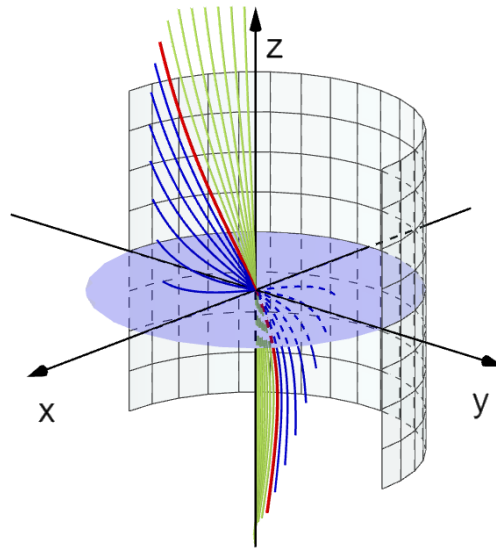


Figura 4.1: Geodésicas em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ do tipo espaço em azul, tipo luz em vermelho e tipo tempo em verde

Para visualizar as geodésicas de outros ângulos, o leitor pode acessar este link: <https://www.geogebra.org/classic/cb5hbbzw>.

Pois bem, agora que conhecemos algumas geodésicas a partir da origem, precisamos falar das isometrias de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ para que possamos falar das geodésicas a partir de qualquer ponto.

Primeiro, falemos da componente da identidade do grupo de isometrias da base $\mathbb{H}^2$ (a saber, o próprio $SL_2(\mathbb{R})$) no modelo do hiperboloide.

Primeiro, temos o **grupo de Lorentz** $O(2, 1)$, cujos elementos são as transformações lineares (ou matrizes) preservando a pseudo-métrica de $\mathbb{R}^{2,1}$. Temos que $A = (a_{i,j}) \in O(2, 1)$ se, e somente se, $A^T A_- = I_-$, sendo A^T a transposta e A_- e I_- definidas por

$$A_- = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad I_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para ver isto, basta notar que

$$\begin{aligned} 0 &= q(Ap_1, Ap_2) - q(p_1, p_2) = (Ap_1)^T A_- p_2 - p_1^T p_2 = p_1^T A^T A_- p_2 - p_1^T p_2 \\ &= (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 - a_{3,1}^2 - 1)x_1 x_2 + (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} - a_{3,1}a_{3,2})x_1 y_2 \\ &\quad + (a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}a_{2,3} - a_{3,1}a_{3,3})x_1 z_2 + (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} - a_{3,1}a_{3,2})x_2 y_1 \\ &\quad + (a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}a_{2,3} - a_{3,1}a_{3,3})x_2 z_1 + (a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2 - a_{3,2}^2 - 1)y_1 y_2 \\ &\quad + (a_{1,2}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,3} - a_{3,2}a_{3,3})y_1 z_2 + (a_{1,2}a_{1,3} + a_{2,2}a_{2,3} - a_{3,2}a_{3,3})y_2 z_1 \\ &\quad + (a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 - a_{3,3}^2 + 1)z_1 z_2. \end{aligned}$$

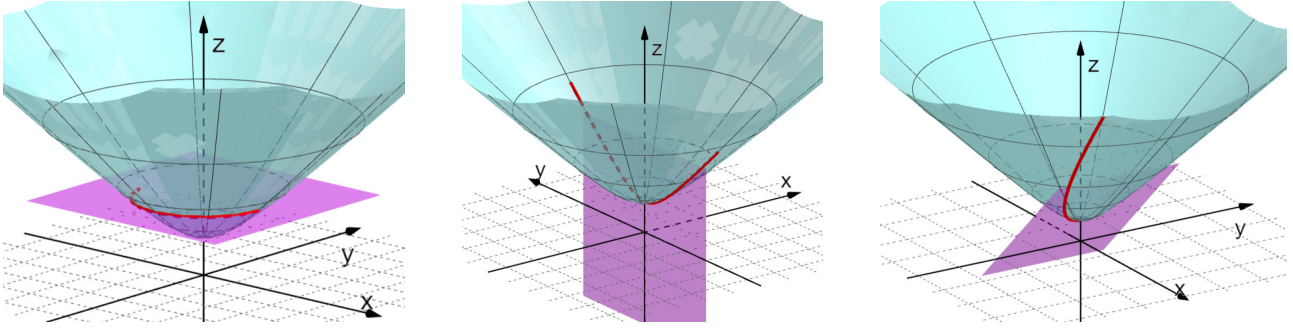
Para que isso valha para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{2,1}$, devemos ter que os coeficientes da equação acima são todos nulos, o que nos diz que $A^T A_- = I_-$. Isso equivale a dizer que os vetores coluna da matriz A formam uma base ortonormal com respeito a q e com assinatura $(2, 1)$.

Do grupo dessas transformações, a componente da identidade fornece isometrias sobre o hiperboloide $\mathbb{H}^2$ pois, se preservam a pseudométrica q , então deixam invariante o conjunto dos pontos satisfazendo $q(p, p) = -1$ e preservam a métrica riemanniana dada pela restrição de q ao fibrado tangente de $\mathbb{H}^2$. Essa componente é gerada por elementos da forma

$$K_\eta = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh r & \sinh r \\ 0 & \sinh r & \cosh r \end{bmatrix}, \quad N_a = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}a^2 & -a & \frac{1}{2}a^2 \\ a & 1 & -a \\ -\frac{1}{2}a^2 & -a & 1 + \frac{1}{2}a^2 \end{bmatrix},$$

para constantes $\eta, r, a \in \mathbb{R}$. Essa é a versão da decomposição de Iwasawa para $SL_2(\mathbb{R})$ no modelo do hiperboloide. São exemplos, respectivamente, de isometrias elípticas, hiperbólicas (translações) e parabólicas em $\mathbb{H}^2$. Isometrias elípticas são rotações em torno de um ponto fixo em $\mathbb{H}^2$ sem pontos fixos no bordo do infinito. Já elementos hiperbólicos possuem (apenas) dois pontos fixos no infinito, um dele atrator e outro repulsor. Por fim, elementos parabólicos possuem (apenas) um ponto fixo no infinito, sendo ele nem atrator nem repulsor.

As figuras abaixo ilustram, respectivamente, a ação das isometrias elípticas, hiperbólicas e parabólicas definidas acima sobre o hiperboloide $\mathbb{H}^2$. As órbitas geradas por esses subgrupos (indicadas em vermelho) são elipses, hipérboles e parábolas, o que justifica a nomenclatura.



Essa foi nossa breve descrição das isometrias $SL_2(\mathbb{R})$ no modelo do hiperboloide $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$.

Como já mencionamos na construção de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, o grupo $SL_2(\mathbb{R})$ (de dimensão 3) também age por isometrias sobre o fibrado unitário $U\mathbb{H}^2$ e, portanto, se levanta a uma ação sobre $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Note que, como as isometrias de $\mathbb{H}^2$ no modelo do hiperboloide são transformações lineares, elas coincidem com suas respectivas aplicações diferenciais. Assim, se $A \in SL_2(\mathbb{R})$, sua ação sobre $U\mathbb{H}^2$ se dá por

$$A(p, \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2) = (Ap, \cos \theta AE_1 + \sin \theta AE_2).$$

Cada uma dessas isometrias se levanta a uma isometria do recobrimento $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \cong \widetilde{U\mathbb{H}^2}$.

Além dessas, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ possui outro tipo de isometrias mais simples, dadas por translações por uma constante ao longo das fibras. Com isso, temos uma ação de $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ por isometrias em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. De fato, isso fornece toda a componente de $\text{Isom} \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ contendo a identidade (veja por exemplo [Sct]).

Vejamos como se levantam ao recobrimento cada um dos geradores descritos acima. Para isso, precisamos observar como cada uma dessas isometrias “gira” os círculos do fibrado unitário $U\mathbb{H}^2$. Mais precisamente, precisamos descrever como elas agem sobre o referencial ortonormal $\{E_1, E_2\}$ de $\mathbb{H}^2$ dado em coordenadas cartesianas por

$$E_1(x, y, z) = \left(\frac{x^2 + z + 1}{z + 1}, \frac{xy}{z + 1}, x \right), \quad E_2(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z + 1}, \frac{y^2 + z + 1}{z + 1}, y \right).$$

Começamos analisando os elementos elípticos. Denotando $p = (x, y, z)$, temos por um lado

$$K_\eta E_1(p) = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x^2+z+1}{z+1} \\ \frac{xy}{z+1} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x^2+z+1) \cos \eta + xy \sin \eta}{z+1} \\ \frac{xy \cos \eta - (x^2+z+1) \sin \eta}{z+1} \\ x \end{bmatrix},$$

$$K_\eta E_2(p) = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{xy}{z+1} \\ \frac{y^2+z+1}{z+1} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(y^2+z+1) \sin \eta + xy \cos \eta}{z+1} \\ \frac{(y^2+z+1) \cos \eta - xy \sin \eta}{z+1} \\ y \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 K_\eta p &= \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \eta + y \sin \eta \\ y \cos \eta - x \sin \eta \\ z \end{bmatrix}, \\
 \implies E_1(K_\eta p) &= \begin{bmatrix} \frac{(x \cos \eta + y \sin \eta)^2 + z + 1}{z + 1} \\ \frac{(x \cos \eta + y \sin \eta)(y \cos \eta - x \sin \eta)}{z + 1} \\ x \cos \eta + y \sin \eta \end{bmatrix}, \\
 \implies E_2(K_\eta p) &= \begin{bmatrix} \frac{(x \cos \eta + y \sin \eta)(y \cos \eta - x \sin \eta)}{z + 1} \\ \frac{(y \cos \eta - x \sin \eta)^2 + z + 1}{z + 1} \\ y \cos \eta - x \sin \eta \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Fazendo as contas, sempre usando as relações adivindas de $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, obteremos

$$\begin{aligned}
 q(K_\eta E_1, E_1 K_\eta) &= \cos \eta, & q(K_\eta E_1, E_2 K_\eta) &= -\sin \eta, \\
 q(K_\eta E_2, E_1 K_\eta) &= \sin \eta, & q(K_\eta E_2, E_2 K_\eta) &= \cos \eta.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 K_\eta E_1 &= \cos \eta E_1 - \sin \eta E_2, \\
 K_\eta E_2 &= \sin \eta E_1 + \cos \eta E_2.
 \end{aligned}$$

Isso mostra que K_η age sobre o círculo tangente unitário de maneira uniforme em toda a base $\mathbb{H}^2$, por uma rotação de $-\eta$. Assim, um levantamento natural para K_η é dado por

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_\eta : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} &\rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}, \\
 \tilde{K}_\eta(p, \theta) &= (K_\eta p, \theta - \eta).
 \end{aligned}$$

De fato, temos $\Upsilon \circ \tilde{K}_\eta(p, \theta) = K_\eta \circ \Upsilon(p, \theta)$:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon \circ \tilde{K}_\eta(p, \theta) &= \Upsilon(K_\eta p, \theta - \eta) \\
 &= (K_\eta p, \cos(\theta - \eta) E_1 + \sin(\theta - \eta) E_2) \\
 &= (K_\eta p, (\cos \theta (\cos \eta E_1 - \sin \eta E_2) + \sin \theta (\sin \eta E_1 + \cos \eta E_2))) \\
 &= (K_\eta p, \cos \theta K_\eta E_1 + \sin \theta K_\eta E_2) \\
 &= (K_\eta p, K_\eta (\cos \theta E_1 + \sin \theta E_2)) \\
 &= K_\eta(p, \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2) = K_\eta \circ \Upsilon(p, \theta).
 \end{aligned}$$

Quanto aos geradores hiperbólicos, através de cálculos análogos, obtemos

$$\begin{aligned}
 q(A_r E_1, E_1 A_r) &= q(A_r E_2, E_2 A_r) \\
 &= \frac{(z - x^2 + z^2) \cosh r + y(z + 1) \sinh r + z + x^2 + 1}{(z + 1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)}, \\
 q(A_r E_1, E_2 A_r) &= -q(A_r E_2, E_1 A_r) \\
 &= \frac{x(y(\cosh r - 1) + (\sinh r)(z + 1))}{(z + 1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)}.
 \end{aligned}$$

Assim, podemos definir uma aplicação $\Theta_r : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que associa o ponto (x, y, z) ao par

$$\left(\frac{(z - x^2 + z^2) \cosh r + y(z + 1) \sinh r + z + x^2 + 1}{(z + 1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)}, \frac{x(y(\cosh r - 1) + (\sinh r)(z + 1))}{(z + 1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)} \right).$$

Relembrando do recobrimento universal $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, dado por $\exp(i\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, podemos considerar um levantamento de Θ_r , que denotaremos por $\theta_r : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, existe uma função suave θ_r tal que $\exp \circ \theta_r(x, y, z) = \Theta_r(x, y, z)$. Isso nos permite definir um levantamento de $A_r : U\mathbb{H}^2 \rightarrow U\mathbb{H}^2$ a $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ por meio de

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} &\rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \\ \tilde{A}_r(p, \theta) &= (A_r p, \theta + \theta_r(p)). \end{aligned}$$

De fato, novamente teremos

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta_r)E_1 + \sin(\theta + \theta_r)E_2 &= (\cos \theta \cos \theta_r - \sin \theta \sin \theta_r)E_1 + (\cos \theta \sin \theta_r + \sin \theta \cos \theta_r)E_2 \\ &= \cos \theta (\cos \theta_r E_1 + \sin \theta_r E_2) + \sin \theta (-\sin \theta_r E_1 + \cos \theta_r E_2) \\ &= \cos \theta A_r E_1 + \sin \theta A_r E_2, \end{aligned}$$

e isso garante que $\Upsilon \circ \tilde{A}_r = A_r \circ \Upsilon$.

Quanto aos elementos parabólicos, teremos

$$\begin{aligned} q(N_a E_1, E_1 N_a) &= q(N_a E_2, E_2 N_a) \\ &= \frac{((x-1)(x-z)+1)a^2 + 2y(z+1)a - 2(z+1)^2}{(z+1)(-2z+a^2x-a^2z+2ay-2)}, \\ q(N_a E_1, E_2 N_a) &= -q(N_a E_2, E_1 N_a) \\ &= \frac{a(x-z-1)(-2z+ay-2)}{(z+1)(2z-a^2x+a^2z-2ay+2)}. \end{aligned}$$

Similarmente ao feito acima, definimos $\Theta_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $\theta_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_a : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} &\rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \\ \tilde{N}_a(p, \theta) &= (N_a p, \theta + \theta_a(p)) \end{aligned}$$

satisfaz $\Upsilon \circ \tilde{N}_a = N_a \circ \Upsilon$. Portanto, em resumo, toda isometria $F : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ terá a forma

$$F(p, \theta) = (f(p), \theta + \theta_f(p) + c),$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria e $\theta_f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$Df_p E_1(p) = \cos \theta_f(p) E_1(f(p)) + \sin \theta_f(p) E_2(f(p)).$$

Agora que descrevemos as isometrias de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, voltamos a falar das geodésicas.

Até o momento, temos as geodésicas partindo da origem $((0, 0, 1), 0) \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ com vetor de saída unitário $V = A_0\chi_1 + C_0\chi_3$ em que A_0 e C_0 são ambos positivos. Com uma inversão de sinal no parâmetro da geodésica, obtemos todas as geodésicas com A_0 e C_0 negativos. Quanto aquelas com $A_0 < 0$ e $C_0 > 0$, basta aplicar a isometria que mapeia o ponto $((r, \eta), \theta)$ (em coordenadas polares) no ponto $((r, \eta + \pi), \theta)$. De fato, teremos

$$(\sinh r \cos(\eta + \pi), \sinh r \sin(\eta + \pi), \cosh r) = (-\sinh r \cos \eta, -\sinh r \sin \eta, \cosh r),$$

e portanto, lembrando que a base coordenada $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_\theta\}$ coincide com $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ na origem $O = ((0, 0, 1), 0)$, teremos

$$\begin{aligned} ((-\sinh r \cos \eta, -\sinh r \sin \eta, \cosh r), \theta)'(0) &= (-r'_0 \cosh r_0 \cos \eta_0 + \eta'_0 \sinh r_0 \sin \eta_0) \chi_1 \\ &\quad + (-r'_0 \cosh r_0 \sin \eta_0 - \eta'_0 \sinh r_0 \cos \eta_0) \chi_2 + \theta'_0 \chi_3 \\ &= -A_0 \chi_1 + C_0 \chi_3. \end{aligned}$$

Novamente, trocando o sinal do parâmetro da geodésica obtemos também todas as geodésicas com $A_0 > 0$ e $C_0 < 0$.

Por fim, obteremos as geodésicas na origem com $V = A_0\chi_1 + B_0\chi_2 + C_0\chi_3$ unitário e $B_0 \neq 0$ por meio de rotações.

Denote $\tilde{A}_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} > 0$. Observe que $\tilde{A}_0^2 + C_0^2 = 1$ e que (A_0, B_0) se escreve como $(A_0, B_0) = \tilde{A}_0(\cos s_0, \sin s_0)$, para certo $s_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\gamma = ((r, \eta), \theta)$ a já conhecida geodésica em coordenadas polares satisfazendo $\gamma(0) = ((0, 0, 1), 0)$ e $\gamma'(0) = \tilde{A}_0\chi_1 + C_0\chi_3$. Defina então $\tilde{\gamma}$ por $\tilde{\gamma} = ((r, \eta + s_0), \theta)$. Temos que $\tilde{\gamma}$ é geodésica com $\tilde{\gamma}(0) = ((0, 0, 1), 0)$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(0) &= (r'_0 \cosh r_0 \cos(\eta_0 + s_0) - \eta'_0 \sinh r_0 \cos(\eta_0 + s_0)) \chi_1 \\ &\quad + (r'_0 \cosh r_0 \sin(\eta_0 + s_0) + \eta'_0 \sinh r_0 \cos(\eta_0 + s_0)) \chi_2 + \theta'_0 \chi_3 \\ &= \tilde{A}_0 \cos s_0 \chi_1 + \tilde{A}_0 \sin s_0 \chi_2 + C_0 \chi_3 \\ &= A_0 \chi_1 + B_0 \chi_2 + C_0 \chi_3. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos todas as geodésicas a partir da origem.

Agora podemos obter as geodésicas em qualquer ponto $(p, \theta) \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ aplicando isometrias sobre a origem $((0, 0, 1), 0)$. Para isso, primeiro precisamos observar que a ação do grupo de isometrias sobre $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ é transitiva.

Seja $(p_0, \theta_0) \in \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ um ponto qualquer diferente da origem $O = ((0, 0, 1), 0)$. Escreva p_0 em coordenadas polares como $p_0 = (\sinh r_0 \cos \eta_0, \sinh r_0 \sin \eta_0, \cosh r_0)$, com $r_0 \neq 0$. Considere $\tilde{A}_{r_0}$ um levantamento de A_{r_0} . Um tal levantamento leva a origem O sobre

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{r_0} O &= (A_{r_0}(0, 0, 1), 0 + \theta_{r_0}(0, 0, 1)) \\ &= ((0, \sinh r_0, \cosh r_0), \theta_{r_0}(0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}\Theta_{r_0}(0,0,1) &= \left(\frac{(z-x^2+z^2)\cosh r_0 + y(z+1)\sinh r_0 + z+x^2+1}{(z+1)(z\cosh r_0 + y\sinh r_0 + 1)}, \frac{x(y(\cosh r_0 - 1) + (\sinh r_0)(z+1))}{(z+1)(z\cosh r_0 + y\sinh r_0 + 1)} \right)_{(0,0,1)} \\ &= \left(\frac{(1+1)\cosh r_0 + 1 + 1}{(1+1)(1\cosh r_0 + 1)}, \frac{0}{(1+1)(1\cosh r_0 + 1)} \right) \\ &= (1,0).\end{aligned}$$

Portanto, podemos tomar o levantamento θ_{r_0} de forma que $\theta_{r_0}(0,0,1) = 0$. Aplicando então a isometria dada por $\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}(p, \theta) = \left(K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}p, \theta + \eta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$, temos

$$\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}\tilde{A}_{r_0}O = \left((\sinh r_0 \cos \eta_0, \sinh r_0 \sin \eta_0, \cosh r_0), \eta_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando então a translação T por um ângulo $\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0$ ao longo das fibras, obtemos

$$T_{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0}\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}\tilde{A}_{r_0}O = ((\sinh r_0 \cos \eta_0, \sinh r_0 \sin \eta_0, \cosh r_0), \theta_0) = p_0.$$

Portanto, $F := T_{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0}\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}\tilde{A}_{r_0}$ é uma isometria que leva O em p_0 .

Agora, para falar do vetor inicial da geodésica, vejamos o efeito dessa isometria sobre um vetor $A_0\chi_1 + B_0\chi_2 + C_0\chi_3 \in T_{O\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}}$. Para isso, basta olhar para sua ação sobre a base $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}_O$ na origem, que é dada por

$$\chi_1(O) = ((1,0,0),0), \quad \chi_2(O) = ((0,1,0),0), \quad \chi_3(O) = ((0,0,0),1).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}F(p, \theta) &= T_{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0}\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}\tilde{A}_{r_0}(p, \theta) = T_{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0}\tilde{K}_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}(A_{r_0}p, \theta + \theta_{r_0}(p)) \\ &= T_{\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \eta_0}\left(K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}A_{r_0}p, \theta + \theta_{r_0}(p) + \eta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}A_{r_0}p, \theta + \theta_{r_0}(p) + \theta_0\right).\end{aligned}$$

Tomando $(p(t), \theta(t)) = ((\sinh t, 0, \cosh t), 0)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}A_{r_0}p &= K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0}A_{r_0}(1,0,0) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\eta_0\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh r_0 & \sinh r_0 \\ 0 & \sinh r_0 & \cosh r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \eta_0 \\ -\cos \eta_0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Quanto a $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \theta_{r_0}(p)$, lembrando que Θ_{r_0} é dada por

$$\begin{aligned}\Theta_{r_0}(p) &= (\cos \theta_{r_0}(p), \sin \theta_{r_0}(p)) \\ &= \left(\frac{(z-x^2+z^2)\cosh r_0 + y(z+1)\sinh r_0 + z+x^2+1}{(z+1)(z\cosh r_0 + y\sinh r_0 + 1)}, \frac{x(y(\cosh r_0 - 1) + (\sinh r_0)(z+1))}{(z+1)(z\cosh r_0 + y\sinh r_0 + 1)} \right),\end{aligned}$$

e derivando a coordenada do seno, teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{r_0}(p) \right) \cos \theta_{r_0}(0, 0, 1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{(\sinh t)(\sinh r_0)(\cosh t + 1)}{(\cosh t + 1)(\cosh t \cosh r_0 + 1)} = \frac{\sinh r_0}{\cosh r_0 + 1} \\ \implies \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{r_0}(p) &= \frac{\sinh r_0}{\cosh r_0 + 1}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$DF_O \chi_1 = \left((\sin \eta_0, -\cos \eta_0, 0), \frac{\sinh r_0}{\cosh r_0 + 1} \right)$$

Tomando agora $(p(t), \theta(t)) = ((0, \sinh t, \cosh t), 0)$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0} A_{r_0} p &= \begin{bmatrix} \cosh r_0 \cos \eta_0 \\ \cosh r_0 \sin \eta_0 \\ \sinh r_0 \end{bmatrix}, \\ \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{r_0}(p) \right) \cos \theta_{r_0}(0, 0, 1) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{0(\sinh t(\cosh r_0 - 1) + (\sinh r_0)(\cosh t + 1))}{(\cosh t + 1)(\cosh t \cosh r_0 + \sinh t \sinh r_0 + 1)} = 0, \\ \implies \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{r_0}(p) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$DF_O \chi_2 = ((\cosh r_0 \cos \eta_0, \cosh r_0 \sin \eta_0, \sinh r_0), 0).$$

Por fim, tomando $(p(t), \theta(t)) = ((0, 0, 1), t)$,

$$DF_O \chi_3 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0} A_{r_0}(0, 0, 1), t + \theta_{r_0}(0, 0, 1) + \theta_0 \right) = (0, 1).$$

Por outro lado, a base $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}_{F(O)}$ no ponto $F(O)$, é dada por

$$\begin{aligned} \chi_1(F(O)) &= \left(\left(\frac{(\sinh r_0 \cos \eta_0)^2}{\cosh r_0 + 1} + 1, \frac{\sinh^2 r_0 \cos \eta_0 \sin \eta_0}{\cosh r_0 + 1}, \sinh r_0 \cos \eta_0 \right), \frac{\sinh r_0 \sin \eta_0}{\cosh r_0 + 1} \right), \\ \chi_2(F(O)) &= \left(\left(\frac{\sinh^2 r_0 \cos \eta_0 \sin \eta_0}{\cosh r_0 + 1}, \frac{(\sinh r_0 \sin \eta_0)^2}{\cosh r_0 + 1} + 1, \sinh r_0 \sin \eta_0 \right), -\frac{\sinh r_0 \cos \eta_0}{\cosh r_0 + 1} \right), \\ \chi_3(F(O)) &= (0, 1). \end{aligned}$$

Usando a métrica g de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ e fazendo todos os cálculos, obteremos

$$\begin{aligned} g(DF_O \chi_1, \chi_1(F(O))) &= \sin \eta_0, & g(DF_O \chi_1, \chi_2(F(O))) &= -\cos \eta_0, \\ g(DF_O \chi_2, \chi_1(F(O))) &= \cos \eta_0, & g(DF_O \chi_2, \chi_2(F(O))) &= \sin \eta_0, \\ g(DF_O \chi_3, \chi_3(F(O))) &= g(\chi_3, \chi_3) = 1. \end{aligned}$$

Como $DF_O\chi_i$ são unitários (F é isometria, χ_i é ortonormal), isso implica que,

$$DF_O\chi_1 = (\sin \eta_0) \chi_1 - (\cos \eta_0) \chi_2,$$

$$DF_O\chi_2 = (\cos \eta_0) \chi_1 + (\sin \eta_0) \chi_2,$$

$$DF_O\chi_3 = \chi_3.$$

Ou, matricialmente segundo o referencial $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$, temos

$$DF_O = \begin{bmatrix} \sin \eta_0 & \cos \eta_0 & 0 \\ -\cos \eta_0 & \sin \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, se quisermos que a geodésica partindo de (p_0, θ_0) possua vetor inicial dado por $A_0\chi_1 + B_0\chi_2 + C_0\chi_3 \in T_{(p_0, \theta_0)}\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, basta tomar o vetor na origem O com coordenadas em χ_i dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sin \eta_0 & \cos \eta_0 & 0 \\ -\cos \eta_0 & \sin \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \eta_0 & -\cos \eta_0 & 0 \\ \cos \eta_0 & \sin \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_0 \sin \eta_0 - B_0 \cos \eta_0 \\ A_0 \cos \eta_0 + B_0 \sin \eta_0 \\ C_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, encerramos a construção do nosso modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$.

4.2 Superfícies regradas em $U\mathbb{H}^2$

Na seção anterior, construímos em detalhes um modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ que é localmente isométrico ao fibrado unitário $U\mathbb{H}^2$, via aplicação de recobrimento. Trabalhar em $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ envolve trabalhar com levantamentos de funções ângulo e complica os cálculos desnecessariamente. Por isso, iremos estudar alguns casos de superfícies regradas no espaço base $U\mathbb{H}^2$.

Antes, façamos uma breve descrição do nosso modelo, listando as principais informações descritas na seção anterior.

Espaço de Lorentz: $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, q)$, sendo

$$q((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) := x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

Plano hiperbólico: $(\mathbb{H}^2, q)$, sendo

$$\mathbb{H}^2 := \{p \in \mathbb{R}^{2,1} : q(p, p) = -1\},$$

$$T_p\mathbb{H}^2 := \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : q(p, v) = 0\}.$$

Referencial ortonormal sobre $\mathbb{H}^2$:

$$E_1(x, y, z) = \left(1 + \frac{x^2}{z+1}, \frac{xy}{z+1}, x\right), \quad E_2(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z+1}, 1 + \frac{y^2}{z+1}, y\right).$$

As isometrias de $\mathbb{H}^2$ (que preservam orientação) são geradas por:

$$K_\eta = \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh r & \sinh r \\ 0 & \sinh r & \cosh r \end{bmatrix}, \quad N_a = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}a^2 & -a & \frac{1}{2}a^2 \\ a & 1 & -a \\ -\frac{1}{2}a^2 & -a & 1 + \frac{1}{2}a^2 \end{bmatrix},$$

para quaisquer constantes $\eta, r, a \in \mathbb{R}$.

Modelo para $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$: $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$, sendo g a métrica riemanniana dada por

$$g_{(p, \theta)}((u_1, r_1), (u_2, r_2)) = q(u_1, u_2) + \left(r_1 + \frac{xb_1 - ya_1}{z+1}\right) \left(r_2 + \frac{xb_2 - ya_2}{z+1}\right),$$

$$p = (x, y, z) \in \mathbb{H}^2, \quad u_i = (a_i, b_i, c_i) \in T_p \mathbb{H}^2, \quad r_i \in T_\theta \mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

Referencial ortonormal em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$:

$$\chi_1(p, \theta) = \left(E_1(p), \frac{y}{z+1}\right), \quad \chi_2(p, \theta) = \left(E_2(p), -\frac{x}{z+1}\right), \quad \chi_3(p, \theta) = (\vec{0}, 1).$$

Conexão de Levi-Civita com respeito ao referencial χ_i :

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\chi_1} \chi_1 & \nabla_{\chi_1} \chi_2 & \nabla_{\chi_1} \chi_3 \\ \nabla_{\chi_2} \chi_1 & \nabla_{\chi_2} \chi_2 & \nabla_{\chi_2} \chi_3 \\ \nabla_{\chi_3} \chi_1 & \nabla_{\chi_3} \chi_2 & \nabla_{\chi_3} \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{z+1} \chi_2 & \frac{y}{z+1} \chi_1 - \frac{1}{2} \chi_3 & \frac{1}{2} \chi_2 \\ \frac{x}{z+1} \chi_2 + \frac{1}{2} \chi_3 & -\frac{x}{z+1} \chi_1 & -\frac{1}{2} \chi_1 \\ \frac{1}{2} \chi_2 & -\frac{1}{2} \chi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Isometrias de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ na componente da identidade: são composições de elementos $T_w, \tilde{K}_\eta, \tilde{A}_r, \tilde{N}_a$: $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ da forma

$$T_w(p, \theta) = (p, \theta + w),$$

$$\tilde{K}_\eta(p, \theta) = (K_\eta p, \theta - \eta),$$

$$\tilde{A}_r(p, \theta) = (A_r p, \theta + \theta_r(p)),$$

$$\tilde{N}_a(p, \theta) = (A_r p, \theta + \theta_a(p)),$$

sendo $\theta_r, \theta_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções satisfazendo

$$\exp(i\theta_r(p)) = \left(\frac{(z-x^2+z^2) \cosh r + y(z+1) \sinh r + z + x^2 + 1}{(z+1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)}, \frac{x(y(\cosh r - 1) + (\sinh r)(z+1))}{(z+1)(z \cosh r + y \sinh r + 1)} \right),$$

$$\exp(i\theta_a(p)) = \left(\frac{((x-1)(x-z)+1)a^2 + 2y(z+1)a - 2(z+1)^2}{(z+1)(-2z+a^2x-a^2z+2ay-2)}, \frac{a(x-z-1)(-2z+ay-2)}{(z+1)(2z-a^2x+a^2z-2ay+2)} \right).$$

Geodésica $\gamma : I \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ a partir da origem:

$$\gamma(t) = ((\sinh r(t) \cos \eta(t), \sinh r(t) \sin \eta(t), \cosh r(t)), \theta(t)),$$

$$\gamma(0) = O = ((0, 0, 1), 0),$$

$$\gamma'(0) = (\cos \alpha \cos \beta) \chi_1 + (\cos \alpha \sin \beta) \chi_2 + (\sin \alpha) \chi_3, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- **Tipo espaço.** $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \iff \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha > 0$:

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \sinh \left(\sqrt{\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right), \\ \eta(t) &= \beta - \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \tanh \left(\sqrt{\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right), \\ \theta(t) &= 2(\sin \alpha)t + 2\eta(t) - 2\beta. \end{aligned}$$

- **Tipo luz.** $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} \iff \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$:

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right), \\ \eta(t) &= \beta - \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{2}}{4} t \right), \\ \theta(t) &= \pm \sqrt{2}t + 2\eta(t) - 2\beta. \end{aligned}$$

- **Tipo tempo.** $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \iff \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha < 0$:

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \sinh \left(\sqrt{-\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right), \\ \eta(t) &= \beta - \tan^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \tanh \left(\sqrt{-\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right), \\ \theta(t) &= 2(\sin \alpha)t + 2\eta(t) - 2\beta. \end{aligned}$$

Isometria que leva O a P_0 : $F_{P_0} : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ **dada por**

$$F_{P_0}(p, \theta) = (K_{\frac{\pi}{2}-\eta_0} A_{r_0} p, \theta + \theta_{r_0}(p) + \theta_0),$$

sendo $P_0 = ((\sinh r_0 \cos \eta_0, \sinh r_0 \sin \eta_0, \cosh r_0), \theta_0)$ e $\theta_{r_0} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\exp(i\theta_{r_0}(p)) = \left(\frac{(z-x^2+z^2) \cosh r_0 + y(z+1) \sinh r_0 + z+x^2+1}{(z+1)(z \cosh r_0 + y \sinh r_0 + 1)}, \frac{x(y(\cosh r_0 - 1) + (\sinh r_0)(z+1))}{(z+1)(z \cosh r_0 + y \sinh r_0 + 1)} \right),$$

com $\theta_{r_0}(0,0,1) = 0$. Essa isometria leva o vetor tangente em O dado por $A_0\chi_1 + B_0\chi_2 + C_0\chi_3$ sobre o vetor tangente em $F_P(O) = P_0$ dado por

$$D(F_P)_O \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix}_{\chi_i(O)} = \begin{bmatrix} \sin \eta_0 & \cos \eta_0 & 0 \\ -\cos \eta_0 & \sin \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix}_{\chi_i(O)} = \begin{bmatrix} B_0 \cos \eta_0 + A_0 \sin \eta_0 \\ B_0 \sin \eta_0 - A_0 \cos \eta_0 \\ C_0 \end{bmatrix}_{\chi_i(P_0)}.$$

Agora voltamos nossa atenção para o espaço recoberto $U\mathbb{H}^2$. Primeiro, recordemos que

$$U\mathbb{H}^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^{2,1} : q(p, p) = -1, q(p, v) = 0, q(v, v) = 1\}.$$

Usando essas relações, é possível mostrar que o espaço tangente a $U\mathbb{H}^2$ é descrito por

$$T(U\mathbb{H}^2) = \{((p, v), (u, w)) \in U\mathbb{H}^2 \times (\mathbb{R}^{2,1})^2 : q(p, u) = 0, q(u, v) + q(p, w) = 0, q(v, w) = 0\}.$$

Se retomarmos a definição da métrica em $U\mathbb{H}^2$, obteremos

$$g_{(p,v)}((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = q(u_1, u_2) + q(w_1, w_2) + q(p, w_1)q(p, w_2).$$

Essa descrição nos permite definir um referencial ortonormal em $U\mathbb{H}^2$ mais “livre de coordenadas” do que aqueles que viemos trabalhando anteriormente. Trata-se do referencial

$$\varepsilon_1(p, v) := (v, p), \quad \varepsilon_2(p, v) := (p \times v, 0), \quad \varepsilon_3(p, v) := (0, p \times v).$$

Cálculos enfadonhos, embora elementares, nos mostram que o colchete de Lie é dado nesse referencial por

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2] = -\varepsilon_3, \quad [\varepsilon_1, \varepsilon_3] = -\varepsilon_2, \quad [\varepsilon_2, \varepsilon_3] = \varepsilon_1.$$

Utilizando a fórmula de Koszul para referenciais ortonormais, após os cálculos obtemos a conexão de Levi-Civita neste referencial:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon_1} \varepsilon_1 & \nabla_{\varepsilon_1} \varepsilon_2 & \nabla_{\varepsilon_1} \varepsilon_3 \\ \nabla_{\varepsilon_2} \varepsilon_1 & \nabla_{\varepsilon_2} \varepsilon_2 & \nabla_{\varepsilon_2} \varepsilon_3 \\ \nabla_{\varepsilon_3} \varepsilon_1 & \nabla_{\varepsilon_3} \varepsilon_2 & \nabla_{\varepsilon_3} \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere uma curva $\gamma = (p, v) : \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$. Temos

$$\begin{aligned} g(\gamma', \varepsilon_1) &= q(p', v) + q(v', p) + q(p, v')q(p, p) = q(p', v) =: A, \\ g(\gamma', \varepsilon_2) &= q(p', p \times v) + q(v', 0) + q(p, v')q(p, 0) = q(p', p \times v) =: B, \\ g(\gamma', \varepsilon_3) &= q(p', 0) + q(v', p \times v) + q(p, v')q(p, p \times v) = q(v', p \times v) =: C. \end{aligned}$$

Com essa notação, $\gamma' = A\varepsilon_1 + B\varepsilon_2 + C\varepsilon_3$. Segue que

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= A'\varepsilon_1 + B'\varepsilon_2 + C'\varepsilon_3 + \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= (A' - 2BC)\varepsilon_1 + (B' + 2AC)\varepsilon_2 + C'\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Portanto, γ é geodésica se, e somente se,

$$A' - 2BC = 0,$$

$$B' + 2AC = 0,$$

$$C' = 0.$$

A terceira equação nos diz que $C \equiv C_0$ é constante. As funções A, B devem portanto ser soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2C_0 \\ -2C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Este sistema possui solução geral dada por

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2C_0 t) & \sin(2C_0 t) \\ -\sin(2C_0 t) & \cos(2C_0 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix},$$

para certas constantes A_0, B_0 . De fato,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} -2C_0 \sin 2tC_0 & 2C_0 \cos 2tC_0 \\ -2C_0 \cos 2tC_0 & -2C_0 \sin 2tC_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2C_0 \\ -2C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2C_0 t) & \sin(2C_0 t) \\ -\sin(2C_0 t) & \cos(2C_0 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2C_0 \\ -2C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} q(p', v) &= -q(p, v') = A = A_0 \cos(2C_0 t) + B_0 \sin(2C_0 t), \\ q(p', p \times v) &= B = B_0 \cos(2C_0 t) - A_0 \sin(2C_0 t), \\ q(v', p \times v) &= C = C_0. \end{aligned}$$

Isso significa que a curva (p, v) é geodésica se, e somente se,

$$\begin{aligned} p' &= (A_0 \cos(2C_0 t) + B_0 \sin(2C_0 t))v + (B_0 \cos(2C_0 t) - A_0 \sin(2C_0 t))(p \times v), \\ v' &= (A_0 \cos(2C_0 t) + B_0 \sin(2C_0 t))p + C_0(p \times v). \end{aligned}$$

Agora fazemos uma observação de extrema importância para que possamos trabalhar com superfícies regradas em $U\mathbb{H}^2$. É essa observação que justifica a enorme vantagem em se trabalhar no espaço recoberto ao invés do recobrimento $SL_2(\mathbb{R})$ pois aqui conseguimos uma descrição das geodésicas a partir de qualquer ponto sem a necessidade de “transladar” geodésicas a partir da origem, via uma isometria.

Em $U\mathbb{H}^2$, chamamos de origem o ponto $O = ((0, 0, 1), (1, 0, 0))$.

Proposição 4.1. *Seja $\gamma = (p, v) : \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$ uma geodésica a partir da origem, i.e. com $\gamma(0) = O$. Denote $p = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$. Considere outro ponto em $U\mathbb{H}^2$, digamos, $P_0 = (p_0, v_0)$. Se $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$ é definida por*

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t)v_0 + y(t)(p_0 \times v_0) + z(t)p_0, a(t)v_0 + b(t)(p_0 \times v_0) + c(t)p_0),$$

então $\tilde{\gamma}$ é geodésica com $\tilde{\gamma}(0) = P_0$. Além disso, se $\gamma'(0) = A_0\epsilon_1(O) + B_0\epsilon_2(O) + C_0\epsilon_3(O)$, então $\tilde{\gamma}'(0) = A_0\epsilon_1(P_0) + B_0\epsilon_2(P_0) + C_0\epsilon_3(P_0)$.

Demonstração. Basta fazer a verificação direta, utilizando a conexão no referencial ε_i e as propriedades do produto vetorial de assinatura $(2, 1)$ em $\mathbb{R}^{2,1}$. $\square$

Portanto, basta conhecer as geodésicas na origem.

Recuperemos portanto o referencial em $U\mathbb{H}^2$ associado ao referencial χ_i em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, para que possamos utilizar as soluções já encontradas. Este será o referencial definido por

$$\begin{aligned} X_1 &:= D\Upsilon_{(p,\theta)}\chi_1 = (E_1, (\cos \theta) p) \\ X_2 &:= D\Upsilon_{(p,\theta)}\chi_2 = (E_2, (\sin \theta) p), \\ X_3 &:= D\Upsilon_{(p,\theta)}\chi_3 = (0, -\sin \theta E_1 + \cos \theta E_2) \end{aligned}$$

sendo θ o ângulo medido no referencial E_i , ou seja, se $v = (\cos \theta) E_1 + (\sin \theta) E_2$, então

$$\begin{aligned} X_1(p, v) &= (E_1, (\cos \theta) p), \\ X_2(p, v) &= (E_2, (\sin \theta) p), \\ X_3(p, v) &= (0, -\sin \theta E_1 + \cos \theta E_2). \end{aligned}$$

Suponha que $\gamma = (p, v)$ seja uma geodésica com $\gamma(0) = O$. Escreva γ em coordenadas polares hiperbólicas a partir da origem, i.e.

$$\gamma = ((\sinh r \cos \eta, \sinh r \sin \eta, \cosh r), \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2),$$

com $r(0) = 0$ e $\theta(0) = 0$. É possível mostrar que as funções r, η, θ satisfazem, como esperado, o mesmo sistema que satisfaziam em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, com a vantagem adicional de conhecermos o sistema de primeira ordem (antes tínhamos apenas um sistema de segunda ordem) satisfeito por elas. A saber, esse sistema é dado por

$$\begin{aligned} r' &= A_0 \cos(\theta - \eta - 2tC_0), \\ \eta' \sinh r &= A_0 \sin(\theta - \eta - 2tC_0), \\ \theta' + \eta' (\cosh r - 1) &= C_0, \end{aligned}$$

sendo A_0, B_0, C_0 as respectivas condições iniciais dadas pelo vetor tangente em O com $B_0 = 0$. Com isso, podemos reutilizar as soluções já encontradas. Lembramos que, para $B_0 \neq 0$, basta aplicar uma rotação adequada em torno da origem de $\mathbb{H}^2$, o que equivale a somar uma constante à função η .

Sumarizando, a geodésica $\gamma = (p, v) : \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$ com $\gamma(0) = (p_0, v_0)$ e $\gamma'(0) = (\cos \alpha \cos \beta) \varepsilon_1 +$

$(\cos \alpha \sin \beta) \varepsilon_2 + (\sin \alpha) \varepsilon_3$ é dada por

$$\begin{aligned} p &= xv_0 + y(p_0 \times v_0) + zp_0, \\ v &= av_0 + b(p_0 \times v_0) + cp_0, \text{ sendo} \\ x &:= \sinh r \cos(\beta + \eta), \\ y &:= \sinh r \sin(\beta + \eta), \\ z &:= \cosh r, \\ a &:= (\cos \theta) \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) + (\sin \theta) \frac{xy}{z+1}, \\ b &:= (\cos \theta) \frac{xy}{z+1} + (\sin \theta) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right), \\ c &:= (\cos \theta)x + (\sin \theta)y, \end{aligned}$$

sendo r, η, θ as funções definidas anteriormente, respeitando cada caso em que a condição inicial é do tipo espaço, tipo luz ou tipo tempo.

Com essa descrição das geodésicas, uma superfície regrada em $U\mathbb{H}^2$ de curva base $P = (p, v) : I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ e curva direcional $V = \cos \alpha \cos \beta \varepsilon_1 + \cos \alpha \sin \beta \varepsilon_2 + \sin \alpha \varepsilon_3$, com $\alpha : I \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow U\mathbb{H}^2$ definida por

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} x(s, t)v(s) + y(s, t)(p \times v)(s) + z(s, t)p(s) \\ a(s, t)v(s) + b(s, t)(p \times v)(s) + c(s, t)p(s) \end{bmatrix},$$

sendo x, y, z, a, b, c definidas como acima mas agora com as condições iniciais variando com $s \in I$.

Denotando por $k, m, n : I \rightarrow \mathbb{R}$ as funções tais que

$$(p, v)' = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + n\varepsilon_3,$$

a condição de ortogonalidade é expressa por

$$0 = g(P', V) = k \cos \alpha \cos \beta + m \cos \alpha \sin \beta + n \sin \alpha.$$

Isso nos fornece expressões explícitas para superfícies regradas em $U\mathbb{H}^2$. Observe que, ao invés da usual divisão entre superfícies verticais, horizontais e oblíquas, neste caso temos uma divisão natural entre superfícies regradas do tipo tempo, tipo luz e tipo espaço. Contudo, esses casos com “condição aberta” (como o do tipo espaço e tipo tempo), tem se mostrado de difícil acesso, pois as expressões, mesmo para os vetores tangentes, ficam muito grandes. Por ora, estudamos alguns casos embrionários com condição fechada, como o caso das verticais e horizontais.

4.2.1 Verticais

Sem perda de generalidade, este corresponde ao caso $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$. Este é um caso particular do tipo tempo, com

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{-\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right) \equiv 0, \\ \eta(t) &= -\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \tan \left(\sqrt{-\cos 2\alpha} \frac{t}{2} \right) \right) = -\tan^{-1} \left(\tan \frac{1}{2} t \right) = -\frac{1}{2} t, \\ \theta(t) &= 2(\operatorname{sen} \alpha) t + 2\eta(t) = 2 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) t + 2 \left(-\frac{1}{2} t \right) = t, \\ x &= \sinh r \cos(\beta + \eta) = 0, \\ y &= \sinh r \operatorname{sen}(\beta + \eta) = 0, \\ z &= \cosh r = 1, \\ a &= (\cos \theta) \left(1 + \frac{x^2}{z+1} \right) + (\operatorname{sen} \theta) \frac{xy}{z+1} = \cos t, \\ b &= (\cos \theta) \frac{xy}{z+1} + (\operatorname{sen} \theta) \left(1 + \frac{y^2}{z+1} \right) = \operatorname{sen} t, \\ c &= (\cos \theta)x + (\operatorname{sen} \theta)y = 0. \end{aligned}$$

A condição de ortogonalidade se reduz a

$$0 = g(P', V) = k \cos \alpha \cos \beta + m \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + n \operatorname{sen} \alpha = n.$$

Portanto, a curva base $P = (p, v)$ deve ser tal que

$$\begin{aligned} P' &= (p', v') = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + n\varepsilon_3 = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 = k(v, p) + m(p \times v, 0) \\ &= (kv + m(p \times v), kp). \end{aligned}$$

Segue daí também que

$$(p \times v') = p' \times v + p \times v' = (kv + m(p \times v)) \times v + p \times kp = m(p \times v) \times v = mp.$$

A superfície é dada por

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} xv + y(p \times v) + zp \\ av + b(p \times v) + cp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(s) \\ (\cos t)v(s) + (\operatorname{sen} t)(p \times v)(s) \end{bmatrix}.$$

Os vetores tangentes são dados por

$$\begin{aligned} \phi_s &= \begin{bmatrix} p' \\ (\cos t)v' + (\operatorname{sen} t)(p \times v)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv + m(p \times v) \\ (\cos t)kp + (\operatorname{sen} t)mp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv + m(p \times v) \\ (k \cos t + m \operatorname{sen} t)p \end{bmatrix}, \\ \phi_t &= \begin{bmatrix} 0 \\ (-\operatorname{sen} t)v + (\cos t)(p \times v) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O referencial ε_i ao longo de ϕ é dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} (\text{cost})v + (\text{sent})(p \times v) \\ p \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} p \times ((\text{cost})v + (\text{sent})(p \times v)) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

As coordenadas dos vetores tangentes no referencial ε_i são dadas por

$$\begin{aligned}g(\phi_s, \varepsilon_1) &= q(kv + m(p \times v), (\text{cost})v + (\text{sent})(p \times v)) \\ &\quad + q((k\text{cost} + m\text{sent})p, p) + q(p, (k\text{cost} + m\text{sent})p)q(p, p) \\ &= q(kv + m(p \times v), (\text{cost})v + (\text{sent})(p \times v)) \\ &= k\text{cost} + m\text{sent} \\ g(\phi_s, \varepsilon_2) &= q(kv + m(p \times v), (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &\quad + q((k\text{cost} + m\text{sent})p, 0) + q(p, (k\text{cost} + m\text{sent})p)q(p, 0) \\ &= q(kv + m(p \times v), (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &= -k\text{sent} + m\text{cost}, \\ g(\phi_s, \varepsilon_3) &= q(kv + m(p \times v), 0) + q((k\text{cost} + m\text{sent})p, (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &\quad + q(p, (k\text{cost} + m\text{sent})p)q(p, (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &= 0, \\ g(\phi_t, \varepsilon_1) &= q(0, (\text{cost})v + (\text{sent})(p \times v)) + q((-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v), p) \\ &\quad + q(p, (-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v))q(p, p) \\ &= 0, \\ g(\phi_t, \varepsilon_2) &= q(0, (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) + q((-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v), 0) \\ &\quad + q(p, (-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v))q(p, 0) \\ &= 0, \\ g(\phi_t, \varepsilon_3) &= q(0, 0) + q((-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v), (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &\quad + q(p, (-\text{sent})v + (\text{cost})(p \times v))q(p, (\text{cost})(p \times v) - (\text{sent})v) \\ &= (\text{sent})^2 + (\text{cost})^2 = 1.\end{aligned}$$

Portanto, os vetores tangentes são dados no referencial ε_i por

$$\begin{aligned}\phi_s &= (k\text{cost} + m\text{sent})\varepsilon_1 + (-k\text{sent} + m\text{cost})\varepsilon_2, \\ \phi_t &= \varepsilon_3.\end{aligned}$$

O campo normal ao longo de ϕ é dado por

$$\begin{aligned}\phi_s \times \phi_t &= \det \begin{bmatrix} k \cos t + m \sin t & -k \sin t + m \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \\ &= (m \cos t - k \sin t) \varepsilon_1 + (-k \cos t - m \sin t) \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Temos

$$|\phi_s \times \phi_t|^2 = (m \cos t - k \sin t)^2 + (-k \cos t - m \sin t)^2 = k^2 + m^2.$$

Assim, para que ϕ seja imersão (ou mesmo para que ϕ satisfaça a condição usual de tolerância a pontos de não imersão) é necessário e suficiente que $(k, m) \neq (0, 0)$ sobre I . Em outras palavras, devemos ter que $(p, v)' = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 \neq \vec{0}$, i.e. a curva base $(p, v) : I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ deve ser regular. Sem perda de generalidade, podemos supor portanto que (p, v) está parametrizada pelo comprimento de arco de $U\mathbb{H}^2$. Assim, podemos escrever $(k, m) = (\cos \delta, \sin \delta)$ para certa função $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sob essa hipótese, temos o campo normal unitário ao longo de ϕ dado por

$$\begin{aligned}N &= \phi_s \times \phi_t = ((\sin \delta) \cos t - (\cos \delta) \sin t) \varepsilon_1 + (-(\cos \delta) \cos t - (\sin \delta) \sin t) \varepsilon_2 \\ &= \sin(\delta - t) \varepsilon_1 - \cos(\delta - t) \varepsilon_2\end{aligned}$$

As derivadas covariantes são dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s} \phi_s &= (\cos(\delta - t))_s \varepsilon_1 + (\sin(\delta - t))_s \varepsilon_2 + \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &= (-\delta' \sin(\delta - t)) \varepsilon_1 + (\delta' \cos(\delta - t)) \varepsilon_2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &= \delta' (-\sin(\delta - t) \varepsilon_1 + \cos(\delta - t) \varepsilon_2), \\ \nabla_{\phi_t} \phi_s &= (\cos(\delta - t))_t \varepsilon_1 + (\sin(\delta - t))_t \varepsilon_2 + \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (\sin(\delta - t)) \varepsilon_1 + (-\cos(\delta - t)) \varepsilon_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\delta - t) \\ \sin(\delta - t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \sin(\delta - t) \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cos(\delta - t) \varepsilon_2, \\ \nabla_{\phi_t} \phi_t &= 1_t \varepsilon_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$\begin{aligned}
 E &= g(\phi_s, \phi_s) = \cos^2(\delta - t) + \sin^2(\delta - t) = 1, \\
 F &= g(\phi_s, \phi_t) = 0, \\
 G &= g(\phi_t, \phi_t) = 1, \\
 e &= g(\nabla_{\phi_s} \phi_s, N) = g(\delta'(-\sin(\delta - t)\epsilon_1 + \cos(\delta - t)\epsilon_2), \sin(\delta - t)\epsilon_1 - \cos(\delta - t)\epsilon_2), \\
 &= \delta'(-\sin^2(\delta - t) - \cos^2(\delta - t)) = -\delta', \\
 f &= g(\nabla_{\phi_t} \phi_s, N) = g\left(-\frac{1}{2}\sin(\delta - t)\epsilon_1 + \frac{1}{2}\cos(\delta - t)\epsilon_2, \sin(\delta - t)\epsilon_1 - \cos(\delta - t)\epsilon_2\right) \\
 &= -\frac{1}{2}\sin^2(\delta - t) - \frac{1}{2}\cos^2(\delta - t) = -\frac{1}{2}, \\
 g &= g(\nabla_{\phi_t} \phi_t, N) = 0
 \end{aligned}$$

Segue daí que as curvaturas média e gaussiana são dadas por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4}, \quad H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{-\delta'}{2}.$$

Com isso provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Superfícies regradas do tipo vertical em $U\mathbb{H}^2$ são de Weingarten com $K = -\frac{1}{4}$. Além disso, uma tal superfície possui curvatura média constante se, e somente se, a curva base $P: I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ é solução de uma equação da forma*

$$P' = \cos(as + b)\epsilon_1 + \sin(as + b)\epsilon_2,$$

para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Neste caso, a curvatura é dada por $H = -\frac{a}{2}$.

4.2.2 Horizontais

Este é um caso particular das superfícies regradas do tipo espaço em que as geodésicas são todas horizontais. Se $P = (p, v): I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ é a curva base e $V = \cos\alpha\cos\beta\epsilon_1 + \cos\alpha\sin\beta\epsilon_2 + \sin\alpha\epsilon_3$ é a curva direcional, este corresponde ao caso em que $\alpha \equiv 0$ e $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, fazendo $\alpha \equiv 0$ nas respectivas fórmulas, obtemos que as funções r, η, θ são dadas por

$$r(s, t) = t, \quad \eta(s, t) = 0, \quad \theta(s, t) = 0.$$

Consequentemente, as funções x, y, z, a, b, c são dadas por

$$\begin{aligned}
 x &= \sinh t \cos \beta, \quad y = \sinh t \sin \beta, \quad z = \cosh t, \\
 a &= 1 + \frac{x^2}{z+1}, \quad b = \frac{xy}{z+1}, \quad c = x.
 \end{aligned}$$

Se $(p, v)'$ é dada por $(p, v)' = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + n\varepsilon_3$, então a condição de ortogonalidade é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= g(P', V) = k \cos \alpha \cos \beta + m \cos \alpha \sin \beta + n \sin \alpha \\ &= k \cos \beta + m \sin \beta. \end{aligned}$$

Recordemos que a superfície regrada é dada por

$$\phi = \begin{bmatrix} xv + y(p \times v) + zp \\ av + b(p \times v) + cp \end{bmatrix}.$$

Queremos olhar para o referencial ε_i ao longo de ϕ . Para isso, notemos primeiro que

$$\begin{aligned} cy - bz &= xy - \frac{xy}{z+1}z = \frac{xy}{z+1}, \\ az - cx &= \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right)z - xx = \frac{1}{z+1}(-x^2 + z^2 + z) \\ &\quad + \frac{1}{z+1}(-x^2 + 1 + x^2 + y^2 + z) \\ &= 1 + \frac{y^2}{z+1}, \\ ay - bx &= \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right)y - \left(\frac{xy}{z+1}\right)x = y. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} (xv + y(p \times v) + zp) \times (av + b(p \times v) + cp) &= (cy - bz)v + (az - cx)(p \times v) + (ay - bx)p \\ &= \frac{xy}{z+1}v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right)(p \times v) + yp. \end{aligned}$$

Teremos então

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right)v + \frac{xy}{z+1}(p \times v) + xp \\ xv + y(p \times v) + zp \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_2 &= \begin{bmatrix} \frac{xy}{z+1}v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right)(p \times v) + yp \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{xy}{z+1}v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right)(p \times v) + yp \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} x_s &= -\beta' \sinh t \sin \beta = -\beta' y, \\ y_s &= \beta' \sinh t \cos \beta = \beta' x, \\ z_s &= 0, \\ a_s &= \frac{2xx_s}{z+1} = \frac{2x(-\beta' y)}{z+1} = \frac{-2xy\beta'}{z+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_s &= \frac{x_s y + x y_s}{z+1} = \frac{(-\beta' y) y + x (\beta' x)}{z+1} = \frac{x^2 \beta' - y^2 \beta'}{z+1} \\
&\quad + \frac{x^2 - y^2}{z+1} \beta', \\
c_s &= x_s = -\beta' y, \\
p' &= kv + m(p \times v), \\
v' &= kp + n(p \times v), \\
(p \times v)' &= p' \times v + p \times v' \\
&= (kv + m(p \times v)) \times v + p \times (kp + n(p \times v)) \\
&= m((p \times v) \times v) + n(p \times (p \times v)) \\
&\quad + mp - nv.
\end{aligned}$$

O vetor tangente ϕ_s é dado por

$$\begin{aligned}
\phi_s &= \begin{bmatrix} x_s v + x v' + y_s (p \times v) + y (p \times v)' + z_s p + z p' \\ a_s v + a v' + b_s (p \times v) + b (p \times v)' + c_s p + c p' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-\beta' y) v + x (kp + n(p \times v)) + \beta' x (p \times v) + y (mp - nv) + z (kv + m(p \times v)) \\ -\frac{2xy\beta'}{z+1} v + \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) (kp + n(p \times v)) + \left(\frac{x^2 - y^2}{z+1} \beta'\right) (p \times v) + \frac{xy}{z+1} (mp - nv) - \beta' y p + x (kv + m(p \times v)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v) + (kx + my) p \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right) x\right) v + \left(\frac{x^2 - y^2}{z+1} \beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + \left(-y\beta' + k + \frac{kx + my}{z+1} x\right) p \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Segue da condição de ortogonalidade que

$$kx + my = k(\sinh t \cos \beta) + m(\sinh t \sin \beta) = (\sinh t)(k \cos \beta + m \sin \beta) \equiv 0.$$

Portanto, podemos simplificar um pouco ϕ_s , obtendo

$$\phi_s = \begin{bmatrix} (-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v) \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right) x\right) v + \left(\frac{x^2 - y^2}{z+1} \beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
x_t &= \cosh t \cos \beta, \\
y_t &= \cosh t \sin \beta, \\
z_t &= \sinh t, \\
a_t &= \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{(\sinh t \cos \beta)^2}{\cosh t + 1} \right) = \frac{d}{dt} (1 + (\cos^2 \beta) (\cosh t - 1)) \\
&= \cos^2 \beta \sinh t, \\
b_t &= \frac{d}{dt} \left(\frac{(\cos \beta \sin \beta) (\sinh^2 t)}{\cosh t + 1} \right) = \frac{d}{dt} ((\cos \beta \sin \beta) (\cosh t - 1)) \\
&= \cos \beta \sin \beta \sinh t, \\
c_t &= x_t = \cosh t \cos \beta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\phi_t = \begin{bmatrix} (\cosh t \cos \beta) v + (\cosh t \sin \beta) (p \times v) + (\sinh t) p \\ (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \sin \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p \end{bmatrix}.$$

Quanto aos coeficientes no referencial $\mathcal{E}_i$, teremos

$$\begin{aligned} g(\phi_s, \mathcal{E}_1) &= q \left(\begin{array}{c} (-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v), \\ \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) v + \frac{xy}{z+1} (p \times v) + xp \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p, \\ xv + y(p \times v) + zp \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p \end{array} \right) \\ &\quad \cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ xv + y(p \times v) + zp \end{array} \right) \\ &= q \left(\begin{array}{c} (-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v), \\ \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) v + \frac{xy}{z+1} (p \times v) + xp \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p, \\ xv + y(p \times v) + zp \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p \end{array} \right) \\ &\quad \cdot (x^2 + y^2 - z^2) \\ &\quad + q \left((-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v), \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) v + \frac{xy}{z+1} (p \times v) + xp \right) \\ &= (-y\beta' + kz - ny) \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) + (x\beta' + nx + mz) \frac{xy}{z+1} \\ &= zk - y(n + \beta') + xz \frac{kx + my}{z+1} \\ &= zk - y(n + \beta'), \\ g(\phi_s, \mathcal{E}_2) &= q \left(\begin{array}{c} (-y\beta' + kz - ny) v + (x\beta' + nx + mz) (p \times v), \\ \frac{xy}{z+1} v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) (p \times v) + yp \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p, \\ 0 \end{array} \right) \\ &\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x\right) v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx\right) (p \times v) + (-y\beta' + k) p \end{array} \right) \\ &\quad \cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ 0 \end{array} \right) \\ &= (-y\beta' + kz - ny) \frac{xy}{z+1} + (x\beta' + nx + mz) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) \\ &= zm + x(n + \beta') + yz \frac{kx + my}{z+1} \\ &= zm + x(n + \beta'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi_s, \varepsilon_3) &= q \left(\begin{array}{c} (-y\beta' + kz - ny)v + (x\beta' + nx + mz)(p \times v), \\ 0 \end{array} \right) \\
&+ q \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x \right)v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx \right)(p \times v) + (-y\beta' + k)p, \\ \frac{xy}{z+1}v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right)(p \times v) + yp \end{array} \right) \\
&+ q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x \right)v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx \right)(p \times v) + (-y\beta' + k)p \end{array} \right) \\
&\cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \frac{xy}{z+1}v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right)(p \times v) + yp \end{array} \right) \\
&= \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x \right) \frac{xy}{z+1} \\
&+ \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx \right) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) - (-y\beta' + k)y \\
&+ q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x \right)v + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx \right)(p \times v) + (-y\beta' + k)p \end{array} \right) \\
&\cdot y \frac{x^2 + y^2 - z^2 + 1}{z+1} \\
&= \left(-\frac{2xy\beta'}{z+1} + \left(k - \frac{ny}{z+1}\right)x \right) \frac{xy}{z+1} + \left(\frac{x^2-y^2}{z+1}\beta' + n\left(\frac{x^2}{z+1} + 1\right) + mx \right) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) \\
&- (-y\beta' + k)y \\
&= \frac{x^2z + y^2z - x^2y^2 + y^2z^2 + x^2 - y^4}{(z+1)^2} \beta' + xy \frac{kx + my}{z+1} + mx - ky + \frac{z + x^2 + y^2 + 1}{z+1} n \\
&= \frac{x^2 + y^2}{z+1} \beta' + mx - ky + nz \\
&= (z-1)\beta' + mx - ky + nz.
\end{aligned}$$

Quanto aos coeficientes de ϕ_t , temos

$$\begin{aligned}
g(\phi_t, \varepsilon_1) &= q \left(\begin{array}{c} (\cosh t \cos \beta)v + (\cosh t \sen \beta)(p \times v) + (\sinh t)p, \\ \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right)v + \frac{xy}{z+1}(p \times v) + xp \end{array} \right) \\
&+ q \left(\begin{array}{c} (\cos^2 \beta \sinh t)v + (\cos \beta \sen \beta \sinh t)(p \times v) + (\cosh t \cos \beta)p, \\ xv + y(p \times v) + zp \end{array} \right) \\
&+ q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ (\cos^2 \beta \sinh t)v + (\cos \beta \sen \beta \sinh t)(p \times v) + (\cosh t \cos \beta)p \end{array} \right) \\
&\cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ xv + y(p \times v) + zp \end{array} \right) \\
&= (\cosh t \cos \beta) \left(1 + \frac{x^2}{z+1}\right) + (\cosh t \sen \beta) \frac{xy}{z+1} - x(\sinh t) \\
&= (\cosh t \cos \beta) \left(1 + (\cos \beta)^2 \frac{(\sinh t)^2}{\cosh t + 1}\right) \\
&+ (\cosh t \sen \beta) \frac{(\cos \beta \sen \beta)(\sinh t)^2}{\cosh t + 1} - (\cos \beta)(\sinh t)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \beta, \\
g(\phi_t, \varepsilon_2) &= q \left(\begin{array}{c} (\cosh t \cos \beta) v + (\cosh t \operatorname{sen} \beta) (p \times v) + (\sinh t) p, \\ \frac{xy}{z+1} v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) (p \times v) + yp \end{array} \right) \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p, \\ 0 \end{array} \right) \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p \end{array} \right) \\
&\quad \cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ 0 \end{array} \right) \\
&= (\cosh t \cos \beta) \frac{xy}{z+1} + (\cosh t \operatorname{sen} \beta) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) - (\sinh t) y \\
&= (\cosh t \cos \beta) \frac{(\sinh t \cos \beta) (\sinh t \operatorname{sen} \beta)}{\cosh t + 1} \\
&\quad + (\cosh t \operatorname{sen} \beta) \left(1 + \frac{(\sinh t \operatorname{sen} \beta)^2}{\cosh t + 1}\right) - (\sinh t) (\sinh t \operatorname{sen} \beta) \\
&= \operatorname{sen} \beta, \\
g(\phi_t, \varepsilon_3) &= q \left(\begin{array}{c} (\cosh t \cos \beta) v + (\cosh t \operatorname{sen} \beta) (p \times v) + (\sinh t) p, \\ 0 \end{array} \right) \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p, \\ \frac{xy}{z+1} v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) (p \times v) + yp \end{array} \right) \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p \end{array} \right) \\
&\quad \cdot q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ \frac{xy}{z+1} v + \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) (p \times v) + yp \end{array} \right) \\
&= (\cos^2 \beta \sinh t) \frac{xy}{z+1} + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) - (\cosh t \cos \beta) y \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p \end{array} \right) \\
&\quad \cdot \left(x \frac{xy}{z+1} + y \left(1 + \frac{y^2}{z+1}\right) - zy \right) \\
&= (\cos^2 \beta \sinh t) \frac{(\sinh t \cos \beta) (\sinh t \operatorname{sen} \beta)}{\cosh t + 1} \\
&\quad + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) \left(1 + \frac{(\sinh t \operatorname{sen} \beta)^2}{\cosh t + 1}\right) - (\cosh t \cos \beta) (\sinh t \operatorname{sen} \beta) \\
&\quad + q \left(\begin{array}{c} xv + y(p \times v) + zp, \\ (\cos^2 \beta \sinh t) v + (\cos \beta \operatorname{sen} \beta \sinh t) (p \times v) + (\cosh t \cos \beta) p \end{array} \right) \\
&\quad \cdot y \frac{x^2 + y^2 - z^2 + 1}{z+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, denotando por simplicidade $C = \cosh t$, $S = \sinh t$, $\kappa = \cos \beta$, $\sigma = \sin \beta$, temos

$$\begin{aligned}\phi_s &= (Ck - S\sigma(n + \beta'))\varepsilon_1 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))\varepsilon_2 \\ &\quad + ((C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)\varepsilon_3, \\ \phi_t &= \kappa\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2.\end{aligned}$$

O campo normal é dado por

$$\begin{aligned}\phi_s \times \phi_t &= \det \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') & Cm + S\kappa(n + \beta') & (C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC \\ \kappa & \sigma & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \\ &= \sigma(\beta'(1 - C) - Cn + Sk\sigma - Sm\kappa)\varepsilon_1 + \kappa(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)\varepsilon_2 \\ &\quad + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)\varepsilon_3.\end{aligned}$$

A condição de imersão é dada por

$$\begin{aligned}0 \neq |\phi_s \times \phi_t|^2 &= \sigma^2(\beta'(1 - C) - Cn + Sk\sigma - Sm\kappa)^2 + \kappa^2(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)^2 \\ &\quad + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)^2 \\ &= (\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)^2 + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)^2.\end{aligned}$$

Quanto às derivadas covariantes, temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s}\phi_s &= (Ck - S\sigma(n + \beta'))_s\varepsilon_1 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))_s\varepsilon_2 \\ &\quad + ((C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)_s\varepsilon_3 \\ &\quad + \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix}^T \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix} \\ &= (Ck' - S\kappa\beta'(n + \beta') - S\sigma(n' + \beta''))\varepsilon_1 \\ &\quad + (Cm' - S\sigma\beta'(n + \beta') + S\kappa(n' + \beta''))\varepsilon_2 \\ &\quad + ((C - 1)\beta'' + m'S\kappa + mS(-\beta'\sigma) - k'S\sigma - kS(\beta'\kappa) + n'C)\varepsilon_3 \\ &\quad + \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix}^T \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ck' - 2(Cm + Sn\kappa + S\kappa\beta') \\ \cdot (\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) - S\sigma(n' + \beta'') - S\kappa\beta'(n + \beta') \end{pmatrix} \varepsilon_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{aligned} & Ck' + 2(Ck - Sn\sigma - S\sigma\beta') \\ & \cdot (\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) + S\kappa(n' + \beta'') - S\sigma\beta'(n + \beta') \end{aligned} \right) \varepsilon_2 \\
& + (\beta''(C-1) + Cn' - Sk'\sigma + Sm'\kappa) \varepsilon_3, \\
\nabla_{\phi_t} \phi_s &= (Ck - S\sigma(n + \beta'))_t \varepsilon_1 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))_t \varepsilon_2 \\
& + ((C-1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)_t \varepsilon_3 \\
& + \begin{bmatrix} \kappa \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix} \\
& = (Sk - C\sigma(n + \beta')) \varepsilon_1 + (Sm + C\kappa(n + \beta')) \varepsilon_2 \\
& + (S\beta' + mC\kappa - kC\sigma + nS) \varepsilon_3 \\
& + \begin{bmatrix} \kappa \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ck - S\sigma(n + \beta') \\ Cm + S\kappa(n + \beta') \\ \beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa \end{bmatrix} \\
& = \left(Sk - \frac{1}{2}\sigma(\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) - C\sigma(n + \beta') \right) \varepsilon_1 \\
& + \left(Sm + \frac{1}{2}\kappa(\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) + C\kappa(n + \beta') \right) \varepsilon_2 \\
& - \frac{1}{2}(-S\beta' - Sn + Ck\sigma - Cm\kappa) \varepsilon_3, \\
\nabla_{\phi_t} \phi_t &= \kappa_t \varepsilon_1 + \sigma_t \varepsilon_2 + \begin{bmatrix} \kappa \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_3 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \\ \frac{3}{2}\varepsilon_2 & -\frac{3}{2}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a primeira forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned}
E &= g(\phi_s, \phi_s) = (Ck - S\sigma(n + \beta'))^2 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))^2 \\
&+ ((C-1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)^2, \\
F &= g(\phi_s, \phi_t) = \kappa(Ck - S\sigma(n + \beta')) + \sigma(Cm + S\kappa(n + \beta')) \\
&= C(k\kappa + m\sigma) = 0, \\
G &= \kappa^2 + \sigma^2 = 1.
\end{aligned}$$

Usando as relações $C^2 - S^2 = 1$, $\kappa^2 + \sigma^2 = 1$ e $k\kappa + m\sigma = 0$ (condição de ortogonalidade), os coeficientes da segunda forma fundamental se reduzem a

$$\begin{aligned}
W^{-2} &= |\phi_s \times \phi_t|^{-1} = EG - F^2 = E, \\
\tilde{e} &= g(\nabla_{\phi_s} \phi_s, \phi_s \times \phi_t) \\
&= \left(\begin{aligned} & Ck' - S\sigma(n' + \beta'') - S\kappa\beta'(n + \beta') \\ & -2(Cm + Sn\kappa + S\kappa\beta')(\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) \\ & \cdot \sigma(\beta'(1-C) - Cn + Sk\sigma - Sm\kappa) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{aligned} & Cm' + S\kappa(n' + \beta'') - S\sigma\beta'(n + \beta') \\ & + 2(Ck - Sn\sigma - S\sigma\beta')(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) \end{aligned} \right) \\
& \cdot \kappa(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) \\
& + (\beta''(C - 1) + Cn' - Sk'\sigma + Sm'\kappa)(-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn) \\
& = (k\sigma - m\kappa + Sn - Ck\sigma + Cm\kappa)\beta'' - (Sn' - Ck'\sigma + Cm'\kappa - m'\kappa + k'\sigma)\beta' \\
& + n'(k\sigma - m\kappa) - (k'\sigma - m'\kappa)n, \\
\tilde{f} & = g(\nabla_{\phi_t}\phi_s, \phi_s \times \phi_t) \\
& = \left(Sk - \frac{1}{2}\sigma(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) - C\sigma(n + \beta') \right) \\
& \cdot \sigma(\beta'(1 - C) - Cn + Sk\sigma - Sm\kappa) \\
& + \left(Sm + \frac{1}{2}\kappa(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) + C\kappa(n + \beta') \right) \\
& \cdot \kappa(\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) \\
& - \frac{1}{2}(-S\beta' - Sn + Ck\sigma - Cm\kappa)(-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn) \\
& = \frac{1}{2}(-\beta' + C\beta' + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)(-\beta' + 3C\beta' + 3Cn - 3S(k\sigma - m\kappa)) \\
& - \frac{1}{2}(S\beta' + Sn - Ck\sigma + Cm\kappa)^2, \\
\tilde{g} & = g(\nabla_{\phi_t}\phi_t, \phi_s \times \phi_t) = 0.
\end{aligned}$$

Sendo as curvaturas média e gaussiana dadas neste caso por

$$H = \frac{\tilde{e}}{2E^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{-\tilde{f}^2}{E^2}.$$

Teorema 4.3. *Uma superfície regrada horizontal em $U\mathbb{H}^2$ é superfície mínima ($H = 0$) se, e somente se, admite curva base $P: I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ e curva direcional V ao longo de P satisfazendo uma das seguintes condições:*

(i) $\beta \equiv \beta_0$ é constante e

$$P' = (-\operatorname{sen}\beta_0)\varepsilon_1 + (\cos\beta_0)\varepsilon_2,$$

$$V = (\cos\beta_0)\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\beta_0)\varepsilon_2.$$

Neste caso, P também é uma geodésica horizontal e superfície está identificada com um plano hiperbólico horizontal da forma $\mathbb{H}^2 \times \{r_0\}$ no recobrimento $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$;

(ii) $\beta \equiv \beta_0$ é constante e

$$P' = (-a_0 n \operatorname{sen}\beta_0)\varepsilon_1 + (a_0 n \cos\beta_0)\varepsilon_2 + n\varepsilon_3,$$

$$V = (\cos\beta_0)\varepsilon_1 + (\operatorname{sen}\beta_0)\varepsilon_2,$$

com $a_0 \in \mathbb{R}$ constante e $n \neq 0$ sobre todo I .

(iii) $\beta(s) = s$ sobre I e

$$\begin{aligned} P' &= -a_0(\operatorname{sens} s) \varepsilon_1 + a_0(\cos s) \varepsilon_2 + b_0 \varepsilon_3, \\ V &= (\cos s) \varepsilon_1 + (\operatorname{sens} s) \varepsilon_2, \end{aligned}$$

para certas constantes $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

Além disso, $U\mathbb{H}^2$ não admite superfícies regradas horizontais com curvatura média constante não nula.

Demonstração. Começamos analisando o caso $H = 0$. Este caso equivale a $\tilde{e} = 0$. Coletando sua expressão em C, S , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{e} &= (\beta'(k'\sigma - m'\kappa) - \beta''(k\sigma - m\kappa))C \\ &+ (n\beta'' - n'\beta')S \\ &+ ((\beta'' + n')(k\sigma - m\kappa) - (\beta' + n)(k'\sigma - m'\kappa)). \end{aligned}$$

Usando o argumento típico, temos que este deve ser o polinômio identicamente nulo em C, S , para todo $s \in I$. Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \beta'(k'\sigma - m'\kappa) - \beta''(k\sigma - m\kappa), \\ 0 &= n\beta'' - n'\beta', \\ 0 &= (\beta'' + n')(k\sigma - m\kappa) - (\beta' + n)(k'\sigma - m'\kappa). \end{aligned}$$

Usando a primeira equação, a terceira equação se reduz a

$$0 = n'(k\sigma - m\kappa) - n(k'\sigma - m'\kappa).$$

Suponha que $\beta' \equiv 0$ sobre I . Note que as duas primeiras equações são satisfeitas sob esta condição. Suponha que além disso tenhamos $n \equiv 0$ sobre I . Isso satisfaz todas as equações e a condição de imersão impõe que

$$\begin{aligned} 0 &\neq (\beta'(C - 1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)^2 + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)^2 \\ &= (-Sk\sigma + Sm\kappa)^2 + (Ck\sigma - Cm\kappa)^2 \\ &= (k\sigma - m\kappa)^2 (C^2 + S^2). \end{aligned}$$

Da condição de ortogonalidade, vem que

$$\begin{aligned} k^2 + m^2 &= (\kappa^2 + \sigma^2)(k^2 + m^2) = (k\sigma - m\kappa)^2 + (k\kappa + m\sigma)^2 \\ &= (k\sigma - m\kappa)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Em particular, isso garante que a curva base é regular e pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco de $U\mathbb{H}^2$. Como estamos no caso em que $\beta \equiv \beta_0$ é constante, devemos ter $(k, m) = \pm(-\sin\beta_0, \cos\beta_0)$ (a menos de inverter a orientação de P , podemos supor que o sinal é +). Portanto, a curva base satisfaz

$$(p, v)' = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2,$$

e isso garante que ela é uma geodésica horizontal ortogonal à curva direcional. Neste caso, a superfície corresponde em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ a um plano hiperbólico horizontal da forma $\mathbb{H}^2 \times \{r_0\}$.

Ainda no caso $\beta' \equiv 0$, suponha agora que $n \neq 0$ sobre um intervalo maximal $I_1 \subset I$. Sobre I_1 , podemos escrever

$$(k\sigma - m\kappa)' = (k'\sigma - m'\kappa) = \frac{n'}{n}(k\sigma - m\kappa).$$

Portanto, temos a existência e unicidade de solução para $u := k\sigma - m\kappa$ sobre I_1 , em termos de n . A saber, devemos ter

$$k\sigma - m\kappa = a_0n,$$

para alguma constante $a_0 \in \mathbb{R}$. Sobre I_1 , a condição de imersão se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &\neq (\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)^2 + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)^2 \\ &= (Cn - Sa_0n)^2 + (Ca_0n - Sn)^2 = n^2 \left((C - Sa_0)^2 + (Ca_0 - S)^2 \right) \end{aligned}$$

A maximalidade de I_1 implica então que $I_1 = I$.

A condição de ortogonalidade nos diz que (k, m) é sempre múltiplo de $(-\sin\beta_0, \cos\beta_0)$. Como $(\cos\beta_0, \sin\beta_0)$ e $(-\sin\beta_0, \cos\beta_0)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, a equação que obtemos acima nos diz que

$$(k, m) = (-a_0n\sin\beta_0, a_0n\cos\beta_0).$$

Portanto, a curva base deve ser solução de

$$P' = (-a_0n\sin\beta_0)\varepsilon_1 + (a_0n\cos\beta_0)\varepsilon_2 + n\varepsilon_3,$$

com $n \neq 0$ sobre todo I .

Por fim, suponha agora que $\beta' \neq 0$ sobre um intervalo maximal $I_1 \subset I$. Neste caso, as duas primeiras equações implicam, sobre I_1 , que

$$k\sigma - m\kappa = a_0\beta', \quad n = b_0\beta',$$

para certas constantes $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Isso faz inclusive com que a terceira equação seja satisfeita. A condição de imersão se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &\neq (\beta'(C-1) + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa)^2 + (-\beta'S + Ck\sigma - Cm\kappa - Sn)^2 \\ &= (\beta'(C-1) + Cb_0\beta' - a_0\beta')^2 + (-\beta'S + a_0\beta' - Sb_0\beta')^2 \\ &= (\beta')^2 \left(((1+b_0)C - a_0 - 1)^2 + ((1+b_0)S - a_0)^2 \right). \end{aligned}$$

Isso implica, em particular, que devemos ter $I_1 = I$.

Portanto, podemos reparametrizar nossa superfície de forma a se ter $\beta(s) = s$. Assim, devemos ter

$$\begin{aligned} P' &= -a_0(\text{sens}) \varepsilon_1 + a_0(\cos s) \varepsilon_2 + b_0 \varepsilon_3, \\ V &= (\cos s) \varepsilon_1 + (\text{sens}) \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Olhemos agora para o caso $H = c \neq 0$. Elevando essa equação ao quadrado para eliminar a raiz do denominador e então fazendo o processo de substituição de S^2 por $-1 + C^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{e}^2 - 4c^2 E^3 \\ &= \left(\frac{(k\sigma - m\kappa + Sn - Ck\sigma + Cm\kappa) \beta''}{-(Sn' - Ck'\sigma + Cm'\kappa - m'\kappa + k'\sigma) \beta' + n'(k\sigma - m\kappa) - (k'\sigma - m'\kappa)n} \right)^2 \\ &\quad - 4c^2 \left((Ck - S\sigma(n + \beta'))^2 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))^2 + ((C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)^2 \right)^3 \\ &= -4c^2 \left(8(k^2 + m^2)^3 + 120(n + \beta')^2(k^2 + m^2)^2 + 120(n + \beta')^4(k^2 + m^2) + 8(n + \beta')^6 \right) C^6 + \dots \end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, o coeficiente de C^6 implica $k = m = n + \beta' \equiv 0$ sobre I_1 . Essa condição reduz $\tilde{e}$ a

$$\tilde{e} = S(n\beta'' - n'\beta') = S(-\beta'\beta'' - (-\beta'')\beta') = 0,$$

o que implica $H \equiv 0$, uma contradição. □

Quanto ao teorema análogo para a curvatura gaussiana, temos

Teorema 4.4. *Uma superfície regrada horizontal em $U\mathbb{H}^2$ possui curvatura gaussiana constante $K = -c^2$ se, e somente se, $-c^2 = -\frac{1}{4}$ e admite curva base $P : I \rightarrow U\mathbb{H}^2$ e curva direcional V ao longo de P satisfazendo uma das seguintes condições:*

(i) $\beta(s) = s$ sobre I e

$$\begin{aligned} P' &= -\varepsilon_3, \\ V &= (\cos s) \varepsilon_1 + (\text{sens}) \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Neste caso, P é uma geodésica vertical e a superfície pode ser vista como um helicóide em $U\mathbb{H}^2$.

(ii) $\beta \equiv \beta_0$ é constante e

$$\begin{aligned} P' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-(\text{sen}\beta_0) \varepsilon_1 + (\cos\beta_0) \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3), \\ V &= (\cos\beta_0) \varepsilon_1 + (\text{sen}\beta_0) \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Demonstração. Mostremos que o caso $K = 0$ não ocorre. Note que ele equivale a $\tilde{f} = 0$. Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{f} &= \frac{1}{2} (-\beta' + C\beta' + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) (-\beta' + 3C\beta' + 3Cn - 3S(k\sigma - m\kappa)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (S\beta' + Sn - Ck\sigma + Cm\kappa)^2 \\ &= \left((k\sigma - m\kappa)^2 + (n + \beta')^2 \right) C^2 \\ &\quad - 2(n + \beta') (k\sigma - m\kappa) CS - 2\beta' (n + \beta') C \\ &\quad + 2\beta' (k\sigma - m\kappa) S + \frac{1}{2} (\beta')^2 - \frac{3}{2} (k\sigma - m\kappa)^2 + \frac{1}{2} (n + \beta')^2. \end{aligned}$$

Do coeficiente de C^2 vem que $k\sigma - m\kappa = 0$, $n + \beta' = 0$ sobre I . Segue então do termo independente que

$$0 = \frac{1}{2} (\beta')^2 - \frac{3}{2} (k\sigma - m\kappa)^2 + \frac{1}{2} (n + \beta')^2 = \frac{1}{2} (\beta')^2,$$

donde $\beta' = 0$ sobre I . Consequentemente, concluímos também que $0 = n + \beta' = n$ sobre I . Da condição de ortogonalidade, vem que

$$k^2 + m^2 = (\kappa^2 + \sigma^2) (k^2 + m^2) = (k\sigma - m\kappa)^2 + (k\kappa + m\sigma)^2 = 0,$$

donde $k = m = 0$ sobre I . Mas isso contradiz a condição de imersão, mesmo sob a condição de tolerância. Portanto, não há superfícies regradas do tipo horizontal em $U\mathbb{H}^2$ satisfazendo $K = 0$.

Olhemos agora para o caso $K = -c^2 \neq 0$. Este caso equivale a $\frac{-\tilde{f}^2}{E^2} = -c^2$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 = \tilde{f} - cE$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f} - cE \\ &= \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2} (-\beta' + C\beta' + Cn - Sk\sigma + Sm\kappa) (-\beta' + 3C\beta' + 3Cn - 3S(k\sigma - m\kappa)) \\ &- \frac{1}{2} (S\beta' + Sn - Ck\sigma + Cm\kappa)^2 \end{aligned} \right) \\ &\quad - c \left((Ck - S\sigma(n + \beta'))^2 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))^2 + ((C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)^2 \right) \\ &= - \left((n + \beta')^2 + k^2 + m^2 \right) (2c - 1) C^2 \\ &\quad + 2(n + \beta') (2c - 1) (k\sigma - m\kappa) CS \\ &\quad + 2\beta' (n + \beta') (c - 1) C - 2\beta' (k\sigma - m\kappa) (c - 1) S \\ &\quad + \left(c \left(k^2 + m^2 + (n + \beta')^2 \right) - \frac{1}{2} (\beta')^2 (2c - 1) - \frac{3}{2} (k^2 + m^2) + \frac{1}{2} (n + \beta')^2 \right). \end{aligned}$$

Se $2c - 1 \neq 0$, então o coeficiente de C^2 nos diz que $n + \beta' = k = m = 0$ sobre I . Mas daí, o termo independente nos traz $-\frac{1}{2} (\beta')^2 (2c - 1) = 0$, donde $\beta' = 0$ sobre I e, consequentemente, $0 = n + \beta' = n$ sobre I . Como vimos no caso anterior, isso contradiz a condição de imersão.

Portanto, devemos ter $2c - 1 = 0$, i.e. $c = \frac{1}{2}$. Sob essa hipótese, o coeficiente do termo independente

se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(k^2 + m^2 + (n + \beta')^2\right) - \frac{1}{2}(\beta')^2 \left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) \\ &\quad - \frac{3}{2}(k^2 + m^2) + \frac{1}{2}(n + \beta')^2 \\ &= -\left(-(n + \beta')^2 + k^2 + m^2\right) \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter

$$(n + \beta')^2 = k^2 + m^2 = (k\sigma - m\kappa)^2 \text{ sobre } I.$$

Suponha que $\beta' \neq 0$ sobre um intervalo aberto não vazio $I_1 \subset I$. Então o coeficiente de C nos traz que

$$0 = 2\beta'(n + \beta') \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\beta'(n + \beta') \implies n + \beta' = 0 \text{ sobre } I_1.$$

Segue então que $k^2 + m^2 = 0$ sobre I_1 e, portanto, $k = m = 0$ sobre I_1 e

$$\begin{aligned} W^{-2} = E &= (Ck - S\sigma(n + \beta'))^2 + (Cm + S\kappa(n + \beta'))^2 \\ &\quad + ((C - 1)\beta' + mS\kappa - kS\sigma + nC)^2 \\ &= ((C - 1)\beta' + nC)^2 \\ &= ((C - 1)\beta' - \beta'C)^2 = (\beta')^2 \neq 0 \text{ sobre } I_1. \end{aligned}$$

Supondo que I_1 é maximal, sob a condição de tolerância, isso implica que $I_1 = I$. Portanto, $\beta' \neq 0$ sobre todo I . Observe que a equação $K = -c^2$ fica satisfeita sob essas condições. A menos de uma reparametrização, podemos supor $\beta(s) = s$ sobre I . Com essa reparametrização, teremos $n = -\beta' = -1$.

Isso nos diz que a curva base deve satisfazer

$$P' = (p, v)' = k\varepsilon_1 + m\varepsilon_2 + n\varepsilon_3 = -\varepsilon_3,$$

e, portanto, trata-se de uma fibra (ou geodésica vertical). Assim, a superfície é uma espécie de helicóide em $U\mathbb{H}^2$ com $K = -\frac{1}{4}$.

A outra possibilidade é $\beta' \equiv 0$ (note que se $\beta' \neq 0$ num ponto, então é diferente de zero numa vizinhança aberta e estamos no caso anterior). Neste caso, a equação estará satisfeita se, e somente se, $n^2 = k^2 + m^2$. A condição de imersão nos garante ainda que $n^2 = k^2 + m^2 \neq 0$ sobre todo I . Neste caso, a curva base é regular e podemos supor que está parametrizada pelo comprimento de arco de $U\mathbb{H}^2$. Dessa forma, devemos ter

$$1 = k^2 + m^2 + n^2 = 2n^2.$$

Portanto, devemos ter $|n| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sendo $\beta \equiv \beta_0 \in \mathbb{R}$, a condição de ortogonalidade nos traz que $k \cos \beta_0 + m \sin \beta_0 = 0$. Juntando as informações, a menos de inverter a orientação de P , devemos ter

$$(k, m) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin \beta_0, \cos \beta_0).$$

□

Superfícies de Bishop em $\mathbb{R}^3$

5.1 Referenciais de Bishop

Os referenciais de Bishop são uma alternativa a outros referenciais móveis sobre curvas mais comumente usados como, por exemplo, o referencial de Frenet. Os referenciais de Bishop apresentam algumas vantagens sobre o referencial de Frenet. Por exemplo, toda curva regular de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, admite um referencial de Bishop, ainda que seja degenerada i.e. possua pontos com curvatura zero.

Nesta seção, faremos a construção dos referenciais de Bishop e provaremos apenas aquelas propriedades que serão utilizadas no decorrer do texto. Mais detalhes podem ser encontrados em [Bsp].

Definição 5.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e de classe $\mathcal{C}^2$. Um **referencial de Bishop** sobre α é uma coleção $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ tal que

- (i) T, N_i são campos de vetores ao longo de α , i.e. $T, N_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- (ii) T, N_i são de classe $\mathcal{C}^1$;
- (iii) $T(t) = \alpha'(t)$, para todo $t \in I$;
- (iv) $\{T(t), N_1(t), \dots, N_{n-1}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$, para todo $t \in I$;
- (v) as derivadas $T', N'_1, \dots, N'_{n-1}$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} T' \\ N'_1 \\ \vdots \\ N'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \end{bmatrix}.$$

para certas funções contínuas $b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$. Mais precisamente,

$$T' = \sum_{j=1}^{n-1} b_j N_j,$$

$$N'_i = -b_i T.$$

Antes de provar que toda curva (nas condições da definição acima) admite um referencial de Bishop, introduzimos a seguir o conceito de paralelismo relativo e provamos algumas propriedades básicas.

Definição 5.2. Um campo $M : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ normal a uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **relativamente paralelo** a α se sua derivada possui apenas a direção tangente a α . Mais precisamente, existe uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $M'(t) = f(t)\alpha'(t)$, para todo $t \in I$.

Observação 5.3. Observe que um referencial de Bishop sobre uma curva é simplesmente um referencial ortonormal cujos campos normais são relativamente paralelos.

Proposição 5.4. *Todo campo relativamente paralelo possui norma constante. Consequentemente, se M, N são relativamente paralelos sobre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $M(t_0) = N(t_0)$ para algum $t_0 \in I$, então $M = N$.*

Demonstração. Seja M um campo relativamente paralelo a $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $M' = f\alpha'$. Temos que $\frac{d}{dt}|M|^2 = \frac{d}{dt}\langle M, M \rangle = 2\langle M, M' \rangle = 2\langle M, f\alpha' \rangle = 0$, pois M é normal a α . Isso prova que $|M|$ é constante.

Se M, N são relativamente paralelos a α com $M' = f\alpha'$, $N' = g\alpha'$ e $M(t_0) = N(t_0)$, então $M - N$ também é relativamente paralelo a α e $(M - N)(t_0) = 0$. Como $M - N$ deve possuir norma constante, temos que $M - N \equiv 0 \implies M = N$. $\square$

Proposição 5.5. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, e $N_0 \in \mathbb{R}^n$ é um vetor normal à curva em $t_0 \in I$, então existe um único campo normal N de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ relativamente paralelo a α tal que $N(t_0) = N_0$.*

Demonstração. Primeiro construiremos o campo localmente. Para isso, suponha que α é um mergulho. Existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, com $\alpha(I) \subset U$, e um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^k$ tal que $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow V$ satisfaz $\varphi \circ \alpha(t) = (t, 0, \dots, 0)$. Considerando o referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre $\varphi \circ \alpha$ dado pela base canônica de $\mathbb{R}^n$, a diferencial $D\varphi^{-1}$ induz um referencial móvel $\{T, m_1, \dots, m_{n-1}\}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sobre α , com $T = \alpha'$. A classe de diferenciabilidade é $k - 1$ pois esta é a classe de $D\varphi^{-1}$. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a este referencial, obtemos um referencial ortonormal $\{T, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sobre α . É a partir deste referencial que construiremos o campo normal N relativamente paralelo a α e com $N(t_0) = N_0$.

Precisamos encontrar funções $u_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ tais que $N := \sum_{j=1}^{n-1} u_j M_j$ seja relativamente paralelo a α e satisfaça $\sum_{j=1}^{n-1} u_j(t_0) M_j(t_0) = N_0$. Para que tenhamos mais simplicidade com os

índices, denote T por M_0 . Assim, usando que $M'_j = \sum_{\ell=0}^{n-1} \langle M'_j, M_\ell \rangle M_\ell$, temos

$$\begin{aligned}
 N' &= \sum_{j=1}^{n-1} (u'_j M_j + u_j M'_j) = \sum_{j=1}^{n-1} (u'_j M_j + u_j \sum_{\ell=0}^{n-1} \langle M'_j, M_\ell \rangle M_\ell) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} u'_j M_j + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_\ell \rangle M_\ell = \sum_{\ell=1}^{n-1} u'_\ell M_\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_\ell \rangle M_\ell \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_0 \rangle M_0 + \sum_{\ell=1}^{n-1} u'_\ell M_\ell + \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_\ell \rangle M_\ell \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, T \rangle T + \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(u'_\ell + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_\ell \rangle \right) M_\ell
 \end{aligned}$$

Para que N seja relativamente paralelo a α , devemos ter

$$u'_\ell + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \langle M'_j, M_\ell \rangle = 0.$$

Portanto, encontrar N significa resolver o problema de valor inicial dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \langle M_1, M'_1 \rangle & \langle M_1, M'_2 \rangle & \dots & \langle M_1, M'_{n-1} \rangle \\ \langle M_2, M'_1 \rangle & \langle M_2, M'_2 \rangle & \dots & \langle M_2, M'_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle M_{n-1}, M'_1 \rangle & \langle M_{n-1}, M'_2 \rangle & \dots & \langle M_{n-1}, M'_{n-1} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \\
 u_j(t_0) &= \langle N_0, M_j(t_0) \rangle.
 \end{aligned}$$

Este problema admite uma única solução de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ e prova a existência e unicidade do campo N no caso em que a curva α é mergulhada.

Suponha agora que α é apenas regular de classe $\mathcal{C}^k$.

Observe que, sendo regular, α é uma imersão. Logo, todo ponto do intervalo I admite vizinhança aberta sobre a qual a restrição de α é um mergulho. Seja $\mathcal{J}$ uma cobertura de I por abertos tal que a restrição $\alpha|_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um mergulho para todo $J \in \mathcal{J}$. Existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tal que $t_0 \in J_0$. Como $\alpha|_{J_0}$ é um mergulho, já provamos que existe um único campo normal N_{J_0} relativamente paralelo a α_{J_0} com $N_{J_0}(t_0) = N_0$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer, com $a < b$ tais que $J_0 \subset [a, b] \subset I$. Mostraremos que é possível estender N_{J_0} a $[a, b]$ e de forma única. Fazendo então $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$ teremos provado a proposição.

Como $\mathcal{J}$ cobre $[a, b]$ por abertos e $[a, b]$ é compacto, existe subcobertura finita $\{J_0, J_1, \dots, J_m\} \subset \mathcal{J}$ de $[a, b]$. Note que, como J_0 é aberto não vazio com $J_0 \subset [a, b]$, temos $a < \inf J_0 < \sup J_0 < b$. Logo, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\sup J_0 \in J_i$. Sem perda de generalidade, suponha que $i = 1$. Como J_1 é aberto, existe $t_1 \in J_0 \cap J_1$. Mas $\alpha|_{J_1}$ é mergulho, donde existe um único campo normal N_{J_1} definido sobre J_1 relativamente paralelo a $\alpha|_{J_1}$ e tal que $N_{J_1}(t_1) = N_{J_0}(t_1)$. Além disso, por unicidade, N_{J_0} e N_{J_1} coincidem sobre a interseção $J_0 \cap J_1$. Com isso, conseguimos estender N_{J_0} a $J_0 \cup J_1$. Se $\sup J_1 < b$, repetimos o argumento e conseguimos estender o campo para, digamos, J_2 . Seguimos

com esse processo. Como $\{J_0, \dots, J_m\}$ é finito e cobre $[a, b]$, em algum momento teremos o campo definido para $J_0 \cup \dots \cup J_k$, com $b < \sup J_k$ para algum $k < m$ ou então teremos estendido à toda cobertura $J_0 \cup \dots \cup J_m$. Se ocorrer o primeiro caso, passamos a trabalhar com os ínfimos até estendermos o campo à esquerda, em direção a a . Em qualquer dos casos, teremos estendido o campo, e de forma única, a todo o intervalo $[a, b]$. $\square$

Teorema 5.6. *Toda curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, admite um referencial de Bishop de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Mais precisamente, se $\{\alpha'(t_0), M_1, \dots, M_{n-1}\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$, então existe um único referencial de Bishop $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sobre α tal que $N_i(t_0) = M_i$.*

Demonstração. Sejam $N_1, \dots, N_{n-1}$ os campos normais de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ relativamente paralelos a α com $N_i(t_0) = M_i$. Afirmamos que $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é um referencial de Bishop sobre α , o único com a propriedade $N_i(t_0) = M_i$.

Olhando para a definição de referencial de Bishop, vemos que as condições (i), (ii) e (iii) são trivialmente satisfeitas.

Para provar (iv), precisamos mostrar que $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ sempre fornece uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$. Como cada N_i é relativamente paralelo a α , existem funções $b_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ tais que $N_i' = -b_i T$. Temos que

$$\frac{d}{dt} \langle N_i, N_j \rangle = \langle N_i', N_j \rangle + \langle N_i, N_j' \rangle = \langle -b_i T, N_j \rangle + \langle N_i, -b_j T \rangle = 0,$$

donde $\langle N_i, N_j \rangle$ é constante. Mas $\langle N_i(t_0), N_j(t_0) \rangle = \langle M_i, M_j \rangle = \delta_{ij}$. Segue que $\langle N_i, N_j \rangle = \delta_{ij}$. Como também temos $\langle T, T \rangle = 1$ e $\langle T, N_i \rangle = 0$, isso prova que $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Para ver que essa base é sempre positiva, basta observar que a função $\det(T, N_1, \dots, N_{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, I é conexo e $\det(T, N_1, \dots, N_{n-1})(t_0) = \det(T, M_1, \dots, M_{n-1}) > 0$. Portanto, $\det(T, N_1, \dots, N_{n-1})(t) > 0$ para todo $t \in I$.

O item (v) é mera consequência dos campos normais serem relativamente paralelos a α e do referencial ser ortonormal. De fato, usando que $\langle N_i, N_j \rangle = \delta_{ij} \implies \langle N_i', N_j \rangle + \langle N_i, N_j' \rangle = 0$ (incluindo $N_0 := T$), temos

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle T', N_i \rangle N_i = - \sum_{i=1}^{n-1} \langle T, N_i' \rangle N_i = - \sum_{i=1}^{n-1} \langle T, -b_i T \rangle N_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i N_i, \\ N_i' &= -b_i T. \end{aligned}$$

Isso prova que $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é referencial de Bishop sobre α . A unicidade segue da unicidade de campos normais relativamente paralelos sujeitos à condição inicial $N_i(t_0) = M_i$. $\square$

Observe que o referencial de Frenet sobre uma curva é específico de forma que, se existir, é único por definição. Por outro lado, uma curva regular de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, admite infinitos referenciais de

Bishop (de fato, um único para cada condição inicial em $t_0 \in I$). No entanto, a Proposição 5.7 abaixo nos diz que o referencial de Bishop sobre uma curva é único “a menos de rotações”, no sentido que explicamos a seguir.

Denote por $\mathcal{B}$ o conjunto de todos os referenciais de Bishop sobre uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Considere $A = (a_{ij}) \in SO(n-1)$, i.e. A é uma matriz ortogonal que preserva orientação ($\det A = 1$), e considere também $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\} \in \mathcal{B}$. Defina a coleção ordenada de campos $A(B)$ sobre α dada por $A(B) := \{T, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ em que $M_i := \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} N_j$. Formalmente, escrevemos

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Observe com cuidado que $A(B)$ não é $\{T, AN_1, \dots, AN_{n-1}\}$. Este conjunto sequer faz sentido, pois A é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ e $N_i(t) \in \mathbb{R}^n$ possui n entradas. Estamos definindo o que virá a ser uma ação de $SO(n-1)$ sobre $\mathcal{B}$, representada formalmente por (5.1). Note ainda que o produto formal em (5.1) é o mesmo já utilizado ao escrever a derivada de um referencial ortonormal, como no caso dos referenciais de Frenet e de Bishop.

Proposição 5.7. *A aplicação $\Lambda : SO(n-1) \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ dada por $\Lambda(A, B) := A(B)$ define uma ação de $SO(n-1)$ sobre $\mathcal{B}$. Fixado um referencial de Bishop $B_0 \in \mathcal{B}$, a aplicação $\Lambda_{B_0} : SO(n-1) \rightarrow \mathcal{B}$ dada por $\Lambda_{B_0}(A) := A(B_0)$ é bijetora.*

Demonstração. Para provar que Λ define uma ação de grupos basta mostrar que ela está bem definida. As outras propriedades de ação de grupos seguem diretamente do fato de que $SO(n-1)$ age sobre $\mathcal{B}$ como o produto usual de matrizes (veja 5.1).

Seja $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ um referencial de Bishop sobre α e $A = (a_{ij}) \in SO(n-1)$. Note que $A(B)$ satisfaz trivialmente as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 5.1.

Para mostrar (iv), devemos mostrar que $A(B)(t) = \{T(t), M_1(t), \dots, M_{n-1}(t)\}$, com $M_i := \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} N_j$, é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^n$, para todo $t \in I$. Para isso, basta mostrar que $\det(T, M_1, \dots, M_{n-1}) = 1$. Temos

$$\begin{aligned} \det(T, M_1, \dots, M_{n-1}) &= \det \left(T, \sum_{j_1=1}^{n-1} a_{1j_1} N_{j_1}, \dots, \sum_{j_{n-1}=1}^{n-1} a_{n-1,j_{n-1}} N_{j_{n-1}} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n-1} \dots \sum_{j_{n-1}=1}^{n-1} a_{1j_1} \dots a_{n-1,j_{n-1}} \det(T, N_{j_1}, \dots, N_{j_{n-1}}) \end{aligned}$$

Note que $\det(T, N_{j_1}, \dots, N_{j_{n-1}}) \neq 0$ somente quando todos os índices $j_1, \dots, j_{n-1}$ são distintos. Logo, $\det(T, N_{j_1}, \dots, N_{j_{n-1}}) = \det(T, N_{\sigma(1)}, \dots, N_{\sigma(n-1)})$, para alguma permutação $\sigma \in S_{n-1}$. Observe então que todas as permutações de S_{n-1} aparecem uma única vez na soma total e que, como $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é ortonormal positiva, $\det(T, N_{\sigma(1)}, \dots, N_{\sigma(n-1)}) = \text{sgn}(\sigma)$. Assim,

$$\det(T, M_1, \dots, M_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} = \det A = 1.$$

Por fim, para verificar (v), basta observar que $M'_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} N'_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} (-b_j T) = - \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} b_j \right) T$ e, portanto, M_i é relativamente paralelo a α . Isso prova que Λ está bem definida.

Agora fixe $B_0 = \{T, N_1^0, \dots, N_{n-1}^0\}$ em $\mathcal{B}$. Sejam $A, \bar{A} \in SO(n-1)$ tais que $\Lambda_{B_0}(A) = \Lambda_{B_0}(\bar{A})$, i.e. $A(B_0) = \bar{A}(B_0)$. Isso implica que $B_0 = (A^{-1}\bar{A})(B_0)$. Denotando $A^{-1}\bar{A} = (c_{ij})$, temos

$$N_i^0 = \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} N_j^0 \iff \sum_{j=1}^{n-1} (c_{ij} - \delta_{ij}) N_j^0 = 0.$$

Como $\{N_1^0, \dots, N_{n-1}^0\}$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, segue que $c_{ij} = \delta_{ij}$. Logo, $A^{-1}\bar{A} = \mathbb{1} \implies A = \bar{A}$. Portanto, Λ_{B_0} é injetora.

Mostremos por fim que Λ_{B_0} é sobrejetora. Considere $B = \{T, M_1, \dots, M_{n-1}\} \in \mathcal{B}$ e $t_0 \in I$ fixado. Temos que $B(t_0) = \{T(t_0), N_1^0(t_0), \dots, N_{n-1}^0(t_0)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Logo, cada $M_i(t_0)$ se escreve como $M_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} N_j^0(t_0)$, para certos coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Denote por A a matriz $(n-1) \times (n-1)$ definida por $A := (a_{ij})$. Fazendo a mesma conta que fizemos ao verificar o item (iv) acima mas usando agora que $B \in \mathcal{B}$, temos

$$1 = \det(T, M_1, \dots, M_{n-1}) = \det A.$$

Isso mostra que $A \in SO(n-1)$. Bastaria verificar, portanto, que $B = A(B_0)$. Acontece que $A(B_0)$ é referencial de Bishop sobre α e coincide com B em t_0 . Como o referencial de Bishop é único dadas condições iniciais, B e $A(B_0)$ devem coincidir ao longo de toda a curva α . Portanto, $B = \Lambda_{B_0}(A)$ e isso mostra que Λ é sobrejetora. $\square$

Observação 5.8. Considere uma ação de grupos $\Lambda : G \times X \rightarrow X$ de um grupo G sobre um conjunto X . Fixado $g \in G$, a aplicação $\Lambda_g : X \rightarrow X$ definida por $\Lambda_g(x) = g(x)$ é sempre bijeção com inversa dada por $\Lambda_{g^{-1}}$. Note que esta não é a bijeção em questão na Proposição 5.7. No nosso caso, temos bijeções entre o conjunto que sofre a ação e o próprio grupo.

Definição 5.9. Se $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é um referencial de Bishop sobre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $N'_i = -b_i T$, definimos a **assinatura normal de α com respeito a B** como sendo a curva $b_B^\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida por $b_B^\alpha(t) = (b_1(t), \dots, b_{n-1}(t))$.

A assinatura normal de um referencial de Bishop desempenha o papel análogo ao par curvatura e torção para o referencial de Frenet de curvas em $\mathbb{R}^3$. Espera-se, portanto, que toda curva em $\mathbb{R}^n$ seja determinada, a menos de movimentos rígidos, por sua assinatura normal em $\mathbb{R}^{n-1}$. Este fato é verdadeiro, mas não o provaremos aqui. No entanto, como vimos acima, o referencial de Bishop de uma curva não é único e, conseqüentemente, sua assinatura normal também não. Porém, assim como os referenciais de Bishop, duas assinaturas normais de uma curva “diferem por uma rotação”.

Proposição 5.10. Se B, B' são dois referenciais de Bishop sobre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A \in SO(n-1)$ é a rotação tal que $B' = A(B)$, então $b_{B'}^\alpha = A \cdot b_B^\alpha$.

Demonstração. De fato, basta observar que, se $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$, $B' = \{T, M_1, \dots, M_{n-1}\}$, $b_B^\alpha = (b_1, \dots, b_{n-1})$, $b_{B'}^\alpha = (c_1, \dots, c_{n-1})$ e $A = (a_{ij})$, então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} c_i M_i \\ -c_1 T \\ \vdots \\ -c_{n-1} T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T' \\ M'_1 \\ \vdots \\ M'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \end{bmatrix} \end{pmatrix}' \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} b_i N_i \\ -b_1 T \\ \vdots \\ -b_{n-1} T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Olhando a partir da segunda entrada desses vetores coluna concluímos que $c_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} b_j$, ou seja,

$$b_{B'}^\alpha = A \cdot b_B^\alpha.$$

□

A proposição a seguir relaciona o referencial de Bishop com o referencial de Frenet de curvas em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 5.11. *Suponha que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^3$ e parametrizada pelo comprimento de arco admita um referencial de Frenet, i.e. um referencial ortonormal $\{T, n, b\}$ da forma*

$$\begin{bmatrix} T' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ n \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{com } \kappa := \langle T', n \rangle > 0.$$

Se $B = \{T, N_1, N_2\}$ é um referencial de Bishop sobre α de assinatura normal $b_B^\alpha = (b_1, b_2)$, então escrevendo b_B^α em coordenadas polares, i.e. $(b_1, b_2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$, então temos

$$r = \kappa, \quad \theta' = \tau.$$

Demonstração. Para ver que $r = \kappa$ basta notar que

$$\kappa = |T'| = |b_1 N_1 + b_2 N_2| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = r.$$

Seja $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $n = (\cos \theta) N_1 + (\sin \theta) N_2$. Temos

$$\begin{aligned} -\kappa T + \tau b = n' &= -\theta' \sin \theta N_1 + \cos \theta N'_1 + \theta' \cos \theta N_2 + \sin \theta N'_2 \\ &= -\theta' \sin \theta N_1 + \cos \theta (-b_1 T) + \theta' \cos \theta N_2 + \sin \theta (-b_2 T) \\ &= -(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) T + \theta' (-\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2). \end{aligned}$$

Segue que $\tau b = \theta'(-\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} b &= T \times n = T \times ((\cos \theta)N_1 + (\sin \theta)N_2) \\ &= (\cos \theta)T \times N_1 + (\sin \theta)T \times N_2 \\ &= (\cos \theta)N_2 + (\sin \theta)(-N_1). \end{aligned}$$

Segue daí que $\tau(-\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2) = \tau b = \theta'(-\sin \theta N_1 + \cos \theta N_2) \implies \theta' = \tau$.

Por fim, para ver que θ é de fato uma função ângulo para as coordenadas polares de b_B^α , basta notar que

$$(\cos \theta)N_1 + (\sin \theta)N_2 = n = \frac{T'}{\kappa} = \frac{b_1}{\kappa}N_1 + \frac{b_2}{\kappa}N_2,$$

donde $(b_1, b_2) = \kappa(\cos \theta, \sin \theta)$. □

A proposição a seguir fornece algumas caracterizações úteis da curva α em termos de sua assinatura normal.

Proposição 5.12. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular de classe $\mathcal{C}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco e $b_B^\alpha = (b_1, \dots, b_{n-1})$ sua assinatura normal com respeito a um referencial de Bishop $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ qualquer.*

- (i) *α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, b_B^α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^{n-1}$ contendo a origem.*
- (ii) *α está contida numa esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, b_B^α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^{n-1}$ que não contém a origem. Além disso, o raio da esfera contendo é dado pelo inverso da distância do hiperplano à origem de $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Demonstração. (i) Suponha que α está contida em um hiperplano. Então existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tal que $\langle \alpha, v \rangle = L$, para alguma constante $L \in \mathbb{R}$. Derivando essa equação, temos $0 = \langle \alpha', v \rangle = \langle T, v \rangle$. Portanto, v se escreve como $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i$, para certas funções $v_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (note que $v_i = \langle v, N_i \rangle$). Observando que $0 = \langle T, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i$

$$0 = v' = \sum_{i=1}^{n-1} (v'_i N_i - v_i b_i T) = \sum_{i=1}^{n-1} v'_i N_i.$$

Como os campos N_i são linearmente independentes, temos que $v'_i = 0$, i.e. as funções v_i são constantes. Defina $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ por $\bar{v} := (v_1, \dots, v_{n-1}) \neq 0$. Temos

$$\langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i = 0.$$

Isso mostra que b_B^α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^{n-1}$ passando pela origem.

Reciprocamente, suponha que b_B^α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^{n-1}$ passando pela origem, i.e. existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle = 0$. Se $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$, defina $v(t)$ o campo sobre α dado por $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i$. Temos

$$v' = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i' = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i \right) T = - \langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle T = 0.$$

Logo, o campo v é constante. Além disso, por definição $\langle T, v \rangle = 0$. Segue que

$$\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), v \rangle = \int_{t_0}^t \langle T(s), v \rangle ds = 0.$$

Logo, $\langle a, v \rangle \equiv L := \langle \alpha(t_0), v \rangle$ com $v \neq 0$. Isso prova que α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^n$.

- (ii) Suponha que α está contida numa esfera de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, existe $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tais que $\langle \alpha - p_0, \alpha - p_0 \rangle = R^2$. Isso implica que $\langle T, \alpha - p_0 \rangle = \langle \alpha', \alpha - p_0 \rangle = 0$. Logo, $\alpha - p_0 = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i$, para certas funções $v_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Derivando $\alpha - p_0$, temos

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} (v_i' N_i - v_i b_i T) \implies \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i \right) T - \sum_{i=1}^{n-1} v_i' N_i = 0.$$

Como $\{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ é base de $\mathbb{R}^n$, segue que $v_i' \equiv 0$ e $1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i \equiv 0$. Portanto, $\bar{v} := (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ é constante, não nulo (pois $0 < R = |\alpha - p_0| = |\bar{v}|$) e satisfaz $1 + \langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle = 0$. Isso prova que b_B^α está contida no hiperplano Π de $\mathbb{R}^{n-1}$ que não passa pela origem dado pela equação $1 + \langle p, \bar{v} \rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que $p = -\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}$ está neste hiperplano e fornece sua distância à origem de $\mathbb{R}^{n-1}$, i.e. $d(\Pi, 0) = \left| -\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \right| = \frac{1}{|\bar{v}|}$. Por outro lado, temos $R = |\bar{v}|$. Isso prova que a distância de Π à origem é inverso do raio da esfera contendo α .

Reciprocamente, suponha que b_B^α está contida num hiperplano de $\mathbb{R}^{n-1}$ que não contém a origem. Logo, b_B^α satisfaz uma equação da forma $1 + \langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle = 0$ para algum $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo. Considere o campo v em $\mathbb{R}^n$ ao longo de α definido por $v(t) := \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i(t)$. Derivando $\alpha - v$ obtemos

$$\alpha' - v' = T - \sum_{i=1}^{n-1} v_i (-b_i T) = (1 + \langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle) T = 0.$$

Portanto, existe $p_0 \in \mathbb{R}^n$ constante tal que $\alpha - p_0 = v$. Mas então

$$|\alpha - p_0| = |v| = |\bar{v}|,$$

mas $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ é constante. Isso mostra que α está contida numa esfera de raio $R := |\bar{v}|$. Como no caso anterior, $\frac{1}{R}$ é a distância do hiperplano contendo b_B^α à origem de $\mathbb{R}^{n-1}$.

□

A seguir, introduzimos uma aplicação que torna possível reescrever e provar a proposição anterior de forma mais precisa. Denote por $\chi^\perp(\alpha)$ o conjunto dos campos normais sobre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Denote por $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n-1})$ o conjunto das curvas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Dado um referencial de Bishop $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ sobre α , defina a aplicação $\pi_{\alpha, B} : \chi^\perp(\alpha) \rightarrow \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n-1})$ por

$$\pi_{\alpha, B}(M)(t) := (\langle M(t), N_1(t) \rangle, \dots, \langle M(t), N_{n-1}(t) \rangle), \quad M \in \chi^\perp(\alpha), t \in I.$$

Observe que $\pi_{\alpha, B}$ é bijetora com inversa $\pi_{\alpha, B}^{-1} : \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \chi^\perp(\alpha)$ dada por

$$\pi_{\alpha, B}^{-1}(\gamma)(t) := \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(t) N_i(t), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n-1}), t \in I.$$

Note que se o referencial de Bishop é de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, então $\pi_{\alpha, B}$ e $\pi_{\alpha, B}^{-1}$ preservam as classes de diferenciabilidade até ordem k .

Observe que a assinatura normal de α com respeito a B é dada simplesmente por

$$b_B^\alpha = \pi_{\alpha, B}(T').$$

Além disso, segue da definição que a aplicação $\pi_{\alpha, B}$ possui a seguinte propriedade chave:

$$\langle \pi_{\alpha, B}(M)(t), \pi_{\alpha, B}(N)(t) \rangle = \langle M(t), N(t) \rangle \text{ para todo par } M, N \in \chi^\perp(\alpha) \text{ e } t \in I.$$

Naturalmente, vale também que

$$\langle \pi_{\alpha, B}^{-1}(\gamma)(t), \pi_{\alpha, B}^{-1}(\lambda)(t) \rangle = \langle \gamma(t), \lambda(t) \rangle \text{ para todo par } \gamma, \lambda \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } t \in I.$$

A seguir, reenunciamos a Proposição 5.12 em termos da aplicação $\pi_{\alpha, B}$.

Proposição 5.13. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular de classe $\mathcal{C}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco e $b_B^\alpha = (b_1, \dots, b_{n-1})$ sua assinatura normal com respeito a um referencial de Bishop $B = \{T, N_1, \dots, N_{n-1}\}$ qualquer.*

- (i) *existem $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo e $L \in \mathbb{R}$ tais que $\langle \alpha, v \rangle \equiv L$ se, e somente se, existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo tal que $\langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle \equiv 0$. Necessariamente $\bar{v} = \pi_{\alpha, B}(v)$.*
- (ii) *existem $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tais que $|\alpha - p_0| \equiv R$ se, e somente se, existe $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo tal que $1 + \langle b_B^\alpha, v \rangle \equiv 0$. Necessariamente $\pi_{\alpha, B}(\alpha - p_0) \equiv v$. Em particular, $|v| = R$.*

Demonstração. Façamos a demonstração novamente apenas para visualizar como ela fica mais simples ao se fazer o uso da aplicação $\pi_{\alpha, B}$.

- (i) Basta observar que, se $v \in \mathbb{R}^n$ é não nulo e satisfaz $\langle \alpha, v \rangle \equiv 0$, então $\langle T, v \rangle \equiv 0$, donde $v \in \chi^\perp(\alpha)$. Derivando mais uma vez, obtemos $\langle T', v \rangle \equiv 0$. Mas então, usando que $\pi_{\alpha, B}$ preserva o produto interno, temos $0 = \langle \pi_{\alpha, B}(T'), \pi_{\alpha, B}(v) \rangle = \langle b_B^\alpha, \pi_{\alpha, B}(v) \rangle$. Observe que $\langle v, N_i \rangle' =$

$-b_i \langle v, T \rangle \equiv 0$. Portanto, cada $\langle v, N_i \rangle$ é constante, donde $\pi_{\alpha, B}(v) =: \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ é constante. Além disso, $\bar{v}$ é não nulo pois algum $\langle v, N_i \rangle$ é não nulo (pois $v \neq 0$). Reciprocamente, se existe $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo tal que $\langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle \equiv 0$, então tomando $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in C(I; \mathbb{R}^{n-1})$ como curva constante, temos que $0 \equiv \langle T, \pi_{\alpha, B}^{-1}(\bar{v}) \rangle$, pois $\pi_{\alpha, B}^{-1}(\bar{v}) \in \mathcal{X}^\perp(\alpha)$! Note então que $v := \pi_{\alpha, B}^{-1}(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i$ é constante. De fato, $v' = \sum_{i=1}^{n-1} v_i N_i' = \sum_{i=1}^{n-1} v_i (-b_i) T = -\langle b_B^\alpha, \bar{v} \rangle T = 0$. Assim, integrando $\langle T, v \rangle \equiv 0$ obtemos $\langle \alpha, v \rangle \equiv L$, para alguma constante $L \in \mathbb{R}$.

- (ii) Suponha que $|\alpha - p_0| \equiv R$, para algum $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Segue que $\langle T, \alpha - p_0 \rangle = \langle \alpha', \alpha - p_0 \rangle \equiv 0$ e, portanto, $\alpha - p_0 \in \mathcal{X}^\perp(\alpha)$. Derivando mais uma vez obtemos que $\langle T', \alpha - p_0 \rangle + \langle T, T \rangle \equiv 0 \implies 1 + \langle T', \alpha - p_0 \rangle \equiv 0$. Aplicando $\pi_{\alpha, B}$, obtemos $1 + \langle b_B^\alpha, \pi_{\alpha, B}(\alpha - p_0) \rangle \equiv 0$. Resta apenas observar que $v := \pi_{\alpha, B}(\alpha - p_0)$ é constante. Temos $\langle \alpha - p_0, N_i \rangle' = \langle T, N_i \rangle + \langle \alpha - p_0, -b_i T \rangle = 0$. Logo, as coordenadas de v dadas por $\langle \alpha - p_0, N_i \rangle$ são constantes. Além disso, como $\pi_{\alpha, B}$ preserva o produto interno, temos $|v| = |\alpha - p_0| = R > 0$. Em particular, $v \neq 0$. Reciprocamente, suponha que existe $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ não nulo tal que $1 + \langle b_B^\alpha, v \rangle \equiv 0$. Considere a curva em $\mathbb{R}^n$ definida por $\alpha - \pi_{\alpha, B}^{-1}(v)$. Temos

$$(\alpha - \pi_{\alpha, B}^{-1}(v))' = T - \sum_{i=1}^{n-1} v_i (-b_i T) = (1 + \langle b_B^\alpha, v \rangle) T = 0.$$

Segue que existe $p_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha - p_0 = \pi_{\alpha, B}^{-1}(v)$, donde $|\alpha - p_0| = |\pi_{\alpha, B}^{-1}(v)| \equiv |v| =: R > 0$.

□

5.2 Superfícies de Bishop

Conjuntos tubulares em $\mathbb{R}^3$ são uniões de círculos de um certo raio fixo $R > 0$ e cujos centros variam ao longo de uma curva regular dada. Normalmente, pede-se ainda que esses círculos estejam contidos no plano normal à curva central no respectivo ponto.

Se quiséssemos generalizar tais conjuntos em $\mathbb{R}^3$, uma maneira possível seria a de trocar o círculo por uma outra curva “fixa” que percorresse os planos normais à uma dada curva central. Poderíamos expressar a ideia de raio fixo e centro fixo sobre a curva dizendo que, em cada plano normal, a figura é a mesma “a menos de uma rotação”. Mais precisamente, poderíamos dar a seguinte definição.

Definição 5.14. Um subconjunto Σ de $\mathbb{R}^3$ será dito um **conjunto tubular generalizado** em torno de uma curva $\mathcal{C}^1$ -regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, chamada **curva central**, se existe curva $\mathcal{C}^1$ -regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada **curva shape**, tal que:

- (i) $\Sigma = \bigcup_{t \in I} (\Sigma \cap T_t \alpha^\perp)$, sendo $T_t \alpha^\perp = \alpha(t) + [\alpha'(t)]^\perp$ o plano normal a α em $t \in I$ passando por $\alpha(t)$;
- (ii) cada interseção $\Sigma \cap T_t \alpha^\perp$ é dada como o traço de uma curva $\beta_t : J \rightarrow T_t \alpha^\perp$;

- (iii) para todo $t \in I$, existe transformação linear ortogonal $A_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow [\alpha'(t)]^\perp$ tal que $\alpha(t) + A_t(\beta(s)) = \beta_t(s)$, para todo $s \in J$.

Observação 5.15. Note que um conjunto tubular usual de raio $R > 0$ é um conjunto tubular generalizado em que a curva shape é um círculo de raio $R > 0$ centrado na origem. Nesta situação, as transformações A_t são desnecessárias pois todo círculo centrado na origem é invariante por transformações ortogonais, o que não acontece com uma curva em geral.

Seguindo a definição de [Gsp] para superfícies tubulares, poderíamos definir uma superfície tubular generalizada como sendo um conjunto tubular generalizado dado localmente como imagem de uma imersão. No entanto, devido à assimetria imposta pelo fato de β ser uma curva qualquer, essa definição se torna muito geral e difícil de trabalhar. Observe que sequer pedimos, na definição acima, que A_t varie continuamente. Ainda assim, dependendo do formato de β e do traço da curva central no espaço, seria possível que o conjunto tubular obtido fosse uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$, ainda que A_t não variasse continuamente, o que poderia ser uma justificativa para não requerer que A_t varie continuamente com t . O exemplo a seguir ilustra um caso desse tipo.

Exemplo 5.16. Tome $\alpha : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ se $t \in [0, 1]$ e $\alpha(t) = (t - 2, 0, 0)$ se $t \in [2, 3]$. Em outras palavras, α parametriza o segmento que vai da origem até $e_1 = (0, 0, 1)$ nos instantes de $t = 0$ a $t = 1$, depois disso dá uma volta qualquer em $\mathbb{R}^3$ e retorna à origem no instante $t = 2$, parametrizando este mesmo segmento novamente. Observe que, para $t \in [0, 1] \cup [2, 3]$, o plano normal a α é dado por $[\alpha'(t)]^\perp = [e_2, e_3]$, i.e. o plano- yz . Tome como curva shape a curva $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (\cos s, \sin s)$, o semicírculo superior. Por fim, suponha que para todo $t \in [0, 1]$, a transformação linear $A_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow [e_2, e_3]$ é dada por

$$A_t(x, y) = \begin{cases} xe_2 + ye_3, & \text{se } t \in \mathbb{Q}, \\ -xe_2 - ye_3, & \text{se } t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Note que A_t faz com que a curva shape varie bruscamente, a todo momento, entre um semicírculo acima e um semicírculo abaixo do plano $z = 0$.

Suponha ainda que, para $t \in [2, 3]$, a transformação seja dada por

$$A_t(x, y) = \begin{cases} xe_2 + ye_3, & \text{se } t \notin \mathbb{Q}, \\ -xe_2 - ye_3, & \text{se } t \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Quando a curva central retorna ao início do segmento, A_t “inverte” seu comportamento! Note que isso faz com que o conjunto tubular seja dado por um cilindro reto naquele trecho, ainda que A_t não varie continuamente.

Para evitar patologias como a do exemplo acima, somos obrigados a dar uma definição um pouco mais restrita. Poderíamos dizer simplesmente que um conjunto tubular generalizado é uma **superfície tubular generalizada** de classe $\mathcal{C}^k$ se a aplicação $\phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(t, s) = \beta_t(s) = \alpha(t) + A_t(\beta(s))$ é uma imersão de classe $\mathcal{C}^k$. Essa definição é possível, mas um tanto difícil de ser

abordada. Fixado um referencial ortonormal ao longo de α , poderíamos considerar a matriz de A_t e então as derivadas de ϕ envolveriam a derivada de α , β , da matriz de A_t no referencial ortonormal e a derivada do próprio referencial ortonormal. Isso complica consideravelmente o estudo, o que é natural se notarmos que não estamos impondo nenhuma condição sobre como A_t “gira” a curva shape em torno da curva central. Neste capítulo, iremos considerar o caso (talvez o mais simples) em que A_t gira a curva shape de forma “relativamente paralela”. A esta classe daremos o nome de **superfícies de Bishop** e utilizaremos o conceito de referenciais de Bishop desenvolvido na seção 5.1 do capítulo 1.

Definição 5.17. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ parametrizada pelo comprimento de arco, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe $\mathcal{C}^k$ e $B = \{T, N_1, N_2\}$ um referencial de Bishop de classe $\mathcal{C}^k$ sobre α , $k \geq 2$. Se a aplicação $\phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(t, s) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) N_i(t)$$

é uma imersão, dizemos que $\phi(I \times J) \subset \mathbb{R}^3$ (denotado por $\Sigma(\alpha, \beta, B)$) é uma **superfície de Bishop** de classe $\mathcal{C}^k$ de **curva central** α , **curva shape** β e referencial B .

Observação 5.18. Como queremos trabalhar com curvaturas sobre nossas superfícies, consideraremos sempre superfícies de Bishop de classe $\mathcal{C}^k$ com $k \geq 2$. Dito isso, não faremos menção à classe de diferenciabilidade nos próximos enunciados, definições, etc.

Note que para garantir que ϕ seja de classe $\mathcal{C}^k$, é natural requerer que o referencial de Bishop seja de classe $\mathcal{C}^k$ e isso exige que α seja de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Proposição 5.19. Dados $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular e B um referencial de Bishop sobre α , a aplicação $\phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(t, s) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) N_i(t)$ define uma superfície de Bishop $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ se, e somente se,

$$1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle \neq 0, \text{ para todo } (t, s) \in I \times J,$$

sendo $b = b_B^\alpha$ a assinatura normal de α com respeito a B .

Demonstração. Para que a imagem de ϕ seja uma superfície de Bishop, é necessário e suficiente que ϕ seja imersão. Temos

$$\begin{aligned} \phi_t &= \alpha' + \sum_{i=1}^2 \beta_i N_i' = T + \sum_{i=1}^2 \beta_i (-b_i T) = (1 - \langle b, \beta \rangle) T, \\ \phi_s &= \sum_{i=1}^2 \beta_i' N_i. \end{aligned}$$

Segue que $\langle \phi_t, \phi_s \rangle \equiv 0$ e sabemos que $\phi_s \neq 0$ pois β é regular. Portanto, ϕ é imersão se, e somente se, $\phi_t \neq 0$ e isso equivale a dizer que $1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle \neq 0$ sobre $I \times J$. $\square$

Fixada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, denote por $\Sigma(\alpha)$ o conjunto de todas as superfícies de Bishop que possuem α como curva central. A proposição a seguir nos diz que podemos obter $\Sigma(\alpha)$ fixando um referencial de Bishop B sobre α qualquer e variando apenas as curvas shape.

Proposição 5.20. *Fixe um referencial de Bishop $B = \{T, N_1, N_2\}$ sobre uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco. Então o conjunto $\Sigma(\alpha)$ das superfícies de Bishop centradas em α coincide com o conjunto das superfícies de Bishop centradas em α com referencial B .*

Demonstração. Considere $\Sigma(\alpha, \beta, \tilde{B})$ uma superfície de Bishop centrada em α . Sabemos da teoria de referencias de Bishop que existe $A = (a_{ij}) \in SO(2)$ tal que $A(B) = \tilde{B}$, i.e. denotando $\tilde{B} = \{T, M_1, M_2\}$, temos

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}.$$

Segue que $\Sigma(\alpha, \beta, \tilde{B})$ é a imagem da imersão

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t, s) &= \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) M_i(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) \sum_{j=1}^2 a_{ij} N_j(t) \\ &= \alpha(t) + \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 a_{ij} \beta_i(s) \right) N_j(t). \end{aligned}$$

Lembrando que $A^T = A^{-1}$, isso mostra que $\Sigma(\alpha, \beta, \tilde{B}) = \Sigma(\alpha, A^{-1}(\beta), B)$, ou seja, toda superfície de Bishop centrada em α pode ser descrita como uma superfície de Bishop centrada em α e com referencial B . Basta considerar a curva shape $A^{-1}(\beta)$, que também é regular pois β é regular e $A \in SO(2)$. $\square$

Lema 5.21. *Se a curva shape de uma superfície de Bishop é um círculo (ou seja, um arco completo de 2π), então ela é uma superfície tubular (no sentido de [Gsp] e de mesmo raio).*

Demonstração. Em toda a demonstração, não perdemos generalidade se supusermos que a classe de diferenciabilidade da definição das superfícies de Bishop é $k = 2$.

Sejam $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ e $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(s) = P + R(\cos s, \sin s).$$

Considere uma superfície de Bishop $\Sigma = \Sigma(\alpha, \beta, B)$. Por definição, Σ é imagem da imersão $\phi(t, s) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) N_i(t)$. Temos

$$\begin{aligned} \phi(t, s) &= \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) N_i(t) \\ &= \alpha(t) + (p_1 + R \cos s) N_1(t) + (p_2 + R \sin s) N_2(t) \\ &= (\alpha(t) + p_1 N_1(t) + p_2 N_2(t)) + R(\cos s N_1(t) + \sin s N_2(t)) \\ &= \gamma(t) + R(\cos s N_1(t) + \sin s N_2(t)), \end{aligned}$$

sendo $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) := \alpha(t) + p_1 N_1(t) + p_2 N_2(t)$.

Afirmamos que $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ é uma superfície tubular de raio $R > 0$ centrada em γ .

Primeiro, mostremos que γ é regular. Temos

$$\gamma' = \alpha' + p_1 N_1' + p_2 N_2' = (1 - (b_1 p_1 + b_2 p_2))T = (1 - \langle b(t), P \rangle)T.$$

Seja $t \in I$ qualquer. Como β parametriza todo um círculo, existe $s = s_t \in J$ tal que $(\cos s_t, \sin s_t)$ é ortogonal a $b(t)$. Da condição de imersão sobre ϕ , sabemos que $1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle \neq 0$, para todo $(t, s) \in I \times J$. Em particular, temos

$$0 \neq 1 - \langle b(t), \beta(s_t) \rangle = 1 - \langle b(t), P + R(\cos s_t, \sin s_t) \rangle = 1 - \langle b(t), P \rangle,$$

para todo $t \in I$. Isso mostra que γ é regular.

Para estar em conformidade com a definição de [Gsp], precisamos mostrar ainda que, uma vez parametrizada pelo comprimento de arco, γ é de classe $\mathcal{C}^3$.

Seja $\ell : I \rightarrow L$ a troca de parâmetros que torna γ parametrizada pelo comprimento de arco medido a partir de um certo $t_0 \in I$, i.e.

$$\ell(t) := \int_{t_0}^t |1 - \langle b(w), P \rangle| dw.$$

Assim, a curva γ reparametrizada por $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda(r) = \gamma(\ell^{-1}(r))$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Note que, como $b \in \mathcal{C}^1$, a função ℓ (e consequentemente ℓ^{-1}) é $\mathcal{C}^2$. Temos

$$\begin{aligned} \lambda'(r) &= (\ell^{-1})'(r) \gamma'(\ell^{-1}(r)) \\ &= \frac{1}{|1 - \langle b(\ell^{-1}(r)), P \rangle|} (\alpha'(\ell^{-1}(r)) + p_1 N_1'(\ell^{-1}(r)) + p_2 N_2'(\ell^{-1}(r))) \\ &= \frac{1 - \langle b(\ell^{-1}(r)), P \rangle}{|1 - \langle b(\ell^{-1}(r)), P \rangle|} T(\ell^{-1}(r)) = \sigma T(\ell^{-1}(r)), \end{aligned}$$

sendo $\sigma = \text{sgn}(1 - \langle b(\ell^{-1}(r)), P \rangle)$. Como $T \in \mathcal{C}^3$ e $\ell^{-1} \in \mathcal{C}^2$, temos $\lambda' \in \mathcal{C}^2$, ou seja, $\lambda \in \mathcal{C}^3$ e estamos feitos. $\square$

Finalizamos a seção com a definição de alguns tipos particulares de superfícies Bishop.

Definição 5.22. Uma superfície de Bishop $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ é dita:

- **cilíndrica** se a curva central está contida numa reta;
- **tubular** se a curva shape possui curvatura constante, ou seja, se a curva shape está contida numa reta ou círculo;
- **de revolução** se a curva central é plana e está contida num círculo.

- Observação 5.23.** 1. Note que o caso tubular inclui, além do que se poderia esperar à primeira vista, os casos em que a curva shape possui curvatura zero, ou seja, em que a curva shape é um segmento ou reta. Contudo, essa generalização passa a fazer sentido se pensarmos em segmentos e retas como sendo arcos e círculos de “raio infinito”.
2. Note que uma superfície de Bishop do tipo tubular nem sempre pode ser estendida a uma superfície tubular no sentido de [Gsp]. O primeiro motivo é o descrito no item anterior, em que a curva shape possui curvatura zero. Contudo, ainda que a curva shape seja um arco de raio finito, é possível que a condição de imersão imponha restrições que impeçam a extensão a um arco completo de 2π , situação esta que, pelo Lema 5.21, garantiria a existência de tal extensão.

5.3 Curvaturas

Nesta seção, fazemos os cálculos das curvaturas sobre uma superfície de Bishop $\Sigma(\alpha, \beta, B)$, lembrando que

- a curva central $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe $\mathcal{C}^3$ e está parametrizada pelo comprimento de arco;
- a curva shape $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular e de classe $\mathcal{C}^2$;
- $B = \{T, N_1, N_2\}$ é um referencial de Bishop de classe $\mathcal{C}^2$ sobre α de assinatura normal $b = (b_1, b_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}.$$

Note que podemos supor ainda, sem perda de generalidade, que β também está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, existe $\theta : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\beta'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, para todo $s \in J$.

Então $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ é dada pela imagem da aplicação $\phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(t, s) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^2 \beta_i(s) N_i(t), \quad (5.2)$$

que satisfaz a condição de imersão $\zeta(t, s) \neq 0$, sendo $\zeta : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta(t, s) = 1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle.$$

Como $I \times J$ é conexo e ζ é contínua (de fato, $\mathcal{C}^1$) e não nula, ζ possui sinal definido, o qual denotaremos por σ . Mais precisamente,

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{se } \zeta(t, s) > 0. \\ -1, & \text{se } \zeta(t, s) < 0. \end{cases}$$

Os **vetores tangentes** sobre $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ são dados por

$$\begin{aligned}\phi_t &= \alpha' + \sum_{i=1}^2 \beta_i N_i' = T + \sum_{i=1}^2 \beta_i (-b_i T) = \zeta T, \\ \phi_s &= \sum_{i=1}^2 \beta_i' N_i.\end{aligned}$$

Logo, as **derivadas de segunda ordem** de ϕ são dadas por

$$\begin{aligned}\phi_{tt} &= \zeta_t T + \zeta T' = -\langle b', \beta \rangle T + \zeta \sum_{i=1}^2 b_i N_i, \\ \phi_{ts} &= \zeta_s T = -\langle b, \beta' \rangle T, \\ \phi_{ss} &= \sum_{i=1}^2 \beta_i'' N_i.\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}\phi_t \times \phi_s &= \zeta T \times \left(\sum_{i=1}^2 \beta_i' N_i \right) = \zeta (\beta_1' (T \times N_1) + \beta_2' (T \times N_2)) \\ &= \zeta (-\beta_2' N_1 + \beta_1' N_2).\end{aligned}$$

Como β está parametrizada pelo comprimento de arco e N_1, N_2 são ortonormais, temos que $|\beta_2' N_1 + \beta_1' N_2| = 1$. Logo, o **campo normal unitário** sobre Σ é dado por

$$N = \sigma(-\beta_2' N_1 + \beta_1' N_2).$$

A **primeira forma fundamental** $E_{ij} := \langle \phi_i, \phi_j \rangle$ sobre Σ é dada por

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a **segunda forma fundamental** $e_{ij} := \langle \phi_{ij}, N \rangle$ é dada por

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \zeta \langle b, i\beta' \rangle & 0 \\ 0 & \sigma \langle \beta'', i\beta' \rangle \end{bmatrix}.$$

Aqui, $i\beta'$ denota o produto complexo de β' por $i = (0, 1)$ como elementos de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, i.e.

$$i\beta' = i(\beta_1', \beta_2') = (-\beta_2', \beta_1').$$

Usando que $\beta'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, observe que

$$\langle \beta'', i\beta' \rangle = \langle \theta'(-\sin \theta, \cos \theta), (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle = \theta'$$

e note que θ' é a curvatura orientada de β como curva plana.

O operador forma é dado por

$$\begin{aligned} S = -dN &= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \zeta \langle b, i\beta' \rangle & 0 \\ 0 & \sigma \langle \beta'', i\beta' \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma \langle b, i\beta' \rangle}{\xi} & 0 \\ 0 & \sigma \langle \beta'', i\beta' \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \langle b, i\beta' \rangle}{\xi} & 0 \\ 0 & \sigma \theta' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, as **curvaturas principais** κ_1, κ_2 sobre Σ são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\sigma \langle b, i\beta' \rangle}{\xi} \\ \kappa_2 &= \sigma \theta', \end{aligned}$$

e as curvaturas **média e gaussiana** são dadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\langle b, i\beta' \rangle}{\xi} + \theta' \right) \\ K &= \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\langle b, i\beta' \rangle \theta'}{\xi} \end{aligned}$$

Observe que $\kappa_1 = \frac{\sigma \langle b(t), i\beta'(s) \rangle}{\xi}$ depende de ambas as variáveis $t \in I, s \in J$, mas $\kappa_2 = \sigma \theta'(s)$ depende apenas de $s \in J$. Este fato será essencial para a técnica desenvolvida nas próximas seções para classificar as superfícies de Bishop Weingarten-polinomiais.

5.4 Weingarten-polinomiais sobre as curvaturas principais

Neste capítulo, estamos interessados em responder à seguinte pergunta:

Dado um polinômio não constante $P \in \mathbb{R}[X, Y]$, quais são as superfícies de Bishop cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$?

O estudo deste caso permitirá resolver, na próxima seção, o caso mais clássico de superfícies Weingarten-polinomiais sobre as curvaturas média e gaussiana, i.e. aquelas satisfazendo uma equação do tipo $P(K, H) = 0$, para algum polinômio não constante $P \in \mathbb{R}[X, Y]$.

A resposta a essa questão no caso das curvaturas principais será dada essencialmente pelo seguinte teorema:

Teorema 5.24. *Seja $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e denote por $\mathcal{S}(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. Se $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$, então Σ é uma superfície de Bishop cilíndrica, tubular ou de revolução.*

Primeiro, demonstraremos o teorema para o caso mais simples em que a curva central é plana, fornecendo também uma segunda versão sua, mais detalhada. Em seguida, damos a prova do caso geral em que curva central não é necessariamente plana, fornecendo também neste caso uma versão simples e uma versão detalhada do teorema.

5.4.1 Caso da curva central plana

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva central é da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Escolhamos sobre α o referencial definido por

$$T = \alpha', \quad N_1 = (-y', x', 0), \quad N_2 = T \times N_1 = (0, 0, 1).$$

Como estamos supondo α parametrizada pelo comprimento de arco, pode-se verificar que $\{T, N_1, N_2\}$ é, de fato, um referencial de Bishop sobre α . Sua assinatura normal possui a forma

$$b(t) = (b_1(t), 0), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Neste caso, b_1 fornece a curvatura com sinal da curva plana α . De fato,

$$b_1 = \langle T', N_1 \rangle = \langle \alpha'', N_1 \rangle.$$

Portanto, denotaremos b_1 por κ .

Sendo $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ a curva shape, a condição de imersão se reduz a

$$0 \neq 1 - \langle b, \beta \rangle = 1 - \kappa \beta_1.$$

Fazendo, se necessário, a troca de $\alpha(t)$ por $\gamma(t) := \alpha(-t)$ e $\{T, N_1, N_2\}(t)$ por $\{-T, -N_1, N_2\}(-t)$, podemos supor que $\sigma = \text{sgn}(1 - \kappa \beta_1) = 1$. De fato, a troca mencionada faz com que κ troque de sinal. Assim, se $1 - \kappa \beta_1 < 0$, então $1 < \kappa \beta_1$ mostra que κ e β_1 possuem o mesmo sinal. Ao trocar o sinal de κ , fazemos com que $\kappa \beta_1 < 0$, donde $1 - \kappa \beta_1 > 0$.

Portanto, as expressões das curvaturas principais se reduzem a

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{-\kappa \sin \theta}{1 - \kappa \beta_1}, \\ \kappa_2 &= \theta', \end{aligned}$$

sendo θ a função ângulo tal que $\beta' = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Dado um polinômio não constante $P \in \mathbb{R}[X, Y]$, nossa análise do conjunto $\mathcal{S}(P)$ das superfícies de Bishop de curva central plana cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ será pautada nos conjuntos definidos a seguir, obtidos a partir de P . Nessa definição, $\overline{\mathbb{R}}_+$ denota o conjunto $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ e convencionamos que $\frac{1}{+\infty} = 0$ e $|+\infty| = +\infty$.

Definição 5.25. Dado $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante, definimos o **conjunto dos raios** com respeito a X e com respeito a Y de P como sendo, respectivamente, os conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Rad}_X(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(\frac{1}{r}, 0\right) = 0 \right\}, \\ \text{Rad}_Y(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(0, \frac{1}{r}\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Definimos ainda o **conjunto dos raios críticos** de P e o **conjunto dos raios umbílicos** de P como sendo, respectivamente, os conjuntos

$$\begin{aligned}\text{Rad}_Y^*(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(X, \frac{1}{r}\right) \equiv 0 \right\}, \\ \text{Rad}_U(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) = 0 \right\}.\end{aligned}$$

Observação 5.26. (i) Os conjuntos $\text{Rad}_X(P)$ e $\text{Rad}_Y(P)$ são infinitos se, e somente se, coincidem com $\overline{\mathbb{R}}_+$. De fato, todo elemento $r > 0$ de, digamos, $\text{Rad}_X(P)$, é tal que $P(\frac{1}{r}, 0) = 0$ ou $P(-\frac{1}{r}, 0) = 0$ e, portanto, fornece uma raiz de $P(X, 0)$. Logo, se tal conjunto é infinito, $P(X, 0)$ deve ser identicamente nulo e, conseqüentemente, $\text{Rad}_X(P) = \overline{\mathbb{R}}_+$. Observe ainda que isto ocorre se, e somente se, o monômio Y é fator de P . De forma análoga, $\text{Rad}_Y(P) = \overline{\mathbb{R}}_+$ se, e somente se, X é um fator de P .

(ii) $\text{Rad}_U(P)$ é infinito se, e somente se, $X - Y$ divide P . Como no caso acima, se isso ocorre, então $\text{Rad}_U(P) = \overline{\mathbb{R}}_+$.

(iii) Todo raio crítico de P é, em particular, um raio umbílico de P e um elemento de $\text{Rad}_Y(P)$, i.e. $\text{Rad}_Y^*(P) \subset \text{Rad}_Y(P) \cap \text{Rad}_U(P)$.

(iv) $r > 0$ é um raio crítico de P se, e somente se, $Y - \frac{1}{r}$ ou $Y + \frac{1}{r}$ é fator de P . Portanto, $\text{Rad}_Y^*(P)$ é sempre finito.

A seguir, provaremos algumas proposições que justificam a definição dada acima dos diferentes raios de um polinômio P . Nessas proposições e no restante do texto, os termos **setor plano**, **setor cilíndrico circular** e **setor esférico** se referem, respectivamente, a subconjuntos de planos, cilindros circulares e esferas que possam ser obtidos como superfícies de Bishop (no presente caso, com curva central plana, mas a definição é a mesma para o caso geral). Note que os setores planos e cilíndricos circulares sempre podem ser estendidos a planos e cilindros circulares completos. Já os setores esféricos possuem restrições, sob pena de ferir a condição de imersão. Naturalmente, nos referimos ao raio de uma setor cilíndrico circular ou esférico como sendo o raio do cilindro circular ou esfera que o contém.

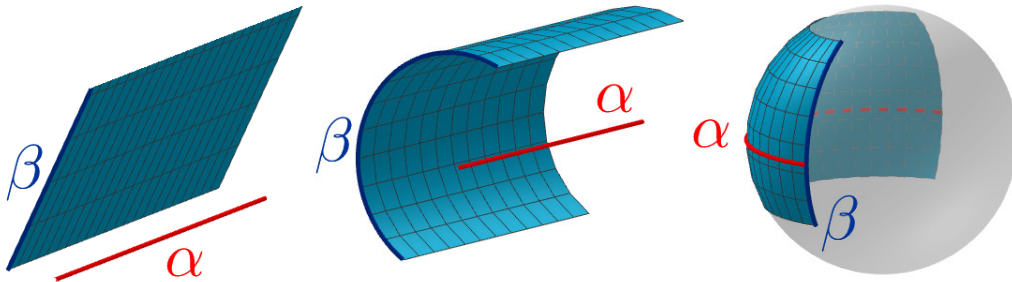


Figura 5.1: Exemplos de setores planos, cilíndricos circulares e esféricos.

De acordo com nossa convenção de que um segmento ou reta será visto como um arco ou círculo de raio infinito, também podemos olhar para um setor plano como um setor cilíndrico circular de raio infinito. Essa interpretação está implícita em todos os enunciados que seguem.

Proposição 5.27. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e denote por $\mathcal{S}_c(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cilíndricas cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$.*

- (i) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é finito, então as superfícies em $\mathcal{S}_c(P)$ são os setores cilíndricos circulares com raio em $\text{Rad}_Y(P)$.*
- (ii) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito, então $\mathcal{S}_c(P)$ é o conjunto de todas superfícies de Bishop cilíndricas.*

Demonstração. Se Σ é uma superfície de Bishop cilíndrica, então a curvatura κ da curva central é identicamente nula, donde $\kappa_1 = -\frac{\kappa \sin \theta}{1 - \kappa \beta_1} \equiv 0$. Segue que $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ se, e somente se, $P(0, \kappa_2(s)) = 0$, para todo $s \in J$. Logo, para todo $s \in J$, vale que $\frac{1}{|\kappa_2(s)|} \in \text{Rad}_Y(P)$ ou $\kappa_2(s) = 0$.

Se $\text{Rad}_Y(P)$ é finito, segue da continuidade de κ_2 que κ_2 deve ser constante. Como κ_2 fornece a curvatura da curva shape, que é uma curva plana, isso implica que ela deve estar contida numa reta (se $\kappa_2 \equiv 0$) ou círculo (se $\kappa_2 \neq 0$). A superfície Σ em cada um desses casos é um setor plano (visto como um setor cilíndrico circular de raio $+\infty$) ou um setor cilíndrico circular de raio $\frac{1}{|\kappa_2|} \in \text{Rad}_Y(P)$, respectivamente. Naturalmente, o caso das seções de planos ocorre se, e somente se, $P(0, 0) = 0$, i.e. se $+\infty \in \text{Rad}_Y(P)$.

Por outro lado, se $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito, então $P(0, Y)$ é identicamente nulo e não há nenhuma restrição sobre κ_2 . □

Proposição 5.28. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante. O conjunto $\mathcal{S}_t(P)$ das superfícies de Bishop tubulares com curva central plana cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ contém apenas:*

- (i) *os setores cilíndricos circulares com raio em $\text{Rad}_X(P)$. Neste caso, a curva central deve ser um arco (ou círculo) de raio adequado e a curva shape deve ser um segmento (ou reta) vertical;*
- (ii) *os setores cilíndricos circulares com raio em $\text{Rad}_Y(P)$. Neste caso, a curva central deve ser um segmento (ou reta) e a curva shape deve ser um arco (ou círculo);*
- (iii) *as superfícies de Bishop tubulares de curva central plana qualquer e cujo raio da curva shape é um raio crítico de P ;*
- (iv) *os setores esféricos cujo raio é um raio umbílico de P .*

Demonstração. Segue diretamente da definição dos conjuntos de raios em X , em Y , críticos e umbílicos de P que as superfícies listadas nos itens de (i) a (iv) estão todas em $\mathcal{S}_t(P)$.

Reciprocamente, suponha que $\Sigma \in \mathcal{S}_t(P)$ e denote $\kappa_2 \equiv a$.

Façamos primeiro o caso em que $a \neq 0$.

Se Σ é cilíndrica (e, portanto, um setor cilíndrico circular), então $a \in \text{Rad}_Y(P)$ e estamos no item (ii). Suponha que Σ não é cilíndrica. Neste caso temos duas possibilidades para κ_1 : ou não é constante ou é uma constante não nula. Se não é constante, então como $I \times J$ é conexo e $\kappa_1(t, s)$ é contínua, segue que $\kappa_1(t, s)$ assume infinitos valores. Logo, a interseção das curvas algébricas $P(X, Y) = 0$ e $Y - a = 0$ possui infinitos pontos, a saber, os pontos da forma $(\kappa_1(t, s), \kappa_2) = (\kappa_1(t, s), a)$. Como $Y - a$ é irredutível, isso implica que $Y - a$ é um fator de P e, conseqüentemente, o raio da curva shape, dado por $\frac{1}{|a|}$, é um raio crítico de P , i.e. pertence a $\text{Rad}_Y^*(P)$. Este caso corresponde ao item (iii).

Resta analisar o caso em que κ_1 é uma constante não nula, digamos, $\kappa_1 \equiv c \neq 0$. Lembrando que β possui a forma $\beta(s) = (p_1, p_2) + \frac{1}{a}(\sin(as + a_0), -\cos(as + a_0))$ para certos $p_i, a_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \kappa_1 \equiv c &\iff \frac{-\kappa(t) \sin(as + a_0)}{1 - \kappa(t) \left(p_1 + \frac{1}{a} \sin(as + a_0)\right)} = c \\ &\iff \kappa(t) \left(1 - \frac{c}{a}\right) \sin(as + a_0) + c(1 - \kappa(t)p_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

para todo $(t, s) \in I \times J$. Isso é possível se, e somente se, $c = a$ e $\kappa(t) \equiv \frac{1}{p_1}$. Em particular, isso mostra que $0 = P(\kappa_1, \kappa_2) = P(a, a)$, ou seja, o raio $\frac{1}{|a|}$ da curva shape é um raio umbílico de P . Neste caso, sabemos de antemão que Σ deve estar contida numa esfera, pois as superfícies umbílicas ($\kappa_1 = \kappa_2$) são classificadas e, a saber, tratam-se de superfícies planas ou esféricas. Contudo, isso também pode ser verificado usando a parametrização ϕ . Fazendo as contas, obtém-se

$$\phi(t, s) = P_0 + \frac{1}{a}(\sin(as + a_0)N_1(t) - \cos(as + a_0)N_2(t)), \quad (t, s) \in I \times J,$$

para um certo $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e $a_0 \in \mathbb{R}$. Essa parametrização descreve um setor esférico centrado em P_0 e de raio $\frac{1}{|a|}$. Portanto, estamos no caso (iv).

É interessante notar que a condição de imersão se torna

$$\sin(as + a_0) \neq 0, \quad s \in J,$$

e isso limita a abertura do arco descrito pela curva shape.

Vejamos agora o caso em que $\kappa_2 \equiv 0$ (a curva shape é um arco ou círculo de raio infinito).

Segue que $P(\kappa_1, \kappa_2) \equiv 0$ se, e somente se, $\frac{1}{|\kappa_1(t, s)|} \in \text{Rad}_X(P)$ para todo $(t, s) \in I \times J$ tal que $\kappa_1(t, s) \neq 0$ ou $+\infty \in \text{Rad}_X(P)$, nos casos em que $\kappa_1(t, s) = 0$.

Se $\text{Rad}_X(P)$ é finito, então por continuidade κ_1 deve ser constante. Se $\kappa_1 \equiv 0$, então necessariamente $P(0, 0) = 0$ e a superfície é um setor plano (cilíndrico circular de raio infinito) e novamente estamos no caso (i).

Suponha que $\kappa_1 \equiv c \neq 0$. Notando que agora β tem a forma $\beta(s) = (p_1, p_2) + s(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, $s \in J$, temos

$$c = \frac{\kappa(t) \sin \theta_0}{1 - \kappa(t)(p_1 + s \cos \theta_0)}, \quad \text{para todo } (t, s) \in I \times J,$$

e isso é possível se, e somente se, $\cos \theta_0 = 0$ e $\kappa \equiv \frac{c}{\sigma + cp_1} \neq 0$, sendo $\sigma = \sin \theta_0 = \pm 1$. Em particular, α é um arco de círculo e β está contida numa reta vertical, configurados de tal forma que a superfície de Bishop é um setor cilíndrico circular de raio $\frac{1}{|\kappa_1|} \in \text{Rad}_X(P)$ e estamos no caso (i).

Por outro lado, se $\text{Rad}_X(P)$ é infinito, então não há nenhuma restrição sobre $\kappa_1(t, s)$, donde a curva central pode ser qualquer. Observe então que $\text{Rad}_X(P)$ infinito implica que o monômio Y divide P , donde $P(X, 0) = P(X, \frac{1}{+\infty}) \equiv 0$ donde $+\infty \in \text{Rad}_Y^*(P)$. Portanto, estamos novamente no caso (iii). $\square$

Nosso objetivo principal daqui em diante é mostrar que o conjunto $\mathcal{S}(P)$ é formado essencialmente pelos casos descritos acima, i.e. por superfícies de Bishop cilíndricas, tubulares e de revolução, sendo o caso de revolução o único que detém de fato escopo para uma complexidade maior e que não pode ser classificado, a priori, com base nos conjuntos dos raios de P .

Primeiro, provamos o seguinte lema técnico.

Lema 5.29. *Seja Σ uma superfície de Bishop com curva central plana. Se existe $s_0 \in J$ tal que a função $t \in I \mapsto \kappa_1(t, s_0)$ é constante e não nula, então Σ é de revolução, i.e. a curva central descreve um arco de círculo.*

Demonstração. Seja $s_0 \in J$ tal que a função $t \in I \mapsto \kappa_1(t, s_0)$ seja constante e não nula. Denote por $c \neq 0$ essa constante. Segue que

$$c = \frac{-\kappa \sin \theta(s_0)}{1 - \kappa \beta_1(s_0)} \implies \kappa(c\beta_1(s_0) - \sin \theta(s_0)) - c = 0.$$

Como $c \neq 0$, devemos ter $c\beta_1(s_0) - \sin \theta(s_0) \neq 0$. Logo, podemos escrever

$$\kappa(t) = \frac{c}{c\beta_1(s_0) - \sin \theta(s_0)}.$$

Isso mostra que κ é constante e diferente de zero. Como a curva central é plana, isso garante que ela descreve um arco de círculo. $\square$

A condição técnica do lema acima surge ao se perguntar se $\kappa_1(t, s)$ depende, de fato, da variável t , i.e. a variável da curva central. O fato de pedirmos que a constante em questão seja não nula se deve uma necessidade técnica que aparecerá na demonstração do teorema principal.

Note que a condição do lema diz respeito à superfície. Portanto, pode ser que não se consiga testá-la na prática, a depender do exemplo, contrastando com hipóteses sobre o polinômio P , cuja verificação costuma ser muito simples. No entanto, cada superfície deve satisfazer ou não tal condição.

Enfim, estamos aptos a demonstrar a versão “simples” do nosso teorema principal para superfícies de Bishop com curva central plana. Na sequência, enunciaremos a versão detalhada, decorrente da versão simples e das proposições demonstradas acima.

Teorema 5.30. *Seja $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante. Se $\mathcal{S}(P)$ denota o conjunto das superfícies de Bishop com curva central plana cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$, então $\mathcal{S}(P)$ contém apenas superfícies de Bishop cilíndricas, tubulares e de revolução.*

Demonstração. Seja $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$ e suponha que Σ não é cilíndrica. Podemos supor ainda que Σ não satisfaz a condição do Lema 5.29, já que ela implica que Σ é de revolução. Devemos portanto, nestas condições, mostrar que Σ é tubular, i.e. que κ_2 é constante.

Como a condição do lema técnico não é satisfeita, para cada $s \in J$ vale que $\kappa_1(\cdot, s)$ ou é identicamente nula ou é não constante.

Considere o conjunto

$$F := \{s \in J : \kappa_1(\cdot, s) \equiv 0\}.$$

Observe que F é fechado. De fato, se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0 \in J$, com $s_n \in F$, então para cada $t \in I$ fixo segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_1(t, s_n) = \kappa_1(t, s_0)$, pois κ_1 é contínua. Mas $\kappa_1(t, s_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $s_n \in F$. Logo, $\kappa_1(t, s_0) = 0$ para todo $t \in I$, mostrando que $s_0 \in F$.

Afirmção 5.31. *Se $s_0 \notin F$, então $Y - \kappa_2(s_0)$ divide P . Em particular, isso implica que $\frac{1}{|\kappa_2(s_0)|} \in \text{Rad}_Y^*(P)$, se $\kappa_2(s_0) \neq 0$ ou $+\infty \in \text{Rad}_Y^*(P)$, se $\kappa_2(s_0) = 0$.*

Suponha que $s_0 \notin F$.

Defina $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\gamma(t) = (\kappa_1(t, s_0), \kappa_2(s_0))$. Note que a curva γ não é constante. De fato, $s_0 \notin F$ garante que $\kappa_1(\cdot, s_0)$ não é identicamente nula. Pelo comentário no início da demonstração, $\kappa_1(\cdot, s_0)$ não é constante.

Portanto, como γ é contínua, ela percorre infinitos pontos. Observe então que seu traço está contido nas curvas algébricas de equações

$$\begin{aligned} Y - \kappa_2(s_0) &= 0, \\ e P(X, Y) &= 0, \end{aligned}$$

pois $P(\gamma(t)) = P(\kappa_1(t, s_0), \kappa_2(s_0)) = 0$. Isso mostra que a interseção dessas curvas algébricas possui infinitos pontos.

Como $Y - \kappa_2(s_0) \in \mathbb{R}[X, Y]$ é irredutível, segue da teoria de curvas algébricas que $Y - \kappa_2(s_0)$ divide P .

Afirmção 5.32. *Se $s_0 \in F$, então $\kappa_2(s_0) = 0$ ou $Y - \kappa_2(s_0)$ divide P .*

Se $s_0 \in F$, então $\frac{-\kappa(t) \sin \theta(s_0)}{1 - \kappa(t) \beta_1(s_0)} = \kappa_1(t, s_0) = 0$, para todo $t \in I$. Como Σ não é cilíndrica, existe $t_0 \in I$ tal que $\kappa(t_0) \neq 0$. Isso implica que $\sin \theta(s_0) = 0$, donde $\theta(s_0) \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Temos duas possibilidades, $s_0 \in F^\circ$ ou $s_0 \notin F^\circ$, sendo F° o interior de F . Se $s_0 \in F^\circ$, então como θ é contínua e $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ é discreto, temos que θ é constante numa vizinhança aberta conexa de s_0 . Segue neste caso que $\kappa_2(s_0) = \theta'(s_0) = 0$. Por outro lado, se $s_0 \notin F^\circ$, então existe sequência $\{s_n\} \subset J - F$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$. Segue da afirmação anterior que $Y - \kappa_2(s_n)$ divide P , para todo $n \in \mathbb{N}$. Como P admite uma quantidade finita de tais fatores, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $n_0 < n \implies \kappa_2(s_n) \equiv a$, sendo $Y - a$ um fator de P . Segue da continuidade de κ_2 que $\kappa_2(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_2(s_n) = a$, donde $Y - \kappa_2(s_0)$ é um fator de P .

Com essas duas afirmações concluímos que

$$\kappa_2(s) \in \{0\} \cup \{a \in \mathbb{R} : Y - a \text{ divide } P\},$$

para todo $s \in J$. Mas esse conjunto é finito. Como κ_2 é contínua e J é conexo, segue que κ_2 deve ser constante, i.e. Σ é tubular. $\square$

Unificando as proposições do início da seção com o teorema acima, obtemos a versão detalhada do nosso teorema.

Teorema 5.33. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e denote por $\mathcal{S}(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop com curva central plana cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. Então os elementos de $\mathcal{S}(P)$ são:*

- (i) *As superfícies de Bishop de revolução satisfazendo $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. Este caso inclui (mas não se reduz a) os setores cilíndricos circulares com raio finito em $\text{Rad}_X(P)$ e os setores esféricos com raio finito em $\text{Rad}_U(P)$ e estes são os únicos setores cilíndricos circulares e esféricos em $\mathcal{S}(P)$ que podem ser obtidos como uma superfície de Bishop de revolução;*
- (ii) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é finito, $\mathcal{S}(P)$ contém também os setores cilíndricos circulares de raio em $\text{Rad}_Y(P)$ e as superfícies de Bishop tubulares com raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$.*
- (iii) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito, $\mathcal{S}(P)$ contém também as superfícies de Bishop cilíndricas e as superfícies de Bishop tubulares com raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$.*

Demonstração. Seja $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$. Se Σ é de revolução e é um setor cilíndrico circular de raio finito, então κ_1 é constante não nula e $\kappa_2 \equiv 0$, donde $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0 \implies P(\kappa_1, 0) = 0$, ou seja, o raio do setor cilíndrico circular $r := \frac{1}{|\kappa_1|}$ está em $\text{Rad}_X(P)$. Similarmente, se Σ é um setor esférico de raio finito $r > 0$, então $\kappa_1 = \kappa_2$ com $|\kappa_1| = \frac{1}{r}$ e $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ garante que $r \in \text{Rad}_U(P)$.

Suponha agora que $\text{Rad}_Y(P)$ é finito. Se Σ não é de revolução, então a versão simples do teorema nos diz que Σ deve ser cilíndrica ou tubular. Se for cilíndrica, o item (i) da Proposição 5.27 nos diz que Σ deve ser um setor cilíndrico circular com raio em $\text{Rad}_Y(P)$. Por outro lado, se Σ for tubular, então ela deve ser de um dos tipos listados na Proposição 5.28 mas, como estamos supondo que Σ não é de revolução, ela deve ser especificamente dos tipos (ii) ou (iii), ou seja, setores cilíndricos circulares com raio em $\text{Rad}_Y(P)$ ou superfícies de Bishop tubulares de curva central plana qualquer com raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$. Isso está de acordo com o item (ii) deste teorema. Reciprocamente, é fácil ver que qualquer superfície deste tipo está em $\mathcal{S}(P)$.

Por fim, suponha que $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito. Isso implica que X divide P , o que já garante que $\mathcal{S}(P)$ contém todas as superfícies de Bishop cilíndricas (pois neste caso $\kappa_1 \equiv 0$). Se $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$ não é de revolução nem cilíndrica, então pela versão simples do teorema ela deve ser tubular. Olhando para a Proposição 5.28, vemos que o único item ainda não incluso pelos casos cilíndrico e de revolução é o item (iii), i.e. as superfícies de Bishop tubulares de curva central plana qualquer e raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$. $\square$

5.4.2 Caso geral

Nesta seção, provaremos teorema da seção anterior em seu contexto geral, i.e. sem supor que a curva central da superfície de Bishop é uma curva plana.

A demonstração segue essencialmente os mesmos passos do caso mais simples, mas com alguns obstáculos adicionais.

Note que as definições dos conjuntos $\text{Rad}_X(P)$, $\text{Rad}_Y(P)$, $\text{Rad}_Y^*(P)$ e $\text{Rad}_U(P)$ independem do fato da curva central ser ou não plana e, portanto, continuam as mesmas.

Convém lembrar que no caso geral as curvaturas principais de uma superfície de Bishop $\Sigma(\alpha, \beta, B)$ são dadas por

$$\kappa_1 = \frac{\sigma \langle b, i\beta' \rangle}{\zeta}, \quad \kappa_2 = \theta',$$

sendo b a assinatura normal de α com respeito ao referencial B , θ a função ângulo tal que $\beta' = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\zeta = 1 - \langle b, \beta \rangle \neq 0$ e σ o sinal de ζ .

Note que os conceitos de setores planos, cilíndricos circulares e esféricos continuam os mesmos, i.e. são subconjuntos de planos, cilindros circulares e esferas, respectivamente, que podem ser obtidos como superfícies de Bishop. Nos dois primeiros casos, os setores no caso geral são, de fato, os mesmos do caso particular em que a curva central é plana. Não se pode dizer o mesmo a respeito dos setores esféricos. Permitindo que a curva central seja espacial, podemos obter setores esféricos que não são obtidos como uma superfície de Bishop de revolução, como era o caso quando considerávamos a curva central plana. Contudo, todos eles devem possuir curva central contida numa esfera (veja a figura abaixo). Uma observação interessante é que, assim, um setor esférico pode ser uma esfera completa sem ferir a condição de imersão! Para visualizar essa possibilidade, imagine que o setor azul da figura abaixo é obtido ao se passar um pincel com tinta sobre a superfície da esfera e que a “largura” do pincel corresponde à abertura da curva shape (que, a saber, deve ser um arco de círculo). Basta então pintar toda sua superfície, tomando o cuidado para que todos os pontos de contato do pincel com a esfera estejam sempre “deslizando”, pois um ponto fixo em torno do qual o pincel gira fere a condição de imersão. Observe contudo que, para cobrir toda a esfera, alguns pontos deverão ser pintados mais de uma vez, ou seja, a imersão não será injetora.

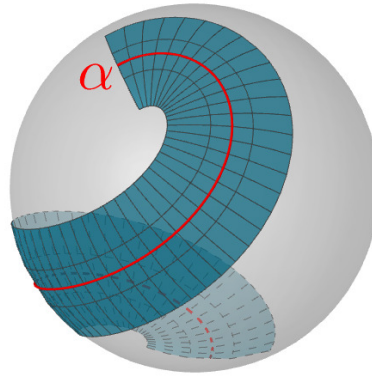


Figura 5.2: Setor esférico cuja curva central não é plana.

Nosso primeiro passo é demonstrar uma nova versão da Proposição 5.28 de superfícies de Bishop tubulares. Note que não precisamos fazer o mesmo para a Proposição 5.27 para superfícies cilíndricas pois essas possuem, necessariamente, curva central plana por se tratar de um segmento ou reta.

Proposição 5.34. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante. O conjunto $\mathcal{S}_t(P)$ das superfícies de Bishop tubulares cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ contém apenas:*

- (i) *os setores cilíndricos circulares com raio $r > 0$ em $\text{Rad}_X(P)$. Neste caso, a curva central deve ser um arco (ou círculo) de raio adequado e a curva shape deve ser um segmento (ou reta) vertical;*
- (ii) *os setores cilíndricos circulares com raio $r > 0$ em $\text{Rad}_Y(P)$. Neste caso, a curva central deve ser um segmento (ou reta) e a curva shape deve ser um arco (círculo) de mesmo raio $r > 0$;*
- (iii) *as superfícies de Bishop tubulares de curva central qualquer e cujo raio da curva shape é um raio crítico de P ;*
- (iv) *os setores esféricos cujo raio é um raio umbílico de P .*

Demonstração. Segue da definição dos conjuntos de raios de P que as superfícies listadas nos itens de (i) a (iv) estão em $\mathcal{S}_t(P)$.

Suponha que $\Sigma \in \mathcal{S}_t(P)$ e denote $\kappa_2 \equiv a$.

Façamos primeiro o caso em que $a \neq 0$.

Se Σ é cilíndrica (e, portanto, um setor cilíndrico circular), então a Proposição 5.27 nos garante que $a \in \text{Rad}_Y(P)$ e estamos no item (ii). Se Σ não é cilíndrica, então temos duas possibilidades: κ_1 não é constante ou é uma constante não nula. Se não é constante, então como $I \times J$ é conexo e $\kappa_1(t, s)$ é contínua, segue que $\kappa_1(t, s)$ assume infinitos valores. Logo, a interseção das curvas algébricas $P(X, Y) = 0$ e $Y - a = 0$ possui infinitos, a saber, os pontos da forma $(\kappa_1(t, s), \kappa_2) = (\kappa_1(t, s), a)$. Como $Y - a$ é irredutível, isso implica que $Y - a$ é um fator de P e, consequentemente, o raio da curva shape dado por $\frac{1}{|a|}$ é um raio crítico de P , i.e. pertence a $\text{Rad}_Y^*(P)$. Este caso corresponde ao item (iii).

Resta analisar o caso em que κ_1 é uma constante não nula, digamos, $\kappa_1 \equiv c \neq 0$. A condição $\kappa_2 = a = \sigma\theta'$, implica que a curva shape possui a forma $\beta(s) = (p_1, p_2) + \frac{\sigma}{a}(\sin\theta(s), -\cos\theta(s))$ com $\theta(s) = \sigma as + a_0$ para certos $p_i, a_0 \in \mathbb{R}$. Segue que

$$\kappa_1 \equiv c \iff \frac{\sigma\langle b, i\beta' \rangle}{1 - \langle b, \beta \rangle} = c \iff \langle b, \sigma i\beta' + c\beta \rangle = c$$

sobre todo $I \times J$. Note que

$$\begin{aligned} \sigma i\beta' + c\beta &= \sigma(-\sin\theta, \cos\theta) + c(p_1, p_2) + \frac{\sigma c}{a}(\sin\theta, -\cos\theta) \\ &= c(p_1, p_2) + \sigma\left(1 - \frac{c}{a}\right)(-\sin\theta, \cos\theta). \end{aligned}$$

Portanto, se $1 - \frac{c}{a} \neq 0$, então $\sigma i\beta' + c\beta$ descreve ao menos um arco de círculo, donde será impossível que $\langle b, \sigma i\beta' + c\beta \rangle$ seja constante não nula. Portanto, concluímos que $c = a$, i.e. $\kappa_1 \equiv a$ e Σ deverá ser um setor esférico de raio $\frac{1}{|a|} \in \text{Rad}_U(P)$. Além disso, a equação $\langle b, \sigma i\beta' + c\beta \rangle = c$ se reduz a $\langle b, (p_1, p_2) \rangle = 1$ e isso implica que a curva central está contida numa esfera, não necessariamente de mesmo raio $\frac{1}{|a|}$, mas numa configuração específica de forma que a superfície Σ seja uma esfera com esse raio. A condição de imersão neste caso se reduz a

$$\langle b, i\beta' \rangle \neq 0,$$

e isso limita a relação entre a curva central e a abertura do arco da curva shape. Estamos no caso (iv).

Suponhamos agora que $\kappa_2 \equiv 0$ (caso em que a curva shape possui raio infinito).

Segue que $P(\kappa_1, \kappa_2) = P(\kappa_1, 0) \equiv 0$ se, e somente se, $\frac{1}{|\kappa_1(t, s)|} \in \text{Rad}_X(P)$ para todo $(t, s) \in I \times J$ tal que $\kappa_1(t, s) \neq 0$ ou $+\infty \in \text{Rad}_X(P)$, nos casos em que $\kappa_1(t, s) = 0$.

Se $\text{Rad}_X(P)$ é finito, então por continuidade κ_1 deve ser constante. Se $\kappa_1 \equiv 0$, então necessariamente $P(0, 0) = 0$ e a superfície é um setor plano (cilíndrico circular de raio infinito) e estamos no caso (i).

Suponha que $\kappa_1 \equiv c \neq 0$. Neste caso, β tem a forma $\beta(s) = (p_1, p_2) + s(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, $s \in J$, donde

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sigma\langle b, i\beta' \rangle}{1 - \langle b, \beta \rangle} \iff \langle b, \sigma i\beta' + c\beta \rangle = c, \\ &\iff \langle b, \sigma(-\sin\theta_0, \cos\theta_0) + c(p_1, p_2) + cs(\cos\theta_0, \sin\theta_0) \rangle \equiv c \end{aligned}$$

sobre todo $I \times J$. Observe que isso só é possível se $\langle b, (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \rangle \equiv 0$. Mas isso implica que a curva central deve ser plana. Olhando para as opções da Proposição 5.28, vemos que α deve ser um arco de círculo e β está contida numa reta vertical, configurados de tal forma que a superfície de Bishop seja um setor cilíndrico circular de raio $\frac{1}{|\kappa_1|} \in \text{Rad}_X(P)$ e estamos no caso (i).

Por outro lado, se $\text{Rad}_X(P)$ é infinito, então não há nenhuma restrição sobre $\kappa_1(t, s)$, donde a curva central pode ser qualquer. Observe então que $\text{Rad}_X(P)$ infinito implica que o monômio Y divide P , donde $P(X, 0) = P(X, \frac{1}{+\infty}) \equiv 0$. Portanto, $+\infty \in \text{Rad}_Y^*(P)$ e estamos novamente no caso (ii). $\square$

Seguindo em direção ao nosso teorema principal, demonstramos agora o seguinte lema técnico, cuja demonstração é mais delicada que aquela para o caso em que a curva central é plana.

Lema 5.35. *Seja Σ uma superfície de Bishop. Se existe $s_0 \in J$ tal que a função $t \in I \mapsto \kappa_1(t, s_0)$ é constante e não nula, então a curva central de Σ está contida numa esfera. Se, além disso, $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$ com $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e Σ não é de revolução, então Σ é tubular.*

Demonstração. Seja $s_0 \in J$ tal que

$$\frac{\sigma \langle b(t), i\beta'(s_0) \rangle}{\zeta(t, s_0)} \equiv c, \text{ para todo } t \in I.$$

Lembrando que $\zeta(t, s) = 1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle$, temos

$$1 - \left\langle b(t), \beta(s_0) + \frac{\sigma}{c} i\beta'(s_0) \right\rangle = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Isso mostra que $1 - \langle b(t), v \rangle = 0$, para $v := \beta(s_0) + \frac{\sigma}{c} i\beta'(s_0) \neq 0$, ou seja, a assinatura normal b de α está contida numa reta que não passa pela origem. Isso implica que α está contida numa esfera.

Suponha agora que $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$ e Σ não é de revolução.

Defina o conjunto

$$F := \{s \in J : t \mapsto \kappa_1(t, s) \text{ é constante}\}.$$

Note que $\kappa_1(\cdot, s) \neq 0$, para todo $s \in F$. De fato, se existisse $s_0 \in F$ com $\kappa_1(\cdot, s_0) \equiv 0$, então

$$\frac{\sigma \langle b(t), i\beta'(s_0) \rangle}{1 - \langle b(t), \beta(s_0) \rangle} \equiv 0 \implies \langle b(t), i\beta'(s_0) \rangle = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Isso implica que b satisfaz uma equação da forma $\langle b, u \rangle = 0$, $u \neq 0$, i.e. está contida em uma reta passando pela origem o que, por sua vez, implica que a curva central é plana. Como já sabemos que a curva central está contida numa esfera, isso implicaria que Σ é uma superfície de Bishop de revolução, contradizendo nossa hipótese.

Note que F é fechado em J . De fato, seja $s_0 \in J$ e $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$. Para cada $t \in I$ fixado, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_1(t, s_n) = \kappa_1(t, s_0)$, pois κ_1 é contínua. Mas cada $\kappa_1(\cdot, s_n) \equiv c_n$ é constante. Segue que, para todo $t \in I$,

$$\kappa_1(t, s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_1(t, s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

o que mostra que $\kappa_1(\cdot, s_0)$ é constante. Portanto, $s_0 \in F$ e com isso mostramos que F é fechado em J .

Se $s \in J - F$, então $Y - \kappa_2(s)$ é fator de P . Basta definir a curva $\gamma_s(t) = (\kappa_1(t, s), \kappa_2(s))$ e observar que ela não é constante e está contida nas curvas algébricas $Y - \kappa_2(s) = 0$ e $P = 0$. Portanto, em cada componente conexa do aberto $J - F$, temos κ_2 constante, assumindo um valor tal que $\frac{1}{|\kappa_2|} \in \text{Rad}_Y^*(P)$ ou $+\infty \in \text{Rad}_Y^*(P)$, caso o valor de κ_2 seja zero.

Suponha agora que $s \in F$. Queremos mostrar que, também neste caso, $Y - \kappa_2(s)$ divide P . Temos

$$\begin{aligned} 0 \neq c &\equiv \kappa_1(\cdot, s) = \frac{\sigma \langle b(t), i\beta'(s) \rangle}{1 - \langle b(t), \beta(s) \rangle} \\ &\iff 1 - \left\langle b(t), \frac{1}{c} \sigma i\beta'(s) + \beta(s) \right\rangle = 0, \text{ para todo } t \in I. \end{aligned}$$

Já temos uma equação da forma $1 - \langle b(t), v \rangle = 0$, para todo $t \in I$ e um certo $v \in \mathbb{R}^2$ não nulo. Isso implica que

$$\left\langle b(t), v - \left(\frac{1}{c} \sigma i\beta'(s) + \beta(s) \right) \right\rangle = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Como b não pode ser constante (pois a curva central não é plana), isso implica que $v - \left(\frac{1}{c} \sigma i\beta'(s) + \beta(s) \right) = 0$, ou seja

$$\frac{\sigma}{c} i\beta'(s) + \beta(s) \equiv v, \text{ para todo } s \in F. \quad (5.3)$$

Note que s está fixo na equação acima. Temos duas possibilidades: s está ou não no interior de F . Se não está, então s é ponto de acumulação do complementar $J - F$, donde existe uma sequência de elementos distintos $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J - F$ convergindo para s . Pelo que já mostramos, sabemos que $Y - \kappa_2(s_n)$ divide P , para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $s_n \in J - F$. Como existem finitos tais valores para $\kappa_2(s_n)$, isso implica que a sequência deve ser constante a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$ e, em particular, coincidir com $\kappa_2(s)$ donde teremos também que $Y - \kappa_2(s)$ divide P .

Suponha portanto que s está no interior de F . Neste caso, a equação (5.3) vale numa vizinhança aberta de s . Podemos derivá-la nessa vizinhança, obtendo

$$\left(1 - \frac{\sigma \theta'}{c} \right) \beta' \equiv 0$$

e isso acontece se, e somente se, $\kappa_2 = \sigma \theta' \equiv c$ sobre essa vizinhança. Portanto, denotando por F° o interior de F , provamos que:

- se $s \in J - F^\circ$, então $Y - \kappa_2(s)$ divide P (lembrando que P possui uma quantidade finita de tais fatores);
- se $s \in F^\circ$, então existe uma vizinhança $J_s \subset F^\circ$ de s sobre a qual κ_2 é constante.

Segue do lema abaixo que κ_2 deve ser constante e isso prova que Σ é tubular. $\square$

Lema 5.36. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com I aberto. Se existe um conjunto $A \subset I$, aberto em I , tal que*

- *se $x \in I - A$, então $f(x) \in \{a_1, \dots, a_n\}$, para certos $a_i \in \mathbb{R}$,*
- *se $x \in A$, então f é constante sobre uma vizinhança aberta $I_x \subset A$ de x ,*

então f é constante.

Demonstração. Se $I - A = \emptyset$, nada temos a demonstrar. Suponha portanto que $I - A \neq \emptyset$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que cada I_x é conexo, para todo $x \in A$.

Fixe $x \in A$ e seja $\mathcal{I}_x$ o intervalo maximal contendo x tal que $\mathcal{I}_x \subset A$ e $f(y) = f(x)$, para todo $y \in \mathcal{I}_x$.

Note que $I_x \subset \mathcal{I}_x$ e portanto tal conjunto não é vazio.

Note que $\mathcal{I}_x$ é aberto. De fato, se $y \in \mathcal{I}_x$, em particular, $f(y) = f(x)$. Como f é constante sobre I_y , temos que $f(z) = f(x)$, para todo $z \in I_y$. Como I_y é conexo e $y \in \mathcal{I}_x$, temos que $\mathcal{I}_x \cup I_y \subset A$ é um intervalo com $f(z) = f(x)$, para todo $z \in \mathcal{I}_x \cup I_y$. Pela maximalidade de $\mathcal{I}_x$, segue que $\mathcal{I}_x \cup I_y \subset \mathcal{I}_x$, donde $I_y \subset \mathcal{I}_x$. Isso mostra que $\mathcal{I}_x$ é aberto.

Como $I - A \neq \emptyset$, temos que $\mathcal{I}_x \subsetneq I$, donde $\inf \mathcal{I}_x > \inf I$ ou $\sup \mathcal{I}_x < \sup I$. Suponha, sem perda de generalidade que $\sup \mathcal{I}_x < \sup I$. Em particular, $\sup \mathcal{I}_x \in I$.

Observe então que $\sup \mathcal{I}_x \in I - A$. De fato, se $\sup \mathcal{I}_x \in A$, então pela continuidade de f e aderência do supremo ao conjunto $\mathcal{I}_x$, segue que $f(\sup \mathcal{I}_x) = f(x)$. Mas então $\mathcal{I}_x \cup I_{\sup \mathcal{I}_x}$ é um intervalo contido em A sobre o qual $f \equiv f(x)$. Como $I_{\sup \mathcal{I}_x}$ é aberto não vazio, temos $\sup \mathcal{I}_x < \sup(\mathcal{I}_x \cup I_{\sup \mathcal{I}_x})$. Por outro lado, pela maximalidade de $\mathcal{I}_x$, temos $\mathcal{I}_x \cup I_{\sup \mathcal{I}_x} \subset \mathcal{I}_x$, uma contradição.

Mas então, se $\sup \mathcal{I}_x \in I - A$, segue da hipótese do nosso lema que $f(\sup \mathcal{I}_x) \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Pela continuidade de f e aderência do supremo, concluímos que $f(z) \in \{a_1, \dots, a_n\}$, para todo $z \in \mathcal{I}_x$. Em particular, $f(x) \in \{a_1, \dots, a_n\}$.

Portanto, mostramos que $f(x) \in \{a_1, \dots, a_n\}$, para todo $x \in A$. Segue que $f(x) \in \{a_1, \dots, a_n\}$ para todo $x \in I$. Como f é contínua e I é conexo, devemos ter f constante. $\square$

Finalmente, podemos demonstrar a versão simples do nosso teorema principal.

Teorema 5.37. *Seja $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ um polinômio não constante e $\mathcal{S}(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. Se $\Sigma \in \mathcal{S}(P)$, então Σ é cilíndrica, tubular ou de revolução.*

Demonstração. Se Σ satisfaz a condição do Lema 5.35, então ela é de revolução ou tubular. Portanto, podemos supor que Σ não é cilíndrica e que não satisfaz a condição do Lema 5.35. Em particular, isso implica também que Σ não é de revolução. Portanto, devemos mostrar que Σ é tubular, i.e. que κ_2 é constante.

Como a condição do lema não é satisfeita, para cada $s \in J$ vale que

$$\kappa_1(\cdot, s) \text{ não é constante ou } \kappa_1(\cdot, s) \equiv 0.$$

Considere

$$F := \{s \in J : \kappa_1(\cdot, s) \equiv 0\}.$$

Note que F é fechado em J . De fato, se $s_n \rightarrow s_0 \in J$, com $s_n \in F$, então, para cada $t \in I$ fixo, segue da continuidade de κ_1 que $0 = \kappa_1(t, s_n) \rightarrow \kappa_1(t, s_0) \implies \kappa_1(\cdot, s_0) \equiv 0 \implies s_0 \in F$.

Afirmção 5.38. *Se $s \notin F$, então $Y - \kappa_2(s)$ é um fator de P .*

Suponha que $s \notin F$.

Defina $\gamma_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\gamma_s(t) = (\kappa_1(t, s), \kappa_2(s))$. A curva γ_s não é constante pois $s \notin F$ garante que $\kappa_1(\cdot, s)$ não é identicamente nula (veja o comentário no início da demonstração).

Portanto, como γ_s é contínua, ela percorre infinitos pontos e seu traço está contido nas curvas algébricas de equações

$$Y - \kappa_2(s) = 0,$$

$$\text{e } P(X, Y) = 0,$$

pois $P(\gamma_s(t)) = P(\kappa_1(t, s), \kappa_2(s)) = 0$. Isso mostra que a interseção dessas curvas algébricas possui infinitos pontos.

Como $Y - \kappa_2(s) \in \mathbb{R}[X, Y]$ é irredutível, segue da teoria de Geometria Algébrica para curvas algébricas que $Y - \kappa_2(s)$ é fator de P . Isso prova a afirmação.

Afirmção 5.39. *Se $s \in F$, então $Y - \kappa_2(s)$ é fator de P ou então $\kappa_2(s) = 0$.*

De fato, para todo $s \in F$, vale que $\kappa_1(\cdot, s) \equiv 0$, donde $\langle b(t), i\beta'(s) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Como a curva central não está contida em uma reta (pois Σ não é cilíndrica), existe $t_0 \in I$ tal que $b(t_0) \neq \vec{0}$ (lembre-se que a curvatura de α em t é dada por $\kappa(t) = |b(t)|$).

Logo, $\langle b(t_0), i\beta'(s) \rangle = 0$, para todo $s \in F$. Como $i\beta'$ é unitário e pertence a $\mathbb{R}^2$, isso implica que $\beta'(s)$ assume, no máximo, dois valores quando $s \in F$. Ou seja, existe $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $s \in F \implies \beta'(s) \in \{-p, p\}$.

Seja $s_0 \in F$ qualquer. Temos dois casos a analisar: $s_0 \in F^\circ$ e $s_0 \notin F^\circ$. Se $s_0 \notin F^\circ$, então s_0 é aderente ao complementar $J - F$ donde, pela continuidade de κ_2 e finitude de valores assumidos por κ_2 em $J - F$, concluímos que $\kappa_2(s_0)$ também é tal que $Y - \kappa_2(s_0)$ é fator de P .

Suponha que $s_0 \in F^\circ$. Neste caso, há uma vizinhança F_0 em torno de s_0 inteiramente contida em F . Podemos supor que F_0 é conexa. Segue dos argumentamos acima que, para todo $s \in F_0$, $\beta'(s) \in \{-p, p\}$. Como $\beta' = (\cos \theta, \sin \theta)$ é contínua, isso implica que β' é constante sobre F_0 . Em particular, isso implica que $\kappa_2(s_0) = \sigma \theta'(s_0) = 0$. Isso prova a afirmação.

Juntando as afirmações, provamos que

$$\text{para todo } s \in J, \kappa_2(s) = 0 \text{ ou } Y - \kappa_2(s) \text{ é fator de } P.$$

Portanto, κ_2 assume uma quantidade finita de valores. Como κ_2 é contínua, devemos ter κ_2 constante e Σ é uma superfície de Bishop tubular. $\square$

Como as conclusões das proposições que fornecem detalhes sobre os casos cilíndrico e tubular são as mesmas, a versão detalhada do teorema é a mesma ao se retirar a hipótese de que a curva central é plana, observando que no caso geral nem todo setor esférico é obtido como uma superfície de revolução. Por completude, enunciamos essa versão abaixo.

Teorema 5.40. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e denote por $\mathcal{S}(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$. Então os elementos de $\mathcal{S}(P)$ são:*

- (i) *As superfícies de Bishop de revolução satisfazendo $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$;*
- (ii) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é finito, $\mathcal{S}(P)$ contém também os setores cilíndricos circulares de raio em $\text{Rad}_Y(P)$ e as superfícies de Bishop tubulares com raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$.*
- (iii) *Se $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito, $\mathcal{S}(P)$ contém também as superfícies de Bishop cilíndricas e as superfícies de Bishop tubulares com raio em $\text{Rad}_Y^*(P)$.*

Além disso, os setores cilíndricos circulares em $\mathcal{S}(P)$ obtidos como superfícies de Bishop de revolução, são aqueles que possuem raio em $\text{Rad}_X(P)$. Similarmente, os setores esféricos em $\mathcal{S}(P)$ são aqueles que possuem raio em $\text{Rad}_U(P)$.

Exemplo 5.41 (Caso linear em K, H). Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ dado por $P(X, Y) = aXY + b\left(\frac{X+Y}{2}\right) + c$ com $a^2 + b^2 > 0$. Note que este polinômio fornece o caso de superfícies Weingarten-lineares em K, H . De fato, se as curvaturas principais de uma superfície satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = P(\kappa_1, \kappa_2) &= a\kappa_1\kappa_2 + b\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) + c \\ &= aK + bH + c. \end{aligned}$$

Suponhamos, apenas para efeito de ilustração, que a, b e c são todos não nulos (os demais casos são tratados da mesma maneira). Teremos

$$\begin{aligned} \text{Rad}_X(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(\frac{1}{r}, 0\right) = \frac{b}{2r} + c = 0 \right\} \\ \text{Rad}_Y(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(0, \frac{1}{r}\right) = \frac{b}{2r} + c = 0 \right\} \\ \text{Rad}_Y^*(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(X, \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{2}\right)X + \frac{b}{2r} + c \equiv 0 \right\} \\ \text{Rad}_U(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) = \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} + c = 0 \right\} \end{aligned}$$

Podemos ver então que $\text{Rad}_X(P) = \text{Rad}_Y(P) = \left\{ \left| \frac{b}{2c} \right| \right\}$. Para $\text{Rad}_Y^*(P)$ e $\text{Rad}_U(P)$ temos:

$$\begin{aligned} \text{Rad}_Y^*(P) &= \begin{cases} \left\{ \left| \frac{b}{2c} \right| \right\}, & \text{se } a = b^2c \\ \emptyset, & \text{se } a \neq b^2c \end{cases} \\ \text{Rad}_U(P) &= \begin{cases} \left\{ \left| \frac{2a}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, \left| \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \right\}, & \text{se } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ \emptyset, & \text{se } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, se $a = b^2c$, temos $\text{Rad}_Y^*(P) = \text{Rad}_X(P) = \text{Rad}_Y(P)$ e o Teorema 5.40 nos diz que, além das superfícies de Bishop de revolução descritas abaixo, $\mathcal{S}(P)$ contém todas as superfícies de Bishop

tubulares de raio $r = \left| \frac{b}{2c} \right|$. Se $a \neq b^2c$, então $\mathcal{S}(P)$ contém apenas, além das superfícies de Bishop de revolução, setores cilíndricos circulares de raio $r = \left| \frac{b}{2c} \right|$.

Para as superfícies de Bishop de revolução em $\mathcal{S}(P)$ podemos supor, sem perda de generalidade, que a curva central é um círculo de raio 1, i.e. $\kappa \equiv 1$, obtendo que elas devem satisfazer a equação

$$\frac{-a \sin \theta}{1 - \beta_1} + \frac{b}{2} \left(\frac{-a \sin \theta}{1 - \beta_1} + \theta' \right) + c = 0.$$

Exemplo 5.42 (Norma da segunda forma constante). Considere $P(X, Y) = X^2 + Y^2 - \frac{1}{c^2}$, com $c > 0$. Afirmamos que $\mathcal{S}(P)$ é o conjunto contendo os setores cilíndricos circulares de raio c e setores esféricos de raio $\sqrt{2}c$.

De fato, neste caso teremos

$$\begin{aligned} \text{Rad}_X(P) &= \text{Rad}_Y(P) = \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \right\} = \{c\} \\ \text{Rad}_Y^*(P) &= \emptyset \\ \text{Rad}_U(P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \frac{2}{r^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \right\} = \{\sqrt{2}c\} \end{aligned}$$

Logo, o Teorema 5.40 nos diz que, além de superfícies de Bishop de revolução, $\mathcal{S}(P)$ possui apenas setores cilíndricos de raio c .

Para as superfícies de Bishop de revolução podemos supor $\kappa \equiv 1$, obtendo a equação

$$\left(\frac{\sin \theta(s)}{1 - \beta_1(s)} \right)^2 + (\theta'(s))^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \text{para todo } s \in J.$$

Se buscarmos soluções com θ constante, recaímos no caso das tubulares - mais especificamente daquelas com raio infinito. Este caso está contemplado se, e somente se, $c = +\infty$ sendo $P(X, Y) = X^2 + Y^2$ e estamos falando de setores planares. Suponha então que θ não é constante e seja J_0 uma vizinhança aberta sobre a qual $\theta'(s) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que J_0 é da forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$ (em particular, $0 \in J_0$, sobre o qual tomaremos as condições iniciais). Observe que a existência de uma tal solução contínua implica que

$$\theta'(s) = \sigma \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{\sin \theta(s)}{1 - \beta_1(s)} \right)^2},$$

para certo $\sigma = \pm 1$. Além disso, recordemos que $\beta_1'(s) = \cos \theta(s)$. Isso garante a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial. Para $s \in J_0$, defina

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \sigma \frac{\sqrt{2}}{2c} s + \theta_0, \\ \beta_1(s) &= 1 + \sqrt{2}c \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2c} s + \theta_0 \right). \end{aligned}$$

Esta é a solução do problema com valor inicial

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0, \\ \beta_1(0) &= 1 + \sqrt{2}c \sin \theta_0.\end{aligned}$$

Isso nos diz também que β_2 tem a forma $\beta_2(s) = p_2 - \sqrt{2}c \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2c}s + \theta_0\right)$, para algum $p_2 \in \mathbb{R}$. Note que o intervalo máximo de definição deve ser tal que $\sin \theta(s) \neq 0$ pois $1 - \beta_1(s)$ deve ser não nulo. Notando que α é um arco de círculo da forma $\alpha(t) = P_0 - N_1(t)$, segue que

$$\begin{aligned}\phi(t, s) &= \alpha(t) + \beta_1(s)N_1(t) + \beta_2(s)N_2 \\ &= (P_0 + p_2N_2) + \sqrt{2}c(\sin \theta(s)N_1(t) - \cos \theta(s)N_2).\end{aligned}$$

Isso mostra que a superfície de Bishop parametrizada é um setor de esfera centrada em $P_0 + p_2N_2$ e de raio $\sqrt{2}c$.

5.5 Weingarten-polinomiais sobre (H, K)

Nas seções anteriores nos dedicamos ao problema $\mathcal{S}(P)$, das superfícies de Bishop cujas curvaturas principais satisfazem $P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$, para um polinômio $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante. Chamamos essas superfícies de Weingarten-polinomiais sobre as curvaturas principais. Contudo, classicamente o problema de maior interesse é aquele que leva em conta não as curvaturas principais mas sim as curvaturas média e gaussiana.

A boa notícia é que toda superfície Weingarten-polinomial em H, K é também uma Weingarten polinomial sobre as curvaturas principais κ_1, κ_2 . De fato, basta observar que, se $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ é um polinômio, então $Q_P(X, Y) := P\left(XY, \frac{X+Y}{2}\right)$ também é um polinômio. Assim, se Σ é uma superfície cujas curvaturas gaussiana e média satisfazem $P(K, H) = 0$, então suas curvaturas principais satisfazem $Q_P(\kappa_1, \kappa_2) = 0$.

Portanto, podemos usar os resultados desenvolvidos nas seções anteriores para enunciar a classificação das superfícies de Bishop Weingarten-polinomiais sobre H, K .

Como anteriormente, enunciamos uma versão simples e outra detalhada do teorema.

Teorema 5.43. *Seja $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ um polinômio não constante e $\mathcal{S}^*(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cujas curvaturas gaussiana e média satisfazem $P(K, H) = 0$. Se $\Sigma \in \mathcal{S}^*(P)$, então Σ é cilíndrica, tubular ou de revolução.*

Demonstração. Segue diretamente do fato que $\mathcal{S}^*(P) \subset \mathcal{S}(Q_P)$ e do Teorema 5.37. $\square$

Teorema 5.44. *Considere $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ não constante e denote por $\mathcal{S}^*(P)$ o conjunto das superfícies de Bishop cujas curvaturas gaussiana e média satisfazem $P(K, H) = 0$. Então os elementos de $\mathcal{S}^*(P)$ são:*

- (i) As superfícies de Bishop de revolução satisfazendo $P(K, H) = 0$;
- (ii) Se $\text{Rad}_Y(P)$ é finito: além das de revolução, $\mathcal{S}^*(P)$ contém apenas os setores cilíndricos circulares de raio $r > 0$ tais que $2r \in \text{Rad}_Y(P)$ e as superfícies de Bishop tubulares com raios $|r| \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right)$ é um fator de P .
- (iii) Se $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito: além das de revolução, $\mathcal{S}^*(P)$ contém apenas as superfícies de Bishop cilíndricas e as superfícies de Bishop tubulares com raios $|r| \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right)$ é um fator de P .

Além disso, os setores esféricos em $\mathcal{S}^*(P)$ são aqueles cujo raio $|r| > 0$ é tal que $P\left(\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}\right) = 0$.

Demonstração. Basta fazer a “tradução” dos itens (ii) e (iii) para o caso de superfícies de Bishop Weigarten-polinomiais sobre as principais e aplicar o Teorema 5.40.

Para isso, defina $Q_P(X, Y) = P\left(XY, \frac{X+Y}{2}\right)$ e faça as seguintes observações. Temos

$$\begin{aligned} \text{Rad}_Y(Q_P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : Q_P\left(0, \frac{1}{r}\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(0, \frac{1}{2r}\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $r \in \text{Rad}_Y(Q_P)$ se, e somente se, $2r \in \text{Rad}_Y(P)$. Em particular, isso nos diz que $\text{Rad}_Y(Q_P)$ é infinito se, e somente se, $\text{Rad}_Y(P)$ é infinito.

Temos ainda que $|r| \in \text{Rad}_Y^*(Q_P)$ se, e somente se, $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right)$ é um fator de P . De fato, se $|r| \in \text{Rad}_Y^*(Q_P)$, então $Q_P\left(X, \frac{1}{r}\right) = P\left(\frac{X}{r}, \frac{X+\frac{1}{r}}{2}\right) \equiv 0$. Considere então a curva $\gamma(t) := \left(\frac{t}{r}, \frac{t+\frac{1}{r}}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Naturalmente, γ está contida na curva algébrica $P(X, Y) = 0$, pois temos $P(\gamma(t)) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas temos também que γ está contida na curva algébrica de equação $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right) = 0$. Como γ possui infinitos pontos e $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right)$ é irredutível, segue que $X - \frac{1}{r} \left(2Y - \frac{1}{r}\right)$ é fator de P .

Para $\text{Rad}_X(Q_P)$ temos:

$$\begin{aligned} \text{Rad}_X(Q_P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : Q_P\left(\frac{1}{r}, 0\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(0, \frac{1}{2r}\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Logo, $r \in \text{Rad}_X(Q_P)$ se, e somente se, $2r \in \text{Rad}_Y(P)$. Portanto, os setores cilíndricos obtidos como superfícies de Bishop de revolução também possuem raio $r > 0$ tal que $2r \in \text{Rad}_Y(P)$.

Por fim, para $\text{Rad}_U(Q_P)$ temos:

$$\begin{aligned} \text{Rad}_X(Q_P) &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : Q_P\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ |r| \in \overline{\mathbb{R}}_+ : P\left(\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Polinômios

A.1 Teorema de Bézout

Fazemos uso de um resultado bem conhecido de Geometria Algébrica, que enunciamos a seguir.

Definição A.1. Uma **curva algébrica** em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto da forma

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\},$$

sendo $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ um polinômio não constante.

Se F, G são curvas algébricas associadas a $P, Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ respectivamente, então dizemos que F e G possuem uma componente comum se P e Q possuem um fator comum não constante.

Teorema A.2 (Bézout, versão fraca). *Se $F, G \subset \mathbb{R}^2$ são curvas algébricas sem componente comum, então $F \cap G$ é finito.*

Destacamos apenas o que apelidamos de “versão fraca” do teorema pois é esse resultado que usamos de fato ao longo do texto. A versão mais forte e conhecida como teorema de Bézout afirma que, além de $F \cap G$ ser finito, temos $\sum_{p \in F \cap G} I(p, F \cap G) = mn$, em que m e n são os graus de P e Q respectivamente e $I(p, F \cap G)$ é o índice de interseção de F e G em p . Para mais detalhes, veja por exemplo [Flt] ou [Vns, p. 20].

A.2 Eliminante

Seja C um conjunto não vazio qualquer e considere funções $a_i, b_j, x : C \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $m, n \geq 1$. Suponha que essas funções satisfaçam duas equações polinomiais em x , mais precisamente

$$\sum_{i=0}^m a_i x^i = 0 \text{ e } \sum_{j=0}^n b_j x^j = 0.$$

Surge a pergunta: é possível obter uma terceira equação livre x , i.e. relacionando apenas as funções a_i, b_j ? A técnica da eliminante fornece uma maneira de atacar esse problema, embora possa ser computacionalmente custosa, a depender do caso.

Definição A.3 (Eliminante). Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo qualquer e considere dois polinômios $P, Q \in \mathcal{R}[X]$. Denote $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ e $Q = \sum_{j=0}^n b_j X^j$. A **eliminante** de P e Q é definida como sendo o determinante da matriz de Sylvester de P e Q . Mais precisamente

$$\text{Elm}(P, Q) := \det \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_m \\ b_0 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

A matriz de Sylvester da definição acima é uma matriz quadrada de dimensão $m+n$, sendo n linhas reservadas para os coeficientes a_i e m linhas para os coeficientes b_j . As entradas restantes são iguais a zero e a cada linha desloca-se os coeficientes da linha anterior uma coluna para a direita.

No caso de várias variáveis, digamos $P, Q \in \mathcal{R}[X_1, \dots, X_n]$, podemos tomar a eliminante com respeito a uma delas. Basta considerar P, Q como elemento de, digamos $\mathcal{R}[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n][X_i]$. Para enfatizar a variável na qual a eliminante está sendo tomada, podemos denotá-la por $\text{Elm}_{X_i}(P, Q)$. Note que $\text{Elm}_{X_i}(P, Q) \in \mathcal{R}[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$, justificando o nome eliminante (estamos “eliminando” a variável X_i).

A eliminante de dois polinômios aparece de maneira natural em Geometria Algébrica quando se estuda a interseção de duas curvas algébricas e possui propriedades interessantes (ver e.g. [Vns]).

O lema a seguir dá uma possível resposta à pergunta do início da seção.

Lema A.4. *Seja C um conjunto não vazio qualquer e denote por $\mathcal{R}$ o anel das funções $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Considere $P, Q \in \mathcal{R}[X]$. Se existe $x : C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x) = Q(x) \equiv 0 \in \mathcal{R}$, então*

$$\text{Elm}_X(P, Q) \equiv 0 \in \mathcal{R}.$$

Demonstração. A título de ilustração suponha que $P = \sum_{i=0}^2 a_i X^i$ e $Q = \sum_{j=0}^3 b_j X^j$. O caso geral possuirá o mesmo comportamento.

Da hipótese, temos a existência de $x : C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \\ 0 &\equiv Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3. \end{aligned}$$

Naturalmente, a_i e b_j denotam elementos de $\mathcal{R}$, i.e. são funções da forma $a_i, b_j : C \rightarrow \mathbb{R}$.

Multiplicando a primeira equação por x e x^2 e a segunda por x , obtemos as equações adicionais

$$\begin{aligned} 0 &= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3, \\ 0 &= a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4, \\ 0 &= b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4. \end{aligned}$$

Essas cinco equações podem ser escritas matricialmente como

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isso nos mostra que $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ é solução de um sistema linear homogêneo em cinco variáveis. Mas $(1, x, x^2, x^3, x^4) \neq \vec{0} \in \mathcal{R}^5$, o que implica

$$\det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \equiv 0 \in \mathcal{R}.$$

Mas esse determinante é precisamente a eliminante $\text{Elm}_X(P, Q)$. □

Para que o lema acima seja útil, fornecendo de fato uma relação entre os coeficientes a_i, b_j , precisamos saber quando a eliminante se anula trivialmente. Como já comentamos brevemente, o método da eliminante possui a desvantagem de ser custoso computacionalmente quando a matriz de Sylvester possui dimensão alta. Dito isso, pode ser muito difícil checar explicitamente a trivialidade ou não da expressão fornecida pela eliminante. Portanto, é interessante que tenhamos alguma ferramenta adicional que nos garanta que a relação obtida é não-trivial, sem a necessidade de calcular o determinante explicitamente.

A seguir, fornecemos essa ferramenta para o caso particular de nosso interesse.

Proposição A.5. *Considere uma superfície imersa em uma 3-variedade riemanniana dada por $\phi : U \rightarrow M$ e denote $H, K : U \rightarrow \mathbb{R}$ suas curvaturas média e gaussiana, respectivamente. Suponha que existam polinômios $P \in \mathbb{R}[X, Z]$, $Q \in \mathbb{R}[Y, Z]$ com graus em Z maiores ou iguais a 1 e uma função $z : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$P(H, z) = Q(K, z) \equiv 0.$$

Se P e Q não possuem fator comum de grau ≥ 1 , então a superfície é Weingarten-polinomial satisfazendo $\Psi(H, K) = 0$, sendo Ψ o polinômio definido por $\Psi(X, Y) := \text{Elm}_Z(P, Q)$.

Demonstração. Do lema anterior, sabemos que H, K satisfazem $\Psi(H, K) = 0$, sendo $\Psi(X, Y) := \text{Elm}_Z(P, Q)$. Resta apenas garantir que o polinômio Ψ não é identicamente nulo. Isso segue diretamente do seguinte

Lema A.6. [Vns, p. 24] *Sejam $\mathcal{D}$ um domínio de fatoração única e $P = \sum_{i=0}^m a_i Z^i$ e $Q(Z) = \sum_{j=0}^n b_j Z^j$ polinômios, com $a_i, b_j \in \mathcal{D}$. Então,*

$$\text{Elm}_Z(P, Q) \equiv 0 \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} a_m = b_n = 0, \text{ ou} \\ P \text{ e } Q \text{ possuem um fator comum de grau } \geq 1. \end{cases}$$

Naturalmente, no caso de nosso interesse podemos supor que m e n são os graus efetivos de P e Q em Z , i.e. a_m e b_n não são identicamente nulos. Além disso, estamos supondo que P e Q não possuem fator comum de grau ≥ 1 . Como $\mathcal{D} = \mathbb{R}[X, Y]$ é um domínio de fatoração única, o resultado segue deste segundo lema. $\square$

Na seção a seguir, fornecemos um critério geométrico de irreducibilidade de polinômios a duas variáveis.

A.3 Polítopos de Newton

A seguir, apresentamos o critério de irreducibilidade dos polítopos de Newton. Este critério desperta o interesse por se tratar de um critério geométrico que, nos casos em que é conclusivo, economiza o esforço de verificações algébricas tediosas. De certa forma, esse critério pode ser visto como uma versão do critério de Eisenstein para polinômios de duas variáveis.

Proposição A.7. *Seja $P \in \mathbb{R}[x, y]$ um polinômio não constante e não divisível por x nem por y . Se o polítopo de Newton de P não pode ser escrito como uma soma de Minkowski não trivial de dois polítopos, então P é irreducível.*

Naturalmente, antes de provar a proposição acima, damos as definições necessárias e provamos algumas propriedades.

Definição A.8. Seja $P \in \mathbb{R}[x, y]$ dado por $P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$. O **polítopo de Newton de P** é o conjunto $\text{New}(P) \subset \mathbb{R}^2$ dado pelo fecho convexo de $I := \{(i, j) \in \mathbb{R}^2 : a_{i,j} \neq 0\}$. Mais precisamente,

$$\text{New}(P) = \left\{ \sum_{(i,j) \in I} t_{i,j} (i, j) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{(i,j) \in I} t_{i,j} = 1, \quad t_{i,j} \geq 0 \right\}.$$

Observação A.9. Denotaremos por $\text{conv}(A)$ o fecho convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. O fecho convexo é definido como sendo o menor conjunto convexo contendo A . Outra definição equivalente é dizer que $\text{conv}(A)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de A , ou seja, $\text{conv}(A) = \{ \sum_{i=1}^n t_i a_i \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1, a_i \in A \}$. Naturalmente, se $A \subset B$, então $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(B)$.

No caso em que A é finito, dizemos que $\text{conv}(A)$ é um *polítopo*. Chamamos de *vértices* de um polítopo $\text{conv}(A)$ àqueles seus pontos que não pertencem ao interior de nenhum segmento contido em $\text{conv}(A)$. Note então que todo polítopo é o fecho convexo de seus vértices.

Exemplo A.10. A figura a seguir exhibe o polítopo de Newton do polinômio $P = 1 + xy + x^2y + xy^2 + x^2y^2$. Note que este conjunto também é o polítopo de Newton do polinômio $Q = 1 + x^2y + xy^2 + x^2y^2$.

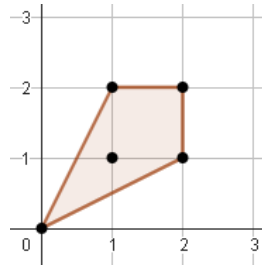


Figura A.1: $\text{New}(P) = \text{New}(Q)$.

Definição A.11. Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, definimos a **soma de Minkowski** de A e B por

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^2 : a \in A, b \in B\}.$$

As noções de fecho convexo e soma de Minkowski conversam bem entre si, como mostra o lema abaixo.

Lema A.12. $\text{conv}(A + B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$, para todos $A, B \subset \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Considere um ponto $p \in \text{conv}(A + B)$. Segue que p é dado por uma combinação convexa de pontos de $A + B$, i.e. existe uma quantidade finita de pontos $a_i + b_i \in A + B$ (com $a_i \in A$ e $b_i \in B$) e números reais positivos t_i tais que $\sum_i t_i = 1$ e $p = \sum_i t_i(a_i + b_i)$. Segue que $p = \sum_i t_i a_i + \sum_i t_i b_i \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$, já que $\sum_i t_i a_i$ e $\sum_i t_i b_i$ são combinações convexas de A e B , respectivamente. Isso mostra que $\text{conv}(A + B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$. Considere agora $p + q \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$, com $p \in \text{conv}(A)$, $q \in \text{conv}(B)$. Escreva p e q como combinações convexas $p = \sum_i t_i a_i$ e $q = \sum_j s_j b_j$. Para cada b_j temos

$$p + b_j = \sum_i t_i a_i + 1b_j = \sum_i t_i a_i + \sum_i t_i b_j = \sum_i t_i(a_i + b_j),$$

e, portanto, $p + b_j \in \text{conv}(A + B)$. Mas então

$$p + q = \sum_j s_j(p + b_j)$$

mostra que $p + q$ se escreve como combinação convexa de elementos de $\text{conv}(A + B)$, i.e. $p + q \in \text{conv}(\text{conv}(A + B))$. Mas como $\text{conv}(A + B)$ é convexo, temos $\text{conv}(\text{conv}(A + B)) = \text{conv}(A + B)$, provando que $p + q \in \text{conv}(A + B)$. $\square$

Finalmente, provamos o resultado que é o cerne do critério de irreducibilidade por meio dos polítopos de Newton. Este resultado foi provado por Ostrowski em 1921 [Ost].

Proposição A.13. *O polítopo de Newton do produto PQ de dois polinômios $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$ é igual à soma de Minkowski dos polítopos de Newton de P e Q . Em símbolos,*

$$\text{New}(PQ) = \text{New}(P) + \text{New}(Q).$$

Demonstração. Denote $P = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$ e $Q = \sum_{k,l=0}^m b_{k,l} x^k y^l$. Assim, temos $PQ = \sum_{r,s=0}^{m+n} c_{r,s} x^r y^s$, sendo $c_{r,s}$ definido por

$$c_{r,s} = \sum_{\substack{i+k=r \\ j+l=s}} a_{i,j} b_{k,l}.$$

Denote ainda $I = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : a_{i,j} \neq 0\}$, $J = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 : b_{k,l} \neq 0\}$ e $K = \{(r, s) \in \mathbb{N}^2 : c_{r,s} \neq 0\}$.

Considere $(r, s) \in K$. Note que devem existir $(i, j) \in I$ e $(k, l) \in J$ tais que $(r, s) = (i, j) + (k, l)$. De fato, do contrário teríamos que, para todo $i, j \in \{0, \dots, n\}$ e $k, l \in \{0, \dots, m\}$ tais que $(r, s) = (i, j) + (k, l)$, vale que $(i, j) \notin I$ e $(k, l) \notin J$, ou seja, para tais índices teríamos que $a_{i,j} = b_{k,l} = 0$. Mas isso implica que $c_{r,s} = \sum_{\substack{i+k=r \\ j+l=s}} a_{i,j} b_{k,l} = 0$, uma contradição, já que $(r, s) \in K \implies c_{r,s} \neq 0$. Com isso provamos que $K \subset I + J$. Isso implica que $\text{New}(PQ) = \text{conv}(K) \subset \text{conv}(I + J) = \text{conv}(I) + \text{conv}(J) = \text{New}(P) + \text{New}(Q)$.

Resta provar que $\text{New}(P) + \text{New}(Q) \subset \text{New}(PQ)$.

Primeiro, note que a soma de Minkowski de dois polítopos é um polítopo. Considere então um vértice p de $\text{New}(P) + \text{New}(Q)$. Por definição, existem $q_1 \in \text{New}(P)$ e $q_2 \in \text{New}(Q)$ tais que $p = q_1 + q_2$. Afirmamos que tais q_i 's são únicos. De fato, suponha que existam $q'_1 \in \text{New}(P)$ e $q'_2 \in \text{New}(Q)$ tais que

$$p = q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 \tag{A.1}$$

Observe então que

$$p = \frac{1}{2}(q_1 + q'_2) + \frac{1}{2}(q'_1 + q_2),$$

e $q_1 + q'_2, q'_1 + q_2 \in \text{New}(P) + \text{New}(Q)$. Como p é um vértice de $\text{New}(P) + \text{New}(Q)$, devemos ter

$$q_1 + q'_2 = q'_1 + q_2 \tag{A.2}$$

pois, do contrário, p estaria no interior de um segmento contido em $\text{New}(P) + \text{New}(Q)$.

Subtraindo (A.2) de (A.1), obtemos $q_2 - q'_2 = q'_2 - q_2$, ou seja $2(q'_2 - q_2) = 0$. Portanto, $q_2 = q'_2$ e $q_1 = q'_1$.

Observamos por fim que q_1 e q_2 são vértices de $\text{New}(P)$ e $\text{New}(Q)$, respectivamente. De fato, suponha por exemplo que q_1 não é vértice. Então q_1 está contido no interior de um segmento contido

em $\text{New}(P)$, digamos $q_1 = t_0 w_1 + (1 - t_0) w_2$, para certos $w_i \in \text{New}(P)$ com $w_1 \neq w_2$. Mas então $p = t_0 w_1 + (1 - t_0) w_2 + q_2 = t_0(w_1 + q_2) + (1 - t_0)(w_2 + q_2)$ mostra que p está no interior de um segmento contido em $\text{New}(P) + \text{New}(Q)$, uma contradição, pois p é vértice.

Note então que, como q_1 e q_2 são vértices de seus polítopos de Newton, temos que $q_1 \in I$ e $q_2 \in J$ e eles são os únicos (em $\text{New}(P)$ e $\text{New}(Q)$), mas em particular em I e J) tais que $p = q_1 + q_2$. Portanto, denotando $p = (r, s)$, temos

$$c_p = c_{r,s} = \sum_{\substack{i+k=r \\ j+l=s}} a_{i,j} b_{k,l} = a_{q_1} b_{q_2} \neq 0.$$

Portanto, $c_p \neq 0$ o que implica que $p \in K$. Logo, provamos que os vértices de $\text{New}(P + \text{New}(Q))$ estão contidos em K . Como um polítopo é o fecho convexo de seus vértices, isso prova que $\text{New}(P) + \text{New}(Q) \subset \text{New}(PQ)$. $\square$

Finalmente podemos provar o critério de irredutibilidade. No enunciado abaixo, uma soma de Minkowski trivial $A + B$ é aquela em que um dos conjuntos, digamos A , contém apenas um ponto. Note que todo conjunto B pode ser visto como a soma de Minkowski trivial $\{v\} + (\{-v\} + B)$, qualquer se seja $v \in \mathbb{R}^2$.

Proposição A.14. *Seja $P \in \mathbb{R}[x, y]$ um polinômio não constante, não divisível por x nem por y . Se o polítopo de Newton de P não pode ser escrito como uma soma de Minkowski não trivial de dois polítopos, então P é irredutível.*

Demonstração. Suponha que P seja redutível e escreva $P = QR$, com $Q, R \in \mathbb{R}[x, y]$ não constantes. Pela proposição anterior, temos

$$\text{New}(P) = \text{New}(QR) = \text{New}(Q) + \text{New}(R).$$

Seja $I \subset \mathbb{N}^2$ o conjunto tal que $\text{New}(Q) = \text{conv}(I)$. Como Q não é constante, I possui ao menos um ponto diferente da origem $(0, 0)$. Se $(0, 0) \in I$, então isso mostra que I possui ao menos dois pontos. Suponha que $(0, 0) \notin I$. Então se todos os pontos de I fossem da forma (m, n) com $m > 0$, então x dividiria Q e, conseqüentemente, x divide P , contradizendo nossa hipótese. Portanto, I , contém ao menos um ponto da forma $(0, n)$ com $n > 0$ (já que $(0, 0) \notin I$). Analogamente, como y não divide Q , devemos ter que I possui ao menos um ponto da forma $(m, 0)$, com $m > 0$. Isso mostra novamente que I , e portanto $\text{New}(Q) = \text{conv}(I)$, possui ao menos dois pontos. O mesmo vale para $\text{New}(R)$.

Isso mostra que, se P não é divisível por x ou y e é redutível, então o polítopo de Newton de P se escreve como uma soma de Minkowski não trivial de polítopos. $\square$

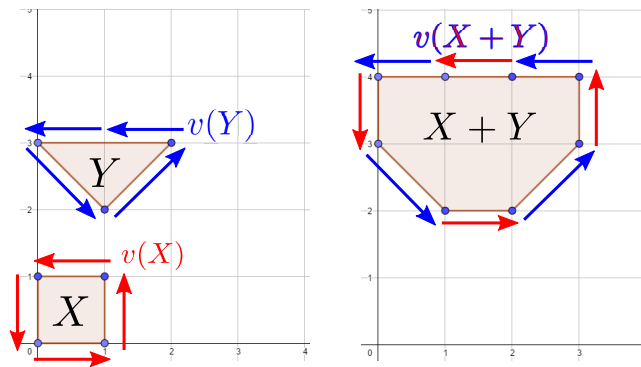
Nosso critério não será de grande interesse se não soubermos dizer quando um polítopo pode ou não ser decomposto como a soma de Minkowski não trivial de outros dois polítopos. Para nossa sorte,

essa verificação é realmente simples de ser feita para polítopos de Newton em $\mathbb{R}^2$. A seguir, forneceremos um algoritmo para essa verificação, embora não nos preocupemos em provar a sua validade. Ao invés disso, fornecemos alguns exemplos ilustrativos.

Considere um polítopo $X \subset \mathbb{R}^2$ gerado por pontos sobre o reticulado $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ (como é o caso dos polítopos de Newton) e denote por ∂X o seu bordo. Seja p_0 um ponto qualquer na interseção do bordo ∂X com o reticulado $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$. Note que ao menos um tal p_0 existe, pois os vértices de X estão todos sobre $\mathbb{N}^2$. Percorrendo o bordo ∂X no sentido anti-horário partindo de p_0 em direção ao próximo ponto do reticulado e retornando a p_0 , obtemos uma sequência de pontos $(p_0, p_1, \dots, p_n, p_0) \subset \mathbb{N}^2$. Convém destacar: essa sequência é ordenada e possui todos os pontos do reticulado $\mathbb{N}^2$ que estão sobre o bordo ∂X e não apenas os seus vértices. O próximo passo é considerar a sequência de vetores dada por $v_{p_0}(X) = (p_1 - p_0, p_2 - p_1, \dots, p_n - p_{n-1}, p_0 - p_n)$.

A propriedade de nosso interesse e que não iremos provar é que, se X e Y são polítopos gerados por pontos em $\mathbb{N}^2$, então a sequência $v_{p_0}(X + Y)$ é obtida intercalando-se os vetores das sequências $v_{q_0}(X)$ e $v_{r_0}(Y)$, sendo $p_0 = q_0 + r_0$. Além disso, a soma dos vetores dessas sequências deve ser zero.

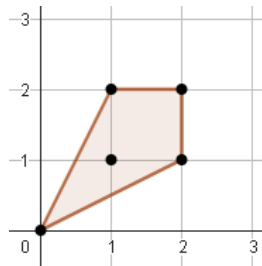
Um exemplo deste fenômeno é ilustrado na figura a seguir.



Portanto, se ao se alternar seus elementos, a sequência $v_{p_0}(X)$ não puder ser decomposta em duas subsequências cuja soma seja zero, então X não pode ser decomposto como uma soma de Minkowski não trivial de dois polítopos.

Para finalizar a seção, damos um exemplo do critério de irredutibilidade em ação.

Exemplo A.15. Considere novamente o polítopo X do Exemplo A.10. Partindo do ponto $(0,0)$, a



sequência de vetores associada a esse polítopo é

$$v(X) = \{(2, 1), (0, 1), (-1, 0), (-1, -2)\},$$

que não pode ser decomposta, alternando-se os vetores, em duas subsequências cuja a soma seja zero. Portanto, qualquer polinômio que possua X como seu polítopo de Newton é irredutível. Mais precisamente, isso corresponde aos polinômios da forma $P(x, y) = a + bx^2y + cx^2y^2 + dxy^2 + exy$ com $a, b, c, d \neq 0$.

A.4 Lista de polinômios irredutíveis

Nesta seção, estudamos a irredutibilidade alguns polinômios específicos que aparecem em nossas demonstrações, mas que optamos por colocar nos apêndices para não carregar o texto.

Exemplo A.16. O polinômio

$$P(X, Y) = 4c^2(X^2 + a^2 + 1)^3 - ((a^2 + 1)Y + b(X^2 + 1) - aX)^2$$

é irredutível, para quaisquer escolha das constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$.

Neste caso, o critério do polítopo de Newton é inconclusivo e precisamos fazer a análise específica do polinômio.

Coletando o polinômio em Y , obtemos

$$\begin{aligned} P = & -(a^2 + 1)^2 Y^2 - 2(a^2 + 1)(b(X^2 + 1) - aX)Y \\ & + 4c^2(X^2 + a^2 + 1)^3 - (b(X^2 + 1) - aX)^2. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de Y é constante. Portanto, se P for redutível, ele deve ser da forma

$$P = (Q_1 Y + Q_0)(R_1 Y + R_0),$$

para certos $Q_i, R_i \in \mathbb{R}[X]$. Igualando as expressões e coletando em Y , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & P - (Q_1 Y + Q_0)(R_1 Y + R_0) \\ = & (-Q_1 R_1 - (a^2 + 1)^2) Y^2 \\ & + (-2(a^2 + 1)(b(X^2 + 1) - aX) - Q_0 R_1 - Q_1 R_0) Y \\ & + (4c^2(X^2 + a^2 + 1)^3 - (b(X^2 + 1) - aX)^2 - Q_0 R_0) \end{aligned}$$

O coeficiente de Y^2 nos mostra que, sem perda de generalidade, podemos supor $Q_1 = -R_1 = a^2 + 1$. Substituindo no coeficiente de Y , devemos ter

$$0 \equiv (a^2 + 1)(-2bX^2 + 2aX + Q_0 - R_0 - 2b).$$

Segue daí que

$$R_0 = -2bX^2 + 2aX + Q_0 - 2b.$$

Substituindo R_0 no último coeficiente, devemos ter

$$\begin{aligned}
 0 &\equiv 4c^2 (X^2 + a^2 + 1)^3 - (b(X^2 + 1) - Xa)^2 \\
 &\quad - Q_0 (-2bX^2 + 2aX + Q_0 - 2b) \\
 &= -Q_0^2 + (2bX^2 - 2aX + 2b) Q_0 \\
 &\quad + \left(4c^2 (X^2 + a^2 + 1)^3 - (b(X^2 + 1) - Xa)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Uma rápida análise nos mostra que o grau de Q_0 é no máximo 3. Assim, escrevendo $Q_0 = \sum_{i=0}^3 q_i X^i$ e coletando a equação em X , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= (4c^2 - q_3^2) X^6 + 2q_3 (b - q_2) X^5 \\
 &\quad + (2bq_2 - 2aq_3 - q_2^2 - 2q_1q_3 + 12c^2(a^2 + 1) - b^2) X^4 \\
 &\quad + 2(-aq_2 + bq_1 + bq_3 - q_0q_3 - q_1q_2 + ab) X^3 \\
 &\quad + \left(\begin{array}{l} 2bq_0 - 2aq_1 + 2bq_2 - q_1^2 - 2q_0q_2 \\ + 12c^2(a^2 + 1)^2 - a^2 - 2b^2 \end{array} \right) X^2 \\
 &\quad + (2bq_1 - 2aq_0 - 2q_0q_1 + 2ab) X \\
 &\quad + (2bq_0 - q_0^2 + 4c^2(a^2 + 1)^3 - b^2)
 \end{aligned}$$

O coeficiente de X^6 impõe que $q_3^2 = 4c^2 \implies q_3 = 2\iota c$, com $\iota = \pm 1$. Em particular, isso mostra que $q_3 \neq 0$. Daí, o coeficiente de X^5 nos diz que devemos ter $q_2 = b$. Substituindo no próximo coeficiente, devemos ter

$$0 = -4\iota c q_1 + 12c^2(a^2 + 1) - 4a\iota c$$

Isso implica $q_1 = 3\iota c(a^2 + 1) - a$. Seguindo com o próximo coeficiente, devemos ter

$$\begin{aligned}
 0 &= -ab + b(3\iota c(a^2 + 1) - a) + b(2\iota c) - q_0(2\iota c) \\
 &\quad - (3\iota c(a^2 + 1) - a)b + ab \\
 &= 2\iota c(b - q_0),
 \end{aligned}$$

o que implica $q_0 = b$. Com isso, já está determinando o polinômio Q_0 . Contudo, os demais coeficientes ainda devem ser zero. O coeficiente de X^2 pede que

$$\begin{aligned}
 0 &= 2bq_0 - 2aq_1 + 2bq_2 - q_1^2 - 2q_0q_2 + 12c^2(a^2 + 1)^2 - a^2 - 2b^2 \\
 &= -3c^2(3\iota^2 - 4)(a^2 + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Mas como $c \neq 0$ e $\iota = \pm 1$ isso é impossível.

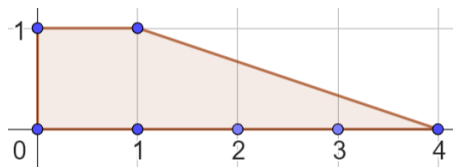
Exemplo A.17. O polinômio

$$P(X, Y) = 4(Y + aX)(b - aX) - (a^2 + 1 - X^2)^2$$

é irredutível, para quaisquer escolhas das constantes $a, b \in \mathbb{R}$ desde que $a^2 + b^2 > 0$. Abrindo a expressão e coletando o polinômio em X, Y , obtemos

$$P = -X^4 - 2(a^2 - 1)X^2 - 4aXY + 4abX + 4bY - (a^2 + 1)^2.$$

Se ambas as constantes a, b são não nulas, o polítopo de Newton de P é dado por



A sequência de vetores associada ao bordo do polítopo é

$$\{(0, -1), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 0), (-3, 1), (-1, 0)\}.$$

As somas das possíveis sequências alternadas são

$$(0, -1) + (1, 0) + (1, 0) + (-1, 0) = (1, -1)$$

$$(1, 0) + (1, 0) + (-3, 1) + (0, -1) = (-1, 0)$$

$$(1, 0) + (1, 0) + (-1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$$

$$(1, 0) + (-3, 1) + (0, -1) + (1, 0) = (-1, 0)$$

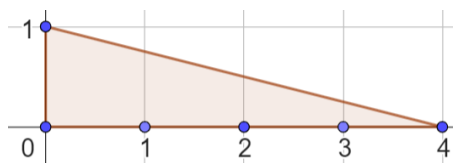
$$(1, 0) + (-1, 0) + (1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$$

$$(-3, 1) + (0, -1) + (1, 0) + (1, 0) = (-1, 0)$$

$$(-1, 0) + (1, 0) + (1, 0) + (-3, 1) = (-2, 1)$$

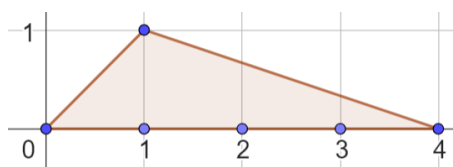
Como nenhuma delas se anula, o polítopo não pode ser decomposto. Segue do critério do polítopo de Newton que P é irredutível neste caso ($ab \neq 0$).

Suponha agora que $a = 0 \neq b$. Neste caso, o polítopo é dado por



A sequência de vetores associada possui uma quantidade par de elementos e nenhuma das duas somas alternadas possíveis é zero. Portanto, este polítopo não é decomponível.

Por fim, temos o caso $a \neq 0 = b$. Neste caso, o polítopo é dado por



Exemplo A.18. O polinômio $P(X, Y) = 4(aX - b)Y - 4X(X + ab)$ é irredutível, para qualquer escolha das constantes $a, b \in \mathbb{R}$, com $ab \neq 0$.

O critério do polítopo de Newton é inconclusivo neste caso.

Se P for redutível, então deve possuir uma fatoração da forma $P = (Q_1Y + Q_0)R$, com $Q_i, R \in \mathbb{R}[X]$ e R não constante. Coletando em Y , temos

$$\begin{aligned} 0 &= P - (Q_1Y + Q_0)R \\ &= 4(aX - b)Y - 4X(X + ab) - (Q_1Y + Q_0)R \\ &= (4Xa - RQ_1 - 4b)Y - (RQ_0 + 4X(X + ab)) \end{aligned}$$

Como R é não constante, o primeiro coeficiente implica que $Q_1 \in \mathbb{R}$ e $Q_1 \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $Q_1 = 1$. Segue daí que $R = 4(aX - b)$. O segundo coeficiente nos traz que $0 = 4(aX - b)Q_0 + 4X(X + ab)$. Essa equação impõe que Q_0 tenha grau no máximo 1. Escrevendo então $Q_0 = q_1X + q_0$, com $q_i \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= 4(aX - b)(q_1X + q_0) + 4X(X + ab) \\ &= 4(aq_1 + 1)X^2 + 4(aq_0 - bq_1 + ab)X - 4bq_0 \end{aligned}$$

Como $b \neq 0$, o último coeficiente nos traz que $q_0 = 0$. Então, o coeficiente de X nos traz que $0 = aq_0 - bq_1 + ab = b(a - q_1)$, o que implica $q_1 = a$. Mas então o coeficiente de X^2 nos diz que $a^2 + 1 = 0$, uma contradição. Essa contradição vem de supor que P é redutível.

Exemplo A.19. O polinômio

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \left(b \left((t + X)^2 + 1 \right) + Y(a^2 + 1) - a(t + X) \right)^2 \\ &\quad - 2 \left((Y + (X + t)a)(b - (X + t)a) + (a^2 + 1)(X + t)^2 \right) \left((t + X)^2 + a^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

é irredutível, para quaisquer constantes $a, b, t \in \mathbb{R}$.

Coletando em Y ,

$$\begin{aligned} P &= (a^2 + 1)^2 Y^2 + 2a(X + t)^2(X + t + ab)Y \\ &\quad + \left(b \left((X + t)^2 + 1 \right) - a(X + t) \right)^2 - 2(X + t)(X + t + ab) \left((X + t)^2 + a^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Isso nos mostra que, se P é redutível, então sua decomposição deve admitir a forma

$$P = ((a^2 + 1)Y + Q_1)((a^2 + 1)Y + Q_2),$$

para certos $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$. Coletando essa expressão em Y , obtemos

$$P = (a^2 + 1)^2 Y^2 + (a^2 + 1)(Q_1 + Q_2)Y + Q_1Q_2.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}(a^2 + 1)(Q_1 + Q_2) &= 2a(X + t)^2(X + t + ab), \\ Q_1 Q_2 &= \left(b((X + t)^2 + 1) - a(X + t)\right)^2 \\ &\quad - 2(X + t)(X + t + ab)((X + t)^2 + a^2 + 1).\end{aligned}$$

Da primeira equação vem que

$$Q_2 = \frac{2a}{a^2 + 1}(X + t)^2(X + t + ab) - Q_1.$$

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \left(b((X + t)^2 + 1) - a(X + t)\right)^2 - 2(X + t)(X + t + ab)((X + t)^2 + a^2 + 1) \\ &\quad - Q_1 \left(\frac{2a}{a^2 + 1}(X + t)^2(X + t + ab) - Q_1\right) \\ &= \left(b((X + t)^2 + 1) - a(X + t)\right)^2 \\ &\quad - 2(X + t)(X + t + ab)((X + t)^2 + a^2 + 1) \\ &\quad + Q_1^2 + \left(-2\frac{a}{a^2 + 1}(X + t)^2(X + t + ab)\right)Q_1.\end{aligned}$$

Olhando para os termos de maior grau em X , vemos que devemos ter $\deg Q_1 \leq 3$. Escrevendo portanto $Q_1 = \sum_{i=0}^3 q_i X^i$, substituindo na equação e coletando em X , obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \left(b((X + t)^2 + 1) - a(X + t)\right)^2 - 2(X + t)(X + t + ab)((X + t)^2 + a^2 + 1) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^3 q_i X^i\right)^2 + \left(-2\frac{a}{a^2 + 1}(X + t)^2(X + t + ab)\right)\left(\sum_{i=0}^3 q_i X^i\right) \\ &= q_3 \frac{-2a + q_3 + a^2 q_3}{a^2 + 1} X^6 + \dots\end{aligned}$$

Isso nos mostra que $0 = q_3 \frac{-2a + q_3 + a^2 q_3}{a^2 + 1}$ e, portanto, devemos ter $q_3 = 0$ ou $0 = -2a + q_3 + a^2 q_3$.

Começemos analisando $q_3 = 0$. Recoletando a expressão em X ,

$$\begin{aligned}0 &= \left(b((X + t)^2 + 1) - a(X + t)\right)^2 - 2(X + t)(X + t + ab)((X + t)^2 + a^2 + 1) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^2 q_i X^i\right)^2 + \left(-2\frac{a}{a^2 + 1}(X + t)^2(X + t + ab)\right)\left(\sum_{i=0}^2 q_i X^i\right) \\ &= \left(-2\frac{a}{a^2 + 1}q_2\right)X^5 + \dots\end{aligned}$$

Isso nos traz dois subcasos a analisar: $a = 0$ e $q_2 = 0$. Se $a = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \left(b((X + t)^2 + 1)\right)^2 - 2(X + t)(X + t)((X + t)^2 + 1) + \left(\sum_{i=0}^2 q_i X^i\right)^2 \\ &= (b^2 + q_2^2 - 2)X^4 + \dots\end{aligned}$$

Isso implica $b^2 + q_2^2 - 2 = 0$ e, portanto, $q_2^2 = 2 - b^2$. Note que, neste caso, a parcela $\sum_{i=0}^2 q_i X^i$ aparece ao quadrado na expressão e, portanto, sem perda de generalidade, podemos supor $q_2 = \sqrt{2 - b^2}$. Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) \right)^2 - 2(X+t)(X+t) \left((X+t)^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{2-b^2} X^2 + \sum_{i=0}^1 q_i X^i \right)^2 \\ &= 2\sqrt{2-b^2} \left(q_1 - 2t\sqrt{2-b^2} \right) X^3 + \dots \end{aligned}$$

Se $2 - b^2 = 0$, então ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left((X+t)^2 + 1 \right)^2 - 2(X+t)(X+t) \left((X+t)^2 + 1 \right) + \left(\sum_{i=0}^1 q_i X^i \right)^2 \\ &= (q_1^2 + 2) X^2 + \dots \end{aligned}$$

e devemos ter $q_1^2 + 2 = 0$, o que é impossível. Portanto, devemos ter $2 - b^2 \neq 0$. Segue então de $2\sqrt{2-b^2} \left(q_1 - 2t\sqrt{2-b^2} \right) = 0$ que $q_1 = 2t\sqrt{2-b^2}$. Continuando, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) \right)^2 - 2(X+t)(X+t) \left((X+t)^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{2-b^2} X^2 + 2t\sqrt{2-b^2} X + q_0 \right)^2 \\ &= 2 \left(q_0 \sqrt{2-b^2} + b^2 t^2 + b^2 - 2t^2 - 1 \right) X^2 + \dots \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $q_0 = \frac{-(b^2 t^2 + b^2 - 2t^2 - 1)}{\sqrt{2-b^2}}$. Por fim, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) \right)^2 - 2(X+t)(X+t) \left((X+t)^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{2-b^2} X^2 + 2t\sqrt{2-b^2} X + \frac{-(b^2 t^2 + b^2 - 2t^2 - 1)}{\sqrt{2-b^2}} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{b^2 - 2}, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Podemos supor então $a \neq 0$ e voltar ao subcaso $q_2 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^1 q_i X^i \right)^2 + \left(-2\frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \left(\sum_{i=0}^1 q_i X^i \right) \\ &= \left(b^2 - 2\frac{a}{a^2+1} q_1 - 2 \right) X^4 + \dots \end{aligned}$$

Segue que $q_1 = \frac{(a^2+1)(b^2-2)}{2a}$. Seguindo adiante, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{(a^2+1)(b^2-2)}{2a} X + q_0 \right)^2 \\ &\quad + \left(-2 \frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \left(\frac{(a^2+1)(b^2-2)}{2a} X + q_0 \right) \\ &= -\frac{1}{a^2+1} (2aq_0 + (a^2+1)(2t+ab^3-b^2t+2ab)) X^3 + \dots \end{aligned}$$

Segue daí que

$$q_0 = -\frac{(a^2+1)}{2a} (2t+ab^3-b^2t+2ab).$$

Continuando,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{(a^2+1)(b^2-2)}{2a} X - \frac{(a^2+1)}{2a} (2t+ab^3-b^2t+2ab) \right)^2 \\ &\quad + \left(-2 \frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{(a^2+1)(b^2-2)}{2a} X - \frac{(a^2+1)}{2a} (2t+ab^3-b^2t+2ab) \right) \\ &= \frac{1}{4a^2} \left(a^2b^2(5a^2b^2+4a^2+2b^2) + (b^2-2)^2 \right) X^2 + \dots \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $a^2b^2(5a^2b^2+4a^2+2b^2) + (b^2-2)^2 = 0$. Isso implica

$$ab(5a^2b^2+4a^2+2b^2) = 0 \quad \text{e} \quad b^2-2=0.$$

Segue então que $b^2 = 2$ e, consequentemente,

$$0 = 2a^2(10a^2+4a^2+4) = 4a^2(7a^2+2),$$

donde $a = 0$, uma contradição.

Com isso, encerramos a análise do caso $q_3 = 0$.

Analisemos agora o segundo caso, com $q_3 \neq 0$. Neste caso, devemos ter $0 = -2a + q_3 + a^2q_3 =$

$(a^2 + 1)q_3 - 2a$. Portanto, temos $0 \neq q_3 = \frac{2a}{a^2+1}$. Note que isso implica $a \neq 0$. Coletando em X ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \sum_{i=0}^2 q_i X^i \right)^2 \\ &\quad + \left(-2 \frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \sum_{i=0}^2 q_i X^i \right) \\ &= \frac{2a}{(a^2+1)^2} ((a^2+1)q_2 - 2a(3t+ab)) X^5 + \dots \end{aligned}$$

Portanto, $q_2 = \frac{2a}{a^2+1} (3t+ab)$. Continuando, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \frac{2a}{a^2+1} (3t+ab) X^2 + \sum_{i=0}^1 q_i X^i \right)^2 \\ &\quad + \left(-2 \frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \frac{2a}{a^2+1} (3t+ab) X^2 + \sum_{i=0}^1 q_i X^i \right) \\ &= \frac{1}{(a^2+1)^2} (2a(a^2+1)q_1 + (a^4b^2 - 2a^4 - 8a^3bt + 2a^2b^2 - 12a^2t^2 - 4a^2 + b^2 - 2)) X^4 + \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$q_1 = -\frac{1}{2a(a^2+1)} (a^4b^2 - 2a^4 - 8a^3bt + 2a^2b^2 - 12a^2t^2 - 4a^2 + b^2 - 2).$$

Seguindo coletando em X ,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \frac{2a}{a^2+1} (3t+ab) X^2 - \frac{(a^4b^2 - 2a^4 - 8a^3bt + 2a^2b^2 - 12a^2t^2 - 4a^2 + b^2 - 2)}{2a(a^2+1)} X + q_0 \right)^2 \\ &\quad + \left(-2 \frac{a}{a^2+1} (X+t)^2 (X+t+ab) \right) \left(\frac{2a}{a^2+1} X^3 + \frac{2a}{a^2+1} (3t+ab) X^2 - \frac{(a^4b^2 - 2a^4 - 8a^3bt + 2a^2b^2 - 12a^2t^2 - 4a^2 + b^2 - 2)}{2a(a^2+1)} X + q_0 \right) \\ &= -\frac{1}{(a^2+1)^2} \left(-2a(a^2+1)q_0 + \begin{pmatrix} a^5b^3 + 2a^5b - a^4b^2t + 2a^4t + 2a^3b^3 \\ +4a^3bt^2 + 4a^3b - 2a^2b^2t + 4a^2t^3 \\ +4a^2t + ab^3 + 2ab - b^2t + 2t \end{pmatrix} \right) X^3 + \dots \end{aligned}$$

Portanto,

$$q_0 = \frac{\begin{pmatrix} a^5b^3 + 2a^5b - a^4b^2t + 2a^4t + 2a^3b^3 + 4a^3bt^2 \\ +4a^3b - 2a^2b^2t + 4a^2t^3 + 4a^2t + ab^3 + 2ab - b^2t + 2t \end{pmatrix}}{2a(a^2+1)}.$$

Continuando, ainda devemos ter

$$\begin{aligned}
0 &= \left(b \left((X+t)^2 + 1 \right) - a(X+t) \right)^2 - 2(X+t)(X+t+ab) \left((X+t)^2 + a^2 + 1 \right) \\
&\quad + \left(\begin{aligned} &-\frac{\frac{2a}{a^2+1}X^3 + \frac{2a}{a^2+1}(3t+ab)X^2}{2a(a^2+1)} \\ &+ \frac{(a^4b^2-2a^4-8a^3bt+2a^2b^2-12a^2t^2-4a^2+b^2-2)X}{2a(a^2+1)} \\ &+ \frac{(a^5b^3+2a^5b-a^4b^2t+2a^4t+2a^3b^3+4a^3bt^2+4a^3b-2a^2b^2t+4a^2t^3+4a^2t+ab^3+2ab-b^2t+2t)}{2a(a^2+1)} \end{aligned} \right)^2 \\
&\quad + \left(-2\frac{a}{a^2+1}(X+t)^2(X+t+ab) \right) \\
&\quad \cdot \left(\begin{aligned} &-\frac{\frac{2a}{a^2+1}X^3 + \frac{2a}{a^2+1}(3t+ab)X^2}{2a(a^2+1)} \\ &+ \frac{(a^4b^2-2a^4-8a^3bt+2a^2b^2-12a^2t^2-4a^2+b^2-2)X}{2a(a^2+1)} \\ &+ \frac{(a^5b^3+2a^5b-a^4b^2t+2a^4t+2a^3b^3+4a^3bt^2+4a^3b-2a^2b^2t+4a^2t^3+4a^2t+ab^3+2ab-b^2t+2t)}{2a(a^2+1)} \end{aligned} \right) \\
&= \frac{1}{4a^2} \left(a^2b^2(5a^2b^2+4a^2+2b^2) + (b^2-2)^2 \right) X^2 + \dots
\end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $0 = a^2b^2(5a^2b^2+4a^2+2b^2) + (b^2-2)^2$, donde $0 = a^2b^2(5a^2b^2+4a^2+2b^2)$ e $(b^2-2) = 0$. Como temos $a \neq 0$, a primeira quação implica $b = 0$. Mas então, não é possível que $b^2-2=0$.

Isso prova que P é irredutível.

APÊNDICE B

Geodésicas em $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ - Verificação

Geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ com $\gamma(0) = O = ((0, 0, 1), 0)$, $\gamma'(0) = (\cos \alpha) \chi_1 + (\sin \alpha) \chi_3$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\gamma = ((x, y, z), \theta) = ((\sinh r \cos \eta, \sinh r \sin \eta, \cosh r), \theta).$$

Sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= r'' - (\sinh r \cosh r) (\eta')^2 - (\sinh r) (\sin \alpha) \eta' \\ 0 &= (\sinh r) \eta'' + 2 (\cosh r) r' \eta' + (\sin \alpha) r' \\ \sin \alpha &= \theta' + (\cosh r - 1) \eta' \\ (\cos \alpha)^2 &= (r')^2 + (\sinh^2 r) (\eta')^2 \\ r(0) &= 0, \quad \sin \eta(0) = 0, \quad \theta(0) = 0 \\ r'(0) &= \cos \alpha, \quad \theta'(0) = \sin \alpha. \end{aligned}$$

B.1 Tipo espaço, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\cos 2\alpha}, \\ r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sinh \left(a \frac{t}{2} \right) \right), \\ \eta(t) &= -\arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{t}{2} \right) \right), \\ \theta(t) &= 2 (\sin \alpha) t - 2 \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{d}{dt} \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sinh \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) = \frac{2a (\cos \alpha) (\cosh \frac{1}{2} at)}{\sqrt{((\cosh at) (a^2 + 1) + 3a^2 - 1)}} \\
&= \frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right), \\
Z &:= \sqrt{(\cosh at) (a^2 + 1) + 3a^2 - 1}, \\
Z' &= \frac{d}{dt} \sqrt{(\cosh at) (a^2 + 1) + 3a^2 - 1} = \frac{a}{2Z} (\sinh at) (a^2 + 1), \\
r'' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right) \right) \\
&\quad + \frac{a}{2Z} (\sinh at) (a^2 + 1) \frac{d}{dZ} \left(\frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right) \right) \\
&= \frac{a^2 (\cos \alpha)}{Z^3} \left(Z^2 \sinh \frac{1}{2} at - \sinh at \cosh \frac{1}{2} at - a^2 \sinh at \cosh \frac{1}{2} at \right) \\
&= \frac{a^2 (\cos \alpha)}{Z^3} \left(((\cosh at) (a^2 + 1) + 3a^2 - 1) \sinh \frac{1}{2} at \right. \\
&\quad \left. - \sinh at \cosh \frac{1}{2} at - a^2 \sinh at \cosh \frac{1}{2} at \right) \\
&= \frac{a^2 (\cos \alpha)}{Z^3} (2a^2 - 2) \left(\sinh \frac{1}{2} at \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right), \\
r'' &= \frac{a^2 (\cos \alpha)}{Z^3} (2a^2 - 2) \left(\sinh \frac{1}{2} at \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh r &= \frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2} at \right) \sqrt{\sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + a^2} \\
&= \frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2} at \right) W, \\
W &:= \sqrt{\sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + a^2}, \\
\cosh r &= \cosh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sinh \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\
&= \frac{2}{a^2} \sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta' &= \frac{d}{dt} \left(-\arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\
&= a^2 (\sin \alpha) \frac{\tanh^2 \frac{1}{2} at - 1}{\tanh^2 \frac{1}{2} at - \cos 2\alpha \tanh^2 \frac{1}{2} at + 2a^2} \\
&= a^2 (\sin \alpha) \frac{\tanh^2 \frac{1}{2} at - 1}{\tanh^2 \frac{1}{2} at - a^2 \tanh^2 \frac{1}{2} at + 2a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 (\operatorname{sen} \alpha) \frac{\sinh^2 \frac{1}{2} at - \cosh^2 \frac{1}{2} at}{\sinh^2 \frac{1}{2} at - a^2 \sinh^2 \frac{1}{2} at + 2a^2 \cosh^2 \frac{1}{2} at} \\
&= \frac{-2a^2 \operatorname{sen} \alpha}{\cosh at + a^2 \cosh at + 3a^2 - 1} = \frac{-2a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= r'' - (\sinh r \cosh r) (\eta')^2 - (\sinh r) (\operatorname{sen} \alpha) \eta' \\
&= \frac{a^2 (\cos \alpha)}{Z^3} (2a^2 - 2) \left(\sinh \frac{1}{2} at \right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2} at \right) W \left(\frac{2}{a^2} \sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + 1 \right) \right) \left(\frac{-2a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2} at \right) W \right) (\operatorname{sen} \alpha) \left(\frac{-2a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&= -\frac{2}{Z^4} \left(\sinh \frac{1}{2} at \cos \alpha \right) \\
&\quad \cdot \left(\begin{aligned} &Za^2 - Za^4 - 2Z^2 W + 4a^2 W - 4W \cos^2 \alpha + 4W \cos^4 \alpha \\ &+ 2Z^2 W \cos^2 \alpha - 4a^2 W \cos^2 \alpha + 4W \cosh at \cos^2 \alpha - 4W \cosh at \cos^4 \alpha \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots &= Za^2 - Za^4 - 2Z^2 W + 4a^2 W - 4W \cos^2 \alpha + 4W \cos^4 \alpha + 2Z^2 W \cos^2 \alpha \\
&\quad - 4a^2 W \cos^2 \alpha + 4W \cosh at \cos^2 \alpha - 4W \cosh at \cos^4 \alpha \\
&= Z(\cos 2\alpha) - Z(\cos 2\alpha)^2 - 2((\cosh at)((\cos 2\alpha) + 1) + 3(\cos 2\alpha) - 1)W \\
&\quad + 4(\cos 2\alpha)W - 4W \cos^2 \alpha + 4W \cos^4 \alpha \\
&\quad + 2((\cosh at)((\cos 2\alpha) + 1) + 3(\cos 2\alpha) - 1)W \cos^2 \alpha \\
&\quad - 4(\cos 2\alpha)W \cos^2 \alpha + 4W \cosh at \cos^2 \alpha - 4W \cosh at \cos^4 \alpha \\
&= (\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha)Z \\
&\quad + \left(\begin{aligned} &4\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha - 2\cos 2\alpha - 4\cos 2\alpha \cos^2 \alpha \\ &+ 4\cosh at \cos^2 \alpha - 4\cosh at \cos^4 \alpha \\ &+ 2(\cos^2 \alpha)(3\cos 2\alpha + (\cosh at)(\cos 2\alpha + 1) - 1) \\ &- 2(\cosh at)(\cos 2\alpha + 1) + 2 \end{aligned} \right) W \\
&= -(\cos 2\alpha)(\cos 2\alpha - 1)Z + 4(\cos 2\alpha)(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)W \\
&= -(\cos 2\alpha)(-Z + 4W + Z \cos 2\alpha - 4W \cos^2 \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-Z + 4W + Z \cos 2\alpha - 4W \cos^2 \alpha) &= (\cos 2\alpha - 1)Z + (4 - 4\cos^2 \alpha)W \\
&= 2(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)Z + (4 - 4\cos^2 \alpha)W \\
&= 2(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)(Z - 2W).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z - 2W &= \sqrt{(\cosh at)(a^2 + 1) + 3a^2 - 1} - 2\sqrt{\sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + a^2} \\ &= \sqrt{\left(2\cosh^2 \frac{at}{2} - 1\right)(a^2 + 1) + 3a^2 - 1} - 2\sqrt{\sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z^2 &= \left(2\cosh^2 \frac{at}{2} - 1\right)(a^2 + 1) + 3a^2 - 1 \\ &= \left(2\left(1 + \sinh^2 \frac{at}{2}\right) - 1\right)(a^2 + 1) + 3a^2 - 1 \\ &= \left((2a^2 + 2)\sinh^2 \frac{1}{2}at + 4a^2\right) \\ &= \left((2\cos 2\alpha + 2)\sinh^2 \frac{1}{2}at + 4a^2\right) \\ &= \left(4\cos^2 \alpha \sinh^2 \frac{1}{2}at + 4a^2\right) \\ &= 4\left(\cos^2 \alpha \sinh^2 \frac{1}{2}at + a^2\right) = 4W^2. \end{aligned}$$

Portanto, $Z = 2W$ e com isso está verificada a primeira equação do sistema.

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{-2a^2 \sin \alpha}{Z^2}, \\ Z' &= \frac{a}{2Z}(\sinh at)(a^2 + 1), \\ \eta'' &= \frac{a}{2Z}(\sinh at)(a^2 + 1) \frac{d}{dZ} \left(\frac{-2a^2 \sin \alpha}{Z^2} \right) \\ &= 2a^3 (\sinh at \sin \alpha) \frac{a^2 + 1}{Z^4} \sinh r \\ &= \frac{2W}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2}at \right) = \frac{Z}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2}at \right) \cosh r \\ &= \frac{2}{a^2} \sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + 1 = \frac{2\sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + a^2}{a^2} \\ &= \frac{\sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + W^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \left(\sinh^2 \frac{1}{2}at \cos^2 \alpha + \left(\frac{Z}{2}\right)^2 \right), \\ r' &= \frac{2}{Z}a(\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2}at \right), \\ r'' &= \frac{a^2(\cos \alpha)}{Z^3} (2a^2 - 2) \left(\sinh \frac{1}{2}at \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\sinh r) \eta'' + 2(\cosh r) r' \eta' + (\sin \alpha) r' \\ &= \frac{Z}{a^2} \left((\cos \alpha) \sinh \frac{1}{2}at \right) \left(2a^3 (\sinh at \sin \alpha) \frac{a^2 + 1}{Z^4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{a^2} \left(\sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + \left(\frac{Z}{2} \right)^2 \right) \frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right) \left(\frac{-2a^2 \sin \alpha}{Z^2} \right) \\
& + (\sin \alpha) \left(\frac{2}{Z} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{1}{2} at \right) \right) \\
& = 2a \left(\sin \alpha \cos \alpha \sinh \frac{1}{2} at \right) \frac{\sinh at + a^2 \sinh at - 4 \cosh \frac{1}{2} at \sinh \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha}{Z^3}, \\
& \sinh at + a^2 \sinh at - 4 \cosh \frac{1}{2} at \sinh \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha \\
& = \sinh at + (\cos 2\alpha) \sinh at - 4 \cosh \frac{1}{2} at \sinh \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, verifica a segunda equação.

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= 2(\sin \alpha)t - 2 \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{t}{2} \right) \right), \\
\theta' &= 2(\sin \alpha) + \frac{d}{dt} \left(-2 \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\
&= 2(\sin \alpha) + 2a^2 (\sin \alpha) \frac{\tanh^2 \frac{1}{2} at - 1}{\tanh^2 \frac{1}{2} at - \cos 2\alpha \tanh^2 \frac{1}{2} at + 2a^2} \\
&= 2(\sin \alpha) + 2a^2 (\sin \alpha) \frac{\sinh^2 \frac{1}{2} at - \cosh^2 \frac{1}{2} at}{\sinh^2 \frac{1}{2} at - \cos 2\alpha \sinh^2 \frac{1}{2} at + 2a^2 \cosh^2 \frac{1}{2} at} \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{4a^2 (\sin \alpha)}{\cosh at + a^2 \cosh at + 3a^2 - 1} \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{4a^2 (\sin \alpha)}{Z^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \theta' + (\cosh r - 1) \eta' \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{4a^2 (\sin \alpha)}{Z^2} \\
&+ \left(\frac{1}{a^2} \left(\sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + \left(\frac{Z}{2} \right)^2 \right) - 1 \right) \left(\frac{-2a^2 \sin \alpha}{Z^2} \right) \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{1}{2} (\sin \alpha) \frac{4 \sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + Z^2 + 4a^2}{Z^2} \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{1}{2} (\sin \alpha) \frac{4 \sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + (\cosh at + a^2 \cosh at + 3a^2 - 1) + 4a^2}{(\cosh at + a^2 \cosh at + 3a^2 - 1)} \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{1}{2} (\sin \alpha) \frac{4 \sinh^2 \frac{1}{2} at \cos^2 \alpha + (\cosh at + (\cos 2\alpha) \cosh at + 3(\cos 2\alpha) - 1) + 4(\cos 2\alpha)}{(\cosh at + (\cos 2\alpha) \cosh at + 3(\cos 2\alpha) - 1)} \\
&= 2(\sin \alpha) - \frac{1}{2} (\sin \alpha) 2 = \sin \alpha,
\end{aligned}$$

Portanto, verifica a terceira equação e o sistema.

Condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 r(0) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sinh \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\
 \eta(0) &= -\arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\
 \theta(0) &= 2(\operatorname{sen} \alpha) 0 - 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \tanh \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\
 Z(0) &= \sqrt{(\cosh 0)(a^2 + 1) + 3a^2 - 1} = 2\sqrt{a^2} (\text{auxiliar}) \\
 r'(0) &= \frac{2}{2\sqrt{a^2}} a (\cos \alpha) \left(\cosh \frac{0}{2} \right) = a \frac{\cos \alpha}{\sqrt{a^2}} = a \frac{\cos \alpha}{a} = \cos \alpha, \\
 \theta'(0) &= 2(\operatorname{sen} \alpha) - \frac{4a^2 (\operatorname{sen} \alpha)}{Z^2} = 2(\operatorname{sen} \alpha) - \frac{4a^2 (\operatorname{sen} \alpha)}{(2\sqrt{a^2})^2} = \operatorname{sen} \alpha.
 \end{aligned}$$

B.2 Tipo luz, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right), \quad \eta(t) = -\arctan \frac{\sqrt{2}t}{4}, \quad \theta(t) = \sqrt{2}t - 2 \arctan \frac{\sqrt{2}t}{4}, \\
 r' &= \frac{d}{dt} \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 8}}, \\
 r'' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\sqrt{t^2 + 8}} \right) = \frac{-2t}{(t^2 + 8)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \eta' &= \frac{d}{dt} \left(-\arctan \frac{\sqrt{2}t}{4} \right) = -2 \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 8}, \\
 \eta'' &= \frac{d}{dt} \left(-2 \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 8} \right) = \frac{4\sqrt{2}t}{(t^2 + 8)^2}, \\
 \theta' &= \frac{d}{dt} \left(\sqrt{2}t - 2 \arctan \frac{\sqrt{2}t}{4} \right) = \sqrt{2} \frac{t^2 + 4}{t^2 + 8}, \\
 \sinh r &= \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right) \right) = \frac{1}{2} \sqrt{2}t \sqrt{\frac{1}{8}t^2 + 1}, \\
 \cosh r &= \cosh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} t \right) \right) = \frac{1}{4}t^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Primeira equação:

$$\begin{aligned}
 &r'' - (\sinh r \cosh r) (\eta')^2 - (\sinh r) C_0 \eta' \\
 &= \frac{-2t}{(t^2 + 8)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \sqrt{2}t \sqrt{\frac{1}{8}t^2 + 1} \left(\frac{1}{4}t^2 + 1 \right) \left(-2 \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 8} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\sqrt{2}t\sqrt{\frac{1}{8}t^2+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2\frac{\sqrt{2}}{t^2+8}\right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Segunda equação:

$$\begin{aligned}
0 &= (\sinh r) \eta'' + 2(\cosh r) r' \eta' + C_0 r' = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}t\sqrt{\frac{1}{8}t^2+1}\right) \frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+8)^2} \\
&+ 2\left(\frac{1}{4}t^2+1\right) \frac{2}{\sqrt{t^2+8}} \left(-2\frac{\sqrt{2}}{t^2+8}\right) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{t^2+8}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terceira equação:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin \alpha = \theta' + (\cosh r - 1) \eta' \\
&= \sqrt{2} \frac{t^2+4}{t^2+8} + \left(\frac{1}{4}t^2+1-1\right) \left(-2\frac{\sqrt{2}}{t^2+8}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Condições iniciais:

$$\begin{aligned}
r(0) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} 0 \right) = 0, \\
\eta(0) &= -\arctan \frac{\sqrt{2}0}{4} = 0, \\
\theta(0) &= \sqrt{2}0 - 2 \arctan \frac{\sqrt{2}0}{4} = 0, \\
r'(0) &= \frac{2}{\sqrt{0^2+8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
\theta'(0) &= \sqrt{2} \frac{0+4}{0+8} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

B.3 Tipo tempo, $\alpha > \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{-\cos 2\alpha}, \\
r(t) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sin \left(a \frac{t}{2} \right) \right), \\
\eta(t) &= -\arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tan \left(a \frac{t}{2} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= 2(\operatorname{sen}\alpha)t - 2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\tan\left(a\frac{t}{2}\right)\right), \\
a^2 &= -\cos 2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha, \\
r' &= \frac{d}{dt}\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{\cos\alpha}{a}\operatorname{sen}\left(a\frac{t}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{2a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{\sqrt{-(\cos(2\alpha+at)+\cos(2\alpha-at)-2\cos 2\alpha+2\cos at-8a^2-2)}} \\
&= \frac{2a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{\sqrt{-4(\cos^2\alpha\cos at+3\cos^2\alpha-2)}} \\
&= \frac{a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{\sqrt{2-3\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos at}} = \frac{a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{Z}, \\
Z &:= \sqrt{2-3\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos at} \text{ (auxiliar)}, \\
Z' &= \frac{d}{dt}\sqrt{2-3\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos at} = \frac{1}{2}a(\cos^2\alpha)\frac{\operatorname{sen}at}{Z}, \\
r'' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{Z}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}a(\cos^2\alpha)\frac{\operatorname{sen}at}{Z}\frac{d}{dZ}\left(\frac{a\sqrt{2}(\cos\alpha)\cos\frac{1}{2}at}{Z}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{Z}a^2\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{1}{2}at - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{Z^3}a^2\cos^3\alpha\operatorname{sen}at\cos\frac{1}{2}at \\
&= -\frac{1}{2}a^2(\cos\alpha)\frac{\sqrt{2}Z^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}at + \sqrt{2}\cos^2\alpha\operatorname{sen}at\cos\frac{1}{2}at}{Z^3} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{a^2(\cos\alpha)}{Z^3}\left(\sqrt{2}(2-3\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha)\cos at)\operatorname{sen}\frac{1}{2}at + \sqrt{2}\cos^2\alpha\operatorname{sen}at\cos\frac{1}{2}at\right),
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\left(2-3\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha)\left(\cos^2\frac{at}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{at}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\frac{1}{2}at \\
&\quad + \sqrt{2}(\cos^2\alpha)\left(2\operatorname{sen}\frac{at}{2}\cos\frac{at}{2}\right)\cos\frac{1}{2}at \\
&= \left(\sqrt{2}\cos^2\alpha\right)\cos^2\frac{1}{2}at\operatorname{sen}\frac{1}{2}at + \left(\sqrt{2}\cos^2\alpha\right)\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}at \\
&\quad + \left(-\sqrt{2}(3\cos^2\alpha-2)\right)\operatorname{sen}\frac{1}{2}at \\
&= \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}at\cos^2\alpha\right)\left(\sqrt{2}\cos^2\frac{1}{2}at + \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}at\right) \\
&\quad + \left(-\sqrt{2}(3\cos^2\alpha-2)\right)\operatorname{sen}\frac{1}{2}at \\
&= \left(\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}at\right)\cos^2\alpha\right)\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}(3\cos^2\alpha-2)\right)\operatorname{sen}\frac{1}{2}at \\
&= \left(-2\sqrt{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}at\right)(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)
\end{aligned}$$

Podemos reescrever r'' como

$$\begin{aligned} r'' &= -\frac{1}{2}a^2(\cos \alpha) \frac{(-2\sqrt{2})\left(\sin \frac{1}{2}at\right)(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)}{Z^3} \\ &= \sqrt{2}a^2 \left((\cos \alpha) \sin \frac{1}{2}at \right) (\cos \alpha - 1) \frac{\cos \alpha + 1}{Z^3}. \end{aligned}$$

Z pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2 - 3\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos at} \\ &= \sqrt{2 - 3\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha) \left(1 - \sin^2 \frac{at}{2} - \sin^2 \frac{at}{2}\right)} \\ &= \sqrt{(2\cos^2 \alpha) \sin^2 \frac{1}{2}at - 2(2\cos^2 \alpha - 1)} \\ &= \sqrt{2 \left((\cos^2 \alpha) \sin^2 \frac{1}{2}at + a^2 \right)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(\cos^2 \alpha) \sin^2 \frac{1}{2}at + a^2}. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \cosh r &= \cosh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sin \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{2}{a^2} \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{1}{2}at + 1 \right), \\ \sinh r &= \sinh \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \sin \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sin \frac{1}{2}at \right) \sqrt{(\cos^2 \alpha \sin^2 \frac{1}{2}at + a^2)} \\ &= \frac{2}{a^2} \left((\cos \alpha) \sin \frac{1}{2}at \right) \frac{Z}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}Z(\cos \alpha) \frac{\sin \frac{1}{2}at}{a^2}, \\ \eta' &= \frac{d}{dt} \left(-\arctan \left(\frac{\sin \alpha}{a} \tan \left(a \frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ &= -a^2(\sin \alpha) \frac{\tan^2 \frac{1}{2}at + 1}{\tan^2 \frac{1}{2}at - \cos 2\alpha \tan^2 \frac{1}{2}at + 2a^2} \\ &= -a^2(\sin \alpha) \frac{\sin^2 \frac{1}{2}at + \cos^2 \frac{at}{2}}{\sin^2 \frac{1}{2}at + a^2 \sin^2 \frac{1}{2}at + 2a^2 \cos^2 \frac{at}{2}} \\ &= \frac{-2a^2 \sin \alpha}{a^2 \cos at - \cos at + 3a^2 + 1} \\ &= \frac{-2a^2 \sin \alpha}{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos at - \cos at + 3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + 1} \\ &= \frac{-2a^2 \sin \alpha}{-2(\cos^2 \alpha) \cos at + 4 - 6\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{-(\cos^2 \alpha) \cos at + 2 - 3 \cos^2 \alpha} \\
&= \frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2}.
\end{aligned}$$

Primeira equação

$$\begin{aligned}
&r'' - (\sinh r \cosh r) (\eta')^2 - (\sinh r) (\operatorname{sen} \alpha) \eta' \\
&= \sqrt{2} a^2 \left((\cos \alpha) \operatorname{sen} \frac{1}{2} at \right) (\cos \alpha - 1) \frac{\cos \alpha + 1}{Z^3} \\
&\quad - \left(\sqrt{2} Z (\cos \alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} at}{a^2} \left(\frac{2}{a^2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + 1 \right) \right) \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right)^2 \\
&\quad - \left(\sqrt{2} Z (\cos \alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} at}{a^2} \right) (\operatorname{sen} \alpha) \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&= \frac{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} at \cos \alpha)}{Z^3} \left(\begin{array}{c} -\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a^2 \cos^2 \alpha + \sqrt{2} Z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \\ -\sqrt{2} a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a^2 \cos^2 \alpha + \sqrt{2} Z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - \sqrt{2} a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \\
&-2\sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&= -\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a^2 \cos^2 \alpha \\
&\quad + \sqrt{2} (2 - 3 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha) \cos at) \operatorname{sen}^2 \alpha - \sqrt{2} a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \\
&\quad - 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&= -\sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha \\
&\quad + \sqrt{2} \left(2 - 3 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha) \left(\cos^2 \frac{at}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{at}{2} \right) \right) \operatorname{sen}^2 \alpha \\
&\quad - \sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\sqrt{2} (\cos^2 \alpha) (\operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&= \left(-\sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \cos^2 \frac{1}{2} at + \left(-\sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&\quad + \sqrt{2} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \sqrt{2} (\cos^2 \alpha) (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \\
&\quad + \sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha) (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha) (3 \cos^2 \alpha - 2) \\
&= -(\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha) \sqrt{2} + \frac{1}{8} \sqrt{2} - \frac{1}{8} \sqrt{2} \cos 4\alpha \\
&= -\frac{1}{8} \left(\sqrt{2} \cos^2 \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen}^2 \alpha - \sqrt{2} \right) (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, está satisfeita a primeira equação. Quanto à segunda equação, temos

$$\eta'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) + \frac{1}{2} a (\cos^2 \alpha) \frac{\operatorname{sen} at}{Z} \left(\frac{d}{dZ} \frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z^4} a^3 (\cos^2 \alpha) (\operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} at (\sinh r), \\
\eta'' + 2 (\cosh r) r' \eta' + (\operatorname{sen} \alpha) r' &= \left(\sqrt{2} Z (\cos \alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} at}{a^2} \right) \frac{1}{Z^4} a^3 (\cos^2 \alpha) (\operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} at \\
&\quad + 2 \left(\frac{2}{a^2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + 1 \right) \frac{a \sqrt{2} (\cos \alpha) \cos \frac{1}{2} at}{Z} \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&\quad + (\operatorname{sen} \alpha) \frac{a \sqrt{2} (\cos \alpha) \cos \frac{1}{2} at}{Z} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{Z} a (\cos \alpha) (\operatorname{sen} \alpha) \cos \frac{1}{2} at \\
&\quad - 2 \frac{\sqrt{2}}{Z^3} a^3 \left((\cos \alpha) (\operatorname{sen} \alpha) \cos \frac{1}{2} at \right) \left(\frac{2}{a^2} (\cos^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + 1 \right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{Z^3} a (\cos^3 \alpha) (\operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{sen} at) \operatorname{sen} \frac{1}{2} at \\
&= \frac{a (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)}{Z^3} \left(\begin{array}{l} \sqrt{2} Z^2 \cos \frac{1}{2} at - 2 \sqrt{2} a^2 \cos \frac{1}{2} at \\ - 4 \sqrt{2} \cos^2 \alpha \cos \frac{1}{2} at \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\ + \sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen} at \operatorname{sen} \frac{1}{2} at \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} Z^2 \cos \frac{1}{2} at - 2 \sqrt{2} a^2 \cos \frac{1}{2} at - 4 \sqrt{2} \cos^2 \alpha \cos \frac{1}{2} at \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&\quad + \sqrt{2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen} at \operatorname{sen} \frac{1}{2} at \\
&= \sqrt{2} (2 - 3 \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha) \cos at) \cos \frac{1}{2} at \\
&\quad - 2 \sqrt{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \left(\cos \frac{1}{2} at \right) \\
&\quad - 4 \sqrt{2} (\cos^2 \alpha) \cos \frac{1}{2} at \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \\
&\quad + \sqrt{2} (\cos^2 \alpha) (\operatorname{sen} at) \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} at \right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto está verificada a segunda equação. Quanto à terceira equação, temos

$$\begin{aligned}
\theta' &= 2 (\operatorname{sen} \alpha) + 2 \eta' = 2 (\operatorname{sen} \alpha) + 2 \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right), \\
\theta' + (\cosh r - 1) \eta' &= 2 (\operatorname{sen} \alpha) + 2 \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{a^2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + 1 - 1 \right) \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&= 2 (\operatorname{sen} \alpha) + 2 \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{a^2} \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at \right) \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\
&= 2 (\operatorname{sen} \alpha) - 2 (\operatorname{sen} \alpha) \frac{\cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + a^2}{2 ((\cos^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} at + a^2)}
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen} \alpha.$$

Portanto, está verificada a terceira equação. Quanto às condições iniciais:

$$\begin{aligned} r(0) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{a} \operatorname{sen} \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\ \eta(0) &= -\arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \tan \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\ \theta(0) &= 2(\operatorname{sen} \alpha)0 - 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \tan \left(a \frac{0}{2} \right) \right) = 0, \\ Z(0) &= \sqrt{2 - 3 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos(a0)} = \sqrt{2 - 3 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{2} \sqrt{-\cos 2\alpha} \text{ (auxiliar)} \\ r'(0) &= \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha} \sqrt{2} (\cos \alpha) \cos \frac{1}{2} a0}{\sqrt{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}} \\ &= \cos \alpha, \\ \theta'(0) &= 2(\operatorname{sen} \alpha) + 2 \left(\frac{-a^2 \operatorname{sen} \alpha}{Z^2} \right) \\ &= 2(\operatorname{sen} \alpha) + 2 \left(\frac{-(-\cos 2\alpha) \operatorname{sen} \alpha}{\left(\sqrt{2} \sqrt{-\cos 2\alpha} \right)^2} \right) \\ &= \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Estudo das geodésicas no espaço Sol

Definição C.1. A geometria modelo Sol é dada pelo conjunto $\mathbb{R}^3$ munido da operação de grupo

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + e^{z_1} x_2, y_1 + e^{-z_1} y_2, z_1 + z_2)$$

e da métrica riemanniana dada por

$$g_{(x,y,z)}(e_i, e_j) = \begin{bmatrix} e^{-2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3 \approx T_{(x,y,z)} \text{Sol}$.

Temos que (Sol, g) é um grupo de Lie, sendo g uma métrica invariante à esquerda.

Os campos de vetores dados por

$$E_1 = e^z \partial_x, \quad E_2 = e^{-z} \partial_y, \quad E_3 = \partial_z$$

formam um referencial ortonormal invariante à esquerda.

Este referencial satisfaz

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_1, E_3] = -E_1, \quad [E_2, E_3] = E_2.$$

Utilizando a fórmula de Koszul, é possível encontrar que a conexão de Levi-Civita de (Sol, g) no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \nabla_{E_1} E_1 & \nabla_{E_1} E_2 & \nabla_{E_1} E_3 \\ \nabla_{E_2} E_1 & \nabla_{E_2} E_2 & \nabla_{E_2} E_3 \\ \nabla_{E_3} E_1 & \nabla_{E_3} E_2 & \nabla_{E_3} E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & 0 & -E_1 \\ 0 & -E_3 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quanto ao grupo de isometrias de Sol, temos que o estabilizador de um ponto possui 8 componentes (v. [Sct]), sendo trivial a componente contendo a identidade. Isso significa que não há um grupo de rotações em torno de um ponto em Sol. Por esse motivo, a geometria Sol é aquela com

menos simetrias dentre as oito geometrias modelo de Thurston. Quanto à componente de $\text{Isom}(\text{Sol})$ contendo a identidade, essa é dada pelo próprio grupo Sol.

Faremos agora um estudo das geodésicas de Sol. Esse estudo pode ser encontrado em [BB], mas o incluímos aqui com maiores detalhes, corrigindo algumas imprecisões.

Primeiramente, consideremos as geodésicas partindo da origem $(0,0,0)$. Considere um vetor $v = \sum_{i=1}^3 v_i E_i$. Denote por $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \text{Sol}$ a geodésica com $\gamma(0) = 0$ e $\gamma'(0) = v$.

Sem perda de generalidade, iremos supor que v é unitário, i.e. $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Assim, a geodésica estará parametrizada pelo comprimento de arco de Sol. Denotando $\gamma = (x, y, z)$, temos

$$\gamma' = (x', y', z') = x' e^{-z} E_1 + y' e^z E_2 + z' E_3$$

Temos as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 0, \\ x'(0) e^{-z(0)} &= x'(0) = v_1, \\ y'(0) e^{z(0)} &= y'(0) = v_2, \\ z'(0) &= v_3. \end{aligned}$$

Por definição, a geodésica deve satisfazer $\nabla_{\gamma'} \gamma' \equiv 0$. Em coordenadas,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \gamma' &= (x' e^{-z})' E_1 + (y' e^z)' E_2 + z'' E_3 + \begin{bmatrix} x' e^{-z} & y' e^z & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 & 0 & -E_1 \\ 0 & -E_3 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' e^{-z} \\ y' e^z \\ z' \end{bmatrix} \\ &= e^{-z} (x'' - 2z' x') E_1 + e^z (y'' + 2z' y') E_2 + (z'' + (x')^2 e^{-2z} - (y')^2 e^{2z}) E_3 \end{aligned}$$

Portanto, $\gamma = (x, y, z)$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} x'' - 2z' x' &= 0, \\ y'' + 2z' y' &= 0, \\ z'' + (x')^2 e^{-2z} - (y')^2 e^{2z} &= 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} x(t) &= v_1 \int_0^t e^{2z(s)} ds \\ y(t) &= v_2 \int_0^t e^{-2z(s)} ds \end{aligned}$$

satisfazem as duas primeiras equações e as condições iniciais $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = v_1$, $y'(0) = v_2$. Destacamos que

$$x'(t) = v_1 e^{2z(t)}, \quad y'(t) = v_2 e^{-2z(t)}.$$

Substituindo na terceira equação, ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= z'' + (x')^2 e^{2(-z)} - (y')^2 e^{2z} \\ &= z'' + (v_1 e^{2z})^2 e^{2(-z)} - (v_2 e^{-2z})^2 e^{2z} \\ &= z'' + v_1^2 e^{2z} - v_2^2 e^{-2z} \end{aligned}$$

Multiplicando essa equação por $2z'$, obtemos a equação adicional

$$0 = \frac{d}{dt} \left((z')^2 + v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z} \right)$$

Integrando de 0 a t ,

$$\begin{aligned} 0 &= (z')^2 + v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z} - \left((z'(0))^2 + v_1^2 e^{2z(0)} + v_2^2 e^{-2z(0)} \right) \\ &= (z')^2 + v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z} - (v_3^2 + v_1^2 + v_2^2) \\ &= (z')^2 + v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z} - 1 \end{aligned}$$

Destacamos que essa é uma equação adicional, advinda das equações anteriores. Resolver essa equação não significa, necessariamente, resolver a equação inicial.

Caso 1. $v_3^2 = 1$

Como $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, este caso implica $v_1 = v_2 = 0$. Ficamos com

$$0 = z''$$

A solução é dada por

$$z(t) = v_3 t = \pm t.$$

Note que z está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, neste caso a geodésica é dada por

$$\gamma(t) = (0, 0, \pm t), t \in \mathbb{R}.$$

Caso 2. $v_3^2 < 1$ com $v_1 = 0$

As equações em z se reduzem a

$$\begin{aligned} 0 &= z'' - v_2^2 e^{-2z} \\ 0 &= (z')^2 + v_2^2 e^{-2z} - 1 \end{aligned}$$

Somando as duas equações ficamos com

$$0 = z'' + (z')^2 - 1$$

Note que $v_3 \neq \pm 1$ e $v_1 = 0 \implies v_2 \neq 0$. Segue daí e da equação $0 = (z')^2 + v_2^2 e^{-2z} - 1$ que $(z')^2 \neq 1$. Portanto, podemos escrever

$$\frac{z''}{1 - (z')^2} = 1.$$

Fazendo $u = z' \implies du = z'' dt$, temos

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{z''}{1 - (z')^2} dt = \int_{z'(0)}^{z'(t)} \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_{v_3}^{z'(t)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+z'}{1-z'} - \ln \frac{1+v_3}{1-v_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+z')(1-v_3)}{(1-z')(1+v_3)} \right) \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \implies 2t &= \ln \left(\frac{(1+z')(1-v_3)}{(1-z')(1+v_3)} \right) \\ \implies e^{2t} &= \frac{(1+z')(1-v_3)}{(1-z')(1+v_3)} \\ \implies e^{2t} (1-z')(1+v_3) &= (1+z')(1-v_3) \\ \implies 0 &= e^{2t} (1-z')(1+v_3) - (1+z')(1-v_3) \\ \implies 0 &= ((1-e^{2t})v_3 - (e^{2t}+1))z' + ((e^{2t}+1)v_3 + (e^{2t}-1)) \\ \implies 0 &= ((e^{-t}-e^t)v_3 - (e^t+e^{-t}))z' + ((e^t+e^{-t})v_3 + (e^t-e^{-t})) \\ \implies 0 &= (-2(\sinh t)v_3 - 2\cosh t)z' + (2(\cosh t)v_3 + 2\sinh t) \\ \implies 0 &= (-\sinh t)v_3 - \cosh t)z' + ((\cosh t)v_3 + \sinh t) \end{aligned}$$

Note que $0 \neq (\sinh t)v_3 + \cosh t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, suponha que $0 = (\sinh t)v_3 + \cosh t$. Isso implica em particular que $v_3 \neq 0$ (pois $\cosh t > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$).

Segue daí que $0 = \frac{\sinh t}{\cosh t} + \frac{1}{v_3}$. Da própria equação, devemos ter também que $0 = (\cosh t)v_3 + \sinh t \implies 0 = v_3 + \frac{\sinh t}{\cosh t}$.

Temos então $-\frac{1}{v_3} = \frac{\sinh t}{\cosh t} = -v_3 \implies v_3^2 = 1$. Uma contradição, pois estamos supondo $v_3^2 < 1$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \implies z' &= \frac{v_3 \cosh t + \sinh t}{v_3 \sinh t + \cosh t} \\ \implies z(t) - z(0) &= \int_0^t \frac{v_3 \cosh s + \sinh s}{v_3 \sinh s + \cosh s} ds = \ln(v_3 \sinh s + \cosh s) \Big|_0^t \\ \implies z(t) &= \ln(v_3 \sinh s + \cosh s) - \ln(v_3 \sinh 0 + \cosh 0) \\ \implies z(t) &= \ln(v_3 \sinh t + \cosh t) \\ \implies z(t) &= \ln(v_3 \sinh t + \cosh t) \end{aligned}$$

Temos então

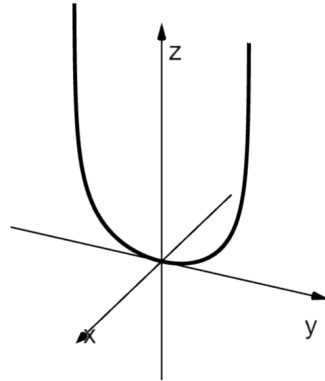
$$\begin{aligned} y(t) &= v_2 \int_0^t e^{-2z(s)} ds = v_2 \int_0^t \exp(-2 \ln(v_3 \sinh s + \cosh s)) ds \\ &= v_2 \int_0^t \exp(\ln(v_3 \sinh s + \cosh s)^{-2}) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_2 \int_0^t (v_3 \sinh s + \cosh s)^{-2} ds \\
&= v_2 \left. \frac{e^s}{(1-v_3)(v_3 \sinh s + \cosh s)} \right|_0^t \\
&= v_2 \left(\frac{e^t}{(1-v_3)(v_3 \sinh t + \cosh t)} - \frac{e^0}{(1-v_3)(v_3 \sinh 0 + \cosh 0)} \right) \\
&= v_2 \left(\frac{e^t}{(1-v_3)(v_3 \sinh t + \cosh t)} - \frac{1}{(1-v_3)} \right) \\
&= v_2 \left(\frac{e^t - (v_3 \sinh t + \cosh t)}{(1-v_3)(v_3 \sinh t + \cosh t)} \right) \\
&= v_2 \left(\frac{(1-v_3) \sinh t}{(1-v_3)(v_3 \sinh t + \cosh t)} \right) \\
&= \frac{v_2 \sinh t}{v_3 \sinh t + \cosh t}
\end{aligned}$$

Portanto, a solução $\gamma = (x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \text{Sol}$ neste caso é dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &\equiv 0 \\
y(t) &= \frac{v_2 \sinh t}{v_3 \sinh t + \cosh t} \\
z(t) &= \ln(v_3 \sinh t + \cosh t)
\end{aligned}$$

A geodésica se parece com



Caso 3. $v_3^2 < 1$ com $v_2 = 0$.

Caso análogo ao anterior, com solução dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{v_1 \sinh t}{-v_3 \sinh t + \cosh t} \\
y(t) &= 0 \\
z(t) &= -\ln(-v_3 \sinh t + \cosh t)
\end{aligned}$$

Caso 4. $v_3^2 < 1$ com $v_1 v_2 \neq 0$.

Subcaso 1: $v_3 = 0$.

Subcaso 1.1: $v_1^2 = v_2^2 \implies v_1^2 = \frac{1}{2}$.

Neste caso, a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= v_1 t \\ y(t) &= v_2 t \\ z(t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Essa solução funciona, de fato, somente porque $v_1^2 = v_2^2$ pois teremos

$$\begin{aligned} z'' + v_1^2 e^{2z} - v_2^2 e^{-2z} &= 0 + v_1^2 e^0 - v_2^2 e^0 \\ &= v_1^2 - v_2^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observação C.2. O problema de valor inicial

$$\begin{aligned} z'' &= -v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z} \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= v_3 \end{aligned}$$

possui solução única. A equação é dada por $z'' = f(t, z)$, sendo $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, z) = -v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z}$ (a função é na verdade autônoma, i.e. $f(t, z)$ não depende de fato de t , mas apenas de z).

Se $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo maximal de definição da solução $z : I \rightarrow \mathbb{R}$, então (v. [Stm]) $\phi(t) = (t, z(t)) \rightarrow \partial \mathbb{R}^2$ quando $t \rightarrow \omega_{\pm}$.

Observe então que a equação $(z')^2 = 1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})$ nos diz que

$$0 \leq 1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z}).$$

Se $v_1 v_2 \neq 0$, isso implica que z é limitada (inferior e superiormente). De fato, se não for limitada inferiormente, então o termo $v_2^2 e^{-2z}$ faz a expressão ir para $-\infty$. Analogamente, se não for limitada superiormente, o termo $v_1^2 e^{2z}$ faz a expressão ir para $-\infty$.

Mas então, para que tenhamos $(t, z(t)) \rightarrow \partial \mathbb{R}^2$ quando $t \rightarrow \omega_{\pm}$, é necessário que $I = (\omega_-, \omega_+) = (-\infty, +\infty)$, i.e. a solução z está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Subcaso 1.2: $v_1^2 \neq v_2^2$.

Da equação $(z')^2 = 1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})$ vem que

$$\begin{aligned} \implies 0 &\leq 1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z}) \\ \implies 0 &\leq e^{2z} - (v_1^2 e^{4z} + v_2^2) = -v_1^2 (e^{2z} - 1) \left(e^{2z} - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \end{aligned}$$

Assim,

- se $z > 0$, então $-v_1^2(e^{2z} - 1) < 0 \implies e^{2z} - \frac{v_2^2}{v_1^2} \leq 0 \implies e^{2z} \leq \frac{v_2^2}{v_1^2} \implies e^z \leq \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \implies 0 < z \leq \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|$. Em particular, isso implica $0 < \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \implies 1 < \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \implies |v_1| < |v_2|$.
- se $z < 0$, então $-v_1^2(e^{2z} - 1) > 0 \implies 0 \leq e^{2z} - \frac{v_2^2}{v_1^2} \implies \frac{v_2^2}{v_1^2} \leq e^{2z} \implies \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \leq e^z \implies \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \leq z < 0$. Em particular, isso implica $\ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| < 0 \implies \left| \frac{v_2}{v_1} \right| < 1 \implies |v_2| < |v_1|$.

Reciprocamente, as observações acima dividem o nosso problema em dois casos possíveis:

- se $|v_1| < |v_2|$, então devemos ter $0 \leq z(t) \leq \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
- se $|v_2| < |v_1|$, então devemos ter $\ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \leq z(t) \leq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $|v_1| < |v_2|$, então $z''(0) = v_2^2 - v_1^2 > 0$. Isso implica que z' é estritamente crescente numa vizinhança de 0, sendo que estamos no caso em que $z'(0) = 0$.

Segue daí que existe um intervalo aberto I (que podemos supor maximal) em torno de 0 com a propriedade de que $t = 0$ é o único ponto sobre o qual $z'(t) = 0$.

Isso implica que z' é positiva sobre a parte de I que está à direita de 0 e negativa na parte à esquerda.

Suponha por exemplo que I é limitado, digamos $I = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Em particular, devemos ter $z'(b) = 0$. Da equação $(z')^2 = 1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})$ vem que

$$0 = 1 - (v_1^2 e^{2z(b)} + v_2^2 e^{-2z(b)}).$$

Isso implica que $z(b) = 0$ ou $z(b) = \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|$. Mas se $z(b) = 0$, então pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0, b)$ tal que $z'(c) = \frac{z(b) - z(0)}{b - 0} = 0$, uma contradição com a propriedade da qual I é maximal. Portanto, devemos ter $z(b) = \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|$.

Temos então que $z''(b) = -v_1^2 e^{2z(b)} + v_2^2 e^{-2z(b)} = -v_1^2 \exp \left(2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) = v_1^2 - v_2^2 < 0$.

Segue daí que z' está numa "vizinhança decrescente" e deve ser negativa à direita de b .

Lema C.3. *A integral*

$$\int_0^{\ln |v_2/v_1|} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = T_0 \in \mathbb{R}_+.$$

está bem definida, i.e. não explode.

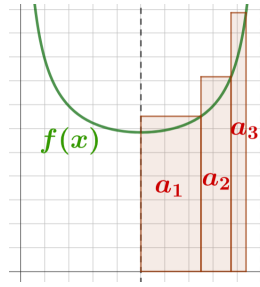
Demonstração. Denote $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}}$.

Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, sendo

$$a_k = 2^{-(k+1)} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| f \left(\left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)$$

Essa série têm a propriedade (na verdade, foram construídas geometricamente com esse intuito) de que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|}^{(1-2^{-(n+1)}) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|} f(z) dz &< \sum_{k=1}^n a_k \\ G(b_k) &= \int_{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|}^{b_k} f(z) dz < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \\ \int_{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|}^{\ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|} f(z) dz &< \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \end{aligned}$$



Mostremos que essa série é convergente e, portanto, a integral (parte à direita da figura) é finita. A parcela à esquerda é simétrica.

Façamos o teste da razão:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{-(k+2)} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| f \left(\left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)}{2^{-(k+1)} \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| f \left(\left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)} = \frac{1}{2} \frac{f \left(\left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)}{f \left(\left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)}{1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)}{1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f_1(k)}{f_2(k)}} \end{aligned}$$

Mas esse limite ainda é uma indeterminação, do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicaremos a regra de L'Hospital sobre a variável k (considerando agora uma variável contínua).

Primeiramente lembramos que, se $a > 0$, $b \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^{bx} &= \frac{d}{dx} \left(e^{\ln a} \right)^{bx} = \frac{d}{dx} \left(e^{(\ln a)bx} \right) = b(\ln a) e^{(\ln a)bx} \\ &= b(\ln a) a^{bx}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{df_1}{dk} &= \frac{d}{dk} \left(1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right) \right) \\
&= - \left(\begin{aligned} &v_1^2 2 \left((\ln 2) 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &+ v_2^2 \left(-2 \left((\ln 2) 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right) \\
&= -2 \left((\ln 2) 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right) \\
\frac{df_2}{dk} &= \frac{d}{dk} \left(1 - \left(v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) + v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right) \right) \\
&= - \left(\begin{aligned} &v_1^2 2 \left((\ln 2) 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &+ v_2^2 \left(-2 \left((\ln 2) 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right) \\
&= -2 \left((\ln 2) 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{df_1}{dk}(k)}{\frac{df_2}{dk}(k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2 \left((\ln 2) 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right)}{-2 \left((\ln 2) 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+1)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &v_1^2 \exp \left(2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \\ &- v_2^2 \exp \left(-2 \left(1 - 2^{-(k+2)} \right) \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \end{aligned} \right)} \\
&= \frac{2 \left(v_1^2 \exp \left(2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) - v_2^2 \exp \left(-2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)}{\left(v_1^2 \exp \left(2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) - v_2^2 \exp \left(-2 \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right) \right)} \\
&= \frac{2 \left(v_1^2 \left| \frac{v_2}{v_1} \right|^2 - v_2^2 \left| \frac{v_2}{v_1} \right|^{-2} \right)}{\left(v_1^2 \left| \frac{v_2}{v_1} \right|^2 - v_2^2 \left| \frac{v_2}{v_1} \right|^{-2} \right)} = 2 \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Note que estamos no caso em que $v_2^2 - v_1^2 \neq 0$.

Segue daí que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f_1(k)}{f_2(k)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_1(k)}{f_2(k)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dk} f_1(k)}{\frac{d}{dk} f_2(k)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} < 1. \end{aligned}$$

Segue que a referida série é convergente. Como essa série limita por cima a área sob a curva do gráfico de f , isso prova que aquela integral é finita. $\square$

Vamos definir z , de uma forma bastante geométrica, assim como é feito, por exemplo, para funções trigonométricas.

Considere $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Existe um único intervalo da forma $I_k = [kT_0, (k+1)T_0)$, com $k \in \mathbb{Z}$, tal que $t \in I_k$. Se k é par, tome $z(t) \in [0, \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|]$ tal que

$$\int_0^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0 \in [0, T_0)$$

Se k é ímpar, tome $z(t) \in (0, \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|]$ tal que

$$\int_{z(t)}^{\ln |v_2/v_1|} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0 \in [0, T_0)$$

Dessa forma, definimos $z : \mathbb{R} \rightarrow [0, \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|]$ implicitamente. Note que está bem definida pois, em cada caso, existe único valor $z(t)$ que satisfaz as condições requeridas.

Definida dessa forma, z é, em particular, periódica com período $2T_0$.

Verifiquemos que ela é solução do problema.

Seja $t \in (kT_0, (k+1)T_0)$ (i.e. t está no interior o intervalo I_k).

Se k é par, então, numa vizinhança de t vale que

$$\int_0^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0.$$

Derivando essa equação obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})}} z'(t) = 1$$

Donde

$$z'(t) = \sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})}$$

Note que, como $t \in I_k^o$, temos que $z(t) \in \left(0, \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)$, de forma que $\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})} \neq 0$, donde $z'(t) \neq 0$. Elevando essa equação ao quadrado, obtemos

$$(z'(t))^2 = 1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})$$

Derivando novamente,

$$2z'(t)z''(t) = -2z'(t)(v_1^2 e^{2z(t)} - v_2^2 e^{-2z(t)})$$

Como $z'(t) \neq 0$, obtemos

$$z''(t) = -(v_1^2 e^{2z(t)} - v_2^2 e^{-2z(t)})$$

Portanto, nossa equação é satisfeita em t .

Suponha agora que k é ímpar. Então, numa vizinhança de t vale que

$$\int_{z(t)}^{\ln|v_2/v_1|} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0.$$

Temos

$$\int_{z(t)}^{\ln|v_2/v_1|} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = - \int_{\ln|v_2/v_1|}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0.$$

Agora podemos derivar em t e escrever

$$\frac{-1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})}} z'(t) = 1$$

Donde

$$z'(t) = -\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})}$$

Note que, como $t \in I_k^o$, temos que $z(t) \in \left(0, \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \right)$, de forma que $\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(t)} + v_2^2 e^{-2z(t)})} \neq 0$, donde $z'(t) \neq 0$. Elevando essa equação ao quadrado, podemos repetir os passos do caso anterior e concluir que a equação também é satisfeita neste caso.

Sobre os pontos da forma $t = kT_0$, $k \in \mathbb{Z}$, vemos que as derivadas de cada lado de t existem e ambas tendem a zero quando nos aproximamos de t , de forma que $z'(t) = 0$ (as derivadas são $\pm$ as raízes quadradas, que vão a zero pois z se aproxima de um zero de seu argumento).

Quanto à segunda derivada, vemos pelo que fizemos acima que os limites de cada lado também conversam bem entre si.

Por fim, chequemos as condições iniciais. Temos $0 \in I_0 = [0, T_0)$ e $z(0) = 0$ é o único valor que satisfaz

$$\int_0^{z(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = 0 - 0T_0.$$

Portanto, $z(0) = 0$ e a primeira condição inicial está satisfeita.

Como já observamos, $z'(0) = 0$.

O outro caso em que $\ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| < 0$ será análogo (basicamente invertendo as regiões entre $\pm$ da raiz).

Mais precisamente: neste caso, temos $z(t) \in \left[\ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right|, 0 \right]$ como sendo tal que

$$T_0 \quad : \quad = \int_{\ln|v_2/v_1|}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du \in \mathbb{R}_+.$$

$$\int_{z(t)}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0 \in [0, T_0), \text{ se } t \in [kT_0, (k+1)T_0) \text{ com } k \text{ par}$$

$$\int_{\ln|v_2/v_1|}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2u} + v_2^2 e^{-2u})}} du = t - kT_0 \in [0, T_0), \text{ se } t \in [kT_0, (k+1)T_0) \text{ com } k \text{ ímpar}$$

Caso 5. Subcaso2: $v_3 \neq 0$.

Resta apenas este caso, i.e. $v_3^2 < 1$ com $v_1 v_2 \neq 0$ e com $v_3 \neq 0$ ou equivalentemente $v_3^2 < 1$ com $v_1 v_2 v_3 \neq 0$.

Denote $r = 1 - v_3^2$ e observe que $0 < r < 1$ e $v_1^2 + v_2^2 = r$.

Note que

$$\begin{aligned} \implies v_1^2 + v_2^2 &< 1 \\ \implies v_1^2 - 1 &< -v_2^2 \\ \implies 4v_1^4 - 4v_1^2 &< -4v_1^2 v_2^2 \\ \implies 4v_1^4 - 4v_1^2 + 1 &< 1 - 4v_1^2 v_2^2 \\ \implies 0 \leq (1 - 2v_1^2)^2 &< 1 - 4v_1^2 v_2^2 \\ \implies |1 - 2v_1^2| &< \sqrt{1 - 4v_1^2 v_2^2} \\ \implies 1 - 2v_1^2 &< \sqrt{1 - 4v_1^2 v_2^2} \\ \implies 1 - \sqrt{1 - 4v_1^2 v_2^2} &< 2v_1^2 \\ \implies \frac{1 - \sqrt{1 - 4v_1^2 v_2^2}}{2v_1^2} &< 1 \\ \implies Z_- := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4v_1^2 v_2^2}}{2v_1^2} \right) &< 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \implies v_1^2 + v_2^2 &< 1 \\ \implies v_1^2 - 1 &< -v_2^2 \\ \implies 4v_1^4 - 4v_1^2 &< -4v_1^2 v_2^2 \\ \implies 4v_1^4 - 4v_1^2 + 1 &< 1 - 4v_1^2 v_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \leq (1 - 2v_1^2)^2 < 1 - 4v_1^2v_2^2 \\
&\Rightarrow |1 - 2v_1^2| < \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2} \\
&\Rightarrow 2v_1^2 - 1 < \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2} \\
&\Rightarrow 2v_1^2 < 1 + \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2} \\
&\Rightarrow 1 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \\
&\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) =: Z_+
\end{aligned}$$

Denote $f(z) = 1 - (v_1^2 \exp(2z) + v_2^2 \exp(-2z))$. Note então que

$$\begin{aligned}
f(Z_{\pm}) &= 1 - \left(v_1^2 \exp \left(\ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) \right) + v_2^2 \exp \left(-\ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) \right) \right) \\
&= 1 - \left(v_1^2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) + v_2^2 \left(\frac{2v_1^2}{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}} \right) \right) \\
&= 1 - \left(v_1^2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) + v_2^2 \left(\frac{2v_1^2 (1 \mp \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2})}{(1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2})(1 \mp \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2})} \right) \right) \\
&= 1 - \left(v_1^2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) + v_2^2 \left(\frac{2v_1^2 (1 \mp \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2})}{(1 - (1 - 4v_1^2v_2^2))} \right) \right) \\
&= 1 - \left(v_1^2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2v_1^2} \right) + v_2^2 \left(\frac{(1 \mp \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2})}{2v_2^2} \right) \right) \\
&= 1 - \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2} + \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4v_1^2v_2^2}}{2} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De forma semelhante ao caso anterior, $z(t)$ pertence ao intervalo $[Z_-, Z_+]$.

A integral

$$T_0 = \int_{Z_-}^{Z_+} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz > 0$$

está bem definida. Denote ainda

$$\begin{aligned}
t_0 &:= \int_{Z_-}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz \\
I_k &:= [kT_0 - t_0, (k+1)T_0 - t_0)
\end{aligned}$$

Caso $v_3 > 0$: Defina $z : \mathbb{R} \rightarrow [Z_-, Z_+]$ por

$$z(t) \text{ é tal que } \begin{cases} \int_{Z_-}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = t + t_0 - kT_0, \text{ se } t \in I_k, \text{ se } k \text{ é par} \\ \int_{z(t)}^{Z_+} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = t + t_0 - kT_0, \text{ se } t \in I_k, \text{ se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

z está bem definida:

Se $t \in I_k$, então $t + t_0 - kT_0 \in [0, T_0)$. Portanto, se k é par, existe único $z(t) \in [Z_-, Z_+)$ tal que

$$\int_{Z_-}^{z(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = t + t_0 - kT_0.$$

Se k é ímpar, então $t + t_0 - kT_0 \in [0, T_0)$. Portanto, existe único $z(t) \in (Z_-, Z_+]$ tal que

$$\int_{z(t)}^{Z_+} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = t + t_0 - kT_0$$

De forma semelhante ao caso anterior, vai satisfazer a equação $z'' = v_2^2 e^{-2z} - v_1^2 e^{2z}$. Quanto às condições iniciais, teremos

$$\begin{aligned} t &= 0 \in I_0 \implies \int_{Z_-}^{z(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}} dz = t + t_0 - kT_0 = t_0 \\ &\implies z(0) = 0 \\ \text{Como } 0 &\in I_0^\circ, \text{ temos } \frac{z'(0)}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z(0)} + v_2^2 e^{-2z(0)})}} = 1 \\ &\implies z'(0) = \sqrt{1 - (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{v_3^2} = v_3 \text{ pois } v_3 > 0. \end{aligned}$$

Para definir z no caso em que $v_3 < 0$, basta permutar na definição acima as palavras "par" e "ímpar".

Observação C.4. Todos os casos podem ser "unificados" da seguinte forma. Permitindo que Z_- e Z_+ sejam $-\infty, +\infty$, em todos os casos $z(t)$ pertence ao domínio da função

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2 e^{2z} + v_2^2 e^{-2z})}}.$$

A função solução $z(t)$ oscila neste domínio de forma que a "área orientada percorrida sob a curva" seja o próprio parâmetro t . Se o intervalo $[Z_-, Z_+]$ é limitado (a saber, quando $v_1 v_2 \neq 0$), então z é periódica.

Finalizamos a seção com o caso em que a geodésica parte de um ponto qualquer, não necessariamente da origem.

Considere $p \in \text{Sol}$ um ponto qualquer e $v = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(p)$ um vetor em $T_p \text{Sol}$.

Seja $\gamma(t) = (x, y, z)(t)$ a geodésica partindo da origem (que estudamos ao longo da seção) com $\gamma'(0) = \sum_{i=1}^3 v_i E_i(0)$. Considere então $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \text{Sol}$ definida por

$$\tilde{\gamma}(t) = p * \gamma(t).$$

Verifiquemos que $\tilde{\gamma}$ é a geodésica que buscamos. Temos

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= p * \gamma(t) = (p_1, p_2, p_3) * (x(t), y(t), z(t)) \\ &= (p_1 + e^{p_3} x(t), p_2 + e^{-p_3} y(t), p_3 + z(t)) \\ \implies \tilde{\gamma}(0) &= (p_1 + e^{p_3} x(0), p_2 + e^{-p_3} y(0), p_3 + z(0)) \\ &= (p_1, p_2, p_3) = p \\ \implies \tilde{\gamma}'(0) &= (e^{p_3} x'(0), e^{-p_3} y'(0), z'(0)) \\ &= (e^{p_3} v_1, e^{-p_3} v_2, v_3) \\ &= v_1 (e^{p_3}, 0, 0) + v_2 (e^{-p_3}, 0, 0) + v_3 (0, 0, 1) \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i E_i(p) = v \end{aligned}$$

Além disso, $\tilde{\gamma}$ é geodésica pois é imagem de uma geodésica por uma isometria (translação à esquerda por p).

Referências Bibliográficas

- [LRS] LÓPEZ, Marco C.; ROSADO, Maria E. R.; SORIA, Alberto. **Ruled Surfaces in 3-Dimensional Riemannian Manifolds**. *Mediterr. J. Math.* 21, 97 (2024)
- [Mnt] MUNTEANU, Marian I. **On Some Weingarten Surfaces in the Special Linear Group $SL(2, \mathbb{R})$** . *Mathematics*, 11, 4636 (2023)
- [Gsp] DA SILVA, Fernando G., **Polynomial Weingarten Surfaces of Tubular Type**. Tese de Doutorado, UFSCar, São Carlos (2022)
- [CDW] PELLIS, Davide; KILIAN, Martin; POTTMANN, Helmut; PAULY, Mark. **Computational Design of Weingarten Surfaces** *ACM Trans. Graph.*, Vol. 40, No. 4, Article 114. Publication date: August (2021)
- [Kim] SHIN, Heayong; KIM, Young W.; KOH, Sung-Eun; LEE, Hyung Y.; YANG, Seong-Deog. **Ruled minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group**. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 261, No. 2, (2013)
- [Vns] VAINSENCER, Israel. **Introdução às curvas algébricas planas**. 1 ed. IMPA (2014)
- [Lpz] LÓPEZ, Rafael. **Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space**. *International Electronic Journal of Geometry*, Volume 7 No. 1 pp. 44-107 (2014)
- [Crm] do CARMO, Manfredo P. **Geometria Riemanniana**. 5 ed. IMPA (2015)
- [ALV] ASPERTI, Antonio C.; LYMBERPOULOS, Alexandre; VALÉRIO, Barbara C.; **Ruled Weingarten hypersurfaces in hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$** . *Results in Mathematics*. 65, 9–25, (2014)
- [ILM] INOGUCHI, Jun-Ichi; LÓPEZ, Rafael; MUNTEANU, Marian I. **Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3** . *Geometriae Dedicata* 161, 221 - 231 (2012)
- [L] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2 ed. Springer New York (2012)
- [Dvj] DIVJAK, Blazanka; ERJAVEC, Zlatko; SZABOLCS, Barnabas; SZILAGYI. **Geodesics and geodesic spheres in $SL(2, \mathbb{R})$ geometry** *Mathematical Communications* 413 *Math. Commun.*, Vol. 14, No. 2, pp. 413-424 (2009)
- [AV] ASPERTI, Antonio C.; VALÉRIO, Barbara C. **Ruled Weingarten hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$** . *Advances in Geometry*. 8, 1–10 (2008)

- [DGW] DILLEN, Franki; GOEMANS, Wendy; WOESTYNE, Ignace. **Translation surfaces of Weingarten type in 3-space**. Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III. Mathematics, Informatics, Physics. 1 (2008)
- [AV2] ASPERTI, Antonio C.; VALÉRIO, Barbara C. **Ruled Weingarten surfaces in a 3-dimensional space form**. Mathematics Subject Classification, 53A35, 53B25 (2000)
- [BB] BÖLCSKEI, Attila; BRIGITTA, Szilágyi. **Frenet Formulas and Geodesics in Sol Geometry**. Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry, Volume 48, No. 2, 411-421 (2007)
- [Sds] SODSIRI, Wijarn. **Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space**. Tese de Doutorado, Katholieke Universiteit Leuven (2005)
- [Crm2] do CARMO, Manfredo. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM (2005)
- [Mts] MASALTSEV, L. A. **Minimal ruled surfaces in the three-dimensional geometries $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** Russian Mathematics (Iz. VUZ), Vol. 48, No. 9, pp. 42-48 (2004)
- [Vlr] VALÉRIO, Barbara C. **Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais**. Tese de Doutorado, USP, São Paulo (2004)
- [Khn] KÜHNEL, Wolfgang. **Ruled W-Surfaces**. Arch. Math 62, 475–480 (1994)
- [Flt] FULTON, William. **Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry**. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program (1989)
- [Sct] SCOTT, Peter. **The Geometries of 3-Manifolds**. Bulletin of the London Mathematical Society, 15: 401-487 (1983)
- [Stm] SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. 1 ed. IMPA (1979)
- [Bsp] BISHOP, Richard L. **There is more than one way to frame a curve**. The American Mathematical Monthly, vol. 82, no. 3, pp. 246–51. JSTOR (1975)
- [Ost] OSTROWSKI, Alexander M. **Über die Bedeutung der Theorie der konvexen Polyeder für die formale Algebra**. Jahresberichte Deutsche Math. Verein 30, 98-99 (1921)
- [Blt] BELTRAMI, E. **Risoluzione di un Problema relativo alla teoria Delle Superficie Gobbe**. Ann. Mat. Pura Appl. 7, 139-150 (1865)
- [Dn] DINI, U. **Sulle Superficie Gobbe nelle quali Uno Dei Due Raggi di Curvatura Principale e una funzione dell'altro**. Ann. Mat. Pura Appl. 7, 205-210 (1865)
- [Wll] WALLNER, Johannes. **Ruled surfaces and developable surfaces**. Disponível em <https://www.geometrie.tugraz.at/wallner/kurs.pdf>