



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

## **A representação de Weierstrass e os exemplos clássicos**

Pedro Valim Sampaio

São Carlos-SP  
Fevereiro de 2026





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

## **Dissertação de Mestrado**

Pedro Valim Sampaio

Orientador: Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP  
Fevereiro de 2026

Sampaio, Pedro Valim

A representação de Weierstrass e os exemplos clássicos /  
Pedro Valim Sampaio -- 2026.  
95f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São  
Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): José Nazareno Vieira Gomes

Banca Examinadora: José Nazareno Vieira Gomes, Luiz  
Roberto Hartmann Junior, Fernando Manfio

Bibliografia

1. Superfícies mínimas. 2. Conexão riemanniana. 3.  
Representação de Weierstrass. I. Sampaio, Pedro Valim.  
II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Pedro Valim Sampaio, realizada em 27/02/2026.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (UFSCar)

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Fernando Manfio (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.



---

# Agradecimentos

---

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, professor doutor José Nazareno Vieira Gomes, pela paciência, pela dedicação constante e pela orientação cuidadosa ao longo de todo este trabalho. Sua maneira clara de ensinar e seu compromisso com a formação de pesquisadores foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao meu pai, professor doutor João Carlos Vieira Sampaio, pelo apoio firme e contínuo durante o programa de mestrado, e à minha mãe, Elsa Machado Valim Sampaio, pela incansável dedicação ao filho cadeirante que sou. Nenhuma etapa deste percurso teria sido possível sem o carinho, a presença e o cuidado de ambos.

Agradeço também aos professores do PPGM-UFSCar, cujas aulas, conversas e sugestões enriqueceram minha formação acadêmica. Aos meus colegas do programa, agradeço a convivência, as trocas de ideias e o apoio mútuo que tornaram este período mais leve e produtivo.

Expresso minha gratidão à minha irmã, Joana Valim Sampaio, pelo apoio constante e pelo estímulo em todas as fases do mestrado. Ao meu sobrinho, Samael Sampaio Martins, agradeço pela amizade sincera e pela companhia nos momentos mais desafiadores.

Sou grato ainda aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, doutor Paulo Antonio Silvani Caetano, doutor Tomas Edson Barros e doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti que, além de contribuírem de maneira importante para minha formação matemática, sempre me acolheram com amizade, incentivo e conversas que ultrapassaram a sala de aula. A convivência com cada um deles marcou profundamente minha trajetória acadêmica e pessoal.

Aos membros da banca, professor doutor Luiz Roberto Hartmann Junior e professor doutor Fernando Manfio, agradeço pelas valiosas sugestões e pela leitura atenta que enriqueceram significativamente este trabalho.

Registro também meu agradecimento à secretária do PPGM, Priscila Helen Carvalho, pelo apoio, pela disponibilidade e pela atenção em todos os momentos.

Por fim, agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida por toda a proteção e força ao longo deste caminho.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.





---

# Resumo

---

Nesta dissertação apresentamos um estudo introdutório sobre superfícies mínimas no espaço euclidiano tridimensional, com destaque para a representação de Weierstrass e para os exemplos clássicos da teoria. Inicialmente, revisamos conceitos básicos sobre variedades diferenciáveis. Em seguida, estudamos as imersões isométricas, com destaque para superfícies em variedades ambiente de dimensão três. Posteriormente, apresentamos a representação de Weierstrass, que permite construir superfícies mínimas por meio de funções holomorfas e meromorfas. Entre os exemplos considerados estão o catenoide, o helicóide e a superfície de Scherk. Nosso trabalho busca oferecer uma exposição clara, rigorosa e acessível, servindo como introdução ao tema e como material complementar para o estudo da geometria diferencial.

**Palavras-chave:** superfícies mínimas; imersões isométricas; representação de Weierstrass; geometria diferencial; catenoide; helicóide.



---

# Abstract

---

In this dissertation, we present an introductory study of minimal surfaces in three-dimensional Euclidean space, with particular emphasis on the Weierstrass representation and classical examples in the theory. We begin by reviewing the basic concepts of differentiable manifolds. Next, we study isometric immersions, with special attention to surfaces immersed in three-dimensional ambient manifolds. We then introduce the Weierstrass representation, which provides a method for constructing minimal surfaces through holomorphic and meromorphic functions. Among the examples considered are the catenoid, the helicoid, and the Scherk surface. This dissertation aims to provide a clear, rigorous, and accessible exposition, serving both as an introduction to the subject and as supplementary material for the study of differential geometry.

**Keywords:** minimal surfaces; isometric immersions; Weierstrass representation; differential geometry; catenoid; helicoid.



---

# Sumário

---

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                                      | <b>1</b>  |
| <b>1 Preliminares</b>                                                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Variedades diferenciáveis . . . . .                                                | 3         |
| 1.2 Projeção estereográfica . . . . .                                                  | 7         |
| 1.2.1 Projeção estereográfica da circunferência unitária . . . . .                     | 8         |
| 1.2.2 Projeção estereográfica da esfera unitária n-dimensional . . . . .               | 11        |
| 1.3 Partições da unidade . . . . .                                                     | 13        |
| 1.3.1 Funções auxiliares em uma variedade diferenciável . . . . .                      | 13        |
| 1.3.2 Algumas noções topológicas . . . . .                                             | 15        |
| 1.3.3 Partições da unidade em variedades diferenciáveis . . . . .                      | 17        |
| 1.4 Campos de vetores . . . . .                                                        | 21        |
| 1.4.1 Campos de vetores em variedades diferenciáveis . . . . .                         | 22        |
| 1.5 Elemento de volume em uma variedade riemanniana orientada tridimensional . . . . . | 25        |
| <b>2 Conexão riemanniana, tensor curvatura e imersões isométricas</b>                  | <b>31</b> |
| 2.1 Conexão riemanniana . . . . .                                                      | 32        |
| 2.2 Tensor curvatura de Riemann . . . . .                                              | 36        |
| 2.3 Imersões isométricas . . . . .                                                     | 39        |
| 2.3.1 Segunda forma fundamental de uma imersão isométrica . . . . .                    | 40        |
| <b>3 Superfícies mínimas</b>                                                           | <b>51</b> |
| 3.1 Uma discussão preliminar . . . . .                                                 | 51        |
| 3.1.1 Catenoide . . . . .                                                              | 55        |
| 3.1.2 Helicoide . . . . .                                                              | 58        |
| 3.2 A representação de Weierstrass e os exemplos clássicos . . . . .                   | 63        |
| 3.2.1 A representação de Weierstrass . . . . .                                         | 63        |
| 3.2.2 Helicoide . . . . .                                                              | 69        |
| 3.2.3 Catenoide . . . . .                                                              | 70        |
| 3.2.4 Superfície de Scherk . . . . .                                                   | 71        |

---

|                                   |                                   |           |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------|
| 3.2.5                             | Superfície de Enneper . . . . .   | 73        |
| 3.2.6                             | Superfície de Henneberg . . . . . | 73        |
| <b>Referências Bibliográficas</b> |                                   | <b>77</b> |

---

## Lista de Figuras

---

|     |                                                                             |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Projeção estereográfica da circunferência unitária $\mathbb{S}^1$ . . . . . | 8  |
| 1.2 | Projeção estereográfica da esfera $\mathbb{S}^n$ . . . . .                  | 11 |
| 1.3 | Sistema de coordenadas. . . . .                                             | 14 |
| 1.4 | Funções auxiliares. . . . .                                                 | 14 |
| 1.5 | Taxa de variação . . . . .                                                  | 22 |
| 1.6 | Volume do paralelepípedo . . . . .                                          | 28 |
| 3.1 | Helicoide. . . . .                                                          | 69 |
| 3.2 | Catenoide. . . . .                                                          | 70 |
| 3.3 | Superfície de Scherk. . . . .                                               | 72 |
| 3.4 | Superfície de Enneper. . . . .                                              | 73 |





---

# Introdução

---

A teoria das superfícies mínimas ocupa um lugar especial dentro da geometria diferencial. Além de suas ligações naturais com o cálculo das variações, essas superfícies aparecem em fenômenos físicos (como filmes de sabão), em problemas clássicos de otimização geométrica e em questões modernas de análise e topologia. Ao iniciar estudos em geometria riemanniana, especialmente em variedades diferenciáveis de dimensão três, o leitor encontrará nas superfícies mínimas um ponto de ligação interessante entre conceitos abstratos e exemplos concretos. Essa observação motivou a escolha do tema desta dissertação e orientou a forma como está organizado o desenvolvimento do texto. A intenção principal é apresentar o assunto de maneira acessível para estudantes de graduação em matemática que tenham alguma familiaridade com cálculo em várias variáveis, álgebra linear e cálculo em uma variável complexa.

Aqui fazemos um estudo de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  com atenção para a representação de Weierstrass e os exemplos clássicos. Como requisitos são desenvolvidos estudos preliminares de variedades diferenciáveis. Por questão de clareza, revisamos também alguns conceitos de cálculo diferencial no  $\mathbb{R}^n$ , álgebra linear e topologia geral.

O texto foi organizado de modo a acompanhar a progressão natural do leitor. Iniciamos revisando ferramentas básicas da teoria de variedades diferenciáveis, incluindo uma breve descrição de partições da unidade e de propriedades fundamentais de aplicações diferenciáveis. Em seguida introduzimos a noção de superfície mínima, destacando sua formulação variacional e sua interpretação geométrica. A partir daí apresentamos a representação de Weierstrass, que fornece um método elegante para construir superfícies mínimas a partir de dados da análise complexa, e analisamos alguns exemplos clássicos, como o catenoide, o helicóide e superfícies obtidas por funções meromorfas simples.

Nosso objetivo é construir um caminho claro desde os conceitos preliminares até os resultados mais estruturados da teoria, sempre buscando manter um tom acessível, porém matematicamente rigoroso. Espera-se que este trabalho sirva tanto como material introdutório para quem deseja entrar no estudo das superfícies mínimas quanto como referência complementar para disciplinas de geometria diferencial e tópicos de análise em variedades diferenciáveis.



# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

Neste trabalho assumiremos algumas noções básicas do Cálculo Diferencial no  $\mathbb{R}^n$ , noções de Álgebra Linear, noções básicas de Topologia Geral e cálculo em uma variável complexa. Quando necessário, relembremos algumas questões para fins motivacionais.

### 1.1 Variedades diferenciáveis

Iniciamos os nossos preliminares com o conceito de variedades diferenciáveis. Por simplicidade, algumas contas serão feitas apenas em dimensão menor que ou igual a 3. Parte do texto deste capítulo foi desenvolvido tendo como referências *M. P. do Carmo* [2] e *W. de Melo* [8].

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.** Um conjunto  $M$  é uma **variedade diferenciável n-dimensional** se existir uma família de aplicações injetivas  $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  sendo, para cada  $\alpha$ ,  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ ,  $U_\alpha$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ , tais que:

- (i)  $M = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ ;
- (ii) Para todo par  $\alpha, \beta \in \Gamma$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e a mudança de coordenadas  $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$  é um difeomorfismo.
- (iii) A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$  é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

Dado  $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ , a aplicação  $\mathbf{x}_\alpha$  ou o par  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  é uma **parametrização** (ou **sistema de coordenadas**) de  $M$  em  $p$  e  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é uma **vizinhança coordenada em  $p$** .

Uma família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$  satisfazendo (i) e (ii) é uma **estrutura diferenciável em  $M$** . Denotaremos apenas por  $M^n$  uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$ .

**Proposição 1.2.**  $M^n$  possui uma topologia induzida pelas parametrizações.

*Demonstração.* A topologia  $\tau$  induzida pelas parametrizações de  $M^n$  é definida da seguinte maneira.  $A \subset M^n$  é aberto de  $\tau$  se  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$  é aberto de  $\mathbb{R}^n$  para toda parametrização  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ .

$\tau$  é uma topologia em  $M^n$ , pois

- (1) Note que  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(M^n \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$ , pois  $\mathbf{x}_\alpha$  é injetiva, que é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Além disso,

$$\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\emptyset \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ e } \emptyset \text{ também é um aberto de } \mathbb{R}^n.$$

Portanto,  $\emptyset, M \in \tau$ .

- (2) Dados  $A, B \in \tau$ , defina  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) =: A'$  e  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(B \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) =: B'$ . Como  $A'$  e  $B'$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$ , então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\alpha^{-1}((A \cap B) \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) &= \mathbf{x}_\alpha^{-1}([A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)] \cap [B \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)]) \\ &= \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) \cap \mathbf{x}_\alpha^{-1}(B \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = A' \cap B' \text{ é um aberto de } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ou seja,  $A \cap B \in \tau$ .

- (3) Seja  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma'} \subset \tau$  onde  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , temos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A_\lambda \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) =: A'_\lambda$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall \lambda \in \Gamma'$ . Então,

$$\mathbf{x}_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Gamma'} A_\lambda \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma'} \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A_\lambda \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma'} A'_\lambda \text{ é um aberto de } \mathbb{R}^n.$$

Ou seja,  $\bigcup_{\lambda \in \Gamma'} A_\lambda \in \tau$ .

Concluimos, por (1), (2) e (3), que  $\tau$  é uma topologia para  $M^n$ . □

**Definição 1.3.** Um espaço topológico  $X$  é chamado de **Hausdorff** quando, dados  $x, y \in X$ , existem abertos  $U, V \subset X$  tais que  $x \in U, y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Um espaço topológico  $X$  tem base enumerável quando todo aberto de  $X$  se escreve como união enumerável de abertos de  $X$ .

Em todo o texto, as variedades consideradas serão supostas de Hausdorff e com base enumerável. Diferenciável significará de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Embora muitos dos resultados que estaremos utilizando sejam válidos para dimensão  $n \geq 2$ , por simplicidade nos restringiremos ao caso de dimensões 2 e 3, com superfícies  $\Sigma^2$  (caso  $n = 2$ ) e com variedades diferenciáveis 3-dimensionais  $M^3$  (caso  $n = 3$ ). A partir de agora essa notação será assumida livre de comentários.

**Definição 1.4.** Uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^3$  é diferenciável em  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , se para qualquer vizinhança coordenada  $\mathbf{x}(U)$  de  $\alpha(t)$  em  $M^3$ , a curva  $\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$  é diferenciável em  $t$ . Uma aplicação  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^3$  é uma **curva diferenciável** quando for diferenciável em todo o intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

**Definição 1.5.** Uma **aplicação diferenciável**  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função diferenciável em todo  $p \in M^3$  no seguinte sentido. Para qualquer vizinhança coordenada  $\mathbf{X}(U)$  de  $p$  em  $M^3$ , a composição  $f \circ \mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função diferenciável em  $\mathbf{X}^{-1}(p)$ .

Suponha que  $\alpha(0) = p \in M^3$ , e seja  $\mathcal{C}^\infty(M^3)$  o conjunto das funções diferenciáveis em  $M^3$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M^3) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Escolhendo uma parametrização  $\mathbf{Y} : V \rightarrow M^3$  em  $p = \mathbf{Y}(0)$  as representantes locais da função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M^3)$  e da curva  $\alpha$  nesta parametrização são, respectivamente,

$$\tilde{f}(q) = f \circ \mathbf{Y}(q), \quad q = (x_1, x_2, x_3) \in V \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}(t) = \mathbf{Y}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in V.$$

Restringindo  $f$  a  $\alpha$  e notando que  $f \circ \alpha = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\tilde{f} \circ \tilde{\alpha})}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \right|_{t=0} \\ &= x'_1(0) \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \right)_0 + x'_2(0) \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \right)_0 + x'_3(0) \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \right)_0 = \left( \sum_{i=1}^3 x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) (\tilde{f}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Logo, a expressão local de  $\alpha'(0)$  em termos da parametrização  $\mathbf{Y}$  é:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^3 x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

Note que  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_0$  e  $\left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_0$  são os vetores tangentes em  $p$  às curvas coordenadas  $x_1 \mapsto \mathbf{Y}(x_1, 0, 0)$ ,  $x_2 \mapsto \mathbf{Y}(0, x_2, 0)$  e  $x_3 \mapsto \mathbf{Y}(0, 0, x_3)$ , respectivamente.

O fato de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$  ser linearmente independente juntamente com a expressão local de  $\alpha'(0)$ , prova que o conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$  forma uma base coordenada para um espaço vetorial, o qual é denotado por  $T_p M$ . O espaço vetorial  $T_p M$  é o **espaço tangente de  $M^3$  em  $p$** . Ademais, pela equação (1.1) também podemos definir a noção de diferencial de funções reais em  $M^3$ .

**Definição 1.6.** Uma aplicação  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é **diferenciável em  $\mathbf{p} \in \Sigma^2$**  se existem parametrizações

$$\mathbf{Y} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M^3 \text{ em } \varphi(p) \quad \text{e} \quad \mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma^2 \text{ em } p$$

tais que

$$\varphi(\mathbf{X}(U)) \subset \mathbf{Y}(V),$$

a aplicação

$$\mathbf{Y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ é diferenciável em } \mathbf{X}^{-1}(p).$$

Dizemos que  $\varphi$  é **diferenciável** (em  $\Sigma^2$ ) se é diferenciável em todos os pontos de  $\Sigma^2$ .

**Observação 1.7.** Note que a Definição 1.6 permanece válida trocando  $\Sigma^2$  por uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $M^3$  por uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . Sendo assim, observa-se que qualquer parametrização  $(U, \mathbf{x})$  é um difeomorfismo sobre sua imagem  $\mathbf{x}(U)$ .

**Proposição 1.8.** *Seja  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in \Sigma^2$  e cada  $v \in T_p\Sigma$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma^2$  tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\varphi(p)}M$  dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ , onde  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , é uma aplicação linear que não depende da escolha de  $\alpha$ . Esta aplicação é a diferencial de  $\varphi$  em  $p$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{x} : U \rightarrow \Sigma^2$  e  $\mathbf{y} : V \rightarrow M^3$  parametrizações em  $p$  e  $\varphi(p)$ , respectivamente, tais que podemos escrever a expressão local de  $\varphi$ , como segue

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(q) &= \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2), y_3(x_1, x_2)) \\ q &= (x_1, x_2) \in U \quad \text{e} \quad (y_1, y_2, y_3) \in V.\end{aligned}$$

Por outro lado, a expressão local de  $\alpha$  é dada por

$$\tilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(t) &= \tilde{\varphi} \circ \tilde{\alpha}(t) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(t) = \mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) \\ &= (y_1(x_1(t), x_2(t)), y_2(x_1(t), x_2(t)), y_3(x_1(t), x_2(t))).\end{aligned}$$

Assim a expressão local de  $\tilde{\beta}'(0)$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}$  de  $T_{\varphi(p)}M$  é dada por

$$\tilde{\beta}'(0) = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \Big|_q x'_i(0), \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \Big|_q x'_i(0), \sum_{i=1}^2 \frac{\partial y_3}{\partial x_i} \Big|_q x'_i(0) \right), \quad q = \mathbf{x}^{-1}(p).$$

Isto mostra que  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ . Além disso, a matriz (nesta base coordenada) que define  $d\varphi_p(v)$  é dada por

$$(d\varphi_p(v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Big|_q & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Big|_q \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big|_q & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Big|_q \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} \Big|_q & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(0) \\ x'_2(0) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

□

**Definição 1.9.** Uma aplicação diferenciável  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é uma *imersão* se a diferencial  $d\varphi_p : T_p\Sigma \rightarrow T_{\varphi(p)}M$  é injetiva para cada  $p \in \Sigma^2$ . Se, além disto,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(\Sigma^2) \subset M^3$ , onde  $\varphi(\Sigma^2)$  tem a topologia induzida por  $M^3$ , diz-se que  $\varphi$  é um *mergulho*. Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  e a inclusão  $i : \Sigma^2 \hookrightarrow M^3$  é um mergulho, diz-se que  $\Sigma^2$  é uma *subvariedade de  $M^3$* .

**Teorema 1.10.** Seja  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  uma imersão. Para todo ponto  $p \in \Sigma^2$ , existe uma vizinhança  $V \subset \Sigma^2$  de  $p$  tal que a restrição  $\varphi|_V : V \rightarrow M^3$  é um mergulho.

*Demonstração.* Sejam  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma^2$  e  $y : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M^3$  sistemas de coordenadas em  $p$  e  $\varphi(p)$ , respectivamente, e indiquemos por  $(x_1, x_2)$  as coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  e por  $(y_1, y_2, y_3)$  as coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . Nestas coordenadas, a expressão de  $\varphi$ , isto é, a aplicação  $\tilde{\varphi} = y^{-1} \circ \varphi \circ x$  pode ser escrita como

$$\tilde{\varphi} = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2), y_3(x_1, x_2)).$$

Seja  $q = x^{-1}(p)$ . Como  $\varphi$  é uma imersão, podemos supor, renumerando as coordenadas de  $\mathbb{R}^3$  se necessário, que

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$$

Para aplicar o teorema da função inversa, introduzamos uma aplicação

$\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\phi(x_1, x_2, t) = (y_1, y_2, y_3 + t), \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}.$$

É imediato verificar que  $\phi$  restrito a  $U$  coincide com  $\tilde{\varphi}$  e que

$$\det(d\phi_q) = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$$

Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças  $W_1 \subset U \times \mathbb{R}$  de  $q$  e  $W_2 \subset \mathbb{R}^3$  de  $\phi(q)$  tais que a restrição  $\phi|_{W_1}$  é um difeomorfismo sobre  $W_2$ .

Seja  $\tilde{V} = W_1 \cap U_1$ . Como  $\phi|_{\tilde{V}} = \tilde{\varphi}|_{\tilde{V}}$  e  $x$  e  $y$  são difeomorfismos, concluímos que a restrição a  $V = x(\tilde{V})$  da aplicação  $\phi = y \circ \tilde{\varphi} \circ x^{-1} : V \rightarrow \varphi(V) \subset M^3$  é um difeomorfismo, donde um mergulho.  $\square$

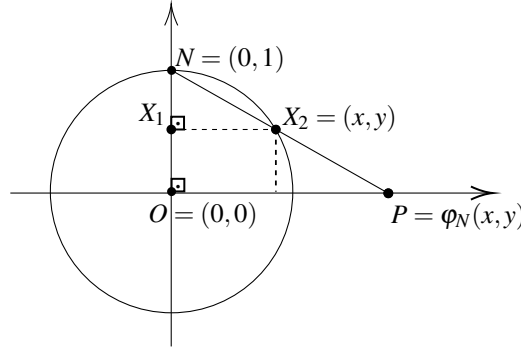
## 1.2 Projecção estereográfica

A projecção estereográfica nos fornece uma maneira para parametrizar uma esfera. Seu cálculo é feito a partir de um ponto específico da esfera, chamado *ponto de projecção*, frequentemente um dos polos da esfera. Ela pode ser obtida para esferas de diferentes dimensões, como veremos a seguir.

Abaixo, vamos definir a projecção estereográfica das esferas unitárias a partir do polo norte e do polo sul de cada esfera.

### 1.2.1 Projeção estereográfica da circunferência unitária

Figura 1.1. Projeção estereográfica da circunferência unitária  $\mathbb{S}^1$ .



Para a esfera unitária unidimensional, que é a circunferência unitária centrada na origem  $O = (0,0)$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , definimos a projeção estereográfica  $\varphi_N$  a partir do polo norte  $N = (0,1)$  para a reta real de equação  $y = 0$ , como uma função  $\varphi_N: \mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ , da seguinte maneira.

Dados  $N = (0,1)$  e  $X_2 = (x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  queremos encontrar  $\varphi_N(x,y) \in \mathbb{R}$  tal que,

$$\varphi_N(x,y) = P \text{ e os pontos } N, X_2 \text{ e } (P, 0) \text{ estejam alinhados.}$$

Pela Figura 1.1 podemos observar que os triângulos  $\Delta(NX_1X_2)$  e  $\Delta(NOP)$  são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Daí, obtemos a seguinte relação,

$$\frac{P}{x} = \frac{1}{1-y}.$$

Agora podemos definir  $\varphi_N: \mathbb{S}^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi_N(x,y) = \frac{x}{1-y}, \quad (1.3)$$

a qual está bem definida, pois  $y \neq 1 \forall (x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ . Além disso, usando (1.3) podemos considerar uma extensão de  $\varphi_N$  que seja diferenciável em um aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo  $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ , donde concluímos que  $\varphi_N$  é diferenciável.

Definimos agora uma *projeção-inversa*  $\psi_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ .

Dado  $u \in \mathbb{R}$ , queremos encontrar um ponto  $X = (x,y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  tal que,  $(u,0)$ ,  $X$  e  $N$  pertençam a uma mesma reta.

Para isto, basta encontrar as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto  $X \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$  tais que  $\frac{x}{1-y} = u$ .

Assim,

$$u^2 = \frac{x^2}{(1-y)^2}. \quad (1.4)$$

E sendo  $X = (x,y) \in \mathbb{S}^1$ , temos  $x^2 = 1 - y^2$ .



Substituindo esta última expressão em (1.4), obtemos

$$u^2 = \frac{1-y^2}{(1-y)^2} = \frac{(1-y)(1+y)}{(1-y)^2} = \frac{1+y}{1-y}.$$

Assim,  $u^2(1-y) = 1+y$ , isso implica que  $u^2 - 1 = y(u^2 + 1)$ . Donde,  $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ .

Pela definição de  $\varphi_N$ , temos também  $x = u(1-y)$ , isso implica que,  $x = u \left(1 - \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right)$ .

Assim,  $x = \frac{2u}{u^2 + 1}$ . Logo,

$$\psi_N(u) = \left( \frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Afirmacão:  $\psi_N$  é injetiva.

Suponhamos que

$$\psi_N(u) = \psi_N(v).$$

Queremos mostrar que  $u = v$ .

Pelas expressões das coordenadas de  $\psi_N$ , a igualdade acima implica

$$\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} \quad \text{e} \quad \frac{2u}{u^2 + 1} = \frac{2v}{v^2 + 1}.$$

Observemos inicialmente que  $u = 0$  se, e somente se,  $v = 0$ . De fato, se  $u = 0$ , então da segunda igualdade obtemos

$$0 = \frac{2v}{v^2 + 1},$$

o que implica  $v = 0$ . O recíproco é análogo. Portanto, no caso  $u = 0$ , segue imediatamente que  $u = v$ .

Resta considerar o caso  $u \neq 0$ . Como então também  $v \neq 0$ , podemos escrever

$$v = \lambda u,$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda \neq 0$ .

Substituindo  $v = \lambda u$  na primeira igualdade, obtemos

$$\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{\lambda^2 u^2 - 1}{\lambda^2 u^2 + 1},$$

segue que

$$(u^2 - 1)(\lambda^2 u^2 + 1) = (u^2 + 1)(\lambda^2 u^2 - 1).$$

Desenvolvendo ambos os membros, temos

$$\lambda^2 u^4 + u^2 - \lambda^2 u^2 - 1 = \lambda^2 u^4 - u^2 + \lambda^2 u^2 - 1.$$

Assim,

$$2u^2 = 2\lambda^2 u^2.$$

Então,

$$\lambda^2 = 1.$$

Passemos agora à segunda igualdade:

$$\frac{2u}{u^2 + 1} = \frac{2v}{v^2 + 1}.$$

Substituindo novamente  $v = \lambda u$ , segue que

$$\frac{2u}{u^2 + 1} = \frac{2\lambda u}{\lambda^2 u^2 + 1}.$$

Como  $\lambda^2 = 1$ , a expressão acima se reduz a

$$\frac{2u}{u^2 + 1} = \frac{2\lambda u}{u^2 + 1}.$$

Como  $u \neq 0$ , concluímos que

$$\lambda = 1.$$

Portanto,

$$v = \lambda u = u.$$

Assim, em qualquer caso, obtemos  $u = v$ . Logo,  $\psi_N$  é injetiva. Ademais,  $\psi_N$  é diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis. Além disso,

$$\varphi_N \circ \psi_N(u) = \varphi_N \left( \frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right) = \frac{\frac{2u}{u^2 + 1}}{1 - \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}} = \frac{2u}{2} = u$$

e

$$\psi_N \circ \varphi_N(x, y) = \psi_N \left( \frac{x}{1 - y} \right) = \left( \frac{\frac{2x}{1 - y}}{\frac{x^2}{(1 - y)^2} + 1}, \frac{\frac{x^2}{(1 - y)^2} - 1}{\frac{x^2}{(1 - y)^2} + 1} \right)$$

$$= \left( \frac{\frac{2x}{1-y}}{\frac{x^2 + (1-y)^2}{(1-y)^2}}, \frac{\frac{x^2 - (1-y)^2}{(1-y)^2}}{\frac{x^2 + (1-y)^2}{(1-y)^2}} \right) = \left( \frac{2x(1-y)}{x^2 + y^2 + 1 - 2y}, \frac{x^2 - y^2 + 2y - 1}{x^2 + y^2 + 1 - 2y} \right) = (**) \quad (1.5)$$

Usando o fato de que  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$ , temos (1.2.1) se torna

$$(**) = \left( \frac{2x(1-y)}{2(1-y)}, \frac{x^2 - 1 + 2y - y^2}{2(1-y)} \right) = \left( x, \frac{1 - y^2 - 1 + 2y - y^2}{2(1-y)} \right) = \left( x, \frac{y(2 - 2y)}{2 - 2y} \right) = (x, y)$$

Portanto,  $\psi_N \circ \phi_N(x, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ . Daí,  $\phi_N^{-1} = \psi_N$ . Logo  $\psi_N$  é uma parametrização para  $\mathbb{S}^1$  que omite o polo norte.

Observe agora, que se considerarmos a projecção  $\phi_S$  a partir do polo sul  $S = (0, -1)$ , teremos por uma construção análoga, que  $\psi_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$  é uma parametrização para  $\mathbb{S}^1$  que omite o polo sul.

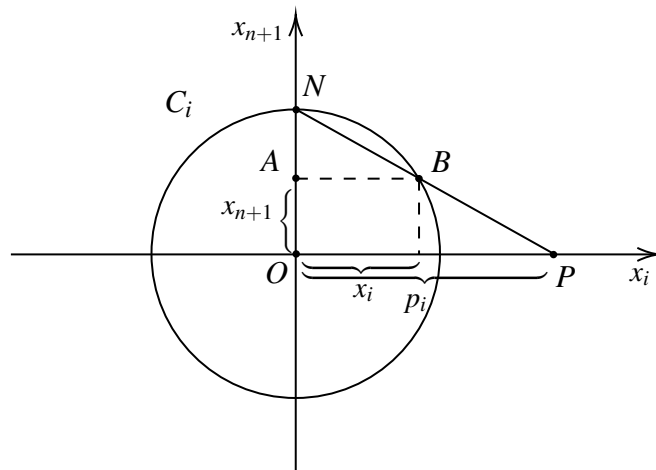
Note também que:

- $\mathbb{S}^1 = \psi_N(\mathbb{R}) \cup \psi_S(\mathbb{R})$ ;
- $\psi_N(\mathbb{R}) \cap \psi_S(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\} \neq \emptyset$ ;
- $\psi_N^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}) = \psi_S^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{S\}) = \mathbb{R}$  que é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}$ ;
- As mudanças de coordenadas  $\psi_N^{-1} \circ \psi_S$  e  $\psi_S^{-1} \circ \psi_N$  são difeomorfismos.

Portanto, o par  $\{(\mathbb{R}, \psi_N), (\mathbb{R}, \psi_S)\}$  é uma estrutura diferenciável para  $\mathbb{S}^1$ .

## 1.2.2 Projecção estereográfica da esfera unitária n-dimensional

Figura 1.2. Projecção estereográfica da esfera  $\mathbb{S}^n$ .



Agora faremos a projecção estereográfica da esfera unitária n-dimensional (= esfera  $\mathbb{S}^n$ );  $n \geq 2$ , como segue.

Para cada  $i$ , trabalhamos na circunferência  $C_i = \mathbb{S}^n \cap \{(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ . Com base no diagrama da Figura 1.2, observamos que no plano  $x_i x_{n+1}$  temos os triângulos  $\Delta(NOP)$  e  $\Delta(NAB)$  os quais são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, e isso nos dá a seguinte relação,

$$\frac{1}{1 - x_{n+1}} = \frac{p_i}{x_i}$$

assim,

$$p_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

donde,

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.6)$$

Para o cálculo da *projeção-inversa*, basta notarmos que  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$  implica  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2$ . Por (1.2.2), temos

$$\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 = \frac{1 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}, \quad X = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, por uma conta direta, obtemos

$$x_{n+1} = \frac{\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}.$$

Novamente por (1.2.2), temos

$$x_i = p_i \left( 1 - \frac{\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2} \right) = \frac{2p_i}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\psi_N(X) := \varphi_N^{-1}(X) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{2p_1}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}, \dots, \frac{2p_n}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}, \frac{\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2} \right).$$

Utilizando um raciocínio análogo ao caso de  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $\psi_N(X)$  é diferenciável e injetiva. Portanto, uma parametrização para  $\mathbb{S}^n$ . Uma única *projeção-inversa* sempre “perde” o polo. Para cobrir a esfera, usamos duas funções *projeção-inversa*:

Polo norte  $N = (0, \dots, 0, 1)$ :  $\psi_N(X)$  dada acima.

Polo sul  $S = (0, \dots, 0, -1)$ :  $\psi_S$  cobre  $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  com

$$\psi_S(X) = \left( \frac{2p_1}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}, \dots, \frac{2p_n}{1 + \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2}, -\frac{\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}{\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 + 1} \right), \quad X = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Note também que:

$$\bullet \quad \mathbb{S}^n = \psi_N(\mathbb{R}^n) \cup \psi_S(\mathbb{R}^n)$$

- $\psi_N(\mathbb{R}^n) \cap \psi_S(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\} \neq \emptyset$ .
- $(\psi_N)^{-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) = (\psi_S)^{-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}) = \mathbb{R}^n$  que é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ .
- As mudanças de coordenadas  $\psi_N^{-1} \circ \psi_S$  e  $\psi_S^{-1} \circ \psi_N$  são difeomorfismos.

Portanto, o par  $\{(\mathbb{R}^n, \psi_N), (\mathbb{R}^n, \psi_S)\}$  é uma estrutura diferenciável para  $\mathbb{S}^n$ .

## 1.3 Partições da unidade

Nessa seção revisaremos uma técnica fundamental que permite globalizar funções definidas localmente em variedades diferenciáveis. As partições da unidade são o elo entre o local e o global na matemática. Elas mostram que, mesmo quando um espaço não é simples ou plano, ainda podemos trabalhar de modo coordenado, combinando contribuições locais de maneira harmoniosa e suave.

Inicialmente iremos construir e exibir propriedades das partições da unidade em  $\mathbb{R}^3$ , em seguida vamos fazer o mesmo para as partições da unidade em variedades diferenciáveis com auxílio de algumas noções topológicas. O texto desta seção foi desenvolvido tendo como referência *W. de Melo* [8].

### 1.3.1 Funções auxiliares em uma variedade diferenciável

Iniciamos esta seção observando que em algumas situações é mais conveniente trabalhar com cartas locais, que são aplicações inversas de sistemas de coordenadas. Além disso, como não tem perigo de confusão, as cartas locais também serão chamadas de sistemas de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$ , mas agora  $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ , onde  $U$  é um aberto de  $M^3$  e  $V$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Nós deixaremos claro qual delas estaremos utilizando.

No que segue, indicaremos por  $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_{\mathbb{R}^3} < r\}$  a bola aberta na origem e raio  $r > 0$ .

**Proposição 1.11.** *Sejam  $M^3$  uma variedade diferenciável,  $p \in M^3$  e  $A \subset M^3$  um aberto com  $p \in A$ . Então, existem um aberto  $U \subset A$  com  $p \in U$  e um sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$  tal que  $\mathbf{x}(U) = B(3)$  e  $\mathbf{x}(p) = 0$ .*

*Demonstração.* Note que, podemos considerar  $(V, \varphi)$  um sistema de coordenadas qualquer em  $p$ . Considere

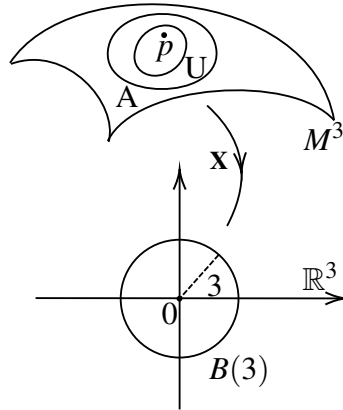
$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto x - \varphi(p). \end{aligned}$$

Então  $T \circ \varphi(p) = 0$ . Defina  $\mathbf{y} = T \circ \varphi$ , e agora, tome  $r > 0$  tal que  $\mathbf{y}^{-1}(B(r)) \subset V \cap A$ .

Ponha  $U = \mathbf{y}^{-1}(B(r))$  e  $\mathbf{x} = h \circ \mathbf{y}$ , onde

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto \frac{3v}{r}. \end{aligned}$$

Figura 1.3. Sistema de coordenadas.



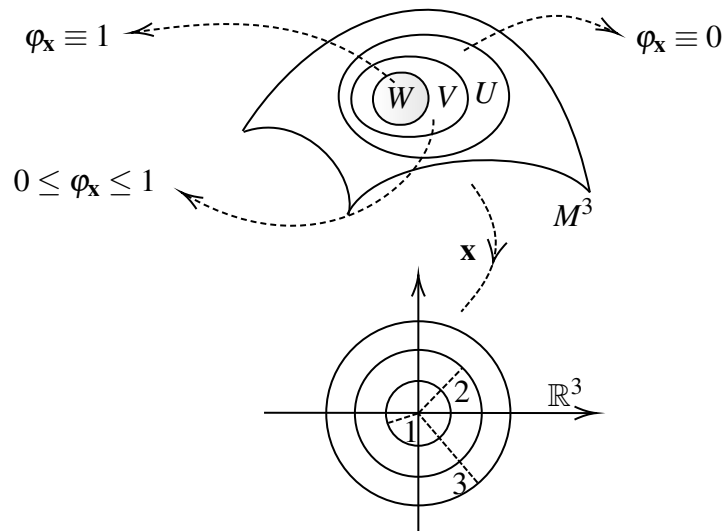
é uma homotetia, tal que  $\mathbf{x}(U) = (h \circ \mathbf{y})(\mathbf{y}^{-1}(B(r))) = h(B(r)) = B(3)$  e  $\mathbf{x}(p) = 0$ .  $\square$

Quando tivermos um sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  dado pela Proposição 1.11, usaremos as letras  $U, V$  e  $W$  para representar os conjuntos

$$\mathbf{x}^{-1}(B(3)) = U, \quad \mathbf{x}^{-1}(B(2)) = V, \quad \mathbf{x}^{-1}(B(1)) = W$$

Ao sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$  associaremos a função  $\varphi_{\mathbf{x}} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , tal que

Figura 1.4. Funções auxiliares.



- i)  $0 \leq \varphi_{\mathbf{x}} \leq 1$ ;
- ii)  $\varphi_{\mathbf{x}}(W) \equiv 1$ ;
- iii)  $\varphi_{\mathbf{x}}(M^3 - V) \equiv 0$ .

Uma função  $\varphi_{\mathbf{x}}$  satisfazendo as propriedades i), ii) e iii) é chamada uma **função de corte para o sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$** .

**Proposição 1.12** (Existência das funções de corte). *Para qualquer variedade diferenciável  $M^3$  existem funções de corte.*

*Demonstração.* Basta exibir uma função suave  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\text{i')} \quad 0 \leq \varphi(y) \leq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{ii')} \quad \varphi(y) = 1 \text{ para } \|y\|_{\mathbb{R}^3} \leq 1, \quad \varphi(y) = 0 \text{ para } \|y\|_{\mathbb{R}^3} \geq 2.$$

Tomando  $(U, \mathbf{x})$  da Proposição 1.11, considere a função  $\varphi_{\mathbf{x}} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi_{\mathbf{x}}(q) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}(q)), & \text{se } q \in U \\ 0, & \text{se } q \in M^3 - U \end{cases}$$

Note que  $\varphi_{\mathbf{x}}$  está bem definida, pois  $\varphi_{\mathbf{x}}(M^3 - U) = \varphi_{\mathbf{x}}(M^3 - V) \equiv 0$ .

E será evidentemente uma função de corte, pois

$$\text{i)} \quad 0 \leq \varphi_{\mathbf{x}}(p) \leq 1, \quad \forall p \in M^3;$$

$$\text{ii)} \quad \varphi_{\mathbf{x}}(W) = \varphi(\mathbf{x}(W)) = \varphi(B(1)) \equiv 1;$$

$$\text{iii)} \quad \varphi_{\mathbf{x}}(M^3 - V) \equiv 0.$$

E  $\varphi_{\mathbf{x}}$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Mas já sabemos que a função  $\varphi$  existe, a qual é chamada uma *função bacia* (ver, e.g., E.L. de Lima [5]).

**Observação 1.13.** Mais geralmente, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe uma função  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , tal que  $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$ ,  $\forall x$  e  $\varphi_\varepsilon(x) = 0$  para  $\|x\|_{\mathbb{R}^2} \geq 2\varepsilon$ .

Basta tomar  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , daí

$$\text{i)} \quad \text{É imediato que } \varphi_\varepsilon \text{ é } C^\infty.$$

$$\text{ii)} \quad 0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1 \quad \forall x, \text{ pois } 0 \leq \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1 \quad \forall x$$

$$\text{iii)} \quad \text{Se } \|x\|_{\mathbb{R}^2} \geq 2\varepsilon, \text{ considere } y = \frac{x}{\varepsilon}, \text{ então } \|y\|_{\mathbb{R}^2} = \frac{\|x\|_{\mathbb{R}^2}}{\varepsilon} \geq \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = 2, \text{ isso implica que } \varphi(y) = 0, \text{ assim,} \\ \varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varphi(y) = 0. \quad \square$$

## 1.3.2 Algumas noções topológicas

**Definição 1.14.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação. O **suporte** da função  $f$  é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Em outras palavras,  $x \notin \text{supp}(f)$  se, e somente se, existe uma vizinhança aberta de  $x$  onde  $f$  é identicamente nula.

**Exemplo 1.15.** Usando as notações da seção anterior, veja que as funções auxiliares  $\varphi_{\mathbf{x}} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tem como suporte os conjuntos

$$\bar{V} = \overline{\mathbf{x}^{-1}(B(2))} = \mathbf{x}^{-1}(\overline{B(2)}).$$

**Definição 1.16.** Uma família  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  de subconjuntos de um espaço topológico  $X$  é dita **localmente finita** quando para cada  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  que intersecta apenas um número finito de  $C_\alpha$ 's. Mais precisamente,  $\mathcal{C}$  é localmente finita se, e somente se, para cada  $x \in X$  existem uma vizinhança  $V \ni x$  e um subconjunto finito  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$  tais que  $V \cap C_\alpha \neq \emptyset$ , implica  $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ .

**Observação 1.17.** Note que toda família finita é localmente finita.

**Exemplo 1.18.** A família  $\mathcal{C} = \{(n, +\infty) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  é localmente finita. Pois, para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  o intervalo aberto  $(n-1, n+1)$  possui intersecção não vazia apenas com  $(n+1)$ -intervalos  $(0, +\infty), \dots, (n, +\infty)$  da família.

**Definição 1.19.** Uma família  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  de subconjuntos de  $X$  é pontualmente finita quando todo ponto  $x \in X$  pertence somente a um número finito de  $C_\alpha$ 's.

**Exemplo 1.20.** Toda família localmente finita é pontualmente finita. A recíproca é falsa, pois a família  $\mathcal{C} = \{(1/n, 2/n) \subset \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  é pontualmente finita, mas não é localmente finita, uma vez que toda vizinhança do zero intersecta uma infinidade de intervalos.

Dada uma família localmente finita  $\mathcal{C} = (C_\alpha)$  de subconjuntos de  $X$ , segue-se da definição de compacidade por cobertura aberta que um conjunto compacto  $K \subset X$  só poderá intersectar um número finito de conjuntos  $C_\alpha$ . Ou seja, dado  $K \subset X$  compacto, existe um subconjunto finito  $A_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$  tal que  $K \cap C_\alpha \neq \emptyset$ , para  $\alpha \in A_0$ .

**Definição 1.21.** Um espaço topológico chama-se **localmente compacto** quando cada  $x \in X$  possui uma vizinhança compacta.

**Proposição 1.22.** Toda variedade diferenciável tridimensional é um espaço localmente compacto.

*Demonstração.* Por definição, uma variedade diferenciável  $M^n$  é um espaço topológico que é localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Isso significa que para cada ponto  $p \in M^n$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ , onde  $V$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

O espaço  $\mathbb{R}^n$  é localmente compacto, pois para qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , podemos considerar, uma bola compacta  $\overline{B_x}(r)$ , para algum  $r > 0$ .



Agora, dado um ponto  $p \in M^n$ , considere uma vizinhança  $U$  de  $p$  que é homeomorfa a um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  via o homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ . Note que a imagem inversa  $\varphi^{-1}(K)$  é uma vizinhança compacta de  $p$  em  $M^n$ . Portanto, toda variedade diferenciável é um espaço localmente compacto.  $\square$

**Propriedade de Lindelöf**: Se  $X$  é um espaço topológico com base enumerável, então toda cobertura aberta de  $X$  admite uma subcobertura enumerável.

Podemos concluir que, se  $X$  é um espaço topológico com base enumerável e  $\mathcal{C} = (C_\alpha)$  é uma família localmente finita de subconjuntos de  $X$ , então  $C_\alpha = \emptyset$  salvo para uma quantidade enumerável de  $\alpha$ 's. Esta é a situação que encontraremos nas variedades diferenciáveis.

Seja  $X$  um espaço topológico. Dada uma coleção  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  de funções  $\varphi_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que a família  $(\text{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$  dos seus suportes é pontualmente finita, então a soma

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x)$$

é um número real, para cada  $x \in X$ . De fato, para cada  $x \in X$  existe um conjunto finito de índices  $A_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$  tal que  $\varphi_\alpha(x) = 0$  se  $\alpha \notin A_0$ . Portanto,  $\varphi(x) = \varphi_{\alpha_1}(x) + \dots + \varphi_{\alpha_r}(x)$ .

Além disso, se  $(\text{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$  é localmente finita e as  $\varphi_\alpha$  são contínuas, então  $\varphi$  é contínua.

### 1.3.3 Partições da unidade em variedades diferenciáveis

Sejam  $M^3$  uma variedade diferenciável e  $\varphi = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha$  a soma de uma família  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  de funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $M^3$  cujos suportes formam uma família localmente finita. Cada  $p \in M^3$  possui uma vizinhança  $V_p$  tal que  $\varphi(x) = \varphi_{\alpha_1}(x) + \dots + \varphi_{\alpha_r}(x)$ , para todo  $x \in V_p$ . (Os índices  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  são os mesmos para todos os pontos  $x \in V_p$ .) Isto mostra que  $\varphi = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , por ser localmente uma soma finita de funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Além disso, sendo  $M^3$  um espaço topológico com base enumerável, necessariamente  $\varphi_\alpha \equiv 0$  salvo para uma quantidade enumerável de índices  $\alpha$ .

**Definição 1.23.** Seja  $M^3$  uma variedade diferenciável. Uma **partição suave da unidade** em  $M^3$  é uma família de funções  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , tais que

- 1) Para todos os  $p \in M^3$  e  $\alpha \in A$ ,  $\varphi_\alpha(p) \geq 0$ ;
- 2) A família  $\mathcal{C} = (\text{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$  é localmente finita em  $M^3$ ;
- 3) Para todo  $p \in M^3$  tem-se  $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$ .

Em vista de 2), a soma em 3) é finita em cada ponto  $p \in M^3$ . Tem-se também  $0 \leq \varphi_\alpha(p) \leq 1$  por causa de 3) e de 1).

**Definição 1.24.** Sejam  $M^3$  uma variedade diferenciável e  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  uma cobertura aberta de  $M^3$ . Uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$  é uma família  $\{\varphi_\alpha : M^3 \rightarrow [0, 1]\}$  de funções  $\mathcal{C}^\infty$  tal que

- (1)  $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset C_\alpha$ ;
- (2)  $(\text{supp}(\varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$  é localmente finita em  $M^3$ ;
- (3)  $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1, \quad x \in M^3$ .

**Observação 1.25.** A soma em (3) é finita para cada  $x \in M^3$  devido a (2).

**Definição 1.26.** Dadas duas coberturas abertas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  de um espaço topológico  $X$ , dizemos que  $\mathcal{C}$  refina  $\mathcal{C}'$  quando, para cada  $C \in \mathcal{C}$  existe  $C' \in \mathcal{C}'$  tal que  $C \subset C'$ .

**Observação 1.27.** Uma partição da unidade  $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in B}$  está subordinada à cobertura  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  se, e somente se,  $(\text{supp}(\varphi_\beta))_{\beta \in B}$  é uma cobertura que refina  $\mathcal{C}$ .

**Definição 1.28.** Dizemos que uma partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é estritamente subordinada a uma cobertura  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  quando  $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset C_\alpha$ .

**Proposição 1.29.** Sejam  $M^3$  uma variedade diferenciável e  $\mathcal{C}$  uma cobertura aberta de  $M^3$ . Então,  $\mathcal{C}$  possui um refinamento  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  localmente finito formado por domínios de sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $\mathbf{x}_i(U_i) = B(3), \forall i \in \mathbb{N}$ . Além disso, pondo  $V_i = \mathbf{x}_i^{-1}(B(2))$  e  $W_i = \mathbf{x}_i^{-1}(B(1))$  os  $W_i$ 's ainda constituem uma cobertura localmente finita de  $M^3$ .

**Observação 1.30.** Se  $M^3$  for compacta a Proposição 1.29 é imediata, pois a cobertura finita  $U = \bigcup_{i=1}^N U_i$  é obtida através da definição de compacidade por cobertura aberta.

**Observação 1.31.** Os conjuntos de uma subcobertura de uma determinada cobertura não perdem as “propriedades” dos conjuntos da cobertura (isso pela própria definição de subcobertura).

Antes de provar a Proposição 1.29, vamos provar o seguinte lema.

**Lema 1.32.** Se  $M^3$  é uma variedade diferenciável, então ela pode ser escrita como uma reunião enumerável  $M^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  ( $K_i$  compacto), onde  $K_i \subset \text{int}(K_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Vejamos que, cada ponto  $p \in M^3$  pertence a um aberto  $V_p = \mathbf{x}^{-1}(B(2))$ , como na Proposição 1.11, onde  $\overline{V_p}$  é compacto.

Cobrimos  $M^3$  por tais  $V_p$ , isto é,  $M^3 = \bigcup_{p \in M^3} V_p$ .

Agora, usando a *propriedade de Lindelöf*, extraímos uma subcobertura enumerável  $M^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ .

Consideremos  $L_i = \overline{V_i}$ . Notemos que, cada  $L_i$  é compacto e ainda vale  $M^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ . Defina os  $K_i$ 's por indução como segue:

- i)  $K_1 = L_1$ ;

- ii) Supondo que  $K_1, \dots, K_i$  são tais que  $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$  e  $K_i \supset L_1 \cup \dots \cup L_i$ , recobrimos o compacto  $K_i \cup L_{i+1}$  com um número finito de  $V_j$ 's e chamamos de  $K_{i+1}$  a reunião dos  $L_j$ 's correspondentes.  $\square$

Agora estamos prontos para provar a Proposição 1.29.

*Demonstração da Proposição 1.29.* Pelo Lema 1.32 podemos escrever

$$M^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \text{ onde } K_i \text{ é compacto e } K_i \subset \text{int}(K_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Todo ponto  $x \in K_2$  pertence a algum  $C \in \mathcal{C}$ . Aplicando a Proposição 1.11 ao aberto  $A = C \cap \text{int}(K_3)$ , concluímos que todo  $x \in K_2$  pertence a um conjunto  $W_{2x}$  tal que o  $U_{2x}$  correspondente está contido em  $\text{int}(K_3)$  e algum aberto de  $\mathcal{C}$ .

Da cobertura  $K_2 \subset \bigcup W_{2x}$  extraímos uma subcobertura finita. Seja  $\mathcal{C}_2$  a cobertura finita de  $K_2$  formada pelos conjuntos  $U_{2x}$  correspondentes.

Analogamente, cada ponto  $x$  da faixa compacta  $K_3 - \text{int}(K_2)$  pertence a algum conjunto  $W_{3x}$  (na forma da Proposição 1.11) tal que o  $U_{3x}$  correspondente está contido em  $\text{int}K_4$ , em algum conjunto de  $\mathcal{C}$  e é disjunto de  $K_1$ .

Da cobertura  $K_3 - \text{int}(K_2) \subset \bigcup_{x \in M} W_{3x}$  extraímos uma subcobertura finita. Seja  $\mathcal{C}_3$  a cobertura finita de  $K_3 - \text{int}(K_2)$  formada pelos conjuntos  $U_{3x}$  correspondentes.

Prosseguindo de maneira análoga, obtemos para cada  $i \geq 3$ , uma cobertura finita  $\mathcal{C}_i$  da faixa compacta  $K_i - \text{int}(K_{i-1})$  por abertos do tipo  $U$ , cada um deles contido em  $\text{int}(K_{i+1})$ , em algum conjunto de  $\mathcal{C}$  e disjunto de  $K_{i-2}$ , de modo que os  $W$ 's correspondentes ainda cobrem a faixa.

A reunião  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_i \cup \dots$  é uma cobertura aberta de  $M^3$  por conjuntos do tipo  $U$ , tal que os  $W$ 's correspondentes ainda cobrem  $M^3$ .

Cada  $U \in \mathcal{C}'$  pertence a algum  $\mathcal{C}_i$  logo intersecta, no máximo, um número finito de outros conjuntos de  $\mathcal{C}'$ , a saber, os pertencentes a  $\mathcal{C}_{i-2} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{i+2}$ .

Portanto,  $\mathcal{C}'$  é um refinamento localmente finito de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Corolário 1.33.** Dada uma cobertura aberta  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  de uma variedade diferenciável  $M^3$ , existe uma partição da unidade  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  a cobertura localmente finita de  $M^3$  obtida na prova da Proposição 1.29. Agora, consideremos a família de funções auxiliares  $\varphi_{x_i} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , associadas aos sistemas de coordenadas  $x_i : U_i \rightarrow B(3) \subset \mathbb{R}^3$ . Como  $\text{supp}(\varphi_{x_i}) \subset U_i$  e  $\mathcal{U}$  é localmente finita segue que  $\text{supp}(\varphi_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$  é localmente finita. Assim, a soma  $\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{x_i}$  está bem definida.

Agora, dado  $p \in M$ , pela Proposição 1.29, temos  $p$  pertence a algum  $W_k$ . Logo,  $\varphi_{x_k}(p) = 1$  e assim  $\varphi(p) \neq 0$ . Seja  $\psi_i = \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}$ . Então,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i = 1$  e obtemos a desejada partição da unidade.  $\square$

**Teorema 1.34.** *Dada uma cobertura aberta  $\mathcal{C} = (C_\alpha)_{\alpha \in A}$  de uma variedade diferenciável  $M^3$ , existe uma partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , estritamente subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma partição suave da unidade, subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ , obtida pelo Corolário 1.33. Pela Proposição 1.29, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $\alpha \in A$  tal que  $U_i \subset C_\alpha$ . Tomemos uma função escolha  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ , isto é,  $f(i)$  é tal que  $U_i \subset C_{f(i)}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\psi_\alpha = \sum_{f(i)=\alpha} \psi_i$ . Como  $\mathcal{U}$  é localmente finita, segue que  $\{V_i \mid f(i) = \alpha\}$  também é localmente finita, logo

$$\overline{\bigcup_{f(i)=\alpha} V_i} = \bigcup_{f(i)=\alpha} \overline{V_i}.$$

Logo,  $\text{supp}(\psi_\alpha) = \bigcup_{f(i)=\alpha} \overline{V_i}$ .

**Afirmção 1.35.**  $(\text{supp}(\psi_\alpha))_{\alpha \in A}$  é localmente finita.

De fato, como  $\mathcal{U}$  é localmente finita, dado  $p \in M^3$  existem  $V \ni p$  vizinhança de  $p$  e  $J = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \mathbb{N}$  tais que

$$U_i \cap V \neq \emptyset \Rightarrow i \in J.$$

Seja  $A_0 = f(J)$ , se  $\text{supp}(\psi_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ , então  $\overline{V_i} \cap V \neq \emptyset$  para algum  $i$  tal que  $f(i) = \alpha$ . Então,  $U_i \cap V \neq \emptyset$ . Logo  $i \in J$ , e assim,  $\alpha = f(i) \in A_0$ . Logo  $(\text{supp}(\psi_\alpha))_{\alpha \in A}$  é localmente finita, isto prova a afirmação.

A prova fica concluída tomando  $\psi = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha$  e  $\varphi_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\psi}$ . Então,

$$\psi = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha = 1 \text{ e } \text{supp}(\varphi_\alpha) = \text{supp}(\psi_\alpha) = \bigcup_{f(i)=\alpha} \overline{V_i} \subset \bigcup_{f(i)=\alpha} U_i \subset C_\alpha. \quad \square$$

**Teorema 1.36.** *Se  $M^3$  é uma variedade diferenciável compacta, então existe um mergulho  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Já sabemos que podemos considerar o sistemas de coordenadas

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset M^3 \rightarrow B(3), \dots, \mathbf{x}_k : U_k \subset M^3 \rightarrow B(3)$$

tais que,  $M^3 = U_1 \cup \dots \cup U_k = W_1 \cup \dots \cup W_k$ , onde  $W_i = \mathbf{x}_i^{-1}(B(1))$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

Agora, para cada  $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow B(3)$ , considere a função de corte  $\varphi_{\mathbf{x}_i} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tal que

$$i) \ 0 \leq \varphi_{\mathbf{x}_i}(q) \leq 1, \ \forall q \in M^3;$$

$$ii) \ \varphi_{\mathbf{x}_i}(W_i) = 1 \text{ e } \varphi_{\mathbf{x}_i}(M^3 - V_i) = 0.$$

Pela Proposição 1.12 tais funções existem. Além disso, vimos anteriormente que

$$\text{supp}(\varphi_{\mathbf{x}_i}) = \overline{V_i} \subset U_i$$

Seja  $\psi_i = \varphi_{x_i}$ . Definimos  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m = 3k + k$  onde  $k$  é o número mínimo de cartas para cobrir  $M^3$ ) por

$$f(x) = (\psi_1(x) \cdot \mathbf{x}_1(x), \dots, \psi_k(x) \cdot \mathbf{x}_k(x), \psi_1(x), \dots, \psi_k(x)).$$

**Afirmção 1.37.**  $f$  é injetora.

De fato, suponhamos que  $f(p) = f(q)$ . Então,  $\psi_i(p) = 1$  e como  $f(p) = f(q)$  têm-se  $\psi_i(q) = 1$ , logo  $q \in U_i$ . Temos também que,

$$\psi_i(p) \cdot \mathbf{x}_i(p) = \psi_i(q) \cdot \mathbf{x}_i(q) \Rightarrow \mathbf{x}_i(p) = \mathbf{x}_i(q)$$

e como  $\mathbf{x}_i$  é injetora em  $U_i$ , temos  $p = q$ , isto prova a afirmação.

Relembremos que toda aplicação  $f : K \rightarrow Y$ , contínua e biunívoca, de um espaço compacto  $K$  sobre um espaço de Hausdorff  $Y$  é um homeomorfismo (ver, e.g., E. L. Lima [6]).

Note agora, que  $f$  é de classe  $C^\infty$  e como  $M^3$  é compacta e  $f : M^3 \rightarrow f(M^3)$  é uma bijeção contínua. Portanto,  $f$  é um homeomorfismo.  $\square$

## 1.4 Campos de vetores

Iniciamos esta seção lembrando *campos de vetores no  $\mathbb{R}^3$*  para fins motivacionais.

**Definição 1.38.** Um Campo de vetores no  $\mathbb{R}^3$  é uma função com domínio  $\mathbb{R}^3$  a valores em  $\mathbb{R}^3$ , simbolicamente temos

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto X(p). \end{aligned}$$

Se  $\{e_i\}_{i=1}^3$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  escrevemos  $X(p) = \sum_{i=1}^3 a^i(p)e_i$ , onde  $a^i$  são funções de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}$ .

O campo  $X$  é diferenciável em  $p$ , se  $a^i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável em  $p$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Além disso, o campo  $X$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$  quando é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{R}^3$ . Em particular, um vetor  $v$  em  $\mathbb{R}^3$  é um campo constante em  $\mathbb{R}^3$ .

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto,  $p \in U$ , um vetor  $v \in \mathbb{R}^3$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , em que podemos definir

$$v(f) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0},$$

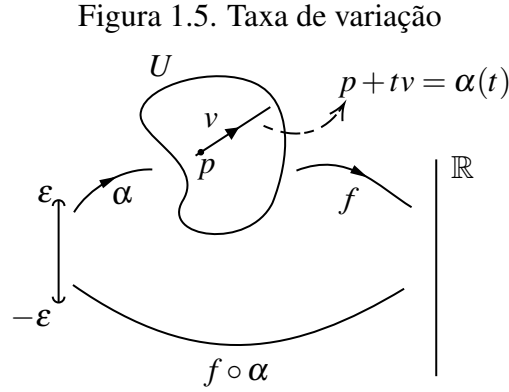
onde  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  é curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Isso mede a taxa de variação com que  $f$  se afasta de  $p$  ao longo da curva  $\alpha(t)$ .

$\frac{\partial f}{\partial v}(p)$  é chamada de **derivada direcional de  $f$  em  $p$  na direção  $v$** .

Em particular, se  $v = e_1$ , temos  $\alpha(t) = p + te_1 = (x_1 + t, x_2, x_3)$ . Neste caso,

$$e_1(f) = \frac{\partial f}{\partial e_1} =: \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Analogamente, para os casos em que  $v = e_2$  e  $v = e_3$ , temos  $e_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2}$  e  $e_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_3}$ , respectivamente. Observe que a notação  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  é bem sugestiva uma vez que a taxa de variação está sendo calculada apenas na direção dos eixos correspondentes. Veja a Figura 1.5.



### 1.4.1 Campos de vetores em variedades diferenciáveis

Um campo de vetores em uma variedade diferenciável  $M^3$  é uma aplicação

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{F} \\ f \longmapsto Xf : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

definida por

$$(Xf)(p) := \tilde{X}(p) \cdot f = \sum_{i=1}^3 a^i(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p), \quad (1.7)$$

conforme mostrado na equação (1.1).

Sendo assim,  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $Xf \in \mathcal{C}^\infty(M)$  para toda  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Neste contexto, é importante observar que cada campo de vetores diferenciável é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

satisfazendo a regra de derivação  $X(fh) = fXh + hXf$ , para  $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Agora veremos uma condição para que a definição (1.7) acima não dependa do sistema de coordenadas. Dados  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  sistemas de coordenadas, temos

$$v_p(f) := v_x(f \circ \mathbf{Y}_1) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \mathbf{Y}_1).$$

Se  $w_y = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_y$ , então  $w_p(f) = w_y(f \circ \mathbf{Y}_2) = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial y^j} (f \circ \mathbf{Y}_2)$ .

A seguir veremos que para  $v_p(f) = w_p(f)$  devemos exigir a mudança de coordenadas, dada por

$$w^j = \sum_i v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto y = \mathbf{Y}_2^{-1} \circ \mathbf{Y}_1(x) = (y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3), y_3(x_1, x_2, x_3))$$

de modo que, podemos aplicar a regra da cadeia para derivar uma função do tipo  $x \mapsto F(y(x))$ , em que  $F = f \circ \mathbf{Y}_2$  e  $y$  como acima. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned} v_p(f) &= v_x(f \circ \mathbf{Y}_1) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \mathbf{Y}_1) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} ((f \circ \mathbf{Y}_2) \circ (\mathbf{Y}_2^{-1} \circ \mathbf{Y}_1)) \\ &= \sum_i v^i \left( \sum_j \frac{\partial (f \circ \mathbf{Y}_2)}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_x \right) = \sum_j \left( \sum_i v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_x \right) \frac{\partial}{\partial y^j} (f \circ \mathbf{Y}_2) \\ &= \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial y^j} (f \circ \mathbf{Y}_2) = w_y(f \circ \mathbf{Y}_2) = w_p(f). \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto de todos os campos de vetores de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $M^3$ .

**Definição 1.39.** Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores em  $\mathfrak{X}(M)$ . Definimos o **colchete de Lie** dos campos  $X$  e  $Y$ , denotado por  $[X, Y]$  como

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

A partir de agora escreveremos por simplicidade  $\partial_i$  para indicar os campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  associados a um sistema de coordenadas locais  $(x_1, x_2, x_3)$ . Observemos que o colchete de Lie dos campos de vetores coordenados é:

$$[\partial_i, \partial_j]f = \partial_i(\partial_j f) - \partial_j(\partial_i f) = 0.$$

**Proposição 1.40.** Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M^3$  e sejam  $X = a^i \partial_i$  e  $Y = b^j \partial_j$  as expressões de  $X$  e  $Y$  associadas a um sistema de coordenadas locais  $(x_1, x_2, x_3)$ . Então existe um único campo de vetores  $[X, Y]$ , dado pela Definição 1.39, cuja expressão em coordenadas locais é:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} (a^i \partial_i b^j - b^i \partial_i a^j) \partial_j$$

*Demonstração.* Para todo  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , temos

$$X(Yf) = \sum_{i,j} a^i \partial_i (b^j \partial_j f) = \sum_{i,j} (a^i \partial_i b^j \partial_j f + a^i b^j \partial_i \partial_j f).$$

Analogamente,

$$Y(Xf) = \sum_{i,j} b^i \partial_i (a^j \partial_j f) = \sum_{i,j} (b^i \partial_i a^j \partial_j f + b^i a^j \partial_i \partial_j f).$$

Usando o fato que  $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ , teremos

$$[X, Y]f = \sum_{i,j} (a^i \partial_i b^j - b^i \partial_i a^j) \partial_j f. \quad (1.8)$$

Isso mostra a unicidade local de  $[X, Y]$  e portanto, podemos defini-lo globalmente, bastando considerar suas expressões locais como em (1.8). Consequentemente,  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\square$

É imediato da definição acima as propriedades seguintes do colchete de Lie.

**Proposição 1.41.** *Se  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , então:*

(a) *Bilinearidade:*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

(b) *Anticomutatividade:*

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(c) *Identidade de Jacobi:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

(d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

(a) *Bilinearidade sobre  $\mathbb{R}$ .* Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Para mostrar

$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ , tomemos  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  e calculemos

$$\begin{aligned} ([aX + bY, Z])(\varphi) &= (aX + bY)(Z(\varphi)) - Z((aX + bY)(\varphi)) \\ &= aX(Z(\varphi)) + bY(Z(\varphi)) - Z(aX(\varphi) + bY(\varphi)). \end{aligned}$$

Como  $a, b$  são constantes,  $Z(aX(\varphi)) = aZ(X(\varphi))$  e similar para o termo com  $b$ , temos

$$([aX + bY, Z])(\varphi) = a(X(Z(\varphi)) - Z(X(\varphi))) + b(Y(Z(\varphi)) - Z(Y(\varphi))),$$

isto é,

$$([aX + bY, Z])(\varphi) = a[X, Z](\varphi) + b[Y, Z](\varphi).$$

Como vale para toda  $\varphi$ , obtemos  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ . A outra igualdade  $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$  prova-se de forma análoga.

(b) *Anticomutatividade.*



Para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,

$$[X, Y](\varphi) = X(Y(\varphi)) - Y(X(\varphi)) = -(Y(X(\varphi)) - X(Y(\varphi))) = -[Y, X](\varphi),$$

segue que,  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

(c) *Identidade de Jacobi.*

Para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z](\varphi) &= [X, Y](Z(\varphi)) - Z([X, Y](\varphi)) \\ &= X(Y(Z(\varphi))) - Y(X(Z(\varphi))) - Z(X(Y(\varphi))) + Z(Y(X(\varphi))), \end{aligned}$$

e termos análogos para as outras duas parcelas. Se expandirmos todos os termos e somarmos os três resultados obtemos

$$\begin{aligned} &X(Y(Z(\varphi))) - Y(X(Z(\varphi))) - Z(X(Y(\varphi))) + Z(Y(X(\varphi))) \\ &+ Y(Z(X(\varphi))) - Z(Y(X(\varphi))) - X(Y(Z(\varphi))) + X(Z(Y(\varphi))) \\ &+ Z(X(Y(\varphi))) - X(Z(Y(\varphi))) - Y(Z(X(\varphi))) + Y(X(Z(\varphi))) = 0. \end{aligned}$$

Isto prova a identidade de Jacobi.

(d) *Regra de Leibniz com funções.* Para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} ([fX, gY])(\varphi) &= (fX)(gY(\varphi)) - (gY)(fX(\varphi)) \\ &= f(X(g)Y(\varphi) + gX(Y(\varphi))) - g(Y(f)X(\varphi) + fY(X(\varphi))) \\ &= fX(g)Y(\varphi) + fgX(Y(\varphi)) - gY(f)X(\varphi) - fgY(X(\varphi)) \\ &= fg(X(Y(\varphi)) - Y(X(\varphi))) + fX(g)Y(\varphi) - gY(f)X(\varphi) \\ &= (fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X)(\varphi). \end{aligned}$$

□

**Observação 1.42.** Os itens (a), (b) e (c) mostram que  $\mathfrak{X}(M)$  munido com o colchete é uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$ ; o item (d) expressa a compatibilidade do colchete com a multiplicação por funções, mostrando que o colchete não é  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinear, mas satisfaz uma regra de Leibniz natural.

## 1.5 Elemento de volume em uma variedade riemanniana orientada tridimensional

O texto desenvolvido nesta seção teve como referências *M. P. do Carmo* [3] e *W. de Melo* [8].

**Definição 1.43.** Seja  $M^3$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é *orientável* se admite estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$  tal que, para todo par  $\alpha, \beta \in \Gamma$ , com  $X_\alpha \cap X_\beta = W \neq \emptyset$ , a diferencial da

mudança de coordenadas  $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  tem determinante positivo.

**Definição 1.44.** Uma *métrica riemanniana* (ou *estrutura riemanniana*) em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M^n$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica e positiva definida) no espaço tangente  $T_p M$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q =: g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .

É claro que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica riemanniana é dizer que para todo par  $X$  e  $Y$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança  $V$  de  $M^n$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $V$ . É imediato verificar que esta definição é equivalente à anterior.

É usual deixar de indicar o índice  $p$  em  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções  $g_{ij}$  são chamadas expressão da métrica riemanniana no sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ .

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica riemanniana chama-se uma *variedade riemanniana*.

Agora vamos explicar como uma métrica riemanniana em uma variedade orientada tridimensional  $M^3$  fornece, de maneira natural, uma noção de volume. Para isso, fixe um ponto  $p \in M^3$  e escolha uma parametrização em torno de  $p$

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M^3$$

cuja orientação seja compatível com a orientação de  $M^3$ , de modo que os vetores coordenados

$$\partial_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \quad i = 1, 2, 3,$$

formam uma base positiva do espaço tangente  $T_p M$ . Escrevendo esses vetores em relação a uma base ortonormal positiva  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,

$$\partial_i(p) = \sum_j a_{ij} e_j,$$

a matriz da métrica na vizinhança coordenada  $\mathbf{x}$  é dada por

$$g_{ik}(p) = \langle \partial_i, \partial_k \rangle(p) = \sum_j a_{ij} a_{kj} = A \cdot A^t,$$

onde  $A = (a_{ij})$  e  $A^t$  é a sua transposta. Assim,  $\det(g_{ij}) = (\det A)^2$ .

Da álgebra linear, sabemos que  $\text{vol}(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \det A$ , pois sendo  $\{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal positiva, temos  $\text{vol}(e_1, e_2, e_3) = 1$  representando o elemento unidade de volume. Logo  $\text{vol}(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \sqrt{\det(g_{ij})}$ .

Se tomarmos outra parametrização positiva  $\mathbf{Y} : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow M^3$  em torno de  $p$ , com matriz da métrica  $(h_{ij})$  nessa parametrização, então os volumes definidos por  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  se relacionam pelo determinante jacobiano da mudança de coordenadas, da seguinte maneira

$$\sqrt{\det(g_{ij})(p)} = J \sqrt{\det(h_{ij})(p)}, \quad J > 0.$$

Esse fato garante a compatibilidade das expressões locais quando trocamos de coordenadas preservando a orientação.

Considere agora uma região  $R \subset M^3$  cujo fecho é compacto e que esteja contida em uma única vizinhança coordenada positiva  $\mathbf{X}(U)$ . Se a fronteira de  $\mathbf{X}^{-1}(R) \subset \mathbb{R}^3$  tem medida nula, definimos o volume de  $R$  por

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{X}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 dx_2 dx_3.$$

A fórmula de mudança de variáveis mostra que esse valor não depende da vizinhança coordenada positiva escolhida. A orientabilidade de  $M^3$  garante que o volume não muda de sinal quando é feita uma troca de coordenadas.

Do ponto de vista das formas diferenciais, o elemento

$$v = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (1.9)$$

define uma forma diferencial positiva de grau 3, chamada forma volume da variedade. Integrar essa forma sobre uma região fornece exatamente o volume definido acima.

Por fim, se  $R$  não estiver contida em uma única carta, utiliza-se uma cobertura finita por vizinhanças coordenadas e uma partição da unidade  $\varphi_i$  subordinada a essa cobertura. Define-se então

$$\text{vol}(R) = \sum_i \int_R \varphi_i v.$$

Pode ser provado que a expressão acima não depende da escolha da partição da unidade.

No caso particular do  $\mathbb{R}^3$ , o cálculo do volume pode ser feito por meio do produto vetorial como segue

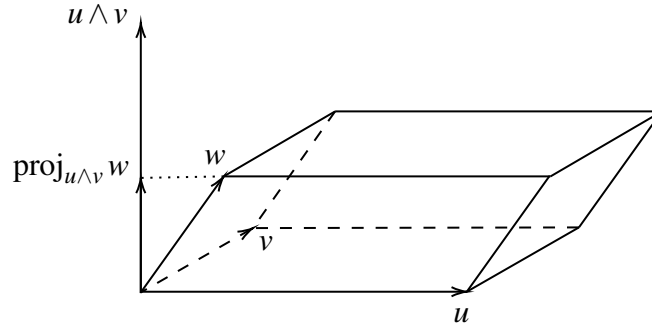
Sejam  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ . Sabemos que o volume do paralelepípedo determinado por esses vetores pode ser obtido como

$$\text{vol}(u, v, w) = \text{área da base} \times \text{altura}.$$

Tomando como base o paralelogramo gerado por  $u$  e  $v$ , sua área é

$$\|u \wedge v\|.$$

Figura 1.6. Volume do paralelepípedo



A altura é o comprimento da projeção de  $w$  sobre o vetorial  $u \wedge v$ , isto é,

$$\|\text{proj}_{u \wedge v} w\| = \left| \frac{w \cdot (u \wedge v)}{\|u \wedge v\|^2} \right| \cdot \|u \wedge v\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(u, v, w) &= \|u \wedge v\| \cdot \left| \frac{w \cdot (u \wedge v)}{\|u \wedge v\|} \right| \\ &= |w \cdot (u \wedge v)|. \end{aligned}$$

Assim, o volume do paralelepípedo é dado pelo valor absoluto do produto misto:

$$\boxed{\text{vol}(u, v, w) = |w \cdot (u \wedge v)|.}$$

Temos que

$$\partial_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,$$

$$\partial_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,$$

$$\partial_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$$

onde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

Então,

$$\partial_1 \cdot (\partial_2 \wedge \partial_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Logo, se  $A = (a_{ij})$ , temos

$$\partial_1 \cdot (\partial_2 \wedge \partial_3) = \det A,$$

e portanto

$$\text{vol}(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = |\det A|.$$

Como a base é positiva temos  $\det A > 0$ , daí

$$\boxed{\text{vol}(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \det A.}$$



## CAPÍTULO 2

---

# Conexão riemanniana, tensor curvatura e imersões isométricas

---

Em um espaço vetorial euclidiano (como  $\mathbb{R}^n$ ), derivar um campo vetorial é simples. Podemos comparar diretamente vetores em pontos diferentes, pois todos “vivem” no mesmo espaço. Mas em uma variedade diferenciável  $M^n$ , os vetores tangentes em pontos diferentes pertencem a espaços tangentes distintos,

$$T_p M \neq T_q M, \text{ quando } p \neq q, p, q \in M^n.$$

Logo, não faz sentido subtrair ou comparar vetores em pontos diferentes diretamente. Precisamos encontrar uma maneira para “transportar” vetores de um ponto a outro para compará-los, e é aí que entra a conexão. Uma *conexão* (denotada por  $\nabla$ ) é uma regra que nos permite “derivar campos vetoriais” ao longo de outros campos vetoriais, de forma coerente com a geometria da variedade diferenciável.

**Notação:**  $\nabla_X Y$  é a *derivada covariante* do campo vetorial  $Y$  na “direção” do campo  $X$ .

O resultado  $\nabla_X Y$  é outro campo vetorial, que intuitivamente, mede como  $Y$  varia ao longo das trajetórias de  $X$  levando em conta a curvatura da variedade riemanniana no caso em que  $\nabla$  é uma conexão riemanniana.

Veremos que, se  $\nabla_{\gamma'(t)} Y = 0$  ao longo de uma curva diferenciável  $\gamma(t)$  em uma variedade riemanniana  $M^n$ , então  $Y$  é transportado paralelamente ao longo de  $\gamma(t)$ , isto é, ele “mantém sua direção” de modo coerente com a geometria local de  $M^n$ .

Parte do texto deste capítulo foi desenvolvido tendo como referência *M. P. do Carmo* [3].

## 2.1 Conexão riemanniana

Em algumas situações será adotada a convenção de soma de Einstein, segundo a qual a repetição de um mesmo índice em uma expressão implica uma soma sobre todos os valores permitidos desse índice, dispensando a notação explícita do somatório. Assim, por exemplo,

$$a_i b_i \equiv \sum_i a_i b_i.$$

Salvo indicação em contrário, índices repetidos em uma mesma expressão serão interpretados de acordo com essa convenção.

**Definição 2.1.** Uma conexão de Levi–Civita (ou riemanniana) em  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla(X, Y) := \nabla_X Y,$$

satisfazendo as seguintes propriedades para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ :

- (1)  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear na 1ª variável:  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- (2)  $\mathbb{R}$ -linear na 2ª variável:  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- (3) Regra de Leibniz:  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ ;
- (4) Simetria:  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ;
- (5) Compatibilidade com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ .

As propriedades (1), (2) e (3) definem o que chamamos de *conexão afim em  $M^n$*  (elas não dependem de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ). As propriedades (4) e (5) ficarão claras posteriormente (elas estão diretamente associadas à métrica).

Para provar a existência de uma *conexão afim*, consideremos dois campos de vetores  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e um sistema de coordenadas locais  $(U, \mathbf{x})$  em torno de um ponto  $p \in M^n$ , de modo que  $X = a^i \partial_i$  e  $Y = b^j \partial_j$ . Utilizando as propriedades da *conexão afim*, deve ocorrer

$$\nabla_X Y = \nabla_{a^i \partial_i} b^j \partial_j = a^i \nabla_{\partial_i} b^j \partial_j = a^i (\partial_i b^j \partial_j + b^j \nabla_{\partial_i} \partial_j).$$

Para cada  $i, j$  escolhemos  $n$ -funções  $\Gamma_{ij}^1, \dots, \Gamma_{ij}^n$  diferenciáveis em  $U$  para definirmos  $\nabla_{\partial_i} \partial_j := \Gamma_{ij}^k \partial_k$ , logo

$$\nabla_X Y = a^i (\partial_i b^j \partial_j + b^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) = (a^i \partial_i b^k + a^i b^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k = (X(b^k) + a^i b^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k. \quad (2.1)$$

Isso mostra que  $\nabla_X Y$  só depende de  $a_i(p), b_k(p)$ , das derivadas  $X(b_k)$  e da escolha de funções  $\Gamma_{ij}^k$ . Em outras palavras, se  $\alpha : I \rightarrow M^n$  é uma curva diferenciável tal que  $\alpha'(0) = X_p$ , então  $\nabla_X Y$  depende apenas



dos valores de  $Y$  ao longo de  $\alpha$ , isto é, se  $Y \circ \alpha = Z \circ \alpha$ , então  $\nabla_{\alpha'} Y = \nabla_{\alpha'} Z$ . Portanto, podemos definir a *conexão afim* localmente como em (2.1), que é única, fixada as funções  $\Gamma_{ij}^k$ , donde podemos defini-la globalmente em  $M$ .

Observe que a primeira parcela da *conexão afim* é exatamente a derivada direcional do  $\mathbb{R}^n$ , enquanto que a segunda se destaca pelo aparecimento das funções  $\Gamma_{ij}^k$  que são conhecidos como os *símbolos de Christoffel da conexão*. Fixados estes símbolos bem como as expressões locais de  $X = a^i \partial_i$  e  $Y = b^j \partial_j$ , segue-se de (2.1) que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (X(b^k) - Y(a^k)) \partial_k + a^i b^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k, \quad (2.2)$$

o que nos motiva definir um operador que está diretamente associado à conexão afim. Ele é conhecido como a torção  $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , o qual é calculado pela expressão local

$$\tau(X, Y) = a^i b^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k. \quad (2.3)$$

Note que a torção é nula se, e somente se, para cada  $k$  vale a igualdade dos símbolos  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  para todo  $i, j$ . Além disso, podemos escrever

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + \tau(X, Y). \quad (2.4)$$

Observe que a condição de simetria dada pelo item (4) da Definição 2.1 é equivalente à torção ser nula, isto é, à simetria nos índices dos *símbolos de Christoffel da conexão*.

Existe outra maneira de justificar a simetria da *conexão riemanniana*, mas podemos correr o risco de passarmos despercebidos pela torção. Vejamos: assumindo a simetria da conexão, temos

$$(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] \stackrel{(1.40)}{=} 0.$$

Donde novamente vamos obter a simetria nos índices, como segue  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

É por meio da *conexão riemanniana* que podemos estudar a geometria de  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Uma maneira de fazer isso é por meio de curvas em  $M^3$ . Nossa próxima definição tem esse objetivo.

**Proposição 2.2.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Seja  $\alpha : I \rightarrow M^n$  uma curva diferenciável em  $M^n$ . Existe uma única correspondência que associa cada campo de vetores diferenciáveis  $V$  ao longo de  $\alpha(t)$  a outro campo de vetores diferenciáveis  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha(t)$  satisfazendo:*

$$(1) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}, \text{ onde } W \text{ é um campo de vetores diferenciáveis ao longo de } \alpha(t);$$

$$(2) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}, \text{ onde } f \text{ é uma função diferenciável em } I;$$

(3) Se  $V(t) = Y(\alpha(t))$  para algum  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} Y$ .

*Demonstração.* Por simplicidade, trabalharemos apenas com  $n = 3$ , o caso de  $n \geq 4$  é similar. Seja  $(U, \mathbf{x})$  um sistema de coordenadas locais em torno de  $\alpha(t)$ . Então, podemos escrever  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  e  $V = v^i(t)\partial_i$  em que  $\partial_i = \partial_i \circ \alpha(t)$ . Assumindo (1), (2) e (3), obtemos:

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k V^j \frac{dx^i}{dt} \right) \partial_k.$$

Note que a correspondência requerida está unicamente determinada por essa expressão. Além disso, ela coincide na interseção de duas vizinhanças coordenadas, portanto, podemos defini-la em toda a curva.  $\square$

**Definição 2.3.**  $\frac{DV}{dt}$  é denominada a *derivada covariante de V* ao longo de  $\alpha(t)$ .

O caso especial em que  $\frac{DV}{dt} = 0$  refere-se ao transporte paralelo  $V(t)$  de  $v_0 = V(t_0)$  ao longo de  $\alpha(t)$  e equivale ao sistema de EDOs:

$$\frac{dV^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} V^j = 0, \text{ para cada } k = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Uma geodésica de uma variedade riemanniana  $M^n$  é caracterizada como uma curva parametrizada diferenciável em  $M^n$  que tem o vetor velocidade paralelo ao longo da curva. Portanto, elas são obtidas por meio de integração do sistema linear de EDOs de 2ª ordem associado, obtido por meio de (2.5) o qual é sempre solúvel e único fixando as condições iniciais. Mais precisamente, temos.

**Definição 2.4.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\gamma: I \rightarrow M^n$  é uma *geodésica* em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt}(\gamma'(t))|_{t=t_0} = 0$ . Se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma *geodésica*. Se  $[a, b] \subset I$  e  $\gamma: I \rightarrow M^n$  é uma geodésica, a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$  é chamada (segmento de) *geodésica ligando*  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ . Ou seja, o vetor velocidade  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma(t)$ .

Vamos agora determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica  $\gamma$  em um sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$  em torno de  $\gamma(t_0)$ . Em  $U$ ,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ e } \gamma'(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right).$$

Assim, por (2.5),  $\gamma$  será uma geodésica se, e somente se, satisfaz o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Embora essas definições façam sentido em variedades diferenciáveis, o caso mais interessante em que elas aparecem e, muitas vezes de forma decisiva, é quando trabalha-se com a *conexão riemanniana*.

Ao longo deste trabalho, algumas questões surgem naturalmente no desenvolvimento dos resultados, mas não são completamente abordadas no presente momento. Tais pontos dizem respeito a escolhas técnicas, possíveis generalizações e limitações do método empregado, cuja análise mais aprofundada exigiria um escopo mais amplo do que o aqui proposto.

Nesse sentido, optamos por destacar algumas questões de forma antecipada, com o objetivo de orientar o leitor quanto às direções futuras e possíveis extensões dos resultados obtidos. Acreditamos que essas considerações não apenas complementam a compreensão do trabalho, mas também indicam caminhos promissores para investigações posteriores.

Por exemplo, as geodésicas de uma variedade riemanniana  $M^n$  podem ser vistas como trajetórias de um campo no fibrado tangente da variedade (chamado campo geodésico), o qual dá origem à aplicação exponencial  $\exp_p : U \subset T_p M \rightarrow M^n$ , cujas aplicações são inúmeras no contexto de variedades riemannianas. Uma variedade riemanniana é completa quando toda geodésica pode ser estendida indefinidamente, isto é, seu domínio pode ser tomado como todo o conjunto dos números reais. Equivalentemente, a aplicação exponencial  $\exp_p$  está definida em todo o espaço tangente  $T_p M$ , para qualquer ponto  $p \in M$ .

Outro fato é que, a *curvatura gaussiana* de superfícies é generalizada para dimensões maiores por meio da definição de curvatura seccional. Isso pode ser entendido tomando uma bola aberta  $B \subset T_p M \cong \mathbb{R}^n$  em que  $\exp_p$  é um difeomorfismo e  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional de modo que  $\exp_p(\sigma \cap B) = \Sigma^2$  seja uma superfície em  $M^n$  que é formada por geodésicas de  $M^n$ . Sendo  $\Sigma^2$  uma subvariedade totalmente geodésica de  $M^n$ , segue-se da equação de Gauss que  $K_{\Sigma^2}(p) = K_p(\sigma)$ , em que  $K_{\Sigma^2}(p)$  é a *curvatura gaussiana* de  $\Sigma^2$  em  $p$  e  $K_p(\sigma)$  é a curvatura seccional de  $M^n$  em  $p$  segundo  $\sigma$  (ver Definição 2.15, equação (2.22), Definição 2.23 e Proposição 2.24). Para mais detalhes, ver M. P. do Carmo [3]. Outro fato fundamental é que o transporte paralelo pode ser visto como uma *isometria*, uma vez que  $\frac{DV}{dt} = 0$ , implica

$$\langle V(t), V(t) \rangle = \langle V(t_0), V(t_0) \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Além disso, pode-se reobter a conexão riemanniana por meio do transporte paralelo. De fato, seja  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e seja  $\alpha$  uma curva integral de  $X$  por  $p$ , isto é,  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ .

Seja  $\mathcal{P}$  o transporte paralelo ao longo de  $\alpha(t)$ . Então, podemos provar que

$$\nabla_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}^{-1} Y(\alpha(t)) - Y(\alpha(0))}{t}.$$

Agora veremos apenas o essencial de teoria tensorial para entendermos um pouco mais sobre a geometria de  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

## 2.2 Tensor curvatura de Riemann

Para um maior aprofundamento dos assuntos que abordaremos neste capítulo recomendamos ao leitor as referências J. M. Lee [4], M. Spivak [10] e P. Petersen [9].

**Definição 2.5.** Um  $(1, r)$ -tensor em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma aplicação

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

multilinear sobre o anel  $\mathcal{C}^\infty(M)$  das funções diferenciáveis em  $M^n$ . Note que, num  $(0, r)$ -tensor, o contradomínio é  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Formalmente,

$$T(Y_1, \dots, fX + hY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + hT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

O valor do campo  $T(Y_1, \dots, Y_r)$  (ou da função no caso de  $(0, r)$ -tensores) num ponto  $p \in M^n$  depende unicamente dos valores dos campos  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$  no ponto  $p$ . Isto é, se  $Z_1, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $Y_j(p) = Z_j(p)$  ( $1 \leq j \leq r$ ). Então,

$$T(Y_1, \dots, Y_r)(p) = T(Z_1, \dots, Z_r)(p).$$

Com efeito, para provar este fato, primeiramente vamos considerar campos  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  e supor que para algum  $j$ ,  $X_j(p) = 0$ . Em uma vizinhança coordenada  $U$  de  $p$ , temos  $X_j = a^i \partial_i$ . Seja  $\psi$  uma função bump em  $p$ , com  $\text{supp } \psi \subset U$  e  $\psi(p) = 1$ . Assim, a função  $\psi a^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$  e o campo de vetores  $\psi \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} \psi^2 T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_r) &= T(X_1, \dots, \psi^2 X_j, \dots, X_r) = T(X_1, \dots, \psi a^i \psi \partial_i, \dots, X_r) \\ &= \psi a^i T(X_1, \dots, \psi \partial_i, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Como cada  $a^i(p) = 0$  e  $\psi(p) = 1$ , segue que  $T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_r)(p) = 0$ . Agora, por hipótese,  $Y_j(p) = Z_j(p)$  para todo  $j$ , isso vai implicar pelo fato anterior e pela multilinearidade de  $T$  que

$$T(Y_1, \dots, Y_r)(p) - T(Z_1, \dots, Z_r)(p) = 0,$$

conforme havíamos afirmado. Para mais detalhes ver M. Spivak [10].

**Exemplo 2.6.** O tensor métrico  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  que faz corresponder a cada ponto  $p \in M$  e a cada par  $X, Y \in T_p M$ , o produto interno de  $X$  e  $Y$  na métrica riemanniana de  $M$ , isto é,

$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$ , é um  $(0, 2)$ -tensor e suas componentes no referencial  $\{\partial_i\}$  são os coeficientes  $g_{ij}$  da métrica riemanniana no sistema de coordenadas dado.

**Exemplo 2.7.** Toda  $k$ -forma diferencial  $\omega$  em  $M$  é automaticamente um  $(0, k)$ -tensor em  $M$ .

**Observação 2.8.** Em uma variedade riemanniana a métrica riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável  $X \in \mathfrak{X}(M)$  a 1-forma diferencial  $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$  dada por

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

É imediato que  $\omega_X$  está unicamente determinada.

Mais geralmente, dado um  $(0, r)$ -tensor  $T$  em uma variedade riemanniana  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , podemos identificá-lo com um  $(1, r-1)$ -tensor  $\tilde{T}$  mediante a métrica riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , fazendo

$$\langle \tilde{T}(Y_1, \dots, Y_{r-1}), Y_r \rangle := T(Y_1, \dots, Y_r). \quad (2.6)$$

Por simplicidade de notação, e desde que não teremos perigo de confusão, omitiremos o “ $\sim$ ” no  $(1, r-1)$ -tensor correspondente ao  $(0, r)$ -tensor  $T$ . Em particular, o tensor métrico  $g$ , será identificado com o  $(1, 1)$ -tensor identidade  $I$  em  $\mathfrak{X}(M)$ .

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos agora.

**Definição 2.9.** A derivada covariante de um  $(1, r)$ -tensor  $T$  é um  $(1, r+1)$ -tensor  $\nabla T$  dado por

$$\nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_r). \quad (2.7)$$

Para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , define-se a derivada covariante  $\nabla_X T$  de  $T$  em relação a  $X$  como um tensor de mesma ordem que  $T$  dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \dots, Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um  $(0, r)$ -tensor  $T$  é um  $(0, r+1)$ -tensor  $\nabla T$  dado por (2.7).

**Observação 2.10.** Dizemos que um tensor é paralelo quando  $\nabla T \equiv 0$ .

**Exemplo 2.11.** Em uma variedade riemanniana  $(M, g)$  com a conexão de Levi-Civita  $\nabla$ , temos que  $\nabla g \equiv 0$ . Com efeito, dados  $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$ , teremos

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y_1, Y_2) &= (\nabla_X g)(Y_1, Y_2) \\ &= \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\ &= g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.12.** Utilizando a Observação 2.8, a derivada covariante de  $\omega_X$  em relação ao campo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  é tal que, para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla \omega_X)(Z, Y) &= (\nabla_Z \omega_X)(Y) \\ &= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle \\ &= \langle \nabla X(Z), Y \rangle = \nabla X(Z, Y). \end{aligned}$$

Decorre daí que  $\nabla_Z \omega_X$  pode ser identificado ao campo  $\nabla_Z X$ , ou equivalentemente,  $\nabla \omega_X$  pode ser identificado ao operador  $\nabla X$ . Isto mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivação covariante de campos (derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual).

Motivados pelo resultado do Exemplo 2.12, para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , convém considerar o  $(1, 1)$ -tensor  $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por  $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$ . Assim, pela Definição 2.9, teremos o  $(1, 2)$ -tensor dado por

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 Z &:= \nabla \nabla Z(X, Y) \\ &= \nabla_X(\nabla_Z(Y)) - (\nabla Z)(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z, \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Analogamente,

$$\nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z. \tag{2.9}$$

Subtraindo (2.9) de (2.8) obtemos, para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , o  $(1, 2)$ -tensor dado por

$$\nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.10}$$

Fazendo  $Z$  variar na equação (2.10) obteremos um  $(1, 3)$ -tensor, bastando provar a linearidade em  $Z$ . O que motiva a definição seguinte.

**Definição 2.13.** Seja  $M$  uma variedade riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o  $(1, 3)$ -tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.11}$$

**Observação 2.14.** A troca do sinal que fizemos em (2.10) para definir (2.11) é uma convenção adotada

por alguns autores, deve-se apenas tomar cuidado nas definições correspondentes, tomando sempre o caso da esfera euclidiana como referência, em que as curvaturas correspondentes devem ter sinal positivo.

No caso do  $\mathbb{R}^n$  com a sua métrica padrão, segue-se do Teorema de Schwarz que  $R(X, Y)Z = 0$ . Sendo assim, o tensor de Riemann mede o quanto a geometria de  $M^n$  difere da geometria de  $\mathbb{R}^n$ .

Convém estudar as propriedades desse tensor na sua forma  $(0, 4)$ , como segue:

$$R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

cujas propriedades básicas são:

- (1)  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z)$ ;
- (2)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ ;
- (3)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$  (primeira identidade de Bianchi).
- (4)  $(\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W) = 0$  (segunda identidade de Bianchi).

A prova de todas elas segue imediatamente da definição do tensor sendo que para provar (3) deve-se lembrar que

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

No caso da prova de (4) é o mais conveniente considerar um referencial geodésico em  $p$ , i.e., um conjunto de campos locais  $\{e_i\}$  tais que  $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0$ . Eles podem ser usados nesta prova devido ao caráter pontual dos tensores.

Devido a sua generalidade, o tensor  $R$  pode ser estudado por meio de funções curvaturas, conforme veremos a seguir:

**Definição 2.15.** A curvatura seccional  $K_p(\sigma)$  de  $M$  em  $p$  segundo um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  é dada por:

$$K_p(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

que independe da escolha da base  $\{X, Y\}$  de  $\sigma$ . Para provar este fato recomendamos M.P. do Carmo [3].

## 2.3 Imersões isométricas

Seja  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  uma imersão de  $\Sigma^2$  em  $M^3$ . Dizemos que  $\varphi$  é uma *imersão isométrica* se para quaisquer  $p \in \Sigma^2, X, Y \in T_p \Sigma$ , tem-se

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle d\varphi_p X, d\varphi_p Y \rangle_{\varphi(p)}, \quad (2.12)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi(p)}$  denotam as métricas riemannianas de  $\Sigma^2$  e  $M^3$ , respectivamente.

Observamos que se  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é uma imersão e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica riemanniana de  $M^3$ , então podemos introduzir uma métrica riemanniana em  $\Sigma^2$  por (2.12), de modo que  $\varphi$  se torna uma imersão isométrica.

Com efeito,

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é uma forma bilinear e simétrica. Isso segue imediato de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi(p)}$  ser bilinear e simétrica e  $d\varphi$  ser linear;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é positiva definida. Isso segue do fato de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi(p)}$  ser positiva definida e  $d\varphi_p$  ser injetiva  $\forall p \in \Sigma^2$ , pois dado  $p \in \Sigma^2$  temos

$$0 = \langle X, X \rangle_p = \langle d\varphi_p X, d\varphi_p X \rangle_{\varphi(p)},$$

isso equivale à equação,

$$\|d\varphi_p X\|_{\varphi(p)}^2 = 0,$$

que por sua vez é equivalente a

$$d\varphi_p X = 0 \Leftrightarrow X = 0, \text{ pois } d\varphi_p \text{ é injetiva.}$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  varia diferenciavelmente no sentido da diferenciabilidade da métrica, isso segue da diferenciabilidade de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi(p)}$  e do fato de que  $d\varphi$  também varia diferencialmente com  $p$ .

### 2.3.1 Segunda forma fundamental de uma imersão isométrica

A motivação para este estudo proveio do caso clássico de superfícies regulares de  $\mathbb{R}^3$ , que recordaremos a seguir.

**Definição 2.16.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é chamado uma *superfície regular* se, para cada ponto  $p \in S$ , existe uma vizinhança aberta  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$ , um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e uma aplicação

$$\mathbf{x} : U \longrightarrow V \cap S$$

tal que:

- (1)  $\mathbf{x}$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;
- (2)  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  é um homeomorfismo;
- (3) para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora.

A aplicação  $\mathbf{x}$  é chamada uma *parametrização local* de  $S$  em torno de  $p$ .



**Proposição 2.17.** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in \mathbf{x}(U)$  tal que as condições (1) e (3) da Definição 2.16 sejam satisfeitas. Suponha que  $\mathbf{x}$  seja bijetiva. Então  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Ver M.P. do Carmo, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, p.74 [2].  $\square$

**Exemplo 2.18.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  uma aplicação diferenciável, onde  $U$  é um aberto. Se  $a$  é um valor regular de  $f$  (i.e.,  $df_p$  é sobrejetora  $\forall p \in f^{-1}(a)$ ), usando o *Teorema da Aplicação Inversa*, (E.L. Lima; Curso de Análise, Volume 2, p. 283 [5]) temos que  $S = f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, podemos considerar a inclusão  $i : S \hookrightarrow U$  de  $S$  em  $U$  e tomar em  $S$  a métrica induzida por  $i$ .

Um caso particular do Exemplo 2.18 é a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Defina  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Como  $\nabla f(x) = 2(x_1, x_2, x_3)$ , temos  $\nabla f(x) \neq 0$  para todo  $x \in f^{-1}(0) = \mathbb{S}^2$ . Logo, 0 é valor regular de  $f$  e, portanto,  $\mathbb{S}^2$  é uma subvariedade mergulhada de  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2, com a métrica induzida do espaço euclidiano.

Outro exemplo, provém do Cálculo Diferencial no  $\mathbb{R}^2$  no caso em que  $S$  é o gráfico

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}$$

de uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(0, 0) = 0$  e  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  (esta última condição quer dizer que  $S$  é tangente ao plano  $xOy$ ). Neste caso, sabemos do Cálculo, que a forma de  $S$  em uma vizinhança da origem  $O \in \mathbb{R}^3$  é profundamente influenciada pela forma quadrática

$$\mathcal{I}(x, y) = f_{xx}(O)x^2 + 2f_{xy}(O)xy + f_{yy}(O)y^2$$

definida no plano  $xOy$ . De fato, como  $f$  é diferenciável, podemos expandi-la em série de Taylor até a segunda ordem em torno da origem, como segue

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \text{termos de ordem superior.} \end{aligned}$$

Dado que  $f(0, 0) = 0$  e  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , a expansão reduz-se a:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \text{termos de ordem superior.}$$

Note que, em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, os termos de segunda ordem dominam o comportamento de  $f(x, y)$ . Assim,  $f(x, y)$  é aproximadamente:

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2).$$

Relembremos que a matriz Hessiana de  $f$  em  $(0, 0)$  como:

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A natureza da superfície  $S$  depende dos autovalores de (2.13), que determinam a concavidade de  $f(x, y)$ :

1. Se os autovalores de (2.13) têm o mesmo sinal: ((2.13) é definida positiva ou negativa), então  $S$  é localmente um paraboloide elíptico.
2. Se os autovalores de (2.13) têm sinais opostos: ((2.13) é indefinida), então  $S$  é localmente um paraboloide hiperbólico.
3. Se (2.13) é semidefinida positiva ou negativa: (um autovalor é zero), a forma de  $S$  não pode ser investigada pelas propriedades de (2.13).

$\mathbb{I}$  é chamada a *segunda forma fundamental* de  $S$  no ponto  $O$ .

Veremos também que a *curvatura gaussiana* de  $S$  em  $O$  é dada por  $K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ . (veja (2.27))

Seja  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  uma imersão isométrica. Então, pelo Teorema 1.10,  $\forall p \in \Sigma^2$  existe  $U \subset \Sigma^2$  aberto contendo  $p$  tal que  $\varphi|_U$  é um mergulho de  $U$  sobre sua imagem  $\varphi(U)$ . Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $\varphi(U)$  e cada vetor  $v \in T_q\Sigma$ ,  $q \in U$ , com  $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)}M$ . Logo, podemos considerar  $T_p\Sigma$  como um subespaço de  $T_pM$ ; e escrever:

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus T_p\Sigma^\perp,$$

onde  $T_p\Sigma^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p\Sigma$  em  $T_pM$ .

Assim, para cada  $v \in T_qM$ , podemos escrever  $v = v^\top + v^\perp$ , com  $v^\top \in T_q\Sigma$  e  $v^\perp \in T_q\Sigma^\perp$ . Neste caso, denominamos  $v^\top$  a componente tangencial de  $v$  e  $v^\perp$  a componente normal de  $v$ . Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial  $T\Sigma^\perp := \bigcup_{p \in \Sigma} \{p\} \times T_p\Sigma^\perp$  chamado o fibrado normal a  $\Sigma^2$ . Deste modo, o fibrado vetorial

$$TM|_{\varphi(\Sigma)} = \{X \in TM : \pi(X) \in \varphi(\Sigma), \text{ em que } \pi : TM \rightarrow M^3 \text{ é a projeção canônica}\}$$

é a soma de Whitney do fibrado tangente  $T\Sigma$  com o fibrado normal  $T\Sigma^\perp$ , isto é,

$$TM|_{\varphi(\Sigma)} = T\Sigma \oplus_W T\Sigma^\perp.$$

Sendo assim, podemos considerar as seguintes projeções:

$$(\cdot)^\top : TM|_{\varphi(\Sigma)} \rightarrow T\Sigma \text{ e } (\cdot)^\perp : TM|_{\varphi(\Sigma)} \rightarrow T\Sigma^\perp.$$

Sejam  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$  as conexões de Levi-Civita de  $M^3$  e  $\Sigma^2$ , respectivamente. Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $\Sigma^2$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais a  $M^3$  temos que

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp. \quad (2.14)$$

Vamos estudar cada uma dessas parcelas separadamente. Para tanto, sejam  $X, Y, Z$  campos de vetores em  $U \subset \Sigma$  (que estamos identificando com  $\varphi(U)$ ) e  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  as respectivas extensões locais a  $M$ . Como  $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$  em  $q \in U$  só depende de  $\bar{X}(q) = X(q)$  e dos valores de  $\bar{Y}$  ao longo de qualquer curva diferenciável tangente a  $X(q)$ , podemos definir (independentemente das extensões) os dois entes geométricos a seguir:

$$D_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top \text{ e } \alpha(X, Y) := (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\perp.$$

Pela linearidade da projeção  $(\cdot)^\top$  e pelas propriedades de  $\bar{\nabla}$ , é imediato que  $D$  satisfaz as propriedades de uma conexão afim. Além disso, em  $U$ , temos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top, Z \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^\top \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \end{aligned}$$

e a expressão local dos colchetes (ver (1.8)) nos permite deduzir que, em  $U$ ,  $[\bar{X}, \bar{Y}]^\top = [X, Y]$ , logo

$$D_X Y - D_Y X = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X})^\top = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X})^\top = [\bar{X}, \bar{Y}]^\top = [X, Y].$$

Consequentemente,  $D$  satisfaz a expressão local da conexão riemanniana de  $\Sigma^2$ , assim, por unicidade,  $D_X Y = \nabla_X Y$ . Passemos ao estudo de  $\alpha(X, Y)$ . De acordo com este último resultado que obtivemos e pela equação (2.14), já temos que

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, é imediato a linearidade de  $\alpha$  em  $X$  e  $Y$ . A partir do carácter tensorial das conexões, deduzimos que  $\alpha$  é  $C^\infty(U)$ -linear em  $X$ . No caso de  $Y$ , consideremos

$f \in C^\infty(U)$  e  $\tilde{f}$  uma extensão local de  $f$  a  $M^3$ . Notando que, em  $U$ ,  $\bar{X}(\tilde{f})\tilde{Y} = X(f)Y$ , temos

$$\begin{aligned}\alpha(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\tilde{f}\tilde{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \bar{X}(\tilde{f})\tilde{Y} + \tilde{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\tilde{Y} - X(f)Y - f\nabla_X Y \\ &= f\bar{\nabla}_{\bar{X}}\tilde{Y} - f\nabla_X Y = f\alpha(X, Y).\end{aligned}$$

Além disso,  $\alpha$  é simétrica, pois

$$\alpha(X, Y) = [\bar{X}, \bar{Y}] + \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - ([X, Y] + \nabla_Y X) = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X = \alpha(Y, X).$$

Ou seja,  $\alpha$  é bilinear sobre  $C^\infty(U)$  e simétrica. Vamos reescrever (2.14) como segue

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\tilde{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X, Y). \quad (2.15)$$

Esta equação é conhecida como a *fórmula de Gauss*. A grosso modo, podemos dizer que a equação (2.15) nos conduz ao estudo de duas geometrias sobre  $\Sigma$ , uma tangente dada pela primeira parcela, e outra normal dada pela segunda parcela. Com o objetivo de estabelecermos uma ligação entre elas, consideremos  $\eta$  um referencial ortonormal local em  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ . Então,

$$0 = X\langle \eta, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \eta, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X \eta)^\top, Y \rangle + \langle \eta, \alpha(X, Y) \rangle.$$

Portanto, é conveniente definirmos o  $(1, 1)$ -tensor  $\mathcal{A}_\eta : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$  por

$$\mathcal{A}_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top. \quad (2.16)$$

De modo que, a equação abaixo é imediatamente satisfeita

$$\langle \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \quad (2.17)$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ . Como de praxe, podemos definir  $\mathcal{A}_\eta$  como sendo o  $(0, 2)$ -tensor dado por  $\mathcal{A}_\eta(X, Y) := \langle \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle$ , o qual é simétrico, uma vez que  $\alpha$  é simétrico, assim  $\langle \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{A}_\eta Y \rangle$ . A aplicação  $\mathcal{A}_\eta$  é o *operador de Weingarten* ou *operador de forma* da imersão  $\varphi$ , enquanto que (2.17) é a *equação de Weingarten*.

**Definição 2.19.** A aplicação bilinear sobre  $C^\infty(U)$  e simétrica  $\alpha : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  definida por (2.15) é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ . Em particular, escrevendo  $\alpha(X, Y)$  em coordenadas locais, para cada  $p \in \Sigma^2$  a aplicação  $\alpha_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma^\perp$  dada por  $\alpha_p(X, Y) = \alpha(X, Y)(p)$  depende somente dos valores de  $X$  e  $Y$  em  $p$ , portanto, o campo de vetores normais  $\alpha(X, Y)$  tem caráter tensorial.

Como o operador  $\mathcal{A}_\eta$  é simétrico, convém considerarmos o seu traço, para isso vamos definir a função curvatura média  $H$ , dada por

$$H := \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{A}_\eta).$$

De modo que, podemos definir um campo local de vetores diferenciáveis normais a  $\Sigma^2$  pela expressão  $\mathbf{H} := H\eta$ . Além disso,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{A}_\eta)\eta = \frac{1}{2} \sum_j \langle \mathcal{A}_\eta e_j, e_j \rangle \eta = \frac{1}{2} \sum_j \langle \alpha(e_j, e_j), \eta \rangle \eta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \alpha(e_j, e_j),$$

em que  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$ . Segue que  $2\mathbf{H} = \text{tr}(\alpha)$ . Dizemos que  $\mathbf{H}$  é o vetor curvatura média da imersão  $\varphi$ . Observemos que, se  $\Sigma^2$  é orientável podemos definir  $\mathbf{H}$  globalmente.

**Definição 2.20.** Dizemos que uma imersão isométrica  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é mínima em  $p \in \Sigma^2$  quando  $\mathbf{H}(p) = 0$  e que  $\varphi$  é uma imersão mínima quando é mínima em todos os pontos de  $\Sigma^2$ .

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Gauss, o qual estabelece que o cálculo das curvaturas seccionais depende exclusivamente da segunda forma fundamental de uma imersão isométrica. Como é usual aqui, apresentaremos apenas o caso de imersões isométricas  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$ , sendo o caso geral tratado de maneira análoga.

**Teorema 2.21 (Gauss).** *Seja  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  uma imersão isométrica. Sejam  $p \in \Sigma^2$  e  $x, y$  vetores ortonormais de  $T_p\Sigma$ . Então,*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2, \quad (2.18)$$

ou equivalentemente

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \mathcal{A}_\eta x, x \rangle \langle \mathcal{A}_\eta y, y \rangle - \langle \mathcal{A}_\eta x, y \rangle^2 = \det \mathcal{A}_\eta \quad (2.19)$$

onde,  $K(x, y) = K_{\Sigma^2}(p)$  é a curvatura gaussiana de  $\Sigma^2$  em  $p$  e  $\bar{K}(x, y) = \bar{K}_p(\sigma)$  é a curvatura seccional de  $\sigma = T_p\Sigma \subset T_pM$  calculada por meio do tensor curvatura de Riemann de  $M^3$ .

*Demonstração.* Sejam  $X, Y$  extensões locais ortogonais de  $x, y$ , e tangentes a  $\Sigma^2$ , respectivamente. Sejam  $\bar{X}, \bar{Y}$  extensões locais de  $X, Y$  a  $M^3$ . Então

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}), Y \rangle(p) + \langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p).$$

Observe inicialmente que o último termo se anula, pois

$$\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle(p) = -\langle (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X})^\perp, Y \rangle(p) = 0.$$

Além disso, temos

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{X} = \bar{\nabla}_Y (\langle \alpha(X, X), \eta \rangle \eta + \nabla_X X) = \langle \alpha(X, X), \eta \rangle \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{Y} \langle \alpha(X, X), \eta \rangle \eta + \bar{\nabla}_Y \nabla_X X.$$

Logo, em  $p$ , temos

$$\langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{X}, Y \rangle = \langle \alpha(x, x), \eta \rangle \langle \bar{\nabla}_Y \eta, Y \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Assim, por (2.16) e (2.17), a equação anterior se torna

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{X}, Y \rangle &= -\langle \alpha(x, x), \eta \rangle \langle \alpha(y, y), \eta \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle \\ &= -\langle \alpha(x, x), \langle \alpha(y, y), \eta \rangle \eta \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle \\ &= -\langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Analogamente, em  $p$ , também temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \bar{X}, Y \rangle &= -\langle \alpha(x, y), \eta \rangle \langle \alpha(x, y), \eta \rangle + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \\ &= -\langle \alpha(x, y), \langle \alpha(x, y), \eta \rangle \eta \rangle + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \\ &= -\langle \alpha(x, y), \alpha(x, y) \rangle + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle \\ &= -|\alpha(x, y)|^2 + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando (2.20) e (2.21), obteremos (2.18). Usando (2.17) a equação (2.18) é equivalente a

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \mathcal{A}_\eta x, x \rangle \langle \mathcal{A}_\eta y, y \rangle - \langle \mathcal{A}_\eta x, y \rangle^2 = \det \mathcal{A}_\eta. \quad \square$$

**Observação 2.22.** Observe que a equação de Gauss continua válida para uma base arbitrária  $\{x, y\}$  de  $T_p \Sigma$ , pois o determinante de um operador linear é invariante por mudança de base. Além disso, a equação (2.19) fica simplificada ao considerar uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p \Sigma$  que diagonaliza  $\mathcal{A}_\eta$ , de modo que  $\mathcal{A}_\eta e_i = \lambda_i e_i$ . Neste caso, vale a *equação de Gauss* a saber:

$$K(e_1, e_2) - \bar{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2. \quad (2.22)$$

**Definição 2.23.** Uma imersão isométrica  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é *geodésica* em  $p \in \Sigma^2$  se a segunda forma fundamental  $\alpha$  de  $\Sigma^2$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $\varphi$  é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo  $p \in \Sigma^2$ . A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

**Proposição 2.24.** Uma imersão isométrica  $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$  é geodésica em  $p \in \Sigma^2$  se, e somente se, toda geodésica  $\gamma$  de  $\Sigma^2$  partindo de  $p$  é geodésica de  $M^3$  em  $p$ .

*Demonstração.* Sejam  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = x$ . Sejam  $\eta$  uma extensão local, normal a  $\Sigma^2$ , de um vetor

normal  $n$  em  $p$  e  $X$  uma extensão local, tangente a  $\Sigma^2$ , de  $\gamma'(t)$ . Como  $\langle X, \eta \rangle = 0$ , obteremos em  $p$ ,

$$\alpha(x, x) = \langle \mathcal{A}_\eta x, x \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \eta, X \rangle = -X \langle \eta, X \rangle + \langle \eta, \bar{\nabla}_X X \rangle = \langle \eta, \bar{\nabla}_X X \rangle.$$

Como  $\alpha$  é simétrica, segue que  $\varphi$  é geodésica em  $p$  se, e somente se, para todo  $x \in T_p \Sigma$ , a geodésica  $\gamma$  de  $\Sigma^2$  que é tangente a  $x$  em  $p$  satisfaz à condição:  $\bar{\nabla}_X X(p)$  não tem componente normal. Portanto,  $\varphi$  é geodésica em  $p$  se, e somente se, toda geodésica  $\gamma$  de  $\Sigma^2$  partindo de  $p$  é geodésica de  $M^3$  em  $p$ .  $\square$

Para o caso particular, em que  $M^3 = \mathbb{R}^3$ , cabe considerar a seguinte definição:

**Definição 2.25.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular com uma orientação  $N$ . Então, a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . A aplicação

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

que associa cada ponto  $p$  com o vetor normal  $N(p)$ , é chamada a *aplicação normal de Gauss*.

Note que  $T_p S$  e  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  são paralelos, logo podemos identificá-los e então  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ . Além disso, sendo  $\bar{\nabla}$  a conexão riemanniana de  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$dN_p \cdot X = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^\top = -\mathcal{A}_N X, \quad (2.23)$$

onde  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ , é uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X$ . Portanto,

$$\mathcal{A}_N(p) = -dN_p, \text{ para todo } p \in S. \quad (2.24)$$

**Exemplo 2.26.** Dado  $r > 0$ , considere  $\mathbb{S}^2(r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$  a esfera centrada na origem e de raio  $r$ , orientada pelo seu normal exterior  $N$ , onde  $N : \mathbb{S}^2(r) \rightarrow \mathbb{S}^2$  é dado por  $N(p) = \frac{\vec{p}}{r}$ , sendo  $\vec{p}$  o vetor posição em  $\mathbb{S}^2(r)$ . Considerando em  $\mathbb{S}^2(r)$  a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ , teremos que a aplicação inclusão  $i : \mathbb{S}^2(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão isométrica. Em particular,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r}$  são os autovalores de  $\mathcal{A}_N(p)$ . Logo, pela equação (2.22), tem-se

$$K_{\mathbb{S}^2(r)}(p) = K(e_1, e_2) - \bar{K}(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{r^2}.$$

Note que na equação anterior utilizamos que  $\bar{K}(e_1, e_2) = 0$ .

**Exemplo 2.27** (Toro de Clifford). Seja  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

Note que  $\mathbf{x}$  é diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis. Além disso, por (1.2)

$$d\mathbf{x}|_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Então,  $d\mathbf{x}$  é injetiva. De fato,

$$d\mathbf{x}|_{(u,v)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x \sin u, x \cos u, -y \sin v, y \cos v) = (0, 0, 0, 0)$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} -x \sin u = 0, \\ x \cos u = 0, \\ -y \sin v = 0, \\ y \cos v = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$x^2 \sin^2 u + x^2 \cos^2 u + y^2 \sin^2 v + y^2 \cos^2 v = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Portanto,  $d\mathbf{x}|_{(u,v)}$  é uma imersão para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Note ainda que  $S := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{S}^3$ , pois  $\frac{1}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u + \sin^2 v + \cos^2 v) = 1$ . Por (2.25), temos que os vetores  $\mathbf{x}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin u, \cos u, 0, 0)$  e  $\mathbf{x}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\sin v, \cos v)$  formam uma base de  $T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ . Para encontrar um campo de vetores  $\eta$  normais e unitários a  $S$  precisamos resolver a equação:

$$\langle \eta, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \eta, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \text{ para algum } \eta \in T_{\mathbf{x}(u,v)}\mathbb{S}^3.$$

Donde,  $\eta(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v)$ . Note também que a matriz da métrica induzida é dada por:

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2}, \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g_{12} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = g_{21} = 0.$$

Assim,  $e_1 = \sqrt{2}\mathbf{x}_u$  e  $e_2 = \sqrt{2}\mathbf{x}_v$  formam uma base ortonormal de  $T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ . Sejam  $\bar{\nabla}$  e  $\tilde{\nabla}$  as conexões riemannianas de  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ , respectivamente. Então, por (2.15) e pela definição da segunda forma



fundamental  $\alpha$ , tem-se

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \bar{\nabla}_X \eta + (\tilde{\nabla}_X \eta)^{\perp_{\mathbb{S}^3}} \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3).$$

Logo, por (2.16)

$$\langle \mathcal{A}_\eta e_i, e_j \rangle = \langle -\tilde{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle = \langle -\tilde{\nabla}_{e_i} \eta + (\tilde{\nabla}_{e_i} \eta)^{\perp_{\mathbb{S}^3}}, e_j \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle.$$

Além disso, usando (2.1) e o fato dos  $\Gamma_{ij}^k$  de  $\tilde{\nabla}$  serem nulos, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} \eta &= \sqrt{2} \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_u} \eta = \sqrt{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta(u+t, v) = -e_1 \\ \tilde{\nabla}_{e_2} \eta &= \sqrt{2} \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_v} \eta = \sqrt{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta(u, v+t) = e_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \mathcal{A}_\eta e_1, e_1 \rangle = 1, \langle \mathcal{A}_\eta e_2, e_2 \rangle = -1 \text{ e } \langle \mathcal{A}_\eta e_1, e_2 \rangle = \langle \mathcal{A}_\eta e_2, e_1 \rangle = 0.$$

Assim, a matriz de  $\mathcal{A}_\eta$  na base  $\{e_1, e_2\}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, pela equação (2.22),  $K(e_1, e_2) - 1 = -1$ . Consequentemente,  $K \equiv 0$ .

**Exemplo 2.28** (Gráficos). Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, considere  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  a parametrização natural do gráfico  $G_f$ . Então, por (1.2)

$$d\mathbf{x}|_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Além disso,  $\mathbf{x}_x = (1, 0, f_x)$  e  $\mathbf{x}_y = (0, 1, f_y)$  formam uma base de  $T_{\mathbf{x}(x,y)} G_f$ . Calculando o produto vetorial  $\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_y$  e normalizando o vetor encontrado, obtemos

$$\eta(x, y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}.$$

Note também que a matriz da métrica induzida é dada por

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = f_x f_y = \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_x \rangle = g_{21} \quad \text{e} \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_y \rangle = 1 + f_y^2$$

Assim,  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} \mathbf{x}_x$  e  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+f_y^2}} \mathbf{x}_y$  formam uma base ortonormal de  $T_{\mathbf{x}(x,y)} G_f$ . Procedendo como no Exemplo 2.27, tem-se  $\langle \mathcal{A}_\eta \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = \langle -\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \eta, \mathbf{x}_y \rangle = \langle \eta, \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \mathbf{x}_y \rangle$ , analogamente para os outros casos.

Note também que

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \mathbf{x}_x = (0, 0, f_{xx}), \quad \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \mathbf{x}_y = (0, 0, f_{yx}), \quad \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_y} \mathbf{x}_x = (0, 0, f_{xy}), \quad \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_y} \mathbf{x}_y = (0, 0, f_{yy}).$$

Assim, a matriz de  $\mathcal{A}_\eta$  na base  $\{\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y\}$  é dada por

$$(g_{ij})^{-1} \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A}_\eta \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle & \langle \mathcal{A}_\eta \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle \\ \langle \mathcal{A}_\eta \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_x \rangle & \langle \mathcal{A}_\eta \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_y \rangle \end{bmatrix},$$

onde

$$(g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos

$$\frac{1}{1 + \|\nabla f\|^2} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix},$$

e pela equação (2.19)

$$K(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y) = \frac{1}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2). \quad (2.27)$$

Em comparação com a teoria clássica de superfícies regulares (ver M.P.do Carmo [2]), a curvatura gaussiana em (2.27) é usualmente calculada por meio dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, como segue:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{1}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2), \quad (2.28)$$

onde os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle = 1 + f_x^2, \quad G = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = f_x f_y \quad \text{e} \quad F = \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_y \rangle = 1 + f_y^2$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = \langle \eta, \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \mathbf{x}_x \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \quad f = \langle \eta, \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \mathbf{x}_y \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \quad \text{e} \quad g = \langle \eta, \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_y} \mathbf{x}_y \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}.$$

Aproveitamos para relembrar que a curvatura média de uma superfície regular pode ser calculada em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, como segue

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + \|\nabla f\|^2)^{3/2}}. \quad (2.29)$$

## CAPÍTULO 3

---

# Superfícies mínimas

---

O texto deste capítulo teve como base *J.L.M. Barbosa; A.G. Colares* [1] e uma parte de *M. Spivak* [10].

### 3.1 Uma discussão preliminar

De modo geral, admite-se que as investigações sobre superfícies mínimas tenham começado com Lagrange em 1760. Ele considerou superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que são gráficos de funções  $\mathcal{C}^2$ -diferenciáveis do tipo  $z = f(x, y)$ . Para tais superfícies, o elemento de área é dado por

$$dA = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dx \wedge dy. \quad (3.1)$$

Como no capítulo anterior, seja  $\mathbf{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  a parametrização do gráfico de  $f$  com base associada  $\mathbf{X}_x = (1, 0, f_x)$  e  $\mathbf{X}_y = (0, 1, f_y)$ . Assim,

$$g_{11} = \langle \mathbf{X}_x, \mathbf{X}_x \rangle = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y \rangle = f_x f_y = \langle \mathbf{X}_y, \mathbf{X}_x \rangle = g_{21} \quad \text{e} \quad g_{22} = \langle \mathbf{X}_y, \mathbf{X}_y \rangle = 1 + f_y^2$$

donde

$$\det(g_{ij}) = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

Logo, como em (1.9) o elemento de área é dado por (3.1).

Lagrange estudou o problema de determinar uma superfície desse tipo com menor área possível entre todas as superfícies que assumem valores dados na fronteira de um conjunto aberto  $U$  do plano (com fecho compacto e fronteira suave).

Se  $z = f(x, y)$  representa uma solução para esse problema, consideremos uma família de funções à 1-parâmetro  $z_t(x, y) = f(x, y) + t\eta(x, y)$ , onde  $\eta$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  que se anula na fronteira

de  $U$ , e definimos  $A(t) = \int_{\bar{U}} \left(1 + (z_t)_x^2 + (z_t)_y^2\right)^{1/2} dx dy$ . Segue-se que

$$A(t) = \int_{\bar{U}} \left( (1 + f_x^2 + f_y^2) + 2t(f_x \eta_x + f_y \eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) \right)^{1/2} dx dy. \quad (3.2)$$

Defina  $p = f_x$ ,  $q = f_y$  e  $w = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ . Usando a regra da cadeia, a equação (3.2) fornece

$$A'(0) = \int_{\bar{U}} \left( \frac{p}{w} \eta_x + \frac{q}{w} \eta_y \right) dx dy.$$

Integrando por partes e observando que  $\eta|_{\partial \bar{U}} = 0$ , obtemos

$$A'(0) = - \int_{\bar{U}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) \right) \eta dx dy.$$

Como  $z = f(x, y)$  representa uma solução para o problema, então  $A(0)$  é um mínimo para a função  $A(t)$  e, portanto,  $A'(0) = 0$ . Isso ocorre para qualquer função  $\eta$  escolhida sob a única restrição de que  $\eta$  se anule na fronteira de  $U$ . Segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{w} \right) = 0.$$

Calculando as derivadas indicadas, obtemos

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0. \quad (3.3)$$

Esta equação fornece a condição necessária para resolver o problema proposto por Lagrange. As soluções da equação acima foram chamadas de “superfícies mínimas” e são dadas por funções analíticas reais.

Lagrange observou que uma função linear (cujo gráfico é um plano) é claramente uma solução para (3.3) e conjecturou a existência de soluções contendo qualquer curva dada como um gráfico ao longo da fronteira de  $U$ . Foi somente em 1776 que Meusnier deu uma interpretação geométrica para (3.3) significando que

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  representam as curvaturas principais introduzidas anteriormente por Euler. Além disso, Meusnier também tentou encontrar soluções para (3.3) dotadas de propriedades especiais. Por exemplo, ele determinou as soluções de (3.3) cujas curvas de nível eram linhas retas, da seguinte forma.

Observe, inicialmente, que quando uma curva é dada implicitamente pela equação  $f(x, y) = c$  sua

curvatura  $\kappa$  pode ser calculada em termos de  $f$  e suas derivadas parciais, como segue

$$\kappa = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{\|\nabla f\|^3}. \quad (3.4)$$

De fato, Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  tal que  $f(x(s), y(s)) = c$ , i.e.,  $\alpha(s)$  é uma curva de nível do gráfico de  $f$ . Assuma que  $\nabla f \neq O$ . Neste caso,  $c$  é um valor regular, logo podemos assumir que  $s$  é o comprimento de arco (ver, por exemplo, Teorema 1 p.15 em R.F. Lima[7]). Note agora que  $f(x(s), y(s)) = c$  implica  $f_x x' + f_y y' = 0$  o que é equivalente a

$$\langle \alpha'(s), \nabla f \rangle = 0.$$

Seja  $\left\{ T(s) = \alpha'(s), N(s) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(\alpha(s)) \right\}$  o diedro de Frenet de  $\alpha(s)$ . (Para mais detalhes ver R.F.

Lima [7]). Então  $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$  implica  $\kappa(s) = \frac{f_x x'' + f_y y''}{\|\nabla f\|}$ , assim

$$\boxed{f_x x'' + f_y y'' = \kappa(s) \|\nabla f\|}. \quad (3.5)$$

Por outro lado,  $f_x = f_x(x(s), y(s))$  e  $f_y = f_y(x(s), y(s))$ , de modo que  $\frac{d}{ds}f_x = f_{xx}x' + f_{xy}y'$  e  $\frac{d}{ds}f_y = f_{yx}x' + f_{yy}y'$ . Assim, derivando em  $s$  a equação  $f_x x' + f_y y' = 0$ , obtemos

$$(f_{xx}x' + f_{xy}y')x' + f_x x'' + (f_{yx}x' + f_{yy}y')y' + f_y y'' = 0.$$

Usando que  $x' = -\frac{f_y}{f_x}y'$  na equação anterior, a identidade (3.5) torna-se

$$\begin{aligned} \kappa(s) \|\nabla f\| &= (f_{xx}x' + f_{xy}y') \frac{f_y}{f_x} y' - (f_{yx}x' + f_{yy}y') y' \\ &= -\frac{f_y^2}{f_x^2} f_{xx} (y')^2 + f_{xy} \frac{f_y}{f_x} (y')^2 + f_{yx} (y')^2 \frac{f_y}{f_x} - f_{yy} (y')^2. \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\boxed{(x')^2 + (y')^2 = 1 \implies \frac{f_y^2}{f_x^2} (y')^2 + (y')^2 = 1 \implies (y')^2 \left( \frac{f_y^2}{f_x^2} + 1 \right) = 1 \implies (y')^2 = \frac{f_x^2}{\|\nabla f\|^2}}.$$

Assim,

$$\kappa(s) \|\nabla f\| = -\frac{f_y^2}{f_x^2} f_{xx} \frac{f_x^2}{\|\nabla f\|^2} + 2f_{xy} \frac{f_y}{f_x} \frac{f_x^2}{\|\nabla f\|^2} - f_{yy} \frac{f_x^2}{\|\nabla f\|^2}.$$

Portanto,

$$\kappa(s) = \frac{-f_{xx}f_y^2 + 2f_xf_yf_{xy} - f_{yy}f_x^2}{\|\nabla f\|^3},$$

o que prova (3.4). Assim, é possível reescrever a equação (3.3) como

$$f_{xx} + f_{yy} = \kappa \|\nabla f\|^3.$$

Se as curvas de nível de  $f$  são retas, então  $\kappa \equiv 0$ , e  $f$  é uma função harmônica; isto é,  $f$  satisfaz a equação

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (3.6)$$

É conhecido que as únicas funções harmônicas em  $\mathbb{R}^2$  que tem retas como curvas de nível, são dadas por

$$f(x, y) = A \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} + B,$$

onde  $A, B, x_0$  e  $y_0$  são constantes. Verifica-se que o gráfico de tais funções é ou um plano ou uma parte de um *helicóide* dado por

$$\begin{cases} x - x_0 = u \cos v \\ y - y_0 = u \sin v \\ z - B = Av. \end{cases}$$

Meusnier também encontrou o catenoide como a única superfície mínima de revolução em  $\mathbb{R}^3$ .

Em 1835, Scherk descobriu outro exemplo de superfície mínima, resolvendo a equação (3.3) para funções do tipo  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ . Nesse caso, a equação (3.3) reduz-se a

$$\left(1 + h'(y)^2\right) g''(x) + \left(1 + g'(x)^2\right) h''(y) = 0,$$

o que é equivalente a

$$-\frac{g''(x)}{1 + g'(x)^2} = \frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2}.$$

Como  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, cada lado dessa equação é constante. Se  $a$  é esse valor constante, obtém-se

$$g(x) = \frac{1}{a} \log \cos ax, \quad h(y) = -\frac{1}{a} \log \cos ay,$$

e, portanto,

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos ax}{\cos ay} \right).$$

O gráfico de  $f$  é conhecido como *superfície mínima de Scherk*.

Scherk também tentou, sem sucesso, determinar todas as superfícies regradas mínimas; isto é, aquelas superfícies mínimas que contêm uma linha reta passando por cada um de seus pontos. Esse problema foi finalmente resolvido por Catalan em 1842, que provou que o *helicóide* é a única superfície regrada mínima em  $\mathbb{R}^3$ .

A primeira solução geral para a equação da superfície mínima foi dada por Weierstrass em 1866, o

que permitiu a construção de exemplos de superfícies mínimas a partir da escolha de duas funções holomorfas. É uma consequência direta dessa construção que as superfícies mínimas possuem funções coordenadas analíticas reais.

**Definição 3.1.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular orientável, com *curvatura gaussiana*  $K$  e elemento de área  $dA$ . Dizemos que a curvatura total de  $S$  é dada por

$$\int_S K dA,$$

quando essa integral está bem definida. A curvatura total absoluta de  $S$  é definida por

$$\int_S |K| dA.$$

Quando

$$\int_S |K| dA < \infty,$$

dizemos que  $S$  possui curvatura total absoluta finita.

### 3.1.1 Catenoide

O *catenoide* é uma superfície de revolução  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ , obtida pela rotação da curva

$$\alpha(x) = \left( x, a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \right),$$

para  $x \in \mathbb{R}$ , em torno do eixo  $x$ , onde  $a$  é constante positiva e  $b$  é qualquer número real. Tal superfície é mínima e completa. Sua *curvatura gaussiana* é  $K = -\frac{1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{x}{a} + b\right)}$  e sua curvatura total é

$$\int_S K dA = -4\pi.$$

De fato, consideramos o caso mais geral da rotação da curva  $\alpha(x) = (x, y(x), 0)$ ,  $y(x) > 0$  em torno do eixo  $x$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donde, obtemos  $\mathbf{x}(x, v) = (x, y(x) \cos(v), y(x) \sin(v))$ . Então,  $\mathbf{x}_x = (1, y'(x) \cos(v), y'(x) \sin(v))$  e  $\mathbf{x}_v = (0, -y(x) \sin(v), y(x) \cos(v))$  formam uma base de  $T_{\mathbf{x}(x, v)} S$ . Calculando o produto vetorial  $\mathbf{x}_x \wedge \mathbf{x}_v$  e normalizando o vetor encontrado, obtemos

$$\eta(x, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} (y', -\cos v, -\sin v)$$

Note também que a matriz da métrica induzida é dada por

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle = 1 + (y')^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_v \rangle = 0 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_x \rangle = g_{21} \quad \text{e} \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = y^2$$

Temos que,  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \mathbf{x}_x$  e  $e_2 = \frac{1}{y} \mathbf{x}_v$  formam uma base ortonormal de  $T_{\mathbf{x}(x,v)}S$ . Procedendo como no Exemplo 2.27, tem-se

$$\tilde{\nabla}_{e_1} \eta = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_x} \eta = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \left( \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} + (y')^2 y'' (1+(y')^2)^{-3/2}, -y' y'' (1+(y')^2)^{-3/2} \cos v, -y' y'' (1+(y')^2)^{-3/2} \sin v \right).$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_\eta e_1, e_1 \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_{e_1} \eta, e_1 \rangle = -\frac{1}{1+(y')^2} \left( \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} + (y')^2 y'' (1+(y')^2)^{-3/2} + \right. \\ &\quad \left. - (y')^2 y'' (1+(y')^2)^{-3/2} \cos^2 v + \right. \\ &\quad \left. - (y')^2 y'' (1+(y')^2)^{-3/2} \sin^2 v \right) \\ &= -\frac{1}{1+(y')^2} \cdot \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \left( \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = -\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\langle \mathcal{A}_\eta e_2, e_2 \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_{e_2} \eta, e_2 \rangle = \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \langle \mathcal{A}_\eta e_1, e_2 \rangle = 0.$$

Assim, a matriz de  $\mathcal{A}_\eta$  na base  $\{e_1, e_2\}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} -\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} \end{bmatrix}.$$

Pela equação (2.19),

$$K = \det \mathcal{A}_\eta = \frac{-y''}{y(1+(y')^2)^2}.$$

Logo, como em (1.9), segue que

$$K dA = -\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} dx \wedge dv.$$



Em particular, para  $y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)$ , temos

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a} + b\right) \text{ e } y'' = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

Daí,

$$K = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{(1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a} + b\right))^2} = \frac{-1}{a^2 \cosh^4\left(\frac{x}{a} + b\right)}$$

e

$$K dA = -\frac{1}{a} \frac{\cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)}{\cosh^3\left(\frac{x}{a} + b\right)} dx \wedge dv = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{a} + b\right) dx \wedge dv.$$

Assim, por integração a sua curvatura total resulta em

$$\int_S K dA = -4\pi.$$

**Teorema 3.2.** *Qualquer superfície mínima de revolução em  $\mathbb{R}^3$  é, a menos de movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , parte de um catenoide ou parte de um plano.*

*Demonstração.* Por meio de um movimento rígido, podemos supor que a superfície em  $\mathbb{R}^3$  é tal que seu eixo de rotação coincide com o eixo  $x$ . A superfície será então gerada por uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ .

Se a função  $x(t)$  é constante, então a superfície será um subconjunto de um plano ortogonal ao eixo  $x$ . Caso contrário, existe um ponto  $t_0$  tal que  $x'(t) \neq 0$  em uma vizinhança de  $t_0$ . Além disso, podemos representar  $\alpha$  por  $(x, y(x), 0)$  em uma vizinhança do ponto  $\alpha(t_0)$ . A parte da superfície obtida pela rotação em torno do eixo  $x$  desse trecho de curva pode ser parametrizada como segue

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donde,

$$\mathbf{x}(x, v) = (x, y(x) \cos(v), y(x) \sin(v)).$$

Então,

$$2H = \operatorname{tr} \mathcal{A} = \frac{y}{y} \left( \frac{-y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{y(1 + (y')^2)^{1/2}} \cdot \frac{(1 + (y')^2)}{(1 + (y')^2)} = \frac{-y''y + 1 + (y')^2}{y(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Ou seja,  $H = 0$  é equivalente a

$$-yy'' + 1 + (y')^2 = 0. \quad (3.7)$$

Essa equação pode ser integrada usando a transformação  $\frac{dy}{dx} = p$ , da qual resulta que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Substituindo isso na equação (3.7), obtemos

$$-yp \frac{dp}{dy} + 1 + p^2 = 0,$$

que por integração, obtém-se

$$y = a\sqrt{1 + p^2}.$$

Uma segunda integração fornece agora

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{x}{a} + b.$$

Portanto,

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

Como as superfícies mínimas são analíticas reais, também o é  $\alpha$ . Segue-se que a curva  $\alpha$  deve coincidir em todo lugar com o gráfico da função  $y(x)$  acima. Assim, o teorema está provado.  $\square$

### 3.1.2 Helicoide

O helicoide pode ser descrito pela rotação de uma curva em torno do eixo  $z$ , que gera a aplicação  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , como segue

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos(av), u \sin(av), bv),$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes não nulas.

Geometricamente, o helicoide é gerado por um movimento helicoidal de  $\mathbb{R}^3$ , atuando sobre uma linha reta paralela ao plano de rotação do movimento. O helicoide é uma superfície mínima completa (ver M.P. do Carmo [2] para mais detalhes).

Usando um cálculo análogo ao do catenoide, obtemos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais para provar que sua *curvatura gaussiana e média* (ver (2.28) e (2.29)) são dadas, respectivamente, por

$$K = \frac{-a^2 b^2}{(b^2 + a^2 u^2)^2} \quad \text{e} \quad H = 0.$$

Além disso, a sua curvatura total não é finita, de fato

$$\int_S K dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-a^2 b^2}{(a^2 u^2 + b^2)^{3/2}} du dv.$$

Primeiro calculamos a integral em  $u$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{a^2 b^2}{(a^2 u^2 + b^2)^{3/2}} du = -a^2 b^2 \cdot \frac{2}{|a| b^2}.$$

Portanto,

$$\int_S K dA = \int_{-\infty}^{+\infty} -2|a| dv.$$

Assim,

$$\int_S K dA = -\infty.$$

Portanto, o helicoide completo possui curvatura total infinita negativa.

Como  $K < 0$ , a sua curvatura total absoluta é

$$\int_S |K| dA = +\infty.$$

O helicoide é também um exemplo de superfície regrada, isto é, uma superfície descrita geometricamente por uma linha reta deslizando suavemente ao longo de uma curva. Para uma definição precisa, veja *M. P. do Carmo* [3].

**Lema 3.3.** *Considere uma parametrização regular de uma superfície regrada*

$$\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s), \quad (s, t) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$$

satisfazendo

$$\|\beta(s)\| = 1 \quad e \quad \langle \alpha'(s), \beta(s) \rangle = 0.$$

Então  $\Sigma^2 = \mathbf{x}(U)$  é uma superfície mínima se, e somente se,

$$\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + t \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + t \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle + t^2 \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0.$$

*Demonstração.* As derivadas da parametrização são

$$\mathbf{x}_s = \alpha' + t\beta', \quad \mathbf{x}_t = \beta, \quad \mathbf{x}_{ss} = \alpha'' + t\beta'', \quad \mathbf{x}_{st} = \beta' \quad e \quad \mathbf{x}_{tt} = 0.$$

Como  $\|\beta\| = 1$ , temos

$$\langle \beta', \beta \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\beta\|^2 = 0.$$

Logo, os coeficientes  $F$  e  $G$  da primeira forma fundamental satisfazem

$$F = \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle + t \langle \beta', \beta \rangle = 0 \quad e \quad G = \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle = 1.$$

Além disso, como  $\mathbf{x}_{tt} = 0$ , o coeficiente  $g$  da segunda forma fundamental é nulo. Portanto, por (2.29), tem-se

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{e}{2E}.$$

Como a parametrização é regular,  $E > 0$ . Assim,  $H = 0$  se, e somente se,  $e = 0$ .

Se

$$N = \frac{\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t\|},$$

então

$$e = \langle \mathbf{x}_{ss}, N \rangle.$$

A regularidade implica  $\|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t\| > 0$ ; logo,  $e = 0$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{ss} \rangle = 0$ . Agora,

$$\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_t = \alpha' \wedge \beta + t(\beta' \wedge \beta) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{ss} = \alpha'' + t\beta''.$$

Substituindo e expandindo o produto interno, obtemos

$$\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + t \langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + t \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle + t^2 \langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0.$$

Portanto, a igualdade acima é equivalente a  $H = 0$ . □

**Teorema 3.4.** *Qualquer superfície regrada mínima em  $\mathbb{R}^3$  é, localmente e a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um helicóide.*

*Demonstração.* Considere uma parametrização regrada regular

$$\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s), \tag{3.8}$$

normalizada de modo que

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \quad \|\beta(s)\| = 1, \quad \langle \alpha'(s), \beta(s) \rangle = 0.$$

Pelo Lema 3.3, para cada  $s$  fixado temos um polinômio em  $t$  identicamente nulo. Portanto,

$$\langle \alpha' \wedge \beta, \alpha'' \rangle = 0, \tag{3.9}$$

$$\langle \beta' \wedge \beta, \alpha'' \rangle + \langle \alpha' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0, \tag{3.10}$$

$$\langle \beta' \wedge \beta, \beta'' \rangle = 0. \tag{3.11}$$

Defina

$$T = \alpha' \quad \text{e} \quad \nu = T \wedge \beta.$$

Então  $\{T, \beta, \nu\}$  é um referencial ortonormal. A equação (3.9) mostra que  $T' = \alpha''$  pertence ao plano

gerado por  $T$  e  $\beta$ . Como  $\|T\| = 1$ , temos  $\langle T', T \rangle = 0$ . Logo, existe uma função  $\zeta$  tal que

$$T' = \alpha'' = \zeta \beta. \quad (3.12)$$

Como  $\beta' \perp \beta$ , existem funções  $a$  e  $q$  tais que

$$\beta' = aT + qv.$$

Derivando  $\langle T, \beta \rangle = 0$  e usando (3.12), obtemos  $a = -\zeta$ . Assim,

$$\beta' = -\zeta T + qv. \quad (3.13)$$

Derivando  $v = T \wedge \beta$ , segue que

$$v' = -q\beta. \quad (3.14)$$

Consequentemente,

$$\beta'' = -\zeta' T + q'v - (\kappa^2 + q^2)\beta. \quad (3.15)$$

Na equação (3.10), o primeiro termo é nulo porque  $\alpha'' = \zeta \beta$ . Portanto,

$$0 = \langle T \wedge \beta, \beta'' \rangle = \langle v, \beta'' \rangle = q'.$$

Logo,

$$q' = 0. \quad (3.16)$$

Além disso,

$$\beta' \wedge \beta = -\zeta v - qT.$$

Substituindo essa igualdade e (3.15) em (3.11), obtemos

$$q\zeta' - \zeta q' = 0.$$

Como  $q' = 0$ ,

$$q\zeta' = 0. \quad (3.17)$$

Se  $q = 0$ , então (3.14) fornece  $v' = 0$ . Assim,  $v$  é constante e os vetores  $T$  e  $\beta$  pertencem ao plano vetorial fixo  $v^\perp$ . A curva  $\alpha$  e todas as geratrizes estão contidas em um mesmo plano afim. Logo, a superfície é parte de um plano.

Suponha agora que  $q \neq 0$ . Pela equação (3.17), temos  $\zeta' = 0$ . Portanto,  $q$  e  $\zeta$  são constantes. Defina

$$a = \sqrt{\zeta^2 + q^2} > 0.$$

A equação (3.15) reduz-se a

$$\beta'' = -a^2\beta.$$

Após uma rotação de  $\mathbb{R}^3$  e uma mudança da origem de  $s$ , podemos escrever

$$\beta(s) = (\cos(as), \sin(as), 0).$$

Como  $\alpha'' = \zeta\beta$ , uma integração fornece

$$\alpha'(s) = \left( \frac{\zeta}{a} \sin(as), -\frac{\zeta}{a} \cos(as), b \right).$$

As constantes nas duas primeiras coordenadas são nulas pela condição  $\langle \alpha', \beta \rangle = 0$ . Como  $\|\alpha'\| = 1$ ,

$$\frac{\zeta^2}{a^2} + b^2 = 1.$$

Integrando novamente e desprezando uma translação,

$$\alpha(s) = \left( -\frac{\zeta}{a^2} \cos(as), -\frac{\zeta}{a^2} \sin(as), bs \right).$$

Definindo  $A = -\zeta/a^2$ , obtemos  $\alpha(s) = (A \cos(as), A \sin(as), bs)$ .

Substituindo em (3.8),

$$\mathbf{x}(s, t) = ((A + t) \cos(as), (A + t) \sin(as), bs).$$

Com a mudança de variáveis

$$u = A + t, \quad v = s,$$

resulta

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos(av), u \sin(av), bv),$$

que parametriza um helicóide.

Portanto, toda superfície regrada mínima em  $\mathbb{R}^3$  é, localmente e a menos de um movimento rígido, parte de um plano ou parte de um helicóide.  $\square$

## 3.2 A representação de Weierstrass e os exemplos clássicos

### 3.2.1 A representação de Weierstrass

**Definição 3.5.** Um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$  é *simplesmente conexo* se ele é conexo por caminhos e se toda curva fechada contida em  $U$  pode ser deformada, dentro de  $U$ , até um ponto.

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto *simplesmente conexo* e  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ) ou real analítica. A aplicação  $\psi$  descreve uma superfície paramétrica em  $\mathbb{R}^3$ . Se

$$\|\psi_u\| = \|\psi_v\| \quad \text{e} \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0, \quad (3.18)$$

então  $\psi$  é uma *aplicação conforme* (isto é, preserva ângulos), a qual induz em  $U$  a métrica

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

onde  $\lambda = \|\psi_u\| = \|\psi_v\|$ . Dizemos então que  $(u, v)$  são *parâmetros isotérmicos* para a superfície descrita por  $\psi$ .

**Teorema 3.6** (Existência de parâmetros isotérmicos). *Seja  $U$  um conjunto aberto simplesmente conexo e  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 2$  (ou real analítica). Então existe um difeomorfismo  $\phi : U \rightarrow U$  de classe  $\mathcal{C}^k$  (ou real analítica) tal que  $\tilde{\psi} = \psi \circ \phi$  é uma aplicação conforme.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em *M. Spivak* [10].

Seja  $\Sigma^2$  uma superfície (isto é, uma variedade bidimensional de classe  $\mathcal{C}^k$ ). Suponha que  $\Sigma^2$  seja conexa e orientável e que  $\mathbf{x} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  seja uma imersão de classe  $\mathcal{C}^k$ . Pelo teorema anterior, cada ponto  $p \in \Sigma^2$  possui uma vizinhança na qual estão definidos parâmetros isotérmicos  $(u, v)$ . A métrica induzida em  $\Sigma^2$  por  $\mathbf{x}$  será representada, localmente, em termos desses parâmetros, por

$$ds^2 = \lambda^2 \|dz\|^2,$$

onde  $z = u + iv$ . É claro que uma mudança de coordenadas desses parâmetros é uma aplicação conforme.

Como  $\Sigma^2$  é orientável, podemos nos restringir a uma família de parâmetros isotérmicos cujas mudanças de coordenadas preservam a orientação do plano. Em termos da variável  $z = x + iy$ , isso significa que tais mudanças de coordenadas são holomorfas. Uma superfície  $\Sigma^2$ , juntamente com tal família de parâmetros isotérmicos, é chamada de *superfície de Riemann*.

Podemos estender a noção de aplicação holomorfa para tais superfícies da seguinte forma: se  $\Sigma^2$  e  $\tilde{\Sigma}^2$  são superfícies de Riemann, dizemos que  $f : \Sigma^2 \rightarrow \tilde{\Sigma}^2$  é *holomorfa* quando cada uma de suas representações, em termos de parâmetros isotérmicos locais (em  $\Sigma^2$  e em  $\tilde{\Sigma}^2$ ), é uma função holomorfa.

Em uma superfície de Riemann, consideramos localmente os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

A definição desses operadores é tal que, se  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função diferenciável de valores complexos, então

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

A função  $f$  é *holomorfa* se, e somente se,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ; se  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ , dizemos que  $f$  é *anti-holomorfa*.

A expressão de muitas entidades no estudo das superfícies é simplificada quando considerada no contexto das superfícies de Riemann. Por exemplo, o operador de Laplace torna-se

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.19)$$

Outro exemplo é a *curvatura gaussiana* de  $\Sigma^2$ , que é então dada por

$$K = -\Delta \log \lambda.$$

Para uma imersão  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definimos  $\Delta \mathbf{X}$  como a função vetorial  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ . Então,

$$\Delta \mathbf{X} = 2HN, \quad (3.20)$$

onde  $H$  é a curvatura média da imersão e  $N : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  é sua *aplicação de Gauss*.

Para provar esta equação, observamos primeiro que  $\Delta \mathbf{X}$  é normal a  $\Sigma^2$ . De fato, segue-se de (3.18) que

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle, \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0.$$

Derivando, obtemos

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle, \quad \langle \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle - \langle \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_v \rangle = 0.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle = 0.$$

e, a partir disso, conclui-se que  $\Delta \mathbf{X}$  é normal a  $\Sigma^2$ .

Recordemos que, se  $N$  é a *aplicação de Gauss* da imersão  $\mathbf{X}$ , com

$$N_u = a_{11}\mathbf{X}_u + a_{12}\mathbf{X}_v \quad \text{e} \quad N_v = a_{21}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v,$$



então a curvatura média é dada por

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Agora, usando (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda^2 \langle \Delta \mathbf{X}, N \rangle &= \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, N \rangle = -\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle - \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle \\ &= -a_{11} \|\mathbf{X}_u\|^2 - a_{22} \|\mathbf{X}_v\|^2 = -(a_{11} + a_{22}) \lambda^2 = 2H \lambda^2,\end{aligned}$$

provando assim (3.20).

A proposição a seguir é uma consequência imediata de (3.20).

**Proposição 3.7.** *Uma aplicação  $\mathbf{X} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão mínima se, e somente se,  $\mathbf{X}$  for harmônica.*

Defina  $\phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z}$ . De (3.19) temos que  $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right) = \frac{\lambda^2}{4} \Delta \mathbf{X}$ . Logo,

$$\phi \text{ é holomorfa se, e somente se, } \mathbf{X} \text{ for harmônica.} \quad (3.21)$$

Note que  $\phi$  é uma função definida localmente em  $\Sigma^2$ , com valores em  $\mathbb{C}^3$ . De fato, sua imagem está contida numa quádrlica  $Q \subset \mathbb{C}^3$  dada pela equação

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \quad (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3.$$

Para ver isso, observemos que, se  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , então

$$\phi_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right).$$

Por isso,

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) = \frac{1}{4} (\|x_u\|^2 - \|x_v\|^2 - 2i \langle x_u, x_v \rangle) = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0.$$

De modo semelhante, obtemos

$$\|\phi\|^2 = \sum_{k=1}^3 \|\phi_k\|^2 = 2\lambda^2. \quad (3.22)$$

Assim,

$$\|\phi\| > 0.$$

Agora, observemos que temos uma aplicação  $\phi$  definida, em termos de parâmetros isotérmicos, em alguma vizinhança de cada ponto de  $\Sigma^2$ . Se  $z = x + iy$  e  $w = r + is$  são parâmetros isotérmicos ao redor

de algum ponto em  $\Sigma^2$ , então a mudança de coordenadas  $w = w(z)$  é holomorfa, com  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ . Segue-se que  $\tilde{\phi} = \frac{\partial x}{\partial w}$  está relacionada a  $\phi$  por

$$\phi = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \tilde{\phi}.$$

Assim, se considerarmos as formas diferenciais vetoriais  $\alpha = \phi dz$  e  $\tilde{\alpha} = \tilde{\phi} dw$ , temos

$$\alpha = \phi dz = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\alpha}.$$

Isso significa que temos uma forma diferencial vetorial  $\alpha$  definida globalmente em  $M$ , cuja expressão local é

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \text{com} \quad \alpha_k = \phi_k dz, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Isso, juntamente com 3.7 e (3.21), prova o seguinte resultado.

**Proposição 3.8.** *Seja  $\mathbf{x} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão. Então,  $\alpha = \phi dz$  é uma forma holomorfa vetorialmente valorizada em  $\Sigma^2$  se, e somente se,  $\mathbf{x}$  for uma imersão mínima. Além disso,*

$$\mathbf{x} = \text{Re} \left( \int^z \alpha \right),$$

onde a integral é tomada ao longo de qualquer caminho de um ponto fixo até  $z$  em  $\Sigma^2$ .

Quando a parte real da integral de  $\alpha$  ao longo de qualquer caminho fechado é zero, dizemos que  $\alpha$  não tem períodos reais. A inexistência de períodos reais para  $\alpha$  é facilmente vista como equivalente ao fato de que  $\text{Re} \left( \int^z \alpha \right)$  é independente do caminho em  $\Sigma^2$ .

**Teorema 3.9** (Representação de Weierstrass). *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  diferenciais holomorfas em  $\Sigma^2$  tais que*

$$(a) \sum \alpha_k^2 = 0 \quad (\text{i.e., localmente } \alpha_k = \phi_k dz \text{ e } \sum \phi_k^2 = 0);$$

$$(b) \sum \|\alpha_k\|^2 > 0;$$

$$(c) \text{ cada } \alpha_k \text{ não tem períodos reais em } \Sigma^2.$$

Então, a aplicação  $\mathbf{x} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , com  $x_k = \text{Re} \left( \int^z \alpha_k \right)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , é uma imersão mínima.

A condição (c) do teorema é necessária para garantir que  $\text{Re} \left( \int^z \alpha_k \right)$  dependa apenas do ponto final  $z$ . Assim, cada  $x_k$  está bem definida independentemente do caminho de  $p_0$  até  $z$ . É claro que  $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  é holomorfa, e portanto,  $\mathbf{x}$  é harmônica. Logo,  $\mathbf{x}$  é mínima. A condição (b) garante que  $\mathbf{x}$  seja uma imersão.

É possível dar uma descrição simples de todas as soluções da equação  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$  em  $\Sigma^2$ . Para isso, suponhamos que  $\alpha_1 \neq i\alpha_2$ . (Se  $\alpha_1 = i\alpha_2$ , então  $\alpha_3 = 0$ , e a superfície mínima resultante é um plano). Agora definimos uma forma holomorfa  $\omega$  e uma função meromorfa  $g$  por

$$\omega = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad g = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - i\alpha_2}.$$

Localmente, se  $\alpha_k = \phi_k dz$ , então  $\omega = f dz$ , onde  $f$  é uma função holomorfa, e temos

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \\ g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Em termos de  $g$  e  $\omega$ , as formas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(1 - g^2) \omega, \\ \alpha_2 &= \frac{i}{2}(1 + g^2) \omega, \\ \alpha_3 &= g\omega. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto, a imersão mínima  $\mathbf{x}$  do teorema anterior é dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re} \left( \int^z \alpha_1 \right) = \operatorname{Re} \left( \int^z \frac{1}{2} (1 - g^2) \omega \right), \\ x_2 &= \operatorname{Re} \left( \int^z \alpha_2 \right) = \operatorname{Re} \left( \int^z \frac{i}{2} (1 + g^2) \omega \right), \\ x_3 &= \operatorname{Re} \left( \int^z \alpha_3 \right) = \operatorname{Re} \left( \int^z g \omega \right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Se  $z_0$  é um ponto onde  $g$  tem um polo de ordem  $m$ , então, de (3.23), é claro que  $\omega$  deve ter um zero de ordem exatamente  $2m$  em  $z_0$ , a fim de que a condição (b) seja satisfeita e cada  $\alpha_k$  seja holomorfa.

Reciprocamente, suponha que tenhamos definido em  $\Sigma^2$  uma função meromorfa  $g$  e uma forma holomorfa  $\omega$ , cujos zeros coincidam com os polos de  $g$ , de tal modo que cada zero de ordem  $m$  de  $\omega$  corresponda a um polo de ordem  $2m$  de  $g$ . Então, as formas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , definidas como acima, são holomorfas em  $\Sigma^2$  e satisfazem  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$  e

$$\|\phi\|^2 \|dz\|^2 = \sum \|\alpha_k\|^2 = \frac{1}{2}(1 + \|g\|^2)^2 \|\omega\|^2 > 0. \tag{3.25}$$

Além disso, se tais formas  $\alpha_k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) não têm períodos reais, podemos aplicar (3.24) para obter uma imersão mínima  $\mathbf{x} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

As equações (3.24) são chamadas de *fórmulas de representação de Weierstrass para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$* . Essa representação nos permite descrever um grande número de exemplos de

superfícies mínimas. A expressão da métrica obtida “a posteriori” para tal representação é

$$ds^2 = \frac{1}{2} \|f\|^2 (1 + \|g\|^2)^2 \|dz\|^2.$$

A função meromorfa  $g : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que aparece na representação de Weierstrass de uma imersão mínima  $\mathbf{x} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem um significado geométrico importante. Para ver isso, obtenhamos uma expressão para a *aplicação de Gauss*  $N : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  em termos da representação de Weierstrass para  $\mathbf{x}$ . Localmente, em cada ponto de  $\Sigma^2$ ,  $\alpha_k = \phi_k dz$  define as funções  $\phi_k$  e, a partir de (3.24), obtemos então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= -(\operatorname{Re} \phi_1, \operatorname{Re} \phi_2, \operatorname{Re} \phi_3) \wedge (\operatorname{Im} \phi_1, \operatorname{Im} \phi_2, \operatorname{Im} \phi_3) \\ &= -(\operatorname{Im} \phi_2 \bar{\phi}_3, \operatorname{Im} \phi_3 \bar{\phi}_1, \operatorname{Im} \phi_1 \bar{\phi}_2) = \frac{1}{4} \|f\|^2 (1 + \|g\|^2) (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, g^2 - 1). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$N = \left( \frac{2 \operatorname{Re} g}{1 + |g|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Se  $\pi : \mathbb{S}^2(1) \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção estereográfica, então  $\pi \circ N = (\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g)$  em cada ponto de  $\Sigma^2$ , exceto nos polos de  $g$ . Se identificarmos  $\mathbb{R}^2$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$  e estendermos  $\pi$  a uma aplicação  $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ , com  $\pi((0, 0, 1)) = \infty$ , então

$$\tilde{\pi} \circ N = g.$$

Isso significa que a aplicação  $g$  pode ser identificada com a *aplicação de Gauss* de  $\mathbf{x}$ . Um cálculo direto usando (3.6), (3.22) e (3.25) fornece o seguinte valor para a *curvatura gaussiana* de  $\Sigma^2$ :

$$K = - \left[ \frac{4 \|g'\|}{\|f\| (1 + \|g\|^2)^2} \right]^2. \quad (3.26)$$

Como  $g'$  é holomorfa, temos o seguinte corolário de (3.26):

$$\text{Ou } K = 0 \quad \text{ou seus zeros são isolados.}$$

Nas próximas subseções, utilizaremos a representação de Weierstrass para reobter o *helicóide*, o *catenoide* e a *superfície de Scherk*. Teremos também as superfícies de *Enneper* e *Henneberg*.

### 3.2.2 Helicoide

Tome  $\Sigma^2 = \mathbb{C}$ ,  $g(z) = -ie^z$  e  $\omega = e^{-z}dz$ . Observe que nem  $g$  tem polos, nem  $\omega$  tem zeros em  $\mathbb{C}$ . Pela equação (3.23)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\omega = \cosh(z) dz,$$

$$\alpha_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)\omega = -i \sinh(z) dz,$$

$$\alpha_3 = g \omega = -i dz.$$

Como  $\cosh(z)$ ,  $\sinh(z)$  e a multiplicação por uma constante são funções holomorfas em  $\mathbb{C}$ , temos que  $\int_\gamma \alpha_k = 0$ , para todo caminho fechado  $\gamma$  em  $\mathbb{C}$  e  $k = 1, 2, 3$ . Isto é, as formas  $\alpha_k$  não possuem períodos. A partir de (3.24), obtemos

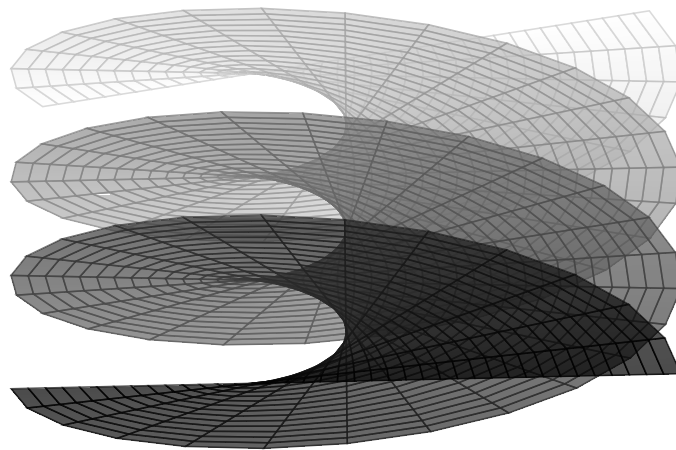
$$x_1 = \operatorname{Re} \left( \int_0^z \cosh(z) dz \right) = \operatorname{Re}(\sinh(z)) = \cos(v) \sinh(u),$$

$$x_2 = \operatorname{Re} \left( \int_0^z -i \sinh(z) dz \right) = \operatorname{Re}(-i \cosh(z) + i) = \sin(v) \sinh(u),$$

$$x_3 = \operatorname{Re} \left( \int_0^z -i dz \right) = \operatorname{Re}(-iz) = v.$$

Assim,  $\mathbf{X}(u, v) = (\cos(v) \sinh(u), \sin(v) \sinh(u), v)$  descreve uma *imersão mínima*.

Figura 3.1. Helicoide.



Fazendo  $\sinh(u) = t$ , a imersão  $\mathbf{X}(t, v)$  é exatamente o *helicoide* descrito anteriormente, cuja representação gráfica é esboçada na Figura 3.1.

### 3.2.3 Catenoide

Tome  $\Sigma^2 = \mathbb{C}$ ,  $g(z) = -e^z$  e  $\omega = -e^{-z} dz$ . Observe que  $g$  não tem polos e  $\omega$  não tem zeros em  $\mathbb{C}$ . De (3.23), temos

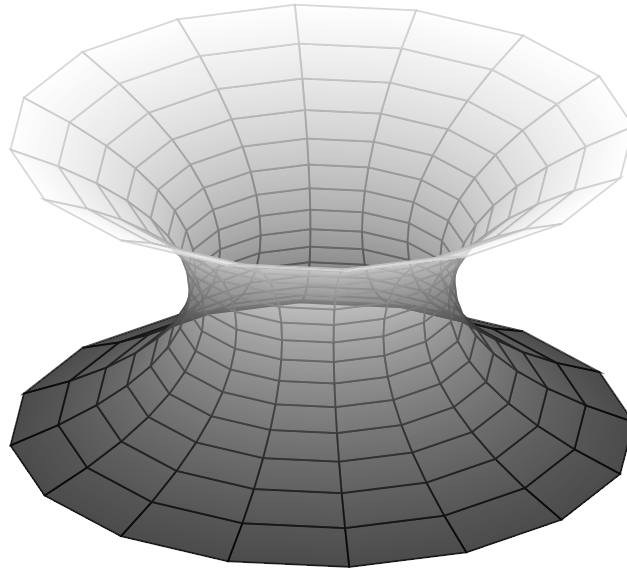
$$\alpha_1 = \sinh(z) dz,$$

$$\alpha_2 = -i \cosh(z) dz,$$

$$\alpha_3 = dz.$$

Como  $\cosh(z)$ ,  $\sinh(z)$  e a multiplicação por uma constante são funções holomorfas em  $\mathbb{C}$ , então  $\oint_\gamma \alpha_k = 0$ , para cada caminho fechado  $\gamma$  em  $\mathbb{C}$  e  $k = 1, 2, 3$ . Logo, as formas  $\alpha_k$  não possuem períodos. A partir de (3.24), obtemos

Figura 3.2. Catenoide.



$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re} \left( \int_0^z \sinh(z) dz \right) = \operatorname{Re}(\cosh(z) - 1) = \cosh(u) \cos(v) - 1, \\ x_2 &= \operatorname{Re} \left( \int_0^z -i \cosh(z) dz \right) = \operatorname{Re}(-i \sinh(z)) = \cosh(u) \sin(v), \\ x_3 &= \operatorname{Re} \left( \int_0^z dz \right) = \operatorname{Re}(z) = u. \end{aligned}$$

Assim,  $\mathbf{x}(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u) - (1, 0, 0)$ . Isto é, até uma translação, a parametrização do *catenoide* descrita anteriormente, cuja representação gráfica é esboçada na Figura 3.2. Tal parametrização cobre o plano  $\mathbb{C}$  ao redor do catenoide infinitas vezes. Outra maneira de obter o

catenoide é a seguinte: tome  $\Sigma^2 = \mathbb{C} - 0$ ,  $g(z) = z$ ,  $\omega = \frac{dz}{z^2}$ . Então,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z^2} - 1 \right) dz, \\ \alpha_2 &= \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z^2} + 1 \right) dz, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{z} dz.\end{aligned}$$

As formas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  não possuem períodos, e  $\alpha_3$  tem apenas um período imaginário puro. Usando (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{u}{2} \left( 1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + 1, \\ x_2 &= -\frac{v}{2} \left( 1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right), \\ x_3 &= \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2).\end{aligned}$$

Essas equações descrevem o *catenoide*, até uma translação. Para ver isso, defina

$$\rho = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2) \quad \text{e} \quad \theta = \left( \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \right) - \pi.$$

### 3.2.4 Superfície de Scherk

Considere o disco unitário  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ . Tome  $\Sigma^2 = D$ ,  $g(z) = z$  e  $\omega = \frac{4dz}{1-z^4}$ . De (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2dz}{1+z^2} = \left( \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i} \right) dz, \\ \alpha_2 &= \frac{2idz}{1-z^2} = \left( \frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1} \right) dz, \\ \alpha_3 &= \frac{4z}{1-z^4} dz = \left( \frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1} \right) dz.\end{aligned}$$

Claramente,  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  não têm períodos em  $D$ . De (3.24) obtemos

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re} \left( i \log \frac{z+i}{z-i} \right) = -\arg \left( \frac{z+i}{z-i} \right), \\ x_2 &= \operatorname{Re} \left( i \log \frac{z+1}{z-1} \right) = -\arg \left( \frac{z+1}{z-1} \right), \\ x_3 &= \operatorname{Re} \left( \log \frac{z^2+1}{z^2-1} \right) = \log \left| \frac{z^2+1}{z^2-1} \right|.\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{z+i}{z-i} \cdot \frac{\overline{(z-i)}}{\overline{(z-i)}} = \frac{|z|^2 - 1}{|z-i|^2} + i \frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2},$$

e

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{\overline{(z-1)}}{\overline{(z-1)}} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} + i \frac{z-\bar{z}}{|z-1|^2}.$$

Como  $|z|^2 - 1 < 1$  em  $D$ , temos que  $-\frac{3\pi}{2} \leq x_j \leq -\frac{\pi}{2}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $z = x_1 + ix_2$ .

Também é imediato, a partir das expressões acima, que

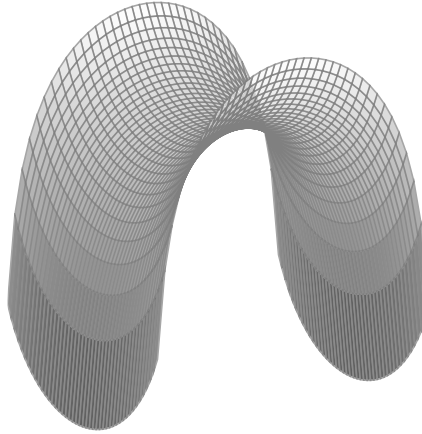
$$\cos x_1 = \frac{|z|^2-1}{|z+1|^2} \quad \text{e} \quad \cos x_2 = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2},$$

o que fornece

$$x_3 = \log \left( \frac{\cos x_2}{\cos x_1} \right),$$

onde  $(x_1, x_2)$  está restrito a  $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \times (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .

Figura 3.3. Superfície de Scherk.



A imersão  $\mathbf{X} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  descreve uma parte da *superfície mínima de Scherk* mencionada na primeira seção. Para obter a superfície completa, consideremos  $g$  e  $\omega$  definidos em  $\Sigma^2 = \mathbb{C} \setminus \{1, -1, i, -i\}$ . Aqui, as formas resultantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  têm períodos reais. Seja então  $\pi : \tilde{M} \rightarrow \Sigma^2$  o recobrimento universal de  $\Sigma^2$  e definamos

$$\tilde{x}_k = \operatorname{Re} \left( \int^z \pi^* \alpha_k \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Como  $\tilde{\Sigma}^2$  é simplesmente conexo, as formas  $\pi^* \alpha_k$  não têm períodos e, portanto, as funções  $\tilde{x}_k : \tilde{\Sigma}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  estão bem definidas, para  $k = 1, 2, 3$ . A imagem  $\tilde{x}(\tilde{\Sigma}^2)$  pode ser obtida a partir das funções anteriores  $x_k$ , se permitirmos  $x_1 = -\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$ , e  $x_2 = -\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ , assumirem todos os valores possíveis sob a única restrição de que

$$\frac{\cos x_2}{\cos x_1} > 0.$$

Isto é equivalente a considerar todo o gráfico da função real

$$x_3 = \log \left( \frac{\cos x_2}{\cos x_1} \right).$$



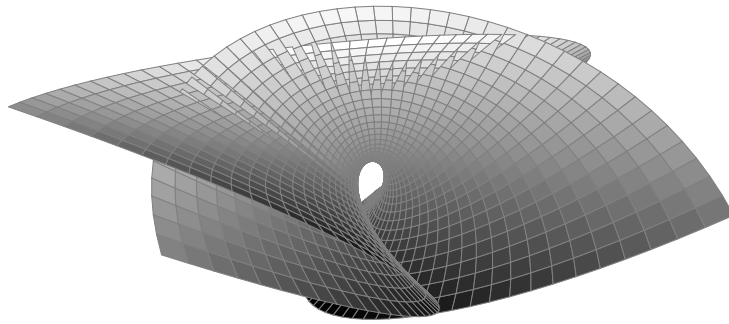
### 3.2.5 Superfície de Enneper

A escolha mais simples que se pode fazer para  $\Sigma^2$ ,  $g$  e  $\omega$  é tomar  $\Sigma^2 = \mathbb{C}$ ,  $g(z) = z$ ,  $\omega = dz$ . Resulta então uma *imersão mínima*  $\mathbf{x} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{1}{2} \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right),$$

a qual descreve a *superfície de Enneper*.

Figura 3.4. Superfície de Enneper.



A *superfície de Enneper* é uma superfície mínima completa. Sua *curvatura gaussiana* é

$$K = -\frac{16}{(1 + |z|^2)^4},$$

onde  $z = u + iv$ .

### 3.2.6 Superfície de Henneberg

Tome  $\Sigma^2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $g(z) = z$  e  $\omega = 2 \left( 1 - \frac{1}{z^4} \right) dz$ . Obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left( -\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2} + 1 - z^2 \right) dz, \\ \alpha_2 &= i \left( -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} + 1 - z^2 \right) dz, \\ \alpha_3 &= 2 \left( z - \frac{1}{z^3} \right) dz. \end{aligned}$$

Observe que  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  não têm períodos em  $\Sigma^2$ . Então obtemos

$$\int_1^z \alpha_1 = \frac{(1 - z^2)^3}{3z^3}, \quad \int_1^z \alpha_2 = \frac{i(1 + z^2)^3}{3z^3} - \frac{8i}{3}, \quad \int_1^z \alpha_3 = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2}.$$

Agora, a partir de (3.24), obtemos

$$x_1 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{z} - |z|^2 z^3)}{3|z|^6}, \quad x_2 = \frac{-\operatorname{Im}(\bar{z} + |z|^2 z^3)}{3|z|^6}, \quad x_3 = \frac{\operatorname{Re}(z|z|^2 - \bar{z})^2}{|z|^4}.$$

Isto é,

$$x_1 = \frac{u^3(1 - u^2 - v^2)^3 - 3uv^2(1 - u^2 - v^2)(1 + u^2 + v^2)^2}{3(u^2 + v^2)^3},$$

$$x_2 = \frac{3u^2v(1 + u^2 + v^2)^2(1 - u^2 - v^2) - v^3(1 - u^2 - v^2)^3}{3(u^2 + v^2)^3},$$

$$x_3 = \frac{(1 - u^2 - v^2)^2 u^2 - (1 + u^2 + v^2)v^2}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Agora, seja  $\varphi(z) = \frac{1 - z^2}{z}$  e  $\psi(z) = \frac{1 + z^2}{z}$ . Vamos mostrar que

$$\varphi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \varphi(z) \quad \text{e} \quad \psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\psi(z)}. \quad (3.27)$$

De fato,

$$\varphi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)^2}{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1 - \frac{1}{\bar{z}^2}}{-\frac{1}{\bar{z}}} = \left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \left(-\frac{\bar{z}}{1}\right) = -\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\varphi(z)},$$

e

$$\varphi(z) = \frac{1 - z^2}{z} = \frac{1}{z} - z.$$

Perceba que

$$-\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(-z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{\varphi(z)}.$$

Mas queremos igualdade, não conjugação. Observe que

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} - z, \quad \varphi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}.$$

Essas duas expressões são iguais porque

$$-\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z} - z,$$

o que pode ser verificado multiplicando ambos os lados por  $z\bar{z} = |z|^2$ :

$$\left(-\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) z\bar{z} = \left(\frac{1}{z} - z\right) z\bar{z}.$$

Calculando:

- Lado esquerdo da igualdade:

$$(-\bar{z})z\bar{z} + \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)z\bar{z} = -z|z|^2 + z = z(1 - |z|^2).$$

- Lado direito da igualdade:

$$\left(\frac{1}{z}\right)z\bar{z} - z^2\bar{z} = \bar{z} - |z|^2\bar{z} = \bar{z}(1 - |z|^2).$$

Como  $z(1 - |z|^2) = \bar{z}(1 - |z|^2)$  implica  $z = \bar{z}$  ou  $1 - |z|^2 = 0$ , isso só é válido em geral se estivermos trabalhando no círculo unitário, que é exatamente o contexto típico da fórmula (representação de Weierstrass).

Portanto, assumindo  $|z| = 1$ , temos

$$\boxed{\varphi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \varphi(z).}$$

Para a função  $\psi(z) = \frac{1+z^2}{z}$ , queremos

$$\psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\psi(z)}.$$

Procedemos como antes:

$$\psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1 + \left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)^2}{-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1 + \frac{1}{\bar{z}^2}}{-\frac{1}{\bar{z}}} = \left(1 + \frac{1}{\bar{z}^2}\right)(-\bar{z}).$$

Expandindo:

$$\psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}.$$

Agora computando o conjugado de  $\psi(z)$ , temos

$$\psi(z) = \frac{1+z^2}{z} = \frac{1}{z} + z \Rightarrow \overline{\psi(z)} = \overline{\left(\frac{1}{z} + z\right)} = \frac{1}{\bar{z}} + \bar{z}.$$

Então,

$$\psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} = -\left(\frac{1}{\bar{z}} + \bar{z}\right) = -\overline{\psi(z)}.$$

Como antes, no círculo unitário  $|z| = 1$  temos  $z^{-1} = \bar{z}$ , então o sinal se ajusta e obtemos, portanto,

$$\boxed{\psi\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = \overline{\psi(z)}}.$$

Como  $x_1 = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(\varphi(z)^3)$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(i\psi(z)^3)$ ,  $x_3 = \operatorname{Re}(\varphi(z)\psi(z))$ , temos que  $x_k\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = x_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Se identificarmos  $\Sigma^2$  com a esfera unitária menos dois pontos, através da projeção estereográfica, então  $z$  e  $-\frac{1}{\bar{z}}$  correspondem a pontos antipodais na esfera.

A partir de (3.27) concluímos que  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  pode ser vista como uma aplicação do plano projetivo em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\mathbf{x}(\Sigma^2)$  é uma faixa de Möbius em  $\mathbb{R}^3$ .

Infelizmente,  $\mathbf{x}$  não é regular em todo ponto; de fato, temos  $\sum \|\alpha_k\|^2 = 0$  nos pontos  $\pm 1$  e  $\pm i$ , que são os únicos pontos singulares de  $\mathbf{x}$ . Como esses representam dois pares de pontos antipodais, segue-se que  $\mathbf{x}$ , considerada como uma aplicação no plano projetivo, é singular exatamente em dois pontos.

Assim,  $\mathbf{x}$  restrita a  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1, i, -i\}$  representa uma imersão mínima que não é completa e cuja imagem é uma *faixa de Möbius* menos dois pontos. Como  $g(z) = z$ , sua *aplicação de Gauss* cobre cada ponto de  $\mathbb{S}^2(1)$  exatamente uma vez, com exceção de seis pontos. Portanto, sua curvatura total é  $-4\pi$ .

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BARBOSA, J.L.M.; Colares, A.G. – **Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$** . (Lecture Notes in Mathematics 1195) – New York: Springer-Verlag 1986. 124 p.
- [2] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. – terceira edição. (Textos Universitários) – Rio de Janeiro: IMPA, 2008, 2006, 2005. 607 p.
- [3] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria riemanniana**. – quinta edição segunda impressão. (Projeto Euclides) – Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 331 p.
- [4] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. – 2nd. ed. (Graduate Texts in Mathematics) – New York: Springer-Verlag, 2013. 708 p.
- [5] LIMA, Elon Lages **Curso de Análise, Volume 2**. – quinta edição. (Projeto Euclides) – Rio de Janeiro: IMPA, 1999. 557 p.
- [6] LIMA, Elon Lages **Elementos de topologia geral**. – terceira edição. (Textos Universitários) – Rio de Janeiro: SBM, 2009. 297 p.
- [7] LIMA, Ronaldo Freire de. – **Introdução à Geometria Diferencial** – 1.ed. (IV Colóquio de Matemática da Região Norte) – Macapá: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 148 p.
- [8] MELO, Welington de. **Topologia das Variedades**. – 1.ed. (Fronteiras da Matemática) – Rio de Janeiro: IMPA, 2019. 360 p.
- [9] PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. – 3rd ed. – New York: Springer-Verlag, 2016. 499 p.
- [10] SPIVAK, Michael **A comprehensive introduction to Differential Geometry Vol. 1**. – 3rd ed. Houston. Texas: Publish or Perish, Inc., 1999. 489 p.



Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrita como  
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 Brazil

