



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Departamento de Física



TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Análise Comparativa entre Exposição Direta a Índices e Estratégias com Opções sob Diferentes Regimes de Mercado

Augusto Paulo Schmidt

Departamento de Física

São Carlos - SP

2026

Orientador:

Prof. Dr. Vinicius Tribuzi Rodrigues Pinheiro Gomes

Augusto Paulo Schmidt

**Análise Comparativa entre Exposição Direta a Índices e
Estratégias com Opções sob Diferentes Regimes de Mercado**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia Física do Centro de Ciências
Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de
São Carlos, como requisito parcial para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia Física.

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Tribuzi Rodrigues
Pinheiro Gomes

São Carlos – SP
2026

Schmidt, Augusto Paulo

Análise comparativa entre exposição direta a índices e estratégias com opções sob diferentes regimes de mercado / Augusto Paulo Schmidt -- 2026.
42f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Vinicius Tribuzi Rodrigues Pinheiro
Gomes

Banca Examinadora: Vinicius Tribuzi Rodrigues Pinheiro
Gomes, Alexandre José Gualdi, Paulo Henrique Dias
Ferreira

Bibliografia

1. Mercado Financeiro. 2. Derivativos. 3. Opções. I.
Schmidt, Augusto Paulo. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

Folha de Aprovação

Augusto Paulo Schmidt

Análise Comparativa entre Exposição Direta a Índices e Estratégias com Opções sob Diferentes Regimes de Mercado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Física do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física.

São Carlos, _____ de _____ de 2026.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vinicius Tribuzi Rodrigues Pinheiro Gomes
Orientador
Universidade Federal de São Carlos

Prof(a). Dr(a). Alexandre José Gualdi
Examinador
Universidade Federal de São Carlos

Prof(a). Dr(a). Paulo Henrique Dias Ferreira
Examinador
Universidade Federal de São Carlos

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, pelo apoio ao longo de toda a minha trajetória acadêmica, pela paciência nos momentos de ausência, pelo incentivo constante para que eu seguisse meus objetivos e pela confiança de me deixar seguir meu sonho de graduação.

Aos amigos da UFSCar, agradeço pelas trocas, companheirismo e apoio mútuo nos momentos difíceis — e quão numerosos foram! Agradeço em especial pela Rachadinha, sem vocês, não teria tido metade do aprendizado e menos ainda da diversão, obrigado por me ensinar que até momentos difíceis em um refeitório de comida frugal podem ser um banquete se ao redor de amigos.

Agradeço aos professores do Departamento de Física, muitos dos quais mantêm a paixão e a dedicação pelo ensino, mesmo muitas vezes estando em um ambiente que não os incentiva a tal. Em especial, agradeço ao professor Dr. Vinicius Tribuzi por ter aceitado me orientar em um tema tão exótico para um físico.

Agradeço também aos inúmeros professores que compartilham gratuitamente seus conhecimentos por meio de conteúdos online, em especial ao professor Cláudio Possani, cujas aulas foram um recurso valioso ao longo das mais diversas disciplinas. Registro igualmente minha gratidão aos canais de divulgação científica, em especial ao Veritasium, que não apenas manteve viva minha paixão pela Física, mas também despertou o interesse que culminou na escolha do tema desta monografia.

Por fim, e mais importante, agradeço a Deus por ter sido meu porto seguro em toda a trajetória, e por ter preenchido o caminho de pessoas que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização da graduação, que se encerra neste trabalho.

Resumo

O presente trabalho propõe uma análise comparativa entre a exposição direta a índices de mercado e a utilização de estratégias com opções, combinando uma abordagem teórica baseada em cenários simplificados com um estudo empírico sobre dados reais de opções do S&P 500. Em mercados financeiros, a decisão entre manter posição no ativo subjacente ou utilizar instrumentos derivativos envolve considerações relevantes relacionadas a retorno potencial, proteção patrimonial, assimetria de payoff, custo de proteção e sensibilidade a variáveis como volatilidade e passagem do tempo. O estudo parte de uma contextualização histórica da evolução dos mercados financeiros e do surgimento dos derivativos, seguida da fundamentação teórica necessária à compreensão das opções, suas Greeks e dos princípios de precificação por arbitragem que sustentam o modelo de Black-Scholes-Merton. A partir dessa base, comparam-se três metodologias de avaliação de uma mesma posição em calls fora do dinheiro: a reprecificação integral via Black-Scholes-Merton (Full Valuation), a aproximação local Delta-Gamma tradicional e uma extensão proposta neste trabalho, na qual o gamma é ajustado em função da proximidade do ativo ao strike. Essas três metodologias são então confrontadas com dados reais de fechamento diário de opções do SPX ao longo de 2023, organizados em três janelas de 90 dias com regimes de mercado distintos, sob um critério de equalização de risco que calibra o tamanho da posição em opções pela perda esperada equivalente à de uma posição direta no índice. Os resultados mostram que a vantagem da opção real sobre o spot, quando existe, concentra-se em janelas temporais específicas e não se sustenta ao longo do horizonte analisado, superando o retorno do índice em apenas entre 7% e 27% dos vértices testados, dependendo do regime de mercado. As aproximações por Delta-Gamma, ao congelarem as sensibilidades no instante inicial, superestimam o resultado real em mais de 80% dos casos, por não incorporarem a erosão temporal nem a variação da volatilidade implícita observadas no mercado. Verificou-se também que, em períodos de queda do índice, a estrutura opcional atuou com mais consistência como instrumento de limitação de perdas do que como amplificador de ganhos. Conclui-se que a convexidade das opções OTM é um mecanismo economicamente real, mas sua conversão em vantagem líquida sobre a exposição direta depende criticamente do momento de avaliação e das simplificações adotadas por cada metodologia.

Palavras-chave: mercado financeiro; derivativos; opções; gestão de risco; Black-Scholes; backtesting; índices de mercado.

Abstract

This work proposes a comparative analysis between direct exposure to market indices and the use of options strategies, combining a theoretical approach based on simplified scenarios with an empirical study on real S&P 500 options data. In financial markets, the decision between maintaining a position in the underlying asset or using derivative instruments involves relevant considerations related to potential return, capital protection, payoff asymmetry, hedging cost, and sensitivity to variables such as volatility and the passage of time. The study begins with a historical contextualization of the evolution of financial markets and the emergence of derivatives, followed by the theoretical foundation necessary to understand options, their Greeks, and the arbitrage pricing principles underlying the Black-Scholes-Merton model. Building on this foundation, three valuation methodologies are compared for the same position in out-of-the-money calls: full repricing via Black-Scholes-Merton (Full Valuation), the traditional local Delta-Gamma approximation, and an extension proposed in this work, in which gamma is adjusted as a function of the underlying asset's proximity to the strike. These three methodologies are then confronted with real daily closing data of SPX options throughout 2023, organized into three 90-day windows with distinct market regimes, under a risk equalization criterion that calibrates the size of the options position by the expected loss equivalent to that of a direct position in the index. The results show that the advantage of the real option over the spot, when it exists, is concentrated in specific time windows and is not sustained throughout the analyzed horizon, outperforming the index return in only between 7% and 27% of the tested vertices, depending on the market regime. The Delta-Gamma approximations, by freezing sensitivities at the initial instant, overestimate the real result in more than 80% of cases, as they fail to incorporate the time decay or the implied volatility variation observed in the market. It was also found that, during periods of index decline, the options structure acted more consistently as a loss-limiting instrument than as a gain amplifier. It is concluded that the convexity of OTM options is an economically real mechanism, but its conversion into a net advantage over direct exposure depends critically on the timing of evaluation and on the simplifications adopted by each methodology.

Keywords: financial market; derivatives; options; risk management; Black-Scholes; back-testing; market indices.

Sumário

	Resumo	5
	Abstract	6
	Sumário	7
1	INTRODUÇÃO	8
2	EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS MERCADOS FINANCEIROS E O SURGIMENTO DOS DERIVATIVOS	10
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
4	MODELAGEM E METODOLOGIA	21
4.1	Modelagem e Metodologia	21
4.2	Cenário I — Volatilidade Constante e Aplicação do Modelo Black- Scholes-Merton (Full-Valuation)	22
4.3	Cenário II - Aproximação Delta-Gamma	25
4.4	Cenário III — Aproximação Delta-Gamma com Gamma Ajustado .	26
4.5	Análise Comparativa dos Cenários	28
5	BACKTESTING E ESTUDO EMPÍRICO	30
5.1	Dados Utilizados	30
5.2	Desenho do Experimento	31
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	33
6.1	A Vantagem da Opção Real é Concentrada no Tempo, não Per- sistente	33
6.2	O Cenário Real Supera o Spot na Minoria dos Casos	34
6.3	As Aproximações Superestimam o Resultado Real	35
6.4	A Estrutura Opcional Protege Mais do que Amplifica	36
6.5	A Quebra Numérica do Cenário II em Delta Baixo	37
6.6	Gamma Ajustado vs. Gamma Tradicional: Divergência Crescente até um Limite	38
7	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS	43

1 Introdução

Os mercados financeiros ocupam posição central nas economias modernas ao permitirem a coordenação entre agentes superavitários e deficitários de recursos, viabilizando a transferência de capital ao longo do tempo, a formação de preços e a redistribuição de riscos. Por meio desses mercados, investidores podem direcionar poupança para atividades produtivas, enquanto empresas, governos e demais instituições obtêm financiamento para expansão, investimento e operação corrente (Mishkin 2019).

Além de sua função de financiamento, os mercados financeiros também exercem importante papel informacional. Em ambientes descentralizados, preços sintetizam expectativas, percepções de risco e informações dispersas entre inúmeros participantes. Sob essa ótica, ativos negociados em bolsa representam não apenas direitos patrimoniais, mas também avaliações continuamente revisadas acerca do futuro (Hayek 1945). A dinâmica dos preços, portanto, torna-se elemento relevante para decisões econômicas em larga escala.

Com o desenvolvimento institucional desses mercados e o aumento da complexidade econômica, surgiram instrumentos destinados não apenas à transferência de capital, mas também à gestão mais refinada de incertezas. Nesse contexto, destacam-se os derivativos, contratos cujo valor depende do comportamento de ativos subjacentes, tais como ações, índices, moedas, taxas de juros ou commodities. Entre os derivativos disponíveis, as opções ocupam posição singular por oferecerem estruturas assimétricas de risco e retorno, permitindo combinações de proteção patrimonial, exposição direcional e estratégias de perfil não linear.

A decisão entre manter exposição direta ao ativo subjacente ou utilizar opções envolve questões práticas e teóricas relevantes. A compra direta de um índice, por exemplo, fornece exposição linear às oscilações de mercado, participando integralmente de altas e quedas. Já uma posição comprada em opções pode limitar perdas ao prêmio pago, ao custo de introduzir sensibilidade temporal e dependência relevante de volatilidade implícita. Em outras palavras, trata-se de uma escolha entre diferentes arquiteturas de risco.

Essa comparação torna-se especialmente relevante em índices amplos de mercado, nos quais a exposição direta é frequentemente utilizada como proxy para crescimento econômico agregado, enquanto opções são amplamente empregadas para hedge, alavancagem tática e estruturas de convexidade. Entretanto, não existe resposta universal acerca da superioridade de uma abordagem sobre a outra, pois o desempenho relativo depende de fatores como regime de volatilidade, magnitude dos movimentos de preço, horizonte temporal e custo implícito dos derivativos.

Diante desse problema, o presente trabalho propõe uma análise comparativa entre exposição direta a índices de mercado e estratégias selecionadas com opções sob diferentes regimes de mercado. O objetivo central consiste em investigar, por meio de cenários simplificados e posterior confronto com dados observados, em quais circunstâncias estruturas com opções tendem a apresentar vantagens econômicas em relação à posição tradicional no ativo subjacente.

Para tanto, o estudo adota inicialmente uma abordagem teórica baseada em hipóteses controladas, incluindo ambientes de volatilidade constante, aproximações locais via sensibilidades como delta e gamma, e uma aproximação Delta-Gamma com gamma ajustado para refletir a variação local da convexidade. Tais simplificações não pretendem reproduzir integralmente a complexidade dos mercados reais, mas isolar mecanismos fundamentais que influenciam o comportamento relativo das estratégias analisadas.

Posteriormente, parte dessas conclusões é confrontada com evidências empíricas obtidas a partir de dados históricos de mercado, com foco em índices amplamente negociados e em seus respectivos mercados de opções. Busca-se verificar em que medida os efeitos previstos teoricamente podem ser observados na prática e quais limitações emergem quando fatores reais, como precificação implícita e dinâmica de mercado, são considerados.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta a evolução histórica dos mercados financeiros e o surgimento dos derivativos. O Capítulo 3 discute os fundamentos teóricos necessários ao estudo das opções. O Capítulo 4 descreve a modelagem adotada e os cenários analisados. O Capítulo 5 apresenta o estudo empírico e os procedimentos de comparação. O Capítulo 6 discute os resultados obtidos, e o Capítulo 7 reúne as conclusões finais e possíveis extensões futuras.

2 Evolução Histórica dos Mercados Financeiros e o Surgimento dos Derivativos

A formação dos mercados financeiros modernos não ocorreu de maneira instantânea, tampouco resultou de planejamento centralizado. Seu desenvolvimento foi gradual, associado à expansão do comércio, ao crescimento urbano, ao aperfeiçoamento jurídico dos contratos e à crescente necessidade de coordenação entre agentes econômicos dispersos no tempo e no espaço. À medida que sociedades se tornaram mais complexas, tornou-se necessário criar mecanismos capazes de conectar poupadores, empreendedores, comerciantes e governos em torno da alocação de recursos escassos (Kindleberger 1984).

Em formas rudimentares, instrumentos financeiros existem há muitos séculos. Registros históricos apontam a presença de empréstimos, títulos de dívida, sociedades comerciais e contratos futuros informais em diferentes civilizações antigas. Entretanto, os mercados organizados de capitais, com negociação relativamente padronizada e ambiente institucional estável, consolidaram-se sobretudo na Europa moderna, em paralelo à expansão marítima e comercial dos séculos XVI e XVII.

Um marco frequentemente citado é a experiência holandesa. Durante o século XVII, os Países Baixos tornaram-se importante centro comercial e financeiro, impulsionados pelo comércio internacional e por instituições jurídicas relativamente avançadas para a época. Nesse ambiente destacou-se a Companhia Holandesa das Índias Orientais (*Dutch East India Company*), considerada uma das primeiras grandes corporações por ações. Investidores podiam adquirir participações na companhia e negociar tais títulos em mercado secundário, especialmente em Amsterdã (Neal 1990).

Essa inovação foi relevante por diversas razões. Em primeiro lugar, permitiu reunir grandes volumes de capital para empreendimentos arriscados e de longo prazo, como expedições marítimas. Em segundo lugar, separou de forma mais clara a figura do investidor da figura do gestor operacional. Por fim, criou liquidez patrimonial: os investidores não precisavam aguardar o encerramento de uma viagem comercial para recuperar recursos, podendo vender suas participações a terceiros.

Ao longo dos séculos seguintes, Londres consolidou-se como importante centro financeiro global. O fortalecimento institucional britânico, a expansão imperial e o financiamento da dívida pública contribuíram para o crescimento de mercados organizados de títulos e ações. Já no século XIX, a Revolução Industrial ampliou a necessidade de financiamento para ferrovias, manufaturas e infraestrutura, reforçando o papel dos mercados de capitais como canais de investimento produtivo (Mishkin 2019).

Posteriormente, os Estados Unidos emergiram como potência econômica e financeira. A Bolsa de Nova York (*New York Stock Exchange*), fundada a partir do Acordo de Buttonwood em 1792, tornou-se ao longo do tempo uma das principais referências globais para negociação de ações e outros ativos. No século XX, especialmente após a Segunda Guerra Mundial, a centralidade financeira norte-americana intensificou-se, acompanhada por avanços regulatórios, tecnológicos e institucionais.

Embora ações e títulos tradicionais ocupassem posição central nesses mercados, a própria atividade econômica gerava problemas adicionais que tais instrumentos não resolviam integralmente. Produtores agrícolas enfrentavam risco de preço entre plantio e colheita; importadores e exportadores lidavam com incerteza cambial; empresas intensivas em dívida tornavam-se sensíveis a juros; investidores desejavam proteger carteiras contra quedas abruptas. Em outras palavras, o crescimento econômico aumentava também a demanda por instrumentos de gestão de risco.

É nesse contexto que ganham relevância os derivativos. De forma geral, derivativos são contratos cujo valor depende do comportamento de outro ativo ou variável econômica, denominado ativo subjacente. Entre os exemplos clássicos estão commodities, moedas, taxas de juros, ações e índices de mercado. Seu uso permite transferir risco entre partes com preferências distintas, além de possibilitar estratégias de proteção, arbitragem e especulação (Hull 2018).

Os primeiros derivativos amplamente utilizados estiveram ligados ao comércio agrícola. Contratos a termo (*forwards*) permitiam fixar hoje um preço para entrega futura de mercadorias, reduzindo incerteza para produtores e compradores. Mais tarde, bolsas especializadas passaram a negociar contratos padronizados, originando os mercados futuros modernos. Um exemplo emblemático foi o Chicago Board of Trade (CBOT), fundado em meados do século XIX, em ambiente fortemente conectado à produção agrícola norte-americana.

Nos contratos futuros, diferentemente dos acordos puramente privados, características como quantidade, qualidade do produto, vencimento e mecanismos de liquidação tornaram-se padronizadas. Isso aumentou liquidez, reduziu risco de contraparte e facilitou a entrada de novos participantes. A padronização foi passo decisivo para a expansão dos derivativos organizados.

As opções, por sua vez, possuem origem histórica mais difusa. Existem relatos antigos de contratos semelhantes a direitos opcionais, inclusive frequentemente associados ao episódio de Tales de Mileto descrito por Aristóteles, no qual o filósofo teria garantido o direito de uso futuro de prensas de oliva mediante pagamento antecipado. Independentemente da precisão histórica do relato, a lógica econômica é clara: pagar um valor hoje para assegurar um direito futuro sem obrigação de exercício.

Em termos modernos, uma opção é um contrato que concede ao comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender determinado ativo por preço previamente estabelecido até certa data ou em data específica. O vendedor da opção, em contrapartida, assume obrigação correspondente caso o comprador exerça esse direito. Essa assimetria contratual distingue opções de forwards e futuros, nos quais ambas as partes assumem obrigações recíprocas.

Apesar de sua utilidade econômica evidente, o mercado de opções permaneceu por muito tempo relativamente limitado. Uma das principais dificuldades residia na precificação. Enquanto um contrato futuro pode ser relacionado de maneira relativamente direta ao preço à vista, juros e custos de carregamento, o valor de uma opção depende de fatores mais sutis: preço do ativo subjacente, tempo até vencimento, volatilidade esperada, taxa de juros e formato assimétrico do payoff.

Antes do avanço da teoria moderna, a precificação frequentemente dependia de heurísticas, experiência prática de operadores e barganha entre partes. Isso restringia profundidade de mercado e dificultava expansão institucional do produto. A grande transformação ocorreu no início da década de 1970.

Em 1973 foi fundada a Chicago Board Options Exchange (CBOE), marco importante na negociação padronizada de opções listadas nos Estados Unidos. No mesmo período, Fischer Black e Myron Scholes publicaram o artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, posteriormente complementado por contribuições de Robert Merton, conforme mostra a figura 1 (Black e Scholes 1973). O modelo desenvolvido demonstrava que, sob determinadas hipóteses, era possível obter uma fórmula fechada para o preço teórico de opções europeias - caracterizadas pela possibilidade de exercício apenas no vencimento, em contraponto com as americanas, que possibilitam exercício até o vencimento.

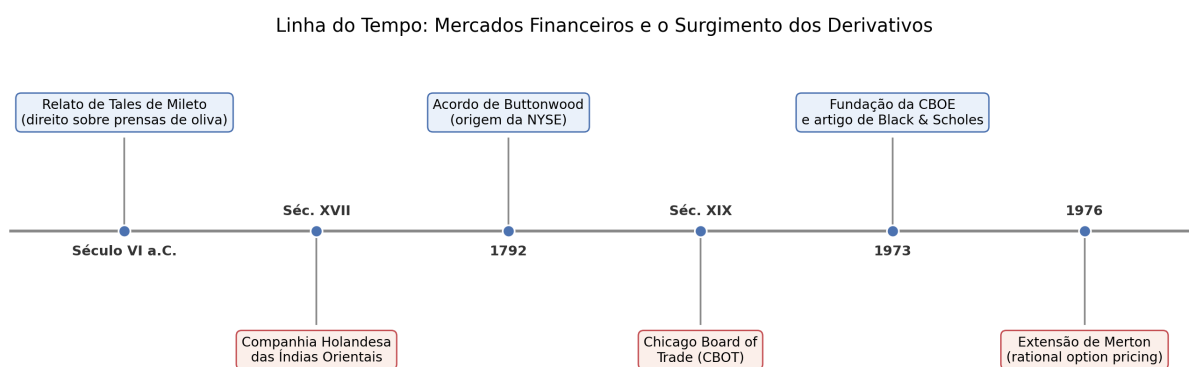


Figura 1 – Linha do tempo: mercados financeiros e o surgimento dos derivativos

Elaborado pelo autor.

A relevância do modelo de Black-Scholes-Merton ultrapassou a elegância matemá-

tica (Veritasium 2024). Seu principal impacto econômico foi mostrar que opções poderiam ser entendidas a partir de princípios de não arbitragem e replicação dinâmica, em vez de mera intuição subjetiva. Se o risco de uma opção pode ser continuamente ajustado por posições no ativo subjacente e em ativo livre de risco, então seu preço deve obedecer relações consistentes com esse portfólio replicante.

Essa mudança de paradigma contribuiu significativamente para a expansão dos mercados de derivativos nas décadas seguintes. A existência de referenciais quantitativos favoreceu liquidez, formação de mercado, gestão de risco institucional e inovação financeira. Novos produtos surgiram, mesas especializadas se multiplicaram e derivativos passaram a integrar a rotina de bancos, fundos, empresas e investidores.

Naturalmente, o modelo não eliminou limitações práticas. Volatilidade não é constante, mercados apresentam fricções, eventos extremos ocorrem e preços podem sofrer descontinuidades. Ainda assim, Black-Scholes-Merton tornou-se marco fundador das finanças quantitativas modernas, servindo como ponto de partida para modelos posteriores mais sofisticados(Veritasium 2024).

Atualmente, mercados de opções sobre ações, índices, moedas, juros e commodities movimentam volumes expressivos globalmente. Em particular, opções sobre índices acionários ganharam relevância por permitirem exposição ampla ao mercado com elevada liquidez e por oferecerem instrumentos eficientes para hedge e posicionamento tático. É justamente nesse contexto que se insere o presente trabalho, ao comparar a exposição direta a índices com estratégias via opções sob diferentes regimes de mercado.

3 Fundamentação Teórica

Após a contextualização histórica apresentada no capítulo anterior, torna-se necessário estabelecer os fundamentos conceituais e quantitativos que sustentam a análise proposta neste trabalho. O estudo comparativo entre exposição direta a índices de mercado e estratégias com opções exige compreender tanto a estrutura contratual desses instrumentos quanto a lógica econômica de sua precificação. Embora o mercado contemporâneo utilize modelos sofisticados e ampla variedade de estruturas, grande parte da intuição fundamental permanece ancorada em conceitos relativamente simples: direito opcional, assimetria de payoff, ausência de arbitragem e sensibilidade a risco.

Uma opção é um contrato derivativo que concede ao comprador o direito, mas não a obrigação, de negociar determinado ativo subjacente por preço previamente estabelecido em data futura ou até essa data. O vendedor da opção, em contrapartida, assume a obrigação correspondente caso o titular decida exercer esse direito (Hull 2018). Essa assimetria jurídica e econômica distingue opções de contratos futuros ou a termo, nos quais ambas as partes assumem obrigações recíprocas.

Os dois tipos básicos de opções são:

- **Call:** concede o direito de comprar o ativo subjacente;
- **Put:** concede o direito de vender o ativo subjacente.

Os principais elementos contratuais de uma opção são:

- **Ativo subjacente:** ativo cujo preço determina o valor econômico da opção;
- **Strike (K):** preço de exercício previamente definido;
- **Vencimento (T):** data limite para exercício ou liquidação;
- **Prêmio:** valor pago pelo comprador ao vendedor no momento da contratação;
- **Estilo de exercício:** europeu (apenas no vencimento) ou americano (até o vencimento).

O prêmio constitui um elemento central da operação. Para o comprador de uma opção simples, ele representa a perda máxima possível. Para o vendedor, corresponde à receita inicial recebida em troca da assunção de uma obrigação contingente. A partir dessa relação básica emerge grande parte da lógica econômica do mercado de opções.

No vencimento, o valor financeiro do contrato depende da posição do preço do ativo subjacente em relação ao strike. Para uma call europeia, o payoff é dado por

$$\max(S_T - K, 0)$$

onde S_T representa o preço do ativo na data de vencimento. Caso o ativo esteja abaixo do strike, não há racionalidade econômica no exercício, e a opção expira sem valor. Se estiver acima, o titular exerce o direito de comprar abaixo do preço de mercado.

De forma análoga, o payoff de uma put europeia é

$$\max(K - S_T, 0)$$

pois seu valor decorre da possibilidade de vender acima do preço corrente do ativo. Ambos os payoff podem ser visualizados na figura 2.

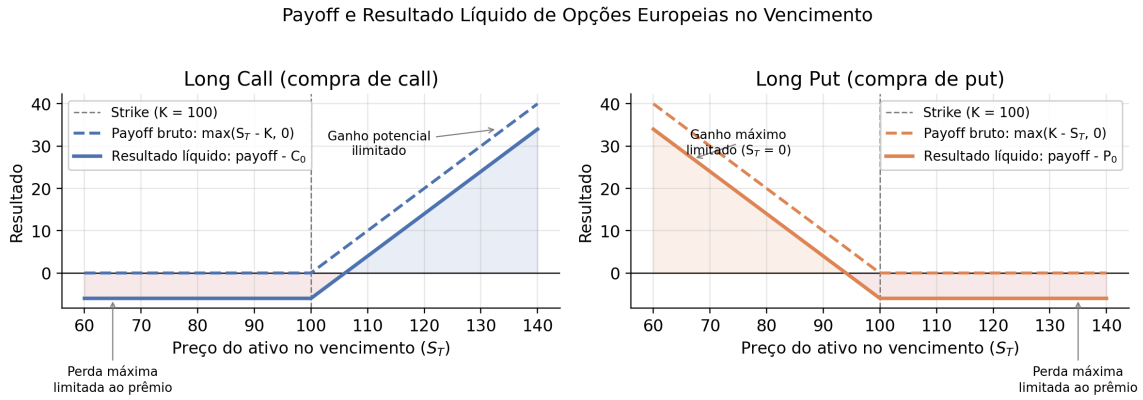


Figura 2 – Payoff e resultado líquido de opções europeias no vencimento

Essas expressões simples já revelam característica fundamental das opções: o retorno é não linear. Enquanto a compra direta do ativo produz ganho ou perda aproximadamente proporcional à variação de preço, opções criam estruturas assimétricas, nas quais perdas podem ser limitadas e ganhos condicionados a determinados cenários.

A compra de uma call (*long call*) é exemplo clássico. O investidor paga um prêmio inicial C_0 e passa a participar de altas relevantes do ativo, mantendo perda máxima limitada ao valor desembolsado:

$$\max(S_T - K, 0) - C_0$$

A compra de uma put (*long put*) possui lógica complementar, sendo frequentemente utilizada como proteção contra quedas:

$$\max(K - S_T, 0) - P_0$$

em que P_0 representa o prêmio pago pela opção de venda.

Quando combinadas ao ativo subjacente, surgem estruturas relevantes para gestão de risco. Uma carteira composta por ativo mais put comprada, usualmente denominada *protective put*, preserva participação em altas ao mesmo tempo em que estabelece piso de perda abaixo de certo nível:

$$S_T + \max(K - S_T, 0) - P_0$$

Já a combinação entre compra do ativo e venda de call, conhecida como *covered call*, sacrifica parte da alta futura em troca do recebimento imediato do prêmio, conforme a figura 3:

$$S_T + C_0 - \max(S_T - K, 0)$$

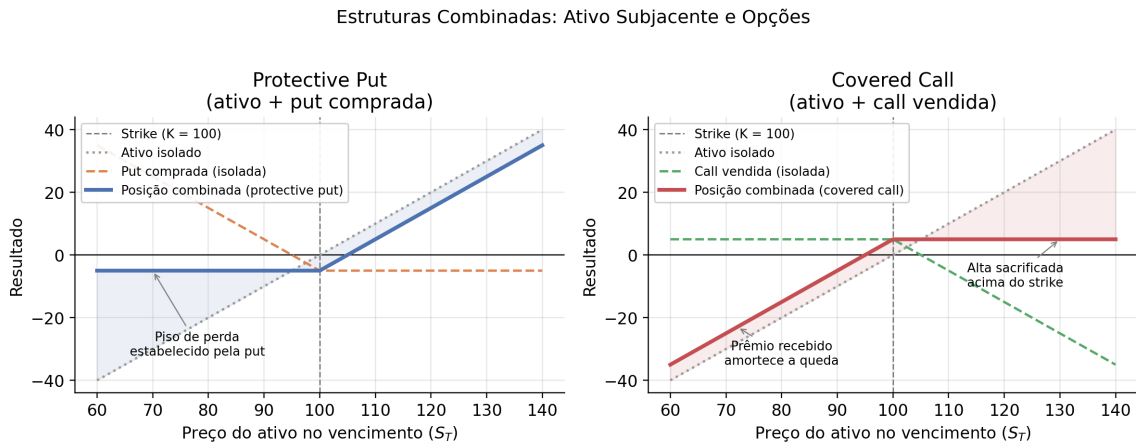


Figura 3 – Estruturas combinadas: protective put e covered call

Elaborado pelo autor.

Esses exemplos da figura 3 ilustram que opções não são apenas instrumentos especulativos, mas ferramentas de engenharia financeira capazes de alterar o perfil estatístico e econômico de uma posição.

A razão pela qual opções possuem valor econômico decorre justamente dessa flexibilidade. O comprador adquire direito sem obrigação. Se o cenário se mostrar desfavorável, pode simplesmente abandonar o contrato e limitar sua perda ao prêmio. Se o movimento for favorável, preserva a possibilidade de exercício. Além disso, quanto maior o tempo até o vencimento, maior tende a ser a chance de ocorrência de cenários vantajosos. De

maneira semelhante, maior incerteza sobre o preço futuro normalmente aumenta o valor da opcionalidade.

Essas observações conduzem naturalmente ao problema da precificação. Se opções possuem valor, como determinar preço justo para esse direito? Durante longos períodos históricos, o valor de opções era definido de forma predominantemente empírica, por negociação direta entre participantes e experiência prática de operadores. A moderna teoria financeira alterou esse panorama ao introduzir o princípio de ausência de arbitragem.

Arbitragem pode ser entendida, em termos gerais, como obtenção de lucro sem risco e sem investimento líquido inicial. Em mercados competitivos, oportunidades dessa natureza tendem a desaparecer rapidamente. Disso decorre princípio poderoso: dois portfólios que gerem exatamente os mesmos fluxos futuros devem possuir o mesmo preço presente (Ross 1976). Caso contrário, seria possível explorar a discrepância de forma livre de risco.

Aplicado às opções, esse raciocínio leva à ideia de replicação. Se o payoff de uma opção puder ser reproduzido por combinação adequada entre ativo subjacente e ativo livre de risco, então o preço da opção deve coincidir com o custo dessa carteira replicante. Essa lógica constitui a base conceitual do modelo de Black-Scholes-Merton.

Black e Scholes publicaram em 1973 fórmula fechada para o preço de opções europeias, posteriormente generalizada por Merton (Black e Scholes 1973, Merton 1973). O modelo assume, entre outras hipóteses, ausência de arbitragem, taxa livre de risco constante, mercados sem fricções relevantes e volatilidade constante do ativo ao longo do período analisado. Assume-se ainda que o preço do ativo segue movimento geométrico browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

em que μ representa o retorno esperado, σ a volatilidade e dW_t o incremento de um processo estocástico de Wiener.

Sob tais hipóteses, o valor de uma call europeia sem dividendos é dado por

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

e $N(\cdot)$ representa a função distribuição acumulada normal padrão.

Embora a expressão possua forma matemática compacta, sua interpretação econômica é bastante rica. O valor da call aumenta quando o preço atual do ativo S_0 se eleva, quando o prazo até vencimento se alonga ou quando a volatilidade esperada cresce. Isso ocorre porque tais fatores ampliam a probabilidade de o contrato terminar em condição vantajosa para o comprador.

Na prática, entretanto, a volatilidade futura não é observável diretamente. Diferentemente do preço do ativo, da taxa de juros ou do tempo até vencimento, a volatilidade relevante para a precificação corresponde a uma expectativa sobre a dispersão futura dos retornos. Por esse motivo, tornou-se usual inverter numericamente a fórmula de Black-Scholes: dado o preço negociado da opção no mercado, busca-se o valor de σ que torna o preço teórico igual ao preço observado. Esse parâmetro é denominado volatilidade implícita (*implied volatility*, IV).

A volatilidade implícita ocupa papel central no mercado de opções moderno. Em muitos contextos operacionais, traders e gestores não negociam opções pensando primariamente em preço monetário absoluto, mas em níveis relativos de IV. Como diferentes strikes e vencimentos podem possuir prêmios distintos por razões estruturais, a volatilidade implícita funciona como linguagem padronizada para comparar contratos. Em termos práticos, grande parte da “informação” embutida no prêmio de mercado manifesta-se precisamente nesse parâmetro implícito (Natenberg 1994).

Se o modelo Black-Scholes fosse descrição perfeita da realidade, todas as opções sobre um mesmo ativo e mesmo vencimento deveriam compartilhar a mesma volatilidade implícita. Contudo, dados reais mostram comportamento sistematicamente diferente. Contratos com strikes distintos frequentemente apresentam IVs distintas, mesmo possuindo o mesmo prazo. Esse fenômeno ficou conhecido como *volatility smile*, pois em certos mercados a curva de IV em função do strike assume formato aproximadamente curvo, cujos formatos podem ser vistos ilustrativamente na figura 4.

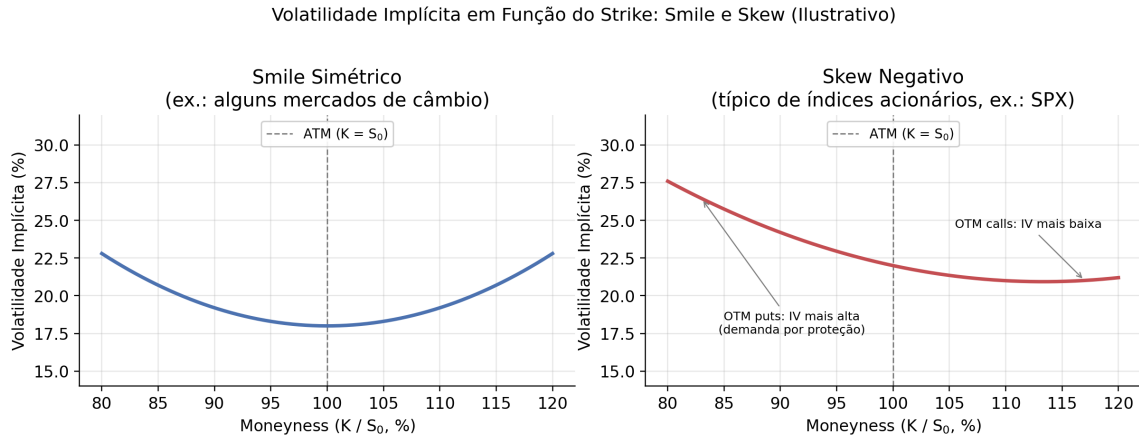


Figura 4 – Volatilidade implícita em função do strike: smile e skew (ilustrativo)

Elaborado pelo autor.

Em índices acionários e ativos de risco, observa-se com frequência não apenas um smile simétrico, mas um *skew* negativo: opções de venda fora do dinheiro tendem a negociar com volatilidade implícita superior à de calls equivalentes. Tal comportamento costuma ser associado à demanda recorrente por proteção contra quedas abruptas, bem como à assimetria empírica dos retornos financeiros.

Quando se considera simultaneamente strike e prazo até vencimento, obtém-se a chamada superfície de volatilidade (*volatility surface*). Trata-se de representação tridimensional na qual cada ponto associa determinado strike e maturidade à sua respectiva IV. Essa superfície sintetiza expectativas de mercado, percepção de risco de cauda, condições de oferta e demanda e preferências por hedge em diferentes horizontes temporais. Por essa razão, modelos mais avançados de precificação frequentemente procuram reproduzir sua forma observada.

Na prática de mercado, grande relevância também é atribuída às chamadas Greeks, medidas de sensibilidade obtidas por derivadas parciais do preço da opção. Entre as principais estão o delta,

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

que mede a resposta do preço da opção a pequenas variações do ativo subjacente, e o gamma,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

que mensura a variação do próprio delta. Também são amplamente utilizados o theta,

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

associado à erosão temporal do contrato, e o vega,

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

relacionado à sensibilidade frente à volatilidade implícita.

Apesar de sua importância histórica e operacional, o modelo Black-Scholes-Merton não descreve perfeitamente os mercados reais. Observa-se empiricamente que além das volatilidades implícitas variarem com strike e prazo, preços podem sofrer saltos descontínuos, custos de transação são relevantes e o rebalanceamento contínuo pressuposto pelo modelo é inviável na prática (Merton 1976, Heston 1993). Ainda assim, o modelo permanece como referência fundamental por organizar de forma rigorosa a relação entre preço, risco, tempo e incerteza.

Os conceitos apresentados neste capítulo fornecem a base necessária para o desenvolvimento da modelagem proposta neste trabalho. Nos capítulos seguintes, tais ideias serão utilizadas sob hipóteses simplificadas e cenários controlados, com o objetivo de comparar economicamente posições diretas em índices de mercado e estruturas selecionadas com opções.

4 Modelagem e Metodologia

4.1 Modelagem e Metodologia

A análise de instrumentos derivativos em mercados reais envolve elevado grau de complexidade. O comportamento dos preços depende simultaneamente de fatores macroeconômicos, dinâmica de volatilidade implícita, liquidez, fluxo institucional, microestrutura de mercado, mudanças regulatórias e expectativas futuras dos participantes. Além disso, a própria interação entre agentes altera continuamente a formação de preços, tornando inviável descrever integralmente o sistema por meio de um modelo único e fechado.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho não consiste em reproduzir toda a dinâmica observada no mercado de opções moderno - se é que tal objetivo é sequer possível -, tampouco desenvolver estratégia otimizada de negociação. A proposta central é mais restrita e, ao mesmo tempo, mais estrutural: investigar quais mecanismos econômicos fundamentais diferenciam a exposição direta ao ativo subjacente da exposição via opções.

Para isso, serão construídos cenários simplificados e controlados, nos quais determinados fatores permanecerão fixos enquanto outros serão perturbados de forma isolada. Essa abordagem permite analisar separadamente efeitos que, em mercados reais, aparecem simultaneamente e frequentemente de maneira sobreposta. Em vez de buscar aderência completa à realidade, procura-se preservar os mecanismos econômicos essenciais responsáveis pelo comportamento das estruturas analisadas.

A utilização de simplificações é prática recorrente tanto em física quanto em finanças quantitativas. Modelos simplificados frequentemente permitem compreender relações fundamentais de forma mais clara do que sistemas excessivamente parametrizados. Sob essa perspectiva, o presente trabalho adota hipóteses deliberadamente restritivas para isolar efeitos associados à convexidade, à sensibilidade temporal e à dependência de volatilidade presentes em contratos de opções.

Os cenários desenvolvidos ao longo deste capítulo não devem ser interpretados como representações integrais do mercado, mas como ambientes teóricos controlados utilizados para estudar propriedades específicas das estruturas financeiras analisadas. A intenção é compreender como determinadas características inerentes às opções afetam o comportamento de uma posição quando comparada à exposição linear tradicional do ativo subjacente.

A modelagem será organizada em três cenários principais. O primeiro considera volatilidade constante e aplicação direta do modelo de Black-Scholes-Merton. O segundo

utiliza aproximação local delta-gamma para estudar o comportamento incremental das opções frente a pequenos choques no ativo subjacente. Por fim, o terceiro cenário introduz alterações no cálculo do Gamma afim de reproduzir melhor a sensibilidade não linear da opção.

Em todos os casos, a análise será conduzida de forma comparativa entre posições diretas no ativo subjacente e estruturas selecionadas com opções. Busca-se observar não apenas diferenças de retorno absoluto, mas principalmente mudanças na distribuição de risco, na convexidade da posição e na resposta dinâmica frente a perturbações de mercado.

Embora parte das simulações utilize parâmetros inspirados em dados reais de mercado, especialmente índices amplamente negociados e seus respectivos mercados de opções, o foco principal permanece na interpretação econômica dos mecanismos observados. Dessa forma, os resultados obtidos devem ser entendidos menos como previsões operacionais e mais como investigação quantitativa das propriedades estruturais associadas à opcionalidade.

4.2 Cenário I — Volatilidade Constante e Aplicação do Modelo Black-Scholes-Merton (Full-Valuation)

A hipótese de volatilidade constante permite não apenas calcular preços teóricos de opções, mas também analisar matematicamente como pequenas perturbações no ativo subjacente afetam o valor do contrato. Essa característica é particularmente relevante para compreender a natureza assimétrica das opções, principal fenômeno econômico investigado neste trabalho.

Considere uma call europeia inicialmente fora do dinheiro, isto é, com preço do ativo subjacente abaixo do strike contratado. Nesse regime, pequenas variações positivas no ativo podem produzir alterações desproporcionalmente maiores no prêmio da opção, enquanto movimentos negativos frequentemente encontram limitação natural decorrente do próprio piso do contrato, cujo valor mínimo tende a zero.

Essa assimetria pode ser estudada localmente por meio da expansão de Taylor do preço da opção em torno do preço atual do ativo. Seja $C(S)$ o valor da call como função do preço do subjacente S . Para pequenos deslocamentos ΔS , obtém-se:

$$\Delta C \approx \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\Delta S)^2$$

ou, de forma equivalente,

$$\Delta C \approx \Delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2$$

onde Δ representa o delta da opção e Γ o gamma.

O primeiro termo corresponde à resposta linear da opção frente ao movimento do ativo. Já o segundo termo introduz curvatura na relação entre variação do subjacente e variação do prêmio.

Essa curvatura possui interpretação econômica central para o presente trabalho. Como o termo quadrático depende de $(\Delta S)^2$, ele contribui positivamente tanto para movimentos positivos quanto negativos do ativo. Entretanto, enquanto movimentos negativos possuem limitação estrutural imposta pelo valor mínimo da opção, movimentos positivos podem provocar aceleração crescente do prêmio à medida que a call se aproxima da região at-the-money e posteriormente entra no dinheiro.

Isso significa que choques simétricos no ativo subjacente não produzem respostas simétricas na estrutura opcional.

Considere, por exemplo, uma call inicialmente fora do dinheiro. Um choque negativo de mesma magnitude frequentemente reduz apenas marginalmente um prêmio que já era pequeno, enquanto um choque positivo equivalente pode aumentar significativamente a probabilidade implícita de exercício lucrativo. Em termos econômicos, a opção passa a incorporar maior massa probabilística em cenários favoráveis.

Essa característica pode ser observada diretamente na própria fórmula de Black-Scholes. O preço da call é dado por

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Quando o ativo sofre elevação, o termo $\ln(S_0/K)$ cresce de forma não linear na direção da região exercível do contrato. Consequentemente, tanto $N(d_1)$ quanto $N(d_2)$ aumentam, elevando rapidamente o valor esperado da opção.

Por outro lado, quando o ativo se afasta ainda mais abaixo do strike, a função distribuição acumulada converge gradualmente para zero. Nessa região, o contrato já possui baixa probabilidade de exercício e, portanto, movimentos adicionais negativos produzem impacto marginal decrescente no prêmio.

Em termos geométricos, a função de payoff terminal da call,

$$\max(S_T - K, 0)$$

já introduz assimetria fundamental: existe piso inferior limitado em zero, mas potencial superior teoricamente ilimitado. A precificação presente da opção herda parcialmente essa característica probabilística antes mesmo do vencimento.

Sob volatilidade constante, essa dinâmica torna-se particularmente interessante porque toda alteração observada no prêmio decorre exclusivamente de três mecanismos principais:

- movimentação do ativo subjacente;
- passagem do tempo;
- convexidade intrínseca da estrutura.

Como a volatilidade implícita permanece fixa nesse primeiro cenário, elimina-se o efeito adicional de expansão ou compressão de prêmio associado a mudanças de percepção de risco do mercado. Dessa forma, torna-se possível estudar de maneira mais isolada o comportamento convexo das opções frente a choques sucessivos no ativo. A análise de alguns dos comportamentos de uma Call pode ser observado na figura 5 e 6:

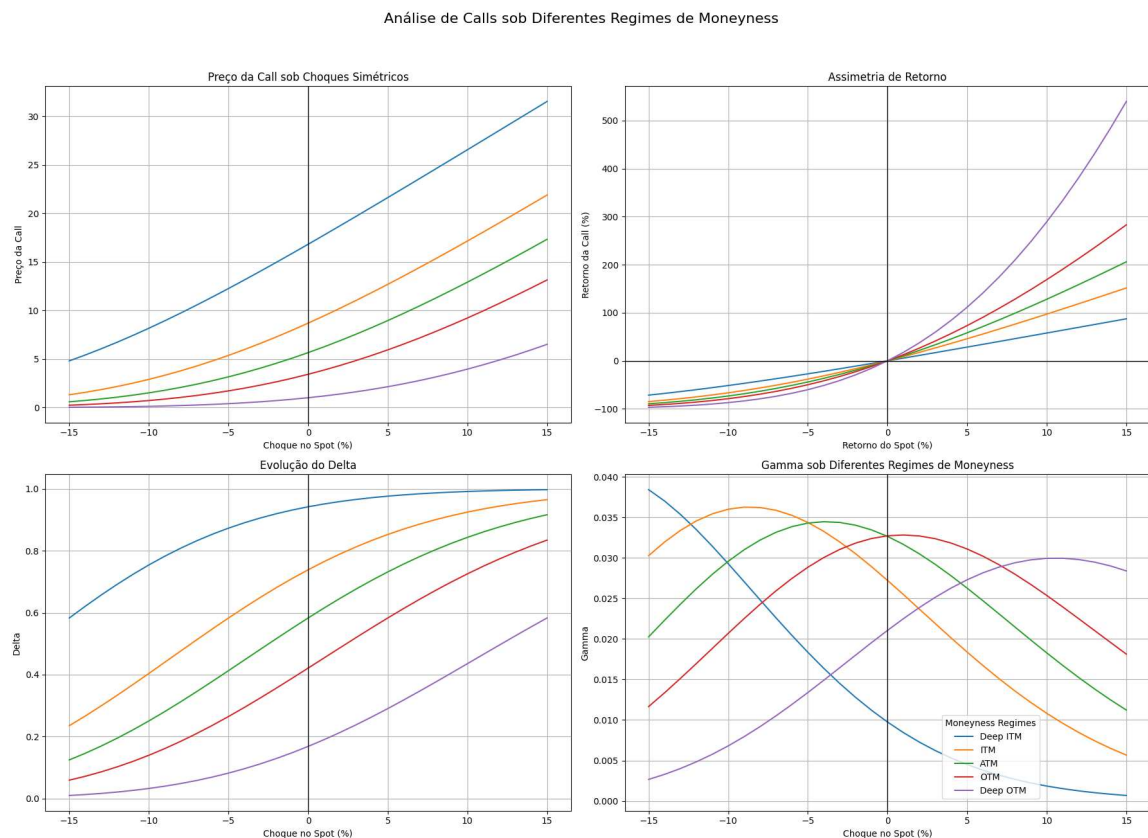


Figura 5 – Principais mudanças nas gregas e retorno para choques no subjacente

Análise de Calls OTM com Black-Scholes

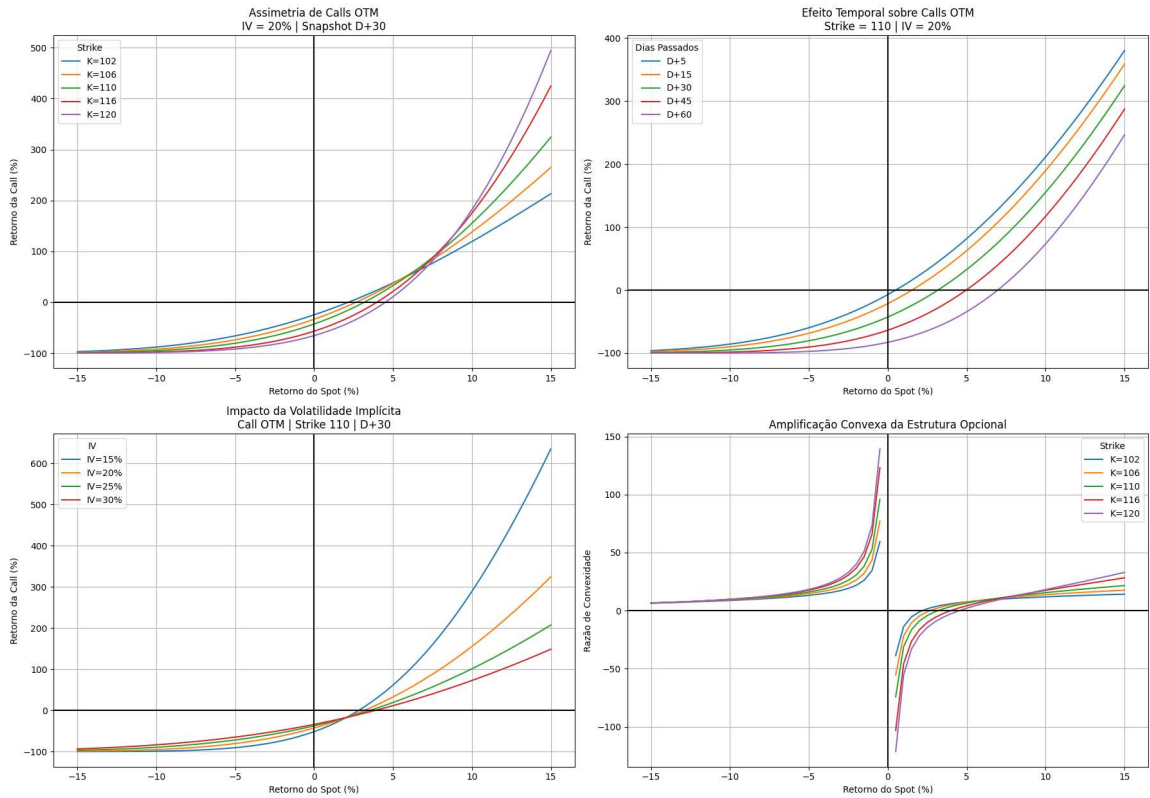


Figura 6 – Gráficos das principais características observadas, utilizando Black-Scholes

4.3 Cenário II - Aproximação Delta-Gamma

Como segundo cenário de análise, considera-se a aproximação Delta-Gamma, amplamente empregada em aplicações de gestão de risco para estimar a variação do valor de instrumentos derivativos sem a necessidade de reprecificação completa da posição.

Partindo de uma expansão de Taylor de segunda ordem em torno do estado inicial da opção, a variação de valor é aproximada por

$$\Delta V \approx \Delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2. \quad (4.1)$$

Os valores de Delta e Gamma são calculados apenas no instante inicial da simulação e mantidos constantes para todos os cenários subsequentes. Essa abordagem, frequentemente denominada *frozen Greeks*, é largamente utilizada em sistemas de monitoramento de risco devido à sua simplicidade computacional e à sua capacidade de capturar os principais efeitos locais associados às variações do ativo subjacente.

A partir dessa aproximação, são reproduzidos os mesmos experimentos realizados no cenário de Full Valuation, utilizando idênticas combinações de moneyness, volatilidade implícita, tempo até o vencimento e choques no ativo subjacente. Dessa forma, torna-se

possível avaliar posteriormente as diferenças entre a reprecificação integral da opção e sua aproximação por sensibilidades de segunda ordem, conforme figura 7:

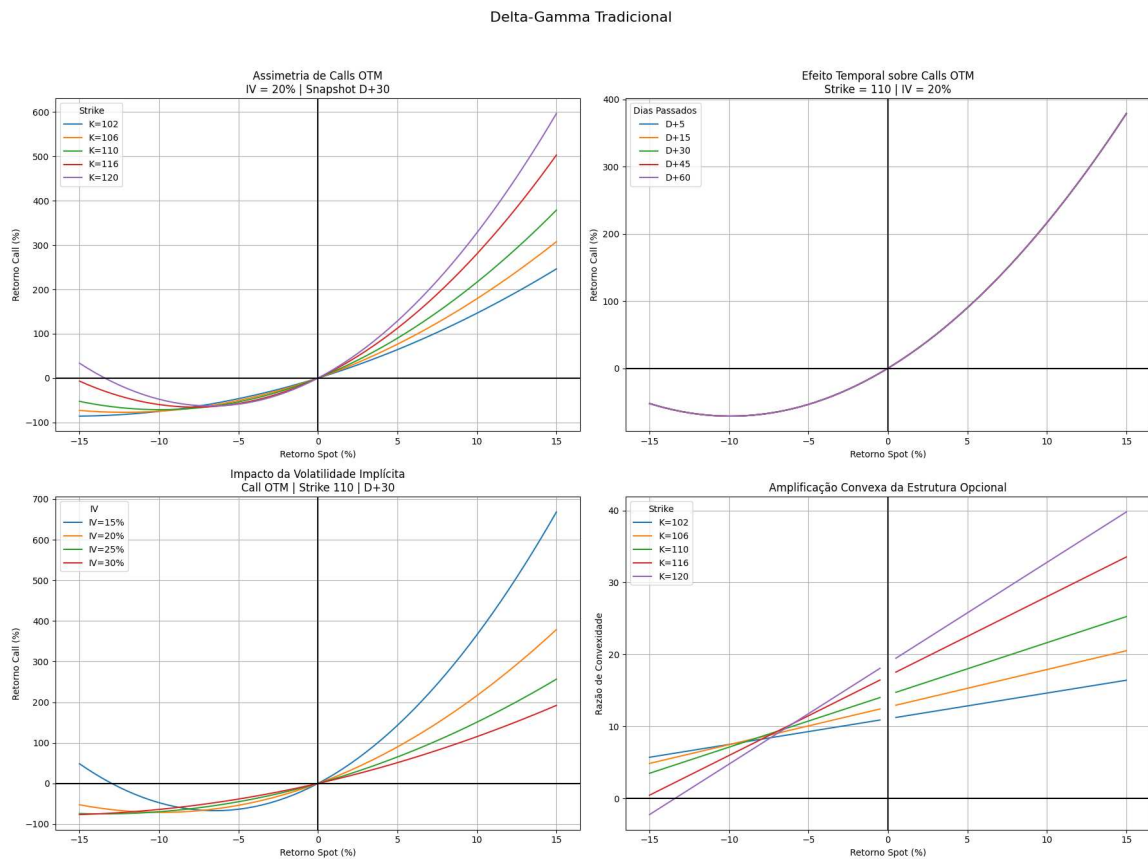


Figura 7 – Gráficos das principais características observadas, utilizando aproximação por Delta e Gamma

4.4 Cenário III — Aproximação Delta-Gamma com Gamma Ajustado

Embora a aproximação Delta-Gamma tradicional represente adequadamente pequenas variações no preço do ativo subjacente, sua precisão tende a diminuir para movimentos mais amplos do mercado. Essa limitação decorre da hipótese de que as sensibilidades calculadas no instante inicial permanecem constantes ao longo de todo o deslocamento analisado.

No caso de opções inicialmente fora do dinheiro, essa hipótese torna-se particularmente restritiva. À medida que o preço do ativo se aproxima da região *at-the-money*, o delta da opção aumenta e a curvatura da função preço torna-se mais pronunciada. Consequentemente, a utilização de um gamma constante pode subestimar parte da convexidade observada em movimentos mais intensos do ativo subjacente.

Com o objetivo de capturar parcialmente esse comportamento sem recorrer ao

processo completo de reprecificação da opção, propõe-se uma extensão da aproximação Delta-Gamma baseada em um gamma efetivo variável.

Inicialmente define-se o retorno necessário para que o ativo atinja o strike da opção,

$$C_K = \frac{K - S_0}{S_0}, \quad (4.2)$$

onde S_0 representa o preço inicial do ativo e K o preço de exercício.

Para um choque relativo C aplicado ao ativo subjacente, define-se a função

$$w(C) = \min \left(\frac{C}{C_K}, 1 \right), \quad (4.3)$$

que representa o progresso do movimento em direção ao strike. Dessa forma, $w(C) = 0$ corresponde à ausência de deslocamento e $w(C) = 1$ indica que o ativo já atingiu ou ultrapassou a região de exercício da opção.

O fator de ajuste é construído a partir do delta inicial da opção. Como o gamma atinge seus maiores valores na região *at-the-money*, associada aproximadamente a $\Delta = 0.5$, considera-se a distância entre o delta inicial e esse estado de referência. Define-se então

$$A = \frac{0.5 - \Delta_0}{0.5}, \quad (4.4)$$

onde Δ_0 representa o delta calculado no instante inicial.

O gamma efetivo é então definido por

$$\Gamma^* = \Gamma [1 + A w(C)]. \quad (4.5)$$

Observa-se que, para opções inicialmente próximas da região *at-the-money*, o fator de ajuste tende a ser pequeno. Por outro lado, opções mais distantes do strike apresentam valores maiores de A , permitindo uma intensificação mais pronunciada da curvatura à medida que o ativo se aproxima da região de exercício.

A variação estimada para o valor da opção passa então a ser dada por

$$\Delta V \approx \Delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma^* (\Delta S)^2. \quad (4.6)$$

A interpretação econômica dessa construção é direta. Enquanto a aproximação Delta-Gamma tradicional assume uma curvatura constante ao longo de todo o movimento, o modelo proposto permite que a contribuição do termo quadrático aumente gradualmente conforme a opção se aproxima do comportamento típico de uma opção *at-the-money*.

Dessa forma, busca-se incorporar parte da evolução das sensibilidades sem incorrer no custo computacional associado ao método de Full Valuation — e quem sabe, desenvolver uma análise de sensibilidade prévia para estruturar posições. A análise do comportamento da Call com Delta-Gamma com Gamma ajustado pode ser visto na figura 8:

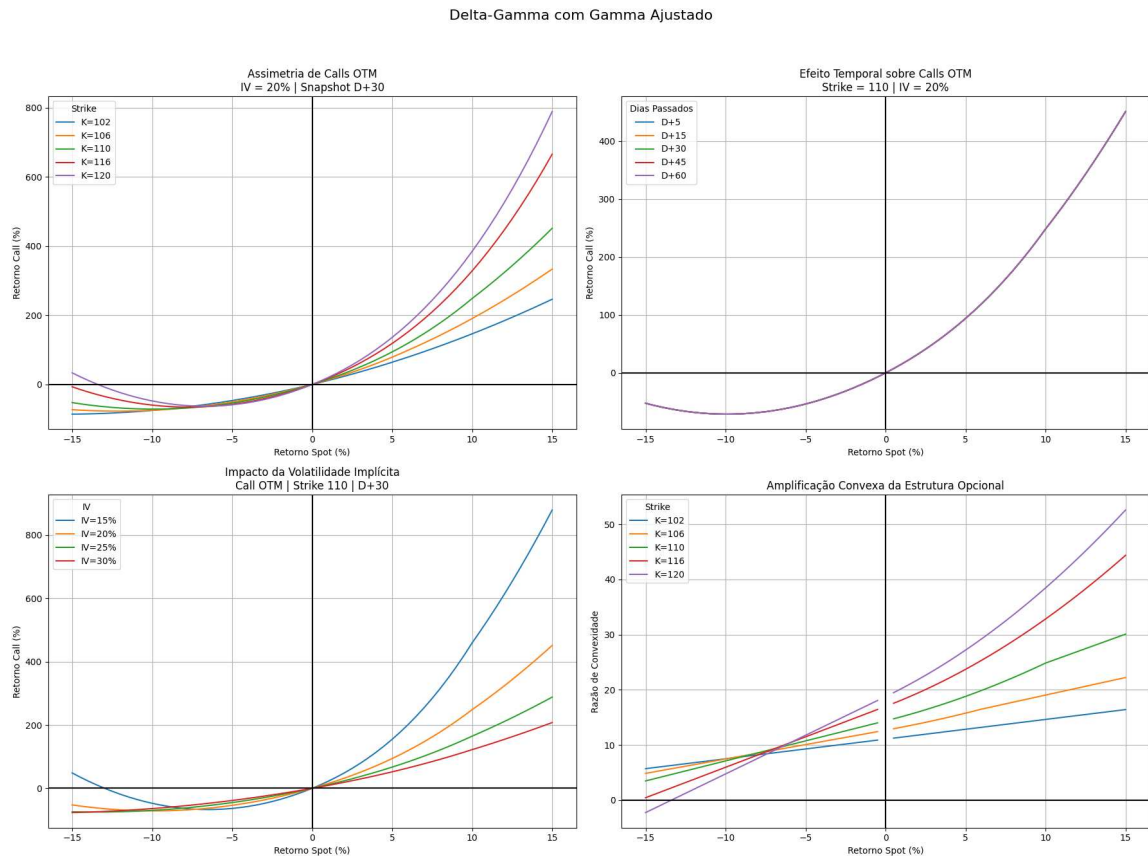


Figura 8 – Gráficos das principais características observadas, utilizando aproximação por Delta e Gamma ajustado

4.5 Análise Comparativa dos Cenários

A comparação entre os três cenários revela diferenças que vão além da precisão numérica — elas dizem respeito ao que cada metodologia é capaz de enxergar da posição. O Full Valuation (Cenário I) reproduz o comportamento completo da opção: a assimetria de retorno acentua-se conforme o ativo se aproxima do strike, o gamma atinge seu pico na região ATM e recua depois, e o theta erode o prêmio de forma visível e crescente com o tempo. No painel de efeito temporal da Figura 6, as curvas por snapshot estão claramente separadas um choque de +10% produz retornos sistematicamente menores para snapshots mais avançados, porque a opção tem menos tempo restante para converter o movimento favorável em valor.

Os Cenários II e III, ao congelarem as gregas no instante inicial, eliminam implicitamente o theta da análise. Nos painéis equivalentes das Figuras 7 e 8, as curvas por

snapshot praticamente se sobrepõem — o tempo passou, mas a posição não envelheceu. A consequência é que as aproximações produzem retornos mais altos do que o Full Valuation para o mesmo choque e mesmo snapshot, porque não descontam a erosão temporal que teria acontecido. Isso explica em parte por que as escalas de retorno do Cenário II chegam a 600% contra cerca de 500% do Cenário I para parâmetros equivalentes: não é que a aproximação captura melhor a convexidade, é que ela ignora um custo real da posição. O Cenário III, por amplificar o gamma ao longo do percurso até o strike, estende esse efeito ainda mais para movimentos amplos, produzindo retornos ainda maiores do que o Cenário II nos strikes mais distantes. A diferença entre os três cenários, portanto, não é apenas de precisão — é de quais dimensões econômicas cada um considera, bem como de que forma considera.

O painel de amplificação convexa conta uma história complementar. No Full Valuation, a razão entre o retorno da opção e o retorno do spot cresce de forma não linear e com curvatura variável — ela acelera na transição OTM para ATM e estabiliza depois. Nos Cenários II e III, essa razão cresce de forma aproximadamente linear com o choque positivo, sem o amortecimento observado quando a opção já entrou no dinheiro. O resultado prático é que as aproximações não capturam o formato correto da curva de convexidade, e sim uma versão que cresce demais para movimentos amplos, o que para fins de gestão de risco local — choques pequenos, horizonte muito curto —, isso não é grave. Para qualquer análise que envolva movimentos relevantes do spot ou comparação entre horizontes temporais distintos, a ausência do theta e o crescimento irrestrito do termo quadrático parecem tornar as aproximações economicamente imprecisas de forma sistemática.

5 Backtesting e Estudo Empírico

A modelagem desenvolvida nos capítulos anteriores comparou as três metodologias de avaliação — Full Valuation, Delta-Gamma tradicional e Delta-Gamma com gamma ajustado — em ambiente inteiramente teórico, no qual volatilidade, taxa de juros e choques no ativo subjacente eram parâmetros escolhidos pelo próprio autor. Essa escolha foi deliberada e permitiu isolar, sem ruído, o comportamento de cada aproximação frente a movimentos controlados do ativo. Há, porém, um limite natural nesse tipo de exercício, como por exemplo, o fato de nenhum mercado real produzir choques limpos de +10% mantendo a volatilidade implícita parada no mesmo nível do dia anterior. Antes de qualquer conclusão sobre qual metodologia é mais útil na prática, é necessário verificar se as diferenças encontradas no ambiente teórico se sustentam quando o ativo subjacente, o tempo até o vencimento e a volatilidade implícita evoluem simultaneamente, como de fato ocorre em bolsa.

É esse o papel do backtesting nesta monografia: não validar ou invalidar o modelo teórico — ele continua sendo uma ferramenta de compreensão dos mecanismos econômicos por trás da convexidade — mas confrontar suas previsões com uma sequência real de preços, gregas e volatilidades implícitas observadas dia a dia no mercado de opções do S&P 500. Se os Cenários II e III, construídos a partir de gregas congeladas no instante inicial, conseguem se aproximar do que de fato aconteceu com o prêmio da opção ao longo de 90 dias de pregão, isso reforça sua utilidade como atalho de avaliação. Se não conseguem, ou conseguem apenas em parte, o backtesting indica em que condições essa limitação se torna relevante na prática, bem como a importância das partes desprezadas correspondem no mercado real.

5.1 Dados Utilizados

Os dados empregados no backtesting correspondem a cotações de fechamento diário (end-of-day) de opções do índice S&P 500 (SPX) ao longo do ano de 2023, organizadas por mês de referência (Fonte: <<https://www.optionsdx.com/>>). Cada registro contém, para uma combinação específica de data de cotação, strike e data de vencimento, o preço do ativo subjacente, o prêmio de compra (bid, ask e last), e as principais gregas — delta, gamma, theta e volatilidade implícita — já calculadas pelo provedor da base. O ano de 2023 foi escolhido por reunir, dentro de um único período, regimes de mercado suficientemente distintos para testar as três metodologias sob condições variadas: um trimestre de alta gradual e relativamente estável no início do ano, um episódio de estresse agudo em torno da crise de bancos regionais americanos em março e abril, e uma fase de

queda seguida de recuperação parcial entre agosto e outubro — e porque era a fonte mais recente que não custava uma subscrição paga para ter acesso.

O uso de gregas e volatilidade implícita diretamente extraídas da base, em vez de recalculadas a partir de Black-Scholes-Merton, é uma escolha metodológica relevante. Reconstituir essas grandezas exigiria assumir algum valor de volatilidade implícita, o que introduziria uma camada adicional de aproximação e tornaria o exercício um teste do próprio processo de estimação de IV, mais do que um teste das três metodologias de avaliação que são o objeto deste trabalho. Ao utilizar os valores já calculados pelo provedor a partir dos preços efetivamente negociados, o backtesting parte da mesma superfície de volatilidade — incluindo seu skew — que estava de fato disponível a um participante de mercado em cada data analisada.

Os arquivos de dados utilizados, organizados por mês, estão disponíveis publicamente no repositório <<https://github.com/Osstrinha/TCC>>, bem como os códigos em anexo, permitindo a replicação integral dos resultados apresentados nesta monografia.

5.2 Desenho do Experimento

A dificuldade central de qualquer comparação entre exposição direta ao ativo subjacente e exposição via opções está na alavancagem inerente à segunda. Alocar o mesmo capital nominal nas duas estruturas não produz uma comparação economicamente significativa, pois uma posição em opções fora do dinheiro responde de forma desproporcionalmente mais intensa a movimentos do ativo do que a posição equivalente no spot. Adotou-se, portanto, um critério de equalização baseado em perda esperada: para cada combinação de strike e de tolerância a perda — definida como um choque hipotético negativo de 5%, 10% ou 15% no ativo subjacente —, calibra-se o número de contratos de opção de modo que a perda projetada nesse cenário desfavorável seja idêntica à perda que o mesmo capital sofreria se estivesse alocado diretamente no índice.

Essa calibração é realizada uma única vez, no instante inicial (D0) de cada janela de 90 dias, com base no delta e no gamma observados naquele momento, e o número de contratos resultante permanece fixo ao longo de toda a janela — exatamente como uma posição real, definida no momento da entrada, evoluiria sem rebalanceamento. A partir desse tamanho fixo, acompanha-se a posição em sete pontos no tempo (D0, D+15, D+30, D+45, D+60, D+75 e D+90), comparando, em cada um desses snapshots, o retorno que a posição em opção de fato produziria contra o retorno do spot no mesmo capital. O Cenário I utiliza, nesse acompanhamento, o prêmio real observado na base de dados para a mesma opção na data correspondente; os Cenários II e III utilizam exclusivamente o delta e o gamma calculados no D0, sem nunca consultar o prêmio real — de modo que a comparação entre os três cenários reflete diretamente a capacidade de cada aproximação

de prever, a partir da informação disponível no início da operação, o que de fato ocorreria com o valor da posição adiante no tempo.

O resultado dessa construção é uma matriz com quatro strikes (escolhidos para representar moneyness inicial de aproximadamente 2%, 5%, 10% e 15% fora do dinheiro), três níveis de tolerância a perda utilizados na calibração, sete snapshots temporais e três cenários de avaliação, replicada para as três janelas de mercado descritas anteriormente. É essa matriz, com 639 combinações distintas, que é analisada na seção de resultados a seguir - D0 e alguns vencimentos não existiam para o terceiro período do ano de 2023.

6 Resultados e Discussões

6.1 A Vantagem da Opção Real é Concentrada no Tempo, não Persistente

O primeiro padrão que chama atenção na matriz de resultados (https://github.com/Osstrinha/TCC/blob/main/tcc_resultados.csv) é que a opção real raramente supera o spot, e quando supera, faz isso de forma concentrada e pontual, não como uma tendência que se sustenta ao longo da janela. Na janela de janeiro a abril, por exemplo, todos os doze vértices testados — as quatro combinações de strike cruzadas com os três níveis de tolerância a perda — tiveram a opção real superando o spot exatamente no snapshot de 30 dias. Em nenhum outro ponto dessa mesma janela isso se repete: nos snapshots de 15, 45, 60, 75 e 90 dias, a opção perde do spot em todos os doze vértices, sem exceção. A Figura 9 deixa esse comportamento bastante claro — há um pico isolado em D+30 e nada antes ou depois dele.

As outras duas janelas contam histórias parecidas, ainda que com formas diferentes. Na janela de stress de abril a junho a opção praticamente não vence o spot até os 75 dias, quando finalmente um terço dos vértices passa a apresentar vantagem — como se a recuperação do choque inicial precisasse de tempo para se traduzir em valor para quem estava posicionado em opções. Já na janela de agosto a outubro, marcada por queda do índice, o oposto acontece: a taxa de vitória começa relativamente alta, 42% em D+15, e cai de forma constante a partir daí. Esse comportamento é coerente com uma posição que se beneficia, logo na entrada, da perda limitada ao prêmio, mas que perde essa vantagem relativa à medida que o tempo passa e a erosão temporal se acumula - dados visualmente apresentados na figura 9.

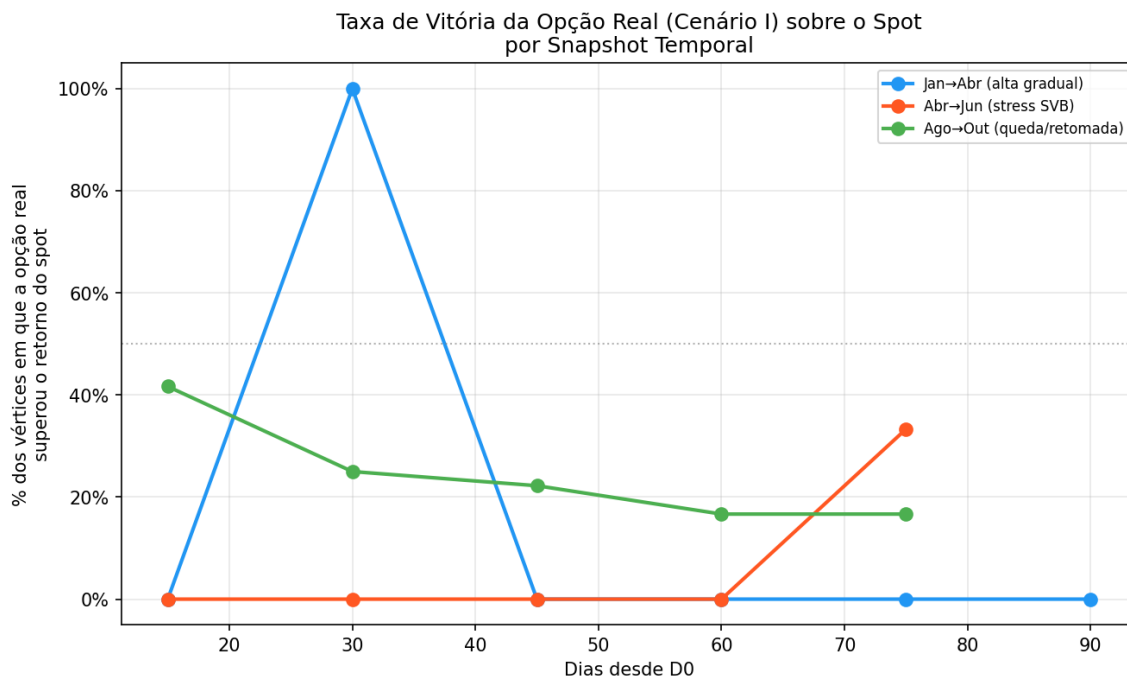


Figura 9 – Taxa de vitória da opção real (Cenário I) sobre o spot, por snapshot temporal e janela de mercado.

Daqui decorre uma implicação que vale registrar com cuidado: acertar a direção do mercado não é suficiente para que a opção supere o spot numa base de risco equivalente. É preciso também acertar o momento — o horizonte de avaliação precisa coincidir com a janela em que o ganho de convexidade ainda não foi consumido pelo tempo ou pela queda da volatilidade implícita. Essa segunda condição é bem mais difícil de atender do que a primeira, e os dados deixam isso evidente.

6.2 O Cenário Real Supera o Spot na Minoria dos Casos

Olhando para o conjunto inteiro de vértices, e não apenas para a evolução no tempo, o quadro fica ainda mais claro. A opção real superou o spot em 17% dos casos na janela de alta gradual, 7% na janela de stress e 27% na janela de queda e retomada. Na maior parte das combinações de strike, tolerância a perda e horizonte temporal testadas, teria sido melhor simplesmente manter o capital no índice — inclusive em boa parte dos casos em que o spot subiu.

Esse número contraria a intuição que vem da análise puramente teórica dos capítulos anteriores, em que a convexidade de uma call OTM aparece como vantagem estrutural diante de movimentos favoráveis do ativo. A convexidade existe nos dados reais também, isso não está em questão; o que muda é que ela frequentemente não chega a se manifestar como vantagem líquida, porque dois efeitos que a análise teórica deixou de lado de propósito — a erosão temporal do prêmio e a variação da volatilidade implícita — estão

atuando o tempo todo, comprimindo o valor da opção independentemente de qual direção o spot tenha tomado. E de fato: nas três janelas estudadas, a IV observada no D0 foi sistematicamente maior do que a IV observada nos snapshots seguintes.

Há uma exceção parcial que merece destaque, e ela aponta para algo interessante. Na janela de agosto a outubro, com o índice em queda na maior parte do tempo, a posição em opção — justamente por ter a perda limitada ao prêmio — caiu menos do que o spot em diversos vértices, sobretudo nos strikes mais distantes do dinheiro combinados com tolerância a perda mais ampla. Isso sugere que a vantagem prática da opção, pelo menos nos dados analisados, apareceu com mais força como proteção contra queda do que como amplificador de ganho. A próxima seção retoma esse ponto com mais detalhe.

6.3 As Aproximações Superestimam o Resultado Real

O terceiro resultado vem da comparação direta entre o que os Cenários II e III projetaram e o que de fato aconteceu, olhando os 639 vértices da matriz de uma vez. O Cenário II superestima o resultado real em 83,1% dos vértices, e o Cenário III chega exatamente à mesma proporção — com uma diferença: ele piora parte do erro justamente nos movimentos de alta mais fortes, onde o erro médio aumenta de forma perceptível em relação ao Cenário II. A Figura 10 mostra essa relação como uma dispersão de pontos: no eixo horizontal está o retorno real observado, no eixo vertical o retorno que cada aproximação projetou para a mesma posição, e a reta diagonal marca onde os dois coincidiriam. A maioria dos pontos fica acima dessa reta, e em vários casos — inclusive onde o resultado real foi negativo — as duas aproximações continuam projetando ganho, conforme comparação da figura 10.

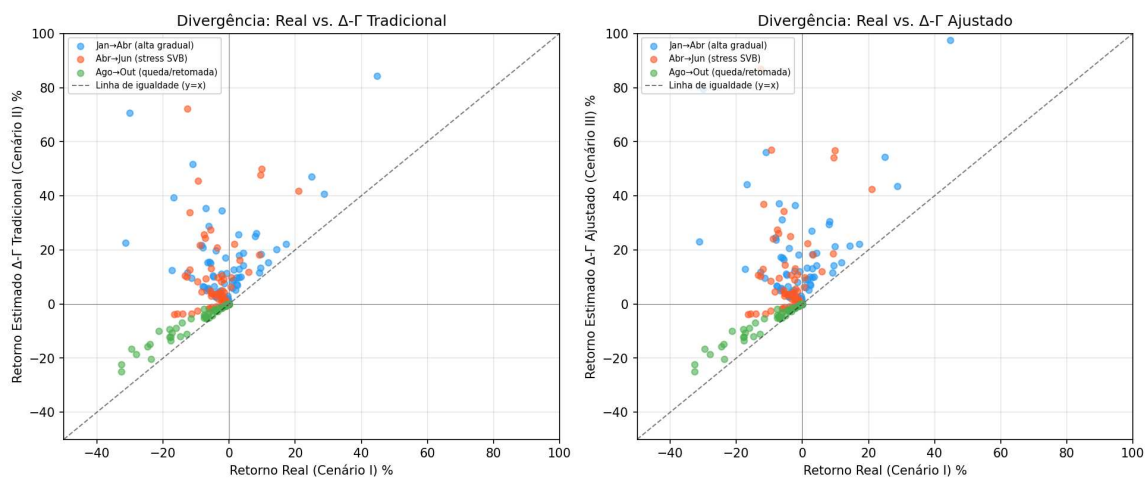


Figura 10 – Divergência entre o retorno real observado e o retorno projetado pelos Cenários II e III, para os 639 vértices da matriz de backtesting. Pontos acima da linha de igualdade indicam superestimação da aproximação em relação ao resultado real.

A causa desse viés é a mesma que os capítulos teóricos já haviam apontado, agora confirmada com dado real: ao congelar delta e gamma no instante inicial, os Cenários II e III simplesmente não têm como saber que o tempo passou ou que a volatilidade implícita mudou. Como os dois efeitos tendem a reduzir o valor da opção, e nenhum dos dois é capturado pela expansão de Taylor, o resultado projetado tende a ficar otimista demais frente ao que realmente acontece. Para um gestor que usasse qualquer um desses dois cenários para estimar o retorno esperado de uma posição em opções OTM ao longo de algumas semanas, esse otimismo sistemático não seria fruto de erro de cálculo — estaria embutido na própria hipótese de trabalhar com gregas congeladas.

6.4 A Estrutura Opcional Protege Mais do que Amplifica

Voltando à janela de agosto a outubro, onde o SPX passou a maior parte do tempo em queda, é possível isolar melhor o papel da opção como proteção, em vez de olhar apenas para sua capacidade de ampliar ganho, como mostra a figura 11.

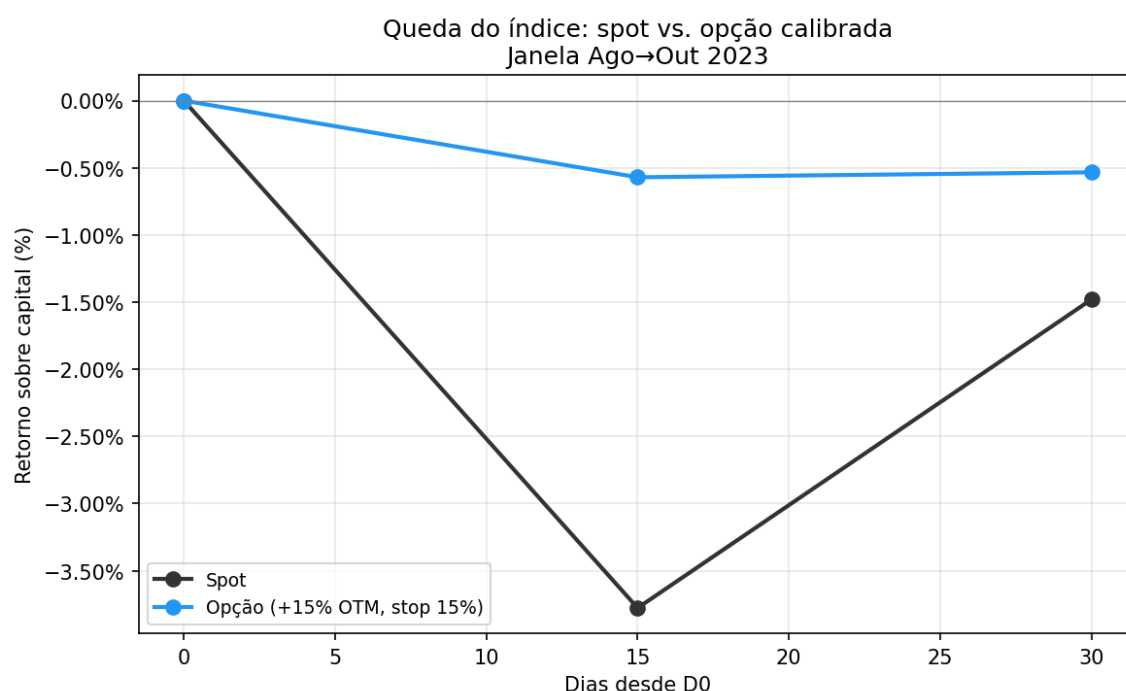


Figura 11 – Spot vs. opção (+15% OTM, stop 15%) na janela de agosto a outubro de 2023. O spot apresenta queda superior à da posição em opção calibrada pela mesma tolerância a perda.

No strike +15% OTM calibrado com tolerância de 15%, o spot recuou 3,78% em 15 dias enquanto a posição em opção, calibrada pela mesma régua de risco, ficou em -0,57% — praticamente parada. A Figura 11 mostra bem essa diferença: o spot cai consideravelmente e depois recupera parte do terreno perdido, e a opção, ao longo do

mesmo período, quase não se move. Não há nada de surpreendente nisso, na verdade, o prêmio de uma call tão distante do dinheiro já é pequeno em relação ao capital que a calibração lhe atribuiu, então o piso da posição — a perda máxima limitada ao prêmio — acaba protegendo mais do que se imaginaria a princípio. E o padrão não é exclusivo desse vértice: aparece de novo em outros strikes e outras tolerâncias dentro da mesma janela.

Esse achado pesa contra a leitura mais comum sobre opções OTM, normalmente associadas à ideia de amplificar upside. Nos dados de 2023, sob os critérios de calibração adotados aqui, elas se mostraram mais úteis como amortecedor de queda do que como motor de retorno.

6.5 A Quebra Numérica do Cenário II em Delta Baixo

Um dos vértices da matriz merece atenção isolada, porque o número que ele produz não tem como ser explicado como ruído estatístico — é uma falha da própria fórmula, e bem localizada, de forma representada na figura 12.

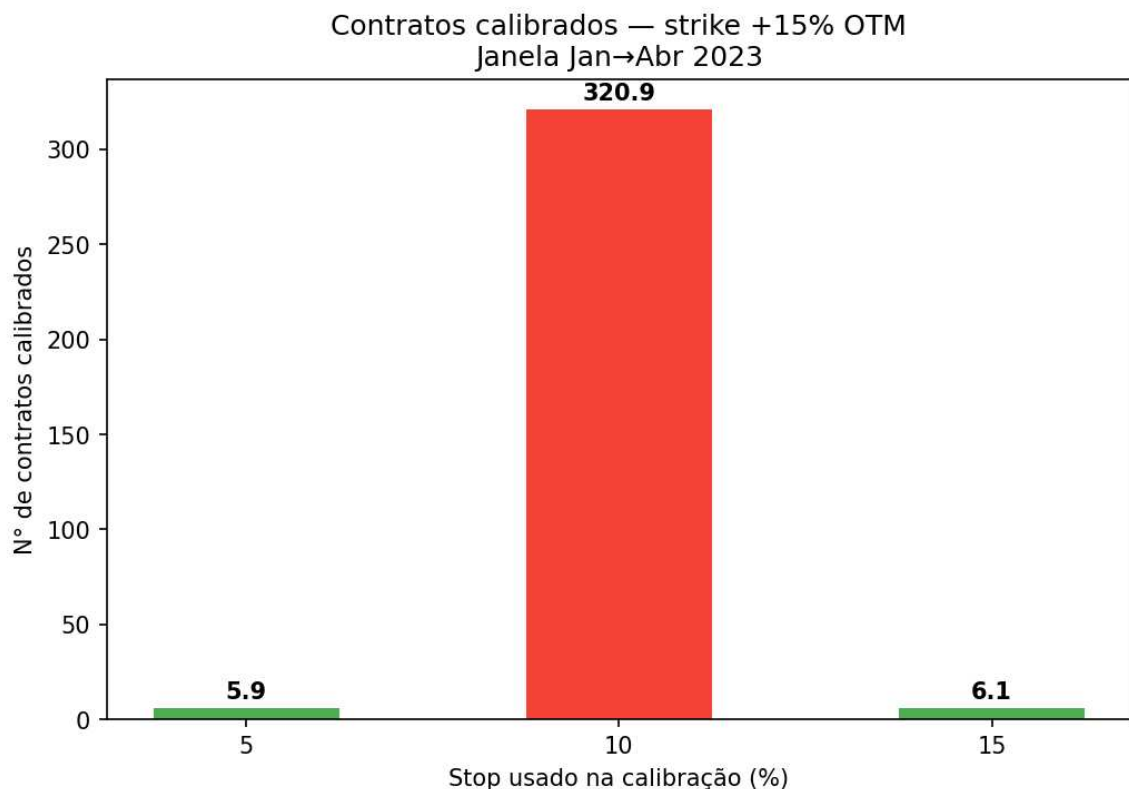


Figura 12 – Contratos calibrados para o strike +15% OTM, janela Jan→Abr, sob os três níveis de stop. O salto isolado no stop de 10% reflete o quase cancelamento entre os termos linear e quadrático da aproximação.

No strike +15% OTM da janela de janeiro a abril o delta inicial era de 0,088, baixo, como seria de se esperar de uma opção tão distante do dinheiro. Ao calibrar o

tamanho da posição para uma tolerância de 10%, o termo linear da expansão de Taylor projeta perda de aproximadamente -34 pontos para o choque negativo de referência. O termo de gamma, no entanto, sempre positivo por depender de $(\Delta S)^2$, soma de volta cerca de $+30$ pontos — e a perda líquida estimada acaba em torno de -4 pontos, bem menor do que deveria. Como o critério de calibração divide a perda de referência por esse número quase nulo, o tamanho da posição explode: para esse mesmo strike, calibrar com tolerância de 5% pede 5,9 contratos, calibrar com 15% pede 6,1, e calibrar com 10% pede 320,9 (Figura 12). Não é uma tendência crescente, é um salto isolado num único ponto.

Vale registrar que esse problema não é peculiaridade dos dados de 2023: é uma propriedade da fórmula do Cenário II, que pode aparecer em qualquer aplicação de Delta-Gamma congelado a opções de delta baixo. E o ajuste de gamma do Cenário III, por compartilhar a mesma base algébrica, não resolve essa falha — neste vértice específico, na verdade, ele a amplifica em vez de corrigi-la.

6.6 Gamma Ajustado vs. Gamma Tradicional: Divergência Crescente até um Limite

Por fim, vale comparar os Cenários II e III diretamente entre si, deixando de lado por um momento o Cenário I. A proposta do gamma ajustado era corrigir o Cenário II justamente onde ele mais se afasta da realidade — opções bem OTM — e os dados confirmam essa ideia, embora com um limite que vale a pena registrar, ilustrado na figura 13.

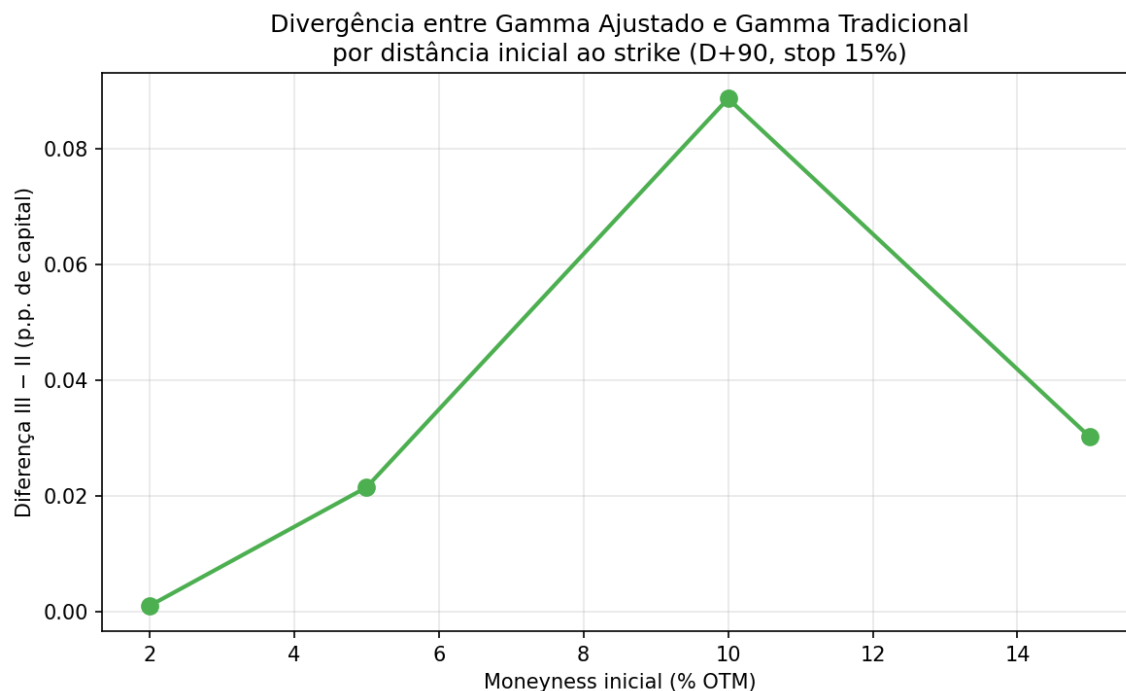


Figura 13 – Diferença de retorno entre os Cenários III e II, por moneyneess inicial (D+90, stop 15%). A diferença cresce até +10% OTM e recua em +15% OTM, ponto em que o gamma de base já é muito reduzido.

Olhando o snapshot de 90 dias com tolerância calibrada em 15%, a diferença entre os dois cenários é praticamente nula no strike +2% OTM, onde o delta inicial de 0,487 já está próximo da região at-the-money. Ela cresce nos strikes +5% e +10% OTM, chegando a quase 0,09 ponto percentual de capital neste último — o que é esperado, já que o fator $A = (0,5 - \Delta_0)/0,5$ cresce conforme o delta inicial se afasta de 0,5. A surpresa vem do strike +15% OTM, onde a diferença volta a cair (Figura 13). Isso não invalida a lógica do ajuste, mas mostra um limite, quando o delta está em 0,088 o próprio gamma já é pequeno, e multiplicar um gamma pequeno por um fator A grande ainda produz um efeito absoluto modesto. O ajuste precisa de algum gamma de base para amplificar — quando esse gamma já é quase nulo, simplesmente não há muito o que ajustar.

7 Conclusão

A pergunta que orientou este trabalho era relativamente simples de enunciar: até que ponto aproximações baseadas em Greeks conseguem reproduzir os resultados obtidos por reprecificação completa em opções OTM, e o que isso significa para quem precisa escolher entre exposição direta ao índice e exposição via opções. A resposta que os dados deram não é simples, mas tem um formato bem definido, e vale a pena percorrer o caminho até ela de novo, em vez de apenas listar os números.

A parte teórica do trabalho, desenvolvida no Capítulo 4, confirmou o que a literatura já sugeria: uma call OTM responde de forma assimétrica a choques simétricos no ativo, porque a curvatura introduzida pelo termo de gamma favorece os movimentos positivos e encontra um piso nos movimentos negativos. O Cenário III, com o gamma ajustado em função da proximidade ao strike, capturou parte da intensificação dessa convexidade melhor do que o Cenário II tradicional. Até aqui, tudo dentro do esperado — são exatamente os mecanismos que a expansão de Taylor deveria revelar.

O problema é que esses três cenários, sozinhos, descrevem um mundo que não existe. Volatilidade implícita constante, ausência de custos de transação, choques que acontecem sem o tempo passar — são hipóteses úteis para isolar um mecanismo, mas péssimas para prever o que realmente aconteceria com uma posição comprada em opções. Foi por isso que o backtesting com dados reais do SPX em 2023 não foi pensado como uma simples confirmação do que já se sabia, e sim como o teste que poderia derrubar boa parte da intuição construída até aquele ponto. Em boa medida, foi isso que aconteceu.

O resultado mais importante do backtesting é que a vantagem da opção real sobre o spot, quando existe, não é um efeito que se sustenta ao longo do tempo — ela aparece de forma concentrada em janelas específicas e desaparece no resto do horizonte. Na janela de janeiro a abril, por exemplo, todos os doze vértices testados bateram o spot exatamente no snapshot de 30 dias e em nenhum outro. Isso muda o que significa "acertar" uma aposta em opções: não basta prever a direção certa do mercado, é preciso também que o momento de avaliação coincida com a janela em que a convexidade ainda não foi consumida pelo tempo ou pela queda da volatilidade implícita. Agregando todos os vértices das três janelas estudadas, a opção real superou o spot numa minoria dos casos — entre 7% e 27%, dependendo do regime de mercado — o que contraria a leitura mais intuitiva de que a convexidade de uma OTM deveria se traduzir quase automaticamente em vantagem quando o ativo sobe.

A causa dessa discrepância entre teoria e prática ficou clara ao comparar diretamente o que os Cenários II e III projetavam contra o que de fato aconteceu: as duas

aproximações superestimaram o resultado real em 83,1% dos 639 vértices analisados. Isso não é coincidência nem erro de cálculo — é consequência direta de congelar delta e gamma no instante inicial. Sem mecanismo para capturar a erosão temporal nem a variação da volatilidade implícita, e como ambos os efeitos tendem a reduzir o valor da opção com o tempo, o resultado projetado por essas aproximações fica estruturalmente otimista. Um gestor que usasse Delta-Gamma congelado para projetar o retorno esperado de uma posição OTM ao longo de semanas estaria, na maior parte das vezes, enganado para cima — não por falha na conta, mas pela própria hipótese de trabalho.

Há também um achado que inverte parcialmente a narrativa mais comum sobre opções OTM. Na janela de agosto a outubro, marcada por queda do índice, a posição em opção — calibrada pela mesma régua de risco do spot — perdeu sistematicamente menos do que a exposição direta. O mecanismo é simples: o prêmio de uma call bem OTM já é pequeno frente ao capital que a calibração lhe atribui, e a perda estrutural limitada a esse prêmio acaba protegendo mais do que se imaginaria a princípio. Os dados de 2023, sob os critérios adotados aqui, sugerem que a opção funcionou com mais consistência como amortecedor de queda do que como motor de retorno — o oposto do que normalmente se espera de um instrumento alavancado.

O trabalho também encontrou um caso em que a fórmula do Cenário II simplesmente quebra. Para o strike mais distante do dinheiro, com delta inicial de 0,088, o termo quadrático da expansão de Taylor quase cancelou o termo linear no choque negativo de referência, fazendo o critério de calibração prescrever 320,9 contratos — contra 5,9 e 6,1 contratos para os outros dois níveis de stop testados no mesmo strike. Não é uma tendência gradual, é um salto isolado, e ele decorre de uma propriedade da própria fórmula, não de um acaso dos dados de 2023. O Cenário III, por compartilhar a mesma base algébrica, não corrige esse problema — nesse vértice específico, amplifica. E ao comparar os Cenários II e III diretamente entre si, ficou claro que o ajuste de gamma só ganha relevância até certo ponto: para o strike mais OTM de todos, com gamma de base já muito reduzido, a diferença entre as duas aproximações volta a cair, porque não há curvatura suficiente para o fator de ajuste amplificar.

Diante desse conjunto de resultados, a resposta à pergunta de pesquisa é a seguinte. Aproximações baseadas em Greeks conseguem reproduzir razoavelmente bem o comportamento da opção para choques pequenos e horizontes curtos — é exatamente para isso que foram desenhadas, e os sistemas de risco que as utilizam fazem isso com bom motivo. Fora dessa faixa, a aproximação se distancia do resultado real de forma sistemática e previsível, sempre na mesma direção: otimismo quanto ao retorno esperado. Quanto ao Gamma Ajustado proposto neste trabalho, ele de fato corrige parte do problema do Cenário II tradicional na região em que esse erro mais importa — o percurso de uma opção OTM rumo ao dinheiro — mas não resolve a ausência de theta, que continua

sendo a maior fonte de divergência frente ao Full Valuation - talvez superada pelo vega, em movimentos de stress, mas sendo necessário mais dados e análises para concluir.

Algumas limitações do estudo merecem ser registradas com a mesma franqueza com que os resultados foram apresentados. A análise cobriu apenas calls europeias sobre um único índice, em um único ano de mercado, com janelas fixas de 90 dias. Não foram testadas puts, nem estruturas combinadas como protective puts ou covered calls, embora a fundamentação teórica do Capítulo 3 as tenha introduzido. A volatilidade implícita foi tratada como dado observado, não como variável modelada — o que é metodologicamente correto para os fins deste trabalho, mas significa que qualquer extensão para horizontes mais longos precisaria incorporar alguma hipótese sobre a dinâmica da própria IV, e não apenas sobre o preço do ativo subjacente. A calibração do tamanho da posição no Cenário I, por fim, utilizou a aproximação Delta-Gamma como referência no choque negativo, uma escolha justificada pela ausência de um snapshot exato naquele nível de spot, mas que introduz uma pequena inconsistência interna, uma vez que o meio pela qual se obtém o limite é utilizando a modelagem que está sendo testada.

Como extensões diretas deste trabalho, fica evidente a utilidade de repetir o mesmo desenho de backtesting em anos com regimes de mercado distintos de 2023 — um ano de queda acentuada e sustentada, por exemplo, testaria de forma mais dura a hipótese de proteção discutida na Seção 6.4. Também seria natural estender a comparação a puts e a estruturas combinadas, replicando a mesma lógica de equalização por perda esperada. Por fim, a quebra numérica identificada no Cenário II sugere uma pergunta em aberto: existe uma forma de modificar a fórmula de Delta-Gamma para que ela nunca produza uma perda estimada menor do que a do termo linear isolado, sem abandonar a simplicidade computacional que torna esse tipo de aproximação atraente em primeiro lugar.

No fim, o que este trabalho mostra é que a convexidade de uma opção OTM é real e está presente em cada um dos três cenários estudados de uma forma ou de outra. O que não é automático é a conversão dessa convexidade em vantagem líquida sobre uma posição direta no índice. Essa conversão depende do tempo certo, da volatilidade implícita não subir contra a posição, e de a aproximação usada para tomar a decisão não estar olhando para um mundo mais simples do que o mercado real entrega.

Referências

- Black e Scholes 1973 BLACK, F.; SCHOLLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.
- Hayek 1945 HAYEK, F. A. The use of knowledge in society. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 35, n. 4, p. 519–530, 1945. Disponível em: <<https://aeaweb.org>>.
- Heston 1993 HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, v. 6, n. 2, p. 327–343, 1993.
- Hull 2018 HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10. ed. New York: Pearson Education, 2018.
- Kindleberger 1984 KINDLEBERGER, C. P. *A Financial History of Western Europe*. London: George Allen & Unwin, 1984. Primeira edição publicada em 1984; referência também disponível pela Oxford University Press (1993, 2. ed.).
- Merton 1973 MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973.
- Merton 1976 MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, v. 3, n. 1-2, p. 125–144, 1976.
- Mishkin 2019 MISHKIN, F. S. *The Economics of Money, Banking, and Financial Markets*. 12. ed. Harlow: Pearson Education, 2019.
- Natenberg 1994 NATENBERG, S. *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*. New York: McGraw-Hill, 1994.
- Neal 1990 NEAL, L. *The Rise of Financial Capitalism: International Capital Markets in the Age of Reason*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- Ross 1976 ROSS, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976.
- Veritasium 2024 VERITASIVM. *The Equation That Beat Wall Street*. 2024. YouTube. Duração: 30min10s. Disponível em: <https://youtu.be/A5w-dEgIU1M?si=Mxx2XKAyA8WA_3-f>.