



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



OCTAVIO AUGUSTO MOZANER

**EXPERIMENTOS SOBRE A LEI DOS GRANDES NÚMEROS E
POSSÍVEIS UTILIZAÇÕES EM SALA DE AULA**

SÃO CARLOS - SP

2024

OCTAVIO AUGUSTO MOZANER

**EXPERIMENTOS SOBRE A LEI DOS GRANDES NÚMEROS E
POSSÍVEIS UTILIZAÇÕES EM SALA DE AULA**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador(a): Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo

SÃO CARLOS - SP

2024

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar, de forma didática e acessível, os princípios fundamentais da Lei dos Grandes Números e sua importância na compreensão de fenômenos aleatórios. Para isso, utiliza visualizações gráficas que têm a função de ilustrar comportamentos típicos da convergência estatística e apoiar a construção da intuição do leitor. Também são exploradas simulações computacionais, incluindo o Experimento da Agulha de Buffon, com o propósito de mostrar como modelos probabilísticos podem ser observados e interpretados por meio de repetição, variabilidade e aproximações numéricas. Além disso, o texto adota uma abordagem pedagógica voltada a facilitar o entendimento gradual dos conceitos, conectando teoria, experimentação e representações visuais. Assim, o trabalho busca oferecer uma base sólida e motivadora para estudos posteriores em probabilidade, estatística e aplicações relacionadas à Lei dos Grandes Números.

Palavras-chave: Lei dos Grandes Números, Simulação Computacional, Agulha de Buffon, Ensino de Probabilidade, Visualização de Dados.

Abstract

This work aims to present, in a didactic and accessible manner, the fundamental principles of the Law of Large Numbers and its importance in understanding random phenomena. To achieve this, it employs graphical visualizations that serve to illustrate typical behaviors of statistical convergence and support the development of the reader's intuition. Computational simulations are also explored, including Buffon's Needle Experiment, with the purpose of demonstrating how probabilistic models can be observed and interpreted through repetition, variability, and numerical approximations. Furthermore, the text adopts a pedagogical approach designed to facilitate the gradual understanding of concepts by connecting theory, experimentation, and visual representations. Thus, the work seeks to provide a solid and motivating foundation for further studies in probability, statistics, and applications related to the Law of Large Numbers.

Keywords: Law of Large Numbers, Computational Simulation, Buffon's Needle, Probability Education, Data Visualization.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	A LEI DOS GRANDES NÚMEROS	9
2.1	Formulação Intuitiva	9
2.1.1	Lançamento de Moedas	9
2.1.2	Análise da Diferença Acumulada	11
2.1.3	Estabilidade da Média em Múltiplas Simulações	13
2.2	Formalização Matemática e Definições	13
2.3	A Lei dos Grandes Números e a Vantagem da Casa	15
2.3.1	Exemplo Matemático de Apostas em Dados	15
3	A AGULHA DE BUFFON	16
3.1	Experimento Didático	16
3.2	Um outro jeito de ver o experimento	20
3.2.1	Estimativa de π	22
3.2.2	Aspectos Históricos	22
3.3	Como Funciona o Experimento - Simulações	23
4	A MÁQUINA DE GALTON (OU TABULEIRO DE GALTON)	26
4.0.1	História	27
4.0.2	Modelo Matemático	27
4.0.3	O Triângulo de Pascal	28
4.0.4	Interpretação Matemática	29
4.0.5	O Histograma e a Lei dos Grandes Números	30
5	APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS E PROPOSTAS PARA A SALA DE AULA DO MODELO DE GALTON	34
5.2	Explorando a Aleatoriedade com Materiais Concretos	34
5.2.1	A Máquina de Galton e a Simulação via Lançamento de Moedas	34
5.2.2	Utilização em Sala de Aula	35
5.2.3	Surgimento da Curva de Galton	37
6	APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS E PROPOSTAS PARA A SALA DE AULA DO PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON	46
6.2	Implementação Experimental e Convergência Numérica via Materiais Concretos	46

6.2.1	A Agulha de Buffon e a Simulação via Lançamento de Palitos	46
6.2.2	Utilização em Sala de Aula	47
6.2.3	A Convergência de π	50
6.3	Como Organizar Didaticamente a Atividade em Sala De Aula	52
6.3.1	Organização da Atividade Experimental	52
7	APLICAÇÕES PEDAGÓGICAS E PROPOSTAS PARA A SALA DE AULA: LANÇAMENTO DE MOEDAS	55
7.0.1	Representação dos Lançamentos de Moedas Utilizando Matrizes	55
7.0.2	Implementação Experimental	55
7.0.2.1	Cenário 1: Flutuação Padrão (50 Caras)	55
7.0.2.2	Cenário 2: Flutuação Estável (52 Caras)	56
7.0.2.3	Cenário 3: Desvio Inicial e Compensação Tardia (49 Caras)	57
7.0.2.4	Cenário 4: Equilíbrio Quase Perfeito (50 Caras)	57
7.0.2.5	Cenário 5: Efeito Gangorra (51 Caras)	58
7.0.2.6	Cenário 6: Concentração de Aglomerados (53 Caras)	58
7.0.2.7	Cenário 7: Zona Normal (57 Caras)	59
7.0.3	Utilização em Sala de Aula	59
7.0.3.1	Experimento	62
7.0.4	Organização da Atividade	62
8	A UTILIZAÇÃO DA IA NO APRENDIZADO DA MATEMÁTICA .	65
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

1 Introdução

A ciência busca desvendar a ordem subjacente a dados empíricos, que frequentemente se apresentam de forma limitada e ruidosa. A ferramenta fundamental para essa tarefa é um pilar da teoria da probabilidade: a **Lei dos Grandes Números (LGN)**. Este princípio estabelece que a média de uma amostra, coletada a partir de um experimento aleatório repetido, converge para o seu valor esperado teórico. Tal preceito não é apenas uma abstração; é a fundação da inferência estatística.

A formalização da LGN marcou a maturação da probabilidade como ciência. Jacob Bernoulli iniciou este percurso com a Lei Fraca, demonstrando que a frequência relativa de um evento converge para sua probabilidade. A teoria foi expandida por matemáticos como Poisson e Chebyshev, culminando no trabalho de Borel e Cantelli, que formularam a Lei Forte, assegurando a convergência quase certa da média amostral um resultado de notável robustez.

As implicações da LGN são vastas. O problema da Agulha de Buffon, que permite estimar π por meios estocásticos, serve como um precursor conceitual dos métodos de Monte Carlo. Hoje, essas simulações computacionais são indispensáveis para resolver problemas complexos em áreas como finanças, física e computação gráfica.

Na era do *Big Data*, a relevância da LGN é ainda maior. A disponibilidade massiva de dados garante que os estimadores estatísticos e os parâmetros de modelos de aprendizado de máquina convirjam para seus valores ótimos. Em finanças e ciências atuariais, essa estabilidade das médias de longo prazo é o que permite a precificação de ativos e a gestão de riscos.

Portanto, a forma como a repetição se transforma em uma poderosa ferramenta de medição, faz de sua natureza assintótica um levantar de questões essenciais sobre a confiabilidade de amostras finitas, que nos leva ao problema central deste trabalho:

Como a Lei dos Grandes Números conecta a observação empírica à teoria, permitindo tanto a estimação de parâmetros (como no experimento de Buffon) quanto o teste de hipóteses (como avaliar se uma moeda é honesta)?

Este estudo se propõe a explorar essa dualidade, utilizando a LGN como alicerce para a compreensão dos mecanismos de estimação e inferência. Além disso, todo este Trabalho de Conclusão de Curso foi desenvolvido por autoria própria, embora tenha passado por revisões e apoios pontuais com o uso de ferramentas de Inteligência Artificial. Assim,

eventuais erros ainda podem estar presentes, mas a responsabilidade integral pelo conteúdo é minha. Reconheço que a IA não possui a capacidade humana de compreender conceitos em profundidade, elaborar interpretações originais ou apresentar explicações verdadeiramente didáticas; ainda assim, foi essencial no processo de escrita, especialmente diante das minhas dificuldades em organizar ideias de forma clara e dentro do rigor acadêmico.

A metodologia adotada para a construção deste texto envolveu uma parceria constante entre meu esforço intelectual e a tecnologia. Utilizei a IA muito além de uma simples revisão: ela funcionou como suporte de estudo, auxiliando na compreensão de conceitos teóricos, na organização da estrutura textual, no desenvolvimento dos códigos de simulação e na criação dos gráficos apresentados. Embora estas ferramentas não substituam o entendimento humano, elas me ajudaram a transformar minha visão intuitiva sobre a Lei dos Grandes Números em uma apresentação mais clara, formal e acessível. Este documento, portanto, é resultado direto do meu aprendizado, planejamento e interpretação dos fenômenos matemáticos estudados. As figuras e simulações mesmo quando geradas ou ajustadas digitalmente foram concebidas, analisadas e validadas por mim, garantindo precisão e coerência com os objetivos da pesquisa. A tecnologia serviu apenas como ponte para superar limitações técnicas e expressar com fidelidade o conhecimento que desenvolvi ao longo deste trabalho.

2 A Lei dos Grandes Números

É fácil interpretar mal a Lei dos Grandes Números. Muitas vezes esperamos que os resultados de eventos aleatórios se equilibrem rapidamente, mas isso não é como a probabilidade funciona de verdade.

Muitas vezes pensamos que depois de alguns resultados meio esquisitos, o contrário é mais provável para “consertar” as coisas. Por exemplo, depois de cinco caras seguidas numa moeda, parece que virá coroa. Esse modo de pensar chama-se a *“falácia do jogador”*, e se baseia na ideia errada de que o passado influencia resultados futuros em eventos aleatórios. A realidade é que a chance de dar cara ou coroa é sempre 50%, independentemente do que já aconteceu.

Então surge uma pergunta importante: **como saber se uma moeda é justa?** Esta pergunta nos convida a pensar em como a probabilidade e alguns testes podem mostrar se algo é realmente equilibrado.

2.1 Formulação Intuitiva

Um único resultado, como tirar cara em um lançamento de moeda, não prova nada sobre se o processo é justo. Com mais lançamentos, como, por exemplo, 100 repetições, espera-se uma distribuição mais ou menos igual entre caras e coroas. É nessa hora que a ideia de **média amostral** começa a mostrar sua utilidade. A Lei dos Grandes Números não diz que a aleatoriedade desaparece rapidamente. Ela diz que quanto mais tentativas fizer, a média dos resultados se aproximará do que se espera. Numa moeda justa, espera-se que cara saia 0.5 (ou 50%). A lei garante que, com muitos lançamentos, a quantidade de caras se aproximará disso, mas não de uma vez. Sequências esquisitas aparecem com poucos lances; isso mostra que é aleatório. A importância da Lei dos Grandes Números fica clara quando se olha para um conjunto maior de eventos, vendo o que acontece em muitas repetições.

2.1.1 Lançamento de Moedas

Ao jogar uma moeda justa repetidas vezes, não há instante definido em que a proporção de caras e coroas fica idêntica e se mantém imutável. O que observamos é um processo gradual: as proporções tendem a se aproximar da chance teórica de 50%, mas continuam a variar devido à aleatoriedade inerente aos arremessos.

Podemos representar esses resultados por meio de um gráfico. No eixo X , temos o

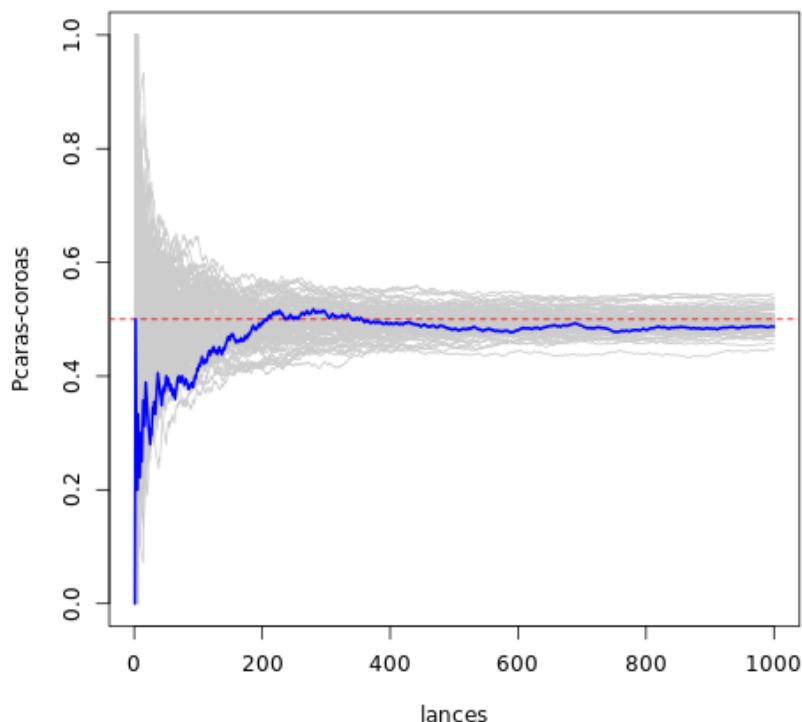


Figura 1 – Variação na proporção de caras e coroas ao longo de 100 experimentos com 1.000 lançamentos cada.

número de lançamentos, enquanto o eixo Y representa a proporção de coroas nos resultados. A linha horizontal 0.5 significa um equilíbrio perfeito (50%/50%). Esse gráfico permite visualizarmos como a discrepância entre os resultados se comporta à medida que o número de lançamentos aumenta. O gráfico ilustrado (Figura 1) simula cem cenários do lançamento de uma moeda, cada um com mil jogadas.

Para compreendê-lo, o “equilíbrio” que tende a surgir nos vários lançamentos, tente compreender o raciocínio: no primeiro lançamento caiu cara (+1 passo), mostrando uma distância média de +1. No segundo, deu coroa (−1 passo); anda-se um passo pra frente e um pra trás, a distância média vira $(+1 + -1)/2 = 0$, de volta ao início. No terceiro, cara de novo (+1 passo), e a distância média vai pra $(+1 + -1 + +1)/3 = +0,33$.

Esse exemplo mostra que, embora cada jogada seja ao acaso, no longo prazo os resultados ficam estáveis. As linhas cinza do gráfico expõem os caminhos individuais de cada 1000 lançamentos, enquanto a **azul é uma das simulações aleatória que foi destacada para melhor acompanhamento.**

Nos primeiros lançamentos, as linhas cinzas se mostram muito instáveis: uns participantes andam mais, outros recuam, e a distância média muda muito. Porém, ao passo que o número de participantes, se assim podemos chamar para melhor entendimento, aumenta,

nossas instabilidades do começo começam a se organizar rapidamente, de modo que se alinhem sem muitos picos de oscilações, comparado ao início. Mas, conforme aumentam as jogadas/amostras, vê-se uma aproximação notável entre as caras e coroas.

Assim, ainda é possível estimar o (*erro padrão da proporção amostral*) e sua distribuição, de modo que consigamos estimar a probabilidade da diferença entre caras e coroas, como observado, vimos que a diferença entre a proporção observada e a proporção esperada 50%, esteve próxima de zero. Contudo, não existe uma regra que determine, de forma exata, o número de ensaios a partir do qual essa igualdade ira se manter. Mesmo que a proporção chegue a 50% por um instante, ela pode se afastar novamente.

Em tentativas reiteradas, a diferença proporcional entre caras e coroas tende a diminuir à medida que os lançamentos aumentam, aproximando-se vagarosamente de zero, sem alcançá-lo totalmente. Vamos ver a seguir do mesmo modo que fizemos com o gráfico anterior, porém agora “invertendo” as situações.

2.1.2 Análise da Diferença Acumulada

Do mesmo jeito que fizemos no gráfico anterior, vamos simular 100 situações de lançamento de uma moeda, cada uma com 1.000 jogadas. Diferente do gráfico anterior, aqui vamos observar a diferença acumulada entre o número de caras e o número de coroas, ambas vão estar representada no eixo vertical Y , como $n_{\text{cara}} - n_{\text{coroa}}$. Vamos tentar entender esse construção do mesmo modo que fizemos anteriormente. Considere o seguinte raciocínio: no primeiro lançamento saiu CARA (+1), assim temos que a diferença acumulada vai ser igual a +1. No segundo lançamento saiu COROA (-1), e a contagem retorna a 0, pois $(+1) + (-1) = 0$. No terceiro lançamento saiu novamente CARA (+1), fazendo a diferença acumular/oscilar para +1, e assim sucessivamente.

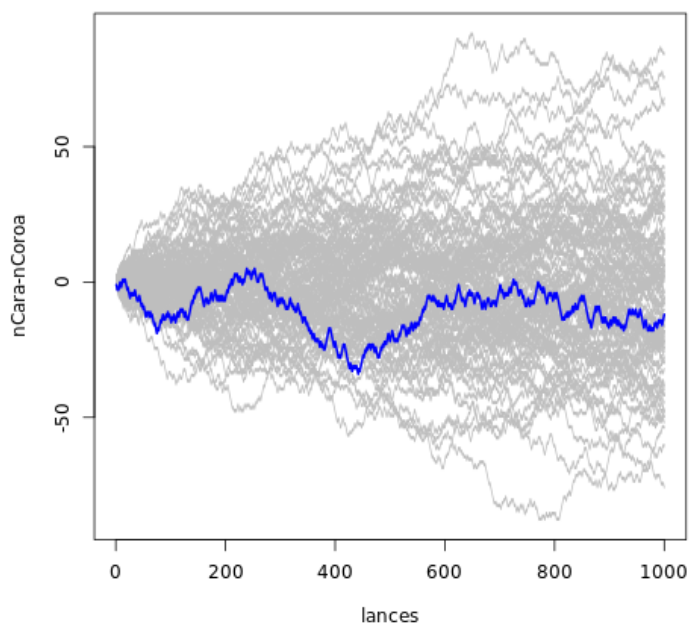


Figura 2 – Variação acumulada entre o número de caras e coroas em 1.000 lançamentos, avaliada em 100 experimentos independentes.

Contudo, podemos observar que a partir do nosso raciocínio, é possível visualizar que no gráfico as linhas cinzas representam cada trajetória individual de cada simulação, enquanto a linha azul corresponde a uma delas destacada para facilitar a visualização. Nos primeiros lançamentos, as trajetórias oscilam de maneira acentuada, ora favorecendo as CARAS, ora as COROAS. À medida que o número de jogadas aumenta, não ocorre uma estabilização em torno de zero, mas sim uma dispersão crescente: algumas trajetórias acumulam mais CARAS, outras mais COROAS, e o conjunto se abre em forma de leque.

Esse comportamento é característico de um passeio aleatório. Embora a proporção de CARAS e COROAS tenda a se equilibrar em torno de 50% para cada lado (Lei dos Grandes Números), a diferença absoluta entre eles não se anula. Pelo contrário, a dispersão tende a aumentar conforme o número de passos cresce, comportando-se como um passeio aleatório. Assim, após 1.000 lançamentos, é comum observar uma diferença de algumas dezenas entre o número de CARAS e de COROAS, ainda que a proporção relativa continue próxima do equilíbrio.

Imagine um bêbado saindo de um bar. A cada passo, ele tem 50% de chance de ir para a direita e 50% de chance de ir para a esquerda. Onde ele estará depois de 100 passos?

Ele não estará a 100 passos de distância, porque muitos passos se cancelarão um para a direita, outro para a esquerda, ... Também é muito improvável que ele esteja exatamente no ponto de partida, no bar. Isso é equivalente ao lançamento de uma moeda: “cara” representa um passo para a direita (+1) e “coroa” um passo para a esquerda (−1).

2.1.3 Estabilidade da Média em Múltiplas Simulações

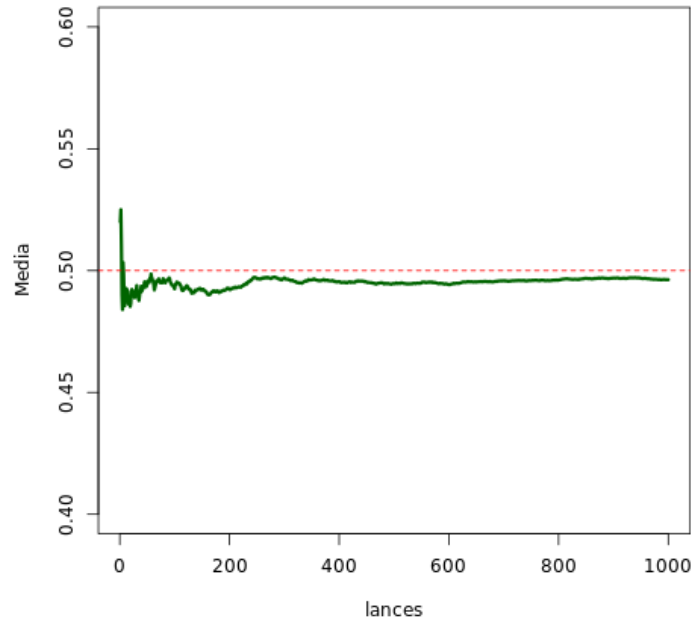


Figura 3 – Média de 100 Simulações com 1.000 Lançamentos Cada

Por um outro lado, no gráfico acima, não se veem trajetórias separadas; o que se observa é a média das proporções de caras em 100 experimentos independentes, totalizando 100.000 lançamentos. Apesar da variabilidade nas linhas de cada tentativa individual, a linha que reflete a média de todas as simulações apresenta uma estabilidade notável, alinhando-se quase com exatidão ao valor esperado de 0,5, logo desde o início.

Portanto, utilizaremos a Estatística a fim de compreender melhor como esse fenômeno ocorre, observando e quantificando a distância entre os valores obtidos e o valor esperado.

2.2 Formalização Matemática e Definições

Também chamada de Lei de Khinchin, a *Lei dos Grandes Números* (LGN) determina que a média da amostra $\bar{X}_n$ converge em probabilidade para o valor esperado μ . A lei estabelece que, dada qualquer margem de erro $\varepsilon > 0$ (não importa o quão pequena seja), com uma amostra suficientemente grande, haverá uma probabilidade muito alta de que a média das observações se aproxime do valor esperado. Isto é, dentro da margem ε .

A variância pode ser diferente para cada variável aleatória em séries, mantendo o valor esperado constante. Se as variâncias são limitadas, a lei é aplicada, conforme demonstrado por Chebyshev em 1867. No caso em que os valores esperados (μ_i) mudem durante as séries, podemos aplicar a lei ao desvio médio dos respectivos valores esperados, de modo

que esse desvio $(\bar{X}_n - \bar{\mu}_n)$ converge para a probabilidade 0. As provas de Chebyshev são válidas mesmo quando a variância da média dos primeiros n valores tende a 0 à medida que $n \rightarrow \infty$.

Essa “Lei” também é conhecida como Lei Fraca dos Grandes Números (LFGN), e esse nome deve-se ao fato de as variáveis aleatórias convergirem de maneira fraca, ou em probabilidade. O termo aplica-se, geralmente, no caso de as variáveis aleatórias serem independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e possuírem um valor esperado finito.

Existe uma versão chamada Lei Forte dos Grandes Números, mas na vida real e na estatística aplicada, não há muita diferença, grosso modo, o que tanto a lei forte quanto a lei fraca dos grandes números afirmam é que, quanto mais vezes você repete um experimento aleatório, mais a média dos resultados empíricos se aproxima do valor esperado. A lei fraca diz que você pode se aproximar o quanto quiser do valor esperado, desde que repita o experimento um GRANDE número de vezes; contudo, ela garante apenas que o erro é improvável, não impossível. A lei forte vai além e diz que a média empírica é efetivamente capturada pelo valor esperado no limite, tornando a estabilidade inevitável. Como eu disse antes, na maioria das situações práticas, a lei fraca já é suficiente para justificar nossas previsões. Mas, como os matemáticos são pessoas em busca da verdade absoluta, eles provaram que a Lei Forte é a condição suprema: elas não são a mesma coisa, mas a Lei Forte é tão poderosa que, se ela for verdadeira, a Lei Fraca também é automaticamente garantida. A lei dos grandes números (especialmente a forte) é uma das descobertas mais fundamentais da humanidade. Juntamente com o Teorema Central do Limite, ela nos permite compreender a estrutura da realidade e mostra que, no longo prazo, a própria aleatoriedade constrói uma ordem inquebrável.

A Lei Fraca dos Grandes Números é formalmente declarada como:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu,$$

ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Em outras palavras, à medida que o tamanho da amostra (n) cresce, a probabilidade da média amostral ($\bar{X}_n$) se afastar do valor esperado (μ) por uma margem superior a ε aproxima-se de zero.

Em muitos livros e artigos acadêmicos, o lançamento de uma moeda é usado como um bom exemplo para ilustrar a Lei Fraca dos Grandes Números: se repetirmos o experimento muitas vezes, a probabilidade de que a média observada (frequência de caras) esteja muito próxima do valor esperado (0.5) é quase 1 (ou 100%).

2.3 A Lei dos Grandes Números e a Vantagem da Casa

Aplicações práticas da teoria da probabilidade são vistas em cassinos. Esses lugares faturam muito porque a maioria das apostas é “benéfica” a favor da casa. Embora existam ocasiões onde o apostador tem chances iguais ou ligeiramente maiores, elas são uma pequena parte e exigem muitas jogadas para gerar resultados consistentes.

Então, por que a casa sempre vence? À medida que o número de apostas aumenta, os resultados tendem a aproximar-se das probabilidades teóricas, tornando os lucros da casa esperados. Apostas isoladas, como bônus em caça-níqueis ou jogadas únicas em jogos de dados, podem beneficiar o jogador temporariamente, mas o efeito é limitado.

Em espaços pequenos, a variação pode gerar prejuízos, mas, aumentando as jogadas, a probabilidade confirma a vantagem da casa, evidenciando a consistência do lucro no longo prazo.

2.3.1 Exemplo Matemático de Aposta em Dados

Suponha que um jogador faça as seguintes apostas em um dado justo:

- **Lançamento 1:** aposta R\$ 1 no número 3; sai 3 e ganha R\$ 5.
- **Lançamento 2:** aposta R\$ 1 no número 3; sai 3 e ganha mais R\$ 5.

Agora o jogador possui R\$ 10, apostando R\$ 2, resultando num lucro de R\$ 8. Mesmo com essa sequência de sucessos, que por acaso aconteceu, o cenário cria a ilusão de ser vantajoso, embora, a chance mesmo é sempre da banca.

O valor esperado (EV) do lucro por aposta é:

$$EV = (\text{lucro se acerto}) \cdot P(\text{acerto}) + (\text{perda se erro}) \cdot P(\text{erro}) \quad (2.1)$$

$$EV = (+4) \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{5}{6} \quad (2.2)$$

$$EV = -\frac{1}{6} \approx -0,167 \quad (2.3)$$

Ou seja, o jogador perde, em média, cerca de R\$ 0,17 por real apostado. Com muitas jogadas, o resultado financeiro converge para o esperado negativo, garantindo o lucro da casa, conforme a Lei dos Grandes Números.

$$10\,000 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \approx -\text{R\$ } 1.666,67. \quad (2.4)$$

3 A Agulha de Buffon

Entre os enigmas da probabilidade, a Agulha de Buffon brilha, simples, e cheio de ideias complexas. Desenhado por Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon, a experiência mostra como é possível calcular π , ao acaso.

3.1 Experimento Didático

Para essa atividade, poderíamos pedir aos alunos que reservassem um bom espaço na sala de aula. Feito isso, poderíamos utilizar algumas tiras de barbante e colocá-las verticalmente, lado a lado, de modo que coubessem no espaço. Precisaríamos garantir que o espaçamento entre cada barbante fosse o mesmo. Depois disso, separaríamos uma boa quantidade de palitos mas atenção: para que o experimento possa funcionar, o tamanho dos palitos tem que ser menor ou igual ao espaçamento entre os barbantes, de modo que eles não consigam cruzar duas linhas ao mesmo tempo.

A formulação clássica do problema parte de uma superfície plana na qual se traçam retas paralelas e equidistantes, separadas por uma distância fixa d . Sobre essa superfície, lança-se repetidamente uma agulha (palito) de comprimento l . Para simplificação da análise, estabelece-se a condição de que o comprimento da agulha não exceda a distância entre as retas, ou seja,

$$l \leq d.$$

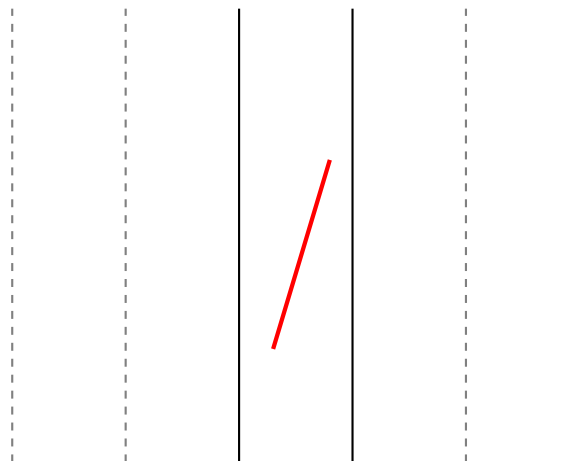


Figura 4 – Palito não intersectando a linha

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa restrição assegura que cada agulha possa cruzar, no máximo, uma única linha.

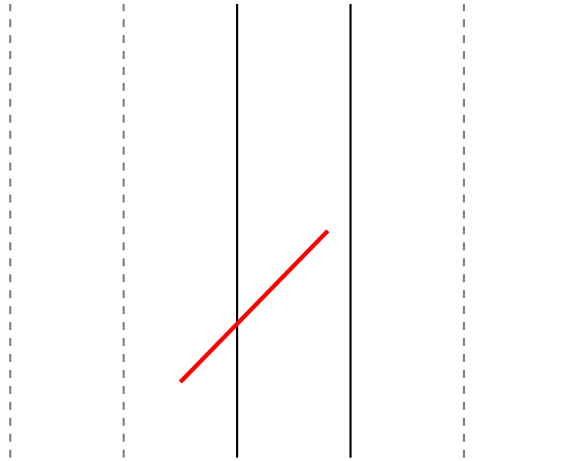


Figura 5 – Palito intersectando a linha

Fonte: Elaborado pelo autor

Cada lançamento da agulha é caracterizado por duas variáveis aleatórias independentes:

- A distância x do centro da agulha até a reta paralela mais próxima, assumindo valores no intervalo $[0, d/2]$;
- O ângulo θ que a agulha forma em relação à direção das retas, varia uniformemente no intervalo $[0, \pi/2]$.

Vamos olhar mais de perto e analisar todas as possíveis formas em que esta agulha de comprimento possa cair no chão. Ela pode cair em várias posições verticais e também em diferentes ângulos. Assim, vamos considerar todas as diferentes posições verticais e ângulos para calcular a proporção na qual a agulha intersecta a linha horizontal.

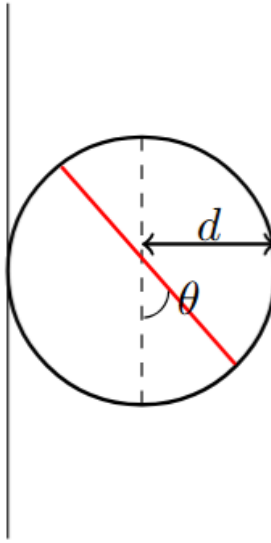


Figura 6 – Possíveis ângulos de rotação do palito

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 12, consideramos todas as possíveis maneiras pelas quais um palito de comprimento unitário ($l = 1$) pode cair sobre o plano. Esse palito pode ocupar diferentes posições verticais, assim como apresentar variados ângulos de inclinação. Dessa forma, examinaremos a distribuição conjunta de posições e ângulos para determinar a proporção dos casos em que ocorre interseção com as linhas traçadas no plano. Embora a Figura 12 apresente apenas um recorte do sistema, assume-se a existência de **infinitas retas paralelas** equidistantes a uma distância d , sendo as linhas tracejadas uma representação visual da continuidade no plano.

Para tornar a análise mais clara, ampliamos o diagrama e adotamos o ponto médio da agulha como referência. Esse ponto encontra-se a uma distância de $1/2$ a partir de cada extremidade do palito.

Notação. Seja d a distância do ponto médio da agulha até a linha paralela mais próxima, com

$$0 \leq d \leq 1.$$

Notação. Seja θ o ângulo agudo formado pelo palito em relação à direção das linhas paralelas, variando no intervalo

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar quando ocorre a interseção entre a agulha e uma das linhas, é necessário considerar o ângulo θ e a posição d . O conjunto de pontos possíveis em torno dos quais a agulha pode girar gera uma faixa angular de possibilidades. Em parte dessas posições ocorre a interseção com uma das linhas paralelas, enquanto em outras não há cruzamento.

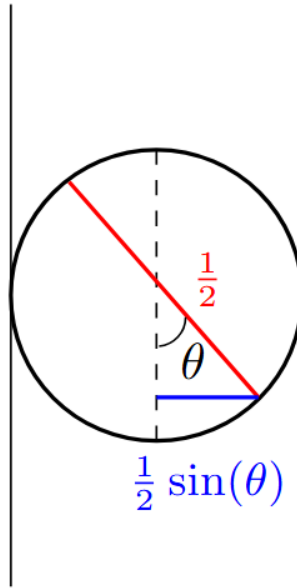


Figura 7 – Ângulo do palito

Para determinar em quais ângulos o palito de fato cruzará a linha vertical, recorreremos à trigonometria. Podemos considerar o cateto horizontal do palito, que corresponde à projeção do palito sobre a direção das linhas paralelas.

Seja o comprimento do palito $l = 1$, e estamos considerando o ponto médio do palito como referência. Então, a metade do palito corresponde a $\frac{1}{2}$, que é a hipotenusa do triângulo retângulo formado pela projeção horizontal e vertical do palito.

O cateto horizontal deste triângulo é dado por:

$$\frac{1}{2} \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo agudo formado pelo palito em relação às linhas verticais.

O palito intersectará a linha horizontal se, e somente se, a projeção horizontal for maior ou igual à distância d do ponto médio até a linha mais próxima, isto é:

$$\frac{1}{2} \sin \theta \geq d.$$

Dessa forma, para cada valor de d fixo, podemos determinar o intervalo de ângulos θ que satisfazem esta condição. Podemos representar graficamente este espaço (d, θ) , destacando as regiões em que ocorre a interseção da agulha com a linha.

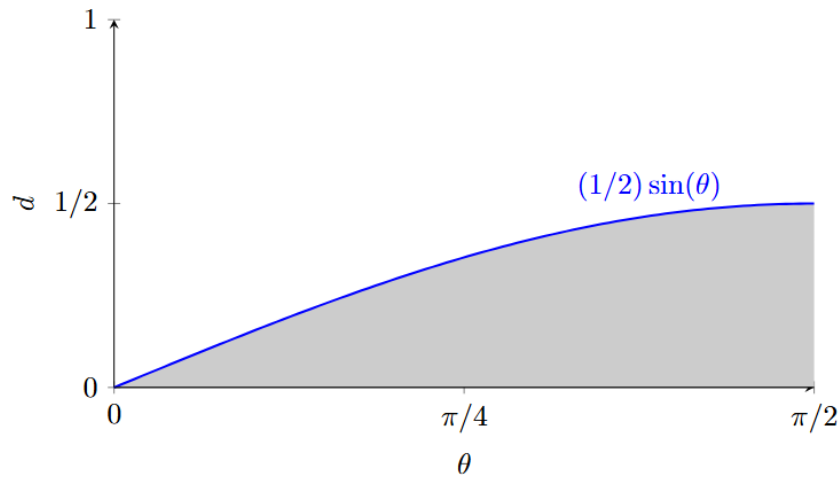


Figura 8 – Condição de Cruzamento da Agulha

O palito cruza uma linha se e somente se:

$$x \leq \frac{l}{2} \sin \theta.$$

Podemos calcular a probabilidade de o palito cruzar uma linha vertical como sendo a razão entre a área sob a curva e a área do espaço amostral completo, que é representado pelo retângulo.

Observação: A determinação da área sob a curva pode ser realizada por meio de integrais, como segue:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Assim, a probabilidade de cruzar a linha é:

$$P = \frac{\text{Área sob a curva}}{\text{Área do retângulo}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

É bastante interessante notar que, neste problema clássico, a constante π aparece de forma natural, oferecendo uma maneira prática de estimá-la numericamente ao realizar repetidos lançamentos do palito.

Nota: A probabilidade calculada aqui considera que o ângulo de lançamento e a posição do centro da agulha são uniformemente distribuídos.

3.2 Um outro jeito de ver o experimento

Considere um palito lançado sobre uma superfície marcada por duas linhas paralelas. Seja d a distância do centro do palito C até a linha paralela mais próxima, conforme ilustrado na figura a seguir:

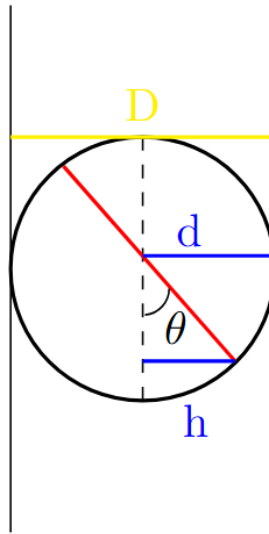


Figura 9 – Lançamento do palito

Observe que d está entre 0 e $\frac{D}{2}$, pois vamos considerar sempre a paralela mais próxima ao centro do palito, podendo ser a superior ou a inferior.

Notação. Seja d a distância do meio do palito até a linha mais próxima.

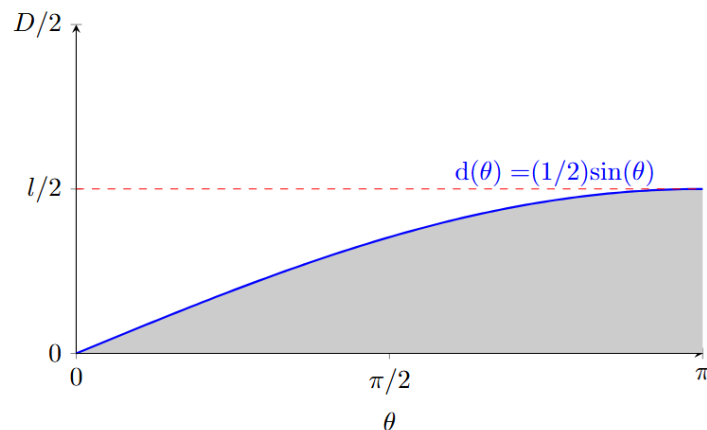
$$0 \leq d \leq \frac{D}{2}$$

Notação. Defina θ como o ângulo do palito em relação às linhas horizontais

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Observe que o palito intersectará a linha paralela mais próxima do seu centro se $h \geq d$. Considerando qualquer possibilidade para θ , vale a relação, $\sin \theta = \frac{h}{l/2}$, de modo que $h = \frac{l \cdot \sin \theta}{2}$.

Portanto, o palito intersectará a linha paralela mais próxima do seu centro se $d \leq h \leq \frac{l \cdot \sin \theta}{2}$, ou seja, se $d \leq \frac{l \cdot \sin \theta}{2}$.

Figura 10 – Gráfico da função $d(\theta)$

O retângulo de vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \frac{D}{2})$ e $(0, \frac{D}{2})$ corresponde a todos os possíveis pares ordenados (d, θ) no lançamento de um palito. Temos que a região sob o gráfico da função $d(\theta) = \frac{l \sin \theta}{2}$, é a região na qual o intersecta uma linha paralela. A área dessa região é a integral da função d no domínio $[0, \pi]$ em relação a θ .

$$P = \frac{\text{Área sob a curva}}{\text{Área do retângulo}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\int_0^\pi \frac{l \sin \theta}{2} d\theta}{\pi \frac{D}{2}} = \frac{1}{2} (\cos(0) - \cos(\pi)) \cdot \frac{2l}{D\pi} = \frac{2l}{D\pi}, \text{ onde } l$$

é o tamanho do palito.

$$\therefore P = \frac{2l}{D\pi}.$$

Se a distância D entre os barbantes for 6 cm e o tamanho l dos palitos for 4 cm, **como podemos calcular a probabilidade de um palito interceptar alguma linha?** Considerando neste caso, que não conhecemos o valor aproximado de π .

Observe que $\frac{2l}{D\pi}$ é a probabilidade de o palito tocar alguma linha em um único lançamento. Mas qual seria o significado adicional dessa probabilidade? É o seguinte: se lançarmos o palito várias vezes no piso, a proporção entre o número de vezes que o palito toca alguma linha e o número total de lançamentos se aproxima progressivamente de $\frac{2l}{D\pi}$. Em outras palavras, se n for o número total de lançamentos e x for o número de vezes em que o palito toca alguma linha em n lançamentos, então $\frac{x}{n} \approx \frac{2l}{D\pi}$. Daí, $\pi \approx \frac{2nl}{Dx}$. Depois de 1.000 lançamentos vamos encontrar um valor de π próximo a 3,1. Assim, voltando ao nosso problema, a chance de jogarmos um palito e este cruzar uma linha, será:

$$P = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \cdot 4}{6,3 \cdot 1} = \frac{8}{18,6} \approx 43\%$$

3.2.1 Estimativa de π

Após n lançamentos, se x palitos cruzarem linhas, a constante π pode ser aproximada por:

$$\pi \approx \frac{2nl}{Dx}.$$

3.2.2 Aspectos Históricos

Buffon realizou o experimento em 1777. Em 1901, Mario Lazzarini estimou π com seis casas decimais após 3.408 lançamentos, embora análises posteriores questionem a

precisão experimental. Hoje, o problema é usado para ensinar probabilidade geométrica, convergência estatística e o método de Monte Carlo.

3.3 Como Funciona o Experimento - Simulações

Embora a realização física do experimento seja historicamente relevante, ela apresenta limitações práticas, como o tempo excessivo para realizar milhares de lançamentos e a suscetibilidade a erros de medição manual. Para superar esses obstáculos e observar a Lei dos Grandes Números de forma eficiente, optou-se pela implementação de uma simulação computacional baseada no Método de Monte Carlo.

A abordagem algorítmica permite modelar as variáveis aleatórias do problema a posição do centro da agulha (x) e seu ângulo (θ) gerando um espaço amostral massivo em poucos segundos. O algoritmo a seguir, desenvolvido em linguagem Python, assume a simplificação onde o comprimento da agulha (L) é igual ao espaçamento entre as linhas (D), cenário no qual a probabilidade teórica de cruzamento é $P = \frac{2}{\pi}$.

```

1 import random
2 import math
3
4 def simular_buffon(n_lancamentos):
5     """
6     Simula o lançamento da agulha de Buffon para estimar Pi.
7     Considera o caso simplificado onde L (agulha) = D (espaçamento) = 1.
8     """
9     cruzamentos = 0
10
11     for _ in range(n_lancamentos):
12         # 1. Gera a posição do centro da agulha (0 a 0.5)
13         d_centro = random.uniform(0, 0.5)
14
15         # 2. Gera o angulo da agulha (0 a Pi/2)
16         angulo = random.uniform(0, math.pi / 2)
17
18         # 3. Verifica cruzamento: d <= (L/2) * sin(theta)
19         if d_centro <= 0.5 * math.sin(angulo):
20             cruzamentos += 1
21
22     if cruzamentos == 0:
23         return 0
24
25     # Cálculo da estimativa
26     return (2 * n_lancamentos) / cruzamentos
27
28 # --- Execução para Gerar Tabela ---
29 print("Iniciando simulação de convergência...")
30 print(f"{'Lançamentos':<15} | {'Pi Estimado':<15} | {'Erro'}")
31 print("-" * 55)
32
33 testes = [100, 1000, 10000, 100000, 1000000]
34
35 for n in testes:
36     pi_est = simular_buffon(n)
37     erro = abs(math.pi - pi_est)
38     print(f"{n:<15} | {pi_est:.5f} | {erro:.5f}")
39

```

Figura 11 – Simulação em Python do Experimento da Agulha de Buffon

Fonte: Elaborado pelo autor.

A execução do algoritmo permite observar o comportamento da estimativa conforme o número de iterações aumenta. A Tabela 1 compila os resultados obtidos em uma simulação típica, comparando o valor estimado com o valor real de π (aproximadamente 3,14159).

Analisando os dados apresentados, nota-se a ação da Lei dos Grandes Números na prática. Com apenas 100 lançamentos, o erro absoluto ainda é significativo (cerca de 0,13). Entretanto, ao atingir a marca de 1.000.000 de lançamentos, a estimativa (3,14162) torna-se extremamente precisa, validando a teoria apresentada.

Isso demonstra estatisticamente que o aumento do conjunto amostral reduz a variância e aproxima a frequência experimental da probabilidade teórica. O experimento, portanto,

Tabela 1 – Convergência dos valores de π conforme o número de lançamentos.

Nº de Lançamentos	π Estimado	Erro Absoluto
100	3,28000	0,13841
1.000	3,16220	0,02061
10.000	3,14280	0,00121
100.000	3,14090	0,00069
1.000.000	3,14162	0,00003

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da simulação.

transcende a curiosidade histórica e serve como uma validação robusta dos métodos de Monte Carlo.

Além disso, a simulação une conceitos de geometria, estatística e probabilidade, constituindo um recurso pedagógico valioso para o ensino de matemática. Em suma, testes como o da Agulha de Buffon solidificam a compreensão de padrões em eventos aleatórios, demonstrando como conceitos abstratos fundamentam estimativas práticas, confirmação de hipóteses e modelagens estocásticas.

4 A Máquina de Galton (ou Tabuleiro de Galton)

Tal como no problema da Agulha de Buffon, onde a geometria e o acaso se entrelaçam para a estimação de parâmetros, a Máquina de Galton mostra claramente como decisões aleatórias independentes, quando repetidas um grande número de vezes, produzem padrões estatísticos permanentes e previsíveis. Esse é o significado da afirmação segundo a qual eventos individuais podem ser essencialmente imprevisíveis, mas o conjunto tende a ser regular, de modo implícito.

É neste contexto que o aparelho idealizado por Francis Galton, muito além da aparente simplicidade mecânica, desempenha um verdadeiro papel de destaque na interpretação dos fenômenos probabilísticos. A partir da observação do acúmulo das esferas nos compartimentos inferiores do aparelho, podem ser organizados os dados obtidos em tabelas de frequências, que são depois representadas por histogramas, conferindo uma análise visual direta da distribuição dos dados. Através destas representações, materializa-se o que podemos observar: uma grande concentração das ocorrências na parte central, enquanto os valores extremos aparecem com muito menos frequência.

Esse modo de organizar dados não diz respeito a um controle momentâneo de cada evento, mas à repetição de pequenas decisões aleatórias durante o percurso das esferas. À medida que o número de lançamentos aumenta, a forma do histograma tende a se estabilizar, revelando cada vez mais um padrão. Esse comportamento é também mais uma ilustração concreta da Lei dos Grandes Números. O tabuleiro de Galton é um dispositivo vertical cujas fileiras intercaladas de pinos estão dispostas em formato triangular. Pequenas esferas são lançadas do topo e, ao colidir com os pinos, desviam para a esquerda ou para a direita. Essas decisões são tomadas aleatoriamente, com iguais probabilidades, a cada rodada. Ao final, elas são coletadas em compartimentos na parte inferior do tabuleiro. A distribuição das esferas entre os recipientes tende a assumir uma forma simétrica em "sino", semelhante à curva da distribuição normal. Este ponto mostra de maneira concreta como processos discretos de aleatoriedade podem gerar padrões estatísticos definidos quando se considera amostras grandes. Com respeito à questão combinatória, a estrutura do tabuleiro pode ser relacionada ao Triângulo de Pascal, onde cada trajetória possível que uma esfera pode seguir até um determinado compartimento corresponde a uma sequência específica de decisões binárias. O número de trajetórias distintas associadas a cada posição na parte inferior do tabuleiro dá origem ao maior número de esferas nas partes centrais do dispositivo, em comparação com as partes extremas.

4.0.1 História

A Máquina de Galton ou Quincunx foi criada por Francis Galton no século XIX durante os estudos que ele conduzia na área da Estatística e da hereditariedade. Ele fez a primeira demonstração em 27 de fevereiro de 1874, durante os discursos na Royal Institution, com o intuito de mostrar o surgimento empírico de padrões estatísticos a partir de processos aleatórios.

O interesse de Galton não residia apenas em sua demonstração matemática, mas também em seu desejo de introduzir a classificação estatística em seu lugar, em vez de medições diretas, principalmente na área dos estudos da inteligência humana. O acúmulo das esferas em uma distribuição aproximadamente normal seria então a prova de que os pontos de média surgem naturalmente como resultado da repetição de experimentos aleatórios independentes.

Em sua obra *Herança Natural* (1889), Galton descreve a existência de uma ordem subjacente ao aparente caos, destacando o caráter universal da chamada “Lei da Frequência do Erro”, atualmente associada à distribuição normal. Segundo o autor, quanto maior o número de elementos aparentemente desordenados, mais evidente se torna a regularidade estatística que governa o sistema.

Apesar disso, Galton também buscava utilizar o dispositivo para sustentar hipóteses sobre hereditariedade, como a ideia de que características extremas tenderiam a regredir à média, conceito que ele denominou “regressão à mediocridade”. Em correspondência com George Darwin, chegou a idealizar versões mais complexas do tabuleiro para ilustrar esse fenômeno, embora tais modelos não tenham sido efetivamente construídos.

4.0.2 Modelo Matemático

O dispositivo é constituído por uma placa vertical contendo pregos dispostos em um arranjo triangular, com fileiras intercaladas. Na parte inferior da placa, existem canaletas verticais com a função de recolher as bolinhas que caem do topo.

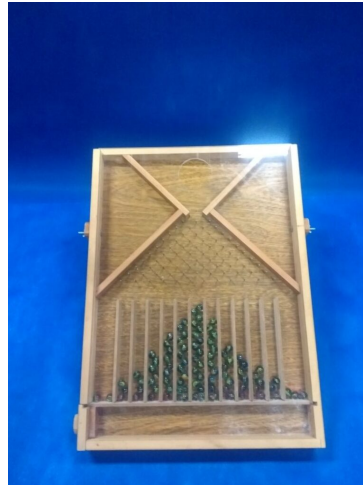


Figura 12 – Máquina de Galton

Fonte: Museu Interativo da Física – UFRJ

Quando uma bolinha é liberada no sistema, ela atinge o primeiro prego e encontra um nó de decisão: cair para a direita ou para a esquerda. Para modelar matematicamente o fenômeno, podemos associar o caminho da bolinha em cada prego a um ensaio de Bernoulli.

Seja Y_i a variável aleatória discreta que representa a escolha tomada pela bolinha ao colidir com o i -ésimo prego do seu caminho. Supondo que a máquina esteja perfeitamente nivelada e os pregos sejam simétricos, podemos atribuir 1 para uma queda à direita e 0 para uma queda à esquerda. Portanto, temos:

$$P(Y_i = 1) = 0,5 \quad (\text{Direita}), \quad P(Y_i = 0) = 0,5 \quad (\text{Esquerda}) \quad (4.1)$$

O trajeto de uma única bolinha é, portanto, um passeio aleatório constituído por uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). É impossível prever em qual canaleta uma bolinha específica irá cair, pois sua trajetória individual é puramente estocástica.

4.0.3 O Triângulo de Pascal

Para compreender com maior rigor o movimento da bolinha na Máquina de Galton, observamos que, ao atingir um pino situado na linha n e posição k , a esfera necessariamente percorre um dentre os caminhos possíveis determinados pela estrutura do tabuleiro.

Denotando por $C_{n,k}$ o número de caminhos distintos que conduzem até o pino (n, k) , podemos estabelecer uma relação de recorrência fundamental. De fato, para alcançar o pino (n, k) , a bolinha deve ter passado anteriormente por um dos dois pinos imediatamente superiores: $(n - 1, k - 1)$ ou $(n - 1, k)$. Assim, obtemos a chamada Relação de Stifel:

$$C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}, \quad \text{para } 0 < k < n. \quad (4.2)$$

Essa relação deve ser acompanhada das condições de contorno:

$$C_{n,0} = C_{n,n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Observa-se que essa construção é equivalente ao Triângulo de Pascal, no qual os valores são dados pelos coeficientes binomiais. Dessa forma, podemos identificar:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}. \quad (4.4)$$

Consequentemente, a relação de recorrência acima coincide com a conhecida identidade dos coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (4.5)$$

Vamos nos basear nessa ideia e propor a seguinte pergunta:

Se soltarmos 100 bolinhas idênticas, uma a uma, sempre do mesmo ponto no topo de um triângulo de Pascal com 10 fileiras de pinos ($n = 10$), em qual compartimento esperamos encontrar a maior concentração de bolinhas? Quantas bolinhas, aproximadamente, devemos esperar nesse compartimento?

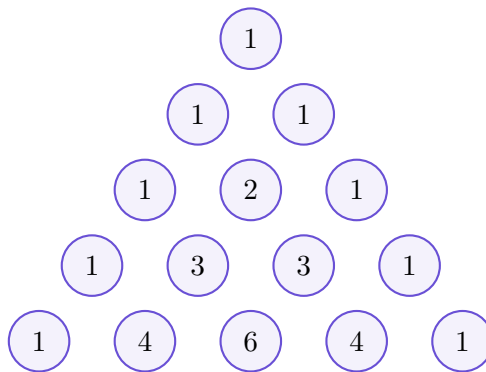


Figura 13 – Representação dos pinos no Triângulo de Pascal

4.0.4 Interpretação Matemática

Antes de pensarmos em como responder a esta pergunta, precisamos descobrir a posição final da bolinha após atravessar n fileiras de pregos, para isso precisamos somar os resultados de cada colisão. Assim, podemos definir a variável aleatória X como o número total de desvios para a direita:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (4.6)$$

A variável X determina exatamente em qual canaleta (numeradas de 0 a n) a bolinha cairá. Como X é a soma de n variáveis de Bernoulli independentes, conclui-se que a posição final da bolinha segue uma distribuição binomial, denotada por $X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

A probabilidade teórica de uma bolinha cair na canaleta k é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Para $p = 0,5$, temos:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (4.8)$$

4.0.5 O Histograma e a Lei dos Grandes Números

Ao soltarmos sucessivas bolinhas, elas se empilham nas canaletas, construindo um histograma físico. Para modelar esse comportamento, definimos a variável indicadora:

$$I_j(k) = \begin{cases} 1, & \text{se a } j\text{-ésima bolinha cai na canaleta } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.9)$$

Ela funciona como um "contador binário": para cada bolinha j , verificamos se ela caiu no compartimento k . Se sim, vale 1; se não, vale 0. Por exemplo, ao soltar $N = 5$ bolinhas, poderíamos ter:

$$I_1(5) = 0, \quad I_2(5) = 0, \quad I_3(5) = 1, \quad I_4(5) = 0, \quad I_5(5) = 1$$

Isso indica que as bolinhas 3 e 5 caíram no compartimento 5, enquanto as demais caíram em outros compartimentos.

A **frequência absoluta** (número total de bolinhas no compartimento k) é simplesmente a soma desses indicadores:

$$F_N(k) = \sum_{j=1}^N I_j(k) \quad (4.10)$$

No exemplo acima: $F_5(5) = 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 2$ bolinhas.

A **proporção empírica** (ou frequência relativa) é a fração de bolinhas que caiu no compartimento k :

$$P_N(k) = \frac{F_N(k)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j(k) \quad (4.11)$$

Por exemplo, se $N = 100$ bolinhas e 25 delas caíram no compartimento 5, então:

$$P_{100}(5) = \frac{25}{100} = 0,25 \quad (\text{ou } 25\%)$$

A **Lei dos Grandes Números** afirma que, à medida que o número N de bolinhas aumenta, essa proporção observada se aproxima da probabilidade teórica $P(X = k)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(k) = P(X = k) \quad (4.12)$$

Em outras palavras, quanto mais bolinhas soltarmos, mais o histograma físico se aproximará da curva teórica da distribuição binomial. A Figura 14 ilustra esse fenômeno para $N = 1024$ esferas.

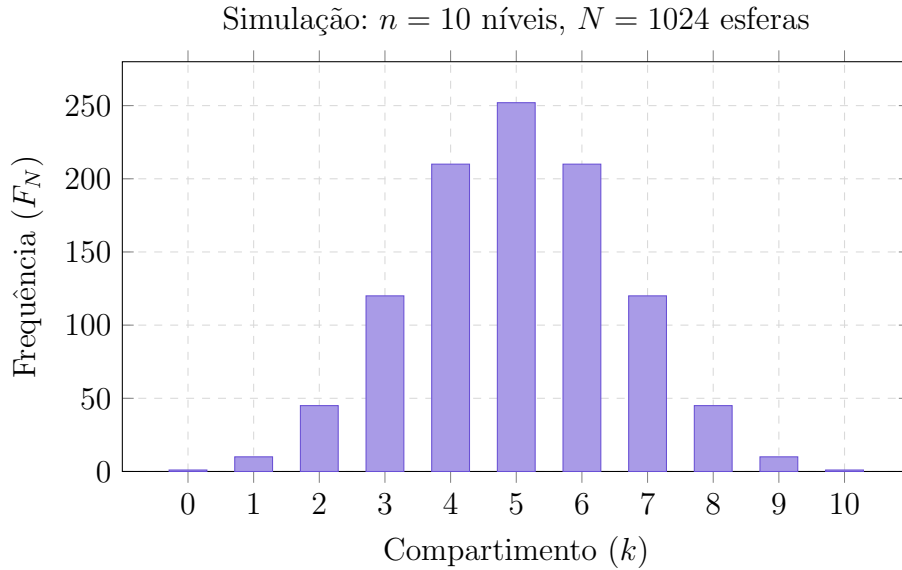


Figura 14 – Histograma resultante para $N = 1024$ esferas. As frequências observadas se aproximam dos valores teóricos da distribuição binomial.

Para valores pequenos de N , o histograma é irregular. No entanto, à medida que N cresce, as frequências relativas se estabilizam e o gráfico se aproxima da distribuição teórica. A Máquina de Galton permite observar diretamente esse processo: a aleatoriedade individual perde força frente à regularidade coletiva.

Assim, o histograma tende a assumir o formato de sino característico da distribuição normal. Isso explica por que o acúmulo de esferas invariavelmente forma a “curva de sino” de Gauss.

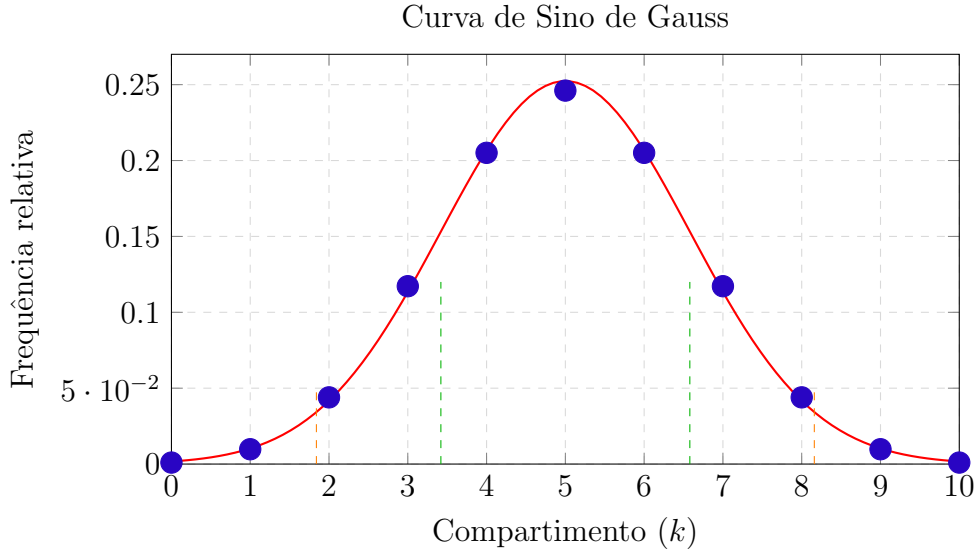


Figura 15 – Curva de Sino de Gauss sobreposta à distribuição binomial teórica.

Então, se tivermos $n = 10$ fileiras, $p = 0,5$, $N = 100$ esferas. A posição final de uma esfera é dada por $X \sim \text{Binomial}(n = 10, p = 0,5)$. A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

Onde $\binom{10}{k}$ (lê-se “10 k a k”) é o número de caminhos possíveis até o compartimento k .

Para $p = 0,5$, a moda da distribuição binomial é dada por $k_{\text{moda}} = \lfloor (n+1)p \rfloor$. Substituindo:

$$k_{\text{moda}} = \lfloor 11 \times 0,5 \rfloor = \lfloor 5,5 \rfloor = 5.$$

Portanto, o compartimento central $k = 5$ é o de maior probabilidade.

Seja $F_N(k) = \sum_{j=1}^N I_j(k)$ o número de esferas no compartimento k . Tem-se $E[F_N(k)] = N \cdot P(X = k)$. Para $k = 5$:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 252 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{252}{1024} \approx 0,2461.$$

Logo:

$$E[F_{100}(5)] = 100 \times \frac{252}{1024} = \frac{25200}{1024} \approx 24,6.$$

Para $k = 0$ ou $k = 10$:

$$P(X = 0) = P(X = 10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0,00098,$$

$$E[F_{100}(0)] = E[F_{100}(10)] = 100 \times \frac{1}{1024} \approx 0,098.$$

k	$\binom{10}{k}$	$P(\text{cair em } k) = \binom{10}{k} \times \frac{1}{1024}$
0	1	$1/1024 \approx 0,00098$ (0,1%)
1	10	$10/1024 \approx 0,0098$ (1%)
2	45	$45/1024 \approx 0,0439$ (4,4%)
3	120	$120/1024 \approx 0,1172$ (11,7%)
4	210	$210/1024 \approx 0,2051$ (20,5%)
5	252	$252/1024 \approx 0,2461$ (24,6%)
6	210	$210/1024 \approx 0,2051$ (20,5%)
7	120	$120/1024 \approx 0,1172$ (11,7%)
8	45	$45/1024 \approx 0,0439$ (4,4%)
9	10	$10/1024 \approx 0,0098$ (1%)
10	1	$1/1024 \approx 0,00098$ (0,1%)

Assim, a maior concentração ocorre no compartimento $k = 5$, com valor esperado de aproximadamente 24,6 esferas. Os compartimentos extremos ($k = 0$ e $k = 10$) têm valor esperado inferior a 0,1, implicando alta probabilidade de estarem vazios. $\square$

Uma pergunta ainda mais instigante: *E se a bolinha não for solta exatamente no centro do topo, mas sim deslocada para a direita?* Nesse caso, a probabilidade de desvio à direita não seria mais $p = 0,5$, pois a geometria assimétrica favorecerá um dos lados. A distribuição binomial ainda seria válida, mas com $p \neq 0,5$, e a moda se deslocaria para a direita, seguindo a fórmula $k_{\text{moda}} = \lfloor (n+1)p \rfloor$. Esse raciocínio mostra como a matemática nos permite prever o comportamento do sistema mesmo em condições assimétricas.

5 Aplicações Pedagógicas e Propostas para a Sala de Aula do Modelo de Galton

5.2 Explorando a Aleatoriedade com Materiais Concretos

A transposição didática de conceitos probabilísticos abstratos exige a mediação por meio de experimentos práticos. O uso de materiais concretos permite que os estudantes construam distribuições estatísticas, observem a convergência dos resultados e superem as dificuldades inerentes ao aprendizado teórico da Lei dos Grandes Números.

5.2.1 A Máquina de Galton e a Simulação via Lançamento de Moedas

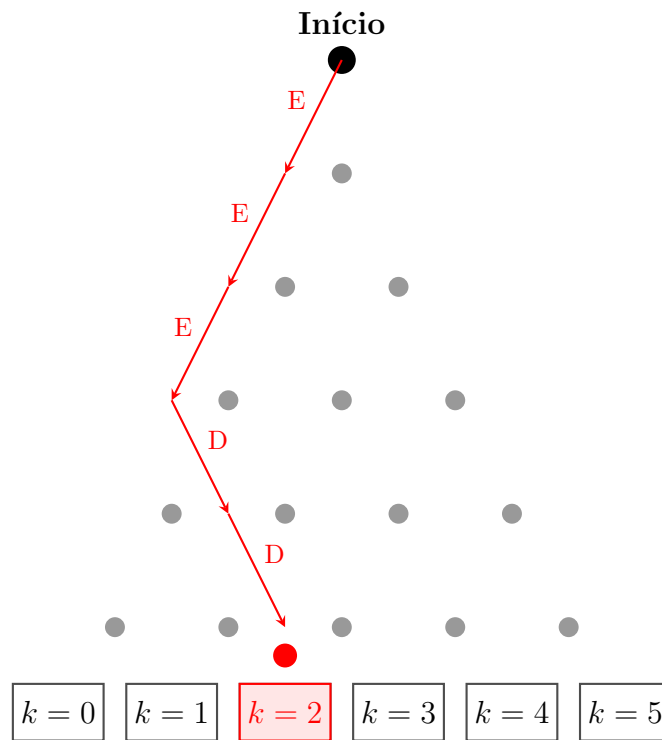
A construção física de um Tabuleiro de Galton tem limitações experimentais, como o atrito das esferas e o nivelamento irregular, que afetam a precisão das probabilidades teóricas. Para resolver isso, podemos usar uma alternativa pedagógica: simular o sistema com o lançamento simultâneo de n moedas não viciadas, no computador. Isso cria uma relação direta com ensaios de Bernoulli independentes. Ainda assim seria útil, até para perceber ou identificar problemas no dispositivo.

Nesse modelo, cada nível de pinos do tabuleiro original é igual a um lançamento de moeda. Estabelecemos uma relação entre a face da moeda e o sentido do desvio:

- Face Cara (C) $\rightarrow$ Desvio para a Esquerda (E);
- Face Coroa (K) $\rightarrow$ Desvio para a Direita (D).

Para um aparato com n níveis, a trajetória da partícula é definida por uma sequência de n lançamentos. A posição final da esfera, que é representada pelo compartimento k , depende apenas da contagem de desvios à direita. Então, a quantidade de caminhos distintos que convergem para uma dada caixa k é determinada pelo coeficiente binomial, que é $\binom{n}{k}$. Isso mostra empiricamente o Triângulo de Pascal. A Figura ilustra essa dinâmica para $n = 5$.

Figura 16 – Representação visual da trajetória (E, E, E, D, D) na Máquina de Galton



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.2 Utilização em Sala de Aula

A aplicação prática ocorre com a distribuição de conjuntos de moedas aos estudantes. Trabalhando em duplas, cada aluno registra o resultado dos lançamentos, identificando a trajetória e a caixa final k correspondente, conforme exemplificado na Tabela 2.

Tabela 2 – Simulação individual ($n = 5$ lançamentos)

Rodada	Fases das Moedas					Caixa Final (k)
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	
1ª	E	E	E	D	D	2
2ª	D	E	D	D	E	3
3ª	E	E	E	E	D	1
4ª	D	D	E	D	D	4
5ª	E	D	E	D	E	2

Fonte: Elaborada pelo autor.

A análise da distribuição de frequências ganha profundidade quando a turma é dividida em grupos, onde cada um simula um valor de n diferente (variando de $n = 4$ a $n = 11$). Isso permite notar claramente como a moda da distribuição binomial se desloca e como o sistema se comporta conforme aumentamos o número de ensaios. Como realizar

essa coleta em larga escala apenas manualmente seria inviável dentro do tempo de uma aula, utilizamos a simulação computacional como suporte. Essa combinação permite validar os dados coletados fisicamente pelos alunos e, ao mesmo tempo, explorar o comportamento do modelo com amostras muito maiores. A Tabela 3 resume o comportamento esperado para diferentes tamanhos de experimento.

Tabela 3 – Resultados esperados para diferentes tamanhos de experimento (n)

Grupo (n)	Total de Caixas	Caixa Central (Moda)	Probabilidade no centro
$n = 5$	6	$k = 2$ e $k = 3$	$\approx 31\%$
$n = 6$	7	$k = 3$	$\approx 31\%$
$n = 7$	8	$k = 3$ e $k = 4$	$\approx 27\%$
$n = 8$	9	$k = 4$	$\approx 27\%$
$n = 9$	10	$k = 4$ e $k = 5$	$\approx 24\%$

Ao analisar os dados com cuidado, vemos que o que observamos na prática está de acordo com o que esperamos teoricamente, o que confirma a nossa abordagem. A Tabela 4 mostra claramente essa semelhança quando comparamos os resultados de 500 lançamentos de moedas com a distribuição binomial para $n = 5$. Isso nos ajuda a entender melhor como as coisas funcionam na realidade.

Tabela 4 – Comparativo entre frequências empíricas ($N = 500$) e teóricas para 5 moedas.

Caixa (k)	Nº de Caminhos ($\binom{5}{k}$)	Frequência Esperada	Frequência Observada
0	1	15,6	14
1	5	78,1	82
2	10	156,2	151
3	10	156,2	163
4	5	78,1	75
5	1	15,6	15

Fonte: Elaborada pelo autor.

A atividade mostra que, quando observamos muitos eventos, a imprevisibilidade de um único evento perde importância. Isso se assemelha com a simulação da Agulha de Buffon, que indica que a curva em sino, ou Curva de Gauss, é uma característica básica de repetir experimentos aleatórios várias vezes. Ao graficar os histogramas dos diferentes grupos, os alunos conseguem ver como a distribuição binomial, que é discreta, se transforma em uma curva contínua, comprovando assim a Lei dos Grandes Números.

5.2.3 Surgimento da Curva de Galton

Após compreender que o aumento do número de repetições reduz as flutuações aleatórias, surge uma nova questão naturalmente levantada pelos estudantes:

“Professor, por que a curva fica mais parecida com um sino quando aumentamos o número de níveis da máquina?”

Essa observação conduz a uma importante propriedade das distribuições binomiais. Quando o número de níveis da Máquina de Galton é pequeno, existem poucas caixas de destino possíveis. Consequentemente, a distribuição apresenta poucos valores e sua representação gráfica possui aspecto mais discreto e irregular.

À medida que o número de níveis aumenta, cresce também o número de trajetórias possíveis e o número de caixas coletoras. Como resultado, os resultados passam a distribuir-se de forma mais suave em torno da região central. Esse comportamento faz com que a distribuição binomial adquira gradualmente a forma característica da Curva de Galton.

Do ponto de vista matemático, esse fenômeno está relacionado ao fato de que, para valores elevados de n , a distribuição binomial aproxima-se da distribuição normal. Assim, o aumento do número de níveis permite visualizar de maneira cada vez mais clara a transição entre uma estrutura discreta e a conhecida curva em formato de sino.

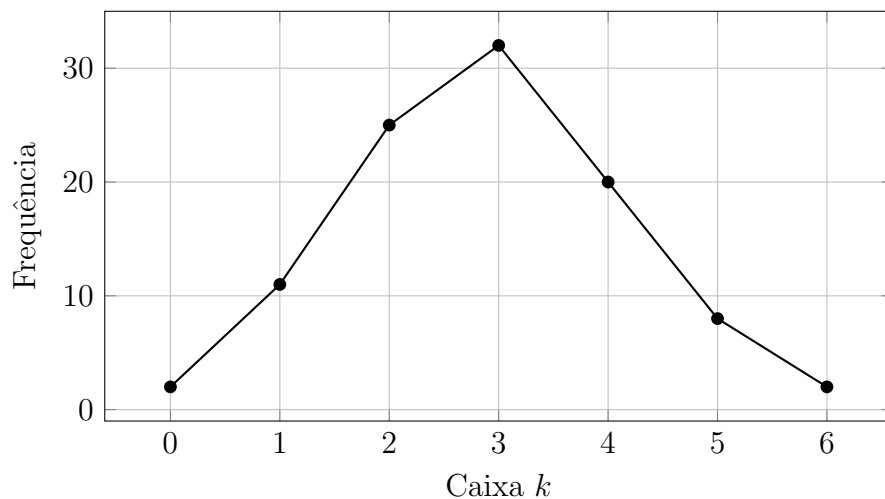
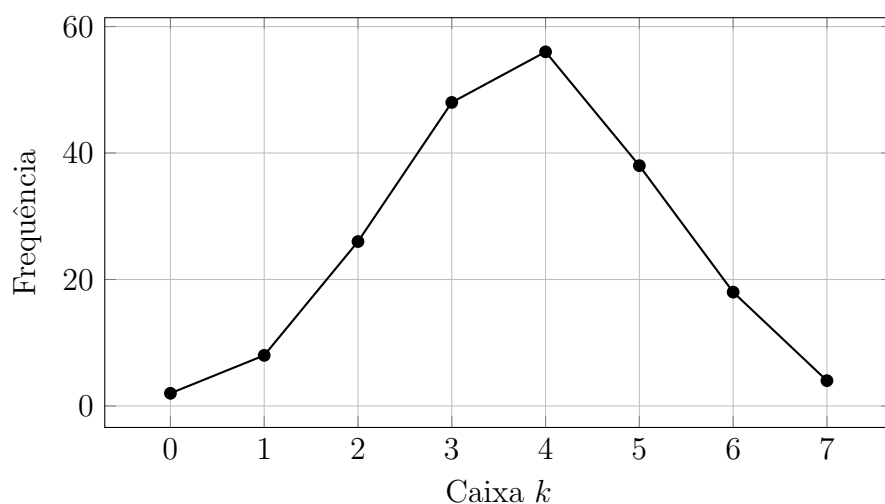
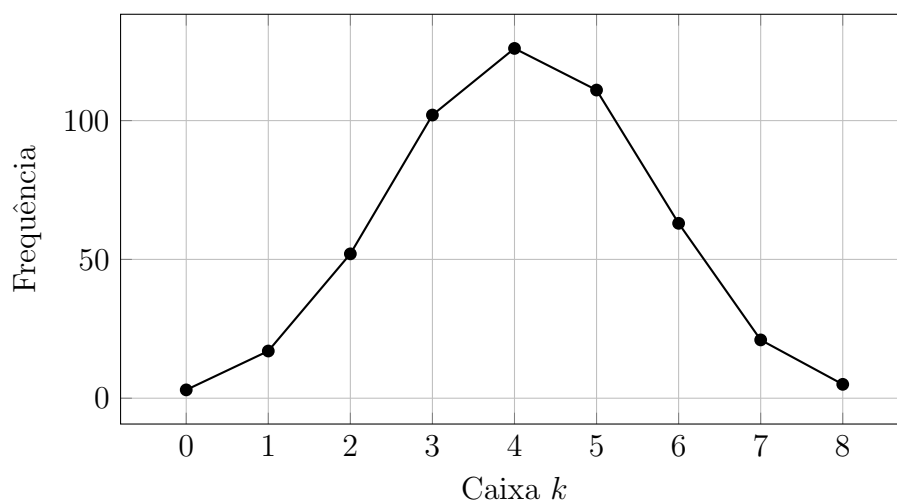
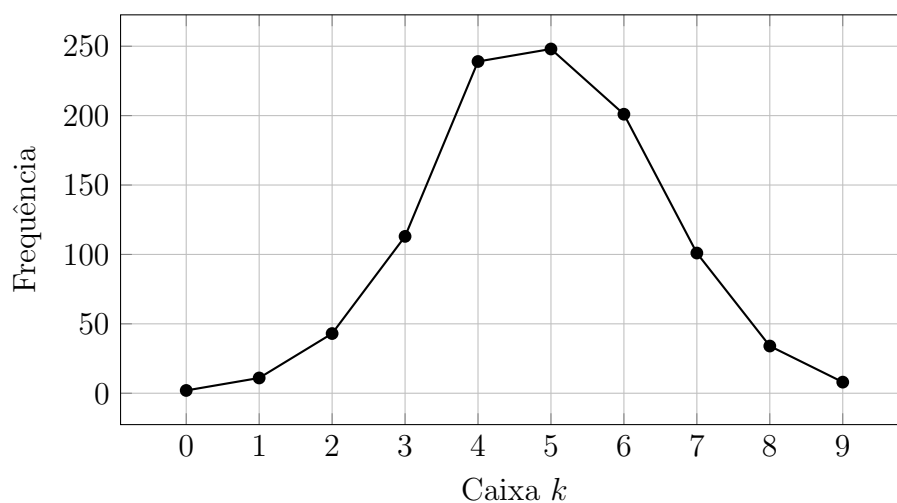
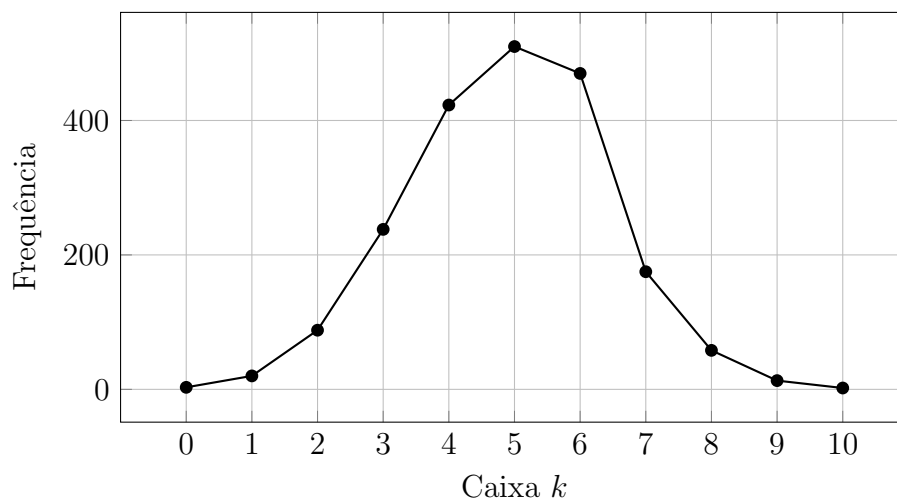
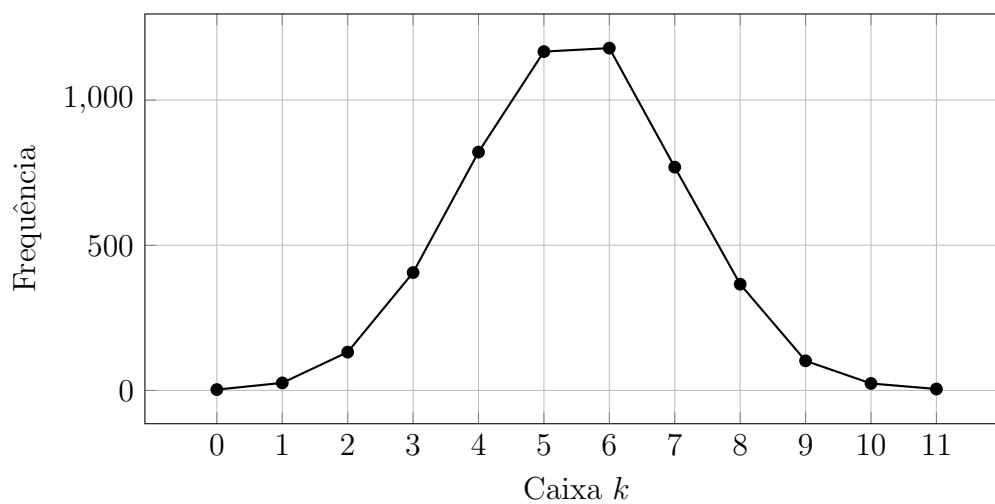
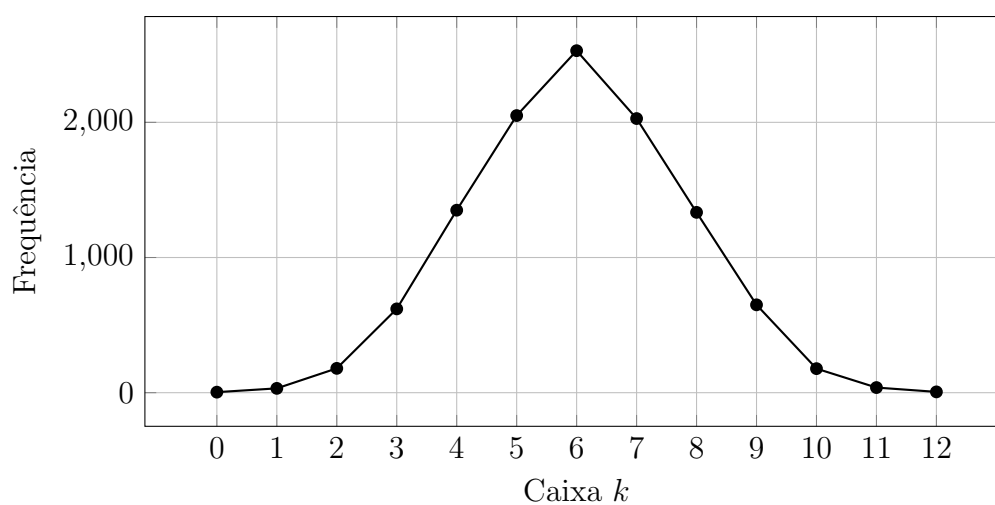


Figura 17 – Distribuição observada para $n = 6$ níveis e $N = 100$ lançamentos.

Figura 18 – Distribuição observada para $n = 7$ níveis e $N = 200$ lançamentos.Figura 19 – Distribuição observada para $n = 8$ níveis e $N = 500$ lançamentos.Figura 20 – Distribuição observada para $n = 9$ níveis e $N = 1000$ lançamentos.

Figura 21 – Distribuição observada para $n = 10$ níveis e $N = 2000$ lançamentos.Figura 22 – Distribuição observada para $n = 11$ níveis e $N = 5000$ lançamentos.Figura 23 – Distribuição observada para $n = 12$ níveis e $N = 10000$ lançamentos.

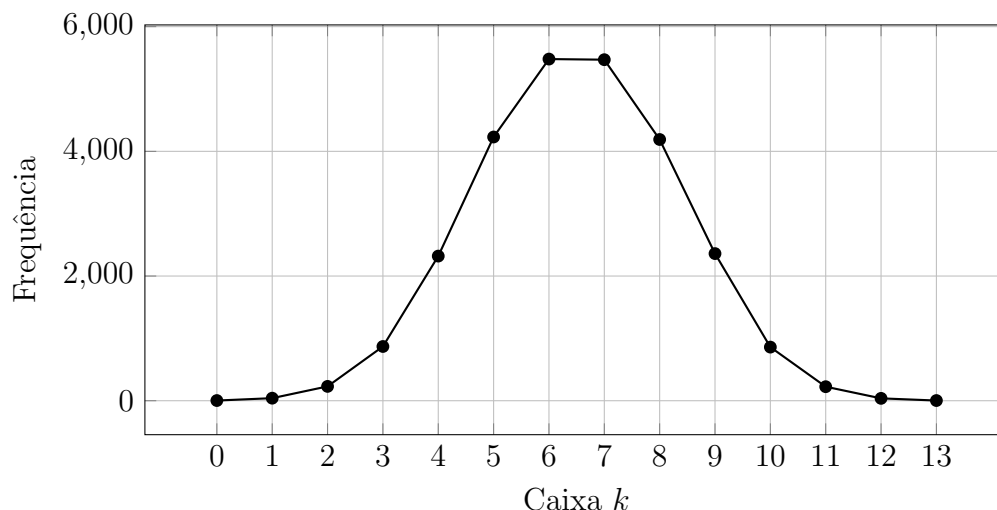


Figura 24 – Distribuição observada para $n = 13$ níveis e $N = 20000$ lançamentos.

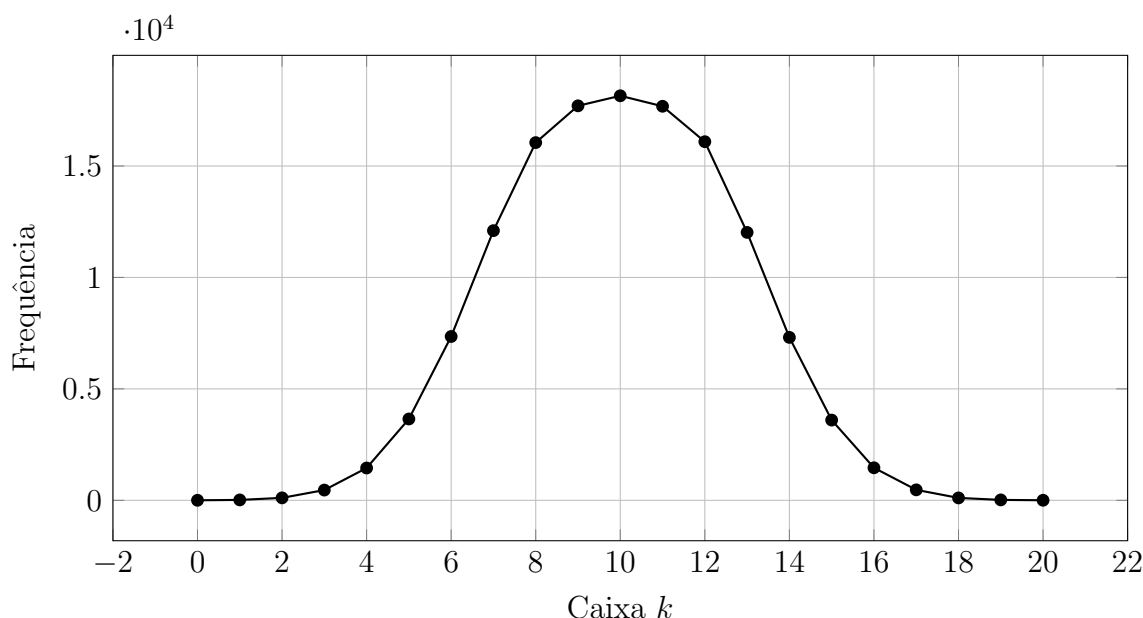


Figura 25 – Distribuição observada para $n = 20$ níveis e $N = 100\,000$ lançamentos.

Para tornar nossas aulas mais dinâmicas e acessíveis, vamos utilizar o laboratório de informática, para assim, termos uma construção de gráficos em tempo real da distribuição binomial, permitindo que os alunos extrapolem o modelo tradicional de ensino centrado na lousa. Dessa forma, a tecnologia atua como uma ferramenta pedagógica mediadora, fazendo com que os estudantes deixem a postura passiva para interagir diretamente com os dados, consolidando o embasamento teórico matemático por meio da prática computacional.

```

1 <!DOCTYPE html>
2 <html lang="pt-BR">
3 <head>
4   <meta charset="UTF-8">

```

```
5   <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1.0
6   ">
7   <title>Simulador - Máquina de Galton</title>
8   <script src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/chart.js"></script>
9   <style>
10      body {
11          font-family: 'Segoe UI', Tahoma, Geneva, Verdana, sans-serif
12      ;
13          background-color: #f4f7f6;
14          display: flex;
15          justify-content: center;
16          align-items: center;
17          min-height: 100vh;
18          margin: 0;
19          padding: 20px;
20          box-sizing: border-box;
21      }
22      .container {
23          background-color: #ffffff;
24          padding: 30px;
25          border-radius: 10px;
26          box-shadow: 0 8px 16px rgba(0,0,0,0.1);
27          width: 100%;
28          max-width: 700px;
29      }
30      h2 {
31          text-align: center;
32          color: #333;
33          margin-top: 0;
34      }
35      .input-group {
36          margin-bottom: 20px;
37      }
38      label {
39          display: block;
40          margin-bottom: 8px;
41          color: #555;
42          font-weight: 600;
43      }
44      input {
45          width: 100%;
46          padding: 10px;
47          border: 1px solid #ccc;
48          border-radius: 5px;
49          font-size: 16px;
50          box-sizing: border-box;
```

```

50     button {
51         width: 100%;
52         padding: 12px;
53         background-color: #007BFF;
54         color: white;
55         border: none;
56         border-radius: 5px;
57         font-size: 16px;
58         font-weight: bold;
59         cursor: pointer;
60         transition: background-color 0.3s;
61     }
62     button:hover {
63         background-color: #0056b3;
64     }
65     .chart-container {
66         margin-top: 30px;
67         position: relative;
68         height: 400px;
69         width: 100%;
70     }
71 </style>
72 </head>
73 <body>
74
75     <div class="container">
76         <h2>Simulador da Distribuição Binomial</h2>
77
78         <div class="input-group">
79             <label for="n-levels">Número de níveis (n):</label>
80             <input type="number" id="n-levels" min="1" max="200" value="
10">
81         </div>
82
83         <div class="input-group">
84             <label for="n-balls">Número de lançamentos/bolinhas (N):</
label>
85             <input type="number" id="n-balls" min="1" max="1000000"
value="1000">
86         </div>
87
88         <button onclick="gerarSimulacao()">Gerar Gráfico</button>
89
90         <div class="chart-container">
91             <canvas id="galtonChart"></canvas>
92         </div>
93     </div>

```

```
94
95     <script>
96         let meuGrafico = null;
97
98         function gerarSimulacao() {
99             const n = parseInt(document.getElementById('n-levels').value
100 );
101             const N = parseInt(document.getElementById('n-balls').value)
102 ;
103
104             if (isNaN(n) || isNaN(N) || n < 1 || N < 1) {
105                 alert("Por favor, insira valores numéricos válidos e
106 maiores que zero.");
107                 return;
108             }
109
110             // Cria um array para representar as caixas (de 0 até n)
111 zerado
112             const caixas = new Array(n + 1).fill(0);
113
114             // Simulação dos lançamentos
115             for (let i = 0; i < N; i++) {
116                 let posicaoFinal = 0;
117                 // Cada nível é um ensaio de Bernoulli (moeda)
118                 for (let j = 0; j < n; j++) {
119                     if (Math.random() < 0.5) {
120                         posicaoFinal++; // Desvia para a direita
121                     }
122                 }
123                 caixas[posicaoFinal]++;
124             }
125
126             // Criar labels para o eixo X (Caixa 0, Caixa 1, ..., Caixa
127 n)
128             const labels = Array.from({length: n + 1}, (_, i) => `k = ${
129 i}`);
130
131             // Renderizar Gráfico
132             const ctx = document.getElementById('galtonChart').
133 getContext('2d');
```

```
133     meuGrafico = new Chart(ctx, {
134         type: 'line',
135         data: {
136             labels: labels,
137             datasets: [{
138                 label: 'Frequência Observada',
139                 data: caixas,
140                 borderColor: '#007BFF',
141                 backgroundColor: 'rgba(0, 123, 255, 0.2)',
142                 borderWidth: 2,
143                 pointBackgroundColor: '#007BFF',
144                 pointRadius: 4,
145                 pointHoverRadius: 6,
146                 fill: true,
147                 tension: 0.3 // Deixa a linha suave
148             }]
149         },
150         options: {
151             responsive: true,
152             maintainAspectRatio: false,
153             plugins: {
154                 legend: {
155                     display: false
156                 },
157                 tooltip: {
158                     enabled: true,
159                     callbacks: {
160                         label: function(context) {
161                             return 'Bolinhas: ${context.parsed.y}';
162                         }
163                     }
164                 }
165             },
166             scales: {
167                 y: {
168                     beginAtZero: true,
169                     title: {
170                         display: true,
171                         text: 'Quantidade de Bolinhas'
172                     }
173                 },
174                 x: {
175                     title: {
176                         display: true,
177                         text: 'Caixa de destino (k)'
178                     }
179                 }
180             }
181         }
182     });
```

```
179         }
180     }
181 }
182 });
183 }
184
185 // Gera um gráfico padrão assim que a página carrega
186 window.onload = gerarSimulacao;
187 </script>
188 </body>
189 </html>
```

Listing 5.1 – Código de Implementação do Simulador da Máquina de Galton

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 Aplicações Pedagógicas e Propostas para a Sala de Aula do Problema da Agulha de Buffon

6.2 Implementação Experimental e Convergência Numérica via Materiais Concretos

A transposição didática de conceitos probabilísticos abstratos exige, frequentemente, a mediação por meio de experimentos práticos. Na transição dos modelos discretos para a probabilidade contínua, o Problema da Agulha de Buffon apresenta-se como um recurso laboratorial privilegiado: o uso de materiais manipuláveis neste caso, palitos de madeira uniformes — viabiliza a observação direta da convergência estatística e auxilia os estudantes na superação das dificuldades inerentes à compreensão intuitiva da Lei dos Grandes Números.

6.2.1 A Agulha de Buffon e a Simulação via Lançamento de Palitos

Como a fundamentação matemática formal e as demonstrações via cálculo integral já foram desenvolvidas nas seções teóricas anteriores, o foco metodológico desta etapa recai sobre a transição intuitiva do modelo. No contexto experimental, o domínio prévio da integração da função seno não é condição necessária para que o estudante compreenda a mecânica do problema; o interesse pedagógico central reside na exploração empírica da probabilidade de interseção entre o palito e as retas da malha.

A formulação clássica do Conde de Buffon estabelece que a probabilidade P de uma agulha (ou palito) de comprimento l cruzar uma das retas paralelas, distantes t entre si, é dada por:

$$P = \frac{2l}{\pi t} \quad (6.1)$$

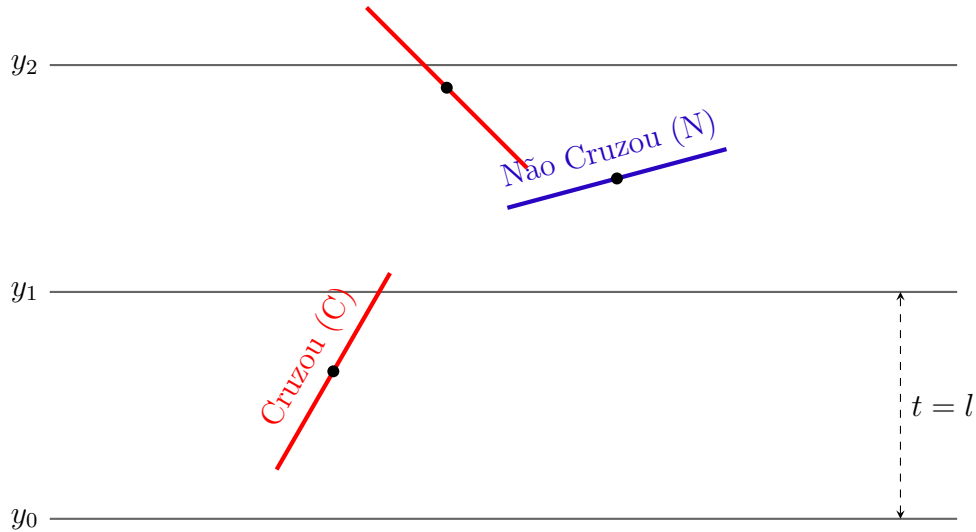
Para fins de aplicação didática, padroniza-se o experimento impondo que o comprimento do palito coincida com a distância entre as linhas pautadas na superfície de lançamento, isto é, $l = t$. Com essa restrição geométrica, a relação entre a constante π e a probabilidade empírica assume a forma mais direta e acessível ao estudante:

$$P = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366 \text{ (ou } 63,66\%) \quad (6.2)$$

A função docente nessa etapa consiste em conduzir o estudante à identificação das duas variáveis que determinam, de modo completo, a posição do palito sobre a malha:

a distância do seu centro à reta mais próxima e o ângulo de inclinação do seu eixo. A Figura 26 é o recurso visual central para essa compreensão, pois conecta a formulação analítica à ação física de lançar o objeto, tornando palpáveis as grandezas que a fórmula abstrai.

Figura 26 – Representação esquemática de palitos lançados sobre malha de retas paralelas, com destaque para os casos de cruzamento (vermelho) e não cruzamento (azul), sob a condição $l = t$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.2 Utilização em Sala de Aula

A construção do conhecimento estatístico fundamenta-se na coleta sistemática e organizada de dados. A atividade propõe estruturar o ambiente de sala de aula como uma ampla rede de amostragem, na qual cada estudante contribui com um subconjunto de observações para a estimativa coletiva. Inicialmente, cada aluno recebe um lote de $n = 10$ ou $n = 20$ palitos uniformes. Cada lançamento é registrado em uma matriz binária mediante a variável indicadora X_i , definida por:

- **C (Cruzou):** Sucesso do evento, palito intercepta uma das retas da malha.
- **N (Não Cruzou):** Fracasso do evento, o palito cai inteiramente entre duas retas consecutivas.

Denota-se por $C = \sum_{i=1}^n X_i$ o total de cruzamentos observados em n lançamentos independentes. A estimativa pontual de π obtida pelo experimento resulta do isolamento da constante na fórmula probabilística, produzindo o estimador $\pi = \frac{2n}{C}$. A Tabela 5 ilustra o modelo de registro que pode ser transposto para a lousa, permitindo o engajamento imediato da turma na coleta de dados.

Tabela 5 – Matriz de registro individual por carteira para $n = 10$ lançamentos

Carteira	Lançamentos										Cruzamentos (C)	Estimativa de π $\pi = \frac{2n}{C}$
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀		
A1	C	N	C	C	N	C	C	C	N	C	7	2,857
A2	C	C	N	C	N	N	C	C	C	C	7	2,857
A3	N	C	N	N	C	C	C	C	N	C	6	3,333
A4	C	C	C	N	C	C	C	N	C	C	8	2,500

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que, em amostras reduzidas, o estimador $\{\pi$ apresenta variações expressivas no exemplo acima, os valores oscilam entre 2,50 e 3,33. Essa dispersão não é um artefato do experimento, mas a manifestação esperada da variância do estimador para n pequeno: como $C \sim B(n, p)$ com $p = 2/\pi$, a variância de π decresce com o aumento de n , o que motiva naturalmente a introdução da Lei dos Grandes Números. A intervenção docente deve, portanto, orientar a ampliação substancial do tamanho amostral, seja pelo agrupamento dos registros individuais de toda a turma, seja pelo recurso a simulações computacionais que produzam volumes de dados inacessíveis ao experimento manual.

O efeito dessa ampliação sobre a precisão do estimador é evidenciado pelas tabelas a seguir, que registram os resultados simulados para tamanhos amostrais progressivamente maiores.

Tabela 6 – Possíveis resultados simulados para $n = 20$ lançamentos por carteira, com a frequência relativa C/n e o estimador $\pi = 2n/C$, sob a condição $l = t$.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	20	13	0,650	3,077
A2	20	12	0,600	3,333
A3	20	13	0,650	3,077
A4	20	12	0,600	3,333

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Possíveis resultados simulados para $n = 50$ lançamentos por carteira.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	50	32	0,640	3,125
A2	50	31	0,620	3,226
A3	50	32	0,640	3,125
A4	50	31	0,620	3,226

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 8 – Possíveis resultados simulados para $n = 100$ lançamentos por carteira.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	100	64	0,640	3,125
A2	100	63	0,630	3,175
A3	100	64	0,640	3,125
A4	100	63	0,630	3,175

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 9 – Possíveis resultados simulados para $n = 500$ lançamentos por carteira.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	500	318	0,636	3,145
A2	500	319	0,638	3,135
A3	500	317	0,634	3,155
A4	500	318	0,636	3,145

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Possíveis resultados simulados para $n = 1000$ lançamentos por carteira.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	1000	637	0,637	3,140
A2	1000	636	0,636	3,145
A3	1000	637	0,637	3,140
A4	1000	636	0,636	3,145

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 11 – Possíveis resultados simulados para $n = 10000$ lançamentos por carteira.

Carteira	n	C	$\frac{C}{n}$	$\pi = \frac{2n}{C}$
A1	10000	6366	0,6366	3,1412
A2	10000	6365	0,6365	3,1417
A3	10000	6367	0,6367	3,1407
A4	10000	6366	0,6366	3,1412

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 12 sintetiza, para uma única sequência de lançamentos acumulados, a evolução conjunta de C , da frequência relativa C/n e do estimador π . O padrão é inequívoco: a partir de $n = 500$, as estimativas estabilizam-se na segunda casa decimal, e para $n = 10000$ a aproximação já alcança a quarta casa decimal de π .

Tabela 12 – Convergência do estimador $\pi = 2n/C$ em função do número acumulado de lançamentos n .

Lançamentos (n)	Cruzamentos (C)	C/n	π
10	7	0,7000	2,8571
20	13	0,6500	3,0769
50	32	0,6400	3,1250
100	64	0,6400	3,1250
500	318	0,6360	3,1447
1000	637	0,6370	3,1397
10000	6366	0,6366	3,1412

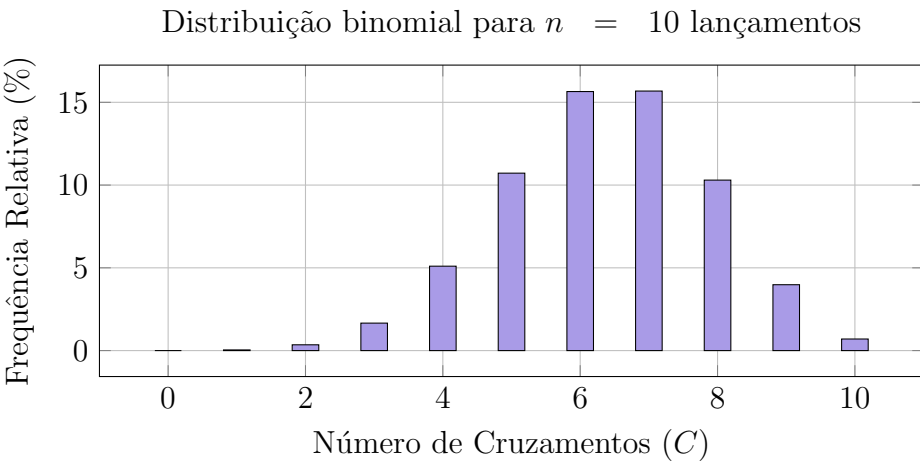
Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.3 A Convergência de π

Como cada lançamento constitui um ensaio de Bernoulli independente com probabilidade de sucesso $p = 2/\pi$, e os n lançamentos são realizados de forma independente e sob condições idênticas, o total de cruzamentos C segue uma distribuição binomial $C \sim B(n, p)$, com esperança $E[C] = np = n \cdot \frac{2}{\pi}$ e variância $\text{Var}(C) = np(1 - p)$.

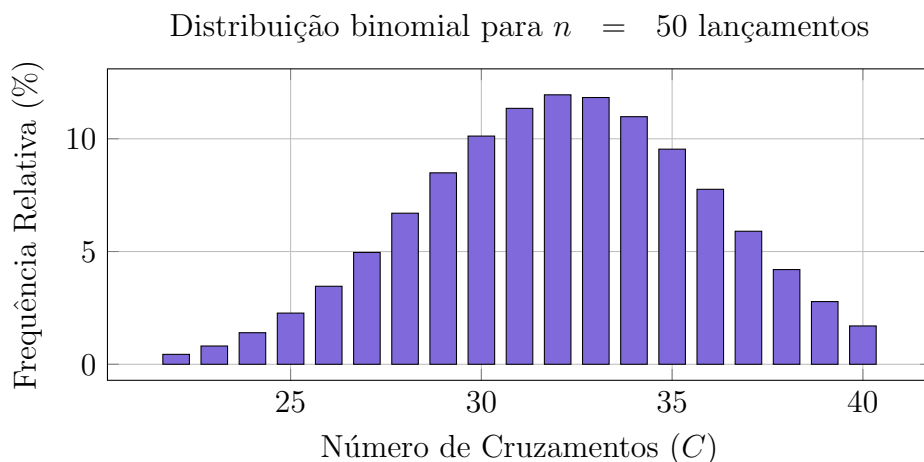
Para valores crescentes de n , o Teorema Central do Limite garante que a distribuição padronizada de C converge em distribuição para uma Normal padrão. O histograma de C progressivamente abandona a assimetria discreta e assume o perfil simétrico da curva de Gauss, centrado em $\mu = E[C]$. Os dois gráficos a seguir ilustram esse processo para $n = 10$ e $n = 50$.

Figura 27 – Distribuição binomial do número de cruzamentos C para $n = 10$ lançamentos independentes, com probabilidade de sucesso $p = 2/\pi \approx 0,6366$.



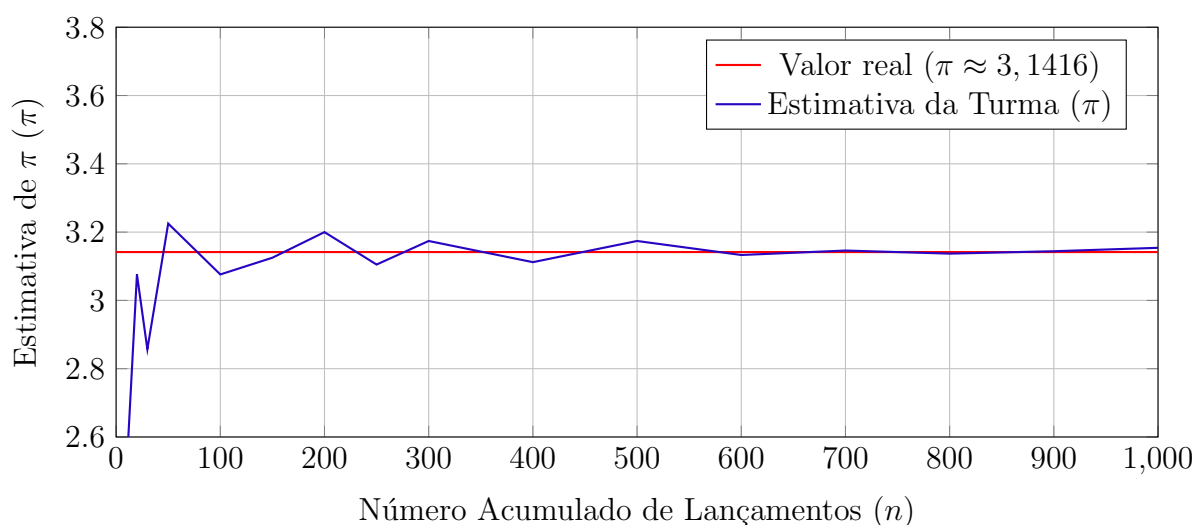
Ao colocar os resultados acumulados em um único gráfico, percebemos claramente como o valor calculado vai se aproximando do número π verdadeiro. A Figura 29 exibe

Figura 28 – Distribuição binomial do número de cruzamentos C para $n = 50$ lançamentos independentes, com probabilidade de sucesso $p = 2/\pi \approx 0,6366$.



essa trajetória para os dados da turma, confrontando-a com o valor exato $\pi \approx 3,1416$ e tornando visível o estreitamento da oscilação do estimador à medida que n cresce.

Figura 29 – Convergência empírica da estimativa de π com o aumento dos lançamentos



Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico evidencia que as oscilações mais amplas de π concentram-se nos primeiros lançamentos e decaem progressivamente, sem contudo desaparecer por completo para qualquer valor finito de n . Esse comportamento é previsto formalmente pelo Teorema da Lei Fraca dos Grandes Números: π converge em probabilidade para π , mas a convergência é assintótica. Do ponto de vista pedagógico com essa sequência de atividades, o estudante deixa de apenas ouvir a teoria e passa a produzir seus próprios dados. No fim, ele mesmo consegue observar, por meio do gráfico, como o número π surge naturalmente da prática.

6.3 Como Organizar Didaticamente a Atividade em Sala De Aula

A compreensão de todos esses conceitos probabilísticos demanda, com frequência, a articulação entre formulações teóricas abstratas e verificações empíricas que tornem palpáveis em sala de aula. Sob essa perspectiva, o Problema da Agulha de Buffon constitui uma boa oportunidade de ser implementado em atividades dentro da sala de aula: permitindo que os estudantes explorem fenômenos aleatórios intrinsecamente ligados à geometria e à estatística por meio da coleta e da análise de dados produzidos pelo próprio experimento feitos por eles mesmo.

Com tudo a proposta desta seção tem por objetivo aproximar os estudantes de conceitos centrais da teoria das probabilidades frequência relativa, variabilidade amostral, convergência estatística e estimação de parâmetros sem pressupor familiaridade prévia com as demonstrações integrais que sustentam o resultado teórico. Ao invés de reproduzir um resultado já consolidado, a atividade busca engajar a turma num processo de investigação no qual a compreensão teórica emerge, de forma gradual, da observação sistemática dos dados obtidos experimentalmente.

6.3.1 Organização da Atividade Experimental

A dinâmica pode ser conduzida com materiais de baixo custo: palitos de madeira padronizados e folhas com pautas de retas paralelas igualmente espaçadas ou até mesmo uma **malha quadriculada**. Para simplificar os cálculos e favorecer a interpretação imediata dos resultados, adota-se a configuração em que o comprimento do palito coincide com a distância entre duas retas consecutivas da malha, ou seja, $l = t$.



Figura 30 – Uma possível utilização em sala de aula, utilizando a malha quadriculada adaptada para o experimento da Agulha de Buffon com palitos de dente. As linhas verticais destacadas representam as linhas de contagem de cruzamentos.

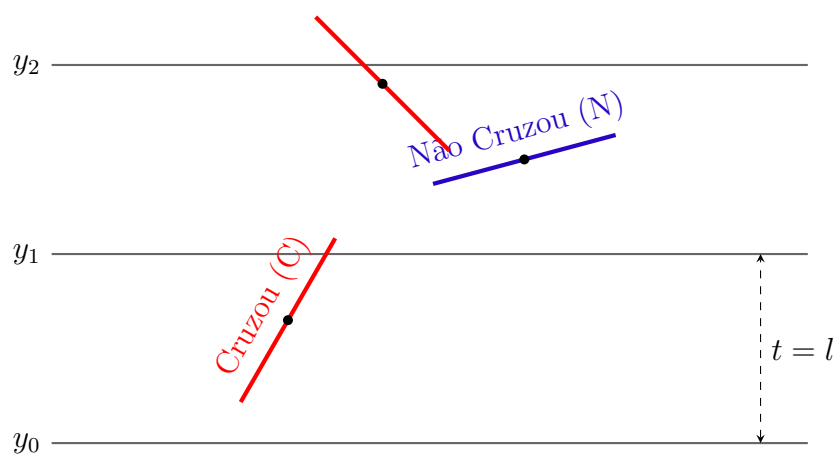
Sob essa condição geométrica, a probabilidade analítica de interseção entre o palito e uma das retas da superfície é:

$$P = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366. \quad (6.3)$$

Cabe observar que o experimento transcorre independentemente da proficiência dos estudantes no que diz respeito às demonstrações integrais subjacentes ao resultado. O interesse pedagógico concentra-se no comportamento distributivo dos registros empíricos e na análise das frequências relativas acumuladas ao longo dos lançamentos.

Antes do início da coleta, é metodologicamente oportuno conduzir um debate coletivo sobre o espaço amostral associado a um único lançamento. Cada palito lançado admite apenas dois resultados mutuamente exclusivos: cruza uma das retas da malha ou não cruza. Essa estrutura binária formalmente equivalente a um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso $p = 2/\pi$ simplifica os registros e estabelece um paralelo imediato com experimentos aleatórios já familiares aos estudantes, como o lançamento de uma moeda. A Figura 31 apresenta uma representação de uma possível utilização que poderia ser reproduzida facilmente em sala de aula, esboçando todas as possibilidades do experimento, servindo de apoio visual para essa discussão introdutória em sala de aula.

Figura 31 – Representação esquemática das duas configurações possíveis de um palito lançado sobre malha de retas paralelas com espaçamento $t = l$: cruzamento (vermelho) e não cruzamento (azul). O ponto preto indica o centro geométrico do palito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7 Aplicações Pedagógicas e Propostas para a Sala de Aula: Lançamento de Moedas

7.0.1 Representação dos Lançamentos de Moedas Utilizando Matrizes

A visualização concreta da Lei dos Grandes Números é um desafio didático recorrente no Ensino Médio. Nesta seção, propõe-se o registro de 100 lançamentos de uma moeda em uma grade 10×10 denominada **Matriz de Lançamentos** em lugar de uma simples lista linear. O método é direto: ao obter Cara (C), preenche-se a célula com uma cor escura ou hachura; ao obter Coroa (Co), deixa-se a célula em branco.

A matriz oferece um ganho didático imediato pela inclusão de **somas marginais**. Após o preenchimento, o aluno contabiliza o número de Caras em cada linha (amostras locais de $n = 10$) e registra o total na margem direita. Visualmente, essa organização desfaz um viés comum: a turma percebe que a estabilidade global (100 lançamentos) não resulta de linhas perfeitamente equilibradas de 5 a 5, mas da compensação mútua entre linhas que oscilam. Um desvio excessivo de coroas em uma linha é, frequentemente, anulado por uma sequência de caras em outra.

7.0.2 Implementação Experimental

Para enriquecer a discussão e permitir comparações entre grupos, apresentam-se sete configurações possíveis de matrizes preenchidas. Cada configuração ilustra uma dinâmica local distinta, todas convergindo para resultados globais próximos do equilíbrio.

7.0.2.1 Cenário 1: Flutuação Padrão (50 Caras)

Oscilação moderada e típica com flutuação em torno da média em cada linha, atingindo equilíbrio exato ao final.

A **flutuação** é um conceito central na compreensão da Lei dos Grandes Números e merece uma explicação cuidadosa, pois vai aparecer algumas vezes ao longo dessa atividade com Matrizes de lançamento.

Flutuação refere-se às **oscilações naturais de um resultado em torno de um valor esperado**. Em outras palavras, quando você espera obter um certo resultado em um experimento aleatório, o resultado real nem sempre coincide exatamente com a expectativa ele “flutua” para cima e para baixo.

Suponha que um grupo de alunos lance uma moeda 10 vezes (preenchendo uma linha da Matriz de Lançamentos). O **valor esperado** é obter 5 caras e 5 coroas (metade e

metade).

Na prática, porém, diferentes grupos obtêm resultados diferentes:

- Grupo A: 4 caras (menos que o esperado)
- Grupo B: 7 caras (mais que o esperado)
- Grupo C: 5 caras (exatamente o esperado)
- Grupo D: 6 caras (um pouco acima do esperado)

Essas diferenças 4, 7, 5 e 6 caras quando se esperava 5 **são as flutuações**. Elas mostram que a aleatoriedade é real: o resultado não é fixo, mas varia naturalmente de tentativa para tentativa.

Flutuações ocorrem porque a moeda é **verdadeiramente aleatória**. Não existe nenhuma força que garanta exatamente 50% de caras em todos os experimentos. O que existe é uma *tendência* a longo prazo, o resultado converge para os 50% esperados, mas em cada realização individual do experimento, há desvios.

Isso é normal e esperado. Se todos os grupos obtivessem exatamente 5 caras em 10 lançamentos, isso seria suspeito! A variação é o que caracteriza um verdadeiro processo aleatório.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1											5
2											4
3											5
4											5
5											6
6											5
7											6
8											4
9											6
10											4

7.0.2.2 Cenário 2: Flutuação Estável (52 Caras)

As linhas mantêm oscilação próxima do esperado, sem grandes picos, terminando sutilmente acima da metade.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1											6
2											5
3											5
4											6
5											4
6											6
7											5
8											4
9											6
10											5

7.0.2.3 Cenário 3: Desvio Inicial e Compensação Tardia (49 Caras)

As primeiras linhas exibem vantagem acentuada de Caras. As linhas finais invertem a tendência, trazendo mais Coroas e equilibrando o sistema.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1											8
2											7
3											7
4											6
5											4
6											5
7											4
8											3
9											3
10											2

7.0.2.4 Cenário 4: Equilíbrio Quase Perfeito (50 Caras)

A flutuação local é mínima com praticamente todas as linhas em 5 ou próximas (4 e 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1	■	□	■	□	■	□	■	□	■	□	5
2	□	■	□	■	□	■	□	■	□	■	5
3	■	□	■	■	□	■	□	■	■	□	6
4	□	■	□	□	■	■	□	■	□	□	4
5	■	□	■	□	■	□	■	□	■	□	5
6	□	■	□	■	□	■	□	■	□	■	5
7	■	■	□	□	■	□	■	■	□	■	6
8	□	□	■	■	□	■	□	■	■	□	4
9	■	□	□	■	□	■	■	□	■	□	5
10	□	■	■	□	■	□	□	■	□	■	5

7.0.2.5 Cenário 5: Efeito Gangorra (51 Caras)

As linhas alternam agressivamente entre blocos de muitas caras (8 e 9) e muitas coroas (1 e 2). Isoladamente parecem desequilibradas, mas a soma final (51) demonstra convergência.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1	■	■	■	■	□	■	■	■	□	■	8
2	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□	1
3	■	■	■	□	■	■	■	□	■	■	8
4	□	□	■	□	□	□	□	■	□	□	2
5	■	■	□	■	■	■	■	■	■	■	9
6	□	■	□	□	□	■	□	□	□	□	2
7	■	□	■	■	■	□	■	■	■	■	8
8	□	□	□	■	□	□	□	□	□	□	1
9	■	■	■	□	■	■	□	■	■	■	8
10	□	□	□	□	□	□	■	□	□	■	2

7.0.2.6 Cenário 6: Concentração de Aglomerados (53 Caras)

Útil para discutir sequências agrupadas. O acaso gera blocos densos contínuos seguidos por grandes vazios, mostrando que aleatoriedade não exige alternância perfeita.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1											4
2											4
3											5
4											7
5											7
6											3
7											6
8											4
9											7
10											4

7.0.2.7 Cenário 7: Zona Normal (57 Caras)

A maioria das linhas termina acima de 5, refletindo uma moeda honesta dentro da variabilidade esperada.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total C
1											6
2											5
3											7
4											4
5											6
6											5
7											6
8											8
9											5
10											6

A observação das margens nas sete matrizes revela um padrão fundamental: como o total final consegue ficar próximo de 50 se as linhas individuais variam tanto entre si?

7.0.3 Utilização em Sala de Aula

tikz

Para tornar visível a ideia de estabilização da proporção em torno de 50%, a Figura ?? reorganiza os resultados de cada linha de lançamentos: as caras (quadrados **hachurados**) são agrupadas à esquerda e as coroas (quadrados **em branco**) à direita. A linha tracejada vertical no centro da grade marca o ponto de referência de 50% dos lançamentos daquela linha (5 em 10). Dessa forma, quanto mais próxima a "borda" entre a região hachurada e a região branca estiver dessa linha central, mais próxima a linha está da proporção esperada para uma moeda honesta.

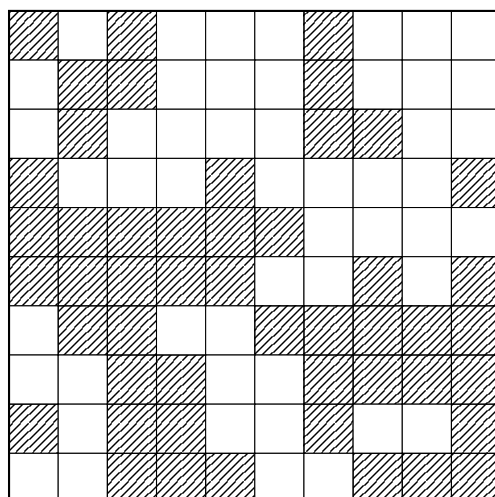
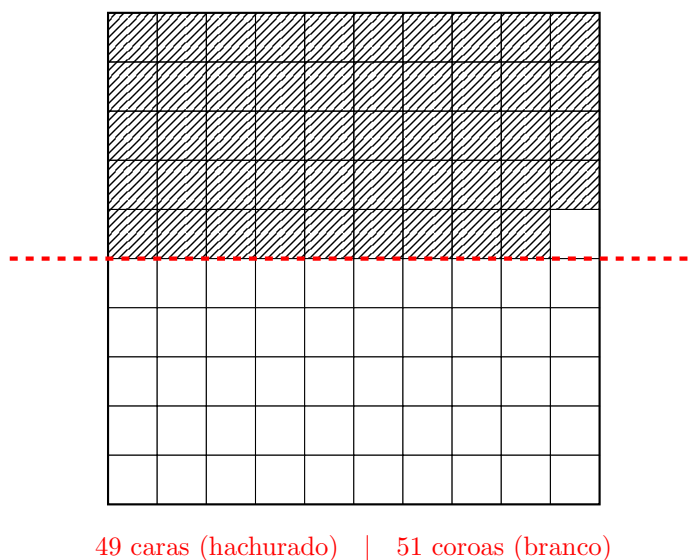


Figura 32 – Matriz 10×10 com os 100 lançamentos na ordem em que ocorreram. Total: 49 caras e 51 coroas.



49 caras (hachurado) | 51 coroas (branco)

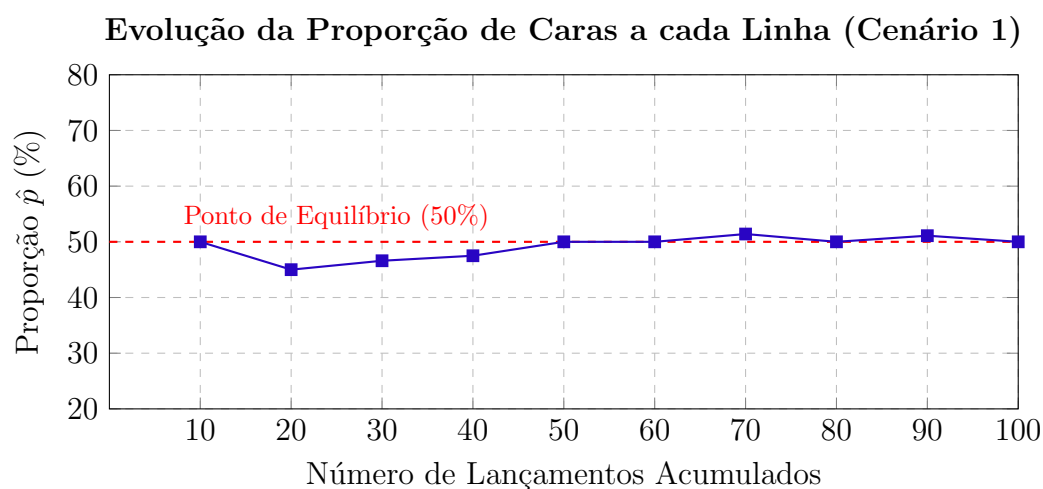
Figura 33 – Os mesmos 100 resultados da Figura 32, reordenados sem alteração de quantidades.

A matriz da Figura 32 permite construir uma trajetória da proporção acumulada de caras linha por linha. Ao término de cada linha, o aluno contabiliza quantas caras saíram até aquele ponto e divide pelo número de lançamentos realizados:

Linha concluída	Lançamentos até aqui	Caras até aqui	Proporção acumulada
1	10		
2	20		
3	30		
4	40		
5	50		
6	60		
7	70		
8	80		
9	90		
10	100		

Esses dez pares de valores são traçados em um gráfico em papel quadriculado com eixo horizontal indicando o número de lançamentos (10, 20, ..., 100) e eixo vertical com proporção acumulada entre 0 e 1. Uma linha horizontal tracejada em 0,5 serve de referência visual.

A Figura seguinte apresenta o comportamento típico usando os totais acumulados do Cenário 1:



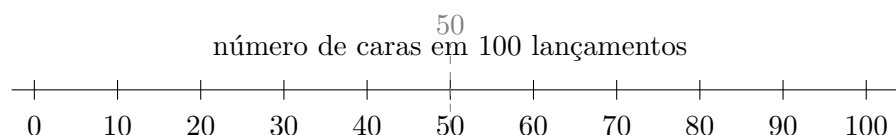
O padrão observado é a essência da Lei dos Grandes Números: os primeiros pontos sofrem flutuações mais intensas, e conforme o denominador cresce a cada linha incorporada,

a curva perde amplitude de oscilação e se estabiliza próxima da referência de 50%. Isso ocorre porque um resultado isolado tem peso maior quando o total é pequeno: uma cara adicional em 10 lançamentos representa 10% do total; em 100 lançamentos, representa apenas 1%.

Observa-se frequentemente que alguns grupos apresentam proporção afastando-se de 0,5 nas linhas finais. Isso não é erro, mas manifestação da aleatoriedade. Quando os gráficos de todos os grupos são comparados simultaneamente, a coleção deles evidencia a tendência central com clareza muito maior que qualquer curva individual.

7.0.3.1 Experimento

Cada grupo registra no quadro um único número: o total de caras de sua matriz. O professor desenha uma reta horizontal numerada de 0 a 100 e cada grupo marca seu resultado com um marcador (X ou ponto), construindo um histograma informal:



Com todos os marcadores registrados, a turma observa o padrão visualmente: onde se concentra a maioria? Há algum resultado muito afastado? A turma identifica, por consenso, a região onde se encontra a grande maioria a “zona normal” onde as moedas honestas tipicamente caem.

Com 15 a 20 grupos, essa concentração típica fica entre 42 e 58 caras, coincidindo com boa aproximação ao intervalo previsto teoricamente. A pergunta que segue é central: se todas as moedas são iguais e todos fizeram 100 lançamentos, por que os resultados diferem? A resposta não está em erros procedimentais, mas na natureza mesma da aleatoriedade. Se todos os grupos obtivessem exatamente 50 caras, a suspeita deveria recair sobre o procedimento. A variação observada é esperada e estrutural.

7.0.4 Organização da Atividade

Cada célula da matriz admite dois resultados possíveis: C ou Co. Como cada célula é independente das demais, o número total de maneiras distintas de preencher a grade inteira é:

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{100}$$

Este número equals:

$$2^{100} = 1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376$$

Um número com 31 dígitos. Para perspectiva: estima-se que o número de grãos de areia em todas as praias e desertos da Terra seja aproximadamente 10^{19} . O número $2^{100} \approx 1,27 \times 10^{30}$ é cerca de 10^{11} vezes maior cem bilhões de vezes o número de grãos de areia do planeta inteiro.

Ao preencher sua matriz, cada grupo escolhe exatamente um desses 2^{100} preenchimentos possíveis. A probabilidade de dois grupos produzirem a mesma sequência, célula a célula, é tão infinitesimal que cada grupo gerou, com alta certeza, uma sequência única que provavelmente nunca foi e nunca será produzida novamente.

Para quantidades menores, calculáveis manualmente, considera-se $n = 10$ lançamentos (uma única linha). A pergunta é: de quantas maneiras distintas posso obter exatamente k caras em 10 lançamentos?

A resposta utiliza o Triângulo de Pascal. Os valores para cada k correspondem à linha 10 desse triângulo: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. O denominador total é $2^{10} = 1024$. Observa-se na tabela seguinte:

Caras (k)	Sequências	Fração	Porcentagem
0	1	1/1024	0,10%
1	10	10/1024	0,98%
2	45	45/1024	4,39%
3	120	120/1024	11,72%
4	210	210/1024	20,51%
5	252	252/1024	24,61%
6	210	210/1024	20,51%
7	120	120/1024	11,72%
8	45	45/1024	4,39%
9	10	10/1024	0,98%
10	1	1/1024	0,10%
Total	1024	100%	

O valor $k = 5$ metade de 10 possui o maior número de sequências possíveis (252), seguido por $k = 4$ e $k = 6$ (210 cada). Os casos extremos $k = 0$ (nenhuma cara) e $k = 10$ (todas caras) têm apenas uma sequência cada: chance de apenas $1/1024 \approx 0,10\%$.

A tabela oferece uma resposta concreta ao problema: por que uma moeda honesta tende a produzir metade de caras? Não existe nenhuma força que “empurre” o resultado para o equilíbrio. O equilíbrio já está estruturalmente embutido: entre todos os preenchimentos possíveis, os que contêm metade de caras são os mais numerosos. Para $n = 100$, o mesmo padrão se repete: o valor $k = 50$ possui o maior número de sequências. Quanto maior o número de lançamentos, mais concentrada fica essa predominância em torno do centro.

8 A Utilização da IA no Aprendizado Da Matemática

Aqui está o texto sem os travessões, ajustado para que a leitura flua de forma natural e direta:

Busquei deixar meu TCC o mais completo possível e, por isso, optei por uma pesquisa mais ampla, indo além de livros e artigos isolados. Foi nesse processo de organizar fontes e estruturar os primeiros prompts que entendi como a IA realmente funciona. No início, achei que a máquina entenderia o contexto do meu trabalho por osmose: jogava códigos com erro, dúvidas de formatação e reflexões soltas de qualquer jeito.

Logo percebi o erro: eu não sabia pedir. Se eu pedia um tom de matemática pura, ela devolvia um bloco de texto denso e difícil de ler, ignorando o que era essencial. Se pedia algo didático, ela simplificava a ponto de esconder a complexidade do assunto. O resultado foi um texto fraturado, onde era fácil distinguir minha voz, de um futuro professor discutindo a aleatoriedade, da voz mecânica e dura da máquina. Tive, inclusive, que incluir um aviso no início do trabalho confessando o uso da ferramenta.

Os problemas ficaram evidentes na explicação matemática. Ao abordar a Lei dos Grandes Números, a IA fez uma confusão: colocou definições pesadas logo após um exemplo simples de cara ou coroa, sem conectar as duas coisas. Pior: afirmou, com total certeza, que simulações computacionais provam a regra. Hoje sei que isso é um erro grave. O computador não gera aleatoriedade real; ele segue regras fixas. A máquina ignorou essa sutileza e tornou o trabalho superficial.

No experimento de Buffon, o dos palitos, o problema foi maior. A IA omitiu a explicação geométrica e entregou o cálculo pronto. Mas o erro mais bizarro estava no código gerado: para descobrir um número matemático fundamental, o programa usou esse mesmo número como base para suas regras internas. Era um círculo vicioso que invalidava todo o experimento. Ela nem sugeriu a alternativa correta, sortear pontos e descartar os que caíssem fora da margem, o que teria salvo a prática.

O mesmo aconteceu com a Máquina de Galton. A IA explicou o movimento das bolinhas, mas não a matemática por trás da curva resultante. A sugestão foi simplesmente desenhar a curva por cima do gráfico porque ficava bonito. Isso transformou uma explicação teórica em apenas uma ilustração contemplativa, vazia de significado.

Essa dependência criou um problema sério. Como a IA corrigia tudo sem me mostrar onde eu falhei, parei de exercitar meu raciocínio. Criei a ilusão de que dominava o assunto apenas por ler respostas bem escritas. Só aprendi de verdade quando as coisas deram

errado. Quando os códigos quebravam, precisei parar, olhar para a tela e bater cabeça até consertar a lógica por conta própria.

Acredito que o modo como estudantes utilizam a IA define como exploramos o conhecimento. Há muito preconceito sobre o acesso a respostas rápidas, mas, no fundo, fazer uma pergunta a uma IA não é tão diferente de consultar um artigo ou um blog. A diferença está na intenção e na curadoria: a ferramenta entrega o material, mas a profundidade da resposta depende de quem pergunta.

Claro, a facilidade de obter respostas pode, com o tempo, atrofiar a reflexão. Mas essa é a nova tecnologia. Em vez de resistir, precisamos adaptar o ensino. O que aprendi foi que, embora a máquina ajude a formatar ou sugerir temas, como fiz no início do TCC, ela não pode pensar por mim. O coração do meu trabalho, a vontade de levar materiais concretos para a sala de aula, sempre foi minha.

Não há uma IA certa. Algumas são mais diretas, outras mais detalhadas, mas o resultado sempre exige uma postura ativa. A relação com a máquina é análoga à de aluno e professor: ela pode oferecer diferentes caminhos, mas é o estudante que precisa percorrer o trajeto e dar significado ao que encontrou.

Entendi, da pior forma, que existe uma margem de erro significativa e alucinações constantes. Por isso, nunca aceitei a primeira resposta. Eu comparava IAs diferentes e cruzava com fontes bibliográficas reais. O uso responsável da inteligência artificial exige, antes de tudo, ceticismo. A ferramenta é um apoio, um suporte técnico, mas jamais a fonte final da verdade.

Referências Bibliográficas

Behrends, Ehrhard & Buescu, Jorge. *Terá Buffon realmente lançado agulhas?* Boletim da SPM, 71, Dezembro 2014, pp. 123–132.

Dinov, I. D., Christou, N., & Gould, R. (2009). *Law of Large Numbers: The Theory, Applications and Technology-Based Education*. Journal of Statistics Education, 17(1). Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10691898.2009.11889499>

Franco, Tertuliano. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2020.

“Missmastalio”. *Law of Large Numbers Simulation Exploration Activity* em *Mastalio Math Mavericks. Living the Dream*. 2021. Disponível em: <https://missmastalio.wordpress.com/2021/05/13/law-of-large-numbers-simulation-exploration-activity/>. Acesso em: 05/09/2025.

Siddiqui, Laiba. *Law of Large Numbers: A Key to Understanding Uncertainty*. Disponível em: <https://www.datacamp.com/tutorial/law-of-large-numbers>. Acesso em: 05/09/2025.

WIKIPEDIA. *Lei dos grandes numeros*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_dos_grandes_numeros. Acesso em: 21/10/2025.