



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Teorema de Green e suas aplicações

Autor: *Stephanie Raira Gonçalves*

Orientador: *Prof. Alex Carlucci Rezende*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof. Dr. Daniel Vandrúsculo
Profª. Dra. Natalia Andrea Viana Bedoya
Prof. Dr. Wladimir Seixas

São Carlos, 2 de julho de 2021

Teorema de Green e suas aplicações

Autor: *Stephanie Raira Gonçalves*

Orientador: *Prof. Alex Carlucci Rezende*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof. Dr. Daniel Vendrúsculo
Prof.ª Dra. Natalia Andrea Viana Bedoya
Prof. Dr. Wladimir Seixas

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 2 de julho de 2021

Stephanie Raira Gonçalves

Prof. Alex Carlucci Rezende
Orientador

Agradecimentos

Aqui expresso meu sentimento mais sincero de gratidão. Sou grata pelas pessoas que me apoiam desde o início da minha trajetória no curso de Matemática, por aqueles que passaram pela minha vida durante esses anos e deixaram suas marcas seja com uma palavra de incentivo, um conforto em um momento difícil ou pelo simples fato de estar feliz pelas minhas conquistas, independente da sua intensidade me fortaleceram e me deram forças para continuar seguindo o meu caminho. Sou grata aos professores que dedicam parte da sua vida para o ato de ensinar, cada um com seu jeito mostra o quão importante é essa profissão. Especialmente aos professores que tive, dentro ou fora da sala de aula, digo: de maneiras diferentes vocês me inspiraram e hoje tenho certeza que a Matemática é o que quero para minha vida. Sou grata por estar em uma Universidade que apoia seus estudantes, apoia a pesquisa e a educação. Sou grata a Matemática, conhecer sua verdadeira essência fez com que eu me apaixonasse e não desistisse de te explorar.

Resumo

O presente trabalho aborda como tema principal o Teorema de Green, um sofisticado resultado que mostra uma relação de igualdade entre uma integral dupla de uma região e uma integral de linha em torno da mesma. Com uma explicação mais didática, exibimos os conceitos que antecedem o teorema e são fundamentais para seu desenvolvimento. Em seguida, apresentamos o teorema, as regiões às quais podemos aplicá-lo, suas aplicações e os resultados que derivam de seu estudo. Por fim, concluímos com a importância do teorema e considerações sobre o modo como o texto foi desenvolvido.

Palavras chave: Teorema de Green, integral dupla, integral de linha, aplicações.

Abstract

This monograph addresses as its main theme Green's Theorem, a sophisticated result that shows an equality relation between a double integral of a region and a line integral around it. With a more didactic explanation, we show some previous concepts which may help in understanding the theorem and that are fundamental for its development. Then, we present the theorem, the regions to which we can apply it, its applications and the results that derive from its study. Finally, we conclude with the importance of the theorem and considerations about the way the text was developed.

Keywords: Green's Theorem, double integral, line integral, applications.

Sumário

1	Preliminares	3
1.1	O Espaço $\mathbb{R}^2$	3
1.1.1	Produto escalar e norma de um vetor	5
1.1.2	Bola aberta, conjunto aberto e ponto de acumulação	6
1.2	Funções vetoriais	9
1.2.1	Limite e continuidade	10
1.2.2	Derivada	13
1.2.3	Integral	14
1.3	Funções de várias variáveis reais a valores reais	15
1.3.1	Limite e continuidade	18
1.3.2	Derivadas parciais	21
1.4	Integral dupla	22
1.4.1	Integral dupla sobre retângulos	23
1.4.2	Integral iterada e Teorema de Fubini	25
1.4.3	Integral dupla sobre regiões gerais	27
1.4.4	Mudança de variável envolvendo coordenadas polares	34
1.5	Integral de linha	36
1.5.1	Campo vetorial	36
1.5.2	Integral de linha de campos vetoriais	37
1.5.3	Independência de caminho	41
2	Teorema de Green	45
2.1	Uma breve história	45
2.2	Teorema de Green: um caso particular	46
2.3	Estendendo o Teorema de Green	53
2.4	Uma visão mais ampla	59
3	Aplicações	64
3.1	Calcular integrais de linha no plano	64
3.2	Área	66
3.3	Física	70

4	Resultados	77
4.1	Teorema de Stokes	77
4.2	Teorema da Divergência	80
5	Considerações finais	83
	Referências Bibliográficas	85

Introdução

O Teorema de Green é considerado um dos resultados mais importantes e notáveis do Cálculo Diferencial e Integral, sendo sua abordagem feita na parte de Cálculo Vetorial. Quando pesquisamos sobre, encontramos em diversos artigos, livros e *sites* acadêmicos, autores que o consideram como um teorema de extrema beleza e elegância, e tal encanto deve-se à relação que traz entre uma integral dupla de uma região e uma integral de linha ao redor da fronteira da mesma. Para entendermos melhor, façamos uma reflexão: calcular a integral de linha pela sua definição pode ser mais complicado do que o cálculo de uma integral dupla mas, em certos casos, calcular a integral dupla de uma região que não conhecemos pode trazer grandes dificuldades. Para esses casos, podemos utilizar o resultado que o teorema proporciona: a igualdade entre as integrais. Isso significa que, com o conhecimento do Teorema de Green, temos a possibilidade de escolha do melhor caminho para encontrarmos uma solução. Mostrar essa praticabilidade é o objetivo principal desta monografia.

Buscando conhecer melhor sobre o teorema e compreender seu destaque em meio a outros importantes resultados matemáticos, o texto está dimensionado da seguinte forma: o Capítulo 1 exibe conceitos preliminares, isto é, resultados que antecedem o teorema, e ter domínio sobre esse conteúdo é importante para entendermos e desenvolvermos demonstrações, ideias e aplicações apresentadas nos próximos tópicos. O Capítulo 2 trata sobre o Teorema de Green, destacamos os pontos mais importantes de sua história, comentamos sobre o caso particular para regiões simples, exibimos a extensão do teorema para uma união finita de regiões simples e para regiões multiplamente conexas (ou que não são simplesmente conexas), e mostramos uma ideia de demonstração para uma região decomposta em n regiões simples.

No Capítulo 3, apresentamos as diferentes formas de aplicações do teorema e vemos que esse resultado não se limita a matemática e se expande para outras áreas do conhecimento como a física, geografia, engenharia, arquitetura, biologia, entre outras. Ou seja,

é realmente um teorema de grande importância. No Capítulo 4, exibimos dois resultados que estão ligados ao Teorema de Green, sendo eles o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência. Analisamos cada um e identificamos as semelhanças entre os três teoremas.

Para o desenvolvimento do texto, introduzimos uma abordagem mais didática e descritiva. Com o uso das referências propostas, fizemos a comparação de seu tratamento para com os resultados apresentados e exibimos as diferentes perspectivas de como cada uma aborda sobre o assunto. Para completar, analisamos enunciados, examinamos as hipóteses a fim de visualizar sua importância para o desdobramento da aplicação e, com uma motivação pré-demonstração apontando o ponto de partida e o caminho a se seguir, incentivamos o desenvolvimento da ideia, de maneira simples e instrutiva, resgatando os conceitos preliminares que foram estudados anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Para entendermos a demonstração de um resultado matemático ou colocá-lo em prática em aplicações é necessário que antes compreendamos seu enunciado. Todo detalhe mencionado será essencial durante o desenvolvimento de uma prova ou resolução de um problema. Por isso, antes de abordarmos sobre o tema alvo, faremos uma exposição de conceitos importantes que o compõem, os quais denominamos preliminares. Veremos definições, teoremas e outros resultados e aplicações que antecedem o tema principal.

Como o Teorema de Green é aplicado no plano, neste capítulo vamos introduzir os conceitos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, exibindo uma extensão do que aprendemos no cálculo de funções de uma única variável. Faremos uma resenha apontando os tópicos necessários para este texto e exemplos.

1.1 O Espaço $\mathbb{R}^2$

Seja n um natural. Para Lima (199, p.1): “o espaço euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$ ”, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R},$$

que é o conjunto de todas as n -uplas ordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais. O conjunto $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a **reta** (conjunto dos números reais), $\mathbb{R}^2$ é o **plano** e indica o conjunto de todos pares ordenados $z = (x, y)$ de números reais – o Teorema de Green é aplicado no plano, então usaremos esse conjunto na maior parte deste texto –, $\mathbb{R}^3$ é o **espaço euclidiano tridimensional**, o conjunto das triplas ordenadas reais

$p = (x, y, z)$. Lima (199, p.1) considera também $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ e o chama de “espaço de dimensão 0”, esse conjunto é formado por um único elemento: o ponto 0.

Em razão de o texto tratar sobre um resultado no plano, vamos introduzir os próximos conceitos no $\mathbb{R}^2$, sendo intuitiva a generalização para os outros conjuntos. Sendo assim, dados dois elementos quaisquer (x, y) e (r, s) pertencentes ao $\mathbb{R}^2$ e um número real λ , vamos definir as operações de *soma* e *produto*:

$$(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s),$$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Essas operações determinam $\mathbb{R}^2$ como um espaço vetorial real, sendo $(0, 0)$ o elemento neutro da adição e $(-x, -y)$, o simétrico.

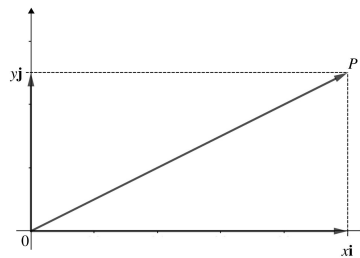
Interpretando geometricamente, os elementos de $\mathbb{R}^2$ são chamados de *pontos* ou *vetores*. Os vetores são frequentemente usados para indicar deslocamento, velocidade ou força, e serão fundamentais para o que veremos adiante. Denotaremos por uma letra em negrito ($\mathbf{v}$) e representaremos por uma seta como na Figura 1.1, onde o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$.

Exemplo 1.1. Fixando um sistema de coordenadas no plano (bidimensional), escolhemos um ponto fixo O como a origem e identificamos o ponto (x, y) com o vetor $\overrightarrow{OP}$, onde P é o ponto de coordenadas (x, y) . Vamos indicar como $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ os vetores associados a $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Pelo estudo de vetores, temos que:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Observe a Figura 1.1. Geometricamente, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é a seta saindo do ponto de origem $(0, 0)$ e chegando a (x, y) .

Figura 1.1: Representação do vetor $\overrightarrow{OP}$.



Fonte: Figura do autor.

1.1.1 Produto escalar e norma de um vetor

Definição 1.2 (Produto escalar). O *produto escalar* de dois vetores (a_1, b_1) e (a_2, b_2) é o número $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$ dado por

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Portanto, para encontrar o produto escalar entre vetores, temos de multiplicar suas componentes correspondentes e somá-las, e o resultado é um número escalar (ou número real).

Exemplo 1.3. O produto escalar dos vetores $(3, 6)$ e $(4, 5)$ é:

$$(3, 6) \cdot (4, 5) = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 42.$$

Propriedades do produto escalar. Sejam os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e um escalar λ . Valem as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, (*comutativa*)
2. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, (*distributiva*)
3. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$,
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são dois vetores com ponto inicial na origem, a representação geométrica do produto escalar é o ângulo θ entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, onde $0 \leq \theta \leq \pi$. Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são não nulos e o ângulo entre eles é $\theta = \frac{\pi}{2}$, chamamos de *perpendiculares* ou *ortogonais*.

Definição 1.4. Dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são perpendiculares (ou ortogonais) se e somente se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Consideremos dois vetores tridimensionais não nulos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Se encontrarmos um terceiro vetor $\mathbf{c}$ diferente de zero tal que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, obtemos o produto vetorial de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Definição 1.5 (Produto vetorial). Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, o *produto vetorial* de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é o vetor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um vetor e é definido somente se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são tridimensionais.

Definição 1.6 (Norma). A *norma* de um vetor (x, y) é dada pelo número

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A norma define o comprimento de um vetor. Assim, a norma de (x, y) é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ (veja Figura 1.1). Como o produto escalar $(x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2$, segue que $\|(x, y)\| = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)}$.

Propriedades. Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vetores quaisquer pertencentes a $\mathbb{R}^2$ e λ um escalar. Valem as propriedades:

1. $\|\mathbf{a}\| \geq 0$; $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = (0, 0)$,
2. $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\|$,
3. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$. (*desigualdade triangular*)

1.1.2 Bola aberta, conjunto aberto e ponto de acumulação

A partir da norma podemos definir conceitos geométricos como a bola aberta, conjunto aberto e ponto de acumulação.

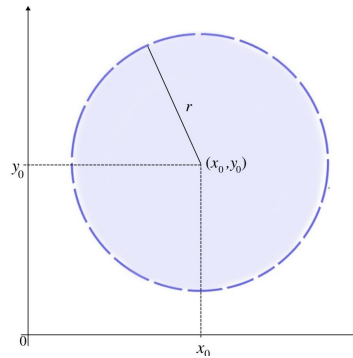
Definição 1.7 (Bola aberta). Uma *bola aberta* de centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ (r real) é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\},$$

de todos os pontos internos de um círculo de centro (x_0, y_0) e raio r .

Isso significa que, se um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está a uma distância de (x_0, y_0) menor que r , então (x, y) é um ponto “interno” da bola aberta. A Figura 1.2 mostra a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r .

Figura 1.2: Bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$.



Fonte: Figura do autor.

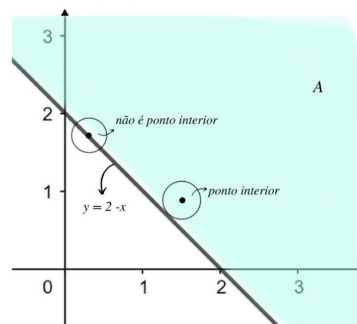
Definição 1.8. Considere A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é *ponto interior* de A se existir uma bola aberta de centro (x_0, y_0) contida em A .

Note que a bola aberta de centro (x_0, y_0) deve estar totalmente dentro do conjunto A para que (x_0, y_0) seja um ponto interior. Vejamos o Exemplo 1.9.

Exemplo 1.9. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2\}$. Todo (x, y) , com $x + y > 2$ é ponto interior de A . E, todo (x, y) tal que $x + y = 2$, não é ponto interior de A .

A Figura 1.3 mostra que o ponto $(x, y) \in A$ com $y = 2 - x$ fica em cima da reta e a bola aberta de centro (x, y) fica, em partes, para fora de A . Logo, (x, y) não é ponto interior de A . Por outro lado, quando $(x, y) \in A$ tal que $x + y > 2$, a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \min\{x, y\}$ se localiza inteiramente em A . Então, (x, y) é ponto interior de A .

Figura 1.3: Ponto interior de A .



Fonte: Figura do autor.

Definição 1.10 (Conjunto Aberto). Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ não vazio. Diremos que A é um *conjunto aberto* se todo ponto de A for ponto interior.

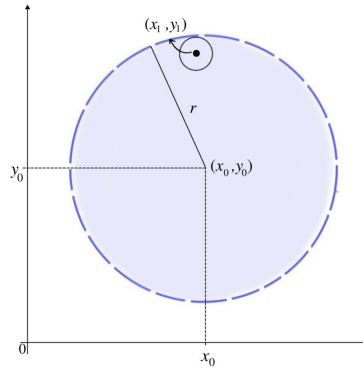
Exemplo 1.11. ¹ Uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ é um exemplo de conjunto aberto.

A Figura 1.4 representa uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$. Para que $(x_1, y_1) \in B$ seja ponto interior de B , a distância entre esse ponto e (x_0, y_0) deve ser menor que o raio. Assim, seja α a distância entre os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , isto é,

$$\alpha = \|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\|. \quad (1.1)$$

Consideremos uma bola aberta B' de centro (x_1, y_1) e raio r_1 , onde $0 < r_1 < r - \alpha$. Vamos mostrar que B' está contida em B .

Figura 1.4: (x_1, y_1) é ponto interior da bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$.



Fonte: Figura do autor.

Seja $(x, y) \in B'$, então

$$(x, y) \in B' \Leftrightarrow \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < r_1. \quad (1.2)$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (x_0, y_0)\| &= \|(x, y) - (x_1, y_1) + (x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| \\ &\leq \|(x, y) - (x_1, y_1)\| + \|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| \\ &< r_1 + \alpha && \text{(por (1.1) e (1.2))} \\ &< r. \end{aligned}$$

Logo, $(x, y) \in B$ e, então B' está contido em B .

Exemplo 1.12. Vamos analisar os seguintes conjuntos:

¹Exemplo 2 extraído do livro de Cálculo de Guidorizzi (2013a, p.114)

1. O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Se $(x, y) \in A$, então a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \min\{x, y\}$ está contida em A , pois $x^2 + y^2 < 1$. Isto é, todo ponto $(x, y) \in A$ é ponto interior de A e a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \min\{x, y\}$ fica inteiramente dentro desse círculo. Portanto, A é aberto.

2. O conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1\}$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Os pontos $(x, y) \in A$, com $x + y = 1$, não são pontos interiores de A . Por exemplo, pontos como $(1, 0)$, $(0, 1)$, entre outros, não são pontos interiores de A .

Teorema 1.13. *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

O conjunto apresentado no item 2 do Exemplo 1.12 é um conjunto fechado, pois seu complementar é dado pelo conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ que é aberto. De fato, se $(x, y) \in X$, então a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \min\{|x|, |y|\}$ está contida em X . Logo, X é aberto. E B fechado.

Definição 1.14 (Ponto de Acumulação). Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (esse ponto pode pertencer ou não a A). Se toda bola aberta de centro (a, b) contiver pelo menos um ponto (x, y) pertencente a A , $(x, y) \neq (a, b)$, então (a, b) é *ponto de acumulação* de A .

Se (a, b) é um ponto de acumulação de A , isso significa que existem pontos distintos do conjunto A , extremamente próximos a esse ponto.

Exemplo 1.15. Consideremos o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Todo (x, y) com $x^2 + y^2 \leq 1$ é ponto de acumulação de A . Lembrando que, se (a, b) é ponto de acumulação, existem pontos distintos de A extremamente próximos a ele, por isso, ao considerarmos uma bola aberta, devemos tomar o raio de menor distância entre (a, b) e os pontos $(x, y) \in A$. Assim, o ponto $(1, 2)$, por exemplo, não é ponto de acumulação de A pois existe uma bola aberta de centro $(1, 2)$ que não contém pontos de A .

1.2 Funções vetoriais

Uma *função vetorial a valores reais* associa um conjunto de números (domínio) a um conjunto de vetores (imagem) e permite descrevermos curvas e superfícies no espaço.

Dada uma função $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $A \subset \mathbb{R}$ é seu domínio, tal aplicação associa a cada número real $t \in A$ um único vetor $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^2$. Considerando $\mathbf{f}$ como função vetorial cujos valores são vetores bidimensionais, sejam $f(t)$ e $g(t)$ as componentes do vetor $\mathbf{f}(t)$. Essas funções são chamadas *funções componentes de $\mathbf{f}$* e indicamos por:

$$\mathbf{f}(t) = (f(t), g(t)) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

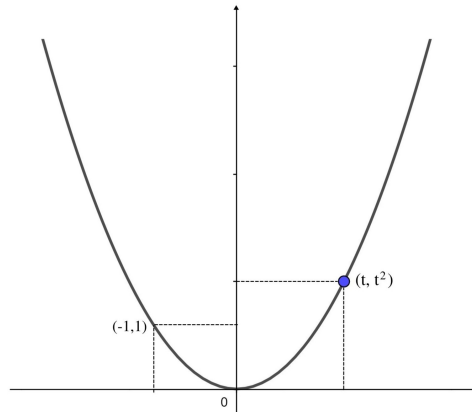
Exemplo 1.16. Se $\mathbf{f}$ é uma função dada por $\mathbf{f} = (t, t^2)$, seu domínio consiste em todos os valores de t para os quais $\mathbf{f}(t)$ está definida.

Nesse caso $t \in \mathbb{R}$, então o domínio de $\mathbf{f}$ é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ (reta) e sua imagem é a curva de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Vamos visualizar a imagem de $\mathbf{f}$ na Figura 1.5.

Figura 1.5: Gráfico da curva de equações paramétrica: $x = t, y = t^2$.



Fonte: Figura do autor.

A imagem de $\mathbf{f}$ coincide com o gráfico da parábola $y = x^2$.

1.2.1 Limite e continuidade

Definição 1.17 (Limite). Considere $\mathbf{f}$ uma função vetorial de uma variável real a valores reais tal que $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e t_0 como um ponto de acumulação de A . Dizemos que $\mathbf{f}(t)$

tende a L , $L \in \mathbb{R}^n$, quando t tende a t_0 , e escrevemos

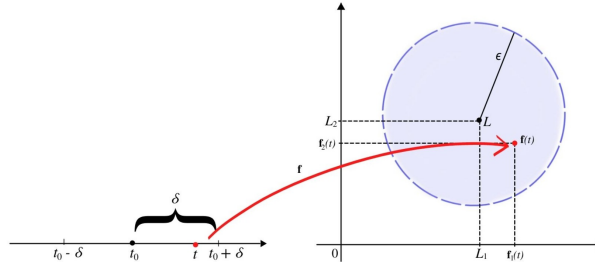
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = L,$$

se para todo número $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in A$,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(t) - L\| < \epsilon.$$

A Figura 1.6 mostra geometricamente o resultado definido pela Definição 1.17.

Figura 1.6: O limite de $\mathbf{f}(t)$, quando t tende a t_0 , tende a L .



Fonte: Figura do autor.

Note que

$$\|\mathbf{f}(t) - L\| < \epsilon \Leftrightarrow \mathbf{f}(t) \in B,$$

sendo B a bola aberta de centro L e raio ϵ : $B = \{Y \in \mathbb{R}^n : \|Y - L\| < \epsilon\}$ e $\|\mathbf{f}(t) - L\| = \sqrt{(\mathbf{f}_1 - L_1)^2 + (\mathbf{f}_2 - L_2)^2} < \epsilon$.

Além disso, enquanto t percorre a reta no intervalo $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, a função vetorial $\mathbf{f}(t)$ move-se dentro da bola aberta B . Portanto, dado um $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que a função $\mathbf{f}(t)$ permanece na bola aberta quando t percorre o intervalo $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, $t \neq t_0$ e $t \in A$.

Outro modo de definir o limite é, se $\mathbf{f}(t) = (f(t), g(t))$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right),$$

desde que os limites das componentes existam.

Teorema 1.18. Dada $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ uma função vetorial de uma variável real e $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}_i(t) = L_i, i = 1, \dots, n.$$

Exemplo 1.19. Calcule $\lim_{t \rightarrow 1} \left(2t - 3, \frac{\sin(t-1)}{t-1} \right)$.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(2t - 3, \frac{\sin(t-1)}{t-1} \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 1} 2t - 3, \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(t-1)}{t-1} \right) = (-1, 1),$$

pois $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sin u}{u} = 1$, pelo limite fundamental.

Definição 1.20 (Continuidade). Sejam $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in A$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é contínua no ponto t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0).$$

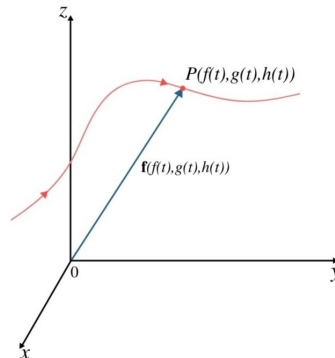
Pelo Teorema 1.18, $\mathbf{f}$ é contínua em t_0 se e somente se suas funções componentes forem contínuas em t_0 .

A continuidade traz uma relação entre uma função vetorial e uma curva espacial. Consideremos f , g e h funções reais contínuas em um intervalo I . Uma *curva espacial* C é dada por um conjunto que contém todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{e} \quad z = h(t)$$

são *equações paramétricas* e t (parâmetro) varia no intervalo I . Enquanto uma partícula se move, ela faz um caminho que consideramos ser a curva C . Vejamos a Figura 1.7, vamos considerar que no instante t a partícula se encontra na posição $(f(t), g(t), h(t))$. Seja $\mathbf{f}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ uma função vetorial, então $\mathbf{f}(t)$ é o vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ em C , a ponta desse vetor “traça” a trajetória de acordo com a movimentação da partícula. Portanto, qualquer função vetorial contínua $\mathbf{f}$ define uma curva espacial traçada pela ponta do vetor $\mathbf{f}(t)$ em movimento.

Figura 1.7: Curva espacial C traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{f}(t)$.



Fonte: Figura do autor.

1.2.2 Derivada

Definição 1.21. Sejam $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in A$. A *derivada de $\mathbf{f}$ em t_0* é definida como

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0},$$

desde que o limite exista.

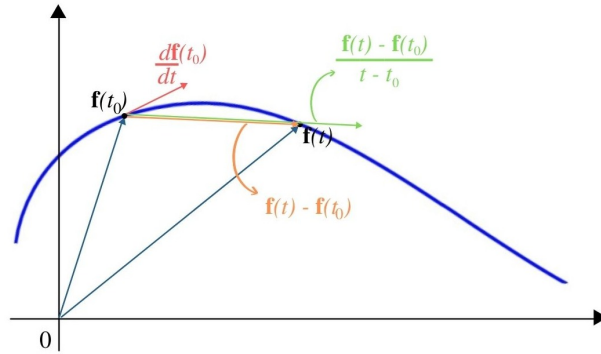
Dizemos que $\mathbf{f}$ é *derivável* em t_0 se $\mathbf{f}$ admitir derivada em t_0 . Se $\mathbf{f}$ for derivável em todos os pontos de seu domínio, diremos apenas que $\mathbf{f}$ é derivável.

Teorema 1.22. Se $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ e $t_0 \in A$, então $\mathbf{f}$ será derivável em t_0 se e somente se todas as componentes de $\mathbf{f}$ forem deriváveis em t_0 . Além disso,

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_n'(t_0)).$$

A derivada $\mathbf{f}'$ no ponto t_0 , quando existe, é um *vetor tangente* à curva definida pela função $\mathbf{f}$, no ponto $\mathbf{f}(t_0)$. Observemos a Figura 1.8.

Figura 1.8: $\mathbf{f}'(t_0)$ como vetor tangente à curva definida por $\mathbf{f}$, no ponto $\mathbf{f}(t_0)$.



Fonte: Figura do autor.

A derivada $\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0)$ é representada pelo vetor em vermelho tangente à curva definida por $\mathbf{f}$, no ponto $\mathbf{f}(t_0)$. O vetor em verde $\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$ é paralelo ao vetor em laranja $\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)$. Tomando o limite, quanto mais próximo t fica de t_0 , mais $\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$ se aproxima do vetor $\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0)$ tangente à trajetória de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{f}(t_0)$.

Exemplo 1.23. Seja $\mathbf{f}(t) = \sin(2t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, calcule a derivada no ponto t .

A derivada de $\mathbf{f}(t)$ é dada por:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(\sin(2t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) = \frac{d}{dt}(\sin(2t))\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(t^2)\mathbf{j} = 2\cos(2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}.$$

1.2.3 Integral

Pela Soma de Riemann podemos definir a *integral definida* de uma função vetorial contínua $\mathbf{f}(t)$, do mesmo modo feito para função real. Nesse caso, o resultado da integral é um vetor.

Definição 1.24 (Integral Definida de uma Função Vetorial). Consideremos uma função vetorial $\mathbf{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma partição $P : t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ do intervalo $[a, b]$. A integral de $\mathbf{f}$ em $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \lim_{\max\{\Delta t_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \mathbf{f}(c_i) \Delta t_i, \quad (1.3)$$

se o limite existir. A escolha dos $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, k$, é arbitrária.

Podemos representar a equação (1.3) como a integral de suas funções componentes, isto é, se $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ definida em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \left(\int_a^b \mathbf{f}_1 dt, \dots, \int_a^b \mathbf{f}_n dt \right),$$

$\mathbf{f}$ será integrável se e somente se cada componente de $\mathbf{f}$ for integrável nesse intervalo.

O método do Teorema Fundamental do Cálculo também se aplica à integral de funções vetoriais (veja o Teorema 1.38). Assim,

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = [\bar{\mathbf{f}}(t)]_a^b = \bar{\mathbf{f}}(b) - \bar{\mathbf{f}}(a),$$

onde $\bar{\mathbf{f}}$ é uma primitiva de $\mathbf{f}$, isso significa que $\bar{\mathbf{f}}'(t) = \mathbf{f}$.

Exemplo 1.25. Se $\mathbf{f}(t) = 3\sin(t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ no intervalo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, então

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{f}(t) dt &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t dt \right) \mathbf{j} \\ &= [-3\cos(t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}]_0^{\pi/2} = -3\mathbf{i} + \frac{\pi^2}{4}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

A *parametrização da curva* C permite definirmos valores de x , y e z de forma independente e em função de um único parâmetro t . Com isso, uma única curva C pode apresentar infinitas formas de ser representada por diferentes funções vetoriais.

Curva Suave. Uma parametrização $\mathbf{f}(t)$ é chamada *suave* em um intervalo I se a derivada $\mathbf{f}'$ for contínua, ou seja, se todas as derivadas das componentes de $\mathbf{f}'$ forem contínuas, e $\mathbf{f}'(t) \neq 0$. Uma curva C é chamada de *suave* se tiver uma parametrização suave. Essa curva é contínua e não apresenta quebras, bicos ou buracos.

1.3 Funções de várias variáveis reais a valores reais

Vamos estender as ideias vistas no Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma única variável para o estudo de funções de duas variáveis reais.

Definição 1.26. Uma *função de duas variáveis reais a valores reais* é uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado real $(x, y) \in A$ um único valor real $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é chamado de *domínio* da função e indicado por D_f , e sua *imagem* é o conjunto

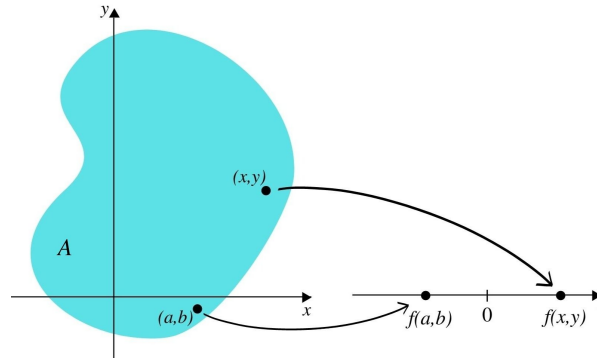
$$Im f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_f\},$$

dos possíveis valores de f .

Assim como uma função de uma única variável pode ser escrita como $y = f(x)$ para explicitar um valor tomado por f em um ponto x qualquer, podemos escrever as funções de duas variáveis como $z = f(x, y)$, (x, y) é um ponto qualquer. As variáveis x e y são as *variáveis independentes* e z uma *variável dependente* de x e y nesse caso.

Vejamos como funciona a transformação da função de duas variáveis em um valor real na Figura 1.9.

Figura 1.9: Aplicação de f nos pontos (x, y) e (a, b) pertencentes a $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Figura do autor.

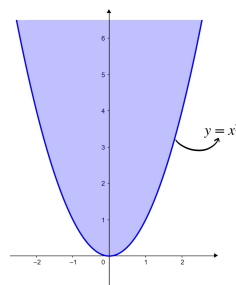
Tomando dois pontos quaisquer (x, y) e (a, b) no espaço $\mathbb{R}^2$, aplicamos uma função f que transforma os pontos em números reais $f(x, y)$ e $f(a, b)$, respectivamente.

Exemplo 1.27.² Considere $z = \sqrt{y - x^2}$. Como estamos tratando de valores em $\mathbb{R}$, vamos considerar $\sqrt{y - x^2} \geq 0$. Logo, o domínio da função é dado por:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\}.$$

Daí, $y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$. Assim, a imagem de f é o conjunto de todo ponto (x, y) tal que $y \geq x^2$. Vejamos a sua representação na Figura 1.10.

Figura 1.10: $z = \sqrt{y - x^2}$.



Fonte: Figura do autor.

O conjunto imagem está sendo representado pela parte sombreada na Figura 1.10. Esse conjunto é formado por todos os pontos iguais ou acima da equação $y = x^2$.

O comportamento de funções de duas variáveis reais também pode ser analisado por meio do gráfico da função, e sua representação é feita em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no $\mathbb{R}^3$.

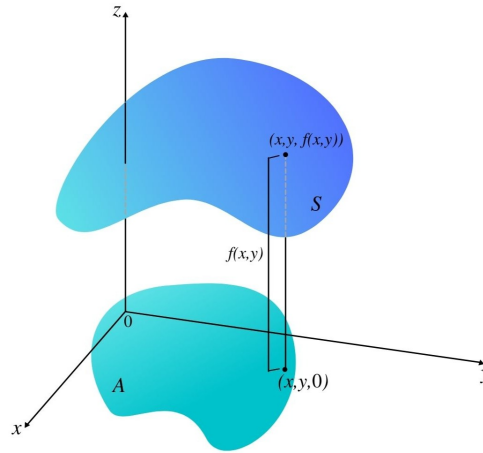
²Exemplo 6 extraído do livro de Cálculo do Guidorizzi (2013a, p.150)

Definição 1.28. Se f é uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, então o gráfico de f é dado por

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in A\}.$$

O gráfico de f é representado por uma superfície S com equação $z = f(x, y)$. Por Guidorizzi (2013a, p.153): “pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$, quando (x, y) percorre o domínio de f .” Na Figura 1.11, podemos visualizar a superfície S (gráfico de f) e abaixo seu domínio A no plano. O gráfico da superfície pode ser encontrado abaixo do plano também, vai depender da função dada.

Figura 1.11: Superfície S com equação $z = f(x, y)$.



Fonte: Figura do autor.

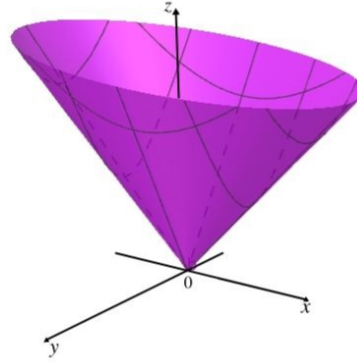
Exemplo 1.29. Considere a função $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$. O gráfico de f tem a equação $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$, que esboçamos na Figura 1.12.

Observe que a função $f(x, y)$ é definida para todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, seu domínio é o plano dado pelo espaço $\mathbb{R}^2$. A imagem de f é o conjunto de todos os reais não negativos pois,

$$\sqrt{4x^2 + y^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 \geq 0,$$

então $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Portanto, $f(x, y) \geq 0$ para todo x e y .

Figura 1.12: Gráfico de $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$.



Fonte: Figura do autor.

1.3.1 Limite e continuidade

Definição 1.30 (Limite). Sejam f uma função tal que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Definimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

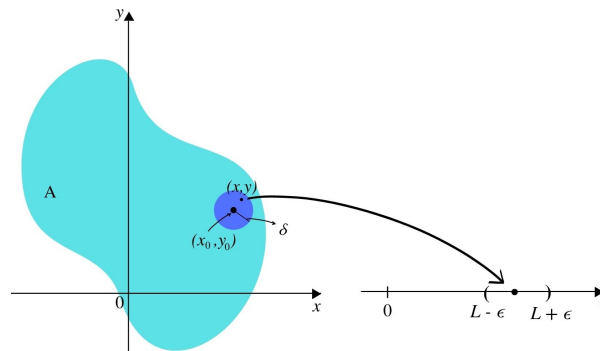
se para todo número $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in D_f$

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

A distância entre os valores $f(x, y)$ e L são dadas pelo módulo $|f(x, y) - L|$ e a distância entre os pontos (x, y) e (x_0, y_0) pela norma $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Vamos visualizar a representação da Definição 1.30 na Figura 1.13.

Figura 1.13: Limite de uma função de duas variáveis em $\mathbb{R}^2$ a um valor real.



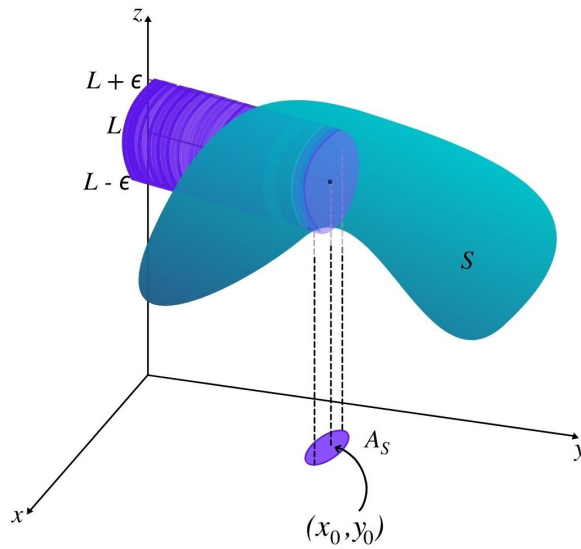
Fonte: Figura do autor.

Tomando (x, y) e (x_0, y_0) com a menor distância existente entre eles diferente de 0, então a distância entre $f(x, y)$ e L será arbitrariamente pequena. Tomando qualquer pequeno intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ em torno de L , podemos encontrar em A uma bola aberta A_S com centro (x_0, y_0) e raio $\delta > 0$ tal que f representa todos os pontos em A_S no intervalo dado.

Portanto, o *limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0)* significa que dado um $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que a função f varia permanecendo dentro do intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ quando (x, y) , $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, varia no interior da bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio δ .

Podemos fazer a representação da Definição 1.30 pelo gráfico de f dado pela superfície S . Vejamos a Figura 1.14.

Figura 1.14: Limite de uma função de duas variáveis em $\mathbb{R}^2$ (superfície S).



Fonte: Figura do autor.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se um ponto (x, y) estiver na bola aberta A_S de centro (x_0, y_0) , $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, então a superfície S correspondente fica entre os planos $z = L - \epsilon$ e $z = L + \epsilon$.

Exemplo 1.31. ³ Verifique que o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$ não existe.

Considere $f(x, y) = \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$. Vamos estudar os valores de $f(x, y)$ para pontos (x, y) próximos de $(0, 0)$.

³Exercício 15 extraído do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.810).

Primeiro, fixamos $y = 0$ enquanto x varia sobre o eixo, então $f(x, 0) = 0$. Isto é, quando $f(x, y)$ tende a 0, (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo do eixo x .

Agora, fixando $x = 0$, vamos aproximar (x, y) de $(0, 0)$ pelo eixo y . Assim, $f(0, y) = 0$. Quando $f(x, y)$ tende a 0, (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo do eixo y .

Apenas com esses argumentos acharíamos que o limite de f quando (x, y) tende a $(0, 0)$ existe. Porém, é necessário verificar todos os caminhos que (x, y) pode se aproximar de $(0, 0)$. Por isso, vamos considerar $y = x^2$, então

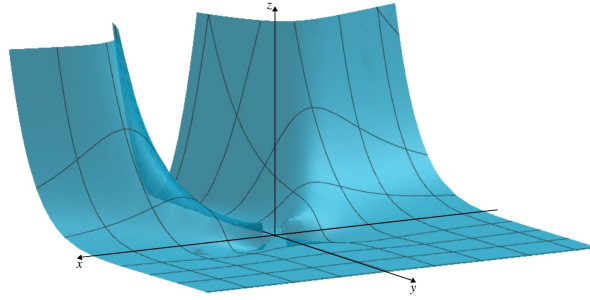
$$f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2 e^{x^2}}{x^4 + 4(x^2)^2} = \frac{x^4 e^{x^2}}{5x^4} = \frac{e^{x^2}}{5},$$

para $x \neq 0$. Tomando o limite dessa função, temos que $f(x, y)$ tende a $\frac{e^{0^2}}{5} = \frac{1}{5}$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de $y = x^2$.

Portanto o limite de f não existe.

Observando a Figura 1.15, vemos que o relevo próximo à origem corresponde ao fato de $f(x, y) = \frac{1}{5}$ para todos os (x, y) da parábola exceto em $(0, 0)$.

Figura 1.15: $f(x, y) = \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$.



Fonte: Figura do autor.

Definição 1.32 (Continuidade). Sejam f uma função de duas variáveis reais e $(x_0, y_0) \in D_f$, (x_0, y_0) é ponto de acumulação de D_f . Dizemos que f é *contínua* em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Se f for contínua em todos os pontos de $A \subset D_f$, então f é *contínua em A*.

Uma superfície S que representa o gráfico de uma função f de duas variáveis contínua não apresenta buracos. Enquanto (x, y) varia, o valor de $f(x, y)$ também vai variar.

A função polinomial de duas variáveis e a função racional são exemplos de funções contínuas em seus domínios.

Exemplo 1.33. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

A função f é contínua em todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, pois f é uma função racional definida nessa região. Agora, do Exemplo 1.31, temos que o limite de $f(x, y)$ não existe quando (x, y) tende a $(0, 0)$. Portanto, f é uma função descontínua em $(0, 0)$.

1.3.2 Derivadas parciais

Sejam f uma função real de duas variáveis reais e $(x_0, y_0) \in D_f$. Vamos fixar y_0 , deixando somente x variar (considere y_0 como uma constante nesse caso). Podemos considerar a função g dada por

$$g(x) = f(x, y_0),$$

como uma função de uma única variável x . Se existir a derivada dessa função em $x = x_0$, dizemos que essa é a *derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0)* e indicamos por:

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Assim, pela definição de derivada de uma única variável, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Da mesma forma, fixamos x_0 (constante) enquanto y varia e definimos a *derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0)* como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Sendo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g'(y_0).$$

Para fixarmos a ideia, podemos contar com a regra para determinar as derivadas parciais dadas por Stewart (2013, p.813). São elas:

1. Para determinar a derivada parcial de f em relação a x , trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x .
2. Para determinar a derivada parcial de f em relação a y , trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y .

Exemplo 1.34. Determine a derivada parcial de $f(x, y) = 3x^4y^3 + x^4y + 3$.

Fixando y constante e derivando f em relação a x , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x^3y^3 + 4x^3y.$$

Agora, mantendo x constante e derivando f em relação a y , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 9x^4y^2 + x^4.$$

As derivadas parciais trazem um conceito muito importante para o uso no Teorema de Green, a função de *classe* C^1 .

Definição 1.35. Seja uma função f de duas variáveis reais com domínio $A \subset \mathbb{R}^2$, A aberto. Se suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A , dizemos que f é de *classe* C^1 .

Definição 1.36 (Vetor Gradiente). Se $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em (x_0, y_0) . Definimos o *vetor gradiente* de f em (x_0, y_0) pela função vetorial ∇f tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

A representação geométrica do gradiente ∇f é um vetor aplicado no ponto (x_0, y_0) .

1.4 Integral dupla

Nesta seção, a ideia de integrais definidas estende-se para integrais duplas de funções de duas variáveis. No cálculo da integral de uma função de uma única variável, a região

tomada é um intervalo. Para as integrais duplas, podemos tomar diferentes tipo de regiões e utilizar diferentes técnicas para calculá-las.

1.4.1 Integral dupla sobre retângulos

Consideremos o retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Para entendimento da explicação, vejamos a Figura 1.16. Dividimos R em sub-retângulos tal que o intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e $[c, d]$ em m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$. Os comprimentos desses intervalos são iguais a

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} \text{ e } \Delta y = \frac{(d-c)}{m},$$

respectivamente. Podemos chamar esses subintervalos de partições, sendo $P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ partição de $[a, b]$ e $P_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ de $[c, d]$. O conjunto

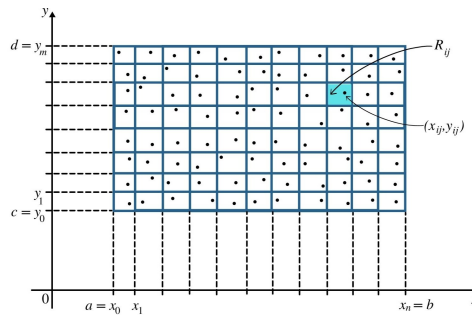
$$P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m\},$$

define a *partição* do retângulo R . Uma partição P determina nm retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$ cada um.

Figura 1.16: Retângulo R subdivido em nm sub-retângulos.



Fonte: Figura do autor.

Seja $P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m\}$ uma partição de R . Um ponto

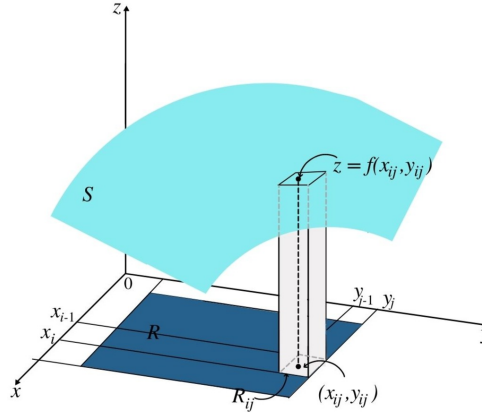
(x_{ij}, y_{ij}) é escolhido arbitrariamente em cada retângulo dividido, chamaremos de *ponto de amostragem*. O número

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (1.4)$$

é chamada de *soma dupla de Riemann*.

Observe a Figura 1.17, considere R_{ij} como a base do retângulo e $f(x_{ij}, y_{ij})$ sua altura. Se $f(x_{ij}, y_{ij}) > 0$, então $f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ será o volume do paralelepípedo.

Figura 1.17: Superfície S com equação $z = f(x, y)$.



Fonte: Figura do autor.

Para cada sub-retângulo, calculamos f no ponto de amostragem escolhido em seu interior e multiplicamos esse valor pela sua área $\Delta x \Delta y$, e então adicionamos todos os resultados obtidos. Quanto maior os valores de m e n , melhor será a aproximação (1.4). O resultado que podemos esperar pode ser escrito como:

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que depende apenas da escolha de ϵ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \epsilon,$$

para qualquer partição de R , com $\|P\| < \delta$. A escolha de (x_{ij}, y_{ij}) é aleatória.

Quando L existe, ele é único e denomina-se *integral dupla*.

Definição 1.37 (Integral Dupla sobre Retângulos). Seja o retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

A integral dupla de $z = f(x, y)$ em R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (1.5)$$

caso o limite exista.

Portanto, quando queremos integrar uma função sobre uma região no plano em formato de um retângulo, calculamos a integral dupla sobre R dada pela equação (1.5), fazendo o mesmo procedimento de sub-divisão em finitos retângulos menores. No entanto, calcular uma integral pela sua definição pode ser muito complicado. Por isso, veremos na Seção 1.4.2 alguns métodos mais práticos que simplificam esse cálculo.

1.4.2 Integral iterada e Teorema de Fubini

Para calcular a integral de funções de uma única variável utilizamos o Teorema Fundamental do Cálculo (podemos nomear T.F.C.), um método mais direto que tende a facilitar a integração. Da mesma forma, existem caminhos mais práticos para calcularmos as integrais de duas ou mais variáveis. Assim sendo, faremos a menção do T.F.C., pois ele será muito importante para as próximas aplicações, e em seguida, apresentaremos dois métodos que auxiliam no cálculo da integral dupla sobre uma região.

Teorema 1.38 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f for integrável no intervalo $[a, b]$ e se F for sua primitiva em $[a, b]$, isto é, uma função tal que $F' = f$, então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Podemos indicar $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

A partir deste resultado, conseguimos utilizar um método mais simples para calcular as integrais duplas, onde vamos expressá-las como duas integrais unidimensionais. Suponha

f uma função de duas variáveis reais integrável em um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Chamamos de *integração parcial em relação a y* quando calculamos

$$\int_c^d f(x, y) dy \quad (1.6)$$

onde x deve ficar fixo enquanto integra-se $f(x, y)$ em relação a y , de c até d . A integral (1.6) depende do valor de x , por isso define uma função

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1.7)$$

Integrando a equação (1.7) de a a b , obtemos:

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (1.8)$$

A equação (1.8) é chamada de *integral iterada*, integramos primeiro em relação a y , de c a d e depois em relação a x , de a a b .

Da mesma forma,

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

primeiro integramos em relação a x , de a a b e depois em relação a y , de c a d . Sempre trabalhando de dentro para fora.

Exemplo 1.39. Calcule a integral iterada dada por $\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx &= \int_0^2 \left[\int_1^2 (x - 3y^2) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 [xy - y^3]_1^2 dx = \int_0^2 (2x - x - (8 - 1)) dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = 2 - 14 = -12. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular integrando primeiro em relação a x .

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy &= \int_1^2 \left[\int_0^2 (x - 3y^2) dx \right] dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_0^2 dy = \int_1^2 (2 - 6y^2) dy \\ &= [2y - 2y^3]_1^2 = -12.\end{aligned}$$

Utilizando da ideia de integral iterada, o método do *Teorema de Fubini* traz praticidade para o cálculo de integrais duplas.

Teorema 1.40 (Teorema de Fubini). *Seja f integrável no retângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Suponha que $\int_a^b f(x, y) dx$ existe, para todo $y \in [c, d]$ e $\int_c^d f(x, y) dy$ existe, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 1.41. ⁴ Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = y + xy^{-2}$ sobre o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

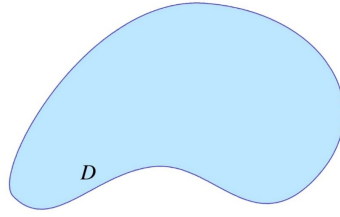
Como $f(x, y)$ é contínua no retângulo, temos satisfeitas as hipóteses do Teorema de Fubini. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_R (y + xy^{-2}) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (y + xy^{-2}) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[\int_1^2 (y + xy^{-2}) dy \right] dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} - x \frac{1}{y} \right]_1^2 dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{3}{2} + x \frac{1}{2} \right] dx = \left[\frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 3 + 1 = 4.\end{aligned}$$

1.4.3 Integral dupla sobre regiões gerais

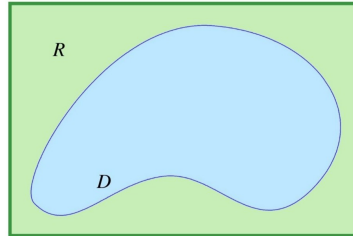
Podemos calcular as integrais sobre uma região D de forma mais geral (veja a Figura 1.18).

⁴Exercício 16 extraído da Seção 15.2 do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.886)

Figura 1.18: Região D .

Fonte: Figura do autor.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, esse conjunto é chamado *limitado* se existir um retângulo R , onde $D \subset R$ (veja a Figura 1.19).

Figura 1.19: Região D limitada pelo retângulo R .

Fonte: Figura do autor.

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com D limitado, então existe um retângulo:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que contém D .

Definimos uma função F com domínio em R da seguinte forma:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \text{ mas não pertence a } D. \end{cases} \quad (1.9)$$

Se F for integrável em R , a *integral dupla de $z = f(x, y)$ em D* é

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA. \quad (1.10)$$

Observe que a integral do lado esquerdo da equação (1.10) já foi vista em integrais duplas sobre retângulos (equação (1.5)), então essa fórmula é válida.

O uso da Definição 1.9 é importante no caso das regiões de forma geral pois quando

(x, y) é tomado fora de D , temos que $F(x, y) = 0$ e não interfere na integração. Logo, podemos tomar qualquer retângulo R , o que importa é o conjunto D em seu interior.

A função F pode apresentar descontinuidades nos pontos limites de D quando tomado dentro de um retângulo R . No entanto, vamos considerar f como uma função contínua em D e a curva limite de D “bem comportada”. Assim podemos mostrar que $\iint_R F(x, y) dA$ existe e, portanto, $\iint_D f(x, y) dA$ existe. Esse resultado aparece nos casos das regiões simples do **tipo I** e das regiões do **tipo II**, descritas a seguir.

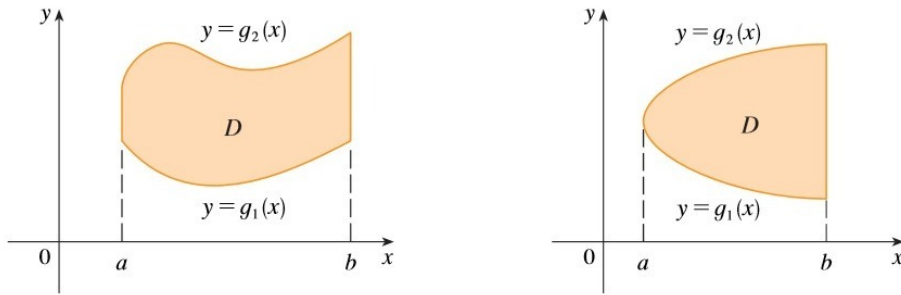
Região plana do tipo I: uma região plana D do **tipo I** fica entre o gráfico de duas funções contínuas de x dada por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad (1.11)$$

onde g e h são contínuas no intervalo $[a, b]$.

A Figura 1.20 mostra alguns exemplos de regiões do tipo I.

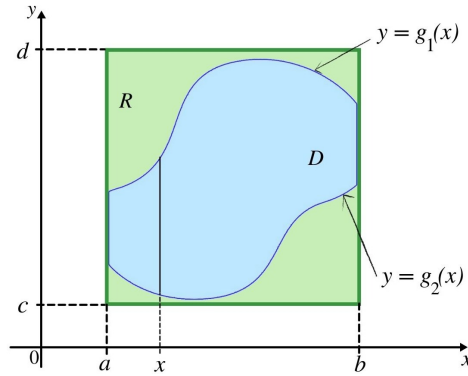
Figura 1.20: Exemplos de regiões do tipo I.



Fonte: Stewart (2013, p.888).

Para calcularmos $\iint_D f(x, y) dA$ sobre esse tipo de região, consideramos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, com $D \subset R$ (veja a Figura 1.21) e F definida em (1.9), isto é, $F(x, y) = f(x, y)$ em D ou $F(x, y) = 0$ quando fora de D .

Figura 1.21: Região do tipo I.



Fonte: Figura do autor.

Pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx.$$

Quando $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$, $F(x, y) = 0$ pois (x, y) está fora de D . Se temos $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, então $F(x, y) = f(x, y)$. Portanto,

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Portanto, se f é contínua em D do **tipo I** dada pelo conjunto (1.11), então

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

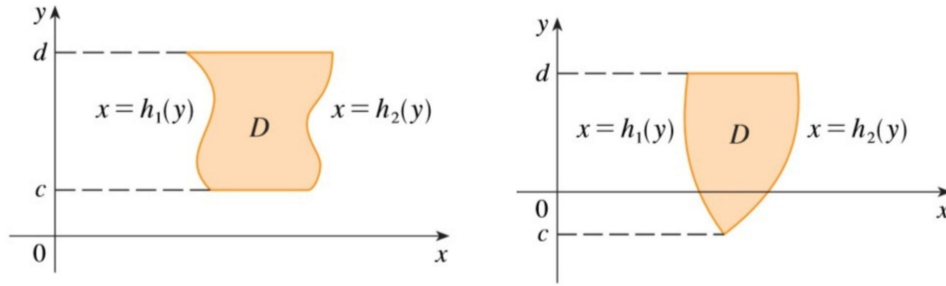
Região plana do tipo II: uma região plana D do **tipo II** pode ser expressa como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}, \quad (1.12)$$

onde g e h são contínuas no intervalo $[c, d]$.

Na Figura 1.22 vemos a representação de regiões do tipo II.

Figura 1.22: Exemplos de regiões do tipo II.



Fonte: Stewart (2013, p.889).

Da mesma forma que fizemos para regiões do tipo I, consideramos f contínua em D do tipo II dada pelo conjunto (1.12), e mostramos que

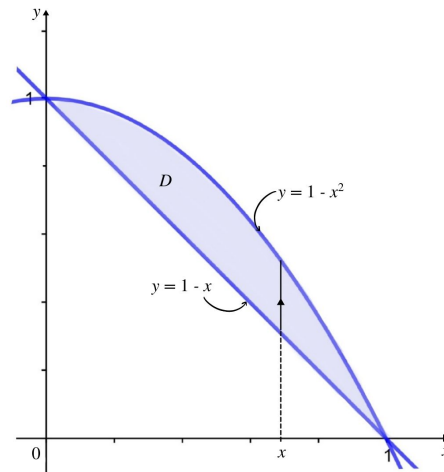
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 1.42. Calcule a integral dupla dada pela função $z = 1 - x + 2y$, sobre uma região delimitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$.

A equação $x + y = 1$ pode ser escrita como $y = 1 - x$, e $x^2 + y = 1$ por $y = 1 - x^2$. Podemos expressar a região como o conjunto:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Observe que, neste exemplo, estamos considerando D como uma região do tipo I.

Figura 1.23: Região D delimitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$.

Fonte: Figura do autor.

Desde que $z = f(x, y)$ é contínua em R , as hipóteses do Teorema de Fubini são satisfeitas. Assim,

$$\begin{aligned}
 \iint_R (1 - x + 2y) dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y) dy dx = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 [y - xy + y^2]_{1-x}^{1-x^2} dx = \int_0^1 [(1 - x^2) - (1 - x) \\
 &\quad - x(1 - x^2) + x(1 - x) + (1 - x^2)^2 - (1 - x)^2] dx \\
 &= \int_0^1 (x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{60}.
 \end{aligned}$$

Propriedades das Integrais Duplas. As integrais duplas apresentam algumas propriedades para o cálculo sobre uma região D . São elas:

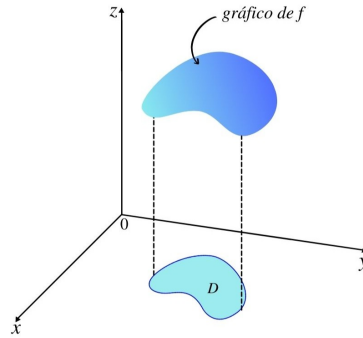
1. $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA,$
2. $\iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA,$
3. Se $f(x, y) \geq g(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$, então

$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA,$$

4. Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são regiões que não se sobrepõem, então

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA.$$

Considere $f(x, y) \geq 0$, a integral dupla de $f(x, y)$ sobre a região D permite calcularmos o volume de um sólido que está acima de D e abaixo da superfície com equação $z = f(x, y)$.

Figura 1.24: Gráfico de f .

Fonte: Figura do autor.

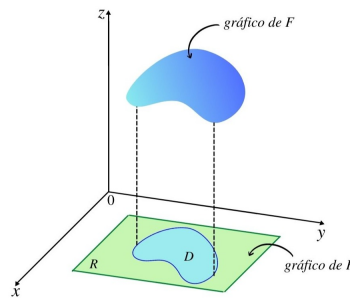
Volume: Sejam $f(x, y)$ integrável em B , com $f(x, y) \geq 0$ e

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Definimos o volume de A por

$$\text{volume de } A = \iint_B f(x, y) dA.$$

Da mesma forma, $\iint_B F(x, y) dA$ é o volume abaixo do gráfico de F .

Figura 1.25: Gráfico de F .

Fonte: Figura do autor.

Área: Se $\iint_B f(x, y) dA$ existe, definimos a área de B por

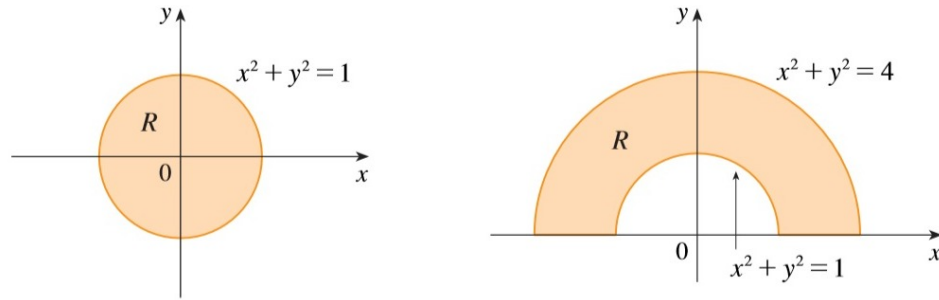
$$\text{área de } B = \iint_B dA. \quad (1.13)$$

Logo, se integrarmos uma função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D , obtemos a área de D .

1.4.4 Mudança de variável envolvendo coordenadas polares

Suponha que R é igual as regiões apresentadas na Figura 1.26. Para calcular a integral dupla desses tipos de regiões utiliza-se as coordenadas polares, isso porque pelas coordenadas retangulares ficaria muito mais difícil.

Figura 1.26: Exemplos de regiões de um retângulo polar.



Fonte: Stewart (2013, p.895).

Relacionamos as coordenadas polares (r, θ) de um ponto as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações de (1.14):

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta. \quad (1.14)$$

Um **retângulo polar** é dado pelo conjunto

$$R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Portanto, a circunferência à esquerda da Figura 1.26 é representada pelo conjunto:

$$R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

e a região à direita limitada pelos semicírculos é:

$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Mudança para coordenadas polares em uma integral dupla. Seja uma função $f(x, y)$ de duas variáveis reais. Se f é contínua no retângulo polar R dado por

$0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, onde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Então,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

É muito importante que não esqueçamos de usar o fator adicional r na integral dupla de coordenadas polares. Assim como dA é a área a qual multiplicamos o valor da função no cálculo da integral dupla de coordenadas retangulares, podemos pensar que $r dr d\theta$ é a “área” do retângulo polar infinitesimal. Assim, $dA = r dr d\theta$.

Obtemos o fator adicional r pelo cálculo do determinante Jacobiano, onde

$$dA = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta,$$

sendo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial(r)} & \frac{\partial(x)}{\partial(\theta)} \\ \frac{\partial(y)}{\partial(r)} & \frac{\partial(y)}{\partial(\theta)} \end{vmatrix} = r.$$

Portanto, convertendo as coordenadas retangulares em coordenadas polares, escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, usando r e os intervalos de integração adequados para r e θ conseguimos calcular a integral dupla de regiões tais como a Figura 1.26.

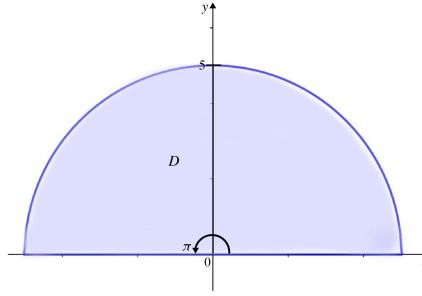
Exemplo 1.43. ⁵ Calcule $\iint_D x^2 y dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5.

Analisando a região D na Figura 1.27, temos que θ percorre de 0 a π e, pelo enunciado, r varia de 0 a 5. Portanto, o disco D pode ser descrito por

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

⁵Exercício 7 extraído da Seção 15.4 do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.900)

Figura 1.27: Região D como disco de centro na origem e raio 5.



Fonte: Figura do autor.

Façamos a mudança de coordenadas. Pelas equações (1.14), temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = 5 \cos \theta, \\ y = r \sin \theta = 5 \sin \theta. \end{cases}$$

Sendo $dA = r dr d\theta$, temos que

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dA &= \int_0^\pi \int_0^5 (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi (\cos \theta)^2 (\sin \theta) d\theta \right) \left(\int_0^5 r^4 dr \right) \\ &= \left[\frac{-1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^5 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot 625 = \frac{1250}{3}. \end{aligned}$$

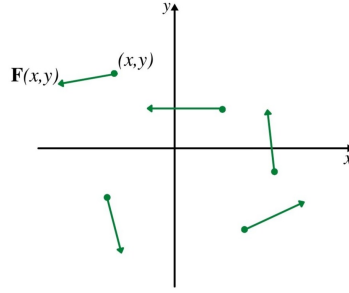
1.5 Integral de linha

1.5.1 Campo vetorial

Antes de definirmos a integral de linha, faremos um estudo sobre os campos vetoriais.

Definição 1.44 (Campo Vetorial). Considere um conjunto D em $\mathbb{R}^2$. Um *campo vetorial* em $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa um vetor $\mathbf{F}(x, y)$ a cada ponto $(x, y) \in D$.

Vejamos a Figura 1.28, a seta saindo de um ponto (x, y) representa um vetor $\mathbf{F}(x, y)$. O campo vetorial pode ser representado dessa forma com setas saindo de todos os seus pontos mas é impossível fazer esse desenho, por isso usamos apenas alguns vetores representativos em D .

Figura 1.28: Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$.

Fonte: Figura do autor.

Um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$ pode ser representado por duas funções componentes P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

ou $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, sendo P e Q funções escalares de duas variáveis, também chamadas de *campos escalares*.

Pela Definição 1.36, se f é uma função de duas variáveis, então seu gradiente é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

O gradiente ∇f também é um campo vetorial definido em $\mathbb{R}^2$. Chamamos de *campo vetorial gradiente*.

Quando um campo vetorial $\mathbf{F}$ é tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, se existir ∇f , chamamos de *campo vetorial conservativo*, e f é a *função potencial* de $\mathbf{F}$.

Agora que já temos os campos vetoriais e escalares definidos, vamos introduzir a ideia de integral de linha que é semelhante à integral definida para funções de uma única variável, no entanto, seu cálculo é feito sobre uma curva C .

1.5.2 Integral de linha de campos vetoriais

Partindo das argumentações de Guidorizzi (2013b, p.141), vamos considerar um campo $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuo no aberto Ω e uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 com $Im(\gamma) \subset \Omega$. Pensando que γ descreve uma função posição de uma partícula que se movimenta em Ω , o *trabalho* realizado por $\mathbf{F}$ para mover uma partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$

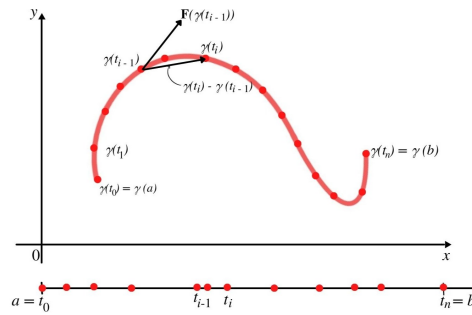
é o produto escalar

$$\tau = \mathbf{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)],$$

onde $[\gamma(b) - \gamma(a)]$ é o deslocamento.

Para definirmos o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$, podemos fazer o processo de divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho $[t_{i-1}, t_i]$, como na Figura 1.29 (semelhante a integrais definidas e integrais duplas). Seja $P : a = t_0 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$, e Δt_i o maior dos comprimentos ($\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, n$).

Figura 1.29: Partições de uma curva C .



Fonte: Figura do autor.

Escolhendo um parâmetro qualquer t_{i-1} em $[t_{i-1}, t_i]$, o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover a partícula de γ_{i-1} para γ_i é

$$\mathbf{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})],$$

onde $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ é o deslocamento de γ_{i-1} para γ_i . Logo, podemos esperar que o trabalho total para mover uma partícula ao longo de γ é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})], \quad (1.15)$$

e quanto menor o valor de Δt_i , melhor será essa aproximação.

No entanto, $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(t_{i-1})\Delta t_i$, então o trabalho pode ser aproximado pela aproximação

$$\tau \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1})\Delta t_i, \quad (1.16)$$

semelhante à soma de Riemann.

A função $\mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é contínua em $[a, b]$ e integrável nesse intervalo. Portanto, ao tomarmos o limite da soma (1.15), obtemos:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\gamma(\bar{t}_i)) \cdot \gamma'(\bar{t}_i) \Delta t_i = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (1.17)$$

Assim, o trabalho τ realizado por $\mathbf{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ é dado pela equação (1.17), que consideramos como a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre γ .

Definição 1.45 (Integral de Linha). Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aberto, e uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 . A *integral de linha de F sobre γ* é definida por

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (1.18)$$

A equação (1.18) é frequentemente denotada por $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\gamma(t) = \mathbf{r}(t)$. Além disso, como $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ é uma equação vetorial, podemos calcular $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ colocando $x = x(t)$ e $y = y(t)$ na expressão, então $\mathbf{F}(x(t), y(t))$.

Orientação da curva (Mudança de Parâmetro): Vejamos como Guidorizzi (2013b, p.149) aborda sobre a orientação de uma curva. Considere $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas que admitem derivadas parciais contínuas. Suponhamos que exista $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , onde $g'(u) > 0$ em $]c, d[$ e $Im\ g = [a, b]$ tal que, para todo $u \in [c, d]$,

$$\gamma_2(u) = \gamma_1(g(u)).$$

Isso significa que γ_2 foi obtido de γ_1 a partir de uma *mudança de parâmetro que conserva a orientação*, e γ_1 e γ_2 têm mesma imagem. Quando $g'(u) < 0$ em $]c, d[$, dizemos que γ_2 foi obtido de γ_1 por uma *mudança de parâmetro que reverte a orientação*.

Teorema 1.46. Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são duas curvas de classe C_1 , então,

1. Se γ_2 for obtido de γ_1 a partir de uma *mudança de parâmetro que conserva a orientação*, então

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2.$$

2. Se γ_2 for obtido de γ_1 a partir de uma mudança de parâmetro que reverte a orientação, então

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2. \quad (1.19)$$

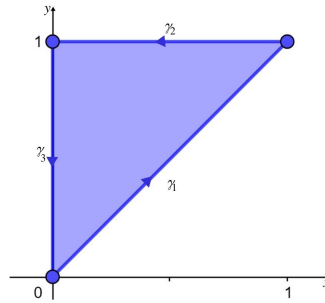
Da mesma forma, Stewart (2013, p.960) fala que a integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ não altera o sinal (de adição para subtração) quando a orientação do caminho é inverso. No entanto, quando substituímos a curva C por $-C$, o vetor tangente $\mathbf{T}$ é substituído por sua negativa, e então podemos afirmar que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.20)$$

As equações (1.19) e (1.20) são semelhantes, mudando apenas a forma como cada autor trata as curvas.

Exemplo 1.47. Considere $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e calcule a integral de linha do campo $\mathbf{F}$ sobre o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$, orientado no sentido anti-horário. Considere a representação da curva na Figura 1.30.

Figura 1.30: Triângulo orientado no sentido anti-horário.



Fonte: Figura do autor.

Primeiro vamos substituir as curvas γ_2 e γ_3 por $-\gamma_2$ e $-\gamma_3$, respectivamente, para que possamos calcular a parametrização no intervalo de $0 \leq t \leq 1$.

A parametrização de γ de classe C^1 por partes é:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) = (t, t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_2(t) = (t, 1), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_3(t) = (0, t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Assim, a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre γ é

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \mathbf{F} d\gamma &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 + \int_{-\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 \\
 &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 - \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 \\
 &= \int_0^1 \mathbf{F}(t, t) \cdot (1, 1) dt - \int_0^1 \mathbf{F}(t, 1) \cdot (1, 0) dt - \int_0^1 \mathbf{F}(0, t) \cdot (0, 1) dt \\
 &= \int_0^1 (-t, t) \cdot (1, 1) dt - \int_0^1 (-1, t) \cdot (1, 0) dt - \int_0^1 (-t, 0) \cdot (0, 1) dt \\
 &= \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1.
 \end{aligned}$$

A integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C também pode ser escrita como uma relação entre campo vetorial e campo escalar. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 definida pelas equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$. Temos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy$$

é a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre γ .

1.5.3 Independência de caminho

No caso das funções de uma única variável usamos o método do Teorema Fundamental do Cálculo para obter com praticidade a integração, e estendemos esse resultado para as integrais duplas em Integral Iterada e Teorema de Fubini (veja a Seção 1.4.2). Agora, considere um vetor gradiente ∇f como uma derivada de uma função f . O Teorema 1.48 mostra que a integral de linha de um campo conservativo ∇f depende apenas dos pontos inicial e final da curva C .

Teorema 1.48 (Teorema Fundamental das Integrais de Linha). *Considere uma curva suave C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$. Se f é uma função diferenciável de duas ou três variáveis e o vetor gradiente ∇f contínuo em C , então,*

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

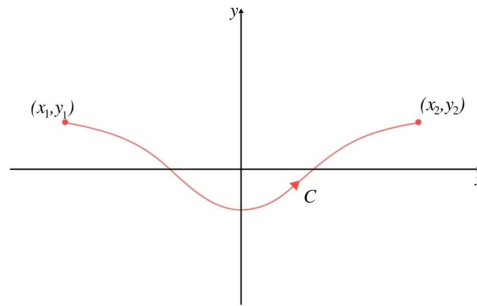
Podemos considerar o Teorema 1.48 como o Teorema Fundamental do Cálculo para

integrais de linha.

Como ∇f é um campo conservativo, a integral de linha de ∇f mostra que é possível fazer a integração sabendo apenas os valores de f nos pontos inicial e final da curva C . Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) (veja a Figura 1.31). Aplicando o Teorema 1.48, temos que:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

Figura 1.31: Integral de linha de um campo vetorial conservativo.



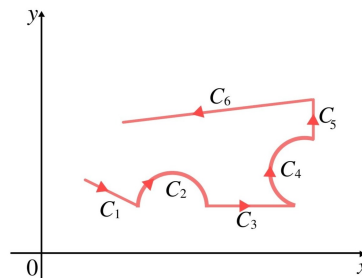
Fonte: Figura do autor.

Curva suave por partes. Seja C uma união finita de curvas suaves $C_1, \dots, C_n$, com ponto inicial C_i e ponto final C_{i+1} como mostra a Figura 1.32. Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial contínuo no aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, a integral de $\mathbf{F}$ ao longo de C é dada como a soma das integrais de $\mathbf{F}$ ao longo de cada curva suave de C , e indicamos por:

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Como sabemos uma curva suave é contínua e não tem buracos (veja a Seção 1.2.1), então cada curva que compõe C ($C_1, \dots, C_n$) são todas curvas contínuas. Podemos chamá-las de curvas contínuas por partes.

Figura 1.32: Curva suave por partes.



Fonte: Figura do autor.

Integrais de linha independentes de caminho. Considere duas curvas suaves por partes C_1 e C_2 com mesmo ponto inicial A e final B , chamaremos essas curvas de caminhos. O Teorema Fundamental para Integrais de linhas (Teorema 1.48) diz que a integral de linha de um campo conservativo depende somente dos valores dos pontos das extremidades (ponto inicial e ponto final). Nesse caso, podemos dizer que

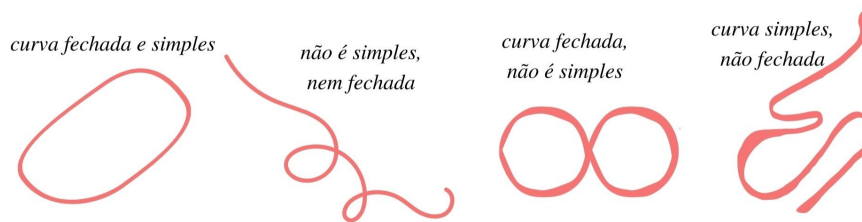
$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r},$$

sempre que ∇f for contínua.

Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo no domínio D , a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, para quaisquer curvas C_1 e C_2 pertencentes a D , com mesmos pontos inicial e final. Portanto, as integrais de linha de campo conservativo são independentes de caminho.

Seja C uma curva com pontos inicial e final coincidindo, podemos chamá-la de *curva fechada*, pois $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Agora, quando C é fechada e não se auto intercepta em nenhum ponto entre as extremidades, isto é, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$, onde $a < t_1 < t_2 < b$, chamamos C de curva fechada simples. Vejamos na Figura 1.33 alguns exemplos dos diferentes tipos de curvas.

Figura 1.33: Exemplos de curvas.



Fonte: Figura do autor.

A curva simples e fechada tem características de uma curva que chamamos de Curva de Jordan. Trazemos a definição apresentada por Apostol (1960, p.164).

Definição 1.49 (Curva de Jordan). Seja $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ uma função vetorial contínua definida em um intervalo $[a, b]$. A imagem de $[a, b]$ originada por $\mathbf{r}$ é a curva determinada por $\mathbf{r}$ e que une os pontos $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$. Se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, a curva é chamada fechada. Se $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$, dizemos que é um arco com extremos em $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$. Se $\mathbf{r}$ é injetora em $[a, b]$, se chama arco simples ou arco de Jordan. Se $\mathbf{r}$ é injetora em um intervalo semiaberto $[a, b)$

e $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, denominamos curva simples fechada ou curva de Jordan. Se $\mathbf{r}$ é constante, é a curva ponto.

Pela Definição 1.49, na Figura 1.33 a primeira curva fechada e simples representa uma curva de Jordan, a segunda é um arco, a terceira é uma curva fechada com $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ e a última (quarta curva) é um arco de Jordan.

Considere D aberto (veja Seção 1.1.2). Tomando dois pontos quaisquer (x, y) e (x_1, y_1) em D , se um caminho contido em D liga os dois pontos em D , dizemos que D é conexo por caminhos.

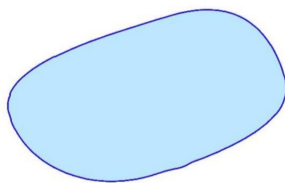
Região simplesmente conexa: uma região *simplesmente conexa* no plano é uma região conexa por caminhos D sendo que toda curva fechada simples pertencente a D delimita uma região que contém apenas pontos que estão dentro de D . Essa região não possui buracos e nem consiste em duas regiões separadas.

Região multiplamente conexa: uma região *multiplamente conexa*, ou *que não é simplesmente conexa*, é uma região que contém furos. Sua fronteira é constituída por duas ou mais curvas, ou pode ser uma região que consiste em duas regiões separadas.

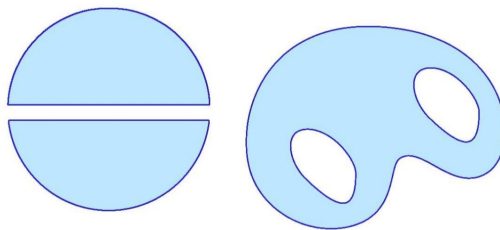
A Figura 1.34 mostra as regiões referidas.

Figura 1.34: Exemplos de regiões.

região simplesmente conexa



regiões que não são simplesmente conexas



Fonte: Figura do autor.

Todas essas regiões serão utilizadas para a aplicação do Teorema de Green.

Capítulo 2

Teorema de Green

Neste capítulo, veremos o desenvolvimento do nosso tema principal, o Teorema de Green. Iniciamos fazendo uma breve apresentação da sua história, desde quando foi escrito por Green até a sua importância ser reconhecida na área do Cálculo Diferencial e Integral. Seguindo para o próximo tópico, trataremos exclusivamente do caso particular, o qual se aplica o teorema para regiões simples. A partir dessa aplicação, nas próximas seções estenderemos o resultado para a união de regiões simples e para as regiões multiplamente conexas (ou que não são simplesmente conexas), e exibiremos uma ideia de demonstração utilizando o que estudamos anteriormente. Em todos os itens será feita uma abordagem didática incluindo análise das hipóteses, motivação para demonstração e desenvolvimento dessa, com objetivo de compreender, desenvolver e relacionar com o que já estudamos, envolvendo os conceitos vistos no Capítulo 1.

2.1 Uma breve história

O Teorema de Green passou a ser reconhecido dessa forma recentemente. Em 1828, o resultado foi demonstrado pelo matemático e físico George Green (1793-1841) em sua primeira publicação *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* como um conceito matemático preliminar que seria aplicado a tópicos posteriores relacionados à física. Na época, o ensaio não obteve grande repercussão. Entretanto, com o incentivo de Bromhead, outro matemático que apreciava seu trabalho, Green chegou a produzir mais algumas publicações. Conforme Cannell e Lord (1993, p.35), o reconhecimento de seus trabalhos surgiu alguns anos após sua morte quando William Thomson, também conhecido como Lord Kelvin, com grande interesse

pelo estudo de eletricidade e magnetismo, redescobriu a publicação do ensaio em 1845 e compartilhou com outros matemáticos que se inspiraram e produziram artigos e chegaram a resultados importantes por meio desse material.

Thomson baseou-se no trabalho de Green para seus próprios artigos sobre eletromagnetismo e, ao longo de sua longa vida (ele morreu em 1907 aos 83), exaltou incessantemente as virtudes de Green. Seu amigo e contemporâneo George Gabriel Stokes também admirava o trabalho de Green e fez referência em particular aos seus artigos sobre hidrodinâmica (STORER; CANNELL, 1993, p. 36).

Devido às ações dos matemáticos, os resultados publicados no ensaio ganharam espaço na ciência matemática e, durante o século XIX, foi reconhecida sua devida importância na área, sendo aplicados a problemas da física clássica, na engenharia e em outras áreas de exatas. O Teorema de Green e as funções de Green são os mais conhecidos atualmente.

2.2 Teorema de Green: um caso particular

O Teorema de Green resume-se a uma relação entre uma curva fechada simples e o seu interior. Medeiros et al. (2011, p.60) explicam:

O teorema se refere a uma região fechada e limitada do plano. Em linhas gerais, afirma a igualdade entre a integral de linha de um campo vetorial na fronteira desta região e a integral dupla (no interior região) de determinada expressão envolvendo derivadas parciais do campo.

De acordo com Stewart (2013, p.971), o Teorema de Green pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 2.1 (Teorema de Green). *Sejam C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é semelhante à equação do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.38). Observe que de um lado da equação (2.1) temos a integração envolvendo as derivadas das funções componentes ($\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) e no T.F.C. temos a integração da primitiva (F'). Do outro lado, ambas as equações envolvem o cálculo das funções originais

$(Q, P$ e $F)$ calculadas apenas na fronteira do domínio.

Analisemos as hipóteses matemáticas enunciadas pelo teorema, como comentado no Capítulo 1, o processo de compreensão do enunciado é essencial para que posteriormente consigamos entender o desenvolvimento de cada passo de sua demonstração e correlacionar a tópicos já vistos. Assim sendo, primeiro, observe que, para que valha o teorema, são feitas certas exigências sobre a curva, a região e o campo vetorial.

Analisando geometricamente, temos as seguintes condições sobre a fronteira: C deve ser uma curva simples, fechada e contínua por partes, isto é, não se auto intercepta, seus pontos inicial e final coincidem, e é formada por uma união finita de curvas que se emendam em suas extremidades. É ao longo desses pedaços de caminhos que integramos P e Q . A curva estudada é uma curva de Jordan (fechada e simples). Também, deve ser orientada positivamente (ou sentido anti-horário). A seguinte notação para a integral de linha também é comumente usada para indicar que estamos lidando com uma curva fechada com sentido positivo:

$$\oint_C P dx + Q dy.$$

Sobre D , é uma região limitada por C , constituída tanto pelos pontos interiores quanto pelos pontos de sua fronteira. Com isso, exigimos que seja limitada e fechada. Pode ser uma região simples ou muito sofisticada como uma região simplesmente conexa ou uma região multiplamente conexa.

Outra exigência do teorema é que as derivadas parciais de primeira ordem do campo vetorial sejam contínuas em todos os pontos de uma região aberta contendo D , isso porque primeiro temos de derivar as componentes P e Q e, em seguida, integrá-las. A continuidade das derivadas deixa garantido que elas tenham um “bom” comportamento, possibilitando o cálculo da integração.

Diante dos requisitos dados pelas hipóteses e com base nas referências teóricas que abordam o tema alvo desta monografia (Stewart (2013) e Guidorizzi (2013b)), apresentaremos a demonstração para o caso particular em que a região de integração é simples, do tipo I e II, simultaneamente (veja a Seção 1.4.3). Em livros de cálculo, é mais comum encontrarmos demonstrado para esse caso, sendo parâmetro para estender-se à demonstração de uma união finita de regiões simples e às regiões que não são simplesmente conexas.

A demonstração do teorema consiste em mostrar a igualdade entre uma integral de

linha sobre uma curva fechada de um campo vetorial e uma integral dupla de uma região. Partindo disso, podemos separar em duas partes: a primeira vai mostrar que

$$\int_C P dx = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (2.2)$$

Analogamente, mostra-se que

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA. \quad (2.3)$$

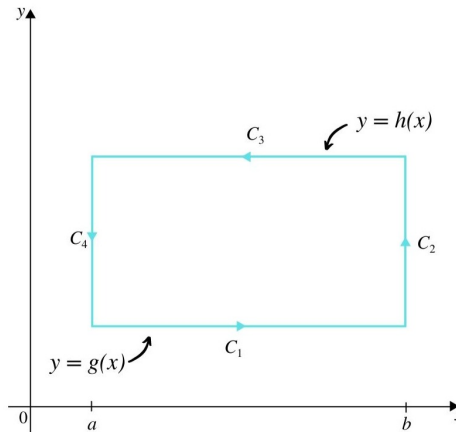
Somando as equações (2.2) e (2.3), conseguimos concluir a tese que o teorema quer nos mostrar.

Demonstração: (Demonstração do Teorema de Green). Consideremos D uma região que possa ser escrita como uma região do tipo I e tipo II simultaneamente. Primeiramente, consideremos D como do tipo I, ou seja,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

sendo g e h funções contínuas. A Figura 2.1 ilustra a região que queremos mostrar a validade do teorema.

Figura 2.1: Região D (tipo I) limitada pelas curvas percorrendo no sentido anti-horário.



Fonte: Figura do autor.

Analisando a região dada e a equação (2.2) pelo lado direito, segue que

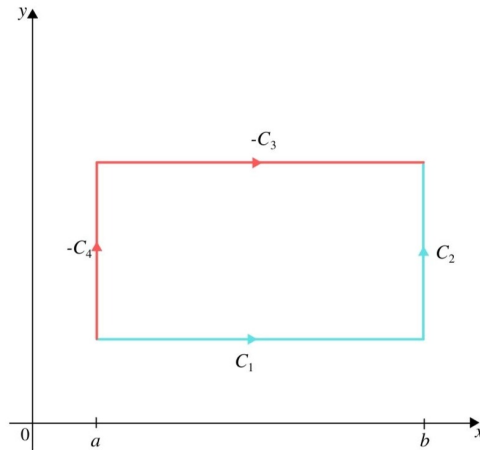
$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx && \text{(pelo Teorema de Fubini)} \\
 &= \int_a^b [-P]_{g(x)}^{h(x)} dx && (-P \text{ é primitiva de } -\frac{\partial P}{\partial y}) \\
 &= \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] dx. && \text{(T.F.C.) (2.4)}
 \end{aligned}$$

Agora, analisando o lado esquerdo da equação (2.2), temos que C é a união das curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 (veja figura 2.1). Logo, a integral de linha da fronteira pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} P dx. \quad (2.5)$$

Note que C_3 e C_4 estão orientadas no sentido “errado” — diremos dessa forma pois nessas curvas os intervalos seguem do maior para o menor. Nesse caso, consideraremos as curvas $-C_3$ e $-C_4$ (veja a equação(1.20)), o que muda a direção das curvas para o sentido “correto”, ficando da esquerda para a direita e de baixo para cima, respectivamente (observe a Figura 2.2). Consequentemente, invertemos os intervalos e o sinal das integrais de linha.

Figura 2.2: Curvas C_3 e C_4 no sentido para qual queremos demonstrar.



Fonte: Figura do autor.

Ao inverter os sentidos de C_3 e C_4 , facilitamos nosso próximo passo no qual faremos a

parametrização das curvas e, com isso, obtemos os seguintes intervalos de integração:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (t, g(t)), \quad a \leq t \leq b, \\ C_2(t) &= (b, t), \quad g(b) \leq t \leq h(b), \\ C_3(t) &= (t, h(t)), \quad a \leq t \leq b, \\ C_4(t) &= (a, t), \quad g(a) \leq t \leq h(a). \end{aligned}$$

Perceba que os valores de x em C_2 e C_4 são b e a , respectivamente. Isso significa que x é constante nessas curvas. Logo, $dx = 0$.

Reescrevendo a equação (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \int_C P \, dx &= \int_{C_1} P \, dx + \int_{C_2} P \, dx + \int_{-C_3} P \, dx + \int_{-C_4} P \, dx \\ &= \int_{C_1} P \, dx + \int_{C_2} P \, dx - \int_{C_3} P \, dx - \int_{C_4} P \, dx \\ &= \int_a^b P(t, g(t)) \, dt + 0 - \int_a^b P(t, h(t)) \, dt - 0 \\ &= \int_a^b P(t, g(t)) \, dt - \int_a^b P(t, h(t)) \, dt \\ &= \int_a^b [P(t, g(t)) - P(t, h(t))] \, dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comparando as equações (2.4) e (2.6), temos que

$$\int_C P \, dx = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

que corresponde a equação (2.2), concluindo a primeira parte da demonstração.

De modo análogo, mostramos a igualdade (2.3), mas agora consideramos D como uma região do tipo II (veja Figura 2.3 (a)), isto é,

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Invertamos a orientação das curvas C_1 e C_4 (veja Figura 2.3 (b)) e pela parametrização,

definimos:

$$C_1(t) = (g(t), t), \quad c \leq t \leq d,$$

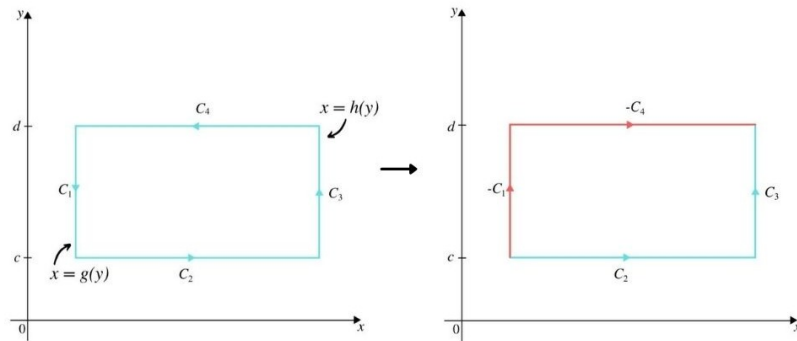
$$C_2(t) = (t, c), \quad g(t) \leq t \leq h(t),$$

$$C_3(t) = (h(t), t), \quad a \leq t \leq b,$$

$$C_4(t) = (t, d), \quad g(t) \leq t \leq h(t).$$

Seguindo os passos da demonstração da equação (2.2), verificamos a igualdade (2.3).

Figura 2.3: Região D (tipo II) limitada pelas curvas percorrendo no sentido anti-horário.



Fonte: Figura do autor.

Para concluir a demonstração do caso particular, somamos as equações (2.2) e (2.3) e, dessa forma, obtemos a igualdade do Teorema de Green.

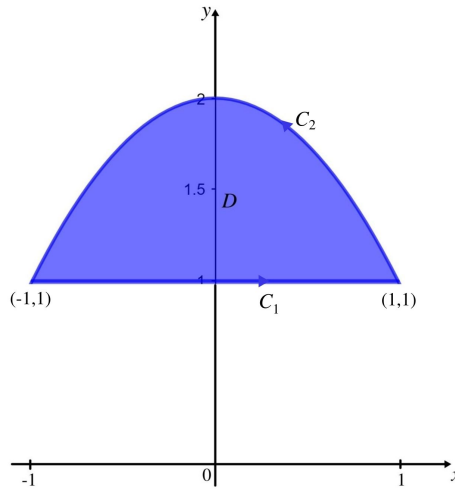
Acabamos de demonstrar que o teorema é válido para as regiões de tipo I e II, simultaneamente. Como todas as variações de círculos, retângulos e triângulos delimitam esse modelo de regiões, então o teorema pode ser aplicado a todos esses tipos de curvas. Vejamos o Exemplo 2.2.

Exemplo 2.2. ¹ Calcule $\int_C y^2 e^x dx + x^2 e^y dy$, onde C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

Na Figura 2.4, podemos visualizar a representação da região D que vamos estudar.

¹Exercício 15 extraído da Seção 16.4 de exercícios do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.976). Resolvido pelo autor.

Figura 2.4: Região D limitada pelo segmento de reta $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ e pelo arco $y = 2 - x^2$.



Fonte: Figura do autor.

Observe que D é uma região simples, fechada e limitada pela fronteira $C = C_1 \cup C_2$. Analisando as possibilidades para o cálculo da integral, temos duas alternativas: seguir pelo método usual e calcular a integral de linha ao longo de cada curva que compõe a fronteira e somá-las, ou usar o Teorema de Green. Neste exemplo, faremos a verificação de ambas opções e examinaremos qual método tem melhor resolução para esse caso.

Primeiro, vejamos que C_2 está percorrendo pelo sentido que estamos considerando como “errado”, do ponto maior para o menor. Sendo assim, vamos mudar sua orientação e considerar $-C_2$, e o sinal da integral de linha inverte. Agora, fazendo a parametrização das curvas C_1 e C_2 , obtemos que

$$C_1(t) = (t, 1), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

$$C_2(t) = (t, 2 - t^2), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Com as curvas parametrizadas e os intervalos de integração apresentados, temos que o cálculo da integral de linha é dado por

$$\begin{aligned} \int_C y^2 e^x dx + x^2 e^y dy &= \int_{C_1} y^2 e^x dx + x^2 e^y dy - \int_{C_2} y^2 e^x dx + x^2 e^y dy \\ &= \int_{-1}^1 [1 \cdot e^t + t^2 e \cdot 0] dt - \int_{-1}^1 [(2 - t^2)^2 e^t \cdot (1) + t^2 e^{2-t^2} \cdot (-2t)] dt \\ &= \int_{-1}^1 [e^t - (2 - t^2)^2 e^t + 2t^3 e^{2-t^2}] dt \\ &= 48e^{-1} - 8e. \end{aligned}$$

Se tivéssemos uma fronteira formada pela união de três ou mais curvas, utilizar esse método seria desfavorável, visto que podemos usar o Teorema de Green e simplificar nossos cálculos. Assim sendo, como a região D , a curva C e o campo vetorial satisfazem as hipóteses do teorema, o processo de resolução por meio da integral dupla é dado por

$$\begin{aligned}
 \int_C y^2 e^x dx + x^2 e^y dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\
 &= \int_{-1}^1 \int_1^{2-x^2} (2xe^y - 2ye^x) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 [2xe^y - y^2 e^x]_1^{2-x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (2e^{2-x^2} - e^x(x^4 - 4x^2 + 3) - 2ex) dx \\
 &= 48e^{-1} - 8e.
 \end{aligned}$$

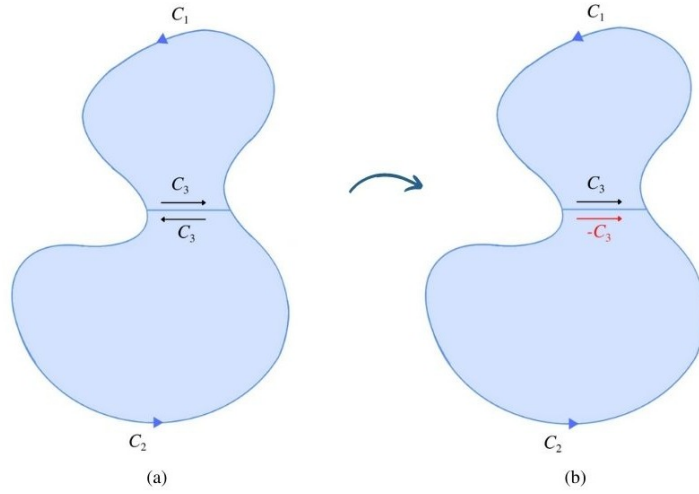
2.3 Estendendo o Teorema de Green

Na Seção 2.2 mostramos a validade do Teorema de Green para uma região do tipo I e II, simultaneamente. No entanto, o teorema pode ser estendido para regiões formadas pela **união finita de regiões simples** e para as **multiplamente conexas**, sendo provado a partir do caso particular demonstrado anteriormente. Com base na explicação de Apostol (1996, p.429), se tivermos uma região R que possa ser decomposta em finitas regiões do tipo I e II (caso particular), aplica-se o teorema em cada uma das partições e soma-se membro a membro os resultados obtidos. Stewart (2013, p.974) segue pelo mesmo caminho quando comenta brevemente no tópico de versões estendidas do teorema e faz aplicações em exemplos práticos.

A partir da última referência citada, vamos estudar a validade do Teorema de Green para uma região formada pela união finita de regiões simples. Para isso, vejamos a ilustração da Figura 2.5. Tomamos uma região D contida em um aberto, limitada por uma curva simples e fechada (curva de Jordan), contínua por partes e orientada positivamente, e fazamos sua decomposição. Para esta análise dividiremos-na em duas regiões simples, sendo elas D_1 e D_2 , ambas sendo simultaneamente do tipo I e II, e limitadas pelas fronteiras C_1 e C_3 , e C_2 e C_3 , respectivamente. Ao realizar esse processo, obtemos fronteiras comuns a duas regiões assim como a curva C_3 . Consequentemente, essas curvas possuem dois sentidos e, pelo que vimos no tópico anterior, quando a curva percorre pelo sentido

“errado”, invertamos sua orientação, obtendo a curva $-C_3$ em D_2 .

Figura 2.5: Região formada pela união de duas regiões simples.



Fonte: Figura do autor.

Ambos os gráficos compreendem a região D decomposta em duas regiões simples limitadas por suas fronteiras fechadas. Na Figura 2.5 (a) vemos que a curva C_3 possui sentidos opostos: na região D_1 ela desloca-se de baixo para cima e dessa forma conseguimos calcular a integral de linha sem a necessidade de fazer qualquer alteração. Já em D_2 , move-se de cima para baixo, então faremos a mudança em sua orientação e vamos considerar $-C_3$ (Figura 2.5 (b)), e o sinal da integral de linha ao redor dessa curva inverte.

Considerando que as componentes do campo vetorial P e Q sejam de classe C^1 , e a demonstração feita no tópico anterior, aplicamos o Teorema de Green a cada região decomposta e chegamos nas seguintes equações

$$\int_{(C_1 \cup C_3)} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

e

$$\int_{(C_2 \cup (-C_3))} P dx + Q dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Somando-as, como as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se anulam, obtemos que

$$\int_{(C_1 \cup C_2)} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Visto que $D = D_1 \cup D_2$ e sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$, concluímos que o Teorema de Green é válido para a região D .

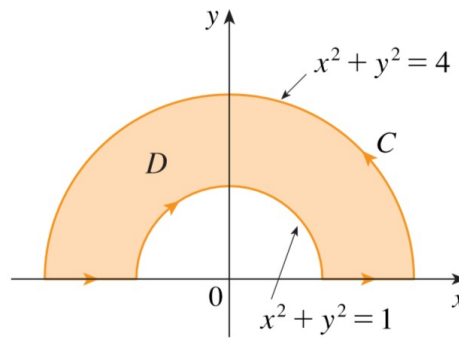
Por outro lado, como o teorema proporciona outro possível caminho para chegarmos ao resultado esperado, podemos decompor a região D em regiões simples, calcular as integrais duplas das regiões decompostas e somarmos seus resultados. Com isso, obtemos a integral dupla estendida de D .

Uma observação importante sobre essa demonstração é que podemos reproduzi-la da mesma forma para qualquer região formada por uma união finita de regiões simples que não se sobreponha.

Exemplo 2.3. ² Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Representando a região descrita pelo enunciado, temos a Figura 2.6:

Figura 2.6: Região D contida no semiplano superior entre $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.



Fonte: Stewart (2013, p.974).

Primeiro, note que D é formada por uma união finita de regiões simples que não se sobrepõem, sendo que o eixo y faz a divisão da região em duas.

Como estamos trabalhando com uma região envolta por dois semicírculos, em termos de coordenadas polares, esta é dada pelo conjunto

$$D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

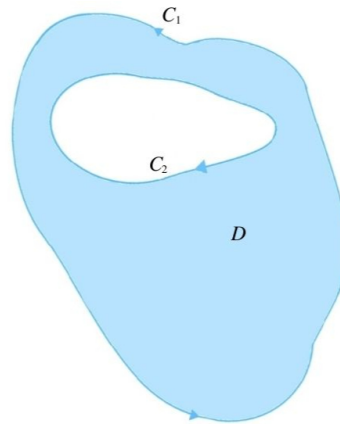
Portanto, aplicando o Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi (\sin \theta) d\theta \int_1^2 r^2 dr = [\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

²Exemplo 4 extraído do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.974)

Utiliza-se da mesma estratégia de decomposição com as regiões **multiplamente conexas**. Essas são regiões que contêm buracos em seu interior, todos limitados por curvas de Jordan contínuas por partes. Por conseguinte, sua fronteira é constituída como a união das curvas externa e internas, sendo que a curva externa percorre pelo sentido anti-horário positivo, e as internas pelo sentido horário. Para melhor compreensão, Stewart (2013, p.974) explica “nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida”. Vamos analisar a região D representada na Figura 2.7.

Figura 2.7: Região multiplamente conexa (ou que não é simplesmente conexa).



Fonte: Figura do autor.

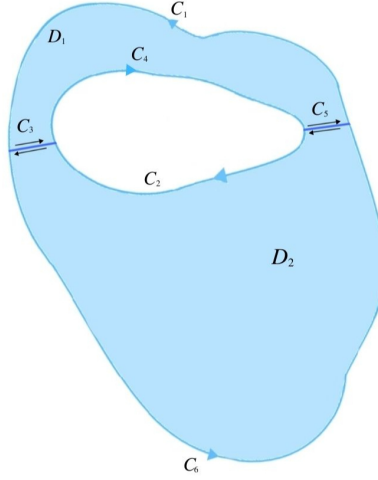
Observe que a curva externa C_1 segue pelo sentido anti-horário (positivamente) e a curva interna C_2 pelo sentido horário (da direita para a esquerda). A região D está sempre do lado esquerdo do sentido percorrido pelas curvas.

Apesar de a região multiplamente conexa conter um ou mais furos em seu interior, as curvas que a limitam são fechadas, simples — note que não se auto interceptam em nenhum momento — e contínuas por partes, satisfazendo algumas das hipóteses do teorema. Vamos considerar agora a ideia de demonstração que apresentamos para a união finita de regiões simples, intuitivamente conseguimos projetar o mesmo processo de decomposição nas regiões multiplamente conexas (veja a Figura 2.8). Stewart (2013, p.976) utiliza essa ideia para expor sua explicação e Guidorizzi (2013b, p.195) para desenvolver uma breve demonstração em um exemplo.

Quando fazemos a divisão da região (no nosso caso, D), damos origem a outras curvas (C_3 e C_5) que fazem o intermédio entre as curvas externa e internas, e obtemos duas novas regiões (D_1 e D_2) cujas fronteiras percorrem pelo sentido positivo. Dessa forma, obtemos

regiões adequadas para aplicação do teorema, atendendo a todas as exigências necessárias. Consequentemente, verifica-se que a região inteira está apta para essa aplicação.

Figura 2.8: Decomposição de uma região multiplamente conexa.



Fonte: Figura do autor.

Vejamos na Figura 2.8 que as fronteiras são formadas pelas curvas já apresentadas e pelas que se originaram a partir da divisão da região D . Vamos tomá-las como $\partial D_1 = C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$ e $\partial D_2 = C_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_5$, percorrendo pelo sentido anti-horário.

Tomando um campo vetorial com componentes P e Q de classe C^1 , aplicamos o Teorema de Green em cada região e obtemos que

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D_1} P dx + Q dy$$

e

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D_2} P dx + Q dy.$$

Como $D = D_1 \cup D_2$, temos de fazer a soma dessas equações. No entanto, note que C_3 e C_5 fazem fronteiras comuns às duas regiões decompostas, percorrendo pelos dois sentidos (horário e anti horário). Pelo que já estudamos, as integrais de linhas ao longo dessas curvas se anulam. Além disso, comparando as Figuras 2.7 e 2.8, temos que $C_1 = C_1 \cup C_6$ e $C_2 = C_2 \cup C_4$. Portanto,

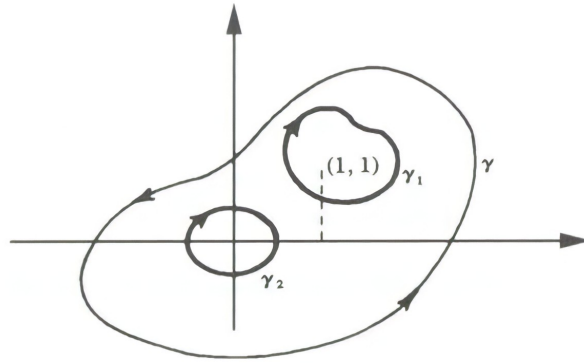
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy,$$

pois $C = C_1 \cup C_2$. Assim, verificamos que o Teorema de Green é válido para a região D .

Exemplo 2.4. ³ Suponha P e Q são funções de classe C^1 em $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0), (1, 1)\}$, e que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ em Ω . Calcule $\oint_{\gamma} P dx + Q dy$, sabendo que $\oint_{\gamma_1} P dx + Q dy = 1$ e $\oint_{\gamma_2} P dx + Q dy = 2$. (γ_1 e γ_2 são orientadas no sentido horário e γ no sentido anti-horário.)

Analisando as hipóteses enunciadas, seja R a região limitada por γ , γ_1 e γ_2 , essas curvas são suas fronteiras. E P e Q são de classe C^1 em um aberto contendo R . Pela indicação feita no enunciado, γ é a curva externa (anti-horário), e γ_1 e γ_2 são as curvas internas (horário). Vejamos a representação na Figura 2.9.

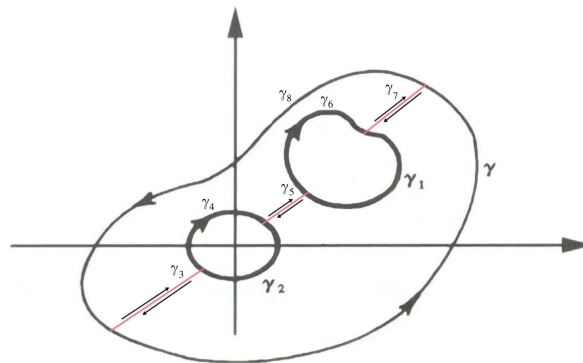
Figura 2.9: Região limitada pelas curvas γ , γ_1 e γ_2 .



Fonte: Guidorizzi (2013b, p.196).

Para aplicarmos o Teorema de Green em uma região multiplamente conexa precisamos decompô-la em regiões simples, então, vamos traçar três retas dividindo R como mostra a Figura 2.10.

Figura 2.10: Decomposição de R .



Fonte: Guidorizzi (2013b, p.196). Alterações pelo autor.

³Exercício 8 extraído da seção 8.2 de exercícios do livro de Cálculo de Guidorizzi (2013b, p.196). Resolvido pelo autor.

Identificamos todas as curvas para melhor entendimento da explicação. Note que γ_3 , γ_4 e γ_5 percorrem por sentidos opostos. Portanto, as somas das integrais de linha se anulam. Ainda, $\gamma = \gamma \cup \gamma_8$, $\gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_6$, $\gamma_2 = \gamma_2 \cup \gamma_4$. Logo,

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\gamma_2} P dx + Q dy. \quad (2.7)$$

Pelas hipóteses, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Reescrevendo a equação (2.7), obtemos

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = - \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy - \oint_{\gamma_2} P dx + Q dy.$$

Portanto,

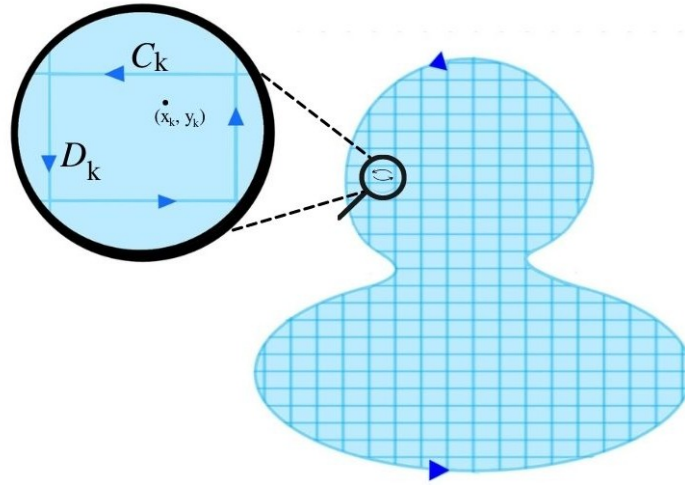
$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = -3.$$

2.4 Uma visão mais ampla

Bem como Stewart (2013), Guidorizzi (2013b), Apostol (1996), entre outros matemáticos, fizemos a análise de uma ideia de demonstração do Teorema de Green para a decomposição de uma região em duas, seja ela contendo furos em seu interior ou não. Para deixá-la completa, temos de mostrar que o mesmo vale quando Decompomos a região em n regiões simples, verificando a validade do teorema para todas as regiões fechadas limitadas por suas fronteiras e atendendo a todas as hipóteses enunciadas. Em vista disso, nesta seção, vamos considerar que a região estudada possa ser decomposta em n regiões de tipo I e II, simultaneamente, tal como a Figura 2.11. Pelas hipóteses e a partir do que vimos nas seções anteriores, ao longo do texto mostraremos que o resultado é válido.

Tomando como referência as argumentações dispostas por KHAN ACADEMY (s.d) e considerando uma região D , fazamos sua decomposição em n regiões simples, $D_1, \dots, D_n$, essas são tanto do tipo I quanto do tipo II, com as fronteiras orientadas no sentido anti-horário. Podemos observar esse processo na Figura 2.11.

Figura 2.11: Regiões decompostas em finitas regiões simples.



Fonte: Figura do autor.

Tomando as fronteiras de D como $C_1, \dots, C_n$ e considerando uma função do campo vetorial de classe C^1 , façamos primeiro as integrais de linhas sobre o campo ao longo de cada curva. Somando-as, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} P dx + Q dy + \dots + \int_{C_n} P dx + Q dy &= \sum_{k=1}^n \left(\oint_{C_k} P dx + Q dy \right) \\ &= \oint_C P dx + Q dy. \end{aligned} \quad (2.8)$$

As integrais de linha das fronteiras comuns a duas regiões se anulam, restando apenas a soma das integrais que constituem a curva externa que limita a região D inteira — é importante certificar-se que todas as curvas de todas as regiões decompostas seguem pelo sentido anti-horário, dessa forma teremos as divisões que possuem duas integrais percorrendo por sentidos opostos e somando-se se anulam. Essa seria uma forma de chegarmos a solução da integral de linha de um campo ao redor de uma curva, pelo método usual.

Agora, vamos considerar uma região plana D , a sua fronteira C e funções componentes P e Q satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ o campo vetorial, a sua integral de linha é:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy. \quad (2.9)$$

Considerando $\mathbf{F}$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ onde a terceira componente $R = 0$, dizemos

que o *rotacional de $\mathbf{F}$* é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.10)$$

Logo,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (2.11)$$

A imagem superior à esquerda na Figura 2.11 representa a ampliação de uma das regiões decompostas D_k escolhida arbitrariamente delimitada por sua fronteira C_k onde tomamos um ponto (x_k, y_k) qualquer no interior de D_k . Considerando a área da região como $|D_k|$, a integral de linha do campo vetorial pode ser aproximada calculando o $\text{rot } \mathbf{F}$ em qualquer ponto no interior de D_k multiplicado pela área de valor bem pequeno. Ou seja,

$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx ((\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k}) |D_k|. \quad (2.12)$$

Podemos esperar que quanto menor o valor de D_k , a aproximação será melhor.

De fato, a aproximação (2.12) ocorre pois, considerando D_k contendo (x_k, y_k) em seu interior, pela definição formal de rotacional em duas dimensões temos que

$$(\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k} = \lim_{|D_k| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|D_k|} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right).$$

Enquanto $|D_k| \rightarrow 0$, a aproximação

$$(\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k} \approx \frac{1}{|D_k|} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.13)$$

se torna mais próxima. Ao multiplicarmos ambos os lados de (2.13) por $|D_k|$, obtemos a aproximação (2.12). Como consequência dessa última operação, obtemos que a aproximação (2.12) tem seu erro tendendo a 0 e este permanecendo significativamente menor que $|D_k|$ à medida que esta tende a 0.

Fazendo a soma de todas as aproximações das pequenas regiões D_k , obtemos

$$\sum_{k=1}^n \left(\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) \approx \sum_{k=1}^n ((\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k}) |D_k|. \quad (2.14)$$

Pela equação (2.8), o lado esquerdo da aproximação acima refere-se à integral de linha do campo vetorial ao longo da curva C que limita D . Então, podemos reescrever a aproximação (2.14) como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx \sum_{k=1}^n ((\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k}) |D_k|. \quad (2.15)$$

Observemos agora o lado direito da aproximação (2.14). O rotacional $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ é uma função escalar e a soma é calculada sobre as várias regiões D_k de valores muito pequenos, em cada uma dessas partes, a função $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ é calculada em um ponto no seu interior (x_k, y_k) e depois multiplicado pela sua área $|D_k|$. Esta composição de elementos lembra-nos da definição de integrais duplas (veja Seção 1.4), se traçarmos muitas outras retas verticais dividindo cada vez mais a região D , podemos fazer a seguinte substituição:

$$\sum_{k=1}^n ((\text{rot } \mathbf{F}(x_k, y_k)) \cdot \mathbf{k}) |D_k| \rightarrow \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \quad (2.16)$$

De acordo com KHAN ACADEMY (s.d), isso deve-se ao fato de que, quando olhamos para o erro da aproximação (2.12) vemos este que é significativamente menor que a área da região D_k . Como a soma de todas as áreas das regiões decompostas é igual à área da região D inteira (uma constante, veja (1.13)), então a soma dos erros será significativamente pequena, menor que uma constante — isso porque eles serão significativamente pequenos.

Em vista disso, quando substituimos a soma pela integral dupla, a aproximação (2.15) se aproxima da igualdade. Finalmente, podemos concluir que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) também pode ser expressa como

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

(veja as equações (2.9) e (2.11)) que é a equação (2.1) do Teorema de Green.

Dizemos que a equação (2.17) é a forma vetorial de (2.1) do Teorema de Green. Essa versão será muito útil para futuros resultados.

A técnica de decomposição de regiões aprimoradas em regiões simples é comumente abordada em livros de cálculo e utilizada por profissionais da área de exatas para soluci-

onar questões envolvendo regiões nas condições que o teorema coloca. É uma estratégia que simplifica a resolução de casos mais complexos.

Resumindo, o Teorema de Green mostra que percorrer um percurso completo ao redor da fronteira de uma região é o mesmo que considerar todas as rotações positivas das pequenas regiões decompostas e somá-las. Isso nos permite olhar para a região trabalhada e questionar qual o melhor caminho a se seguir: pelo cálculo da integral de linha ao redor das fronteiras — pela decomposição teremos o anulamento das curvas internas (comum a duas regiões, com dois sentidos opostos) simplificando a equação — ou, a depender, se o cálculo da integral dupla for mais simples, podemos escolher essa opção de resolução. De um modo ou de outro, ao fazer a rotação em torno da fronteira entenderemos como se comporta a região em seu interior, ou vice-versa.

Capítulo 3

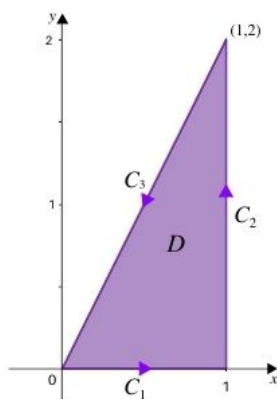
Aplicações

3.1 Calcular integrais de linha no plano

Vistos os exemplos das Seções 2.2 e 2.3, sabemos que uma integral de linha no plano pode ser calculada pelo uso do Teorema de Green e que a aplicação desse pode ser mais simples do que a utilização do método usual (integrar cada curva que compõe a fronteira e depois somá-las) — no caso em que a fronteira é formada por três ou mais curvas, esse tipo de estratégia se tornaria desgastante. Como a aplicação do teorema ao cálculo de integrais de linha é comumente abordado em livros como uma prática anterior a aplicações mais complexas, veremos a seguir alguns exemplos para fixação da ideia.

Exemplo 3.1. ¹ Calcule a integral de linha de $\int_C xy \, dx + x^2 y^3 \, dy$ em que C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

Figura 3.1: Região D limitada pela curva que forma um triângulo.



Fonte: Figura do autor.

¹Exercício 3 extraído da seção 16.4 de exercícios do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.975). Resolvido pelo autor.

Seja D a região limitada pelo triângulo. Então, a fronteira consiste na união de três curvas diferentes que se emendam nas extremidades. Assim, poderíamos calcular as integrais de linhas ao longo desses caminhos e somá-las mas, para isso, seria necessário fazer a parametrização de cada curva. Por formarem um triângulo não seria tão trabalhoso encontrar suas parametrizações, no entanto, com o Teorema de Green podemos seguir por um caminho muito mais simples. Sendo assim, considere a região como o conjunto

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}.$$

Note que as componentes do campo vetorial são de classe C^1 . Logo, pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + x^2 y^3 \, dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^4 - xy \right]_0^{2x} dx \\ &= \int_0^1 (8x^5 - 2x^2) \, dx = \left[\frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. ² Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$ e C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$, orientado no sentido horário. Seja D a região limitada pela curva C , uma circunferência centrada no ponto $(3, -4)$ e raio igual a 2. A fronteira que percorre pelo sentido horário, invertemos sua orientação obtendo $-C$ que é positiva. Consequentemente, a integral de linha em torno desta curva torna-se negativa. Ainda, podemos verificar que as componentes do campo vetorial são de classe C^1 . Com todas as hipóteses satisfeitas, pelo Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-C} (y - \cos y) \, dx + (x \sin y) \, dy = - \int_C (y - \cos y) \, dx + (x \sin y) \, dy \\ &= - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(y - \cos y) \right] dA = - \iint_D (\sin y - 1 - \sin y) \, dA \\ &= \iint_D 1 \, dA. \end{aligned}$$

²Exercício 13 extraído da seção 16.4 de exercícios do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.976). Resolvido pelo autor.

Pela equação (1.13), $\iint_D 1 \, dA = \text{área da região } D$. Portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi(2)^2 = 4\pi.$$

3.2 Área

Vimos na Seção 3.1 que a relação de igualdade entre as integrais dada pelo Teorema de Green possibilita fazer o cálculo de uma integral de linha de um campo ao longo de uma curva por meio de uma integral dupla sobre a região delimitada por esta curva. Por outro lado, também é possível fazer o processo inverso, isto é, se tivermos uma integral de linha mais simples, ou se soubermos os valores $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, podemos usar o teorema de maneira inversa. De acordo com um exemplo dado por Stewart (2013, p.973): se $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , pelo Teorema de Green,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P \, dx + Q \, dy = 0,$$

os valores das componentes em D não importam, nesse caso.

Uma das aplicações do teorema de maneira inversa é o cálculo de áreas. Se considerarmos uma região D , sua área é dada por $\iint_D 1 \, dA$ (veja a Equação 1.13), ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1. \quad (3.1)$$

Precisaríamos apenas encontrar os valores para as componente P e Q de modo que satisfaçam a equação (3.1). Stewart (2013, p.973) exhibe as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -y \text{ e } Q(x, y) = 0, \\ P(x, y) &= 0 \text{ e } Q(x, y) = x, \\ P(x, y) &= -\frac{1}{2}y \text{ e } Q(x, y) = \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

e apresenta as fórmulas dadas pelo Teorema de Green para o cálculo da área de uma região, são elas:

$$A = \oint_C x \, dy = - \oint_C y \, dx = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx. \quad (3.2)$$

Marsden e Tromba (2004, p.505) apresentam uma breve demonstração para a fórmula da área de uma região, vejamos o Teorema 3.3.

Teorema 3.3 (Área de uma região). *Se C é uma curva fechada simples que delimita uma região a qual é aplicável o Teorema de Green, então a área da região D delimitada por $C = \partial D$ é*

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

Demonstração: Sejam $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, então, pelo Teorema de Green temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (1 + 1) dx dy = \iint_D dx dy = \iint_D dA. \end{aligned}$$

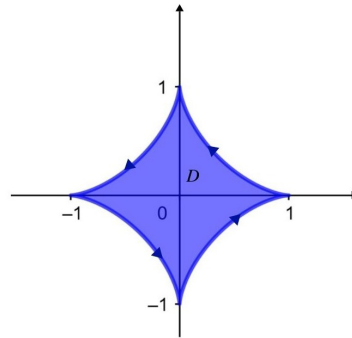
Note que a fórmula do Teorema 3.3 corresponde à terceira da equação (3.2) exibida por Stewart (2013, p.973). Entretanto, como Stewart (2013) apresenta uma relação de igualdade entre as fórmulas, podemos escolher a que for mais interessante para a questão a ser solucionada. Vejamos os Exemplos 3.4 e 3.5.

Exemplo 3.4.³ Seja $a > 0$. Calcule a área da região limitada pela hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ usando a parametrização:

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Seja D a região limitada pela hipocicloide, vejamos sua representação na Figura 3.2.

Figura 3.2: Região limitada pela curva hipocicloide $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Fonte: Figura do autor.

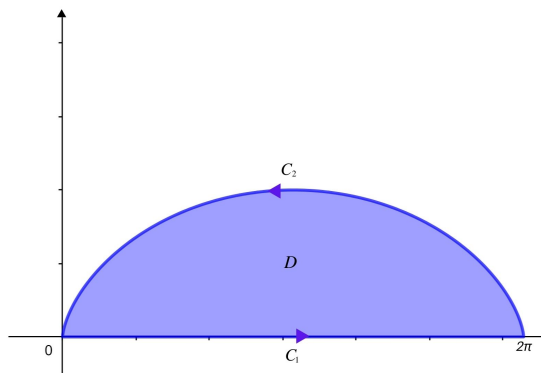
³Exemplo 8.2 extraído da Seção 8 do livro de Cálculo Vetorial de Marsden e Tromba (2004, p.505)

Temos que a curva C é fechada, simples, contínua por partes e orientada positivamente, e delimita a região D . Logo, podemos aplicar o Teorema de Green para o cálculo da área da região. Portanto, pelo Teorema 3.3 (ou terceira fórmula dada por Stewart (2013)),

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(3a^2 \cos^4 \theta)(\sin^2 \theta) + (3a^2 \sin^4 \theta \cos^2 \theta)] \, d\theta \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta && (\text{pois } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta && (\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta) \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) \, d\theta && (\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)) \\
 &= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta \, d\theta \\
 &= \frac{3\pi a^2}{8}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. ⁴ Calcule a área da região limitada pela curva $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e pelo eixo $0x$.

Figura 3.3: Região limitada pela curva $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e eixo $0x$.



Fonte: Figura do autor.

Seja C_1 a curva dada pelo segmento saindo do ponto $(0, 0)$ a $(0, 2\pi)$ e C_2 corresponde

⁴Exercício 2 extraído da Seção 8.2 de exercícios do livro de Cálculo de Guidorizzi (2013b, p.195). Resolvido pelo autor.

ao arco de $(0, 2\pi)$ a $(0, 0)$, logo, a fronteira de D é dada por $C = C_1 \cup C_2$. Note que C_2 percorre pelo sentido “errado”, portanto, $-C_2$ é orientada positivamente como queremos. Além disso, parametrizando C_1 , temos que $x = t$ e $y = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Utilizando a primeira fórmula de (3.2) dada por Stewart (2013), temos que

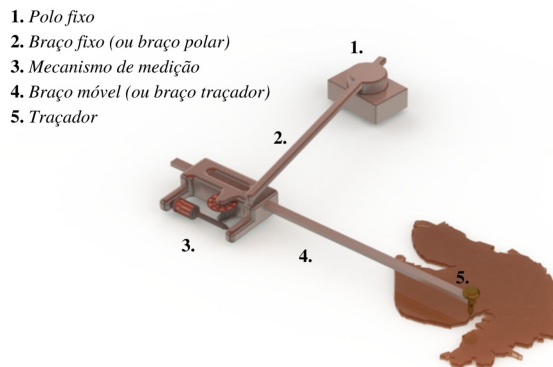
$$\begin{aligned} A &= \oint_C x \, dy = \int_{C_1} x \, dy + \int_{-C_2} x \, dy = \int_0^{2\pi} t \cdot 0 \, dt - \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t \, dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t) \, dt = \left[t \cos t + \frac{1}{2}(t - (\sin t)(\cos t) + 2) \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

Em cada um dos exemplos fizemos o uso de fórmulas diferentes dentre as referidas na equação (3.2), escolhidas conforme a praticidade que trariam para cada resolução.

Quando falamos sobre do Teorema de Green para o cálculo de áreas, não podemos deixar de mencionar um instrumento chamado **Planímetro**. A título de curiosidade, o objeto foi criado em 1854 por Jacob Amsler, com objetivo de medir áreas de regiões planas e limitadas por uma curva fechada. Medeiros et al. (2011, p.60) o descrevem:

Um planímetro é composto essencialmente por dois braços unidos por uma articulação. O primeiro (conhecido como braço fixo) tem uma de suas extremidades presa ao papel (como a ponta seca de um compasso) enquanto a outra se move para permitir o deslocamento do segundo braço (conhecido como braço móvel). Preso ao braço móvel e perpendicular a ele existe um disco que encosta no papel e pode girar livremente. Pela posição desse disco, ele é arrastado em movimentos paralelos ao braço móvel e rola sem escorregar em movimentos perpendiculares ao braço.

Figura 3.4: Planímetro.



Fonte: Figura do autor

De modo resumido, para a manipulação do instrumento, em um papel contendo a região escolhida fixa-se a ponta do braço fixo fazendo o disco no braço móvel percorrer

a fronteira saindo do ponto inicial e retornando para o mesmo (curva simples e fechada delimitando uma região), e seguindo sempre pela mesma direção certamente no sentido positivo (orientação anti-horária). Finalizado esse processo, o contador mostra o número de voltas efetuadas (curva contínua por partes) e assim é possível calcular a área da região. O artigo produzido por Medeiros et al. (2011) apresenta uma demonstração do funcionamento do planímetro para a medição da área a partir do Teorema de Green associando o número de voltas dadas pelo disco e a área da região obtida por meio da aplicação do teorema. Não apresentaremos essa prova mas, note que ao descrevermos o uso do instrumento conseguimos destacar características que satisfazem as hipóteses do teorema. Portanto, ao dispormos de uma região limitada por uma fronteira que consiste em uma curva simples, fechada, contínua por partes e orientada positivamente, podemos usar as fórmulas da equação (3.2) para calcular sua área — pois são para esse tipo de região especificamente e decorrem do Teorema de Green.

As equações (3.2) explicam como funciona os planímetros e esses instrumentos são utilizados para diversos fins como a medição da área de terrenos e regiões a partir de fotos, mapas e desenhos em campos como a cartografia, engenharia, arquitetura, geografia, na parte da saúde humana mede-se o volume pulmonar a partir de radiografia, na biologia e ciências da saúde de animais pode ser utilizado para medir asas, aplicar a tratamento e estudos da saúde de animais. Esses foram apenas alguns exemplos de como o planímetro pode ser usado e como o estudo do Teorema de Green se expande para outros campos do conhecimento, além da matemática.

3.3 Física

Na Seção 2.1 vimos que Green era matemático e físico e que o ensaio que contém a demonstração o Teorema de Green tem como foco principal eletricidade e magnetismo, temáticas relacionadas à física. É notório que Green foi muito dedicado a essa área em seus estudos, de acordo com Cannell e Lord (1993, p.26):

Foi Green que usou primeiro o termo “potencial” em eletricidade. Foi Green que enunciou primeiro o princípio da conservação de energia. Foi ele que estudou atentamente as condições para reflexão em uma interface que forneceu a primeira explicação convincente de reflexão interna total, a base da fibra óptica e, portanto, um importante elemento nas telecomunicações. Muitos desenvolvimentos da tecnologia moderna, semicondutores e supercondutores, sondagem geológica e a sismologia, digitalização médica eletrônica, têm uma dívida com Green.

Partindo por esse domínio, nesta seção vamos abordar alguns tópicos de física que fazem relação com o Teorema de Green, sendo eles **trabalho** e **momento de inércia**, e os operadores **rotacional** e **divergente**.

Trabalho: esse termo refere-se a um esforço realizado durante uma tarefa para atingir um objetivo, e que na física depende do conceito de *força* (empurrar ou puxar sobre algum objeto). Vimos na Seção 1.5.2 que o trabalho introduz o conceito de Integral de Linha de Campos Vetoriais. Quando a força é variável e move um objeto ao longo do eixo x em um intervalo de a para b , o trabalho produzido é dado por $W = \int_a^b f(x) dx$. Quando ela é constante, o trabalho é dado por $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, sendo $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Quando $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo em $\mathbb{R}^3$, o trabalho exercido pela força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave C é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ao longo deste item trabalharemos com esse último tipo de campo, vamos tomar $R = 0$, e P e Q dependentes apenas de x e y pois o Teorema de Green lida com curvas no plano. Ainda, vamos considerar que as componentes tenham derivadas contínuas e a curva simples, fechada, contínua por partes e orientada positivamente, nosso objetivo é mostrar que podemos calcular o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F}$ movendo uma partícula ao longo de uma curva a partir do Teorema de Green, ou seja, o trabalho é dado por

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Vejamos o Exemplo 3.6.

Exemplo 3.6. ⁵ Use o Teorema de Green para encontrar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x para $(1, 0)$, em seguida, ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$ e, por fim, de volta à origem ao longo de y .

Seja $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ um campo de força contínua. A região delimitada

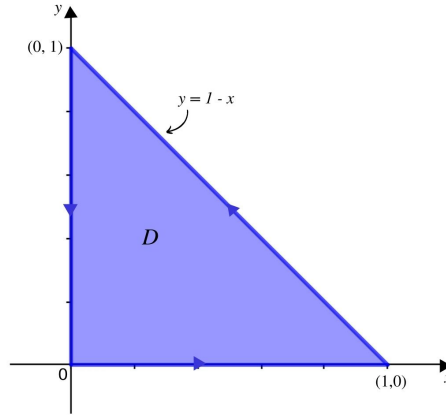
⁵Exercício 17 extraído da Seção 16.4 de exercícios do livro de Cálculo de Stewart (2013, p.976). Resolvido pelo autor.

pela curva percorrida pela partícula é dada pelo conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

que representa um triângulo (veja Figura 3.5).

Figura 3.5: Triângulo representado pelo conjunto D .



Fonte: Figura do autor

Pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x(x+y)) \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y^2 - x) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 - xy \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}(1-x)^3 - x(1-x) \right) dx = \left[-\frac{1}{12}((x-1)^4) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \text{ J.} \end{aligned}$$

Momento de Inércia: uma aplicação física da integral dupla também chamado de **segundo momento** de uma partícula em relação a um eixo. Estendendo a uma lâmina com densidade $\rho(x, y)$ em uma região D em relação aos eixos x e y , o momento de inércia em relação ao eixo x é dado por:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA. \quad (3.3)$$

E, o momento de inércia em relação ao eixo y é

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA. \quad (3.4)$$

O Teorema de Green estabelece uma relação com os momentos de inércia dados pelas equações (3.3) e (3.4). Considere uma curva simples e fechada no plano xy limitando uma lâmina plana e com densidade $\rho(x, y) = \rho$, temos de mostrar que seus momentos de inércia são:

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx \text{ e } I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy. \quad (3.5)$$

Considerando a relação de igualdade entre integrais dada pelo Teorema de Green, consideremos a equação:

$$-\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (3.6)$$

Isto é, $P(x, y) = y^3$, logo, $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$. Sendo assim, a equação (3.6) é igual a:

$$-\frac{\rho}{3} \iint_D -(3y^2) dA = \iint_D y^2 \rho dA,$$

que é o momento de inércia em relação ao eixo x dado por (3.3).

Da mesma forma, o momento de inércia em relação ao eixo y é dado por

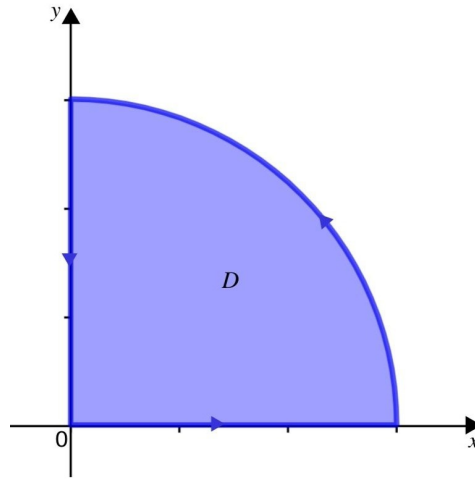
$$I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \frac{\rho}{3} \iint_D (3x^2) dA = \iint_D x^2 \rho dA,$$

verificando a equação (3.4).

Exemplo 3.7. Considere uma lâmina com densidade $\rho(x, y) = \rho$ que ocupa uma região formada pela parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante. Encontre os momentos de inércia I_x e I_y utilizando as equações (3.5).

Seja D a região a ser estudada, formada pela parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante. Veja a Figura 3.6.

Figura 3.6: Região D formada pela parte do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante.



Fonte: Figura do autor

Como estamos lidando com uma parte de um círculo, temos de usar coordenadas polares. Assim sendo, temos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, e consideramos o conjunto:

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Como vimos, o Teorema de Green estabelece uma relação de igualdade entre as equações de (3.3) e (3.4) e (3.5). Portanto, o momento de inércia em relação ao eixo x é dado por

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 dx = \iint_D y^2 \rho dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho (r \sin \theta)^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \rho \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a \\ &= \rho \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{4} a^4 \right) = \frac{\rho \pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

E o momento de inércia em relação ao eixo y é

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 dy = \iint_D x^2 \rho dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho (r \cos \theta)^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \rho \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^a \\ &= \rho \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{4} a^4 \right) = \frac{\rho \pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

Teorema de Green em formas vetoriais: sabemos que o rotacional e o divergente

são dois operadores essenciais no cálculo vetorial para aplicações físicas e de campos vetoriais. Na Seção 2.4, vimos o rotacional sendo usado para a integração de um campo vetorial pelo Teorema de Green. Na equação (2.10), vimos como calcular o $\text{rot } \mathbf{F}$ para um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ com $R = 0$. Por (2.11) temos que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \quad (3.7)$$

Pelas palavras de Stewart (2013, p.981) explica-se essa equação: “expressa a integral de linha da componente tangencial de $\mathbf{F}$ ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical rotacional $\mathbf{F}$ sobre a região D delimitada por C ”.

Agora, envolvendo o operador divergente que produz um campo escalar, vamos apresentar a próxima fórmula que é semelhante à equação (3.7) mas com $\mathbf{F}$ como uma componente *normal*.

Seja uma curva C dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

que é uma parametrização suave, então C é suave (veja Subseção 1.2.3). Assim, definimos o vetor tangente unitário e o vetor normal unitário externo à curva como

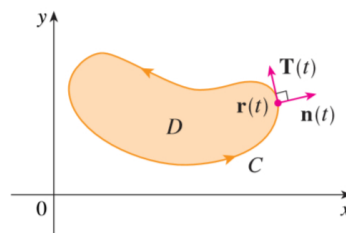
$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j},$$

e

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j},$$

respectivamente. Vejamos a representação do vetor normal unitário $\mathbf{n}(t)$ na Figura 3.7.

Figura 3.7: Vetor normal unitário $\mathbf{n}(t)$ externo a curva C .



Fonte: Stewart (2013, p.981)

Pelo Teorema de Green, a integral de linha ao longo de C é

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\
 &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\
 &= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) \, dt - Q(x(t), y(t))x'(t) \, dt \\
 &= \int_C P \, dy - Q \, dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.
 \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad (3.8)$$

então a segunda forma vetorial do teorema é:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, dA. \quad (3.9)$$

Por Stewart (2013, p.981): “essa versão diz que a integral de linha da componente normal de $\mathbf{F}$ ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de $\mathbf{F}$ na região D delimitada por C ”.

Esses operadores serão úteis para os resultados dos teoremas que apresentaremos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Teorema de Stokes

Além do Teorema de Green, existem outros dois resultados muito importantes no Cálculo Vetorial, sendo eles o **Teorema de Stokes** e o **Teorema da Divergência**. Quando estudamos um desses teoremas, conseqüentemente vemos uma passagem sobre os outros, isso porque existem certas semelhanças entre eles, que veremos ao longo deste capítulo. De acordo com Katz (1979, p.146): “cada um dos três teoremas em questão relaciona uma integral k -dimensional a uma integral $k - 1$ -dimensional”. Por Stewart (2013, p.1003 e seg), os teoremas apresentam uma relação entre uma integral envolvendo derivadas parciais e uma integral da função original calculada apenas na fronteira da região estudada (ou superfície) (veja as equações (2.1), (4.1) e (4.3)).

Nesta seção trataremos sobre o Teorema de Stokes, que recebeu esse nome em homenagem ao matemático e físico George Gabriel Stokes (1819-1903). Alguns pontos importantes a se destacar é que, segundo Buffoni et al. (2003, p.12), desde adolescente, Stokes mostrava grande habilidade para matemática, uma de suas inspirações para entrar no campo de pesquisa hidrodinâmica foi o trabalho de Green e, entre 1847 e 1849, ele fez uma colaboração com outro entusiasta do matemático-físico, William Thomson (Lord Kelvin), os dois compartilharam diversas cartas sobre temas como eletricidade e magnetismo e escoamento em fluídos.

Muitas dessas correspondências ainda se conservam e, como exemplo, 407 cartas, de Thomson para Stokes, e 249, de Stokes para Thomson, foram publicadas. Entre elas, existem notas onde discutiam as semelhanças matemáticas entre a teoria do calor e a teoria dos fluidos (BUFFONI et al., 2003, p.12).

O teorema foi publicado pela primeira vez no ano de 1854, Katz (1979, p.149-150) conta que Stokes o aplicou em um exame para que seus alunos em Cambridge o demonstrassem mas não se sabe se algum deles conseguiu provar. No entanto, o teorema já teria aparecido em 1850, em uma das correspondências de Thomson enviadas para o matemático. Apesar de os teoremas apresentados não receberem o nome do Lorde, podemos ver que Thomson esteve presente com grande participação e envolvimento tanto no Teorema de Green quanto no de Stokes.

Seguiremos o texto enunciando o Teorema de Stokes e em seguida fazendo uma análise sobre os pontos em comum com o Teorema de Green. Assim sendo, por Stewart (2013, p.1003), o resultado pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.1 (Teorema de Stokes). *Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S . Então*

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} d\mathbf{S}. \quad (4.1)$$

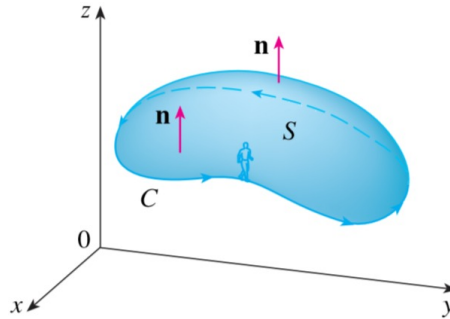
Pelas hipóteses, observamos pontos semelhantes ao enunciado do Teorema de Green, sendo eles: a fronteira ser fechada, simples, suave por partes (ou contínua por partes) e orientada positivamente, e o campo vetorial consistir em funções de classe C^1 em um aberto que contém a superfície (ou região plana, quando trata-se do plano xy).

Pelo resultado, a equação (4.1) relaciona uma integral de linha em torno da curva fronteira C da superfície S (C é uma curva no espaço) com uma integral de superfície sobre a superfície S . Do seu lado esquerdo temos a integral do campo vetorial $\mathbf{F}$ calculada apenas na fronteira da superfície e do lado direito, a integral que envolve derivadas parciais. Como vimos na Seção 2.2, o Teorema de Green também faz uma relação entre integrais: uma integral dupla sobre uma região plana é igual a uma integral de linha calculada ao longo da fronteira dessa região, sendo que a integral sobre a região envolve as derivadas parciais do campo vetorial (o rotacional), que são contínuas, enquanto a integral de linha é calculada apenas sobre a fronteira da região em questão.

Vejamos a representação de S seguindo as exigências do Teorema 4.1 na Figura 4.1. A superfície é orientada com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, o que induz a orientação positiva de C . Para entendermos melhor, sigamos o indicado por Stewart (2013, p.1003): “se você

andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de $\mathbf{n}$, então a superfície estará sempre à sua esquerda”.

Figura 4.1: Superfície orientada com vetor *normal unitário* $\mathbf{n}$.



Fonte: Stewart (2013, p.1003).

Note que Stewart (2013) faz a representação de um boneco percorrendo a curva fronteira C pela orientação positiva e em pé, perpendicular à superfície S , na direção e sentido do vetor normal $\mathbf{n}$ (a superfície fica do seu lado esquerdo).

Além da relação teórica apresentada, existe uma aplicação direta que liga o Teorema de Stokes com o Teorema de Green, onde tomamos uma superfície plana pertencente ao plano xy com orientação ascendente e o vetor normal unitário é $\mathbf{k}$. Nesse caso, a integral de superfície passa a ser uma integral dupla, e a equação (4.1) fica:

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} d\mathbf{A}, \quad (4.2)$$

que é igual à equação (2.17), a forma vetorial do Teorema de Green. Enquanto Guidorizzi (2013b, p.196) é mais direto e aborda esse resultado como **Teorema de Stokes no plano** em uma seção logo após o Teorema de Green, Stewart (2013, p.1004) chama a equação (4.2) como **um caso especial do Teorema de Stokes** e o demonstra.

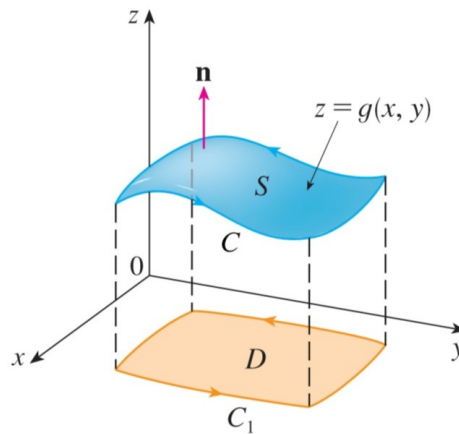
Para mostrar o caso, Guidorizzi (2013b, p.196) apenas exhibe uma comparação entre conceitos já vistos. Toma um campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ de classe C^1 no aberto Ω de $\mathbb{R}^3$, um compacto K e uma curva γ que satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e, a partir do rotacional (veja a equação (2.11)), mostra que

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} d\mathbf{A}.$$

que, por sua vez, é igual à equação (2.17).

Seguindo por um caminho diferente, Stewart (2013, p.1004) apresenta uma demonstração do caso especial. Toma uma superfície S , um campo vetorial $\mathbf{F}$ e uma curva C bem comportados (veja a Figura 4.2), e admite que a equação da superfície S é dada por $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, em que g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e D é uma região no plano limitada pela fronteira C_1 correspondente à curva C (fronteira de S). Se S é ascendente então a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1 . E o campo vetorial dado por $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ consiste em componentes com derivadas parciais contínuas.

Figura 4.2: Representação de um caso especial do Teorema de Stokes.



Fonte: Stewart (2013, p.1004).

E então, o autor verifica que

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) d\mathbf{S}.$$

Ou seja, Stewart (2013) mostrou a forma vetorial do Teorema de Green, verificando a relação direta entre os dois teoremas.

Mesmo percorrendo por didáticas diferentes, Stewart (2013) e Guidorizzi (2013b) chegaram a mesma conclusão utilizando hipóteses e argumentos abordados na demonstração do Teorema de Green.

4.2 Teorema da Divergência

O Teorema da Divergência ou Teorema do Divergente tem sua história associada a três matemáticos, sendo eles: George Green, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) e Mikhail

V. Ostrogradsky (1801-1861). Stolze (1978, p.437) conta que não existem provas precisas de que Green escreveu esse teorema. Em seu ensaio publicado em 1828 sobre eletricidade e magnetismo, o matemático-físico provou vários resultados envolvendo integrais, entre eles a primeira identidade de Green que é considerada como um caso especial derivado do Teorema da Divergência. No entanto, Green nunca fez essa afirmação e a maneira que provou a identidade na época é diferente das provas que vemos hoje em dia.

Seguindo para Gauss, de acordo com Stolze (1978, p.439), em 1813, o matemático e físico escreveu um artigo sobre o estudo das forças de atração e repulsão entre corpos no espaço com diversos resultados relacionando integrais de volume a integrais de superfície, entre eles estava o Teorema da Divergência. Gauss não o declarou como tal mas teria apresentado as principais ideias para sua prova. Anos depois, entre 1826 e 1831, Ostrogradsky escreveu vários artigos, sendo que um desses continha a prova do Teorema da Divergência na forma de coordenadas cartesianas e foi publicado pela Academia de São Petersburgo em novembro de 1831. Evidências levam a crer que quem provou primeiro o Teorema da Divergência em coordenadas cartesianas teria sido Ostrogradsky (STOLZE, 1978, p.439). Por isso, o teorema estudado pode ser reconhecido como Teorema da Divergência de Gauss ou de de Ostrogradsky.

Para o desenvolvimento do texto, primeiro vamos apresentar o Teorema da Divergência como caso bidimensional, referente ao Teorema de Green. Guidorizzi (2013b) enuncia esse resultado da seguinte forma:

Teorema 4.2 (Teorema da Divergência no plano). *Seja $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto Ω do $\mathbb{R}^2$ e seja K um compacto, com interior não-vazio, contido em Ω , cuja fronteira é imagem de uma curva fechada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, de classe C^1 , simples, regular e orientada no sentido anti-horário. Seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior a K . Então*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dA. \quad (4.3)$$

Note que a equação (4.3) corresponde à equação (3.9) que, como já falamos na Seção 3.3, é uma outra forma vetorial de escrever o Teorema de Green. Agora, vamos analisar as hipóteses do teorema. Temos que o campo vetorial consiste em componentes com derivadas parciais contínuas num aberto. Como K é um compacto, então K é um conjunto fechado e limitado, e no caso, sua fronteira é γ que é uma curva fechada, simples, regular

e orientada positivamente (sentido anti-horário), satisfazendo as hipóteses do Teorema de Green. Portanto, podemos relacionar o Teorema de Green e o Teorema da Divergência no plano. Stewart (2013, p.1008) apresenta a versão tridimensional desse teorema:

Teorema 4.3 (Teorema do Divergente). *Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então,*

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV. \quad (4.4)$$

Pelo lado esquerdo da equação (4.4), temos a integral da função $\mathbf{F}$ sobre a fronteira da região e pelo lado direito, a integral das derivadas da função sobre uma região, já que o $\operatorname{div} \mathbf{F}$ é igual às derivadas de $\mathbf{F}$ (veja a igualdade (3.9)). A relação dada por essa equação mostra que, pelas palavras de Stewart (2013, p.1008): “sob as condições dadas, o fluxo de $\mathbf{F}$ pela fronteira E é igual à integral tripla da divergência de $\mathbf{F}$ em E ”.

Assim como os teoremas de Green e de Stokes, o Teorema da Divergência no plano e para os campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ faz uma relação de igualdade entre duas integrais de diferentes dimensões. Por um lado, uma integral da função calculada somente em torno da fronteira e, do outro, a integral das derivadas dessa função. Além disso, os três resultados exigem uma região, ou uma superfície, ou um sólido, fechado e limitado por uma fronteira de orientação positiva.

Capítulo 5

Considerações finais

Em vista do que aprendemos, conseguimos compreender o motivo de tanta admiração por parte de quem estuda sobre o Teorema de Green. Um resultado muito bonito, atraente pela sua praticidade e acessibilidade de transitar entre dois modelos de integrais (integral dupla e integral de linha) e em diferentes técnicas de utilização (cálculo sobre a região ou em torno da fronteira). Além disso, é um teorema de enunciado simples e direto, o que traz maior compreensibilidade para quem o lê.

Quando usamos um livro para acompanhar o estudo do assunto, ele torna-se um aliado do conhecimento, mas nem sempre isso ocorre. Às vezes o autor pode pular para o passo final ou utilizar uma estratégia de forma implícita e nem todo leitor consegue ter a mesma visualização sobre a situação. Pensando nisso, optamos por apresentar uma abordagem mais didática, com análise do enunciado e explicação descritiva das aplicações. As ideias de analisar um enunciado e apresentar uma motivação antes do desenvolvimento de uma aplicação foram inspiradas em alguns professores que utilizam esses métodos durante suas aulas. Essa técnica impulsiona o ouvinte a querer chegar ao seu objetivo, com a análise ele buscará pelo conhecimento adquirido anteriormente e com a motivação entenderá onde precisa chegar. Ou seja, se o leitor leu e entendeu um conceito preliminar, quando ele precisar aplicar a uma demonstração, saberá onde buscar. A ênfase na importância de ter domínio sobre os conceitos que antecedem o assunto principal foi um dos pontos principais do texto, isso porque ter uma boa base de aprendizagem dos resultados básicos tende a facilitar no entendimento de um assunto mais complexo. Por fim, a citação e a comparação das diferentes exposições do tema por autores distintos nos mostra que é necessário ter pelo menos duas referências para estudo, pois são didáticas e pontos de vistas diferentes. Sendo assim, concluo esse trabalho deixando a mostra que o aluno tem a opção de escolher

a melhor orientação para seguir e ainda fica ciente da existência de diferentes abordagens e técnicas que levam ao mesmo resultado.

Referências Bibliográficas

APOSTOL, T. M. *Análisis matemático*: Tradução de Dr D Francisco Véles Cantarell. Barcelona: Editorial Reverté, S.A., 1960. (título original: **Mathematical Analysis**). Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/367990715/Analisis-matematico-Tom-M-Apostol-pdf>>. Acesso em: 09 abr. 2021.

APOSTOL, T. M. *Cálculo*: Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra linear, com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades. Tradução de Joaquim Ferreira Marques. Barcelona: Editorial Reverté, S.A., 1996. v. 2. (título original: **Calculus, One-Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra**). Disponível em: <https://www.academia.edu/35893173/Calculus_Tom_Apostol_Vol_2_>. Acesso em: 09 abr. 2021.

BUFFONI, S. et al. *Três Homens e Dois Teoremas*. 2003. Monografia (Cálculo Vetorial Aplicado), UFF (Universidade Federal Fluminense), Volta Redonda, Brazil. Disponível em: <<https://www.google.com/search?q=buffoni+tres+homens+e+dois+teoremas&oq=buffoni+tres+homens+e+dois+teoremas&aqs=chrome..69i57j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8#>>. Acesso em: 21 fev. 2021.

CANNELL, D. M.; LORD, N. J. George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841. *The Mathematical Gazette*, v. 77, p. 26–51, 1993. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/George-Green%3A-Mathematician-and-Physicist-1793-1841-Storer-Cannell/5fd0f60953566648c0312d092dcaa2f305cd1eff>>. Acesso em: 14 mar. 2021.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 2. Disponível em: <<https://docero.com.br/doc/ns8880>>. Acesso em: 03 mar. 2021.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3. Disponível em: <<https://docero.com.br/doc/ns8880>>. Acesso em: 03 mar. 2021.

KATZ, V. J. The history of stokes' theorem. *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, v. 52, p. 146–156, May 1979. Disponível em: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/335_17/history%20of%20stokes%20thm.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2021.

KHAN ACADEMY. *Teorema de Green*. São Paulo: [s.n.], s.d. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/greens-theorem-and-stokes-theorem/greens-theorem-articles/a/greens-theorem>>. Acesso em: 03 mar. 2021.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 199. v. 2. ISBN 85-244-0108-7. Disponível em: <https://www.academia.edu/38868043/Curso_de_analise_volume_2_Elon_Lages_Lima_compressed>. Acesso em: 03 mar. 2021.

MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. J. *Cálculo Vectorial*. 5. ed. Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A, 2004. ISBN 84-7829-069-9. Disponível em: <https://www.academia.edu/31834459/C%C3%A1lculo_Vectorial_5ta_Edici%C3%B3n_Jerrold_E_Marsden_and_Anthony_J_Tromba>. Acesso em: 12 mai. 2021.

MEDEIROS, H. B.; MENEZES, L. M.; PINTO, D. O. George Green, o Homem e o Teorema. *Revista Matemática Universitária*, n. 50/51, p. 56–64, 2011. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50_n51_Artigo02.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2021.

STEWART, J. *Cálculo, Volume 2*: Tradução de EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. (título original: **Calculus**). ISBN 978-85-221-1463-4. Disponível em: <<https://docero.com.br/doc/5ncxsv>>. Acesso em: 03 mar. 2021.

STOLZE, C. H. A history of the divergence theorem. *Historia Mathematica*, v. 5, n. 4, p. 437–442, 1978. ISSN 0315-0860. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086078902124>>. Acesso em: 19 mai. 2021.