

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS NO MERCADO BRASILEIRO: UMA ANÁLISE DA
ROBUSTEZ DO MODELO DE MARKOWITZ FRENTE À DIVERSIFICAÇÃO
INGÊNUA VIA SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

GABRIEL PHILIPPSSEN

São Carlos

2026

GABRIEL PHILIPPSSEN

OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS NO MERCADO BRASILEIRO: UMA ANÁLISE DA
ROBUSTEZ DO MODELO DE MARKOWITZ FRENTE À DIVERSIFICAÇÃO
INGÊNUA VIA SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
título de bacharel em Engenharia Física pela
Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Ariano de Giovanni Rodrigues

Coorientadora: Beatriz Lopes Rosa

São Carlos

2026

Philippsen, Gabriel

Otimização de portfólios no mercado brasileiro: uma análise da robustez do modelo de Markowitz frente à diversificação ingênua via simulações computacionais / Gabriel Philippsen -- 2026.

72f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Ariano de Giovanni Rodrigues

Banca Examinadora: José Antônio Eiras, Javier Ramos

Bibliografia

1. Mercado financeiro. 2. Otimização de portfólios. 3. Teoria moderna das carteiras. I. Philippsen, Gabriel. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

Otimização de portfólios no mercado brasileiro: uma análise da robustez do modelo de Markowitz frente à diversificação ingênua via simulações computacionais.

Gabriel Philippsen

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de bacharelado em Engenharia Física pela Universidade Federal de São Carlos.

Aprovado em: 07/07/2026.

BANCA EXAMINADORA

Orientador

Prof. Dr. Ariano de Giovanni Rodrigues
Universidade Federal de São Carlos

Membro da banca (1)

Prof. Dr. José Antônio Eiras
Universidade Federal de São Carlos

Membro da banca (2)

Prof. Dr. Javier Ramos
Universidade Federal de São Carlos

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, aos meus pais, pelo apoio incondicional ao longo de toda esta jornada. Obrigado por serem meu porto seguro nos momentos de incerteza e meus maiores incentivadores em cada conquista, nada disto seria possível sem vocês.

Agradeço também ao meu orientador, Ariano, e à minha gestora, Beatriz Rosa, por aceitarem fazer parte deste projeto e por me auxiliarem ao longo dele. O apoio de vocês foi fundamental para que este trabalho chegasse até aqui.

RESUMO

A otimização de carteiras segundo Markowitz (1952) enfrenta um obstáculo crítico na prática: a estimação dos parâmetros (retornos esperados μ e covariância Σ) a partir de amostras finitas introduz erros que degradam o desempenho fora da amostra. DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) demonstraram que a carteira 1/N (alocação igualitária) é competitiva em Índice de Sharpe frente a otimização formal. O presente trabalho amplia essa questão ao incorporar o Índice de Calmar, que enfatiza contenção de perdas de cauda, investigando em que dimensões de desempenho o Portfólio de Mínima Variância Global (PMVG) supera o 1/N no mercado brasileiro. A metodologia implementa *backtest rolling* mensal de ambas as estratégias no período janeiro/2015–dezembro/2025 utilizando 15 ações de alta liquidez da B3, com janelas de estimação variáveis (1, 3, 5 e 10 anos). O desempenho é avaliado por Índice de Sharpe, Calmar, CAGR, volatilidade e máximo *drawdown*. Resultados confirmam que 1/N domina em Sharpe em ambos os horizontes (2015–2019: 0,964 vs. 0,788; 2015–2025: 0,485 vs. 0,429), validando que erro de estimação em μ anula ganhos da otimização. A sensibilidade a janela de estimação revelou relação não-monotônica, com 3 anos produzindo desempenho ótimo. Contudo, em Índice de Calmar, a hierarquia se inverte: PMVG registra vantagem consistente (2015–2019: 1,313 vs. 1,162; 2015–2025: 0,598 vs. 0,544). Adicionalmente, PMVG apresenta volatilidade menor (16,11% vs. 20,75% em 2015–2025) e máximo *drawdown* menos severo (–29,5% vs. –38,2%). Conclui-se que a hierarquia entre estratégias é sensível ao critério: embora 1/N supere em retorno ajustado por volatilidade total, PMVG oferece proteção mensurável contra perdas de cauda, relevante para investidores conservadores. A escolha depende de qual critério alinha-se melhor com objetivos do investidor.

Palavras-chave: otimização de portfólios; diversificação ingênua; risco e retorno; Markowitz; índice de Sharpe; drawdown.

ABSTRACT

Markowitz's portfolio optimization paradigm faces a critical practical obstacle: parameter estimation (expected returns μ and covariance Σ) in finite samples introduces estimation error that degrades out-of-sample performance. DeMiguel, Garlappi, and Uppal (2009) demonstrated that the equal-weight portfolio (1/N) without any estimated parameters is competitive in Sharpe Ratio against formal optimization strategies. This work extends that inquiry by incorporating the Calmar Ratio, which emphasizes tail loss containment, investigating in which performance dimensions the Global Minimum Variance Portfolio (GMVP) outperforms the 1/N allocation in the Brazilian stock market. The methodology implements monthly rolling backtests of both strategies over January 2015–December 2025 using 15 high-liquidity B3 stocks, with varying estimation windows (1, 3, 5, and 10 years). Performance is evaluated by Sharpe Ratio, Calmar Ratio, CAGR, annualized volatility, and maximum drawdown. Results confirm that the 1/N portfolio dominates the GMVP in Sharpe Ratio across both horizons (2015–2019: 0.964 vs. 0.788; 2015–2025: 0.485 vs. 0.429), validating that estimation error in μ annuls the theoretical gains of optimization. Sensitivity to the estimation window revealed a non-monotonic relationship, with a 3-year window producing optimal global performance. However, when the evaluative dimension is the Calmar Ratio, the hierarchy inverts: GMVP registers consistent advantage (2015–2019: 1.313 vs. 1.162; 2015–2025: 0.598 vs. 0.544). Additionally, GMVP exhibits lower volatility (16.11% vs. 20.75% over 2015–2025) and less severe maximum drawdown (–29.5% vs. –38.2%). We conclude that the hierarchy between strategies is sensitive to the evaluative criterion: while 1/N outperforms in total return-adjusted risk (Sharpe), GMVP provides measurable protection against tail losses, relevant for conservative investors. The choice depends on which criterion best aligns with the investor's specific objectives.

Keywords: portfolio optimization; naive diversification; risk and reward; Markowitz; Sharpe index; drawdown.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	8
1. INTRODUÇÃO	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1 MÉTRICAS ESTATÍSTICAS	15
2.1.1 Retorno esperado.....	15
2.1.2 Variância e desvio padrão	16
2.1.3 Covariância e correlação.....	16
2.1.4 Variância de uma carteira.....	18
2.2. TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS (MPT)	18
2.2.1. Contexto	18
2.2.2. O Fenômeno da Diversificação	19
2.2.3 A Fronteira Eficiente	20
2.4 O CAPM E A LINHA DE MERCADO DE CAPITALIS	25
2.4.1 Fundamentos e Hipóteses do CAPM	25
2.4.2 A Linha de Mercado de Capitais (CML).....	26
2.4.3 O Índice de Sharpe como Medida de Eficiência Ajustada ao Risco	26
2.5 MÉTRICAS DE RISCO ABSOLUTO: <i>DRAWDOWN</i> E ÍNDICE DE CALMAR.....	27
3. METODOLOGIA	33
3.1. FUNDAMENTAÇÃO DA SELEÇÃO DE DADOS	33
3.1.1 Descorrelação e Ortogonalidade Setorial	33
3.1.2 A Dimensionalidade do Sistema.....	34
3.2 AMOSTRAGEM	35
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	42
4.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO E FRONTEIRA EFICIENTE.....	43
4.2 DESEMPENHO COMPARATIVO: JANELAS TEMPORAIS.....	45
4.3 SENSIBILIDADE À JANELA DE ESTIMAÇÃO	50
4.4 PERFIS DE INVESTIDOR NA FRONTEIRA EFICIENTE	56
5. CONCLUSÃO	62
REFERÊNCIAS.....	66
APÊNDICE A	68
APÊNDICE B	72

1. INTRODUÇÃO

Desde Markowitz (1952), a Teoria Moderna de Carteiras estabeleceu-se como paradigma central para alocação de capital sob incerteza. O modelo propõe otimizar a variância para um nível de retorno esperado fixado, fornecendo framework matematicamente elegante. Contudo, a implementação prática exige estimação de parâmetros — o vetor de retornos esperados $\mu \in \mathbb{R}^n$ e a matriz de covariância $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — a partir de séries históricas finitas. Enquanto Σ é estimada com relativa estabilidade, o vetor μ é notoriamente ruidoso, com variância de estimação que converge lentamente (MERTON, 1980). Portfólios otimizados apresentam composições instáveis e desempenho fora da amostra frequentemente inferior à teoria. No mercado brasileiro, essa fragilidade se intensifica: volatilidade elevada, concentração setorial (commodities, financeiro), Selic estruturalmente acima de 10% a.a., e exposição a choques macroeconômicos recorrentes. Assim, surge a questão prática: a otimização formal oferece vantagem mensurável sobre estratégias alternativas mais simples?

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) demonstraram que a carteira de alocação igualitária — portfólio $1/N$ com peso $w_i = 1/N$ para cada ativo — é notavelmente competitiva em comparação a estratégias de otimização de média-variância quando avaliadas pelo Índice de Sharpe fora da amostra. O resultado decorre não de superioridade da heurística $1/N$, mas de sua imunidade ao erro de estimação: sem depender de μ nem Σ , evita instabilidades inerentes a Markowitz. Contudo, essa conclusão é condicionada ao critério avaliativo. DeMiguel et al. focam exclusivamente em Sharpe, que normaliza retorno em excesso por volatilidade simétrica, obscurecendo riscos de queda importantes para investidores reais. Perdas extremas acumuladas (*drawdown*) constituem risco qualitativo distinto, penalizado assimetricamente por fundos conservadores e gestores com mandatos restritos. O presente trabalho estende a pergunta ao incluir o Índice de Calmar (YOUNG, 1991), que normaliza CAGR pelo máximo *drawdown*, oferecendo perspectiva alternativa sobre eficiência que enfatiza contenção de perdas de cauda. Questiona-se: em que dimensões de desempenho — Índice de Sharpe versus Índice de Calmar — o Portfólio de Mínima Variância Global (PMVG) supera a alocação $1/N$ no mercado brasileiro?

O trabalho investiga essa questão através de *backtest rolling* mensal de ambas as estratégias no período janeiro/2015–dezembro/2025, com rebalanceamento mensal automático. Objetivos específicos compreendem: (i) construir a fronteira eficiente empírica para 15 ações da B3 via simulação de Monte Carlo (20.000 portfólios) e otimização SLSQP (SCIPY); (ii) comparar desempenho em dois horizontes (2015–2019 e 2015–2025) por métricas de risco ajustado; (iii) avaliar sensibilidade a janela de estimação (*lookback*) de 1, 3, 5 e 10 anos; (iv) analisar composição temporal das carteiras; (v) caracterizar desempenho de perfis de investidor intermediários. A relevância é multifacetada: academicamente, estende DeMiguel et al. (2009) ao incluir métrica de risco de queda e investigar parâmetro de implementação crítico (janela de estimação) em mercado emergente; metodologicamente, reproduz condições operacionais realistas; praticamente, orienta decisão de investimento em infraestrutura sofisticada de otimização para gestores brasileiros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Métricas estatísticas

Segundo Markowitz (1952), o processo de seleção de carteiras é subdividido em dois estágios fundamentais: o primeiro consiste na formação de crenças sobre o desempenho futuro dos ativos com base em observação e experiência; o segundo, no qual o formalismo de sua teoria se concentra, inicia-se com essas crenças e termina com a escolha da carteira (MARKOWITZ, 1952). Nesse escopo, o retorno esperado surge como o primeiro momento da distribuição de probabilidades e compõe exatamente metade do problema de decisão, representando a expectativa de ganho ou a recompensa estatística almejada pelo investidor (LUENBERGER, 1998; BODIE; KANE; MARCUS, 2014).

A fundação da Teoria Moderna das Carteiras estabeleceu um marco referencial ao quantificar o risco não como uma abstração qualitativa, mas como um parâmetro estatístico mensurável, primordialmente através do cálculo da variância e do desvio padrão (MARKOWITZ, 1952). Para além da dispersão individual de cada ativo, a análise moderna exige a compreensão da covariância e correlação, métricas que capturam a interdependência e entre os pares de ativos no tempo. É a estrutura das covariâncias que viabiliza o fenômeno da diversificação que será abordado no capítulo 2.2, maximizando a eficiência da relação risco-retorno. Por fim, a Variância da Carteira, expressa matricialmente, sintetiza as interações de todo o conjunto de ativos em uma medida de risco agregado do sistema (ELTON et al., 2017; LUENBERGER, 1998).

Sob a ótica da engenharia, o tratamento de ativos financeiros como variáveis aleatórias permite que a incerteza seja modelada através de momentos estatísticos, transformando a seleção de ativos em um problema de otimização matemática robusto.

2.1.1 Retorno esperado

O retorno esperado ($E[R]$) é definido como a média ponderada dos retornos possíveis de um ativo, onde os pesos são as probabilidades associadas a cada estado da natureza. Segundo Ross, Westerfield e Jaffe (2003), essa métrica representa a recompensa média que um investidor espera obter de um ativo se a situação de incerteza for repetida diversas vezes. Do ponto de vista da física estatística, o retorno

esperado equivale ao primeiro momento (esperança matemática) da distribuição de probabilidade da variável aleatória de retornos.

Para um ativo individual i , a expressão analítica é dada por:

$$E[R_i] = \sum_{j=1}^S P_j R_{ij} \quad (1)$$

Onde:

- P_j representa a probabilidade de ocorrência do estado j ;
- R_{ij} é o retorno do ativo i no estado j , para um total de S estados.

2.1.2 Variância e desvio padrão

O risco de um ativo financeiro é matematicamente definido como a dispersão de seus retornos em torno de sua média histórica. Seja $R \in \mathbb{R}^N$ o vetor de retornos aleatórios de N ativos disponíveis no mercado, e $\mu = E[R]$ o vetor de retornos esperados, a variância do ativo i denotada por σ_i^2 é definida como o valor esperado do quadrado dos desvios em relação à média:

$$\sigma_i^2 = E[(R_i - \mu_i)^2] \quad (2)$$

O desvio-padrão $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$ é frequentemente preferido na interpretação direta dos dados empíricos, pois a linearidade do desvio permite que o risco seja comparado diretamente com a taxa de retorno. Essa propriedade viabiliza a construção de modelos de eficiência (como o Índice de Sharpe), onde o risco deve ser interpretado como uma unidade proporcional ao capital investido (SHARPE, 1964).

2.1.3 Covariância e correlação

Enquanto o desvio-padrão isola a volatilidade de um ativo individual, a covariância é a métrica que descreve a dinâmica conjunta do sistema. Conforme a fundamentação de Markowitz (1952), “o risco de uma carteira não é a média ponderada dos riscos individuais, mas sim uma função da forma como os ativos interagem entre si”. A covariância σ_{ij} quantifica o grau em que os retornos de dois ativos, i e j , movem-se em conjunto em relação às suas respectivas médias.

Matematicamente, para dois ativos com retornos R_i e R_j , a covariância é definida como o valor esperado do produto de seus desvios:

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] \quad (3)$$

A partir da covariância, deriva-se a correlação (ρ_{ij}), que é uma versão normalizada e adimensional da interdependência, limitada ao intervalo $[-1,1]$, refletindo a força de associação entre os ativos:

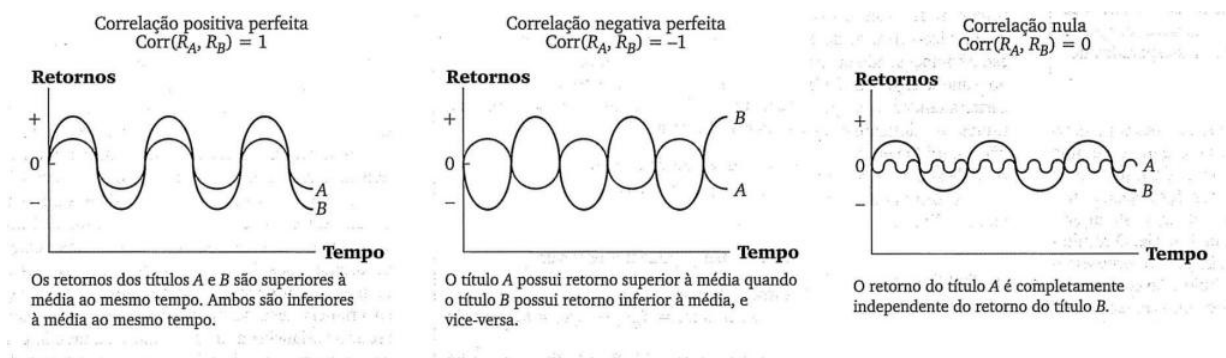
$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (4)$$

Assim,

Como o desvio-padrão é sempre positivo, o sinal de correlação entre duas variáveis deve ser sempre o mesmo da covariância entre duas variáveis. Se a correlação for positiva, dizemos que as variáveis são positivamente correlacionadas, se for negativa, são negativamente relacionadas; e se for igual a zero, dizemos que não são correlacionadas (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2013).

Quando a correlação é positiva ($0 < \rho \leq 1$), os retornos de A e B tendem a se mover no mesmo sentido; isso significa que, em condições normais de mercado, ambos tendem a apresentar ganhos ou perdas simultaneamente. Por outro lado, quando a correlação é nula ($\rho = 0$), os retornos não possuem relação entre si, tornando o comportamento de um ativo completamente independente do outro. Já na correlação negativa ($-1 \leq \rho < 0$), os retornos possuem sentidos opostos: quando um ativo performa acima da média, o outro tende a performar abaixo. A combinação de diferentes ativos pode "anular" riscos específicos ou potencializar a exposição ao mercado. Os valores de correlação extremos e nulo ($\rho = [1, -1, 0]$) são ilustrados abaixo.

Figura 1 — Correlação entre dois ativos



Fonte: Ross; Westerfield; Jaffe, 2013.

2.1.4 Variância de uma carteira

A variância de um portfólio composto por N ativos representa a medida de risco total, sendo determinada não apenas pela volatilidade individual dos ativos, mas primordialmente pela interação entre eles – σ (MARKOWITZ, 1952).

A expressão matricial para a variância de um portfólio é definida como a forma quadrática (LUENBERGER, 1998):

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w \quad (5),$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Onde: w é o vetor coluna $N \times 1$ que representa as proporções (pesos) de capital alocadas em cada ativo; e Σ é a matriz de variância-covariância $N \times N$, com os elementos da diagonal principal (σ_i^2) representando as variâncias individuais e os elementos fora da diagonal (σ_{ij}) a covariância entre os ativos i e j .

2.2. Teoria Moderna de Carteiras (MPT)

2.2.1. Contexto

A gênese da Teoria Moderna de Carteiras (MPT) remonta à necessidade de formalizar matematicamente o processo de seleção de ativos sob incerteza. A grande inovação de Markowitz foi rejeitar a regra de que o investidor deve simplesmente maximizar o retorno esperado descontado. O autor argumenta que, se um investidor

buscasse apenas o retorno máximo, sua carteira seria composta por um único ativo (aquele com maior retorno esperado), o que contradiz o axioma da diversificação.

Assim, ele propõe a Regra E-V (Expected Returns-Variance): o investidor deve considerar o retorno esperado (E) como algo desejável e a variância do retorno (V) como algo indesejável (MARKOWITZ, 1952).

Em sua monografia de 1959, Markowitz aprofunda a análise sobre a racionalidade do investidor. Para o autor, o "investidor racional" não é aquele que evita o risco a qualquer custo, mas sim aquele que exige uma compensação em retorno para aceitar níveis maiores de incerteza. O risco, portanto, deixa de ser uma noção abstrata e passa a ser quantificado pela variabilidade dos resultados em torno da média, através do cálculo da variância (MARKOWITZ, 1959).

O portfólio com o retorno esperado máximo não é necessariamente aquele com a variância mínima. Existe uma taxa pela qual o investidor pode obter ganho de retorno esperado ao assumir maior variância, ou reduzir a variância ao abrir mão de retorno esperado (MARKOWITZ, 1952).

Markowitz postula que, entre duas carteiras com o mesmo retorno esperado, o investidor racional preferirá aquela com a menor variância.

2.2.2. O Fenômeno da Diversificação

A diversificação é a fundamentação que permite a existência da Teoria Moderna de Carteiras. Sob a ótica da engenharia de sistemas, ela pode ser interpretada como a mitigação do ruído individual (risco específico) através da agregação de variáveis aleatórias.

Conforme demonstrado por Bodie, Kane e Marcus (2014), a eficácia da diversificação reside na exploração de correlações imperfeitas ($\rho_{ij} < 1$). Matematicamente, se expandirmos o cálculo da variância do portfólio para uma carteira equiponderada ($w_i = 1/n$), temos:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} (\text{variância média}) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\text{covariância média}) \quad (6)$$

À medida que o número de ativos n cresce para o infinito ($n \rightarrow \infty$), o primeiro termo, que representa a variância média dos ativos individuais, tende a zero. No entanto, o segundo termo converge para a covariância média entre os ativos, representando sua interdependência sistêmica. Sendo assim, a diversificação pode

eliminar o risco individual, mas é incapaz de mitigar o risco gerado pela co-movimentação¹ entre eles (ELTON et al., 2017).

2.2.3 A Fronteira Eficiente

Uma vez compreendido que o risco pode ser minimizado através da alocação estratégica, o modelo de Markowitz define o conjunto de soluções ótimas. Este conjunto é derivado de um problema de otimização convexa, onde o objetivo é encontrar o vetor de pesos w que minimiza a função de custo (variância) para um determinado nível de retorno esperado $\bar{R}$ (MARKOWITZ, 1952).

$$\text{Mín}_w \frac{1}{2} w^T \Sigma w \quad (7)$$

$$\text{sujeito a: } w^T \mu = \bar{R} \quad \text{e} \quad w^T \mathbf{1} = 1 \quad (8)$$

O traço da solução ótima $w^*(R)$ ao longo de todos os valores admissíveis de R gera, no espaço (σ_p, μ_p) , uma hipérbole cuja porção esquerda constitui a fronteira de mínima variância. A fronteira eficiente corresponde ao ramo superior dessa curva - o segmento que parte do ponto de mínima variância global e se estende em direção a retornos crescentes. Cada ponto sobre ela representa uma carteira que, para seu nível de risco, não admite outra combinação de ativos com retorno superior; e, para seu nível de retorno, não admite outra com risco inferior (LUENBERGER, 1998). Qualquer portfólio situado abaixo ou à direita da fronteira é, portanto, estritamente dominado por algum ponto sobre ela, sendo racionalmente inadmissível para um investidor avesso ao risco (MARKOWITZ, 1952).

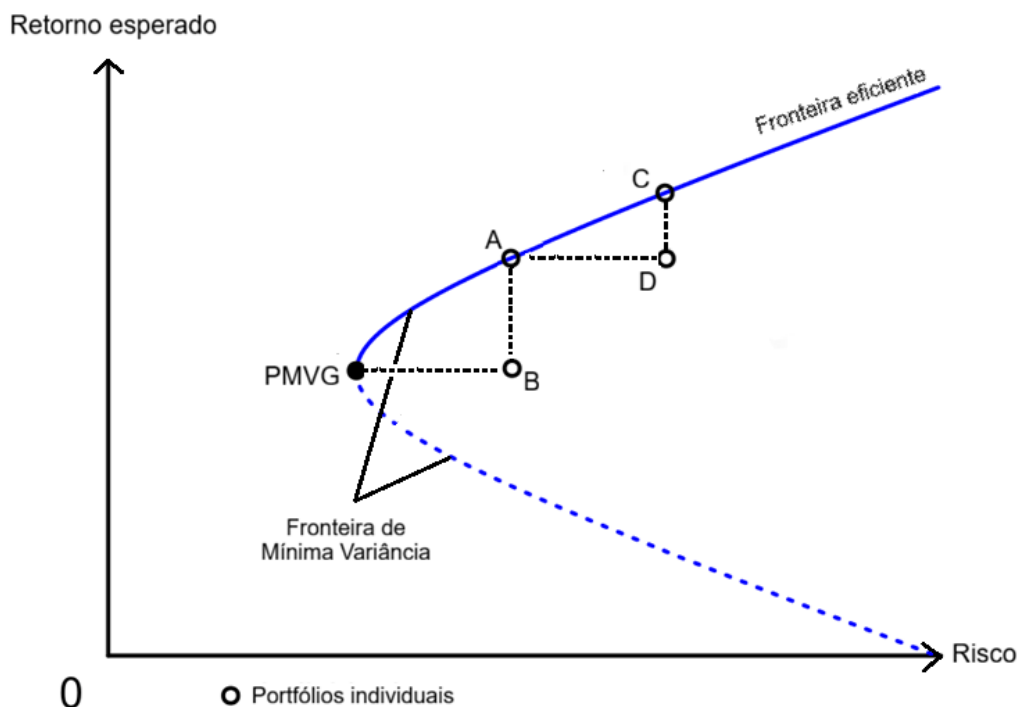
O vértice da hipérbole, ponto de menor risco absoluto no conjunto de oportunidades, é denominado Portfólio de Mínima Variância Global (PMVG). Este ponto representa a combinação ótima de ativos que carrega o menor risco, delimitando geometricamente a divisão entre eficiente e ineficiente da fronteira de mínima variância. Obtém-se removendo a restrição de retorno-alvo do problema (7)–

¹ O termo "co-movimentação" (ou *co-movement* na literatura original em inglês) é empregado pelos autores Elton, Gruber, Brown e Goetzmann. Na obra *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, os autores utilizam o conceito de que os ativos "tendem a se mover juntos" (*move together*) para descrever a dependência estatística que limita os benefícios da diversificação. O termo pode ser substituído por covariância.

(8) e resolvendo exclusivamente com a restrição orçamentária e a de não-negatividade:

$$\min_w \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (9)$$

Figura 2 — Fronteira eficiente.



Fonte: Autoria própria.

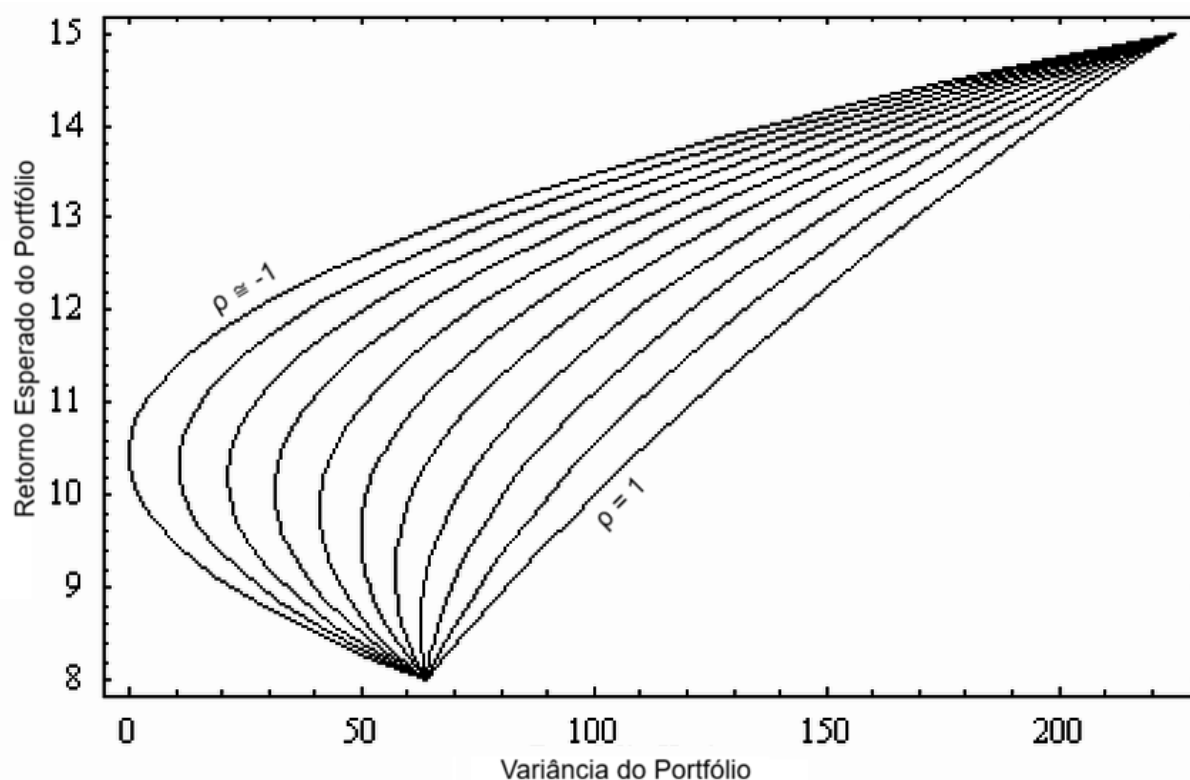
A análise dos pontos A, C e D ilustra este conceito:

- Ineficiência por Retorno (D vs. C): O portfólio D é estritamente dominado pelo portfólio C. Ambos apresentam o mesmo desvio-padrão (risco), porém, o portfólio C oferece um retorno esperado superior.
- Ineficiência por Risco (D vs. A): De forma análoga, o portfólio D é dominado pelo portfólio A. Ambos possuem o mesmo retorno esperado, todavia, o portfólio A (situado na fronteira eficiente) apresenta um risco significativamente menor.

A mesma lógica pode ser aplicada considerando o ponto B em relação aos pontos A e PMVG.

A geometria da fronteira eficiente é intrinsecamente ditada pelo coeficiente de correlação (ρ), evoluindo de uma degeneração linear para uma convexidade progressivamente acentuada à medida que a interdependência estatística entre os ativos se reduz, conforme ilustrado na figura acima, que apresenta uma família de fronteiras parametrizadas por distintos valores de ρ .

Figura 3 — Fronteiras eficientes que refletem diferentes coeficientes de correlação $[-1, 1]$ variando em incrementos de 0,2.



Fonte: (BROWN, 2005)

No limite superior de correlação perfeita positiva ($\rho = 1$), a fronteira reduz-se a um segmento de reta que une os ativos individuais, o que, sob a ótica de Bodie, Kane e Marcus (2014), impossibilita qualquer ganho real de diversificação, dado que o risco do portfólio torna-se uma simples média ponderada das volatilidades dos ativos.

Ao afastar-se desse extremo em direção a correlações intermediárias ($-1 < \rho < 1$), o conjunto de oportunidades passa a exibir uma curvatura não-linear característica, deslocando o vértice da hipérbole progressivamente para a esquerda. Este fenômeno permite que o Portfólio de Mínima Variância Global (PMVG) alcance níveis de risco inferiores aos de qualquer ativo isolado (LUENBERGER, 2014). As

curvas exibidas na figura evidenciam precisamente esse comportamento: à medida que ρ decresce, o arco da hipérbole se alarga e o PMVG migra para regiões de variância cada vez menores, ampliando o conjunto de portfólios eficientes acessíveis ao investidor, possibilitando a obtenção de retornos esperados idênticos com níveis de exposição ao risco significativamente menores, ou, inversamente, retorno máximo para um orçamento de risco fixo.

Cabe destacar, por fim, o caso teórico limite de correlação perfeita negativa ($\rho = -1$). Conforme demonstrado por Elton et al. (2014), nesse cenário a fronteira assumiria uma configuração em dois segmentos lineares — uma forma de "V" — que, em tese, tocara o eixo de retornos, viabilizando a construção de um portfólio de risco nulo ($\sigma_p = 0$) mediante anulação exata das flutuações aleatórias dos ativos. Contudo, esse resultado constitui um limite teórico estrito, não observado empiricamente: correlações perfeitamente negativas entre ativos financeiros reais são praticamente inexistentes em mercados líquidos (CAMPBELL; MACKINLAY, 1997), razão pela qual tal configuração não se encontra representada nas fronteiras empíricas apresentadas na figura. A relevância analítica desse caso reside, portanto, em seu caráter de cota inferior para os benefícios de diversificação, e não em sua aplicabilidade direta à seleção de carteiras.

2.3 Risco Sistemático e Risco Não-Sistemático

Na seção 2.2 foi demonstrado que a diversificação reduz o risco de uma carteira à medida que o número de ativos cresce e que as correlações entre eles são inferiores à unidade. Contudo, essa redução não é ilimitada: existe um patamar de risco irreduzível que persiste mesmo em portfólios amplamente diversificados. A compreensão desse fenômeno exige a decomposição do risco total de um ativo em duas componentes qualitativamente distintas, cuja separação é fundamental para a teoria moderna de carteiras (ELTON et al., 2014).

O risco total associado ao retorno de um ativo i pode ser decomposto de forma aditiva em:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\text{sist},i}^2 + \sigma_{\text{idios},i}^2 \quad (10)$$

O primeiro componente, o risco sistemático, também denominado risco de mercado ou risco não-diversificável, decorre de fatores macroeconômicos que afetam

simultaneamente todos os ativos da economia: variações na taxa de juros, choques cambiais, oscilações na inflação, crises de liquidez sistêmicas e eventos geopolíticos de amplo alcance. Como esses fatores movem os ativos em conjunto, a correlação que produzem entre si não pode ser eliminada pela combinação de ativos em uma carteira, independentemente de seu tamanho (ELTON et al., 2014). É esse componente que remunera o investidor em equilíbrio de mercado: por não poder ser descartado via diversificação, o risco sistemático exige prêmio de retorno para ser suportado.

O segundo componente, o risco não-sistemático (risco idiossincrático, risco específico ou risco diversificável) está associado a fatores particulares de cada empresa ou setor: mudanças na gestão executiva, resultados trimestrais inesperados, litígios regulatórios, interrupções operacionais ou variações na demanda por um produto específico. Por ser particular a cada ativo, esse componente tende a se cancelar estatisticamente quando muitos ativos são combinados em uma carteira, desde que os choques idiossincráticos não sejam perfeitamente correlacionados entre si — o que, na prática, nunca ocorre. É precisamente esse efeito de cancelamento que fundamenta o fenômeno da diversificação discutido na seção 2.2.2 (MARKOWITZ, 1952).

A consequência direta dessa decomposição é que o retorno esperado de um ativo, em equilíbrio de mercado, deve compensar exclusivamente o risco sistemático suportado pelo investidor. O risco não-sistemático não deve ser remunerado pelo mercado, uma vez que pode ser eliminado a custo zero pela simples diversificação da carteira. Esse princípio constitui o alicerce conceitual do modelo apresentado na seção seguinte.

No contexto deste trabalho, a decomposição tem relevância metodológica direta. A carteira composta pelas ações selecionadas da B3 está exposta ao risco sistemático do mercado brasileiro — associado ao desempenho macroeconômico doméstico, às variações da taxa Selic e ao comportamento do câmbio — e ao risco idiossincrático de cada empresa. O modelo de Markowitz, ao minimizar a variância total da carteira para um dado retorno esperado, reduz ao máximo o componente não-sistemático por meio da alocação ótima de pesos, sem, contudo, eliminar o risco de mercado. A estratégia 1/N, analisada na seção 2.6, também promove diversificação e redução do risco idiossincrático, porém sem garantia de eficiência nessa redução.

2.4 O CAPM e a Linha de Mercado de Capitais

2.4.1 Fundamentos e Hipóteses do CAPM

O Capital Asset Pricing Model (CAPM), desenvolvido independentemente por Sharpe (1964) e Lintner (1965), a partir dos fundamentos estabelecidos por Markowitz (1952), constitui o principal modelo de equilíbrio de mercado derivado da teoria de carteiras. Para os fins deste trabalho, o CAPM interessa não como modelo de precificação de ativos individuais, mas como embasamento teórico indispensável para fundamentar dois elementos centrais da metodologia adotada: a Linha de Mercado de Capitais (CML) e o Índice de Sharpe.

O modelo repousa sobre um conjunto de hipóteses simplificadoras que, embora reconhecidamente idealizadas, permitem derivar resultados analíticos tratáveis (ELTON et al., 2014):

- (i) Todos os investidores são racionais e tomam decisões com base exclusivamente no par retorno esperado–variância, conforme a estrutura de Markowitz;
- (ii) Existe um ativo livre de risco à taxa R_f , disponível para aplicação e captação ilimitadas;
- (iii) Os investidores possuem horizonte de investimento de um único período e expectativas homogêneas quanto às distribuições de retorno dos ativos;
- (iv) Os mercados são perfeitos, ou seja, sem custos de transação, sem impostos, sem restrições à venda a descoberto e com ativos perfeitamente divisíveis.

Sob essas hipóteses, como todos os investidores enfrentam a mesma fronteira eficiente e dispõem do mesmo ativo livre de risco, todos escolherão manter a mesma carteira arriscada ótima — aquela que maximiza o Índice de Sharpe, conforme definido na seção 2.4.3. Em equilíbrio, essa carteira coincide com a carteira de mercado, composta por todos os ativos disponíveis ponderados pelo respectivo valor de mercado. Esse resultado é o fundamento que legitima a derivação da CML na seção seguinte (SHARPE, 1964).

2.4.2 A Linha de Mercado de Capitais (CML)

A Linha de Mercado de Capitais (Capital Market Line — CML) descreve o conjunto de portfólios eficientes formados pela combinação linear entre o ativo livre de risco e a carteira de mercado. Geometricamente, ela corresponde à reta tangente à fronteira eficiente com origem no ponto $(0, R_f)$ no espaço retorno esperado–desvio padrão (SHARPE, 1964; ELTON et al., 2014). Qualquer portfólio situado sobre a CML domina, em termos de eficiência média-variância, qualquer portfólio situado sobre a fronteira eficiente arriscada com o mesmo nível de risco.

A equação da CML é dada por:

$$E(r_p) = R_f + \frac{E(r_m) - R_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p \quad (11)$$

Onde $E(r_p)$ é o retorno esperado do portfólio eficiente, R_f é a taxa livre de risco, $E(r_m)$ é o retorno esperado da carteira de mercado, σ_m é o desvio padrão da carteira de mercado e σ_p é o desvio padrão do portfólio em análise. O coeficiente angular $[(E(r_m) - R_f)/\sigma_m]$ representa o prêmio de risco de mercado por unidade de volatilidade total, interpretado como o "preço do risco" no equilíbrio do modelo (ELTON et al., 2014).

Neste trabalho, a CML é construída a partir do portfólio de máximo Índice de Sharpe identificado na nuvem de Monte Carlo, utilizando como referência para R_f a taxa Selic vigente no período de análise, conforme Banco Central do Brasil. O portfólio tangente, por definição, é o ponto de contato entre a CML e a fronteira eficiente estimada, e corresponde à carteira de máxima eficiência ajustada ao risco entre todas as combinações possíveis dos ativos analisados.

2.4.3 O Índice de Sharpe como Medida de Eficiência Ajustada ao Risco

O Índice de Sharpe, proposto formalmente por Sharpe (1966) como evolução analítica de seu trabalho sobre equilíbrio de mercado, é a principal métrica de desempenho ajustado ao risco utilizada neste estudo. Para um portfólio p , o índice é definido como:

$$S_p = \frac{E(r_p) - R_f}{\sigma_p} \quad (12)$$

Onde $E(r_p)$ é o retorno esperado, R_f é a taxa livre de risco e σ_p é o desvio padrão dos retornos do portfólio. Geometricamente, S_p corresponde à inclinação da reta que une o ativo livre de risco ao portfólio p no espaço retorno–risco. Segue diretamente da equação (12) que o portfólio de máximo Índice de Sharpe é exatamente o ponto de tangência entre a CML e a fronteira eficiente (SHARPE, 1966; BACON, 2012).

A métrica permite comparar portfólios com diferentes perfis de risco em base comum: dois portfólios com o mesmo retorno absoluto terão Índices de Sharpe distintos se apresentarem volatilidades diferentes, com penalização crescente atribuída ao portfólio mais arriscado. No contexto do estudo desenvolvido no Capítulo 4, o Índice de Sharpe é calculado com base nos retornos realizados no período fora da amostra e utilizado como critério primário de comparação entre o PMVG e o portfólio 1/N.

2.5 Métricas de Risco Absoluto: *Drawdown* e Índice de Calmar

O Índice de Sharpe, embora amplamente adotado, captura exclusivamente a relação entre retorno médio e volatilidade simétrica dos retornos. Do ponto de vista prático, o risco mais relevante para um investidor frequentemente não é a oscilação em torno da média, mas a magnitude das perdas acumuladas em períodos adversos — fenômeno mensurado pelo conceito de *drawdown* (BACON, 2012).

O *drawdown* em um instante t é definido como a queda percentual do valor da carteira em relação ao seu pico histórico até aquele momento:

$$DD(t) = \frac{V(t) - \max_{\tau \in [0, t]} V(\tau)}{\max_{\tau \in [0, t]} V(\tau)} \quad (13)$$

Onde $V(t)$ representa o valor da carteira no instante t . Por construção, $DD(t) \leq 0$ para todo t , assumindo valor nulo nos momentos em que a carteira atinge novo máximo histórico. O Máximo Drawdown (MDD) corresponde à maior queda percentual observada em todo o período de análise $[0, T]$:

$$MDD = \min_{t \in [0, T]} DD(t) \quad (14)$$

O MDD é uma medida de risco de cauda particularmente relevante em mercados com assimetria negativa nos retornos. Diferentemente da variância, o MDD

não pressupõe simetria na distribuição de retornos e captura diretamente o risco de perda máxima de capital em um horizonte de investimento, sendo especialmente sensível a eventos de stress — como crises cambiais, choques de juros ou episódios de aversão ao risco global que afetam de forma aguda o mercado brasileiro (BACON, 2012).

O Índice de Calmar, proposto por Young (1991), combina o retorno composto anualizado (CAGR) com o máximo *drawdown* em uma única razão de eficiência:

$$\text{Calmar} = \frac{\text{CAGR}}{|MDD|} \quad (15)$$

Analogamente ao Índice de Sharpe, que normaliza o retorno em excesso pela volatilidade simétrica, o Índice de Calmar normaliza o retorno composto pela pior perda histórica observada. Um valor elevado do Índice de Calmar indica que a estratégia gera retorno acumulado expressivo em relação ao seu pior cenário de perda, sendo especialmente informativo para investidores com aversão a perdas concentradas no tempo (YOUNG, 1991; BACON, 2012).

2.6 Diversificação Ingênua: O Portfólio de Pesos Iguais (1/N)

A estratégia de alocação igualitária, denominada na literatura de portfólio 1/N, consiste em distribuir o capital disponível de forma uniforme entre todos os N ativos da carteira, sem qualquer otimização paramétrica. Formalmente, o vetor de pesos é definido como:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{N}, \mathbf{1} \quad (16)$$

onde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de uns.

Trata-se da estratégia mais simples concebível para a gestão de uma carteira: não requer estimação de retornos esperados, variâncias ou covariâncias, é invariante em relação a qualquer hipótese sobre a distribuição dos retornos e não envolve qualquer procedimento de otimização numérica (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009).

Neste trabalho, o portfólio 1/N serve como benchmark natural e conceitualmente motivado para o PMVG (Portfólio de Mínima Variância Global). A hipótese central investigada é se a otimização formal, implementada com dados

históricos das 15 ações selecionadas da B3 e janela de estimação variável, é capaz de gerar vantagem mensurável — em termos de Índice de Sharpe, Índice de Calmar e retorno acumulado — em relação à alocação igualitária nos períodos de *backtest* considerados. A escolha do PMVG como portfólio otimizado, em detrimento do portfólio de máximo Sharpe, é deliberada: ao minimizar a variância sem impor estimativas de retorno esperado, o PMVG reduz parcialmente a exposição ao componente mais ruidoso do erro de estimação, tornando a comparação com o 1/N metodologicamente mais justa.

2.7 O Mercado Financeiro Brasileiro

2.7.1 Características Estruturais e Perfil de Volatilidade

O mercado de capitais brasileiro apresenta características estruturais que o distinguem dos mercados desenvolvidos e que têm implicações diretas sobre a aplicabilidade e o desempenho de modelos quantitativos de gestão de portfólios. A compreensão desse contexto é condição necessária para a interpretação adequada dos resultados empíricos obtidos neste trabalho.

A B3 (Brasil, Bolsa, Balcão), principal bolsa de valores e derivativos do Brasil, concentra liquidez em um número relativamente restrito de papéis, com forte participação de empresas dos setores financeiro, de energia elétrica, petróleo e mineração. Essa concentração setorial implica correlações estruturalmente elevadas entre os ativos de maior liquidez, o que reduz o benefício marginal da diversificação dentro do mercado doméstico e restringe a efetividade prática da fronteira eficiente em relação a universos de ativos mais pulverizados setorialmente (ELTON et al., 2014). A carteira analisada neste trabalho, composta por 15 ações de alta liquidez da B3, reflete essa realidade estrutural: ativos como PETR4, VALE3, BBAS3 e ITUB4 estão sujeitos a fatores de risco comuns que elevam suas correlações e comprimem o espaço de diversificação efetiva disponível ao otimizador.

Do ponto de vista macroeconômico, o mercado brasileiro é historicamente caracterizado por taxas de juros estruturalmente elevadas — com a taxa Selic frequentemente muito acima dos níveis observados em economias desenvolvidas — e por alta volatilidade dos retornos das ações, associada à sensibilidade a variáveis como câmbio, preços de commodities e risco político doméstico. Essa configuração impõe desafios adicionais à estimação dos parâmetros μ e Σ : em ambientes de alta

volatilidade e não-estacionaridade, os retornos históricos são estimadores particularmente ruidosos dos retornos esperados futuros, agravando o problema do erro de estimação discutido na seção 2.6 (ELTON et al., 2014).

A taxa Selic, fixada pelo COPOM, é adotada como taxa livre de risco (R_f) na construção do Índice de Sharpe e da linha de mercado de capitais. Utilizou-se $R_f = 10,75$ a.a., valor constante baseado em medidas históricas do período analisado (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2026). Esta é uma taxa nominal, coerente com os retornos nominais das ações obtidos via *yfinance* (YAHOO FINANCE, 2026). Sua magnitude elevada torna o critério de Sharpe substancialmente mais exigente do que em economias de baixa taxa de juros: apenas estratégias com retorno esperado significativamente superior à renda fixa de baixo risco conseguem gerar Índice de Sharpe positivo e economicamente relevante, o que reforça a importância de uma gestão ativa eficiente para justificar o risco de mercado assumido.

2.7.2 Benchmarks de Referência: Ibovespa e IBrX-50

Dois índices são amplamente utilizados como referência de desempenho no mercado brasileiro: o Ibovespa e o IBrX-50. Ambos são calculados e divulgados pela B3 e refletem o comportamento de carteiras teóricas compostas pelas ações mais representativas do mercado doméstico.

O Ibovespa é o principal indicador do desempenho médio das ações negociadas na B3. Sua metodologia baseia-se em critério de liquidez: compõem o índice as ações que, em conjunto, representam 85% do volume financeiro negociado nos últimos doze meses, ponderadas pelo valor de mercado do *free float*² com revisões quadrimestrais (B3, 2024). Por sua abrangência histórica e liquidez, o Ibovespa é frequentemente utilizado como proxy da carteira de mercado brasileira em estudos empíricos, desempenhando papel análogo ao do índice S&P 500 nos estudos sobre o mercado norte-americano.

2 O termo *free float* (ações em livre circulação) designa a fração do capital social de uma companhia aberta que está efetivamente disponível para negociação no mercado secundário. Excluem-se deste cômputo as ações detidas pelo grupo controlador, investidores estratégicos, papéis em tesouraria e ações vinculadas a acordos de acionistas.

O IBrX-50 é composto pelas 50 ações de maior liquidez e representatividade da B3, igualmente ponderadas pelo valor de mercado do *free float*. Por incluir exclusivamente os ativos mais líquidos e manter uma composição mais estável, o IBrX-50 é considerado benchmark mais adequado para comparação com estratégias quantitativas de carteira, uma vez que seus componentes apresentam menor risco de liquidez, spreads de negociação mais estreitos e histórico de preços mais confiável para fins de backtest (B3, 2024).

No contexto deste trabalho, os benchmarks têm função referencial de contexto: a composição da carteira de 15 ativos foi selecionada entre ações de alta liquidez da B3, em sua maioria integrantes de ambos os índices, o que garante compatibilidade entre o universo de ativos analisado e o universo representado pelos benchmarks. A comparação de desempenho é realizada primariamente entre as estratégias internas PMVG e 1/N, sendo os índices mencionados apenas para contextualização do ambiente de mercado em que as estratégias operam.

2.8 Críticas e Limitações do Modelo de Média-Variância

Apesar de sua elegância matemática e de sua posição central na teoria moderna de carteiras, o modelo de média-variância de Markowitz (1952) acumula críticas substanciais tanto no plano teórico quanto no empírico. A compreensão dessas limitações é fundamental para situar adequadamente os resultados deste trabalho e para justificar a adoção da estratégia 1/N como benchmark competitivo — e não meramente como referência trivial.

A crítica mais fundamental diz respeito à sensibilidade paramétrica do modelo. A fronteira eficiente e o portfólio ótimo resultante são funções do vetor de retornos esperados $\mu \in \mathbb{R}^N$ e da matriz de covariância $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$, ambos estimados a partir de dados históricos com erro amostral inevitável. Best e Grauer (1991) demonstraram que pequenas perturbações no vetor μ — da ordem de grandeza típica do erro de estimação amostral — podem produzir mudanças drásticas na composição ótima do portfólio, chegando a gerar realocações extremas em ativos individuais. Essa instabilidade é particularmente pronunciada para μ , cujo erro de estimação é ordens de grandeza maior que o de Σ para os horizontes de dados tipicamente disponíveis em aplicações práticas (MERTON, 1980). Essa assimetria justifica a escolha do

PMVG — que elimina μ do problema de otimização — como portfólio otimizado neste trabalho, reduzindo a exposição à fonte mais crítica de erro paramétrico.

O problema do erro de estimação é agravado pela dimensionalidade do problema. Para uma carteira com N ativos, a estimação de Σ requer $N(N + 1)/2$ parâmetros independentes. No caso estudado, com $N = 15$, isso corresponde a 120 parâmetros de covariância a serem estimados. Quando a janela de estimação é relativamente curta, como nas janelas utilizadas no backtest, a matriz de covariância amostral pode estar próxima da singularidade, tornando sua inversão — necessária ao algoritmo de otimização SLSQP (SCIPY) — numericamente instável e ampliando o erro nos pesos resultantes (LEDOIT; WOLF, 2004).

A segunda classe de limitações refere-se às hipóteses distribucionais implícitas no modelo. A otimização média-variância é consistente com a teoria da utilidade esperada apenas se os retornos seguem distribuição normal multivariada ou se as funções de utilidade dos investidores são quadráticas — hipótese que implica utilidade marginal crescente da riqueza a partir de determinado nível, violando a monotonicidade da preferência (ELTON et al., 2014). A literatura empírica documenta consistentemente que os retornos de ações apresentam caudas mais pesadas que a distribuição normal, assimetria negativa e agrupamento de volatilidade, fenômenos incompatíveis com a hipótese gaussiana (CONT, 2001). No mercado brasileiro, esses fenômenos são pronunciados em razão do histórico de crises cambiais, choques de juros e episódios de aversão ao risco global. Nesse contexto, a variância como única medida de risco pode subestimar significativamente a probabilidade de perdas extremas, o que motiva metodologicamente a adoção complementar do Máximo Drawdown e do Índice de Calmar — métricas não paramétricas e insensíveis à hipótese gaussiana — como critérios de avaliação no Capítulo 4.

A terceira limitação relevante é a instabilidade temporal dos parâmetros. O modelo de Markowitz, em sua formulação estática, pressupõe que μ e Σ são estacionários ao longo do horizonte de investimento. Na prática, as correlações entre ativos variam de forma substancial ao longo do tempo — tendendo a aumentar em períodos de crise sistêmica, justamente quando a diversificação seria mais necessária ao investidor — e os retornos esperados são altamente não-estacionários (ELTON et al., 2014). A implementação via backtest rolling, adotada no Capítulo 4, trata parcialmente essa

limitação ao reestimar os parâmetros mensalmente com uma janela deslizante de dados históricos. Ainda assim, esse procedimento não elimina o problema estrutural de utilizar o passado como estimador do futuro em um ambiente de não-estacionaridade.

É nesse conjunto convergente de limitações que reside a motivação mais profunda para o benchmark $1/N$ e para a pergunta central deste trabalho. Como demonstrado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), a aparente inferioridade teórica da alocação igualitária é compensada, em muitos contextos empíricos, pela ausência total de erro de estimação: ao não depender de μ nem de Σ , o portfólio $1/N$ é estruturalmente imune às instabilidades que afetam o modelo de Markowitz fora da amostra. Investigar se essa imunidade se traduz em vantagem de desempenho no contexto específico do mercado brasileiro — com a carteira de 15 ativos, a janela de estimação e o período de backtest definidos neste trabalho — constitui a questão empírica que orienta toda a análise desenvolvida nos capítulos seguintes.

3. METODOLOGIA

3.1. Fundamentação da seleção de dados

A eficácia da otimização de portfólios sob o paradigma de média-variância depende intrinsecamente das propriedades estatísticas do universo de ativos selecionado. A definição da dimensionalidade do vetor de pesos $w \in \mathbb{R}^N$ e a topologia dos ativos que compõem a matriz de covariância Σ exigem uma metodologia de seleção adequada, assegurando que a solução do problema de otimização reflita uma diversificação estrutural autêntica e evitando que o modelo se torne meramente um exercício de ajuste de curvas a dados históricos.

3.1.1 Descorrelação e Ortogonalidade Setorial

A formulação matemática do modelo reside na premissa de que o risco global de um portfólio, medido pela variância $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$, não é uma simples média ponderada das volatilidades individuais, mas uma função quadrática que depende visceralmente da covariância entre os ativos.

Conforme estabelecido por Elton e Gruber (2017), o princípio da diversificação atinge a sua eficiência máxima quando o portfólio é construído por ativos cujos retornos históricos apresentam baixa correlação linear entre si.

Uma das passagens mais cruciais do artigo de Markowitz destaca que uma carteira com muitos ativos pode não ser diversificada se os retornos desses ativos forem altamente correlacionados (MARKOWITZ, 1952).

A hipótese E-V não apenas implica diversificação, mas implica o 'tipo certo' de diversificação pela 'razão certa'. A adequação da diversificação não é considerada pelos investidores como dependente apenas do número de diferentes ativos mantidos. Uma carteira com sessenta ativos ferroviários diferentes, por exemplo, não seria tão bem diversificada quanto uma carteira de mesmo tamanho contendo algumas ferrovias, algumas utilidades públicas, mineração, vários tipos de manufatura etc. A razão é que, geralmente, é mais provável que empresas dentro de uma mesma indústria tenham um desempenho ruim ao mesmo tempo do que empresas em indústrias distintas.

A seleção ingênua de ativos pertencentes a um mesmo setor geraria uma matriz de covariância Σ dominada por elementos fortemente positivos. Essa colinearidade restringe a curvatura da fronteira eficiente, impedindo que o algoritmo de otimização anule os riscos específicos. Por conseguinte, impõe-se a necessidade de selecionar ativos provenientes de setores ortogonais da economia — como utilidade pública, energia, saúde e materiais básicos —, assegurando que dinâmicas de mercado distintas produzam covariâncias que favoreçam a mitigação matemática do risco global.

3.1.2 A Dimensionalidade do Sistema

A determinação da quantidade de ativos N a serem incluídos na matriz modelada depende de um equilíbrio entre a mitigação de risco e a estabilidade algébrica do sistema, estando sujeita aos seguintes riscos em seus limites superiores e inferiores:

1. Subdimensionamento: O risco total de qualquer ativo é composto pela soma do seu risco sistemático (inerente ao mercado global) e do seu risco não-sistemático (idiossincrático), (BODIE; KANE; MARCUS, 2014). Quando a dimensionalidade N é pequena demais (por exemplo, inferior a 5 ativos), o espaço vetorial de otimização carece de graus de liberdade. Como resultado, o portfólio otimizado falha em diversificar o risco não-sistemático, deixando o modelo vulnerável a choques específicos de empresas individuais, o que contraria o objetivo fundamental da teoria de Markowitz.

2. Superdimensionamento: O aumento demasiado do universo de ativos N (como a tentativa de otimizar os 500 componentes de um índice amplo como o S&P 500) impõe um limite crítico à eficácia do otimizador devido ao erro de estimação. Como a construção da matriz de covariância Σ exige a estimação de $\frac{N(N+1)}{2}$ parâmetros (variâncias e covariâncias, um sistema de $N = 500$, por exemplo, resultaria em mais de 125 mil variáveis. Dada a finitude das séries temporais de retornos, essa desproporção entre parâmetros e observações leva ao *overfitting*, onde o modelo trata ruído estatístico como sinal financeiro. Portanto, como demonstra Luenberger (2014), a inclusão de ativos redundantes ou altamente correlacionados torna a matriz mal condicionada (determinante próximo a zero).

Portanto, a metodologia deste trabalho adota um $N = 15$, distribuído entre diferentes setores da economia, garantindo graus de liberdade suficientes para a eliminação do risco não-sistemático, enquanto preservando a matriz Σ estritamente positiva definida e evitando erros de estimação estatística.

3.2 Amostragem

A definição do universo amostral constitui etapa metodológica de primeira ordem em estudos empíricos de otimização de portfólios, pois a qualidade das estimativas dos parâmetros de entrada — vetor de retornos esperados $\mu \in \mathbb{R}^n$ e matriz de covariância $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — depende diretamente da consistência, continuidade e representatividade econômica das séries históricas utilizadas (ELTON et al., 2014). A seleção dos 15 ativos que compõem a carteira analisada neste trabalho obedeceu a três critérios simultâneos descritos a seguir.

O ponto de partida para a triagem dos candidatos foi o índice IBrX-50, carteira teórica calculada e divulgada pela B3 que reúne as 50 ações de maior liquidez e representatividade do mercado acionário brasileiro, ponderadas pelo valor de mercado do *free float* (B3, 2024). A restrição ao universo do IBrX-50 garante que todos os ativos considerados possuam liquidez suficiente para que os preços observados reflitam informação econômica e não distorções oriundas de *thin trading* — fenômeno pelo qual a esparsa frequência de negociação introduz autocorrelação artificial nos retornos e subestima as covariâncias reais entre ativos (ELTON et al., 2014; SCHOLES; WILLIAMS, 1977). Em consequência, reduz-se a probabilidade de que a

matriz de covariância amostral Σ seja contaminada por artefatos estatísticos sem correspondência com as relações econômicas estruturais, condição que, quando violada, compromete a estabilidade numérica do problema de otimização e a robustez dos pesos resultantes (LEDOIT; WOLF, 2004).

Dentre os elegíveis pelo IBrX-50, aplicou-se um segundo critério de continuidade e estabilidade da série histórica. Para que o *backtest* rolling implementado no Capítulo 4 seja válido em todo o horizonte amostral, é imprescindível que a sequência de retornos logarítmicos

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right), i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \quad (17)$$

seja computável sem interrupção para cada ativo. Ativos que sofreram eventos corporativos que resultaram em cancelamento ou alteração do *ticker* original — fusões, incorporações ou cisões com descontinuidade da base de dados — foram excluídos do universo final, pois a instabilidade do identificador de negociação compromete a reprodutibilidade da coleta automatizada via *yfinance* e introduz ambiguidades na composição das séries (HARVEY et al., 2016). Os 15 ativos selecionados satisfazem integralmente essa condição, com *tickers* estáveis e séries de preços ajustados ininterruptas ao longo de todo o período considerado.

O terceiro critério é a representatividade setorial. A composição final da carteira abrange setores economicamente distintos — financeiro, *utilities*, energia, materiais básicos, consumo básico, industrial, saúde, consumo discricionário, imobiliário comercial, agronegócio e tecnologia —, conforme detalhado na Tabela 1. Essa heterogeneidade setorial é condição para que a matriz Σ apresente estrutura de correlação suficientemente dispersa, ampliando o conjunto de portfólios viáveis na fronteira eficiente e tornando o benefício marginal da otimização sobre a estratégia ingênua empiricamente testável (MARKOWITZ, 1952; DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). A conjugação dos três critérios — elegibilidade pelo IBrX-50, continuidade da série histórica e cobertura setorial ampla — confere ao universo amostral as propriedades estatísticas e econômicas necessárias para que as comparações entre as estratégias otimizadas e a diversificação ingênua sejam metodologicamente válidas e os resultados, interpretáveis à luz da teoria moderna de portfólios.

Tabela 1 - Composição da carteira: ativos selecionados, setor econômico e justificativa de inclusão.

Nome da Empresa	Ticker	Setor	Justificativa de Inclusão
Banco do Brasil S.A.	BBAS3	Financeiro — Banco público	Maior banco público brasileiro, com liquidez elevada e histórico contínuo na B3 desde 2000; representa o segmento de crédito estatal.
Itaú Unibanco Holding S.A.	ITUB4	Financeiro — Banco privado	Maior banco privado do país por ativos; complementa BBAS3 com exposição ao crédito privado, com dados ininterruptos desde 2000.
Equatorial Energia S.A.	EQTL3	Utilities — Distribuição de energia elétrica	Distribuidora de energia com atuação em múltiplos estados; representa o segmento regulado de baixa correlação com o ciclo econômico.
Taesá — Transmissora Aliança de Energia Elétrica S.A.	TAE11	Utilities — Transmissão de energia elétrica	Operadora de linhas de transmissão com receita contratada e previsível; complementa EQTL3 em subsetor distinto dentro de utilities.
Petróleo Brasileiro S.A.	PETR4	Energia — Petróleo e gás	Principal produtora de petróleo do país; introduz exposição a commodities energéticas e ao ciclo internacional de preços do petróleo.
Vale S.A.	VALE3	Materiais básicos — Mineração	Uma das maiores mineradoras do mundo; expõe o portfólio ao ciclo de minério de ferro e à demanda industrial global.
Ambev S.A.	ABEV3	Consumo básico — Bebidas	Maior produtora de bebidas da América Latina; perfil defensivo com receita recorrente e baixa sensibilidade ao ciclo econômico doméstico.
WEG S.A.	WEGE3	Industrial — Motores e automação	Conglomerado industrial com receita global em equipamentos elétricos; representa o setor manufatureiro de alto valor agregado.
Raia Drogasil S.A.	RADL3	Saúde — Varejo farmacêutico	Maior rede de farmácias do Brasil; representa o setor de saúde com demanda inelástica e crescimento estrutural de longo prazo.
Telefônica Brasil S.A.	VIVT3	Telecomunicações	Operadora de telecomunicações com receita recorrente e baixa correlação com setores cíclicos; histórico disponível desde 2000.

Nome da Empresa	Ticker	Setor	Justificativa de Inclusão
Localiza Rent a Car S.A.	RENT3	Consumo discricionário — Locação de veículos	Líder no segmento de locação de veículos; expõe o portfólio ao consumo discricionário e à expansão do setor de mobilidade.
Multiplan Empreendimentos Imobiliários S.A.	MULT3	Imobiliário comercial — Shoppings	Administradora de shoppings de alto padrão; representa o setor imobiliário comercial com renda recorrente de aluguel.
BrasilAgro — Companhia Brasileira de Propriedades Agrícolas	AGRO3	Agronegócio — Terras e produção agrícola	Empresa de gestão de terras agrícolas; inclui exposição ao agronegócio, setor de peso estrutural na economia brasileira.
Totvs S.A.	TOTS3	Tecnologia — Software de gestão empresarial	Líder em software de gestão para empresas brasileiras; único representante do setor de tecnologia, com dinâmica de receita recorrente e baixa correlação com commodities.
Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo	SBSP3	Saneamento básico	Maior empresa de saneamento do país; preenche setor não representado na carteira, com receita regulada, perfil defensivo e histórico contínuo desde 2002.

3.3 Estimação dos Parâmetros Amostrais

A implementação empírica do modelo de Markowitz exige que os parâmetros teóricos $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sejam estimados a partir de séries históricas de preços. Essa transição do domínio teórico para o empírico envolve três decisões metodológicas — a medida de retorno adotada, o estimador de covariância e a janela temporal de estimação — cujas implicações se propagam diretamente para a qualidade dos pesos otimizados e para a validade das comparações realizadas no *backtest* do Capítulo 4.

A primeira decisão diz respeito à medida de variação de preços. Dado o preço de fechamento ajustado $P_{i,t}$ do ativo i no pregão t , adota-se o retorno logarítmico, definido como

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right). \quad (18)$$

A opção pelo retorno logarítmico, em detrimento do retorno aritmético simples, justifica-se por duas propriedades práticas relevantes neste contexto. A primeira é a aditividade temporal: o retorno acumulado em qualquer janela é obtido pela simples

soma dos retornos diários, o que simplifica a construção das séries no *backtest rolling*. A segunda é a estabilidade em séries longas, pois o retorno logarítmico evita as distorções de capitalização composta que se acumulam no retorno aritmético ao longo de horizontes mais extensos (HULL, 2018; GLASSERMAN, 2004). Os preços empregados são de fechamento ajustado por proventos e *splits*, condição necessária para que $r_{i,t}$ reflita a variação de riqueza efetiva do investidor, livre de descontinuidades artificiais.

Definida a medida de retorno, estimam-se os dois parâmetros que alimentam o problema de otimização. O vetor de retornos esperados μ é estimado pela média aritmética dos retornos logarítmicos ao longo da janela de T dias úteis,

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}, \quad (19)$$

enquanto a matriz de variância-covariância Σ é estimada pelo estimador amostral padrão,

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{r}_t - \hat{\mu})(\mathbf{r}_t - \hat{\mu})^\top. \quad (20)$$

Ambos os estimadores são não viesados e convergem para os valores populacionais à medida que T cresce. Em janelas de estimação curtas, contudo, o erro amostral não é negligenciável — sobretudo no vetor $\hat{\mu}$, cuja variância de estimação σ_i^2/T decresce lentamente com T (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009).

3.4 Metodologias Computacionais

3.4.1 Monte Carlo e fronteira eficiente

A implementação computacional da análise estática de portfólios — denominada aqui análise *in-sample* em contraposição ao *backtest rolling* do Capítulo 4 — compreende duas etapas sequenciais: a geração de portfólios aleatórios por simulação de Monte Carlo e a determinação analítica da fronteira eficiente por otimização numérica. Ambas operam sobre os parâmetros amostrais $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estimados conforme o procedimento descrito na seção 3.2, a partir de retornos logarítmicos diários anualizados pela convenção de 252 dias úteis da B3.

A simulação de Monte Carlo consiste na geração de $N = 20.000$ vetores de pesos aleatórios $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, amostrados de modo a se distribuírem uniformemente sobre o conjunto de carteiras admissíveis, satisfazendo por construção as restrições $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ e $w_i \geq 0 \ \forall i$, sem necessidade de qualquer pós-processamento de renormalização (GLASSERMAN, 2004). Para cada vetor amostrado, calculam-se o retorno esperado $\mu_p = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}$, a volatilidade anualizada $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}$ — forma quadrática introduzida na equação (5) da seção 2.1.4 — e o Índice de Sharpe definido na equação (12). O resultado é um conjunto de 20.000 pares (σ_p, μ_p) que representa uma amostra densa do conjunto viável de portfólios sem venda a descoberto, cuja representação gráfica no espaço risco-retorno constitui a nuvem de portfólios discutida na seção 4.1.1. A escolha do número de simulações $N = 20.000$ resulta de um compromisso entre cobertura do espaço e custo computacional: testes preliminares indicaram que, a partir desse patamar, a densidade da nuvem estabiliza visualmente e as estatísticas de ordem dos extremos da distribuição de Sharpe convergem.

A fronteira eficiente, por sua vez, é obtida pela resolução direta do programa quadrático paramétrico de Markowitz (1952) enunciado na seção 2.2.3. A abordagem adotada é a parametrização por retorno alvo: para cada valor μ^* em uma grade uniforme de 200 pontos no intervalo $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ — onde os extremos são determinados pelo menor e pelo maior retorno observado na nuvem de Monte Carlo —, resolve-se o problema:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \text{ sujeito a } \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu^*, \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, w_i \geq 0 \ \forall i \quad (21)$$

O solucionador numérico empregado é o algoritmo SLSQP (*Sequential Least Squares Programming*), implementado em `scipy.optimize.minimize` (SCIPY), adequado a problemas com restrições de igualdade e desigualdade não lineares e de baixa dimensionalidade (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Os 200 pares (σ_p^*, μ^*) resultantes, conectados em sequência, delimitam a fronteira eficiente no gráfico de dispersão. O PMVG — cujo papel metodológico central foi discutido nas seções 2.8 e 3.2 — é obtido como caso particular, removendo a restrição de retorno alvo e resolvendo exclusivamente com as restrições orçamentária e de não-negatividade, conforme a equação (9). O portfólio de máximo Índice de Sharpe é obtido de forma análoga, minimizando o negativo do índice definido na equação (12). Por fim, a CML é traçada a partir do portfólio de máximo Sharpe com inclinação $S_{\max}$

e intercepto em $R_f = 10,75\%$ a.a., conforme a equação (11) da seção 2.4.2. O portfólio $1/N$, cujas propriedades e motivação como *benchmark* foram estabelecidas na seção 2.6, é calculado trivialmente como $w_i = 1/n \ \forall i$ e posicionado no mesmo espaço gráfico para fins de comparação visual imediata, antecipando a análise desenvolvida no Capítulo 4.

3.4.2 Backtest rolling

O *backtest rolling* constitui o núcleo experimental deste trabalho: é o procedimento que transpõe as estratégias definidas teoricamente para o domínio dos dados realizados, permitindo avaliar seu desempenho fora da amostra de estimação. Sua estrutura repousa sobre uma separação amostral rigorosa. Em cada ciclo, os parâmetros são estimados exclusivamente sobre os T pregões que antecedem a data de rebalanceamento — a janela de estimação, ou *lookback* —, sem qualquer contaminação por dados do período subsequente; o portfólio assim obtido é mantido até o rebalanceamento seguinte, intervalo que constitui o período fora da amostra (*out-of-sample*). Essa separação entre o que estima e o que avalia é condição necessária para que as métricas do Capítulo 4 reflitam desempenho genuinamente preditivo, e não ajuste retrospectivo (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). Para investigar a sensibilidade dos resultados ao horizonte de estimação — questão motivada pela discussão sobre estabilidade paramétrica da seção 2.8 —, o experimento é replicado para múltiplos valores de T , cujo impacto é analisado na seção 4.3.1.

O rebalanceamento ocorre no primeiro pregão útil de cada mês. As datas são identificadas programaticamente agrupando os pregões disponíveis por período mensal e selecionando o primeiro elemento de cada grupo, procedimento que confere robustez ao calendário variável da B3 e dispensa qualquer ajuste manual. O capital inicial é normalizado em $C_0 = 1,0$ para ambas as estratégias, de modo que as trajetórias sejam diretamente comparáveis. Como o retorno de uma carteira é a combinação linear dos retornos individuais ponderados pelos pesos w , os retornos logarítmicos diários $r_{i,t}$ são previamente convertidos para a escala aritmética por $R_{i,t} = e^{r_{i,t}} - 1$, condição necessária para que a agregação por w seja válida. O capital acumulado ao final do K -ésimo período de rebalanceamento é então dado por

$$C_K = C_0 \cdot \prod_{k=1}^K \prod_{t \in [t_k, t_{k+1})} (1 + \mathbf{w}_k^T \mathbf{R}_t), \quad (22)$$

estrutura multiplicativa coerente com as definições de CAGR e Máximo Drawdown apresentadas na seção 2.5 (BACON, 2012).

Cabe, por fim, explicitar as hipóteses operacionais que delimitam o experimento. O *backtest* abstrai custos de transação, impostos e restrições de liquidez — simplificações padrão na literatura comparativa, que permitem isolar o efeito da regra de alocação sobre o desempenho (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). A ausência de custos é simétrica entre as estratégias: como o portfólio 1/N também é rebalanceado mensalmente para restaurar a equiponderação, o número esperado de transações por ciclo é comparável ao do PMVG, o que preserva a validade da comparação. A restrição de não-negatividade $w_i \geq 0 \quad \forall i$ permanece ativa em todos os ciclos, mantendo a carteira no regime *long-only*. O Ibovespa, quando presente nas visualizações do Capítulo 4, cumpre função exclusivamente referencial de contexto de mercado, conforme estabelecido na seção 2.7.2, não integrando a comparação primária entre as estratégias.

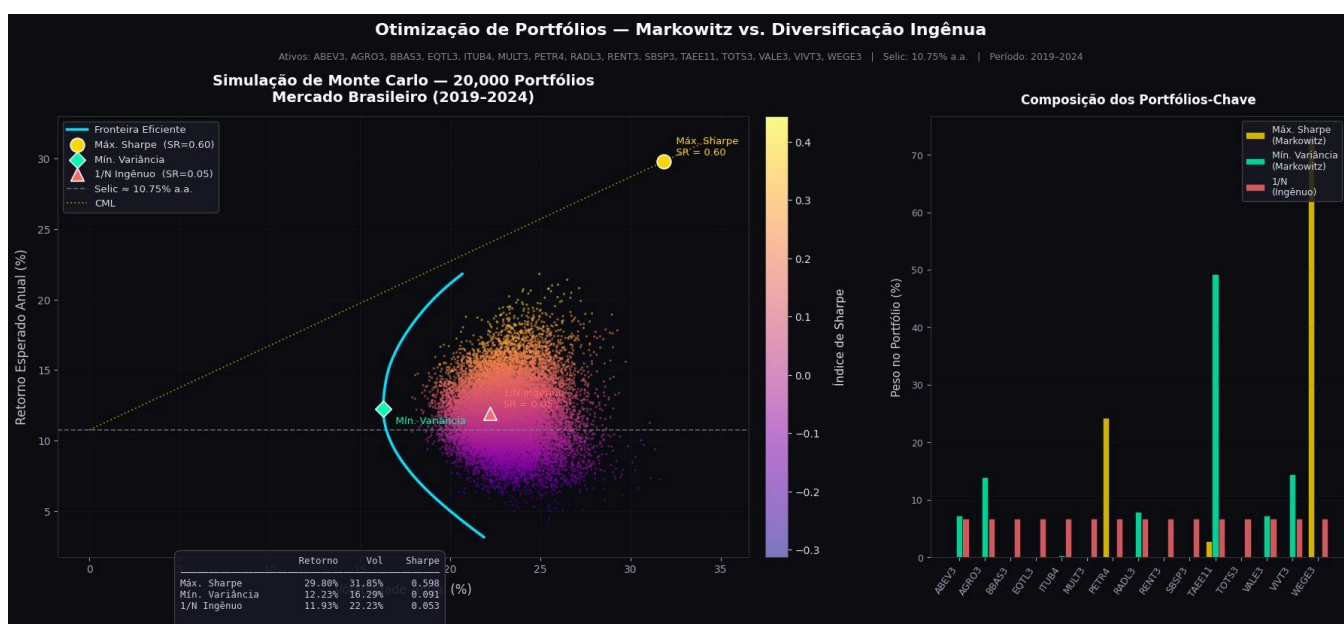
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta e discute os resultados empíricos obtidos pelas análises descritas no Capítulo 3. A exposição é organizada em quatro eixos: (i) análise estática da fronteira eficiente obtida por simulação de Monte Carlo, que estabelece o quadro conceitual da otimização e evidencia a distância geométrica entre portfólios aleatórios e soluções ótimas; (ii) desempenho comparativo do PMVG e da carteira 1/N em dois horizontes temporais distintos — janeiro de 2015 a dezembro de 2019 e janeiro de 2015 a dezembro de 2025 —, avaliado por meio de *backtest rolling* com rebalanceamento mensal; (iii) sensibilidade dos resultados à extensão da janela de estimação utilizada na construção da matriz de covariância amostral; e (iv) desempenho de diferentes perfis de investidor posicionados ao longo da fronteira eficiente. O Ibovespa é incluído como referência de mercado, sem função de *benchmark* direto, dada a diferença de universo e composição em relação à carteira analisada.

4.1 Simulação de Monte Carlo e Fronteira Eficiente

Antes de avaliar o desempenho dinâmico das estratégias via backtest *rolling*, apresenta-se a análise estática da fronteira eficiente obtida por meio da simulação de Monte Carlo descrita na Seção 3.4.1. Foram gerados 20.000 portfólios com pesos aleatórios amostrados da distribuição de uniforme, garantindo que os pesos satisfaçam as restrições $w_i \geq 0$ e $\sum w_i = 1$ —, e seus retornos esperados e volatilidades anualizados foram calculados com base nos parâmetros estimados para o período de janeiro de 2019 a dezembro de 2024. A Figura 4 apresenta a nuvem de portfólios simulados, colorida pelo Índice de Sharpe, sobreposta à fronteira eficiente calculada via otimização quadrática (SLSQP), com destaque para os portfólios de Máximo Sharpe, Mínima Variância e a carteira ingênua 1/N.

Figura 4 — Simulação de Monte Carlo: 20.000 portfólios vs. fronteira eficiente (2019–2024)



Fonte: elaboração própria.

O aspecto mais imediatamente notável da Figura 4 é a distância entre a nuvem de portfólios simulados e a fronteira eficiente. A grande maioria dos 20.000 portfólios concentra-se em uma região de volatilidade entre 20% e 30% a.a. e retorno esperado entre 8% e 15% a.a., ao passo que a fronteira eficiente estende-se desde o portfólio de Mínima Variância (volatilidade de 16,29% e retorno de 12,23%) até retornos superiores a 20% a.a. com volatilidade equivalente ou inferior à do centro da nuvem.

Essa separação visual não é um artefato da simulação, mas uma consequência geométrica rigorosa da estrutura do problema.

O conjunto de portfólios viáveis — definido pela restrição $1^T w = 1$ e $w \geq 0$ — constitui uma variedade de dimensão 14. A fronteira eficiente, por sua vez, é uma curva unidimensional parametrizada pelo retorno alvo. A probabilidade de que um portfólio amostrado uniformemente recaia sobre a fronteira é zero (GLASSERMAN, 2004). Em termos intuitivos, a fronteira eficiente ocupa uma fração negligenciável do espaço de soluções viáveis, de modo que mesmo um número elevado de amostras aleatórias não é capaz de aproximá-la de forma significativa. Esse resultado constitui, em si mesmo, uma justificativa empírica para a necessidade de otimização formal: a busca estocástica por portfólios eficientes é ineficaz precisamente porque o conjunto-alvo tem medida nula no espaço de busca.

A posição da carteira ingênua $1/N$ — localizada no interior da nuvem, com retorno esperado de 11,93%, volatilidade de 22,23% e Índice de Sharpe de 0,053 — ilustra a subotimalidade estática da equidistribuição. No espaço risco-retorno, a carteira $1/N$ situa-se consideravelmente abaixo da fronteira eficiente, evidenciando que a alocação igualitária distribui capital inclusive para ativos que deterioram a relação risco-retorno do portfólio. O portfólio de Mínima Variância, em contraste, posiciona-se sobre a fronteira com volatilidade de 16,29% — a menor alcançável sob as restrições impostas — e retorno de 12,23%, com Sharpe de 0,091. O portfólio de Máximo Sharpe, situado na tangência entre a CML e a fronteira, atinge retorno de 29,80% e volatilidade de 31,85%, com Sharpe de 0,598.

O painel de composição da Figura 4 evidencia a esparsidade das soluções ótimas. O portfólio de Máximo Sharpe concentra mais de 50% da alocação em WEGE3, refletindo o desempenho excepcional desse ativo no período de estimação — uma concentração que, embora ótima na amostra, é particularmente vulnerável ao risco de estimação fora da amostra (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). O portfólio de Mínima Variância distribui a alocação de forma mais equilibrada entre ativos de baixa covariância mútua — TAEE11, EQTL3, SBSP3 e ABEV3 —, padrão coerente com o observado no *backtest rolling* das seções subsequentes. A carteira $1/N$, por definição, aloca uniformemente 6,67% em cada ativo, ignorando qualquer informação sobre a estrutura de risco e retorno do mercado.

A análise estática da Figura 4 estabelece, portanto, o quadro conceitual para as seções seguintes: a fronteira eficiente e seus portfólios ótimos existem e são calculáveis, mas sua obtenção depende de estimativas paramétricas (μ e Σ) que são inerentemente ruidosas. A questão central que o restante deste capítulo investiga é se essa vantagem teórica se traduz em desempenho superior fora da amostra, quando as estimativas são atualizadas periodicamente em janelas *rolling*, ou se o erro de estimação anula os ganhos da otimização — hipótese que fundamenta a competitividade da regra 1/N documentada por DEMIGUEL, GARLAPPI e UPPAL (2009).

4.2 Desempenho Comparativo: Janelas Temporais

O primeiro eixo de análise confronta o desempenho das estratégias em dois horizontes: um período de cinco anos (janeiro de 2015 a dezembro de 2019) e um período estendido de onze anos (janeiro de 2015 a dezembro de 2025). A escolha desses horizontes é deliberada: o primeiro encerra-se imediatamente antes do choque de mercado provocado pela pandemia de COVID-19, permitindo avaliar as estratégias em um ciclo econômico completo sem a contaminação de um evento de cauda extrema; o segundo incorpora esse evento e seus desdobramentos, incluindo a aceleração inflacionária de 2021–2022, o ciclo de aperto monetário com a Selic atingindo 13,75% ao ano, e a volatilidade cambial de 2024–2025. As métricas consolidadas são apresentadas nas Tabelas 2 e 3; as Figuras 5 e 6 ilustram a evolução temporal completa.

Figura 5: Backtest PMVG vs. 1/N: período 2015–2019



Fonte: elaboração própria.

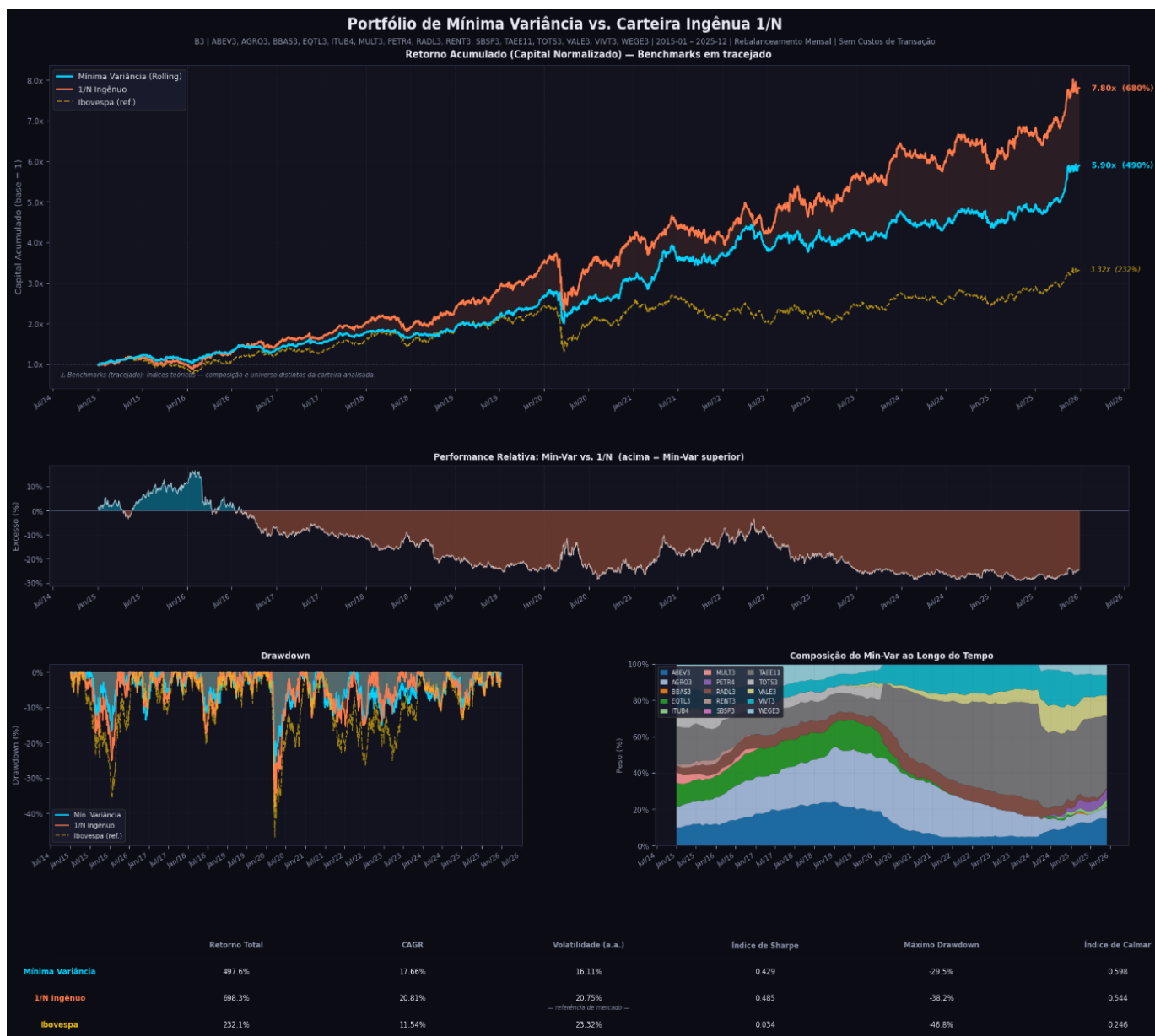
Tabela 2 — Métricas de desempenho: período janeiro/2015 – dezembro/2019

Métrica	PMVG	1/N	Ibovespa
Retorno Total	169,9%	259,1%	139,0%
CAGR	22,05%	29,25%	19,08%
Volatilidade (a.a.)	14,33%	19,19%	22,02%
Índice de Sharpe	0,788	0,964	0,578
Máximo Drawdown	-16,8%	-25,2%	-35,4%
Índice de Calmar	1,313	1,162	0,539

No horizonte de cinco anos, a carteira 1/N registrou retorno total de 259,1% (CAGR de 29,25%) contra 169,9% (CAGR de 22,05%) do PMVG, diferença de aproximadamente 89 pontos percentuais. À primeira vista, o resultado sugere evidência favorável à diversificação ingênua, em consonância com os achados de DEMIGUEL, GARLAPPI e UPPAL (2009). Contudo, a análise simplificada de retorno é insuficiente para qualificar o desempenho de um portfólio, na medida em que ignora o risco incorrido (SHARPE, 1966; ELTON et al., 2014).

O PMVG obteve volatilidade anualizada de 14,33%, substancialmente inferior aos 19,19% da carteira 1/N e aos 22,02% do Ibovespa. A diferença de 4,86 pontos percentuais em relação à estratégia ingênua confirma o cumprimento do objetivo formal do modelo — minimizar $\sigma^2_p = w^T \Sigma w$ — e se traduz em contenção expressiva de perdas: o Máximo Drawdown do PMVG atingiu -16,8%, contra -25,2% da carteira 1/N e -35,4% do Ibovespa. Em termos do Índice de Calmar — razão entre CAGR e valor absoluto do Máximo Drawdown (YOUNG, 1991) —, o PMVG alcança 1,313 contra 1,162 da carteira 1/N, invertendo a hierarquia observada no Índice de Sharpe (0,788 vs. 0,964). Essa inversão indica que o PMVG entrega retorno ajustado por risco de queda superior, o que se alinha à interpretação de que a minimização de variância reduz a assimetria negativa da distribuição de retornos (BACON, 2012).

Figura 6 — Backtest PMVG vs. 1/N: período 2015–2025



Fonte: elaboração própria.

Tabela 3 — Métricas de desempenho: período janeiro/2015 – dezembro/2025

Métrica	PMVG	1/N	Ibovespa
Retorno Total	497,6%	698,3%	232,1%
CAGR	17,66%	20,81%	11,54%
Volatilidade (a.a.)	16,11%	20,75%	23,32%

Métrica	PMVG	1/N	Ibovespa
Índice de Sharpe	0,429	0,485	0,034
Máximo Drawdown	-29,5%	-38,2%	-46,8%
Índice de Calmar	0,598	0,544	0,246

No horizonte estendido, a carteira 1/N manteve liderança em retorno absoluto — 698,3% contra 497,6% do PMVG —, diferença que se aprofunda em relação ao subperíodo anterior. Contudo, observa-se deterioração generalizada do Índice de Sharpe: de 0,788 para 0,429 no PMVG e de 0,964 para 0,485 na carteira 1/N. Essa contração reflete o impacto do ambiente de juros elevados no período 2021–2025: com a Selic substancialmente acima dos níveis de 2015–2019, o excesso de retorno sobre o ativo sem risco se contrai, penalizando o numerador do Índice de Sharpe (SHARPE, 1966). A vantagem do PMVG em termos de risco se mantém: volatilidade de 16,11% contra 20,75% da carteira 1/N e Máximo Drawdown de -29,5% contra -38,2%. O Índice de Calmar confirma a inversão: o PMVG (0,598) supera a carteira ingênua (0,544), evidenciando novamente a superioridade em retorno ajustado por risco de queda.

O painel de performance relativa da Figura 2 revela uma dinâmica temporal relevante: o PMVG apresentou superioridade sobre a carteira 1/N nos anos iniciais (aproximadamente 2015–2017), período de elevada volatilidade no mercado doméstico, e passou a registrar déficit crescente a partir de 2018. Essa reversão sugere que a vantagem da otimização de mínima variância é mais pronunciada em regimes de estresse, quando a estrutura de covariância apresenta maior dispersão e o modelo extrai ganhos de diversificação mais significativos (LEDOIT; WOLF, 2004). Em regimes de retorno elevado e volatilidade moderada, a equidistribuição captura de forma mais eficiente a alta dos ativos de maior beta, que o PMVG sistematicamente subpondera.

A comparação com o Ibovespa requer qualificação. Em ambos os horizontes, as duas estratégias superaram o índice em todas as métricas de risco ajustado, diferença que não deve ser interpretada como evidência de alfa genuíno. O Ibovespa é ponderado por liquidez e capitalização de mercado, com composição mais ampla e

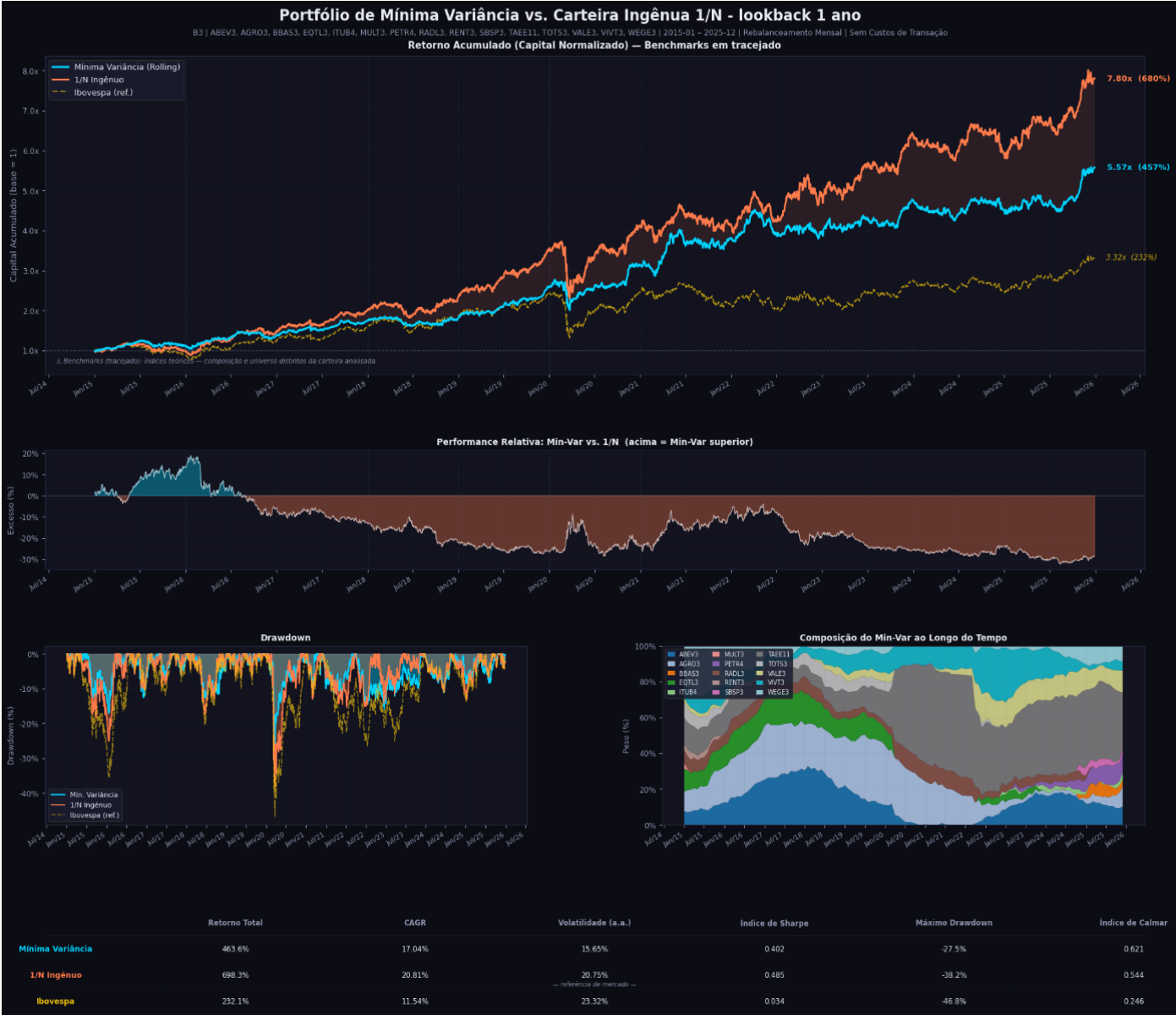
distinta do universo de 15 ativos analisados. Parte da superioridade observada decorre do *survivorship bias* implícito na seleção do universo: todos os 15 papéis mantiveram listagem contínua e liquidez ao longo de todo o período, condição que exclui empresas deslistadas ou que sofreram deterioração severa entre 2015 e 2025 (ELTON et al., 2014). Essa assimetria de seleção favorece estruturalmente ambas as carteiras e limita a generalização dos resultados.

4.3 Sensibilidade à Janela de Estimação

A janela de estimação (*lookback*) utilizada para construir a matriz de covariância amostral Σ constitui parâmetro central na implementação do PMVG *rolling*. Uma janela curta confere maior peso a observações recentes, permitindo que a carteira se adapte a mudanças de regime, mas ao custo de estimativas mais ruidosas; uma janela longa estabiliza as estimativas de covariância, porém pode incorporar informação obsoleta que não reflete o regime corrente. Esse *trade-off* entre viés e variância de estimação é um dos problemas centrais documentados na literatura de otimização de portfólios (LEDOIT; WOLF, 2004; DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009).

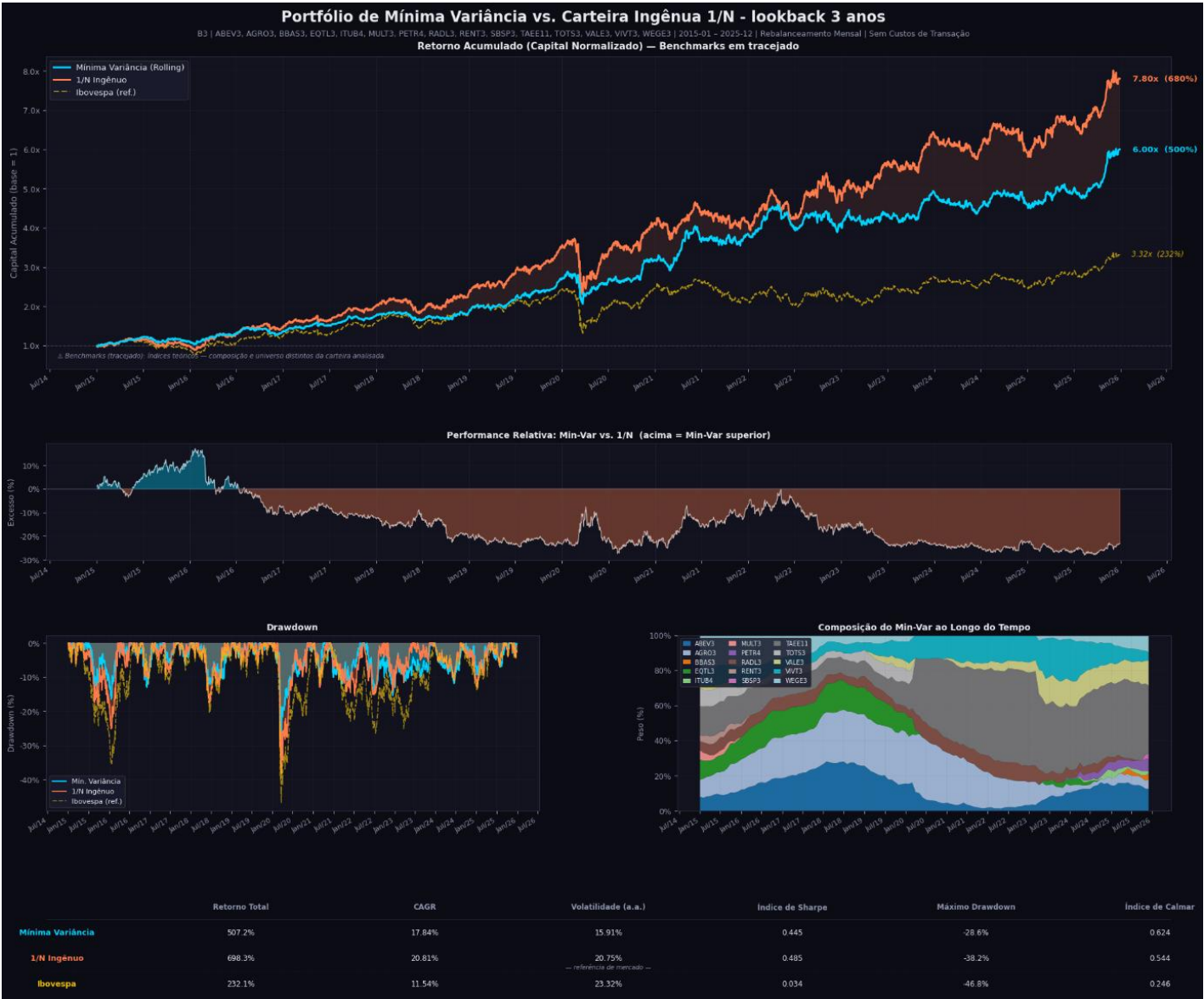
Para avaliar a sensibilidade dos resultados a esse parâmetro, o backtest foi executado com quatro janelas de estimação distintas — 1, 3, 5 e 10 anos (correspondendo a 252, 756, 1.260 e 2.520 dias úteis) —, mantendo-se todos os demais parâmetros fixos: rebalanceamento mensal, restrição *long-only*, Selic de 10,75% a.a. como taxa livre de risco e período de avaliação de janeiro de 2015 a dezembro de 2025. As Figuras 7 a 10 apresentam os painéis completos de cada configuração, e a Tabela 4 consolida as métricas do PMVG sob cada cenário. Os resultados da carteira 1/N e do Ibovespa permanecem invariantes, uma vez que independem de qualquer estimação paramétrica.

Figura 7 — Backtest PMVG com lookback de 1 ano (252 dias úteis)



Fonte: elaboração própria.

Figura 8 — Backtest PMVG com lookback de 3 anos (756 dias úteis)



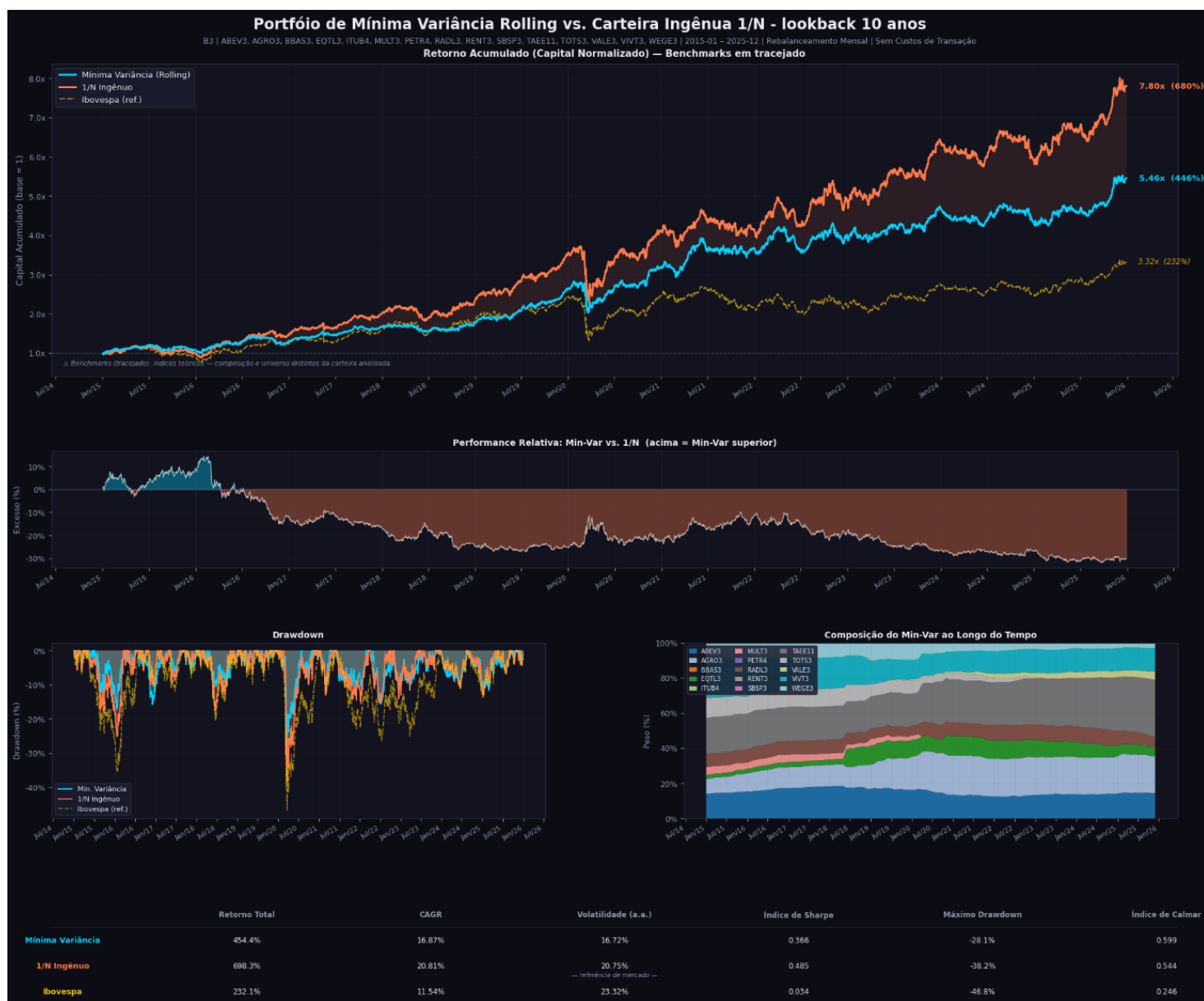
Fonte: elaboração própria.

Figura 9 — Backtest PMVG com lookback de 5 anos (1.260 dias úteis)



Fonte: elaboração própria.

Figura 10 — Backtest PMVG com lookback de 10 anos (2.520 dias úteis)



Fonte: elaboração própria.

Tabela 4 — Métricas do PMVG por janela de estimação (período 2015–2025)

Lookback	Ret. Total	CAGR	Vol. (a.a.)	Sharpe	Máx. DD	Calmar
1 ano (252)	463,6%	17,04%	15,65%	0,402	-27,5%	0,621
3 anos (756)	507,2%	17,84%	15,91%	0,445	-28,6%	0,624
5 anos (1.260)	487,6%	17,48%	16,16%	0,417	-29,5%	0,592
10 anos (2.520)	454,4%	16,87%	16,72%	0,366	-28,1%	0,599

Os resultados revelam uma relação não monotônica entre extensão da janela de estimação e desempenho do PMVG. A janela de 3 anos produziu os melhores resultados globais: CAGR de 17,84%, Índice de Sharpe de 0,445 e Índice de Calmar de 0,624 — os valores mais elevados entre todas as configurações testadas. A janela de 1 ano, embora tenha registrado a menor volatilidade (15,65%) e o menor Máximo Drawdown (−27,5%), apresentou retorno total inferior (463,6% vs. 507,2%) e Sharpe mais baixo (0,402), resultado consistente com estimativas de covariância mais ruidosas que induzem realocações excessivas e não necessariamente produtivas. Em contraste, a janela de 10 anos produziu os piores resultados em quase todas as dimensões: menor CAGR (16,87%), maior volatilidade (16,72%) e menor Sharpe (0,366).

A deterioração progressiva do desempenho a partir da janela de 3 anos admite interpretação à luz da teoria de estimação. Janelas muito longas incorporam dados de regimes de mercado que podem não ser mais representativos da estrutura de covariância corrente. No caso brasileiro, a inclusão de dados do período 2005–2014 — marcado por ciclos macroeconômicos qualitativamente distintos dos de 2015–2025 em termos de taxa de juros, regime cambial e composição setorial do mercado — pode introduzir viés na estimativa de σ , conduzindo a alocações subótimas. Esse resultado é consistente com a tese de LEDOIT e WOLF (2004) de que a qualidade da estimação depende criticamente da razão entre o número de observações e o número de ativos (T/N): uma janela de 10 anos provê $T \approx 2.520$ observações para $N = 15$ ativos, razão suficientemente alta para que o estimador amostral convirja, mas a convergência é para uma média de regimes que pode não representar fielmente nenhum regime individual.

A janela de 1 ano, por sua vez, registrou a menor volatilidade e o menor *drawdown* entre todas as configurações, indicando maior reatividade a mudanças de regime. Contudo, essa reatividade implica maior giro de carteira — os gráficos de composição da Figura 7 exibem variações mais abruptas nos pesos entre rebalanceamentos consecutivos em comparação às janelas mais longas (Figuras 8 a 10) —, o que em cenários com custos de transação penalizaria os retornos líquidos de forma mais severa. A janela de 3 anos parece constituir, neste contexto, um compromisso favorável entre adaptabilidade e estabilidade de estimação — achado

que, embora específico para este universo e período, é coerente com a faixa de 2 a 5 anos frequentemente adotada na prática de gestão quantitativa (ELTON et al., 2014).

4.4 Perfis de Investidor na Fronteira Eficiente

O terceiro eixo de análise avalia o desempenho de quatro perfis de investidor posicionados ao longo da fronteira eficiente: Conservador (coincidente com o PMVG), Moderado, Agressivo e Super Agressivo (coincidente com o portfólio de máximo retorno). Os perfis se distinguem pela volatilidade e risco sistemático: cada um representa um ponto distinto na curva de Markowitz, definido por interpolação linear equidistante entre os extremos (PMVG e máximo retorno). Especificamente, os pesos de cada perfil são calculados como:

$$\mathbf{w}_{\text{perfil}} = (1 - \alpha)\mathbf{w}_{\text{PMVG}} + \alpha\mathbf{w}_{\text{maxretorno}} \quad (23)$$

onde $\alpha \in \{0; 0,333; 0,667; 1\}$ para Conservador, Moderado, Agressivo e Super Agressivo respectivamente. Desta forma, o perfil Conservador apresenta menor volatilidade esperada, enquanto o perfil Super Agressivo maximiza o retorno esperado aceitando maior volatilidade. Os pesos de cada perfil são reotimizados a cada rebalanceamento mensal via resolução independente do problema de Markowitz, utilizando janela de estimação de 252 dias úteis. A Figura 11 apresenta os painéis de retorno acumulado, performance relativa à carteira 1/N, drawdown por perfil e gráfico radar comparativo; a Tabela 5 consolida as métricas do período de janeiro de 2016 a dezembro de 2024.

Figura 11 — Desempenho por perfil de investidor na fronteira eficiente vs. carteira 1/N (2016–2024)



Fonte: elaboração própria.

Tabela 5 — Métricas de desempenho por perfil de investidor (janeiro/2016 – dezembro/2024)

Perfil	Ret. Total	CAGR	Vol. (a.a.)	Sharpe	Máx. DD	Calmar
Conservador (PMVG)	159,8%	12,98%	15,77%	0,206	-30,3%	0,429
Moderado	156,2%	12,78%	17,50%	0,192	-29,1%	0,439

Perfil	Ret. Total	CAGR	Vol. (a.a.)	Sharpe	Máx. DD	Calmar
Agressivo	140,7%	11,89%	21,48%	0,162	-38,9%	0,305
Super Agressivo (Máx. Ret.)	334,7%	20,67%	37,98%	0,419	-51,7%	0,400
Ingênuo (1/N)	138,5%	11,75%	21,18%	0,150	-42,1%	0,279

Os resultados revelam uma segmentação nítida entre os perfis ao longo de duas dimensões. Nos perfis Conservador, Moderado e Agressivo — que ocupam a porção inferior e intermediária da fronteira eficiente —, observa-se um padrão de retornos absolutos decrescentes à medida que o nível de risco teórico aumenta: o Conservador obteve CAGR de 12,98%, o Moderado 12,78% e o Agressivo 11,89%. Esse resultado, aparentemente contraintuitivo, reflete a inversão entre retorno esperado antes e pós-análise: a otimização posiciona perfis mais agressivos em direção a portfólios de maior retorno esperado com base na média amostral $\hat{\mu}$, mas os erros de estimação em $\hat{\mu}$ são sistematicamente maiores do que em Σ (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009; LEDOIT; WOLF, 2004). Em consequência, os portfólios que dependem mais intensamente da estimativa de retorno esperado — os perfis Moderado e Agressivo — são os mais suscetíveis ao risco de estimação, e seus retornos realizados fora da amostra refletem essa vulnerabilidade.

O perfil Super Agressivo constitui exceção aparente a esse padrão, com retorno total de 334,7% (CAGR de 20,67%), substancialmente superior aos demais perfis otimizados. Contudo, esse desempenho é obtido ao custo de volatilidade de 37,98% e Máximo Drawdown de -51,7% — valores que indicam exposição a risco extremo. O Índice de Sharpe do Super Agressivo (0,419) é o mais elevado entre todos os perfis, incluindo o Conservador (0,206), resultado que deve ser interpretado com cautela: a concentração em ativos de altíssimo retorno e alta volatilidade pode gerar Sharpe artificialmente inflado em períodos em que esses ativos específicos se valorizaram de forma excepcional, sem que isso constitua evidência de eficiência estrutural. O Máximo Drawdown de -51,7% — mais do que o dobro do registrado pelo Conservador (-30,3%) — torna essa estratégia inadequada para investidores com restrições de perda máxima.

A comparação entre o perfil Agressivo e a carteira 1/N é particularmente reveladora. Os dois registraram desempenho notavelmente semelhante: retorno total de 140,7% vs. 138,5%, CAGR de 11,89% vs. 11,75%, e volatilidade de 21,48% vs. 21,18%, respectivamente. Essa convergência empírica entre uma estratégia otimizada e a heurística de equidistribuição constitui evidência direta a favor da tese central de DEMIGUEL, GARLAPPI e UPPAL (2009): quando o erro de estimação é suficientemente elevado — como ocorre nos perfis que dependem da estimação de retornos esperados —, a otimização não produz ganhos significativos sobre a regra 1/N fora da amostra. A carteira 1/N, contudo, apresentou Máximo Drawdown mais severo (−42,1% contra −38,9% do Agressivo), indicando que a otimização ainda oferece alguma proteção marginal em episódios de estresse.

O gráfico radar da Figura 7 sintetiza o *trade-off* multidimensional entre os perfis. Nenhuma estratégia domina as demais em todas as dimensões simultaneamente: o Conservador prevalece em volatilidade e drawdown; o Super Agressivo prevalece em CAGR e Sharpe; a carteira 1/N apresenta o pior desempenho ajustado por risco entre todas as estratégias. Essa ausência de dominância estocástica reforça a conclusão de que a escolha ótima de portfólio é condicionada à função de utilidade do investidor — resultado coerente com a formulação original de MARKOWITZ (1952), na qual a fronteira eficiente não prescreve um único portfólio ótimo, mas um conjunto de soluções eficientes entre risco e retorno.

4.5 Dinâmica da Composição e Propriedades Estruturais

Os gráficos de composição empilhada presentes nas Figuras 2 a 7 permitem identificar duas propriedades estruturais do PMVG que permeiam todos os cenários analisados: a esparsidade da carteira ótima e a instabilidade temporal dos pesos.

Quanto à esparsidade, ativos como VALE3, PETR4 e RENT3 receberam pesos nulos ou marginais na maior parte das janelas de estimação, em ambos os horizontes e sob todos os *lookbacks* testados. Esse resultado não decorre de má performance intrínseca desses papéis, mas de sua estrutura de covariância com o restante da carteira: ativos com elevada correlação com os demais componentes e volatilidade individual alta são sistematicamente excluídos pela otimização *long-only*, pois sua inclusão aumentaria σ^2_p sem compensação covariacional suficiente (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). Em contrapartida, ativos dos setores elétrico (TAEE11,

EQTL3, SBSP3) e de consumo defensivo (ABEV3) concentraram sistematicamente as maiores alocações, refletindo suas menores covariâncias com o mercado.

Essa exclusão tem implicação direta sobre a comparação com a carteira 1/N: ao ponderar igualmente VALE3 e PETR4, a estratégia ingênua captura os retornos de ativos cíclicos que o PMVG abdica. No período 2015–2025, os ciclos de valorização de *commodities* beneficiaram esses ativos de forma expressiva, explicando parcialmente o diferencial de retorno absoluto entre as estratégias. Trata-se de um *trade-off* estrutural entre contenção de risco de cauda e captura de prêmio cíclico, cujo resultado líquido varia conforme o regime de mercado dominante.

Quanto à instabilidade dos pesos, a alternância de protagonismo entre TAE11, EQTL3 e SBSP3 ao longo das janelas de estimação ilustra a sensibilidade da solução quadrática aos autovalores de menor magnitude da matriz de covariância (LEDOIT; WOLF, 2004). Os gráficos de composição da Figura 4 (*lookback* de 1 ano) exibem variações mais abruptas do que os da Figura 7 (*lookback* de 10 anos), confirmando que janelas curtas produzem estimativas mais ruidosas e maior rotatividade de carteiras. Em aplicações com custos de transação, essa instabilidade penalizaria o PMVG de forma assimétrica em relação à carteira 1/N, cuja rotatividade é zero por construção. A quantificação desse impacto constitui limitação do presente trabalho e direção relevante para estudos futuros.

4.6 Síntese dos Resultados

Os resultados empíricos permitem delinear quatro conclusões principais. Primeira: a carteira 1/N dominou o PMVG em retorno absoluto e em Índice de Sharpe em todos os horizontes e configurações de *lookback* testados. Segunda: o PMVG cumpriu consistentemente seu objetivo de minimização de risco, mantendo a menor volatilidade e o menor Máximo Drawdown entre as estratégias em todos os cenários, e superando a carteira 1/N no Índice de Calmar em ambos os horizontes temporais — resultado que reposiciona a avaliação quando o critério de desempenho privilegia a contenção de perdas de cauda. Terceira: a sensibilidade à janela de estimação revelou uma relação não monotônica, com a janela de 3 anos produzindo os melhores resultados e a de 10 anos os piores, evidenciando que o parâmetro de *lookback* constitui um hiperparâmetro crítico da implementação cuja escolha afeta materialmente o desempenho fora da amostra. Quarta: a análise por perfis de

investidor demonstrou que os perfis intermediários da fronteira (Moderado e Agressivo) não produziram ganhos sobre a carteira 1/N, convergindo para desempenho equivalente devido ao acúmulo de erro de estimação em $\hat{\mu}$.

Esse conjunto de achados é consistente com as previsões teóricas de DEMIGUEL, GARLAPPI e UPPAL (2009). Os autores demonstram formalmente que, para que um portfólio otimizado supere a regra 1/N fora da amostra em termos de Índice de Sharpe, o comprimento da janela de estimação deve ser da ordem de centenas a milhares de meses — valores empiricamente inviáveis para carteiras com dezenas de ativos. No presente estudo, mesmo a configuração de *lookback* mais longa (10 anos, equivalente a 120 meses) não foi suficiente para que o PMVG igualasse o Sharpe da carteira ingênua, resultado que confirma quantitativamente a previsão dos autores no contexto específico do mercado acionário brasileiro. A convergência dos perfis intermediários para desempenho equivalente ao 1/N reforça adicionalmente a tese central do estudo: o erro de estimação nos parâmetros — especialmente no vetor de retornos esperados μ , cuja estimação a partir de retornos históricos é reconhecidamente imprecisa (MERTON, 1980) — anula sistematicamente o ganho teórico da otimização em amostras finitas. A carteira 1/N, ao não depender de nenhum parâmetro estimado, é imune a esse custo por construção.

Contudo, os resultados do presente trabalho acrescentam uma dimensão não explorada por DEMIGUEL, GARLAPPI e UPPAL (2009): a superioridade do PMVG no Índice de Calmar em ambos os horizontes temporais indica que, embora a otimização não gere excesso de retorno ajustado por risco total, ela agrega valor mensurável na contenção de perdas de cauda — propriedade relevante para investidores cuja função de utilidade penaliza assimetricamente perdas extremas. Esse achado sugere que a conclusão de que a regra 1/N domina a otimização é condicionada à métrica de avaliação adotada, e que a incorporação de medidas de risco de queda pode alterar a hierarquia entre as estratégias.

5. CONCLUSÃO

A questão central que motivou este trabalho foi investigar em que dimensões de desempenho o Portfólio de Mínima Variância Global (PMVG), obtido por otimização formal de Markowitz com reestimação dinâmica de parâmetros, é capaz de superar a alocação ingênua 1/N no mercado de ações brasileiro. Os resultados empíricos, consolidados no Capítulo 4, permitem oferecer resposta matizada: a hierarquia entre as estratégias é sensível ao critério de avaliação adotado. Quando o desempenho é mensurado pelo Índice de Sharpe — normalização de excesso de retorno por volatilidade total simétrica — a carteira 1/N domina consistentemente em ambos os horizontes temporais estudados. No período 2015–2019, o 1/N alcançou Sharpe de 0,964 contra 0,788 do PMVG; no período estendido 2015–2025, a vantagem foi preservada (0,485 versus 0,429). Esse resultado alinha-se com as previsões teóricas de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), confirmando em contexto brasileiro — com volatilidade elevada, concentração setorial, taxa de juros estruturalmente alta e exposição a choques macroeconômicos recorrentes — a tese central de que o erro de estimação do vetor de retornos esperados μ anula sistematicamente os ganhos teóricos da otimização de média-variância fora da amostra. A sensibilidade a variações na janela de estimação (*lookback*) revelou uma relação não-monotônica com desempenho: a janela de 1 ano produziu a menor volatilidade e drawdown (15,65% e -27,5%), mas desempenho agregado inferior; a janela de 3 anos gerou os melhores resultados globais (CAGR de 17,84%, Sharpe de 0,445, Calmar de 0,624); janelas de 5 e 10 anos degradaram progressivamente o desempenho. Esse padrão é consistente com a tese de Ledoit e Wolf (2004) de que a qualidade da estimação depende do trade-off entre variância (reduzida por janelas longas) e viés (aumentado quando se incorporam dados de regimes macroeconômicos obsoletos). A análise de perfis de investidor intermediários demonstrou que portfólios cuja composição depende de estimativas de retorno esperado — perfis Moderado e Agressivo — convergiram para desempenho equivalente ao 1/N, um resultado que fornece validação empírica adicional à hipótese de que o fator limitante é o erro de estimação em μ , não em Σ .

Contudo, quando a dimensão avaliativa se desloca para o Índice de Calmar — que normaliza CAGR pelo máximo *drawdown* histórico, enfatizando contenção de perdas de cauda — a hierarquia se inverte. No período 2015–2019, o PMVG registrou

Calmar de 1,313 contra 1,162 do 1/N; no período 2015–2025, manteve vantagem com Calmar de 0,598 versus 0,544. Adicionalmente, o PMVG consistentemente apresentou volatilidade menor (16,11% contra 20,75% em 2015–2025) e máximo drawdown menos severo (–29,5% contra –38,2%), diferenças que se propagam para todas as configurações de janela de estimação testadas. Esse achado constitui contribuição não explorada por DeMiguel et al. (2009) e adiciona dimensão relevante ao debate sobre aplicabilidade de otimização formal de carteiras. Embora o modelo de Markowitz não supere a heurística 1/N quando o critério é retorno ajustado por volatilidade simétrica, oferece proteção mensurável contra perdas extremas — propriedade de valor inegável para fundos conservadores, fundos de pensão de benefício definido, gestores com mandatos de risco restritivo, ou investidores com aversão severa a perdas. A magnitude da vantagem — redução de 4,86 pontos percentuais em volatilidade e aproximadamente 8,7 pontos percentuais em máximo drawdown no período 2015–2025 — não é trivial do ponto de vista operacional. Um fundo que evita perdas de cauda da ordem de 8–10 pontos percentuais a cada ciclo de mercado adverso pode justificar investimento em infraestrutura de otimização, mesmo que isso implique sacrifício de retorno absoluto de ~3–4 pontos percentuais anualizados. A questão prática torna-se, portanto, dependência de função de utilidade do investidor: se o critério é maximizar Sharpe sob restrição de variância simétrica, o 1/N é difícil de superar; se o critério enfatiza contenção de perdas de cauda, o PMVG oferece valor mensurável.

O presente trabalho comporta limitações que devem ser explicitadas. Primeira: a ausência de contabilização de custos de transação. O backtest assume rebalanceamento mensal sem atrito, hipótese padrão na literatura comparativa (DeMiguel et al. 2009, Ledoit & Wolf 2004) mas não representativa de condições reais. O PMVG exibiu instabilidade temporal pronunciada de pesos (Figura 4, Seção 5.5), o que em um cenário com custos penalizaria essa estratégia de forma assimétrica em relação ao 1/N, cuja composição é trivial de manter. A quantificação desse impacto — tipicamente custos de corretagem na ordem de 0,01–0,05% por transação em mercados desenvolvidos, potencialmente maiores em mercados emergentes — é identificada como extensão crítica de pesquisas futuras. Segunda: o período analisado (2015–2025) é específico em suas características macroeconômicas. Os anos 2015–2017 foram marcados por alta volatilidade e stress cambial que favoreceram

estratégias de minimização de variância; 2018–2025 foram períodos de retornos elevados em ativos cíclicos (commodities, small caps) que beneficiaram a alocação igualitária. Resultados podem não ser generalizáveis a períodos alternativos ou a outros ciclos econômicos. Terceira: o universo de 15 ativos é restrito e concentrado em setores específicos da B3 (financeiro, commodities, utilities). Universos alternativos (small caps, ações defensivas, internacionais) podem exibir estruturas de covariância distintas e, conseqüentemente, hierarquias diferentes entre as estratégias. Quarta: a implementação adota o estimador amostral padrão para a matriz de covariância, sem aplicação de técnicas de regularização. Essas técnicas, documentadas na literatura como redutoras de erro de estimação (Ledoit & Wolf, 2004), poderiam alterar a competitividade relativa do PMVG.

Diante dessas limitações, sugerem-se direções para pesquisas futuras. A incorporação de custos de transação — tanto fixos (comissões de corretagem) quanto variáveis (spread de bid-ask, impacto de mercado em grandes posições) — permitirá avaliar se a vantagem do PMVG em Calmar persiste sob condições operacionais realistas. A aplicação de estimadores de contração (Ledoit-Wolf, 2004) ao PMVG pode reduzir erro de estimação em Σ e potencialmente melhorar desempenho fora da amostra, tornando a comparação com $1/N$ menos assimétrica. A extensão a universos alternativos (ações do Ibovespa completo, ativos internacionais, diferentes períodos históricos) oferecerá robustez maior às conclusões sobre generalização. A investigação de rebalanceamentos não-mensais (trimestral, semestral) pode reduzir custos e instabilidade sem sacrificar adaptabilidade a mudanças de regime. A comparação com estratégias intermediárias (ex., portfólio de máximo Sharpe, mínima variância com upper bound em pesos) pode isolar componentes específicos de value creation. Por fim, a incorporação de análise de regime — distinguindo períodos de crise sistêmica de períodos de mercado normal — pode qualificar em que contextos cada estratégia tem maior viabilidade. Em síntese, este trabalho confirma em contexto brasileiro a dificuldade documentada internacionalmente em superar a regra $1/N$ em termos de retorno ajustado por risco total (Sharpe), validando previsões teóricas de DeMiguel et al. (2009) sobre supremacia do erro de estimação. Contudo, adiciona evidência relevante de que quando o risco de queda é o critério central — métrica frequentemente mais relevante para gestores e investidores reais — o PMVG oferece proteção mensurável. Essa dualidade sugere que a questão não é "qual estratégia

domina universalmente?", mas "qual critério de eficiência alinha-se melhor com objetivos específicos do investidor?". Para investidores que priorizam contenção de perdas extremas, a otimização de Markowitz permanece relevante e justifica investimento em infraestrutura necessária; para aqueles cujo mandato é máximo retorno ajustado por volatilidade simétrica sob restrições moderadas de complexidade operacional, a diversificação ingênua oferece alternativa robusta e simples.

REFERÊNCIAS

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Série histórica da taxa Selic: meta para a taxa média de financiamentos com títulos federais. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>. Acesso em: 10 jun. 2026.

B3 — BRASIL, BOLSA, BALCÃO. *Metodologia do Ibovespa e do IBrX-50*. São Paulo: B3, 2024. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/. Acesso em: 10 jun. 2026.

BACON, Carl R. *Practical risk-adjusted performance measurement*. Chichester: John Wiley & Sons, 2012.

BEST, Michael J.; GRAUER, Robert R. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *The Review of Financial Studies*, v. 4, n. 2, p. 315-342, 1991.

BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. *Investimentos*. 10. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven. *Convex optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

BROWN, Roger J. *Tier II Real Estate*. University Park: The Pennsylvania State University, 2005. Disponível em: <http://www2.smeal.psu.edu/courses/rest301.brown/home.html>. Acesso em: 23 mar. 2026..

CAMPBELL, John Y.; LO, Andrew W.; MACKINLAY, A. Craig. *The econometrics of financial markets*. Princeton: Princeton University Press, 1997.

CONT, Rama. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, v. 1, n. 2, p. 223-236, 2001.

DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, v. 22, n. 5, p. 1915-1953, 2009.

ELTON, Edwin J.; GRUBER, Martin J.; BROWN, Stephen J.; GOETZMANN, William N. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 9. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

ELTON, Edwin J.; GRUBER, Martin J.; BROWN, Stephen J.; GOETZMANN, William N. *Modern portfolio theory and investment analysis*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017.

GLASSERMAN, Paul. *Monte Carlo methods in financial engineering*. New York: Springer, 2004.

HARVEY, Campbell R.; LIU, Yan; ZHU, Heqing. ... and the cross-section of expected returns. *The Review of Financial Studies*, v. 29, n. 1, p. 5-68, 2016.

HULL, John C. *Options, futures, and other derivatives*. 10. ed. New York: Pearson, 2018.

- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, v. 30, n. 4, p. 110-119, 2004.
- LINTNER, John. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, v. 47, n. 1, p. 13-37, 1965.
- LUENBERGER, David G. *Investment science*. New York: Oxford University Press, 1998.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MARKOWITZ, Harry. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New Haven: Yale University Press, 1959.
- MERTON, Robert C. On estimating the expected return on the market: an exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, v. 8, n. 4, p. 323-361, 1980.
- NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen J. *Numerical optimization*. 2. ed. New York: Springer, 2006.
- ROSS, Stephen A.; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F. *Administração financeira: corporate finance*. São Paulo: Atlas, 2003.
- ROSS, Stephen A.; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F. *Corporate finance*. 10. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2013.
- SCHOLES, Myron; WILLIAMS, Joseph. Estimating betas from nonsynchronous data. *Journal of Financial Economics*, v. 5, n. 3, p. 309-327, 1977.
- SCIPY. `scipy.optimize.minimize`. Algoritmo SLSQP para otimização restrita. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>. Acesso em: 10 jun. de 2026.
- SHARPE, William F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.
- SHARPE, William F. Mutual fund performance. *The Journal of Business*, v. 39, n. 1, p. 119-138, 1966.
- YAHOO FINANCE. `yfinance`. Pacote Python para coleta de dados financeiros. Disponível em: <https://finance.yahoo.com>. Acesso em: 10 jun. de 2026.
- YOUNG, Terry W. Calmar ratio: a smoother tool. *Futures*, v. 20, n. 1, p. 40, 1991.

APÊNDICE A

Código-fonte: Simulação de Monte Carlo e Fronteira Eficiente

```
#Otimização de Portfólios no Mercado Brasileiro
#Análise de Robustez do Modelo de Markowitz via Simulação de Monte Carlo

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.lines import Line2D
import yfinance as yf
from scipy.optimize import minimize
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")

#Parâmetros gerais
TICKERS_BR = [
    "BBAS3.SA", "ITUB4.SA", "EQTL3.SA", "TAE11.SA",
    "PETR4.SA", "VALE3.SA", "ABEV3.SA", "WEGE3.SA",
    "RADL3.SA", "VIVT3.SA", "RENT3.SA",
    "MULT3.SA", "AGRO3.SA", "TOTS3.SA", "SBSP3.SA"
]
LABELS = [t.replace(".SA", "") for t in TICKERS_BR]
START_DATE = "2019-01-01"
END_DATE = "2024-12-31"
N_PORTFOLIOS = 20_000
RISK_FREE = 0.1075
TRADING_DAYS = 252

#Download e preparação dos dados
raw = yf.download(TICKERS_BR, start=START_DATE, end=END_DATE,
                  auto_adjust=True, progress=False) ["Close"]
raw.dropna(axis=1, how="all", inplace=True)
available = raw.columns.tolist()
labels_available = [t.replace(".SA", "") for t in available]
n_assets = len(available)

returns = np.log(raw / raw.shift(1)).dropna()
mu = returns.mean() * TRADING_DAYS
cov = returns.cov() * TRADING_DAYS

#Simulação de Monte Carlo
np.random.seed(42)
port_returns = np.zeros(N_PORTFOLIOS)
port_vols = np.zeros(N_PORTFOLIOS)
port_sharpe = np.zeros(N_PORTFOLIOS)
port_weights = np.zeros((N_PORTFOLIOS, n_assets))

for i in range(N_PORTFOLIOS):
    w = np.random.dirichlet(np.ones(n_assets))
    r = w @ mu.values
    v = np.sqrt(w @ cov.values @ w)
    port_weights[i] = w
    port_returns[i] = r
    port_vols[i] = v
    port_sharpe[i] = (r - RISK_FREE) / v

#Fronteira eficiente via SLSQP
def portfolio_vol(w, cov_matrix):
    return np.sqrt(w @ cov_matrix @ w)

def portfolio_ret(w, mu_vec):
    return w @ mu_vec

def neg_sharpe(w, mu_vec, cov_matrix, rf):
```



```

        return -(portfolio_ret(w, mu_vec) - rf) / portfolio_vol(w, cov_matrix)

constraints = {"type": "eq", "fun": lambda w: np.sum(w) - 1}
bounds      = tuple((0, 1) for _ in range(n_assets))
w0          = np.ones(n_assets) / n_assets

res_sharpe = minimize(neg_sharpe, w0,
                      args=(mu.values, cov.values, RISK_FREE),
                      method="SLSQP", bounds=bounds, constraints=constraints)
w_sharpe = res_sharpe.x
r_sharpe = portfolio_ret(w_sharpe, mu.values)
v_sharpe = portfolio_vol(w_sharpe, cov.values)
s_sharpe = (r_sharpe - RISK_FREE) / v_sharpe

res_minvar = minimize(portfolio_vol, w0, args=(cov.values,),
                      method="SLSQP", bounds=bounds, constraints=constraints)
w_minvar = res_minvar.x
r_minvar = portfolio_ret(w_minvar, mu.values)
v_minvar = portfolio_vol(w_minvar, cov.values)

target_rets = np.linspace(port_returns.min(), port_returns.max(), 200)
ef_vols     = []
for target in target_rets:
    cons = [
        {"type": "eq", "fun": lambda w: np.sum(w) - 1},
        {"type": "eq", "fun": lambda w, t=target: portfolio_ret(w, mu.values) - t}
    ]
    res = minimize(portfolio_vol, w0, args=(cov.values,),
                  method="SLSQP", bounds=bounds, constraints=cons,
                  options={"ftol": 1e-12, "maxiter": 1000})
    ef_vols.append(res.fun if res.success else np.nan)
ef_vols = np.array(ef_vols)

#Portfólio 1/N
w_naive = np.ones(n_assets) / n_assets
r_naive = portfolio_ret(w_naive, mu.values)
v_naive = portfolio_vol(w_naive, cov.values)
s_naive = (r_naive - RISK_FREE) / v_naive

#Gráfico
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(18, 9), facecolor="#0d0d14",
                        gridspec_kw={"width_ratios": [2, 1]})

ax = axes[0]
ax.set_facecolor("#0d0d14")

scatter = ax.scatter(port_vols * 100, port_returns * 100,
                    c=port_sharpe, cmap="plasma", alpha=0.55,
                    s=5, linewidths=0, zorder=2)
cbar = plt.colorbar(scatter, ax=ax, pad=0.02)
cbar.set_label("Índice de Sharpe", color="#e0e0e0", fontsize=11, labelpad=12)
cbar.ax.yaxis.set_tick_params(color="#e0e0e0")
plt.setp(cbar.ax.yaxis.get_ticklabels(), color="#e0e0e0")
cbar.outline.set_edgecolor("#444")

valid = ~np.isnan(ef_vols)
ax.plot(ef_vols[valid] * 100, target_rets[valid] * 100,
        color="#00e5ff", lw=2.5, zorder=5, label="Fronteira Eficiente")

ax.scatter(v_sharpe * 100, r_sharpe * 100, marker="o", s=180,
          color="#ffd700", edgecolors="#ffffff", linewidths=1.2,
          zorder=10, label=f"Máx. Sharpe (SR={s_sharpe:.2f})")
ax.annotate(f" Máx. Sharpe\n SR = {s_sharpe:.2f}",
          (v_sharpe * 100, r_sharpe * 100),
          color="#ffd700", fontsize=9.5, xytext=(6, 6),
          textcoords="offset points")

ax.scatter(v_minvar * 100, r_minvar * 100, marker="D", s=120,
          color="#00ffb2", edgecolors="#ffffff", linewidths=1.2,

```

```

        zorder=10, label="Min. Variância")
ax.annotate("  Min. Variância", (v_minvar * 100, r_minvar * 100),
            color="#00ffb2", fontsize=9.5, xytext=(6, -14),
            textcoords="offset points")

ax.scatter(v_naive * 100, r_naive * 100, marker="^", s=160,
           color="#ff6b6b", edgecolors="#ffffff", linewidths=1.2,
           zorder=10, label=f"1/N Ingênuo (SR={s_naive:.2f})")
ax.annotate(f"  1/N Ingênuo\n  SR = {s_naive:.2f}",
            (v_naive * 100, r_naive * 100),
            color="#ff6b6b", fontsize=9.5, xytext=(6, 6),
            textcoords="offset points")

ax.axhline(RISK_FREE * 100, ls="--", lw=1.2, color="#888",
           alpha=0.7, label=f"Selic ≈ {RISK_FREE*100:.2f}% a.a.")
vols_cml = np.linspace(0, port_vols.max() * 100 * 1.1, 300)
ax.plot(vols_cml, RISK_FREE * 100 + s_sharpe * vols_cml,
        ls=":", lw=1.4, color="#ffd700", label="CML", zorder=4)

ax.set_xlabel("Volatilidade Anual (%)", color="#c8c8d0", fontsize=12, labelpad=8)
ax.set_ylabel("Retorno Esperado Anual (%)", color="#c8c8d0", fontsize=12,
labelpad=8)
ax.set_title(f"Simulação de Monte Carlo - {N_PORTFOLIOS:,} Portfólios\n"
            f"Mercado Brasileiro ({START_DATE[:4]}-{END_DATE[:4]})",
            color="white", fontsize=14, fontweight="bold", pad=14)
ax.tick_params(colors="#a0a0b0", labels=10)
for spine in ax.spines.values():
    spine.set_edgecolor("#333")
ax.grid(alpha=0.12, color="#555", linewidth=0.6)
ax.legend(facecolor="#1a1a26", edgecolor="#444", labelcolor="#ddd",
        fontsize=9.5, loc="upper left", framealpha=0.85)

# Composição dos portfólios-chave
ax2 = axes[1]
ax2.set_facecolor("#0d0d14")
portfolios = {
    "Máx. Sharpe\n(Markowitz)": (w_sharpe, "#ffd700"),
    "Min. Variância\n(Markowitz)": (w_minvar, "#00ffb2"),
    "1/N\n(Ingênuo)": (w_naive, "#ff6b6b"),
}
x = np.arange(n_assets)
width = 0.26
offsets = [-width, 0, width]
for idx, (label, (weights, color)) in enumerate(portfolios.items()):
    ax2.bar(x + offsets[idx], weights * 100, width=width - 0.02,
           color=color, alpha=0.82, label=label,
           edgecolor="#0d0d14", linewidth=0.5)

ax2.set_xticks(x)
ax2.set_xticklabels(labels_available, rotation=55, ha="right",
                    fontsize=8.5, color="#b0b0c0")
ax2.set_ylabel("Peso no Portfólio (%)", color="#c8c8d0", fontsize=11, labelpad=8)
ax2.set_title("Composição dos Portfólios-Chave",
            color="white", fontsize=12, fontweight="bold", pad=12)
ax2.tick_params(colors="#a0a0b0", labels=9)
for spine in ax2.spines.values():
    spine.set_edgecolor("#333")
ax2.grid(axis="y", alpha=0.12, color="#555", linewidth=0.6)
ax2.legend(facecolor="#1a1a26", edgecolor="#444", labelcolor="#ddd",
        fontsize=9, loc="upper right", framealpha=0.85)

fig.text(0.5, 0.97,
        "Otimização de Portfólios - Markowitz vs. Diversificação Ingênua",
        ha="center", va="top", fontsize=16, fontweight="bold", color="white")
fig.text(0.5, 0.925,
        f"Ativos: {' '.join(labels_available)} | "
        f"Selic: {RISK_FREE*100:.2f}% a.a. | "
        f"Período: {START_DATE[:4]}-{END_DATE[:4]}",

```

```

        ha="center", va="top", fontsize=9, color="#888")

metrics_text = (
    f"{' ':18}{'Retorno':>10}{' Vol':>8}{' Sharpe':>10}\n"
    f"{'-':46}\n"
    f"{'Máx. Sharpe':18}{r_sharpe*100:>9.2f}%{v_sharpe*100:>7.2f}%{s_sharpe:>10.3f}\n"
    f"{'Min. Variância':18}{r_minvar*100:>9.2f}%{v_minvar*100:>7.2f}%\n"
    f"{'(r_minvar-RISK_FREE)/v_minvar:>10.3f}\n"
    f"{'1/N Ingênuo':18}{r_naive*100:>9.2f}%{v_naive*100:>7.2f}%{s_naive:>10.3f}\n"
)
fig.text(0.13, 0.085, metrics_text, fontsize=9, color="#ccccdd",
        fontfamily="monospace",
        bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.6", facecolor="#1a1a26",
                edgecolor="#444", alpha=0.9))

plt.tight_layout(rect=[0, 0.10, 1, 0.91])
plt.show()

#Sumário no terminal
print("\n" + "="*55)
print(" RESUMO – PORTFÓLIOS OTIMIZADOS")
print("="*55)
print(f"\n{'Portfólio':<22} {'Retorno':>9} {'Vol':>8} {'Sharpe':>8}")
print("-"*50)
for name, r, v, s in [
    ("Máx. Sharpe", r_sharpe, v_sharpe, s_sharpe),
    ("Min. Variância", r_minvar, v_minvar, (r_minvar-RISK_FREE)/v_minvar),
    ("1/N Ingênuo", r_naive, v_naive, s_naive),
]:
    print(f" {name:<20} {r*100:>8.2f}% {v*100:>7.2f}% {s:>8.3f}")

print("\n Pesos – Máximo Sharpe:")
for ticker, w in zip(labels_available, w_sharpe):
    print(f" {ticker:>6}: {w*100:5.1f}% {'█' * int(w * 40)}")

print("\n Pesos – Mínima Variância:")
for ticker, w in zip(labels_available, w_minvar):
    print(f" {ticker:>6}: {w*100:5.1f}% {'█' * int(w * 40)}")
print("="*55)

```

APÊNDICE B

Código-fonte: PMVG vs. 1/N

```
#Backtest Rolling - PMVG vs. Carteira Ingênua 1/N
#Universo: 15 ativos B3 - Rebalanceamento: mensal - Sem custos de transação

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as mticker
import matplotlib.dates as mdates
import yfinance as yf
from scipy.optimize import minimize
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")

#Parâmetros gerais
TICKERS_BR = [
    "BBAS3.SA", "ITUB4.SA", "EQTL3.SA", "TAE11.SA",
    "PETR4.SA", "VALE3.SA", "ABEV3.SA", "WEGE3.SA",
    "RADL3.SA", "VIVT3.SA", "RENT3.SA",
    "MULT3.SA", "AGRO3.SA", "TOTS3.SA", "SBSP3.SA"
]
BENCHMARK_TICKERS = {"Ibovespa": "^BVSP"}

MIN_WEIGHT = 0
MAX_WEIGHT = 1.0
DATA_START = "2000-01-01"
BACKTEST_START = "2015-01-01"
BACKTEST_END = "2025-12-31"
LOOKBACK_DAYS = 252 * 5
TRADING_DAYS = 252
RISK_FREE = 0.1075

#Download dos ativos
raw = yf.download(TICKERS_BR, start=DATA_START, end=BACKTEST_END,
                  auto_adjust=True, progress=False)["Close"]
raw.dropna(axis=1, how="all", inplace=True)
raw.ffill(inplace=True)
raw.dropna(inplace=True)

available_tickers = raw.columns.tolist()
labels = [t.replace(".SA", "") for t in available_tickers]
n_assets = len(available_tickers)
returns_daily = np.log(raw / raw.shift(1)).dropna()

#Download dos benchmarks
benchmarks = {}
benchmark_colors = {"Ibovespa": "#f1c40f"}
benchmark_ls = {"Ibovespa": (0, (5, 2))}

for nome, ticker in BENCHMARK_TICKERS.items():
    try:
        bm_raw = yf.download(ticker, start=DATA_START, end=BACKTEST_END,
                             auto_adjust=True, progress=False)["Close"]
        if isinstance(bm_raw, pd.DataFrame):
            bm_raw = bm_raw.squeeze()
            bm_raw = bm_raw.dropna()
            bm_bt = bm_raw.loc[BACKTEST_START:BACKTEST_END]
            if not bm_bt.empty:
                benchmarks[nome] = bm_bt / bm_bt.iloc[0]
    except Exception:
        pass

#Otimização: mínima variância
```

```

def portfolio_vol(w, cov_matrix):
    return np.sqrt(w @ cov_matrix @ w)

def min_variance_weights(cov_matrix):
    n = cov_matrix.shape[0]
    w0 = np.ones(n) / n
    res = minimize(portfolio_vol, w0, args=(cov_matrix,),
                    method="SLSQP",
                    bounds=tuple((MIN_WEIGHT, MAX_WEIGHT) for _ in range(n)),
                    constraints={"type": "eq", "fun": lambda w: np.sum(w) - 1},
                    options={"ftol": 1e-12, "maxiter": 2000})
    return res.x if res.success else w0

#Backtest rolling mensal

all_dates = returns_daily.loc[BACKTEST_START:BACKTEST_END].index
rebalance_dates = (
    pd.Series(all_dates)
    .groupby(pd.Series(all_dates).dt.to_period("M"))
    .first()
    .values
)

portfolio_dates = []
portfolio_values_minvar = []
portfolio_values_naive = []
weights_history_minvar = []

capital_minvar = 1.0
capital_naive = 1.0

for i, rebal_date in enumerate(rebalance_dates):
    est_start = max(returns_daily.index.searchsorted(rebal_date) - LOOKBACK_DAYS,
0)
    window =
returns_daily.iloc[est_start:returns_daily.index.searchsorted(rebal_date)]
    if len(window) < 30:
        continue

    cov_matrix = window.cov().values * TRADING_DAYS
    w_minvar = min_variance_weights(cov_matrix)
    w_naive = np.ones(n_assets) / n_assets

    next_rebal = (rebalance_dates[i + 1] if i + 1 < len(rebalance_dates)
                  else returns_daily.index[-1])
    period_returns = returns_daily.loc[rebal_date:next_rebal].iloc[:-1]
    if len(period_returns) == 0:
        continue

    arith = np.exp(period_returns.values) - 1
    ret_minvar = (arith * w_minvar).sum(axis=1)
    ret_naive = (arith * w_naive).sum(axis=1)
    factor_minvar = np.prod(1 + ret_minvar)
    factor_naive = np.prod(1 + ret_naive)
    capital_minvar *= factor_minvar
    capital_naive *= factor_naive

    for date, rm, rn in zip(
        period_returns.index,
        np.cumprod(1 + ret_minvar) * (capital_minvar / factor_minvar),
        np.cumprod(1 + ret_naive) * (capital_naive / factor_naive),
    ):
        portfolio_dates.append(date)
        portfolio_values_minvar.append(rm)
        portfolio_values_naive.append(rn)

    weights_history_minvar.append({"date": rebal_date, "weights": w_minvar})

```

```

dates_idx = pd.DatetimeIndex(portfolio_dates)
s_minvar = pd.Series(portfolio_values_minvar, index=dates_idx).sort_index()
s_naive = pd.Series(portfolio_values_naive, index=dates_idx).sort_index()

#Métricas de desempenho
def compute_metrics(series, rf=RISK_FREE):
    daily_ret = series.pct_change().dropna()
    n_years = (series.index[-1] - series.index[0]).days / 365.25
    cagr = (series.iloc[-1] / series.iloc[0]) ** (1 / n_years) - 1
    vol = daily_ret.std() * np.sqrt(TRADING_DAYS)
    sharpe = (cagr - rf) / vol
    roll_max = series.cummax()
    drawdown = (series - roll_max) / roll_max
    max_dd = drawdown.min()
    calmar = cagr / abs(max_dd) if max_dd != 0 else np.nan
    return {
        "Retorno Total": f"{{{(series.iloc[-1]/series.iloc[0])-1}*100:.1f}}%",
        "CAGR": f"{{cagr*100:.2f}}%",
        "Volatilidade (a.a.)": f"{{vol*100:.2f}}%",
        "Índice de Sharpe": f"{{sharpe:.3f}}%",
        "Máximo Drawdown": f"{{max_dd*100:.1f}}%",
        "Índice de Calmar": f"{{calmar:.3f}}%",
    }

metrics_mv = compute_metrics(s_minvar)
metrics_eq = compute_metrics(s_naive)
metrics_bm = {nome: compute_metrics(s) for nome, s in benchmarks.items()}

#Dados auxiliares para os gráficos
dd_mv = (s_minvar - s_minvar.cummax()) / s_minvar.cummax() * 100
dd_eq = (s_naive - s_naive.cummax()) / s_naive.cummax() * 100
rel_perf = (s_minvar / s_naive - 1) * 100

weights_df = pd.DataFrame(
    [r["weights"] for r in weights_history_minvar],
    index=pd.DatetimeIndex([r["date"] for r in weights_history_minvar]),
    columns=labels
)

#Gráfico
BG = "#0b0c14"
PANEL = "#12131f"
CYAN = "#00d4ff"
ORANGE = "#ff7c4c"
GRAY = "#5a5f7a"
WHITE = "#e8eaf0"
LGRAY = "#9298b0"

fig = plt.figure(figsize=(20, 17), facecolor=BG)
gs = fig.add_gridspec(4, 2, height_ratios=[3.2, 1.2, 1.8, 1.1],
                    hspace=0.42, wspace=0.28,
                    left=0.07, right=0.97, top=0.92, bottom=0.04)

ax_main = fig.add_subplot(gs[0, :])
ax_rel = fig.add_subplot(gs[1, :])
ax_dd = fig.add_subplot(gs[2, 0])
ax_wt = fig.add_subplot(gs[2, 1])

def style_ax(ax):
    ax.set_facecolor(PANEL)
    ax.tick_params(colors=LGRAY, labelsize=9)
    for spine in ax.spines.values():
        spine.set_edgecolor("#2a2d42")
    ax.grid(alpha=0.12, color=GRAY, linewidth=0.5)

for ax in [ax_main, ax_rel, ax_dd, ax_wt]:
    style_ax(ax)

```

```

fig.text(0.5, 0.965,
        f"Portfólio de Mínima Variância vs. Carteira Ingênua 1/N - "
        f"lookback {LOOKBACK_DAYS//252} anos",
        ha="center", va="top", fontsize=17, fontweight="bold", color=WHITE)
fig.text(0.5, 0.945,
        f"B3 | {' '.join(labels)} | {BACKTEST_START[:7]}-{BACKTEST_END[:7]} | "
        f"Rebalanceamento Mensal | Sem Custos de Transação",
        ha="center", va="top", fontsize=9, color=LGRAY)

#Retorno acumulado
ax_main.plot(s_minvar.index, s_minvar, color=CYAN, lw=2.2,
             label="Mínima Variância (Rolling)", zorder=5)
ax_main.plot(s_naive.index, s_naive, color=ORANGE, lw=2.2,
             label="1/N Ingênuo", zorder=4)
ax_main.fill_between(s_minvar.index, s_minvar, s_naive,
                    where=(s_minvar >= s_naive),
                    alpha=0.10, color=CYAN, interpolate=True)
ax_main.fill_between(s_minvar.index, s_minvar, s_naive,
                    where=(s_minvar < s_naive),
                    alpha=0.10, color=ORANGE, interpolate=True)

for nome, s_bm in benchmarks.items():
    ax_main.plot(s_bm.index, s_bm,
                 color=benchmark_colors.get(nome, GRAY), lw=1.3,
                 linestyle=benchmark_ls.get(nome, "--"),
                 alpha=0.75, label=f"{nome} (ref.)", zorder=3)

ax_main.axhline(1.0, ls="--", lw=0.9, color=GRAY, alpha=0.5)
for val, color, txt in [
    (s_minvar.iloc[-1], CYAN,
     f" {s_minvar.iloc[-1]:.2f}x ({(s_minvar.iloc[-1]-1)*100:.0f}%)" ),
    (s_naive.iloc[-1], ORANGE,
     f" {s_naive.iloc[-1]:.2f}x ({(s_naive.iloc[-1]-1)*100:.0f}%)" ),
]:
    ax_main.annotate(txt, (s_minvar.index[-1], val), color=color,
                    fontsize=9.5, fontweight="bold",
                    xytext=(8, 0), textcoords="offset points", va="center")

ax_main.set_ylabel("Capital Acumulado (base = 1)", color=LGRAY, fontsize=10)
ax_main.yaxis.set_major_formatter(mticker.FormatStrFormatter("%.1fx"))
ax_main.xaxis.set_major_formatter(mdates.DateFormatter("%b/%y"))
ax_main.xaxis.set_major_locator(mdates.MonthLocator(bymonth=[1, 7]))
ax_main.legend(facecolor="#1a1c2e", edgecolor="#333", labelcolor=WHITE,
              fontsize=9.5, loc="upper left", framealpha=0.92)
ax_main.set_title("Retorno Acumulado - Benchmarks em tracejado",
                  color=WHITE, fontsize=11, fontweight="bold", pad=8)

#Performance relativa
ax_rel.fill_between(rel_perf.index, rel_perf, 0,
                   where=(rel_perf >= 0), color=CYAN, alpha=0.35,
                   interpolate=True)
ax_rel.fill_between(rel_perf.index, rel_perf, 0,
                   where=(rel_perf < 0), color=ORANGE, alpha=0.35,
                   interpolate=True)
ax_rel.plot(rel_perf.index, rel_perf, color=WHITE, lw=0.9, alpha=0.7)
ax_rel.axhline(0, color=GRAY, lw=1, alpha=0.6)
ax_rel.set_ylabel("Excesso (%)", color=LGRAY, fontsize=9)
ax_rel.set_title("Performance Relativa: Min-Var vs. 1/N (acima = Min-Var superior)",
                 color=WHITE, fontsize=10, fontweight="bold", pad=6)
ax_rel.yaxis.set_major_formatter(mticker.FormatStrFormatter("%.0f%"))
ax_rel.xaxis.set_major_formatter(mdates.DateFormatter("%b/%y"))
ax_rel.xaxis.set_major_locator(mdates.MonthLocator(bymonth=[1, 7]))

#Drawdown
ax_dd.fill_between(dd_mv.index, dd_mv, 0, color=CYAN, alpha=0.4)
ax_dd.fill_between(dd_eq.index, dd_eq, 0, color=ORANGE, alpha=0.3)
ax_dd.plot(dd_mv.index, dd_mv, color=CYAN, lw=1.4, label="Min. Variância")

```

```

ax_dd.plot(dd_eq.index, dd_eq, color=ORANGE, lw=1.4, label="1/N Ingênuo")
for nome, s_bm in benchmarks.items():
    dd_bm = (s_bm - s_bm.cummax()) / s_bm.cummax() * 100
    ax_dd.plot(dd_bm.index, dd_bm,
               color=benchmark_colors.get(nome, GRAY), lw=1.0,
               linestyle=benchmark_ls.get(nome, "--"),
               alpha=0.65, label=f"{nome} (ref.)")
ax_dd.set_ylabel("Drawdown (%)", color=LGRAY, fontsize=9)
ax_dd.set_title("Drawdown", color=WHITE, fontsize=10, fontweight="bold", pad=6)
ax_dd.yaxis.set_major_formatter(mticker.FormatStrFormatter("%.0f%%"))
ax_dd.xaxis.set_major_formatter(mdates.DateFormatter("%b/%y"))
ax_dd.xaxis.set_major_locator(mdates.MonthLocator(bymonth=[1, 7]))
ax_dd.legend(facecolor="#1a1c2e", edgecolor="#333", labelcolor=WHITE,
            fontsize=8, loc="lower left", framealpha=0.9)

#Evolução dos pesos (PMVG)
cmap_wt = plt.get_cmap("tab20", n_assets)
colors_wt = [cmap_wt(i) for i in range(n_assets)]
ax_wt.stackplot(weights_df.index,
                [weights_df[col] * 100 for col in weights_df.columns],
                labels=labels, colors=colors_wt, alpha=0.88)
ax_wt.set_ylabel("Peso (%)", color=LGRAY, fontsize=9)
ax_wt.set_title("Composição do Min-Var ao Longo do Tempo",
               color=WHITE, fontsize=10, fontweight="bold", pad=6)
ax_wt.set_ylim(0, 100)
ax_wt.yaxis.set_major_formatter(mticker.FormatStrFormatter("%.0f%%"))
ax_wt.xaxis.set_major_formatter(mdates.DateFormatter("%b/%y"))
ax_wt.xaxis.set_major_locator(mdates.MonthLocator(bymonth=[1, 7]))
ax_wt.legend(loc="upper left", fontsize=7, facecolor="#1a1c2e",
            edgecolor="#333", labelcolor=WHITE, framealpha=0.85,
            ncol=3, handlelength=1.2)

#Tabela de métricas
ax_tbl = fig.add_subplot(gs[3, :])
ax_tbl.set_facecolor(PANEL)
ax_tbl.axis("off")

col_labels = [""] + list(metrics_mv.keys())
rows = {"Minima Variância": (metrics_mv, CYAN),
        "1/N Ingênuo": (metrics_eq, ORANGE)}
for nome, s_bm in benchmarks.items():
    rows[nome] = (metrics_bm[nome], benchmark_colors.get(nome, GRAY))

col_x = np.linspace(0.01, 0.99, len(col_labels))
y_positions = np.linspace(0.80, 0.08, len(rows) + 1)

for x, label in zip(col_x, col_labels):
    ax_tbl.text(x, y_positions[0], label, ha="center", va="center",
               fontsize=8.5, color=LGRAY, fontweight="bold",
               transform=ax_tbl.transAxes)
ax_tbl.axhline((y_positions[0] + y_positions[1]) / 2,
               color=GRAY, lw=0.5, alpha=0.5)

for (nome, (metrics, color)), y_pos in zip(rows.items(), y_positions[1:]):
    for x, val in zip(col_x, [nome] + list(metrics.values())):
        ax_tbl.text(x, y_pos, val, ha="center", va="center",
                   fontsize=9 if x == col_x[0] else 8.5,
                   color=color if x == col_x[0] else WHITE,
                   fontweight="bold" if x == col_x[0] else "normal",
                   transform=ax_tbl.transAxes)

for ax in [ax_main, ax_rel, ax_dd, ax_wt]:
    plt.setp(ax.xaxis.get_majorticklabels(), rotation=30, ha="right", fontsize=8)

plt.show()

```