

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDREY CASTRO BARBOSA

MODELAGEM DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO COM
VARIÁVEIS DE CONTROLE CONTÍNUAS E DISCRETAS

SÃO CARLOS -SP

2021

ANDREY CASTRO BARBOSA

MODELAGEM DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO COM
VARIÁVEIS DE CONTROLE CONTÍNUAS E DISCRETAS

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Departamento de
Engenharia Elétrica da Universidade
Federal de São Carlos, para
obtenção do título de bacharel em
Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme
Guimarães Lage.

São Carlos-SP
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

Folha de aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Trabalho de conclusão de curso do candidato Andrey Castro Barbosa, realizada em dd/mm/aaaa:

Prof. Dr.
Instituição

Prof. Dr.
Instituição

Prof. Dr.
Instituição

Aos meus pais, Raimundo e Rosario,
e à minha irmã, Yanna.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Guilherme Guimarães Lage, pela orientação exemplar, pela paciência, pelos conhecimentos adquiridos, e pelos conselhos que impactaram diretamente na minha formação como Engenheiro Eletricista, especialmente durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais e à minha irmã, Raimundo, Rosario e Yanna, pelo apoio incondicional durante todos os momentos da minha vida.

À minha namorada Virna, que esteve comigo durante toda minha graduação, e sempre me apoiou, sobretudo nos momentos de dificuldade.

A meus amigos e colegas, tanto de São Luís quanto de São Carlos, que sempre me acolheram tão bem e proporcionaram experiências incríveis que levarei com muito carinho por toda minha vida.

Aos docentes e funcionários da UFSCar, especialmente do Departamento de Engenharia Elétrica (DEE), pelos ensinamentos proporcionados. Meu sentimento é de gratidão por cada um que pude conhecer durante minha graduação.

RESUMO

O trabalho em questão apresenta um modelo matemático simplificado para resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle contínuas e discretas. A modelagem com barra *slack* distribuída foi utilizada nos sistemas elétricos testados. A formulação do problema foi feita como a de um problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas, de modo que sua resolução foi obtida fundamentalmente a partir de modificações matemáticas pelo algoritmo proposto neste trabalho, no qual as variáveis discretas são tratadas como contínuas por funções senoidais adicionadas à função objetivo original. Este trabalho também propõe uma análise da eficácia dos resultados obtidos por diferentes *solvers* comerciais para o problema de fluxo de potência ótimo reativo discretizado. A testagem da modelagem proposta foi aplicada nos sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. Os resultados apresentados revelam que o modelo proposto foi eficaz na otimização da função objetivo e na discretização das variáveis de controle dos sistemas.

Palavras-chave: Fluxo de potência ótimo reativo. Variáveis discretas. Barra *slack* distribuída. Algoritmo da função Lagrangiana barreira modificada-penalidade-discreto.

ABSTRACT

This work presents a simplified mathematical model for solving the reactive optimal power flow problem with continuous and discrete control variables. The distributed slack bus modeling was used in the tested electrical systems. The problem is formulated as a nonlinear programming problem with continuous and discrete variables so that its resolution is obtained fundamentally from mathematical modifications by the algorithm proposed in this work, in which discrete variables are treated as continuous by sinusoidal functions added to the original objective function. This work also proposes an effectiveness analysis of the results provided by different commercial solvers for the discretized reactive optimal power flow problem. The proposed modeling was applied on the IEEE 14, 30, 57, 118 and 300-bus test systems. The results presented reveal that the proposed model was effective in the optimization of the objective function and discretization of control variables of the systems.

Keywords: Optimal reactive power flow. Discrete variables. Distributed slack bus. Discrete penalty-modified barrier Lagrangian function algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 6.1 - Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	57
Figura 6.2 – Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> IPOPT.....	58
Figura 6.3 - Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> MINOS.....	58
Figura 6.4 - Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> SNOPT.....	59
Figura 6.5 - Valores dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	60
Figura 6.6 - Valores dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> IPOPT.....	60
Figura 6.7 - Valores dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> MINOS.....	61
Figura 6.8 - Valores dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> SNOPT.....	61

Figura 6.9 - Perfis das magnitudes de tensão para o modelo com variáveis de controle contínuas e para o modelo com variáveis de controle discretas para o sistema IEEE de 14 barras pelo <i>solver</i> CONOPT.....	62
Figura 6.10 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	63
Figura 6.11 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> IPOPT.....	63
Figura 6.12 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> MINOS.....	64
Figura 6.13 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> SNOPT.....	64
Figura 6.14 - Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	68
Figura 6.15 - Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> IPOPT.....	68
Figura 6.16 - Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> MINOS.....	69

Figura 6.17 - Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo solver SNOPT.....	69
Figura 6.18 - Valores dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	70
Figura 6.19 - Valores dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo solver IPOPT.....	70
Figura 6.20 - Valores dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo solver MINOS.....	71
Figura 6.21 - Valores dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo solver SNOPT.....	71
Figura 6.22 - Perfis das magnitudes de tensão para os modelos com variáveis de controle contínuas e com variáveis de controle discretas para o sistema IEEE de 30 barras pelo <i>solver</i> CONOPT.....	72
Figura 6.23 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> CONOPT.....	73
Figura 6.24 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> IPOPT.....	73

Figura 6.25 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> MINOS.....	74
Figura 6.26 - Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo <i>solver</i> SNOPT.....	74
Figura 6.27 - Valores ótimos dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.....	77
Figura 6.28 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.....	77
Figura 6.29 - Valores ótimos dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	80
Figura 6.30 - Valores ótimos dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	80
Figura 6.31 - Valores ótimos dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	81
Figura 6.32 - Valores ótimos dos taps dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	81
Figura 6.33 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	82

Figura 6.34 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	82
Figura 6.35 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	83
Figura 6.36 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	83
Figura 6.37 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	86
Figura 6.38 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	87
Figura 6.39 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	87
Figura 6.40 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	88
Figura 6.41 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	89

Figura 6.42 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	89
Figura 6.43 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	90
Figura 6.44 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	90
Figura 6.45 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	91
Figura 6.46 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	91
Figura 6.47 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	92
Figura 6.48 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	92
Figura 6.49 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	93

Figura 6.50 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	93
Figura 6.51 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	94
Figura 6.52 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	94
Figura 6.53 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	95
Figura 6.54 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	95
Figura 6.55 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	96
Figura 6.56 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	96
Figura 6.57 -Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	99

Figura 6.58 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo solver CONOPT.....	100
Figura 6.59 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo solver CONOPT.....	100
Figura 6.60 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo solver CONOPT.....	101
Figura 6.61 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver CONOPT.....	102
Figura 6.62 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver IPOPT.....	102
Figura 6.63 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver SNOPT.....	103
Figura 6.64 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver CONOPT.....	103
Figura 6.65 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver IPOPT.....	104

Figura 6.66 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver SNOPT.....	104
Figura 6.67 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver CONOPT.....	105
Figura 6.68 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver IPOPT.....	105
Figura 6.69 - Valores ótimos dos <i>taps</i> dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver SNOPT.....	106
Figura 6.70 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver CONOPT.....	106
Figura 6.71 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver IPOPT.....	107
Figura 6.72 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo solver SNOPT.....	107

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 14 barras pelo modelo com variáveis contínuas.....	56
Tabela 6.2 - Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada solver comercial – Sistema IEEE de 14 barras.....	57
Tabela 6.3 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 14 barras pelo modelo com variáveis discretas.....	65
Tabela 6.4 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 30 barras pelo modelo com variáveis contínuas.....	66
Tabela 6.5 - Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada solver comercial – Sistema IEEE de 30 barras.....	67
Tabela 6.6 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 30 barras pelo modelo com variáveis discretas.....	75
Tabela 6.7 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.....	76
Tabela 6.8 - Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada solver comercial – Sistema IEEE de 57 barras.....	78
Tabela 6.9 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> CONOPT.....	78
Tabela 6.10 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> IPOPT.....	79

Tabela 6.11 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> MINOS.....	79
Tabela 6.12 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo <i>solver</i> SNOPT.....	79
Tabela 6.13 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas.....	84
Tabela 6.14 - Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada <i>solver</i> comercial – Sistema IEEE de 118 barras.....	88
Tabela 6.15 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas.....	97
Tabela 6.16 - Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada <i>solver</i> comercial – Sistema IEEE de 300 barras.....	101
Tabela 6.17 - Perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas.....	108

LISTA DE SIGLAS

AMPL	<i>A Mathematical Programming Language</i>
DE	Despacho Econômico
DMSE	Departamento de Monitoramento do Sistema Elétrico
FC	Fluxo de Carga
FLBM	Função Lagrangiana Barreira Modificada
FLBMP	Função Lagrangiana Barreira Modificada-Penalidade
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOR	Fluxo de Potência Ótimo Reativo
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MME	Ministério de Minas e Energia
MPI	Método de Pontos Interiores
PL	Programação Linear
PLIM	Programação Linear Inteira-Mista
PNL	Programação Não Linear
SEB	Sistema Elétrico Brasileiro
SEE	Sistema de Energia Elétrica
SIN	Sistema Interligado Nacional

LISTA DE SÍMBOLOS

n_{pv}	número de barras do tipo PV
n_{pq}	número de barras do tipo PQ
$\mathcal{B}$	conjunto das barras do sistema
$\mathcal{G}$	conjunto das barras de geração
$\mathcal{G}'$	conjunto das barras de geração, exceto a <i>slack</i>
$\mathcal{C}$	conjunto das barras de carga
$\mathcal{B}^{sh}$	conjunto das barras com controle da tensão por elementos <i>shunt</i>
$\mathcal{L}$	conjunto dos ramos $k-m$ que representam linhas de transmissão
$\mathcal{T}$	conjunto dos ramos $k-m$ que representam transformadores em-fase com <i>tap</i> variável
$\mathcal{V}_k$	conjunto das barras vizinhas à barra k
V_k	magnitude da tensão na barra k
θ_k	ângulo de fase da tensão na barra k
θ_{km}	abertura angular entre os fasores das tensões nas barras k e m
P_{km}	fluxo de potência ativa no ramo $k-m$
Q_{km}	fluxo de potência reativa no ramo $k-m$
P_k	injeção líquida de potência ativa na barra k
Q_k	injeção líquida de potência reativa na barra k
Q_k^{sh}	injeção de potência reativa pelo elemento <i>shunt</i> da barra k
b_k^{sh}	susceptância equivalente do elemento <i>shunt</i> da barra k
$\mathcal{D}_k^{sh}$	conjunto dos valores discretos da susceptância equivalente do elemento <i>shunt</i> da barra k
z_{km}	impedância série do ramo $k-m$
r_{km}	resistência série do ramo $k-m$
x_{km}	indutância série do ramo $k-m$

y_{km}	admitância série do ramo $k-m$
g_{km}	condutância série do ramo $k-m$
b_{km}	susceptância série do ramo $k-m$
t_{km}	<i>tap</i> do transformador em-fase do ramo $k-m$
$\mathcal{D}_k^{tap}$	conjunto dos valores discretos do transformador em-fase do ramo $k-m$
w_k	variável auxiliar associada ao ajuste na susceptância equivalente do elemento <i>shunt</i> da barra k .
s_{km}	variável auxiliar associada ao ajuste no <i>tap</i> do transformador-em fase do ramo $k-m$.
φ_{km}	ângulo de defasamento do transformador defasador do ramo $k-m$.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	29
1.1 Motivação.....	30
1.1.1. Modelagem das Variáveis de Controle Discretas	31
1.1.2. Formulação do problema de Fluxo de Carga c/ barra <i>slack</i> distribuída.....	32
1.1.3. Análise da eficácia de diferentes <i>solvers</i> comerciais.....	32
1.2 Objetivo	33
1.3 Metodologia.....	33
2. Problema de FPO: Histórico	35
2.1. Variáveis de Controle Discretas	36
3. Transformação de Problemas de PNL Inteira-Mista em Problemas Equivalentes de PNL	39
3.1. Algoritmo	41
4. Sistemas de Energia Elétrica: Modelagem Estática	43
4.1. Problema de Fluxo de Carga: Formulação.....	43
4.1.1. Formulação Básica do Problema de FC	44
4.1.2. Formulação do Problema de FC com Barra <i>Slack</i> Distribuída.....	46
4.2. Problema de FC: Resolução	46
5. Problema de FPOR.....	49
5.1. Problema de FPOR: Formulação	49
5.1.1. Formulação com Variáveis de Controle Discretas	50
5.1.2. Formulação por Relaxação Contínua	51
5.1.3. Formulação por Relaxação Contínua com Penalização pela Função Seno-quadrado	52
6. Resultados Numéricos.....	55
6.1. Sistema IEEE de 14 barras	55
6.1.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas.....	55
6.1.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas	56
6.1.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos <i>shunt</i> 57	
6.1.2.2. Convergência dos <i>taps</i> dos transformadores em fase	59
6.1.2.3. Perdas ativas do sistema	62
6.2. Sistema IEEE de 30 barras	65
6.2.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas.....	66

6.2.2.	Modelagem com Variáveis de Controle Discretas	67
6.2.2.1.	Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos <i>shunt</i> 67	
6.2.2.2.	Convergência dos <i>taps</i> dos transformadores em fase	70
6.2.2.3.	Perdas ativas do sistema	72
6.3.	Sistema IEEE de 57 barras	75
6.3.1.	Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas.....	76
6.3.2.	Modelagem com Variáveis de Controle Discretas	78
6.3.2.1.	Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos <i>shunt</i> 78	
6.3.2.2.	Convergência dos <i>taps</i> dos transformadores em fase	79
6.4.	Sistema IEEE de 118 Barras.....	85
6.4.1.	Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas.....	86
6.4.2.	Modelagem com Variáveis de Controle Discretas	88
6.4.2.1.	Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos <i>shunt</i> 89	
6.4.2.2.	Convergência dos <i>taps</i> dos transformadores em fase	93
6.5.	Sistema IEEE de 300 Barras.....	98
6.5.1.	Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas.....	99
6.5.2.	Modelagem com Variáveis de Controle Discretas	101
6.5.2.1.	Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos <i>shunt</i> 102	
6.5.2.2.	Convergência dos <i>taps</i> dos transformadores em-fase.....	105
7.	Conclusões	109
	Referências Bibliográficas	111

1. Introdução

Com a implantação do modelo vigente do setor elétrico brasileiro em 2004, este segmento deixou de ser verticalizado e totalmente vinculado ao Estado, com a atuação de várias empresas divididas por atividade: geração, transmissão, distribuição, comercialização, importação e exportação. A competição é incentivada nas atividades de geração e comercialização, enquanto os segmentos de transmissão e distribuição, considerados monopólios naturais, são mantidos sob regulação do Estado (CCEE, 2020). Assim, a partir da inserção de um ambiente de mercado no setor, surgiu a necessidade das empresas de aprimorar a eficiência no planejamento e operação dos Sistemas de Energia Elétrica (SEEs). Os problemas de otimização então passaram a desempenhar uma função cada vez mais relevante nesse processo.

A tomada de decisões referentes ao planejamento e à operação dos SEEs se baseia principalmente na minimização dos custos de geração e transmissão da energia elétrica, o que está diretamente relacionado à manutenção dos parâmetros da rede dentro de limites operacionais estabelecidos (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011).

A grande complexidade inerente ao planejamento e à operação dos SEEs está diretamente associada aos sistemas de transmissão, os quais apresentam diversos aspectos técnicos a serem considerados no processo da tomada de decisão. A atuação da lei de Kirchhoff nesses sistemas pelo efeito dos fluxos em malha, a qual não está sujeita aos contratos firmados pelas empresas do setor, e a necessidade de determinação dos ajustes para que o sistema retorne a seu estado de operação normal em caso de violação dos limites operacionais ou de segurança são características que demonstram as dificuldades técnicas referentes aos sistemas de transmissão. As metodologias para resolução de problemas de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) são empregadas justamente para garantir que os ajustes sejam realizados da melhor maneira possível.

Os problemas de FPO são empregados a fim de otimizar um determinado desempenho operacional do sistema, dentro das restrições de segurança e de operação do sistema e sujeito ao balanço de potência ativa e reativa nas barras da rede. Além disso, no problema de FPO, as variáveis de controle do SEE são

ajustadas a fim de garantir que o problema de otimização tem uma região factível não vazia, o que o diferencia do problema de Fluxo de Carga (FC). A formulação matemática é realizada como um problema de Programação Não Linear (PNL), estático, não convexo, restrito, de grande porte e com variáveis contínuas e discretas. O FPO é aplicado tanto no planejamento dos SEEs, permitindo a projeção futura de cenários ótimos para o sistema elétrico, quanto na operação, a partir da determinação dos ajustes ótimos necessários às variáveis de controle. Com o avanço no desenvolvimento de novas metodologias e na robustez computacional disponível atualmente, o FPO se mostra uma ferramenta bastante relevante na análise de SEEs.

O ambiente de mercado criado a partir da adoção do modelo vigente do sistema elétrico leva as empresas do setor a uma busca constante por maiores níveis de eficiência econômica. Do ponto de vista técnico, essa condição implica na operação do sistema em margens mais próximas das restrições de controle (ROSEHART, 2002; AFFONSO; SILVA; SILVA, 2008). Para SEEs de grande porte, como o caso do Sistema Interligado Nacional (SIN), os quais apresentam um sistema de transmissão que cobre grandes distâncias, as perdas de potência pelo efeito Joule nas linhas de transmissão representam um ônus econômico relevante para as operadoras do sistema. Dessa forma, a aplicação de um FPO para minimização desse dado operacional implica em uma economia significativa na geração do sistema (BAPTISTA et al., 2006), ainda mais pelo fato de que não é necessário investimento em infraestrutura adicional à rede.

Diante dos aspectos citados, este trabalho propõe um modelo para um problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), buscando a minimização das perdas ativas na transmissão. Para este problema de FPO específico, as variáveis de controle associadas à potência reativa são ajustadas a fim de atingir a otimização de desempenho definida, enquanto aquelas associadas à potência ativa são fixas.

1.1 Motivação

Conforme abordado anteriormente, a motivação para a proposição dessa metodologia reside na possibilidade de tornar o sistema mais eficiente, através da minimização das perdas ativas na transmissão e da definição de um melhor perfil de

tensão, ou seja, a manutenção da magnitude de tensão dentro dos limites operacionais da rede. A partir de dados coletados pelo Ministério de Minas e Energia (MME), através do Departamento de Monitoramento do Sistema Elétrico (DMSE), entre novembro de 2019 e outubro de 2020, a demanda média do Sistema Elétrico Brasileiro (SEB) foi em torno de 67.242,80 MW médios (BRASIL, 2020n). Considerando que as perdas ativas ou da rede básica representam cerca de 50% das perdas totais (CCEE, 2020), as perdas ativas na transmissão correspondem a 9,8% da potência demandada, equivalente a 6.575 MW, aproximadamente. Em estudo realizado com o objetivo de minimização das perdas ativas para o sistema IEEE de 30 barras, por exemplo, houve uma redução de cerca de 8,40% das perdas ativas na transmissão, com um perfil de tensão médio em torno de 1,0479 p.u. (LAGE, 2013), o equivalente a 552,3 MW médios economizados, apenas pelo ajuste das variáveis de controle, sem investimentos na infraestrutura dos sistemas de transmissão.

O trabalho proposto de uma metodologia para resolução do problema de FPOR está diretamente relacionado à questão da modelagem das variáveis de controle discretas, visto que uma formulação imprecisa não refletiria os resultados observados quando aplicados para um sistema de transmissão real.

1.1.1. Modelagem das Variáveis de Controle Discretas

A modelagem de problemas de FPO com variáveis discretas demanda uma abordagem mais específica quando comparada a outros problemas de análise estática de SEEs, já que problemas de PNL com variáveis contínuas e discretas são resolvidos em geral por métodos de programação que exigem um esforço computacional muito elevado para sistemas de grande porte (SOLER, 2011), o que tornaria inviável sua aplicação em problemas reais de FPOR. Essas dificuldades fizeram com que a modelagem discreta das variáveis de controle fosse descartada na resolução de problemas de FPO, já que o uso de variáveis estritamente contínuas na formulação matemática permitia a aplicação de métodos clássicos de PNL. No entanto, na operação real de um SEE, alguns ajustes de controle são possíveis apenas através de passos discretos, como no caso dos *taps* de transformadores. Para contornar o problema provocado pela modelagem discreta, utiliza-se uma relaxação contínua das variáveis discretas e resolve-se o problema

relaxado. A partir disso, atribui-se às variáveis o valor discreto mais próximo, o que é conhecido como método de arredondamento. Este pode levar à descaracterização do ótimo ou até a uma solução infactível.

A abordagem proposta também utiliza a relaxação contínua como recurso para tratamento das variáveis de controle como contínuas. Assim, estas variáveis são submetidas à discretização de seus valores no decorrer do método de otimização.

1.1.2. Formulação do problema de Fluxo de Carga c/ barra *slack* distribuída

O trabalho proposto utiliza a formulação do problema de FC com barra *slack* distribuída. Na formulação básica do problema de FC, a injeção líquida de potência ativa da barra *slack* ou de referência angular do sistema atua não só no balanço da demanda da barra, mas também no fechamento de todo o balanço de potência ativa da rede, já que ela tem a função de atender todas as perdas do sistema de transmissão. Para sistemas de grande porte, a barra de referência angular é sobrecarregada pela necessidade de suprir as perdas de todo o sistema, o que pode impactar diretamente a estabilidade do SEE. Caso ocorra alguma falha nesta barra de referência angular, a falta de compensação das perdas das demais barras refletirá em todo o sistema, o que implicaria em prejuízos operacionais/econômicos significativos. Já na formulação com barra *slack* distribuída, um fator K_g é incorporado às equações de injeção líquida de potência ativa, de modo que as perdas do sistema possam ser distribuídas pelas barras de geração do sistema, evitando a sobrecarga da barra de referência angular.

1.1.3. Análise da eficácia de diferentes *solvers* comerciais

Este trabalho também busca analisar a eficácia de diferentes *solvers* comerciais na resolução do problema de FPOR discreto. Isso foi feito através da observação dos resultados obtidos na minimização das perdas ativas do sistema, na discretização das variáveis de controle, e no número de iterações até a convergência do método.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo propor uma formulação com barra *slack* distribuída do problema de FPOR para minimização das perdas ativas na transmissão, com uma metodologia para ajuste das variáveis de controle discretas, e utilização de diferentes *solvers* comerciais na resolução, a fim de tornar o processo de tomada de decisão no planejamento e na operação dos SEEs mais eficiente e robusto.

É importante ressaltar que, num cenário mais amplo, a familiarização com aspectos de modelagem matemática e problemas de otimização permite uma atuação numa gama bem mais ampla de segmentos, além da Engenharia Elétrica, de modo que o trabalho desenvolvido aqui promove um embasamento teórico e prático para várias outras aplicações.

1.3 Metodologia

A formulação matemática do trabalho proposto será feita como a de um problema de PNL com variáveis contínuas e discretas. O resultado será obtido através do algoritmo discreto proposto, no qual as variáveis discretas são tratadas como contínuas através de funções seno-quadradas incorporadas à função objetivo original. Essas funções são igualadas a zero quando as variáveis assumem valores discretos. O processo de resolução segue até que as condições ótimas necessárias sejam atingidas e a condição de discretização das variáveis de controle seja satisfeita.

A validação do modelo se dará através de testes com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. Os *solvers* comerciais cuja eficácia foi analisada para este mesmo modelo foram: *CONOPT*, *IPOPT*, *MINOS*, *SNOPT*. O ambiente de programação utilizado foi o *software* para modelagem de problemas matemáticos *AMPL* (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2002).

2. Problema de FPO: Histórico

O cálculo do estado ótimo da rede foi incluído no problema de Despacho Econômico (DE) pela incorporação das equações do problema de FC nas restrições desse problema (CARPENTIER, 1962). O problema de DE foi transformado em irrestrito por uma função Lagrangiana clássica, cujo sistema de equações não lineares resultante da aplicação das condições necessárias de primeira ordem foi resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

O trabalho desenvolvido por Carpentier deu início a diversas outras formulações de problemas de otimização para análise estática de SEEs. Assim, o problema de FPO passou a ser definido como qualquer problema que busque determinar o estado ótimo de um SEE, a partir de um dado desempenho operacional.

Em 1968, o trabalho desenvolvido por Dommel e Tinney propôs a resolução de problemas de FPO pelo método do gradiente reduzido, o qual se baseia na solução do FC pelo método de Newton, com o ajuste das variáveis de controle por passos descendentes para obtenção do mínimo da função objetivo e uso de funções penalidade quadráticas para atender aos limites das variáveis dependentes (DOMMEL; TINNEY, 1968). O problema é transformado em um problema irrestrito por uma função Lagrangiana. Inicialmente, determina-se o sistema de equações não lineares resultante da aplicação das condições necessárias de primeira ordem. Então, o estado do sistema é definido através da resolução do FC. Em seguida, os multiplicadores de Lagrange associados a cada uma das restrições de igualdade são calculados. Esse método busca chegar sempre a um valor menor para a função objetivo, direcionado pelo gradiente negativo dessa função. Se a norma do gradiente da Lagrangiana estiver dentro da tolerância definida, o método iterativo é encerrado. Caso contrário, as variáveis de controle são ajustadas conforme o método do gradiente. O tamanho do passo ou fator de ajuste das variáveis tem papel fundamental nesta etapa do algoritmo, visto que um valor muito pequeno leva à convergência, porém implica em muitas iterações do algoritmo, enquanto um valor muito elevado causa oscilações em torno da solução mínima esperada. A partir da publicação desse trabalho, outras abordagens foram propostas a fim de aumentar a robustez e eficiência da resolução de problemas de FPO, como Sasson (1969),

Rashed e Kelly (1974) e Sun et al. (1984), entre outros.

Em 1994, o método primal-dual barreira logarítmica foi proposto por Granville para resolução do problema de FPOR. Este trabalho foi um dos pioneiros na utilização de um Método de Pontos Interiores (MPI) na resolução desse tipo de problema. O problema é transformado em um problema irrestrito através do acréscimo de variáveis de folga não negativas às restrições de desigualdade, transformando-as em restrições de igualdade. Uma função barreira logarítmica garante que as variáveis de folga se mantenham não negativas e é incorporada à função objetivo por um parâmetro de barreira. As restrições de igualdade são incorporadas por multiplicadores de Lagrange. O método iterativo se encerra quando as restrições forem satisfeitas e o parâmetro de barreira tender a zero (GRANVILLE, 1994). Outros trabalhos adotaram o método primal-dual barreira logarítmica de resolução de problemas de FPO, como Wu, Debs e Marsten (1994) e Sousa, Baptista e Costa (2004). Este último buscou aprimorar a proposta apresentada por Granville (1994), alterando a função barreira incorporada à função objetivo do problema. A seção seguinte engloba alguns trabalhos que buscaram propor métodos de discretização para as variáveis de controle dos problemas de FPO.

2.1. Variáveis de Controle Discretas

Em 1992, um algoritmo de discretização baseado no método de penalidade foi proposto por Liu, Papalexopoulos e Tinney a fim de definir o controle ótimo para as variáveis discretas associadas a capacitores e reatores shunt em problemas de FPO. O problema é transformado em um problema irrestrito através do método dos multiplicadores de Lagrange. A função penalidade é incorporada à função Lagrangiana e é responsável pelo processo de discretização das variáveis de controle. Este método torna a variável discreta fixa, conforme esta se aproxima de um valor discreto, semelhante a um algoritmo de arredondamento. O método iterativo se encerra quando todas as restrições forem satisfeitas e todas as variáveis de controle discretas assumirem valores discretos (LIU; PPALEXOPOULOS; TINNEY, 1992).

Outro trabalho bastante relevante é o de Capitanescu e Wehenkel (2010), o qual propõe três abordagens para resolução de problemas de FPO com variáveis

discretas: 1) o problema de FPO é resolvido com todas as variáveis tratadas como contínuas. A partir disso, determina-se a matriz sensibilidade da função Lagrangiana para as variáveis discretas, e a solução de um problema de Programação Linear Inteira-Mista (PLIM) define os ajustes das variáveis discretas do problema. Estas são fixadas, e, através da utilização de um MPI, a resolução deste novo problema de FPO leva ao controle ótimo das variáveis contínuas. 2) A diferença entre essa abordagem e a primeira está nos ajustes das variáveis de controle discretas do problema, já que é utilizada uma função mérito no lugar do problema de PLIM. 3) Esta abordagem incorpora os multiplicados de Lagrange aos limites das variáveis de controle discretas. Todas foram testadas em sistemas reais de 60, 618 e 1203 barras, além do sistema IEEE de 300 barras, de modo que a segunda abordagem apresentou resultados melhores em comparação às outras. As três abordagens apresentadas fixam valores para as variáveis de controle discretas. Então, o FPO é resolvido apenas em função das variáveis de controle contínuas. Dessa maneira, o trabalho proposto ainda apresentava limitações no tratamento das variáveis de controle discretas (CAPITANESCU; WEHENKEL, 2010).

3. Transformação de Problemas de PNL Inteira-Mista em Problemas Equivalentes de PNL

O método exposto a seguir é empregado neste trabalho na aplicação de recursos matemáticos para obtenção de um problema equivalente de PNL com variáveis contínuas e discretas baseado num problema de PNL Inteira-Mista. Sua formulação é feita de modo a assegurar o processo de discretização. As variáveis de controle discreta são tratadas como contínuas através de funções ψ do tipo seno-quadrada, as quais são incorporadas à função objetivo do problema. Tais funções são utilizadas pois estas se anulam quando as variáveis tratadas assumem valores discretos dentro do intervalo definido. Além disso, um parâmetro $\gamma > 0$ presente em ψ atua no controle da amplitude. A partir dessa função penalidade, é possível utilizar os *solvers* disponíveis comercialmente para a resolução do método. Este recurso matemático é validado pelo trabalho de Soler (2011), o qual conclui que a solução do problema modificado equivale à do problema original (SOLER, 2011).

Dado o problema de PNL com variáveis contínuas e discretas abaixo:

$$\min \quad f(x) \quad (3.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (3.1b)$$

$$h_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (3.1c)$$

$$x_{1_i}^{\min} \leq x_{1_i} \leq x_{1_i}^{\max} \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (3.1d)$$

$$x_{2_i} \in \mathcal{D}_{x_i} \quad i = 1, \dots, m_2 \quad (3.1e)$$

em que $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ representa o vetor das variáveis contínuas; $x_2 \in \mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^{m_2}$ representa o vetor das variáveis discretas, tal que $x = (x_1, x_2)$; $\mathcal{D}_x$ representa o conjunto de valores discretos de cada variável x_2 ; $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$, tal que $p < m_1 + m_2$; e $h : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^q$.

A função $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por Soler (2011) utilizada para tratar as variáveis discretas x_2 como contínuas apresenta o seguinte formato:

$$\psi(y_i) = \begin{cases} 0, & y_i < y_i^{\min} \\ \left[\sin \left(\frac{y_i}{y_i^{\sup} - y_i^{\inf}} \pi + \alpha \right) \right]^{2\beta}, & y_i^{\min} \leq y_i \leq y_i^{\max} \\ 0, & y_i > y_i^{\max} \end{cases} \quad (3.2)$$

para $i = 1, \dots, m_2$. Os parâmetros apresentados em (3.2) são descritos a seguir:

- β : constante inteira maior que 0 que atua na forma da função ψ ;
- $y_i^{\sup}$: valor discreto imediatamente superior a y_i em $\mathcal{D}_{x_i}$;
- $y_i^{\inf}$: valor discreto imediatamente inferior a y_i em $\mathcal{D}_{x_i}$;
- $y_i^{\max}$: valor discreto máximo do conjunto $\mathcal{D}_{x_i}$;
- $y_i^{\min}$: valor discreto mínimo do conjunto $\mathcal{D}_{x_i}$;
- α : constante definida em $[0, \pi]$ tal que a função ψ é anulada quando y_i assume algum valor discreto pertencente ao conjunto $\mathcal{D}_{x_i}$;

Dessa maneira, o problema modificado pode ser expresso a seguir:

$$\min \quad f(x) + \gamma \sum_{i=1}^{m_2} \psi(x_{2_i}) \quad (3.3a)$$

$$\text{s.a:} \quad g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (3.3b)$$

$$h_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (3.3c)$$

$$x_{1_i}^{\min} \leq x_{1_i} \leq x_{1_i}^{\max} \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (3.3d)$$

$$x_{2_i}^{\min} \leq x_{2_i} \leq x_{2_i}^{\max} \quad i = 1, \dots, m_2 \quad (3.3e)$$

em que $\gamma > 0$ é o parâmetro que controla a amplitude de ψ ; $x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ passa a ser um vetor de variáveis contínuas, tal que $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, com $x = (x_1, x_2)$; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, com $p < n$; $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, tal que as funções f , g e h são de classe C^2 ; por sua vez, $x_{2_i}^{\min}$ e $x_{2_i}^{\max}$ representam os limites inferior e superior das variáveis x_2 , em que $x_{2_i}^{\min} = \min\{\mathcal{D}_{x_i}\}$ e $x_{2_i}^{\max} = \max\{\mathcal{D}_{x_i}\}$ para $i = 1, \dots, m_2$.

3.1. Algoritmo

O objetivo do algoritmo é atingir a solução ótima do problema modificado (3.3) e garantir que todas as variáveis discretas tratadas como contínuas no problema modificado assumam valores discretos dentro do intervalo definido.

Uma estimativa inadequada do parâmetro $\gamma > 0$ prejudica diretamente na convergência do método. Para garantir que a estimativa de γ seja adequada, propõe-se que γ seja ajustado de maneira crescente a cada processo resolutivo do problema modificado (3.3), conforme a expressão a seguir (SOLER; SOUSA; COSTA, 2012):

$$\gamma^{k+1} = \tau \gamma^k \quad (3.4)$$

em que τ é o fator de crescimento do parâmetro γ e está definido no intervalo (1; 10].

O método iterativo se encerra quando a condição $|x_{2_i} - x'_{2_i}| < \xi$, para $i = 1, \dots, m_2$ é atingida para todas as variáveis x_2 do problema modificado; $x'_{2_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ representa o valor discreto mais próximo de x_{2_i} e ξ é a tolerância definida para convergência do algoritmo.

É relevante compreender a influência dos parâmetros γ e β na função $\psi(x)$. O parâmetro β atua diretamente na forma de $\psi(x)$, de modo que, à medida que o valor de β aumenta, a função $\psi(x)$ se torna mais “achatada”, ou seja, as regiões na vizinhança dos valores $x_{2_i} \in \mathcal{D}_{x_i}$ são menos afetadas pela penalidade do método (LAGE, 2013).

O parâmetro γ atua diretamente no controle da amplitude da função $\psi(x)$, de modo que, para valores elevados de γ , a alteração na amplitude tende a descaracterizar a função objetivo modificada/aumentada da original, e, conseqüentemente, distanciar a solução do problema modificado (3.3) da solução do problema original (3.1). Já o ajuste de γ para valores pequenos pode impactar no processo de discretização das variáveis x_{2_i} (LAGE, 2013).

Conforme citado anteriormente, o parâmetro α é empregado para anular a

função $\psi(x)$ quando x_i assumir algum valor discreto pertencente ao conjunto $\mathcal{D}_{x_i}$. É importante ressaltar que esse parâmetro pode variar dentro do intervalo de valores discretos $\mathcal{D}_{x_i}$. Isso ocorre quando o passo discreto, isto é, a distância entre dois valores discretos consecutivos, não é constante, de modo que é necessário definir diferentes valores de α para cada subintervalo cujos passos discretos sejam distintos entre si. A seguir, foram expostos os passos desempenhados pelo algoritmo proposto.

- a) A partir de (3.1), construir a função ψ (3.2) e definir o problema modificado (3.3);
- b) Dado $k = 0$, definir um valor inicial para x_1^0 e x_2^0 . Definir também a estimativa inicial do parâmetro γ^0 , do fator $\tau > 1$ e da tolerância de convergência do algoritmo ξ ;
- c) Resolver o problema modificado (3.3) através de um *sol/ver* comercial, com γ^k fixo;
- d) Admitir x_1^k e x_2^k como solução;
- e) Caso a condição de convergência $|x_{2_i} - x'_{2_i}| < \xi$, para $i = 1, \dots, m_2$, encerrar o algoritmo. Caso não, atualizar o parâmetro γ pela expressão (3.4);
- f) Atualizar $k = k + 1$. Retornar ao passo c).

4. Sistemas de Energia Elétrica: Modelagem Estática

A modelagem adequada de SEEs é fundamental para o processo de tomada de decisão em relação ao planejamento e operação da rede. Devido à grande magnitude desses sistemas, a aplicação de testes diretamente na rede física se torna altamente complexa e pouco viável. Assim, a modelagem matemática surge como ferramenta essencial para a compreensão desses sistemas.

A modelagem de SEEs geralmente é feita por equações do tipo algébrico-diferenciais, devido a suas características não lineares:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y, \lambda, p) \\ g(x, y, \lambda, p) \end{bmatrix} = F(z, \lambda, p) \quad (4.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor das variáveis dos estados dinâmicos dos geradores, dos controles e das cargas do sistema; $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ representa o vetor das variáveis dependentes (magnitudes e ângulos de fase das tensões nas barras de carga); $\lambda \in \mathbb{R}_+$ se refere ao parâmetro empregado na representação das variações na geração e carga; $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ representa o vetor dos parâmetros que podem ser controlados no sistema (injeções de potência ativa e reativa na rede, *taps* de transformadores em-fase, magnitudes de tensão definidas para as barras de geração). A função $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, a qual está associada às variáveis de estado x , representa as equações diferenciais do modelo, enquanto a função $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ está associada às variáveis dependentes y e representa as equações algébricas do modelo (LAGE, 2013).

4.1. Problema de Fluxo de Carga: Formulação

O problema de FC/fluxo de potência se baseia na determinação do estado da rede, ou seja, no cálculo das grandezas que definem o comportamento de uma rede elétrica em estado permanente. Com a resolução de um sistema de equações não lineares, determina-se a magnitude e o ângulo de fase da tensão para cada barra da rede, as quais compõem o seu estado. A partir desses dados, é possível calcular as

demais grandezas que fazem parte do SEE.

A formulação do sistema de equações e inequações cuja resolução leva ao estado da rede é feita através da aplicação da lei de Kirchhoff à rede e das restrições operacionais e de segurança da rede elétrica. A formulação do problema de fluxo de carga apresenta dois tipos principais: a formulação básica e a formulação com barra *slack* distribuída; esta última foi a escolhida para a formulação do problema apresentado neste trabalho.

4.1.1. Formulação Básica do Problema de FC

No problema de FC, quatro grandezas estão associadas a cada barra k da rede: magnitude da tensão na barra (V_k); ângulo de fase da tensão na barra (θ_k); potência ativa líquida injetada na barra (P_k); potência reativa líquida injetada na barra (Q_k). Dessas quatro grandezas, apenas duas são explícitas inicialmente para cada barra, de modo que é possível classificar as barras de acordo com suas grandezas já conhecidas:

a) Barra $V\theta$ / Barra de referência angular / Barra *slack*

- V_k e θ_k conhecidos;
- P_k e Q_k calculados.

b) Barra PV / Barra de geração

- P_k e V_k conhecidos;
- Q_k e θ_k calculados.

c) Barra PQ / Barra de carga

- P_k e Q_k conhecidos;
- V_k e θ_k calculados.

Aplicando-se a lei dos nós de Kirchhoff às barras da rede, duas equações passam a ser associadas a cada barra, denominadas equações de balanço de potência ativa e reativa e representadas conforme as expressões a seguir:

$$P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m, t_{km}) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (4.2)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m, t_{km}) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (4.3)$$

em que os parâmetros apresentados em (6.2) e (6.3) são descritos a seguir (LAGE, 2013):

- $\mathcal{B}$: conjunto de todas as barras do SEE;
- $\mathcal{V}_k$: conjunto das barras vizinhas à barra k ;
- V_k e V_m : magnitudes das tensões nas barras terminais do ramo k - m ;
- θ_k e θ_m : ângulos de fase das tensões nas barras terminais do ramo k - m ;
- t_{km} : *tap* do transformador, considerando o ramo k - m um transformador em-fase;
- P_{km} e Q_{km} : fluxos de potência ativa e reativa no ramo k - m , respectivamente;
- Q_k^{sh} : representa a injeção de potência reativa na barra k pelo elemento *shunt*;
- b_k^{sh} : susceptância do elemento *shunt*;

A modelagem do problema de FC também deve incorporar as restrições operacionais e de segurança da rede elétrica, as quais são ilustradas pelas inequações a seguir:

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G}$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{C}$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{T}$$

em que Q_{G_k} representa a geração de potência reativa nas barras com controle de reativos; $\mathcal{G}$ representa o conjunto das barras de geração da rede; $\mathcal{C}$ representa o conjunto das barras de carga da rede; e $\mathcal{T}$ representa o conjunto dos ramos k - m que

atuam como transformadores em-fase com *tap* controlável.

4.1.2. Formulação do Problema de FC com Barra *Slack* Distribuída

Para a resolução do problema proposto neste trabalho, utilizou-se a formulação com barra *slack* distribuída. Em comparação à formulação básica exposta na seção anterior, há uma mudança na expressão de injeção líquida de potência ativa nas barras de geração do sistema, a qual assume o formato a seguir:

$$P_k = P_{G_k}(1 + K_G) - P_{C_k} \quad (4.4)$$

em que K_G é um fator multiplicado à geração de potência ativa na barra k (P_{G_k}) para suprir as perdas; P_{C_k} representa o consumo de potência ativa na barra k pelas cargas.

Desse modo, com o acréscimo de 1 variável ao sistema, é necessário incluir também mais uma equação para garantir a resolução do problema. A barra de referência angular ou barra $V\theta$ se torna uma do tipo $PV\theta$, já que a injeção líquida de potência ativa para atender a demanda dessa barra passa a ser conhecida. A equação adicional da formulação com barra *slack* distribuída, a qual permite calcular as perdas, é dada por:

$$P_L = K_G \sum_{k=1}^{nB} P_{G_k} \quad (4.5)$$

em que P_L representa a componente das perdas; e nB representa o número de barras do sistema em questão.

A resolução apresentada na seção a seguir se refere à formulação com barra *slack* distribuída.

4.2. Problema de FC: Resolução

O sistema de equações não lineares (4.2) -(4.3) pode ser dividido em dois sistemas menores; a resolução do subsistema 1 já determina o estado (V_k, θ_k) da

rede, enquanto as demais grandezas de interesse são obtidas pela resolução do subsistema 2. A resolução apresentada a seguir se refere à formulação com barra *slack* distribuída.

Para o subsistema 1, busca-se calcular V_k , θ_k e K_G . O cálculo é feito a partir da aplicação de um método iterativo ao sistema de equações, como o de Newton-Raphson, por exemplo. A solução é atingida quando o erro das equações de balanço atender a uma tolerância definida no início do método. Este subsistema é composto por:

- N° de equações e incógnitas: $2n_{pq} + n_{pv} + 1$

$$\begin{cases} P_{G_k}(1 + K_G) - P_{C_k} - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m, t_{km}) = 0 & \forall k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{C} \\ Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m, t_{km}) = 0 & \forall k \in \mathcal{C} \end{cases}$$

em que n_{pq} e n_{pv} representam o número de barras do tipo PQ e PV, respectivamente. A unidade somada ao número de equações representa a barra de referência angular ($V\theta$) do sistema, que passa a ser incluída no cálculo por se tratar da formulação com barra *slack* distribuída.

Já para o subsistema 2, busca-se calcular Q_k nas barras do tipo PV e na barra de referência angular, pelas mesmas expressões que compõem o subsistema 1. Dessa forma, o subsistema 2 é composto por $n_{pv} + 1$ equações não lineares, também com o mesmo número de incógnitas, e pode ser resolvido diretamente de maneira trivial.

Depois que todas as grandezas de interesse foram calculadas, é importante verificar se os limites operacionais da rede foram atendidos. Caso não forem atendidos, realizar o ajuste das variáveis de controle:

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G}$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{C}$$

5. Problema de FPOR

O FPO é aplicado a um SEE com o objetivo de determinar o ajuste ótimo das variáveis de controle em função de um determinado desempenho operacional do sistema. Este problema é caracterizado como restrito, estático, não convexo, de grande porte e com variáveis contínuas e discretas (LAGE, 2013). O problema de FPOR pode ser definido de acordo com:

$$\min \quad f(x) \quad (5.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (5.1b)$$

$$h_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (5.1c)$$

$$x_{1_i}^{\min} \leq x_{1_i} \leq x_{1_i}^{\max} \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (5.1d)$$

$$x_{2_i} \in \mathcal{D}_{x_i} \quad i = 1, \dots, m_2 \quad (5.1e)$$

em que os elementos contidos nessa formulação são descritos a seguir:

- $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$: vetor das variáveis contínuas do sistema;
- $x_2 \in \mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^{m_2}$: vetor das variáveis de controle discretas do sistema, tal que $x = (x_1, x_2)$;
- $\mathcal{D}_x$: conjunto dos valores discretos da variável x_2 ;
- $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}$: função escalar que representa o desempenho operacional a ser minimizado pelo FPO;
- $g : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$: representa as restrições de igualdade compostas pelas equações do problema de FC;
- $h : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^q$: representa as restrições de desigualdade compostas pelos limites operacionais e de segurança do sistema;
- $x_{1_i}^{\min}, x_{1_i}^{\max}$: limites mínimo e máximo das variáveis contínuas do sistema;

5.1. Problema de FPOR: Formulação

Com o objetivo de minimizar as perdas ativas na transmissão, o modelo simplificado de FPO proposto neste trabalho é do tipo FPOR, de forma que as

variáveis de controle associadas à potência reativa são ajustadas para garantir a minimização do dado operacional do sistema, enquanto aquelas associadas à potência ativa são mantidas fixas. Os modelos de FPOR nos quais o modelo proposto neste trabalho se baseia estão descritos a seguir.

5.1.1. Formulação com Variáveis de Controle Discretas

A modelagem discreta dos *taps* e das susceptâncias equivalentes faz parte desta formulação do problema de FPOR, o qual é definido conforme o conjunto de equações/inequações a seguir:

$$\min \sum_{k,m \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (5.2a)$$

$$\text{s.a:} \quad P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{C} \quad (5.2b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (5.2c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (5.2d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (5.2e)$$

$$b_k^{sh} \in \mathcal{D}_k^{sh} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.2f)$$

$$t_{km} \in \mathcal{D}_{km}^{tap} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.2g)$$

em que os elementos que compõem o modelo são descritos a seguir:

- V, θ : vetores das magnitudes e ângulos de fase de tensão nas barras;
- t : vetor dos *taps* variáveis de transformadores em-fase;
- b_{sh} : vetor das susceptâncias equivalentes dos elementos (bancos de capacitores e reatores) *shunt*;
- $\mathcal{B}^{sh}$: conjunto das barras com controle de magnitude de tensão por elementos

shunt;

- $\mathcal{T}$: conjunto de transformadores com *tap* variável;
- $\mathcal{L}$: conjunto das linhas de transmissão;
- $\mathcal{D}_k^{sh}$: conjunto dos valores discretos da susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt*;
- $\mathcal{D}_{km}^{tap}$: conjunto dos valores discretos dos *taps* de transformadores.

5.1.2. Formulação por Relaxação Contínua

A formulação aqui proposta busca otimizar as perdas ativas do sistema e está sujeito às equações de balanço de potência ativa e reativa nas barras, aos limites das variáveis de controle contínuas do sistema, e aos limites de geração de potência reativa (LAGE, 2013). Este modelo é definido conforme as expressões a seguir:

$$\min \sum_{k,m \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (5.3a)$$

$$\text{s.a:} \quad P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{C} \quad (5.3b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (5.3c)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (5.3d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (5.3e)$$

$$b_k^{sh,min} \leq b_k^{sh} \leq b_k^{sh,max} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.3f)$$

$$t_{km}^{min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{max} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.3g)$$

A resolução do problema (5.3) resulta nos valores ótimos das magnitudes e ângulo de fase de tensão da rede, nos ajustes dos *taps*, e das susceptâncias dos elementos *shunt*.

5.1.3. Formulação por Relaxação Contínua com Penalização pela Função Seno-quadrado

Esta formulação ilustra o modelo utilizado no desenvolvimento deste trabalho. Nesta formulação, foi inserida a penalização pela função seno-quadrado para discretizar as variáveis de controle tratadas como contínuas pela relaxação:

$$\min \quad \sum_{k,m \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \quad (5.4a)$$

$$\text{s.a:} \quad P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{C} \quad (5.4b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (5.4c)$$

$$b_k^{sh} = w_k * b_k^{sh'} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.4d)$$

$$t_{km} = tap_{min_{km}} + s_{km} * step_{km} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.4e)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (5.4f)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (5.4g)$$

$$w_k \in \mathcal{W}_k^{sh} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.4h)$$

$$s_{km} \in \mathcal{S}_{km}^{tap} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.4i)$$

em que w_k e s_{km} são as variáveis auxiliares de controle ajustadas no problema de FPOR; $b_k^{sh'}$ é um parâmetro conhecido da rede, e representa a susceptância equivalente inicial; $tap_{min_{km}}$ é o valor mínimo do tap dos transformadores no ramo km ; e $step_{km}$ representa o passo entre 2 valores consecutivos discretos pertencentes ao conjunto dos $taps$ de transformadores $\mathcal{T}$; $\mathcal{W}_k^{sh} \subset \mathbb{R}$ representa o

conjunto de valores discretos da variável auxiliar associada à susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt*; $\mathcal{S}_{km}^{tap} \subset \mathbb{R}$ representa o conjunto de valores discretos da variável auxiliar associada aos *taps* de transformadores.

Os conjuntos $\mathcal{W}_k^{sh}$ e $\mathcal{S}_{km}^{tap}$, por sua vez, são dados por:

$$\mathcal{W}_k^{sh} = \begin{cases} \{0; 1; 1.5\} & \text{se } b_k^{sh'} \geq 0 \\ \{0; 1\} & \text{se } b_k^{sh'} < 0 \end{cases} \quad (5.5.1)$$

$$(5.5.2)$$

$$\mathcal{S}_{km}^{tap} = \left\{ 0; 1; 2; \dots ; \left(\frac{tap_{max_{km}} - tap_{min_{km}}}{step_{km}} \right) \right\} \quad (5.6)$$

Em relação ao conjunto $\mathcal{W}_k^{sh}$, a expressão (5.5.1) ilustra a susceptância equivalente associada a um banco de capacitores, de modo que, para os SEEs tratados neste trabalho, o banco de capacitores pode ser chaveado nessas 3 “posições”. Já a expressão (5.5.2) ilustra a susceptância equivalente associada a reatores *shunt*, os quais só podem ser ligados (1) e desligados (0) na operação do SEE. Em relação ao conjunto $\mathcal{S}_{km}^{tap}$, a expressão $\frac{tap_{max_{km}} - tap_{min_{km}}}{step_{km}}$ (5.6) representa o valor máximo de passos discretos do conjunto $\mathcal{T}$.

Com a inclusão da função ψ à função objetivo (5.4a), foi definido o modelo com relaxação contínua e penalizado pela função seno-quadrado:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left[\sum_{k,m \in \mathcal{L} \cup \mathcal{T}} g_{km} \left(\frac{1}{t_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{t_{km}} V_k V_m \cos \theta_{km} \right) \right] + \\ & + \gamma_1 (\sum_{i=1}^{m1} \psi_1(s_{km})) + \gamma_2 (\sum_{i=1}^{m2} \psi_2(w_k)) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\text{s.a:} \quad P_k - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{C} \quad (5.7b)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \mathcal{V}_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{C} \quad (5.7c)$$

$$b_k^{sh} = w_k * b_k^{sh'} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.7d)$$

$$t_{km} = tap_{min_{km}} + s_{km} * step_{km} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.7e)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta) \leq Q_{G_k}^{max} \quad \forall k \in \mathcal{G} \quad (5.7f)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B} \quad (5.7g)$$

$$w_k^{min} \leq w_k \leq w_k^{max} \quad \forall k \in \mathcal{B}^{sh} \quad (5.7h)$$

$$s_{km}^{min} \leq s_{km} \leq s_{km}^{max} \quad \forall k, m \in \mathcal{T} \quad (5.7i)$$

Além disso, a fim de garantir a robustez da modelagem proposta, uma etapa de recuperação foi incorporada, para correção de uma eventual condição de “falso ótimo”. Esta situação pode ocorrer quando um dos pontos de discretização se encontra muito próximo da região de fronteira do problema pelo lado infactível. Desse modo, a etapa de recuperação é iniciada apenas quando a condição de “falso ótimo” ocorre (GISVOLD; MOE, 1972).

Assim que a condição de “falso ótimo” é atingida, a etapa de recuperação força o ponto de discretização para o seu valor discreto imediatamente superior ou inferior mais distante, de modo a garantir o afastamento da região de fronteira infactível do problema.

6. Resultados Numéricos

A robustez do método proposto para resolução dos problemas de FPOR abordada neste trabalho foi testada através da sua aplicação nos sistemas IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras. A implementação do modelo proposto neste trabalho foi realizada no ambiente de programação AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2002).

A análise da eficácia de diferentes *solvers* comerciais na obtenção dos valores ótimos do problema também foi realizada. Os *solvers* utilizados foram: CONOPT, IPOPT, MINOS, SNOPT.

6.1. Sistema IEEE de 14 barras

Este sistema é composto por:

- 1 barra *slack*;
- 4 barras do tipo PV, com controle de geração de reativos;
- 9 barras de carga (tipo PQ);
- 1 banco de capacitores;
- 20 ramos, divididos em:
 - 17 linhas de transmissão;
 - 3 transformadores com *tap* variável;

Os limites máximo e mínimo da magnitude de tensão adotados para este sistema foram 1,05 e 0,95 p.u., respectivamente.

Já para os *taps* de transformadores, os limites máximo e mínimo foram 1,1 e 0,9 p.u. O valor de $step_{km}$ foi 0,00625 p.u.

6.1.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas

Inicialmente, foi resolvido o problema de FPOR para o sistema de 14 barras pela modelagem com variáveis contínuas, para que pudesse ser traçado um comparativo com o modelo com variáveis discretas proposto nesse trabalho. O *solver* comercial CONOPT foi o escolhido para determinação dos ajustes ótimos das

variáveis de controle em função da minimização das perdas ativas na transmissão, os quais estão expostos na Tabela 6.1 a seguir:

Tabela 6.1 – Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 14 barras pelo modelo com variáveis contínuas.

Barra (k)	V_k (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
1	1,050	-	-
2	1,036	-	-
3	1,006	-	-
6	1,050	-	-
8	1,050	-	-
9	-	1,5	0,285
Nó inicial (k)	Nó final (m)	s_{km}	t_{km} (p.u.)
4	7	23,5656	1,0473
4	9	0	0,9000
5	6	12,9085	0,9807
Perdas ativas na transmissão: 13,6030 MW			

6.1.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas

Nesta abordagem, os *taps* dos transformadores e a susceptância equivalente do elemento *shunt* da barra 9 são tratados como variáveis de controle discretas. As estimativas iniciais dos parâmetros que compõem este modelo, para cada *solver* utilizado, estão descritas na Tabela 6.2, em que γ_1 representa o parâmetro da função senoidal ψ associada aos *taps* dos transformadores, e γ_2 representa o parâmetro da função senoidal ψ associada ao elemento *shunt* da barra 9.

Em seguida, para cada *solver* utilizado, são apresentados os valores dos *taps* dos transformadores, da susceptância equivalente do *shunt* da barra 9 e das perdas ativas para cada iteração do método.

Tabela 6.2 – Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada *sol/ver* comercial – Sistema IEEE de 14 barras.

	Conopt	Ipopt	Minos	Snopt
γ_1	10^{-7}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}
γ_2	10^{-7}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}
β	1	1	1	1
τ	10	10	10	10
ξ	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

6.1.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt*

A seguir, as Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 ilustram os valores das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt* na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *sol/ver* comercial.

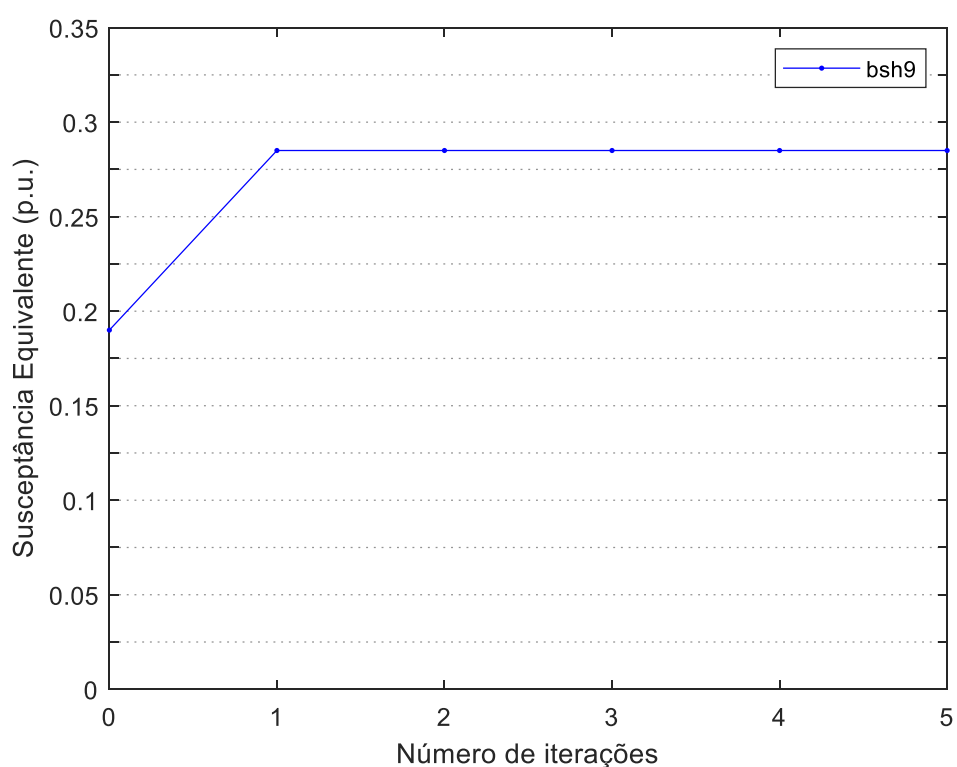


Figura 6.1 – Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *sol/ver* CONOPT.

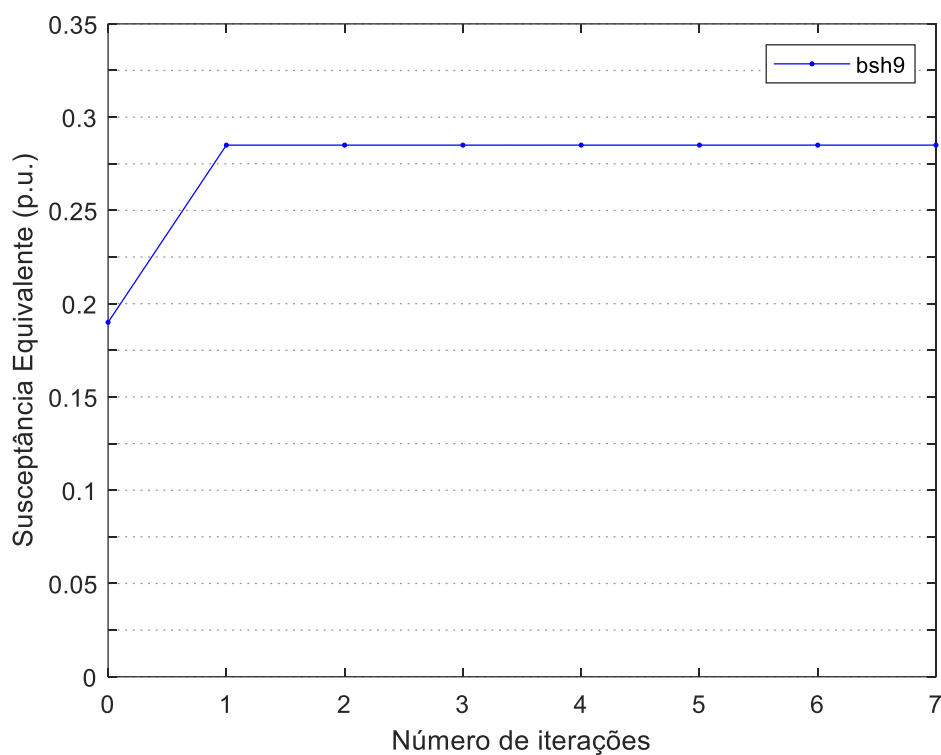


Figura 6.2 – Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *so/ver* IPOPT.

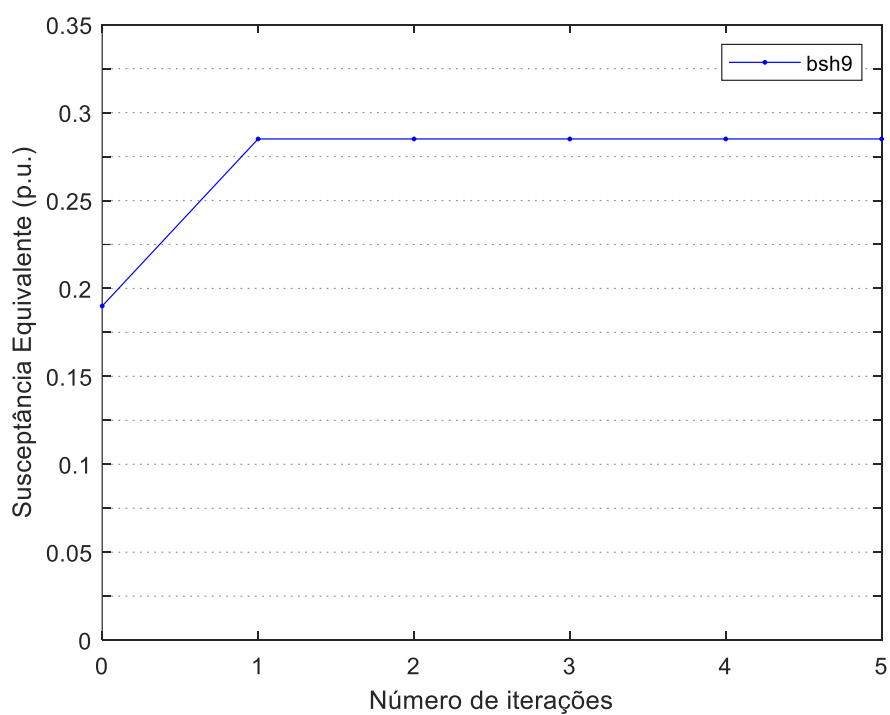


Figura 6.3 – Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *so/ver* MINOS.

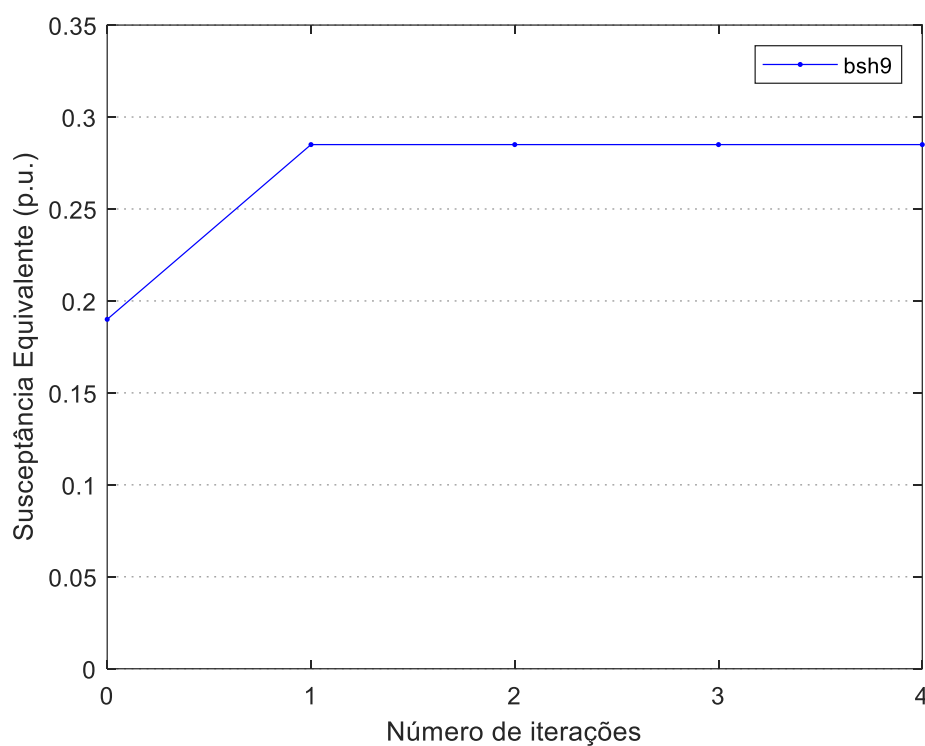


Figura 6.4 – Valor da susceptância equivalente do banco de capacitores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

6.1.2.2. Convergência dos *taps* dos transformadores em fase

A seguir, as Figuras 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8 ilustram os valores dos *taps* dos transformadores em fase na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *solver* comercial.

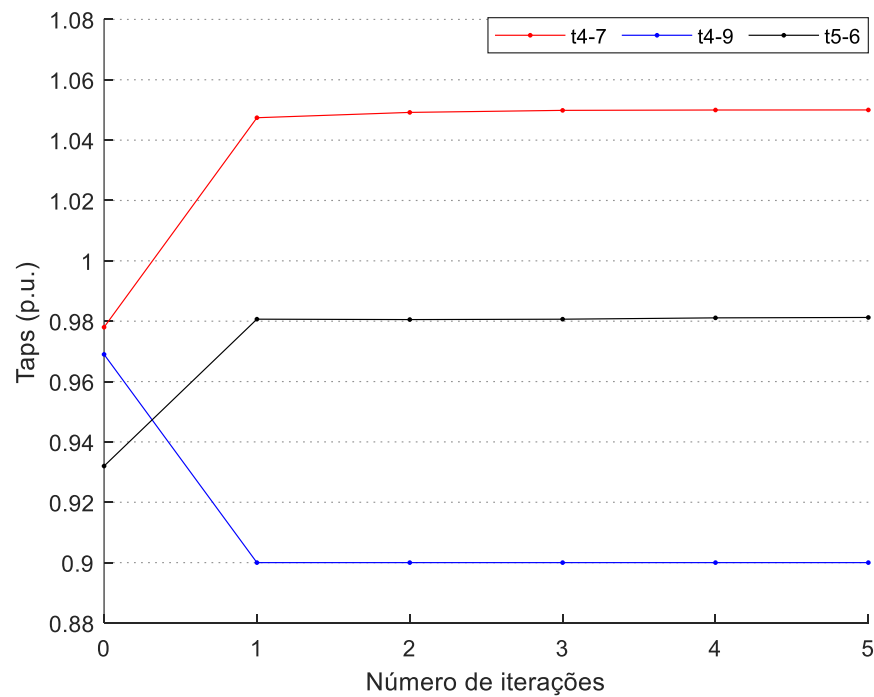


Figura 6.5 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* CONOPT.

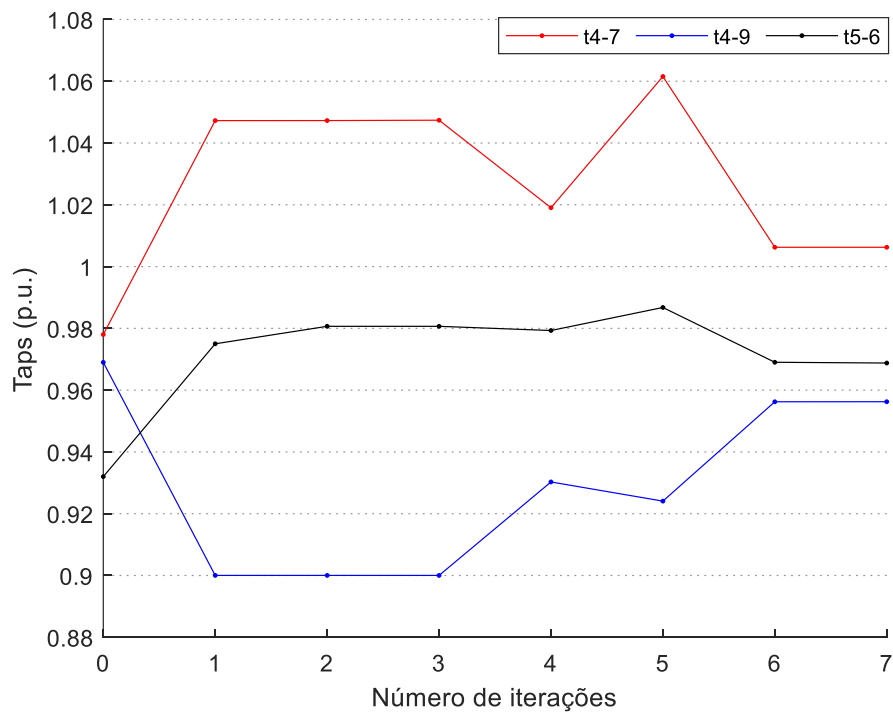


Figura 6.6 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* IPOPT.

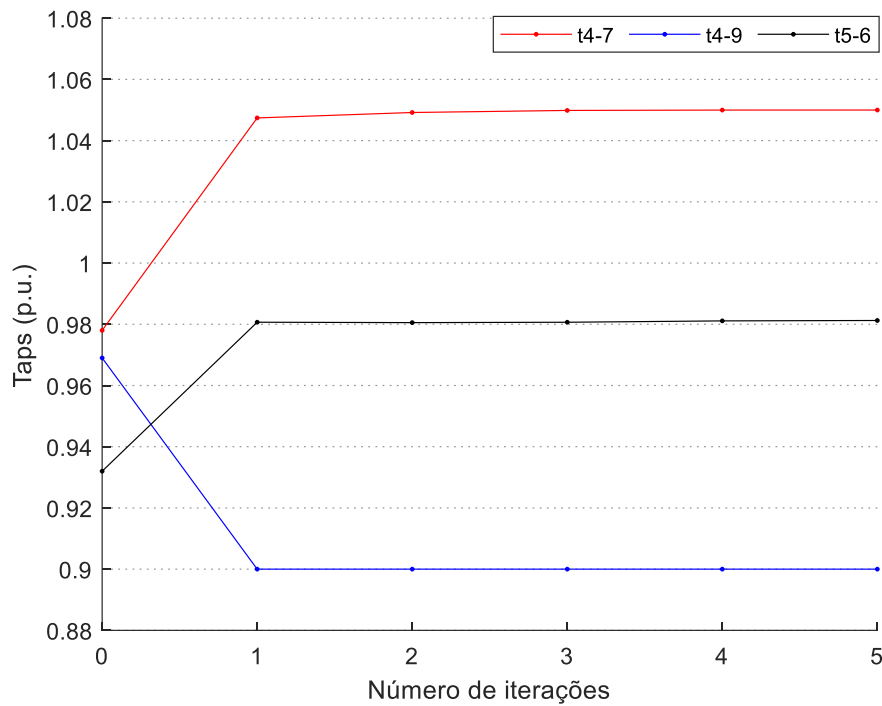


Figura 6.7 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* MINOS.

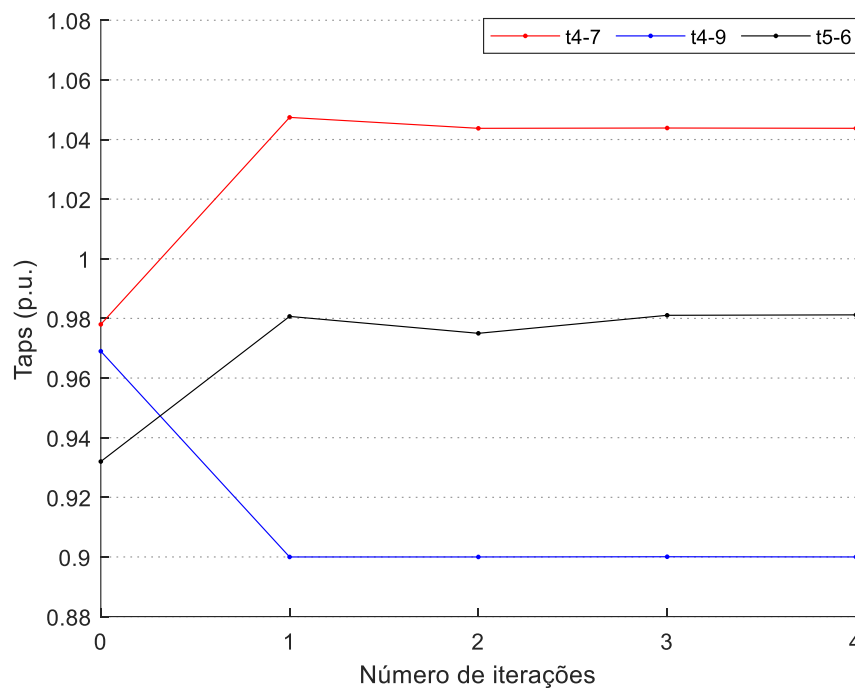


Figura 6.8 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

Além disso, traçou-se um comparativo para os perfis das magnitudes de tensão entre o modelo com variáveis de controle contínuas e o modelo com variáveis de controle discretas. Este comparativo é ilustrado pela Figura 6.9.

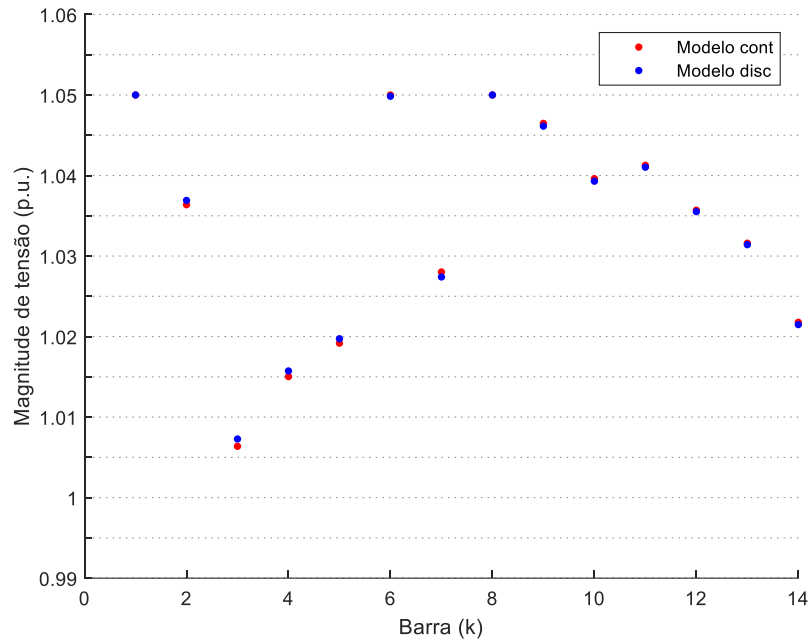


Figura 6.9 – Perfis das magnitudes de tensão para o modelo com variáveis de controle contínuas e para o modelo com variáveis de controle discretas para o sistema IEEE de 14 barras pelo *solver* CONOPT.

6.1.2.3. Perdas ativas do sistema

A seguir, as Figuras 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13 ilustram os valores das perdas ativas na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *sol/ver* comercial.

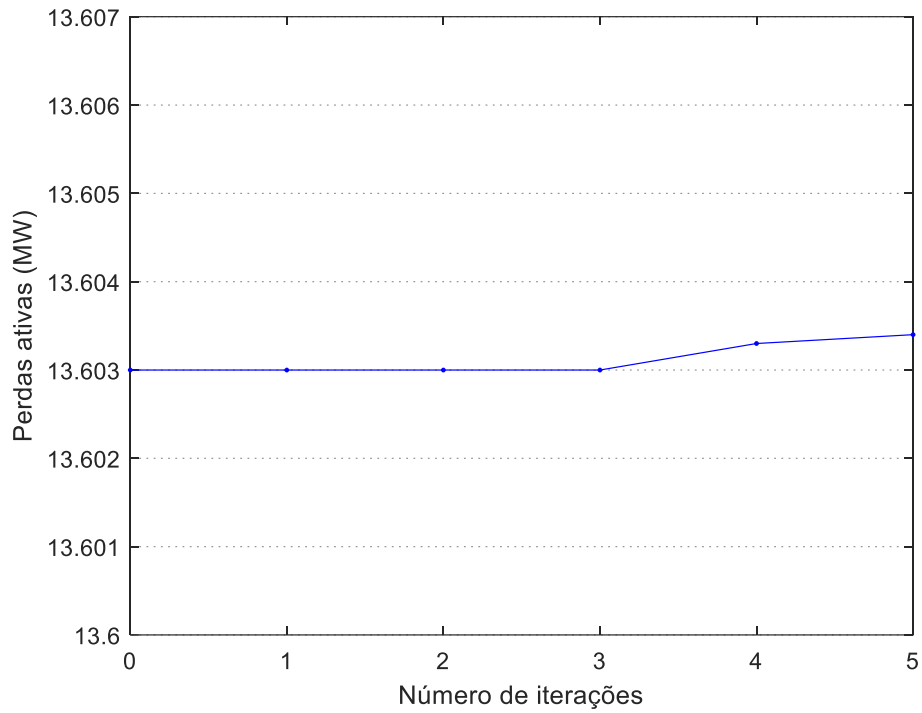


Figura 6.10 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* CONOPT.

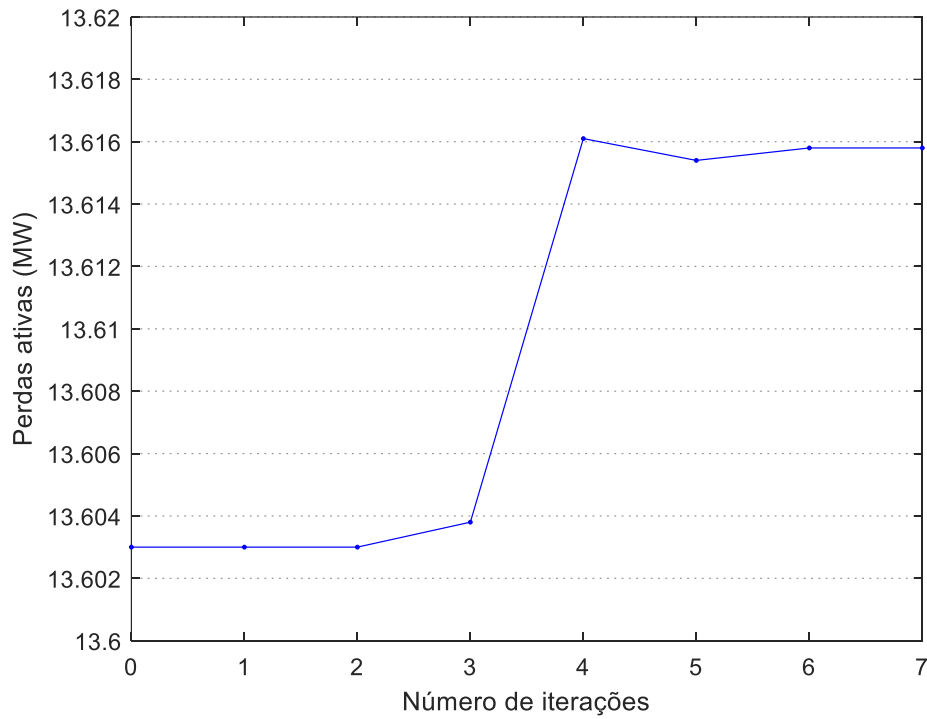


Figura 6.11 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* IPOPT.

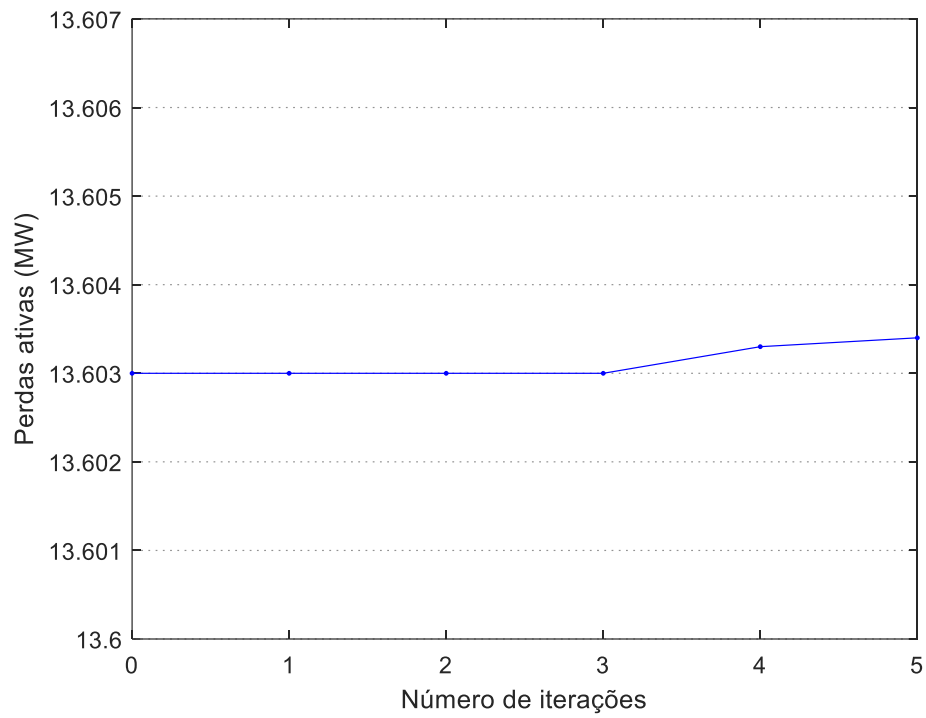


Figura 6.12 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* MINOS.

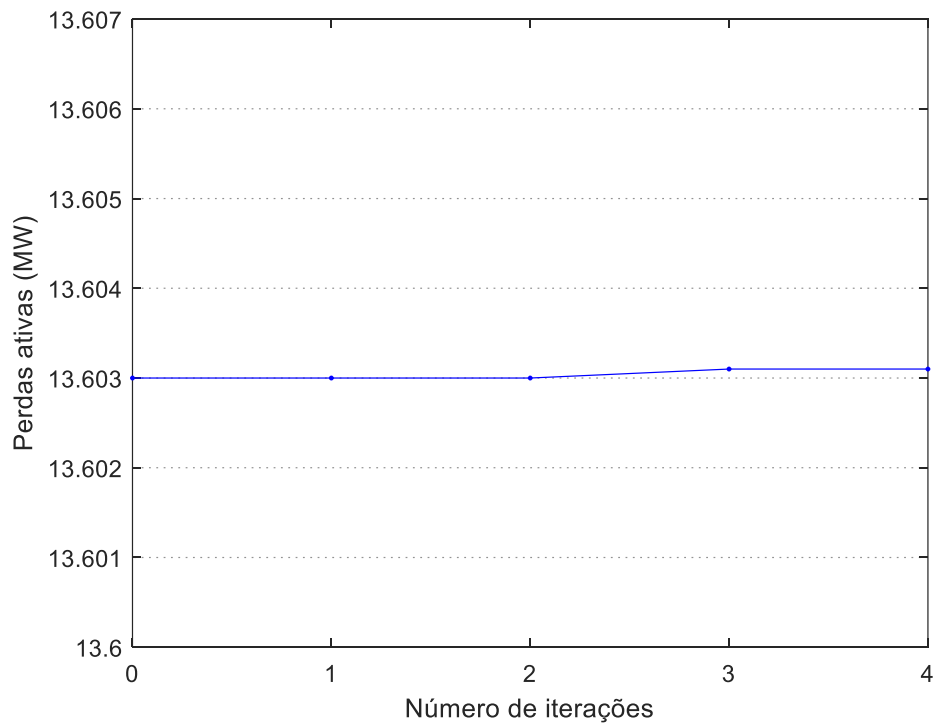


Figura 6.13 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 14 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

A Tabela 6.3 expõe os valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 14 barras pelo modelo com variáveis discretas, assim como as perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método, para cada *solver* comercial utilizado.

Tabela 6.3 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 14 barras pelo modelo com variáveis discretas.

		CONOPT		IPOPT		MINOS		SNOPT	
Barra (k)		w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
9		1,5	0,285	1,5	0,285	1,5	0,285	1,5	0,285
Nó inicial (k)	Nó Final (m)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)
4	7	24	1,0500	17	1,0062	24	1,0500	23	1,0437
4	9	0	0,9000	9	0,9562	0	0,9000	0	0,9000
5	6	13	0,981235	11	0,9687	13	0,9812	13	0,9812
Perdas ativas na transmissão (MW)		13,6034 MW		13,6158 MW		13,6034 MW		13,6031 MW	
Número de iterações		5		6		5		4	

6.2. Sistema IEEE de 30 barras

Este sistema é composto por:

- 1 barra *slack*;
- 5 barras do tipo PV, com controle de geração de reativos;
- 24 barras de carga (tipo PQ);
- 2 bancos de capacitores;
- 41 ramos, divididos em:
 - 37 linhas de transmissão;
 - 4 transformadores com *tap* variável;

Os limites máximo e mínimo da magnitude de tensão adotados para este sistema foram 1,05 e 0,95 p.u., respectivamente.

Já para os *taps* de transformadores, os limites máximo e mínimo foram 1,1 e 0,9 p.u. O valor de $step_{km}$ foi 0,00625 p.u.

6.2.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas

A partir da resolução do problema de FPOR para o sistema de 30 barras pela modelagem com variáveis contínuas através do *solver* CONOPT, determinou-se os ajustes ótimos das variáveis de controle, os quais estão expostos na Tabela 6.4 a seguir. Estes valores foram utilizados para comparação com os resultados obtidos pela modelagem com variáveis de controle discretas:

Tabela 6.4 – Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 30 barras pelo modelo com variáveis contínuas.

Barra (k)	V_k (p.u.)	w_k (p.u.)	b_k^{sh} (p.u.)
1	1,050	-	-
2	1,035	-	-
5	1,003	-	-
8	1,009	-	-
10	-	1,5	0,285
11	1,050	-	-
13	1,050	-	-
24	-	1,5	0,0645
Nó inicial (k)	Nó final (m)	s_{km}	t_{km} (p.u.)
6	9	31,2138	1,0951
6	10	3,3644	0,9210
4	12	16,0868	1,0005
28	27	9,3922	0,9587

6.2.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas

Nesta abordagem, os *taps* dos transformadores e a susceptância equivalente são tratados como variáveis de controle discretas.

As estimativas iniciais dos parâmetros que compõem este modelo, para cada *solver* utilizado, estão descritas na Tabela 6.5, em que γ_1 representa o parâmetro da função senoidal ψ associada aos *taps* dos transformadores, e γ_2 representa o parâmetro da função senoidal ψ associada ao elemento *shunt* das barras 10 e 24.

Em seguida, para cada *solver* utilizado, são apresentados os valores dos *taps* dos transformadores, da susceptância equivalente do *shunt* das barras 10 e 24, e das perdas ativas para cada iteração do método.

Tabela 6.5 – Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada *solver* comercial – Sistema IEEE de 30 barras.

	Conopt	Ipopt	Minos	Snopt
γ_1	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-7}
γ_2	10^{-7}	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	10^{-7}
β	1	1	1	1
τ	10	10	10	10
ξ	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

6.2.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt*

A seguir, as Figuras 6.14, 6.15, 6.16 e 6.17 ilustram os valores das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt* na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *solver* comercial.

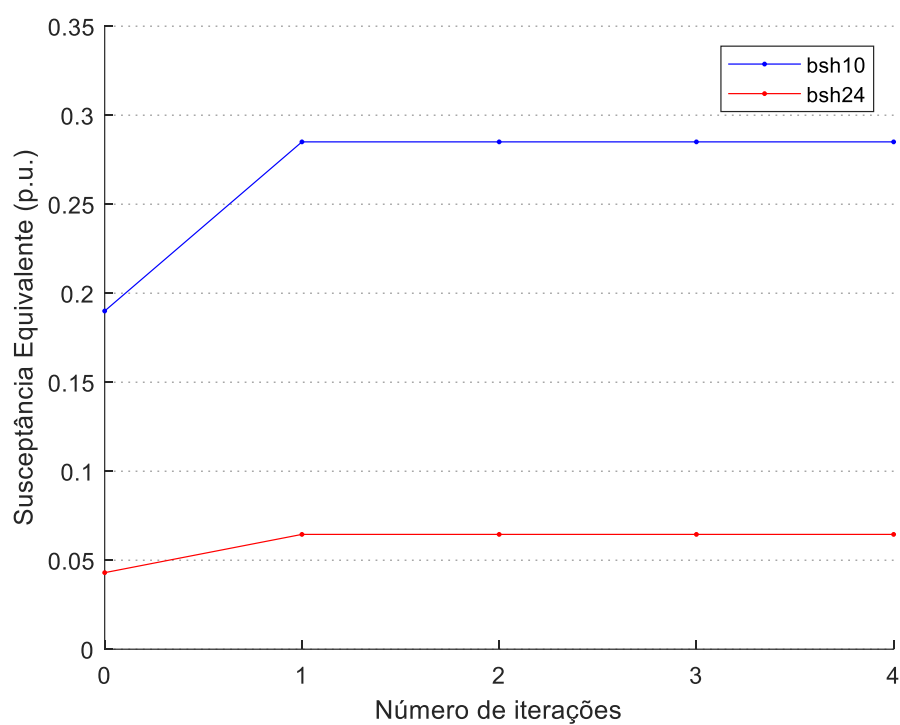


Figura 6.14 – Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* CONOPT.

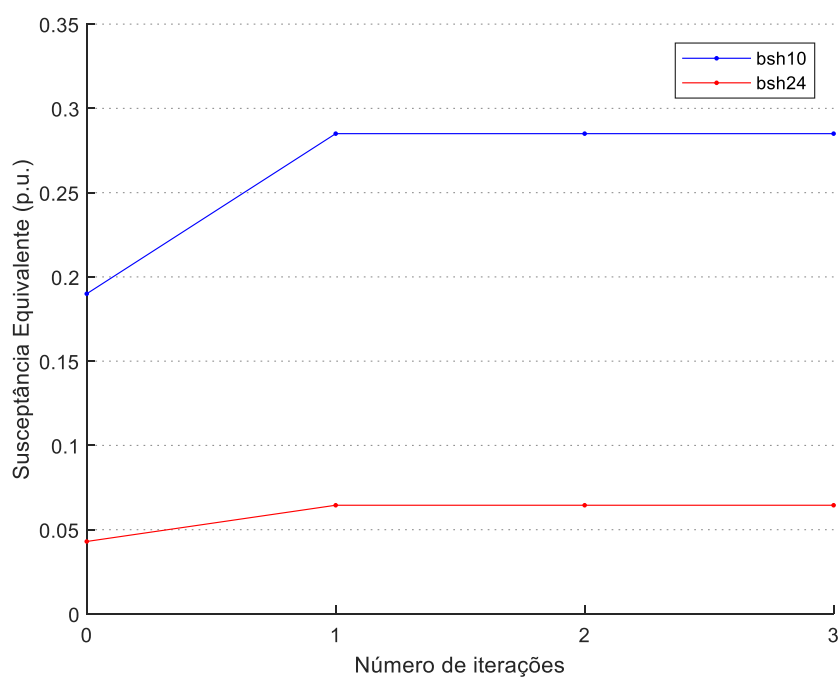


Figura 6.15 – Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* IPOPT.

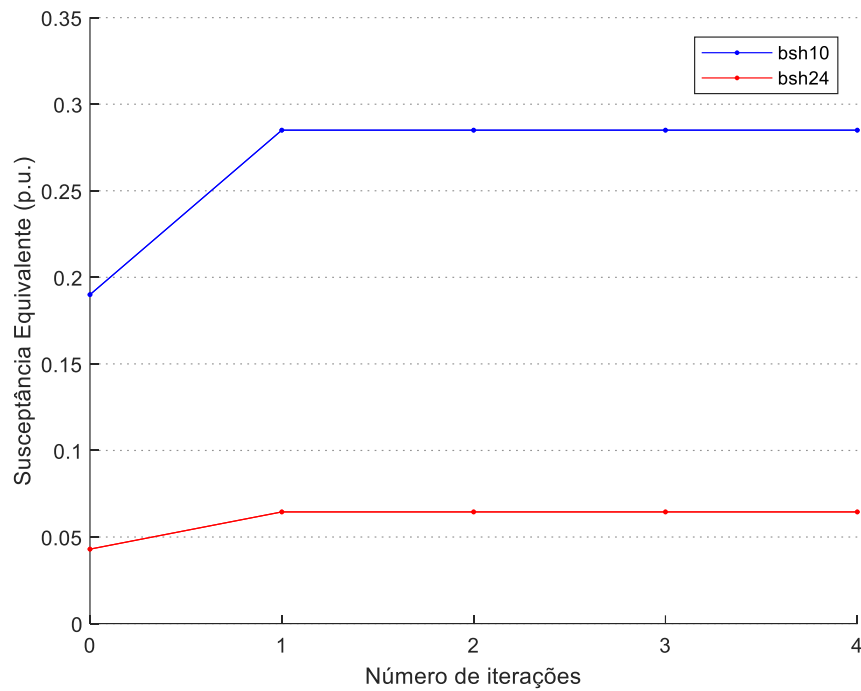


Figura 6.16 – Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* MINOS.

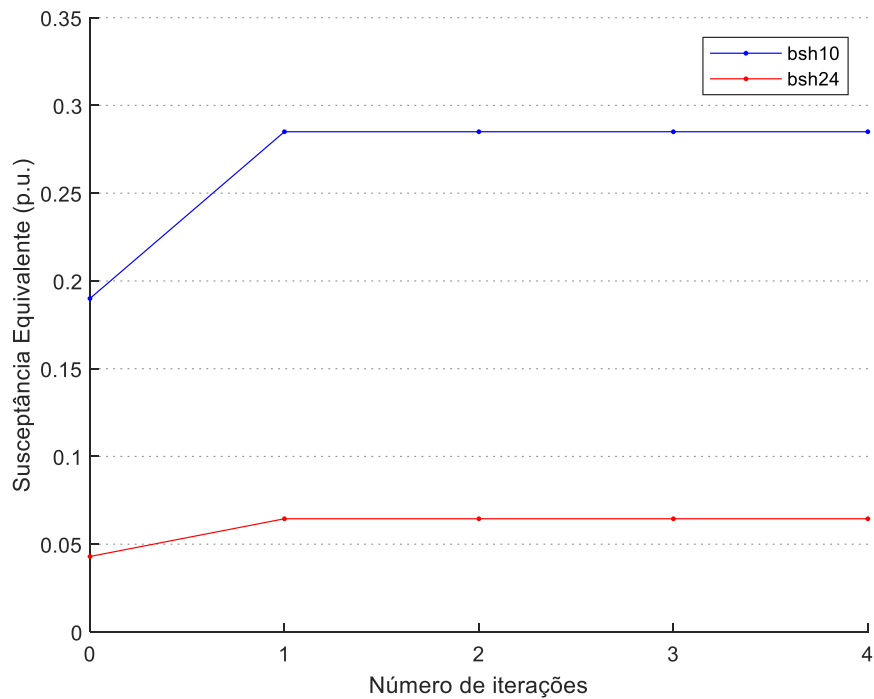


Figura 6.17 – Valor da susceptância equivalente dos bancos de capacitores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

6.2.2.2. Convergência dos *taps* dos transformadores em fase

A seguir, as Figuras 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21 ilustram os valores dos *taps* dos transformadores em fase na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *solver* comercial.

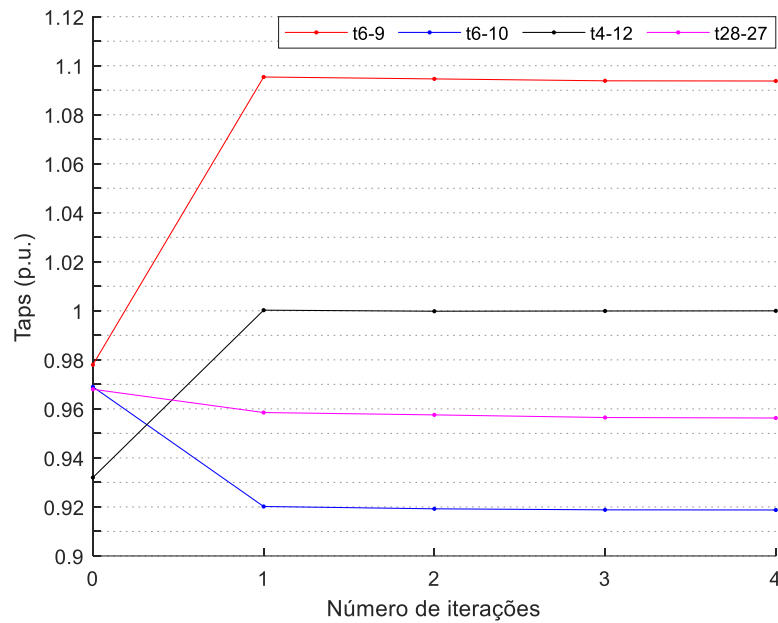


Figura 6.18 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* CONOPT.

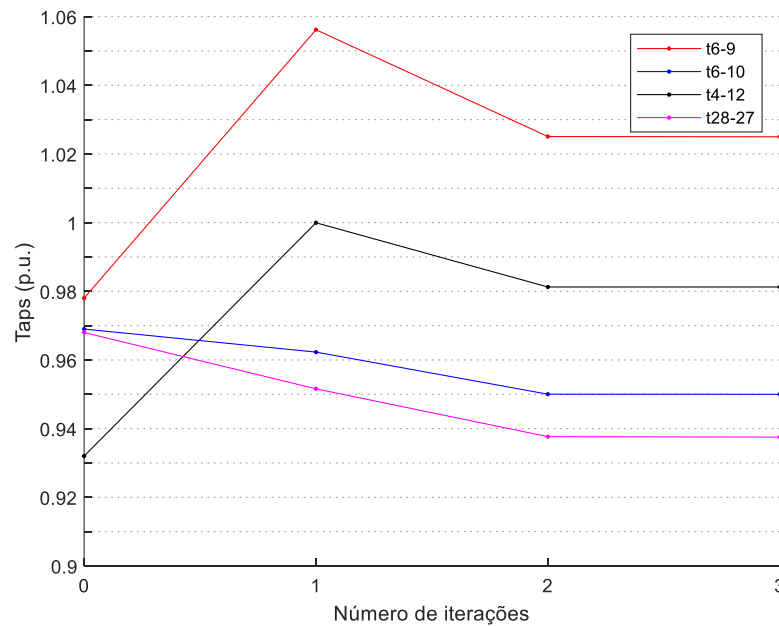


Figura 6.19 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* IPOPT.

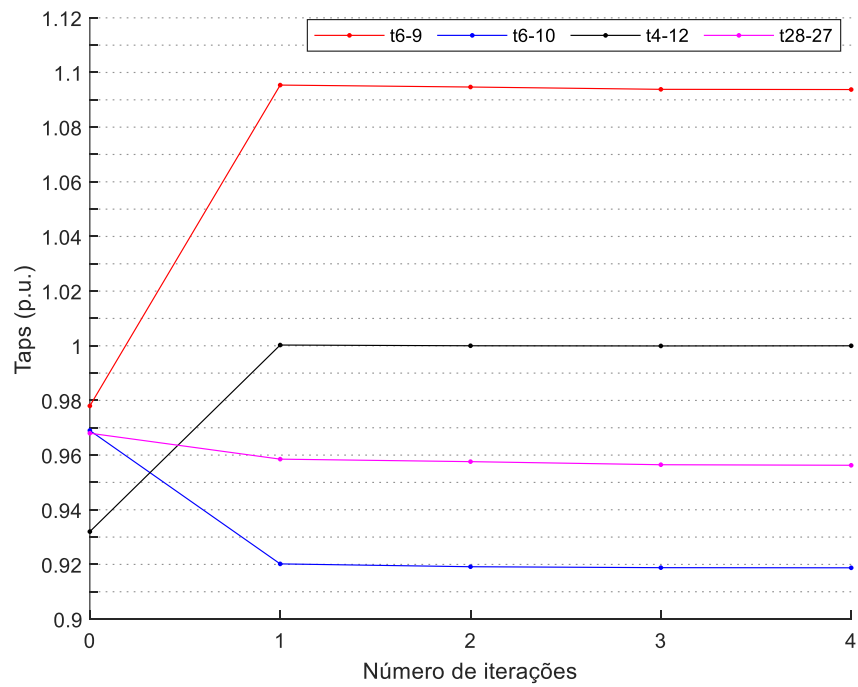


Figura 6.20 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* MINOS.

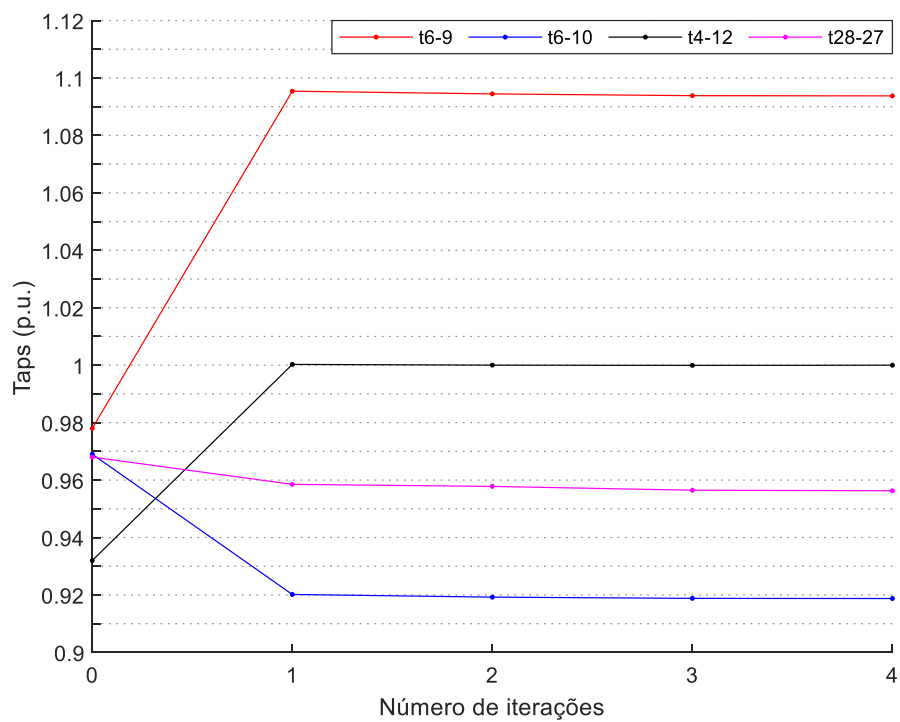


Figura 6.21 – Valores dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

Além disso, traçou-se um comparativo para os perfis das magnitudes de tensão entre o modelo com variáveis de controle contínuas e o modelo com variáveis de controle discretas, o qual é ilustrado pela Figura 6.22.

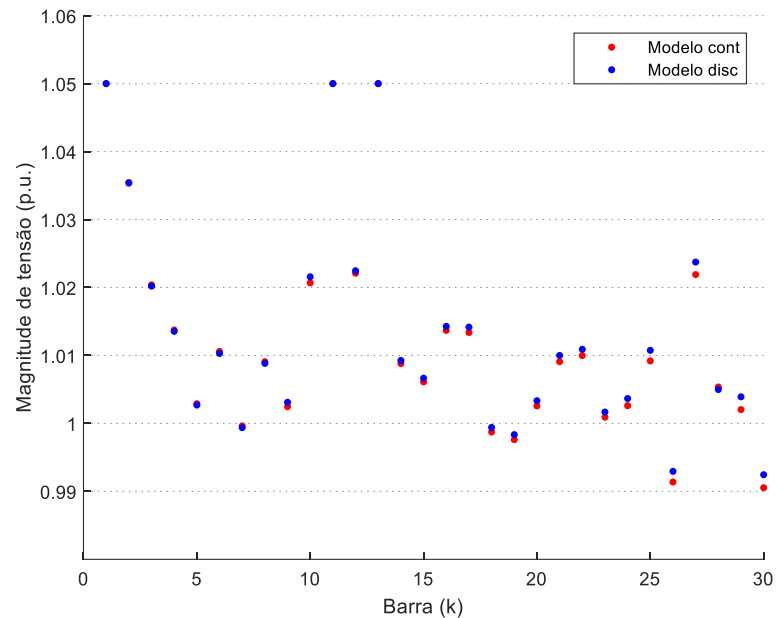


Figura 6.22 – Perfis das magnitudes de tensão para os modelos com variáveis de controle contínuas e com variáveis de controle discretas para o sistema IEEE de 30 barras pelo *solver* CONOPT.

6.2.2.3. Perdas ativas do sistema

A seguir, as Figuras 6.23, 6.24, 6.25 e 6.26 ilustram os valores das perdas ativas na transmissão, para cada iteração do método, e para cada *solver* comercial.

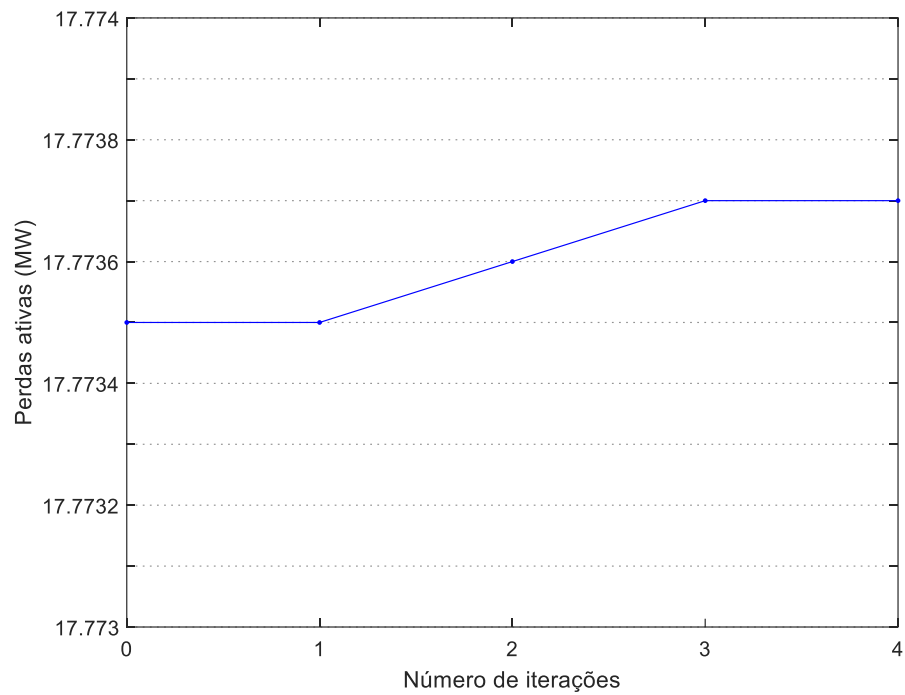


Figura 6.23 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* CONOPT.

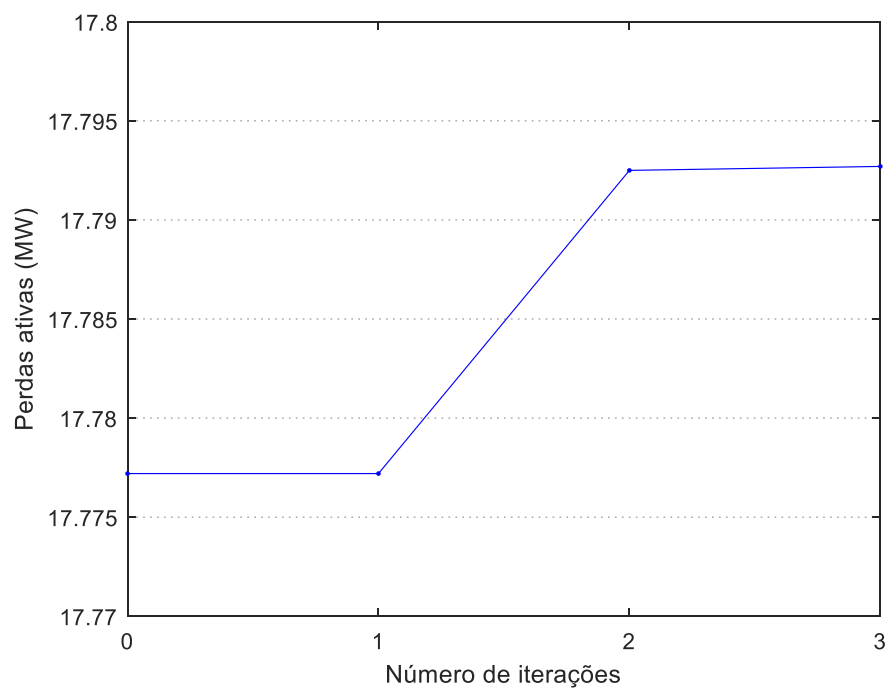


Figura 6.24 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* IPOPT.

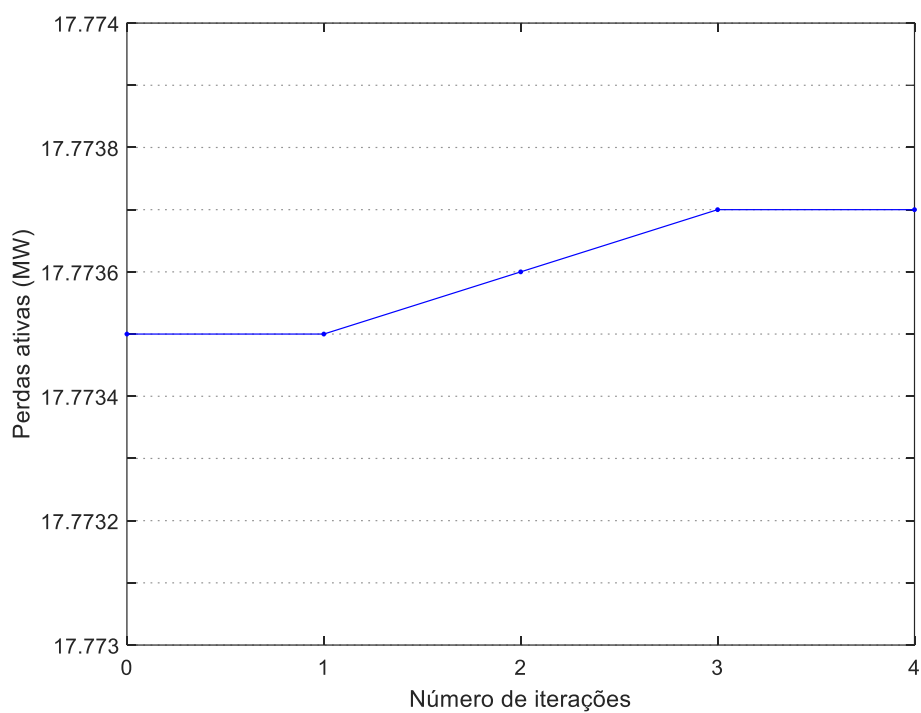


Figura 6.25 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* MINOS.

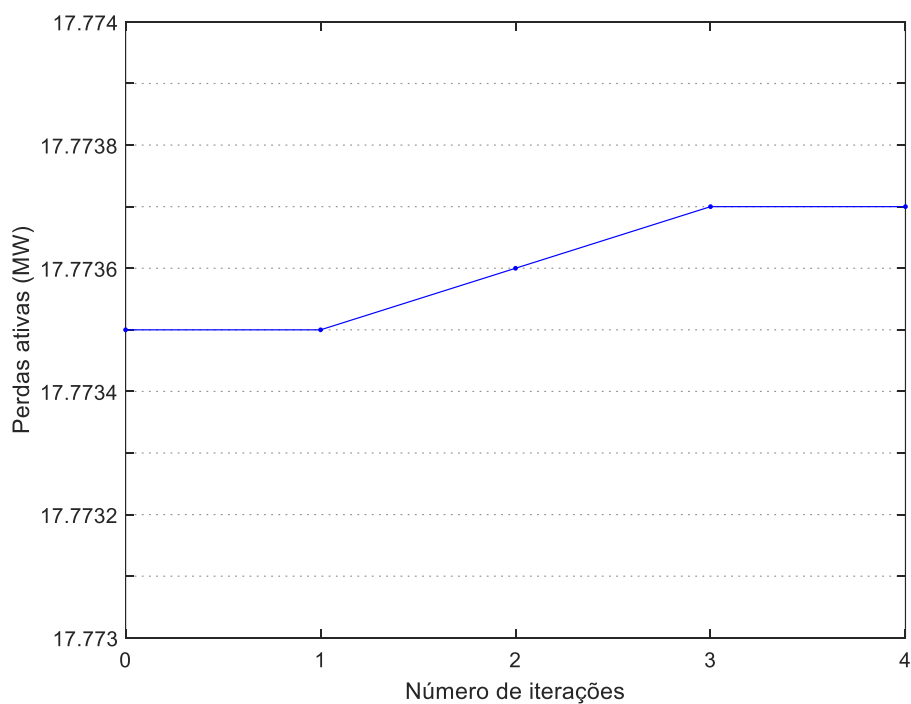


Figura 6.26 – Valores das perdas ativas no sistema IEEE de 30 barras para cada iteração do processo de resolução do FPOR pelo *solver* SNOPT.

A Tabela 6.6 expõe os valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 30 barras pelo modelo com variáveis discretas, assim como as perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método, para cada *solver* comercial utilizado.

Tabela 6.6 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 30 barras pelo modelo com variáveis discretas.

		CONOPT		IPOPT		MINOS		SNOPT	
Barra (k)		w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
10		1,5	0,2850	1,5	0,2850	1,5	0,2850	1,5	0,2850
24		1,5	0,0645	1,5	0,0645	1,5	0,0645	1,5	0,0645
Nó inicial (k)	Nó final (m)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)
6	9	31,001	1,0937	20,001	1,0250	31,001	1,0937	31,001	1,0937
6	10	3,001	0,9187	8,000	0,9500	3,001	0,9187	3,001	0,9187
4	12	15,998	0,9999	13,000	0,9812	15,998	0,9999	15,998	0,9999
28	27	9,004	0,9562	6,003	0,9375	9,004	0,9562	9,004	0,9562
Perdas ativas na transmissão (MW)		17,7737 MW		17,7927 MW		17,7737 MW		17,7737 MW	
Número de iterações		4		3		4		4	

6.3. Sistema IEEE de 57 barras

Este sistema é composto por:

- 1 barra *slack*;
- 6 barras do tipo PV, com controle de geração de reativos;
- 50 barras de carga (tipo PQ);

- 3 bancos de capacitores;
- 80 ramos, divididos em:
 - 63 linhas de transmissão;
 - 17 transformadores com *tap* variável;

Os limites máximo e mínimo da magnitude de tensão adotados para este sistema foram 1,05 e 0,95 p.u., respectivamente.

Já para os *taps* de transformadores, os limites máximo e mínimo foram 1,1 e 0,9 p.u. O valor de $step_{km}$ foi 0,00625 p.u.

6.3.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas

A partir da resolução do problema de FPOR para o sistema de 57 barras pela modelagem com variáveis contínuas através do *solver* CONOPT, determinou-se os ajustes ótimos das variáveis de controle. Estes valores foram utilizados para comparação com os resultados obtidos pela modelagem com variáveis de controle discretas. Os valores dos *taps* dos transformadores, assim como os valores das variáveis auxiliares s_{km} , estão expostos nas Figuras 6.27 e 6.28, respectivamente. Os valores ótimos das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunts* das barras 18, 25 e 53 estão expressos na Tabela 6.7 a seguir:

Tabela 6.7 – Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.

Barra (k)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18	0,862	0,0862
25	1,5	0,0885
53	1,5	0,0945
Perdas ativas na transmissão: 20,1212 MW		

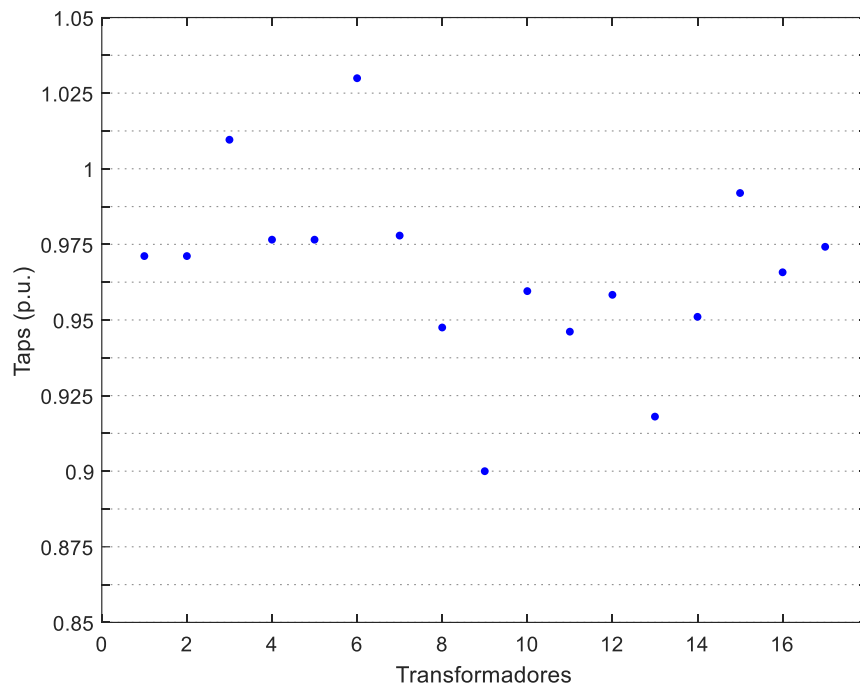


Figura 6.27 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.

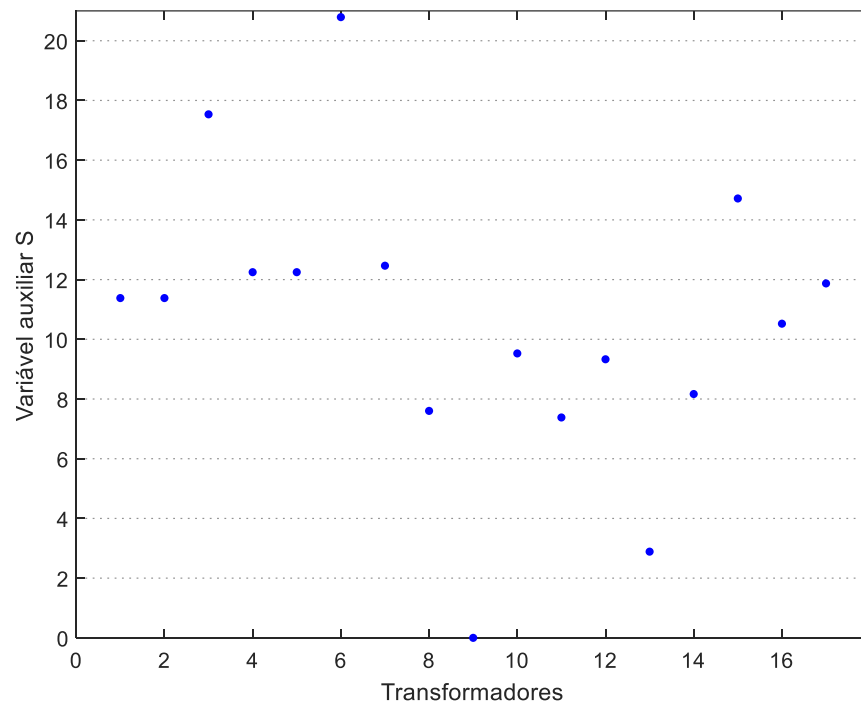


Figura 6.28 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis contínuas.

6.3.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas

As estimativas iniciais dos parâmetros que compõem este modelo, para cada *solver* utilizado, estão descritas na Tabela 6.8. Em seguida, foram expostos os resultados obtidos a partir da aplicação do modelo ao sistema IEEE de 57 barras, para os *solvers* comerciais CONOPT, IPOPT, MINOS e SNOPT:

Tabela 6.8 – Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada *solver* comercial – Sistema IEEE de 57 barras.

	Conopt	Ipop	Minos	Snopt
γ_1	10^{-8}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-8}
γ_2	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}
β	1	1	1	1
τ	10	10	10	10
ξ	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

6.3.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt*

A seguir, as Tabelas 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 ilustram os valores das susceptâncias equivalentes das barras 18, 25 e 53, assim como das variáveis auxiliares w_k , para cada *solver* comercial.

Tabela 6.9 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

Barra (k)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18	0,9999	0,0999
25	1,4997	0,0885
53	1,500	0,0945

Tabela 6.10 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

Barra (k)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18	1,0000	0,1000
25	1,0003	0,0590
53	1,0002	0,0630

Tabela 6.11 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

Barra (k)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18	1,0000	0,0100
25	1,4999	0,0885
53	1,500	0,0945

Tabela 6.12 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

Barra (k)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18	0,9999	0,0999
25	1,4997	0,0885
53	1,500	0,0945

6.3.2.2. Convergência dos *taps* dos transformadores em fase

A seguir, as Figuras 6.29, 6.30, 6.31 e 6.32 ilustram os valores dos *taps* dos transformadores em fase na transmissão, para cada *solver* comercial.

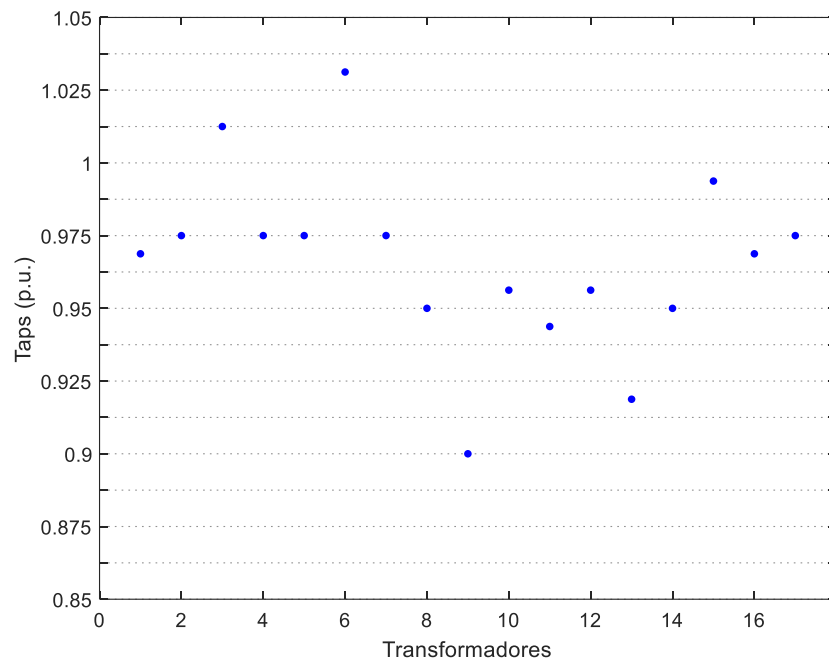


Figura 6.29 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

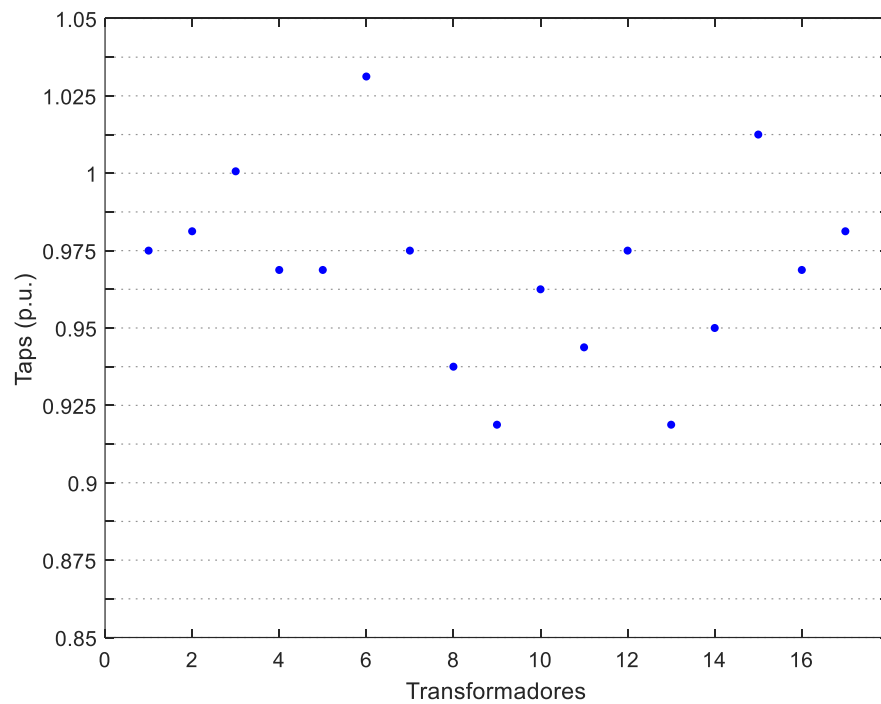


Figura 6.30 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

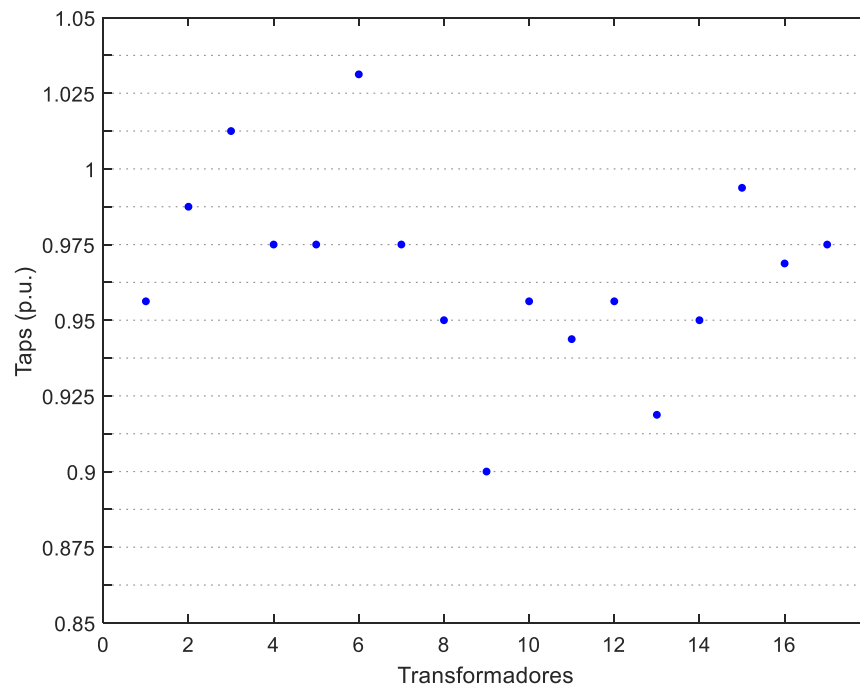


Figura 6.31 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

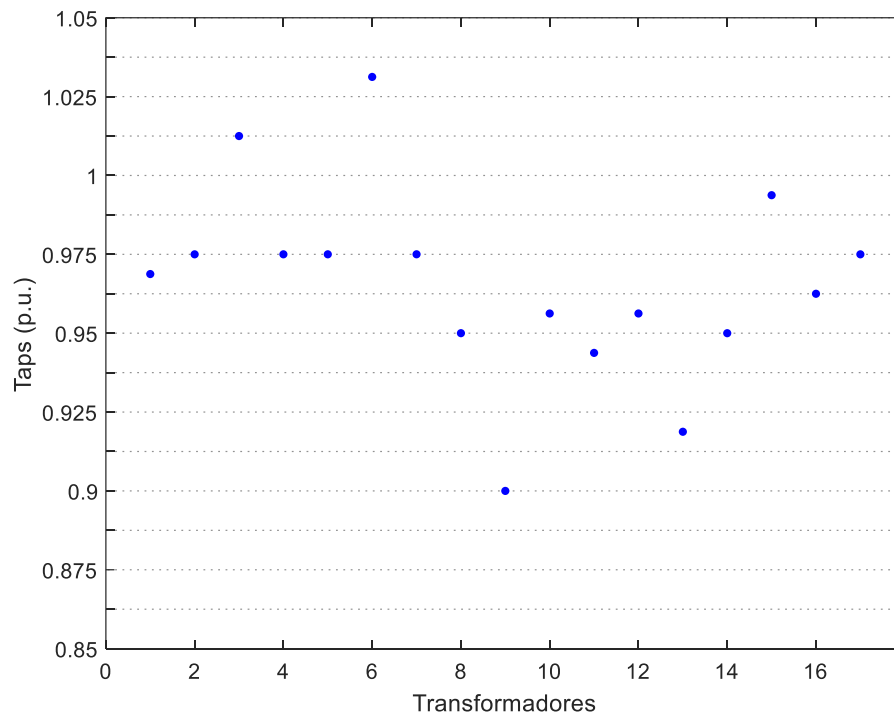


Figura 6.32 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

Por sua vez, as Figuras 6.33, 6.34, 6.35 e 6.36 ilustram os valores das variáveis auxiliares s_{km} , para cada *solver* comercial.

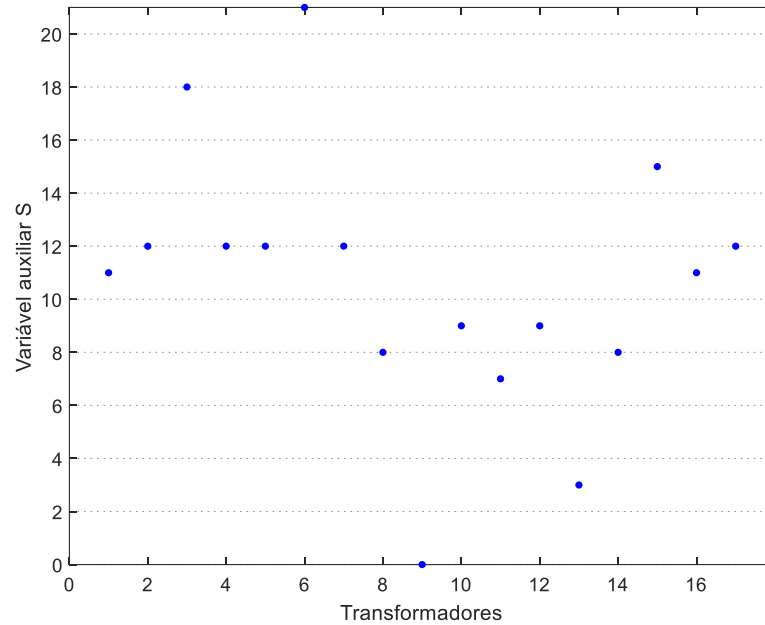


Figura 6.33 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

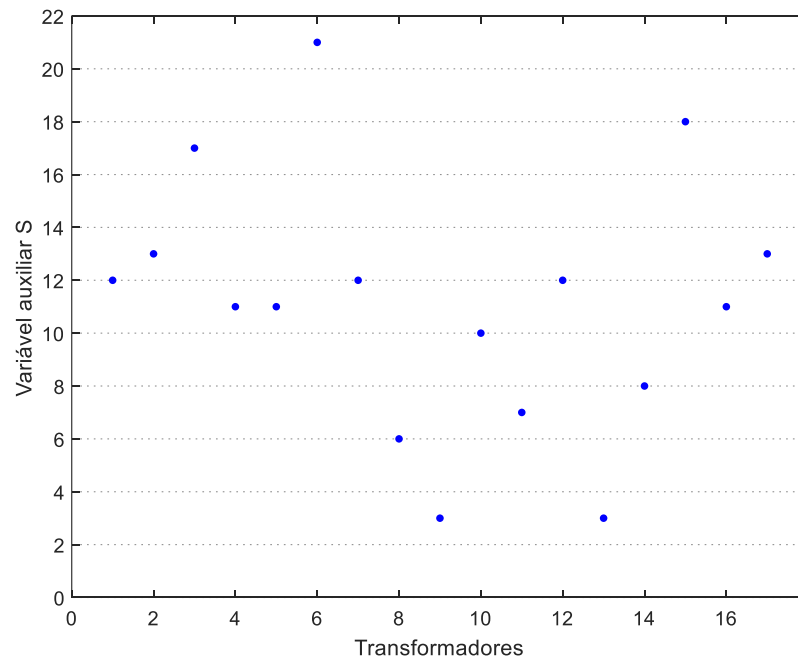


Figura 6.34 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

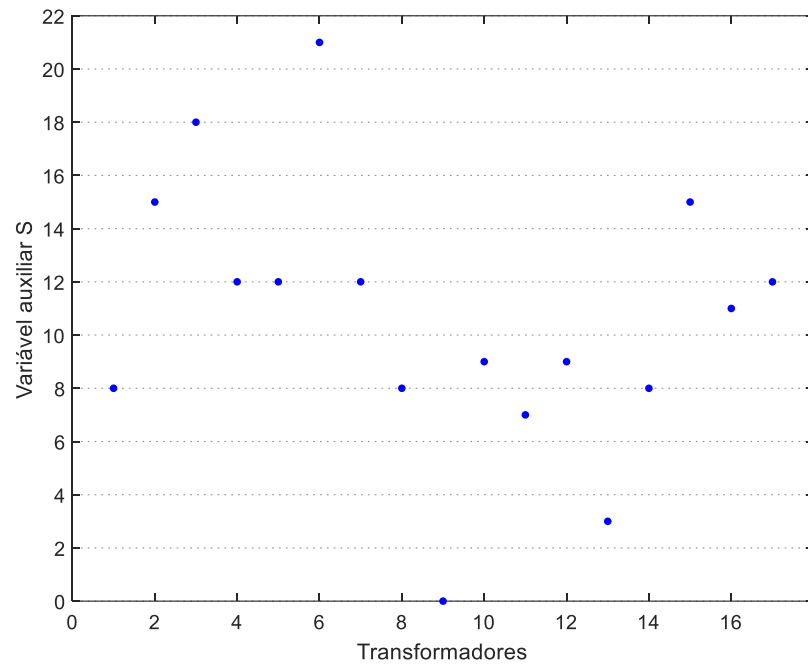


Figura 6.35 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

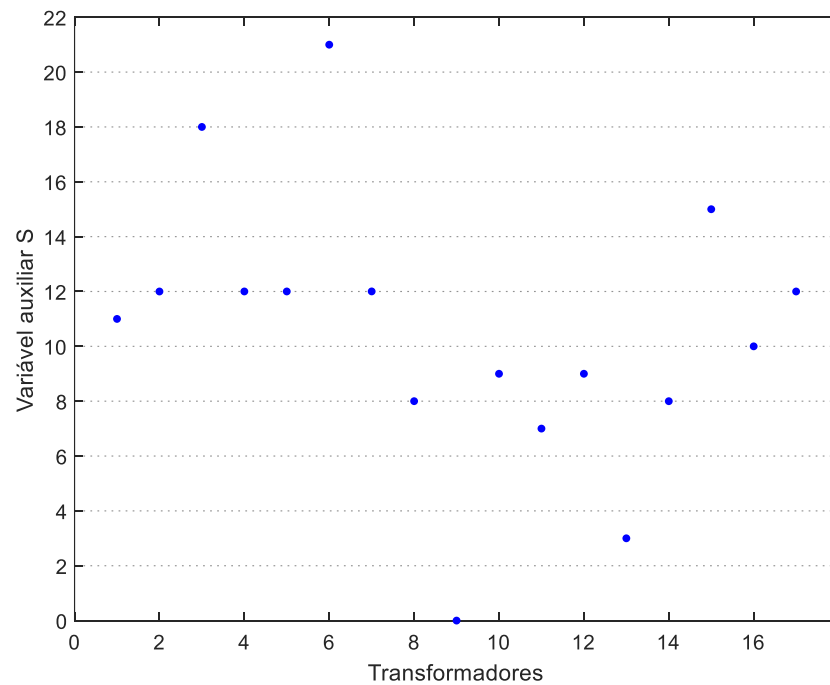


Figura 6.36 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

A Tabela 6.13 expõe os valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas, assim como as perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método, para cada *solver* comercial utilizado.

Tabela 6.13 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 57 barras pelo modelo com variáveis discretas.

		CONOPT		IPOPT		MINOS		SNOPT	
Barra (k)		w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)	w_k	b_k^{sh} (p.u.)
18		0,9999	0,0999	1,0000	0,1000	1,0000	0,0100	0,9999	0,0999
25		1,4997	0,0885	1,0003	0,0590	1,4999	0,0885	1,4997	0,0885
53		1,500	0,0945	1,0002	0,0630	1,500	0,0945	1,500	0,0945
Nó inicial (k)	Nó final (m)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)	s_{km}	t_{km} (p.u.)
4	18	11	0,9687	12	0,9750	8	0,95	11	0,9687
4	18	12	0,9750	13	0,9812	15	0,9937	12	0,9750
21	20	18	1,0125	17	1,0062	18	1,0125	18	1,0125
24	25	12	0,9750	11	0,9687	12	0,9750	12	0,9750
24	25	12	0,9750	11	0,9687	12	0,9750	12	0,9750
24	26	21	1,0312	21	1,0312	21	1,0312	21	1,0312
7	29	12	0,9750	12	0,9750	12	0,9750	12	0,9750
34	32	8	0,9500	6	0,9375	8	0,9500	8	0,9500
11	41	0	0,9000	3	0,9187	0	0,9000	0	0,9000
15	45	9	0,9562	10	0,9625	9	0,9562	9	0,9562
14	46	7	0,9437	7	0,9437	7	0,9437	7	0,9437
10	51	9	0,9562	12	0,9750	9	0,9562	9	0,9562
13	49	3	0,9187	3	0,9187	3	0,9187	3	0,9187
11	43	8	0,9499	8	0,9500	8	0,9499	8	0,9499
40	56	15	0,9937	18	1,0125	15	0,9937	15	0,9937
39	57	11	0,9687	11	0,9687	11	0,9687	10	0,9625

9 55	12 0,9750	13 0,9812	12 0,9750	12 0,9750
Perdas ativas na transmissão (MW)	20,1434 MW	20,3380 MW	20,1435 MW	20,1419 MW
Número de iterações	7	7	8	7

6.4. Sistema IEEE de 118 Barras

Este sistema é composto por:

- 1 barra *slack*;
- 53 barras do tipo PV, com controle de geração de reativos;
- 64 barras de carga (tipo PQ);
- 14 elementos *shunt* variáveis
 - 12 bancos de capacitores;
 - 2 reatores *shunt*;
- 181 ramos, divididos em:
 - 172 linhas de transmissão;
 - 9 transformadores com *tap* variável;

Os limites máximo e mínimo da magnitude de tensão adotados para este sistema foram 1,05 e 0,95 p.u., respectivamente.

Já para os *taps* de transformadores, os limites máximo e mínimo foram 1,1 e 0,9 p.u. O valor de $step_{km}$ foi 0,00625 p.u.

Esse sistema apresenta reatores *shunt* nas barras 5 e 37, aos quais estão associados a variável auxiliar w_k ; esta, por sua vez, só pode assumir os valores discretos 0 ou 1.

6.4.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas

A partir da resolução do problema de FPOR para o sistema de 118 barras pela modelagem com variáveis contínuas através do *solver* CONOPT, determinou-se os ajustes ótimos das variáveis de controle. Estes valores foram utilizados para comparação com os resultados obtidos pela modelagem com variáveis de controle discretas. Os valores ótimos das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunts* e das suas variáveis auxiliares associadas estão expressos nas Figuras 6.37 e 6.38. Os valores dos *taps* dos transformadores, assim como os valores das variáveis auxiliares s_{km} , estão expostos nas Figuras 6.39 e 6.40, respectivamente. As perdas ativas do sistema de transmissão foram de 117,1105 MW, aproximadamente.

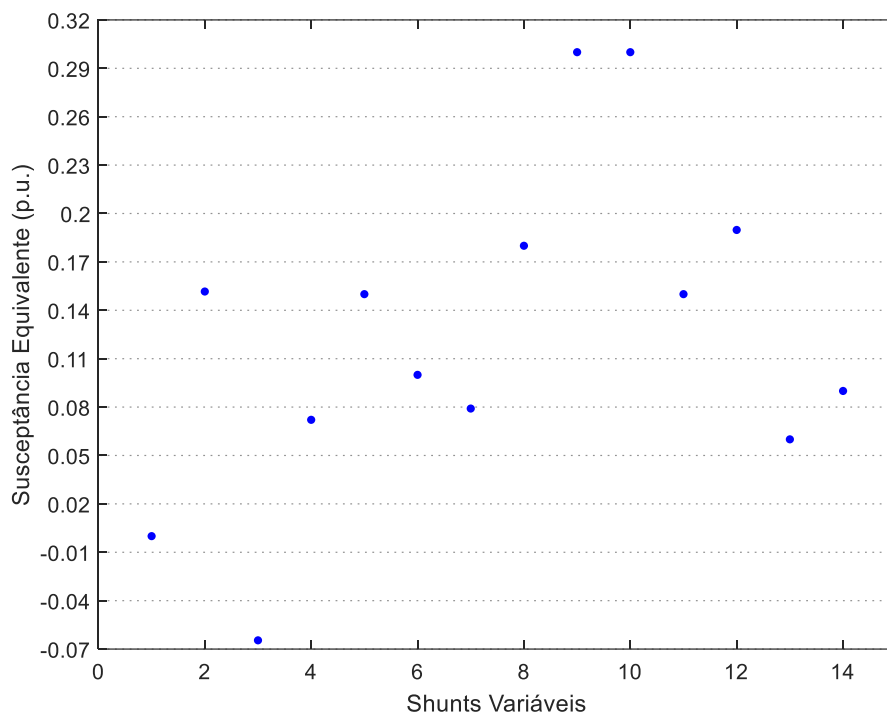


Figura 6.37 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

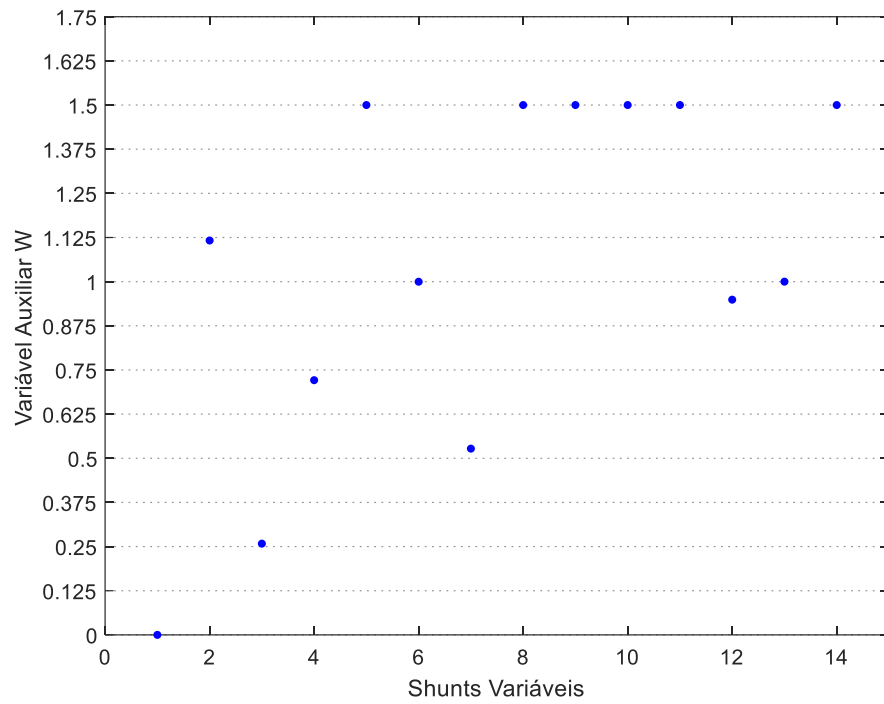


Figura 6.38 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

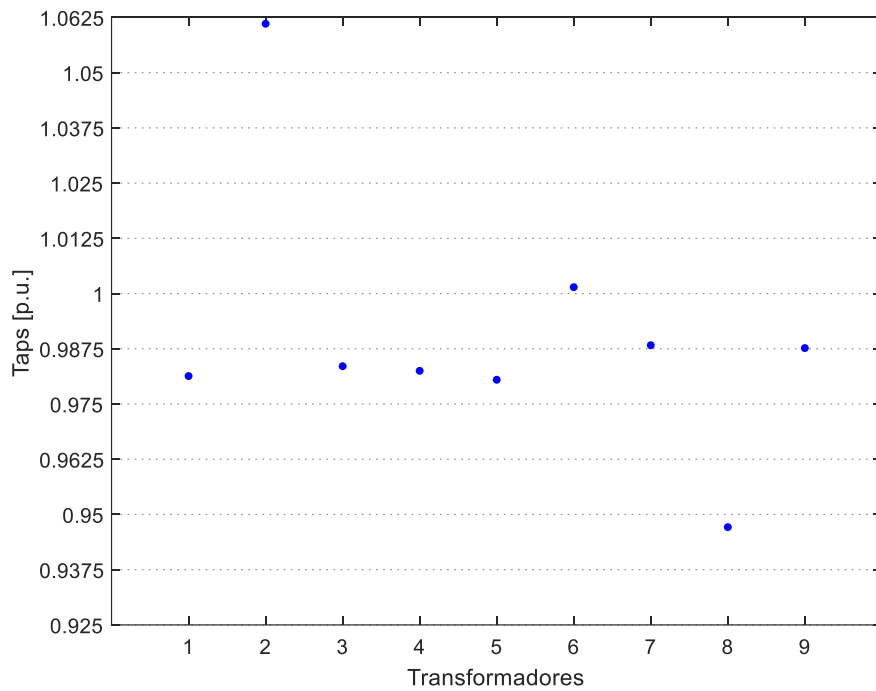


Figura 6.39 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

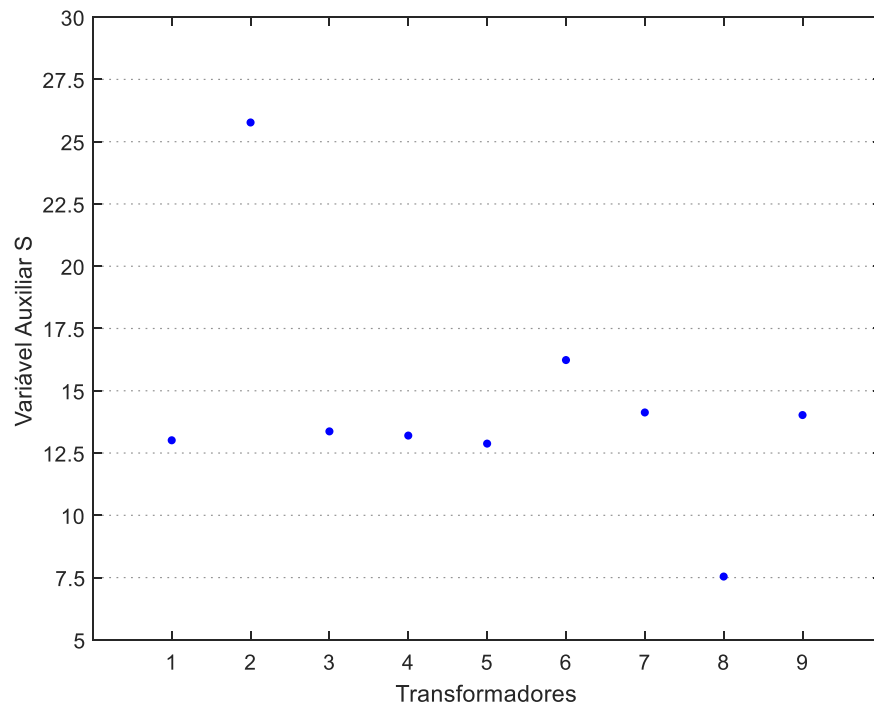


Figura 6.40 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

6.4.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas

As estimativas iniciais dos parâmetros que compõem este modelo, para cada *solver* utilizado, estão descritas na Tabela 6.14. Em seguida, foram expostos os resultados obtidos a partir da aplicação do modelo ao sistema IEEE de 118 barras, para os *solvers* comerciais CONOPT, IPOPT, MINOS e SNOPT:

Tabela 6.14 – Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada *solver* comercial – Sistema IEEE de 118 barras.

	Conopt	Ipopt	Minos	Snopt
γ_1	10^{-9}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-8}
γ_2	10^{-9}	10^{-5}	10^{-9}	10^{-8}
β	1	1	1	1
τ	10	10	10	10
ξ	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

6.4.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt*

A seguir, as Figuras 6.41, 6.42, 6.43 e 6.44 ilustram os valores das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunts* das barras, para cada *solver* comercial.

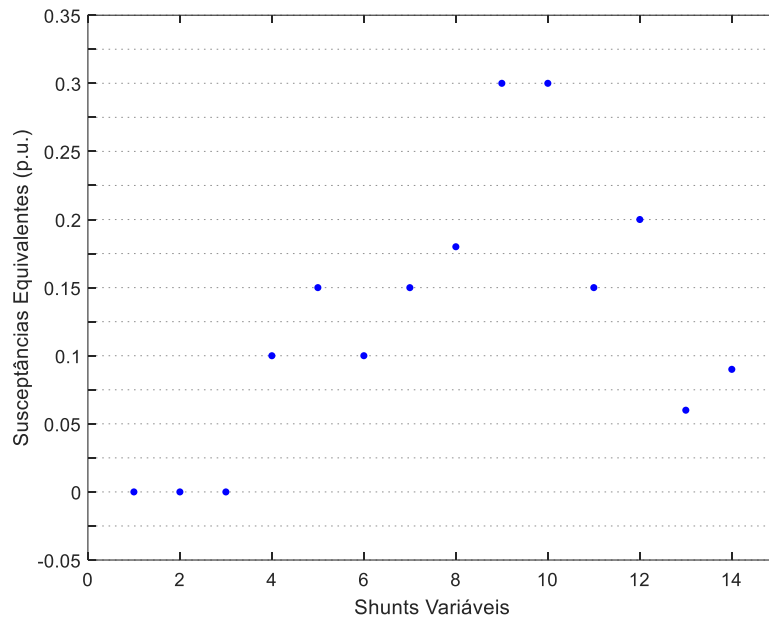


Figura 6.41 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

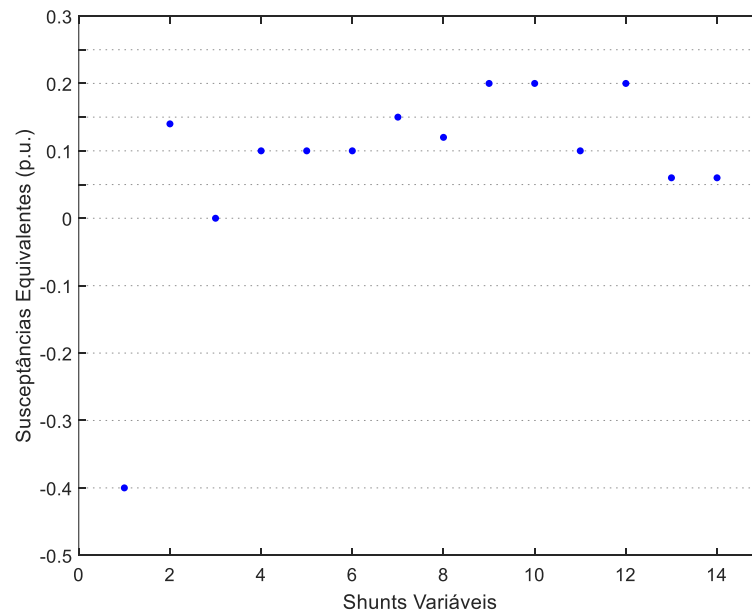


Figura 6.42 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

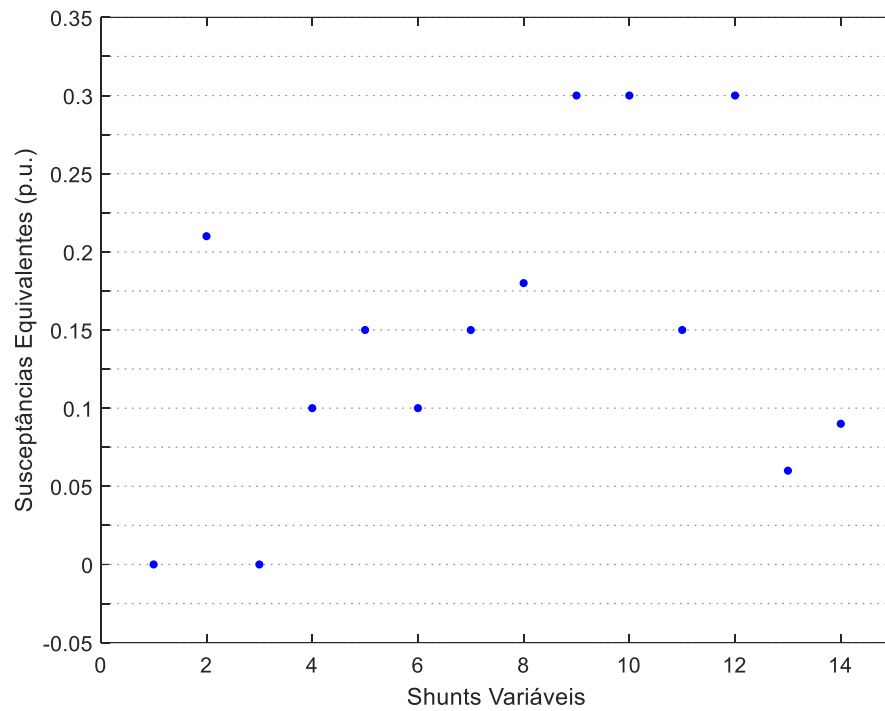


Figura 6.43 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

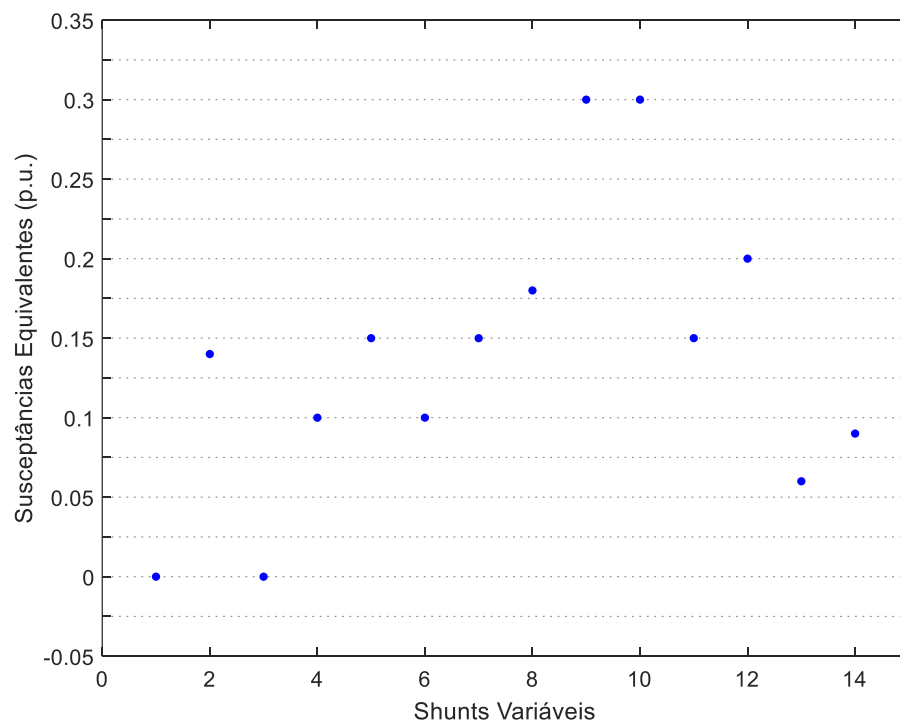


Figura 6.44 – Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

Já as Figuras 6.45, 6.46, 6.47 e 6.48 ilustram os valores das variáveis auxiliares w_k associadas aos elementos *shunts* das barras, para cada *solver* comercial.

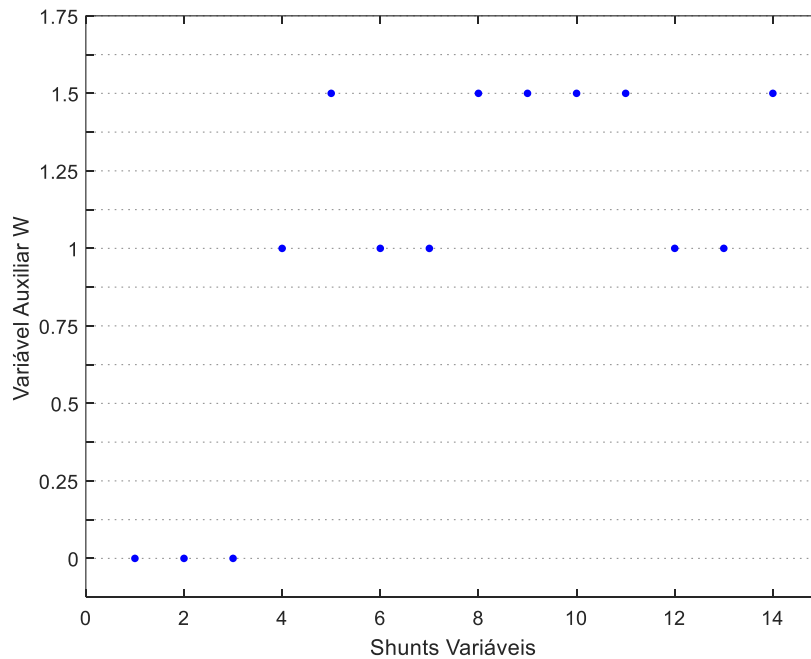


Figura 6.45 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

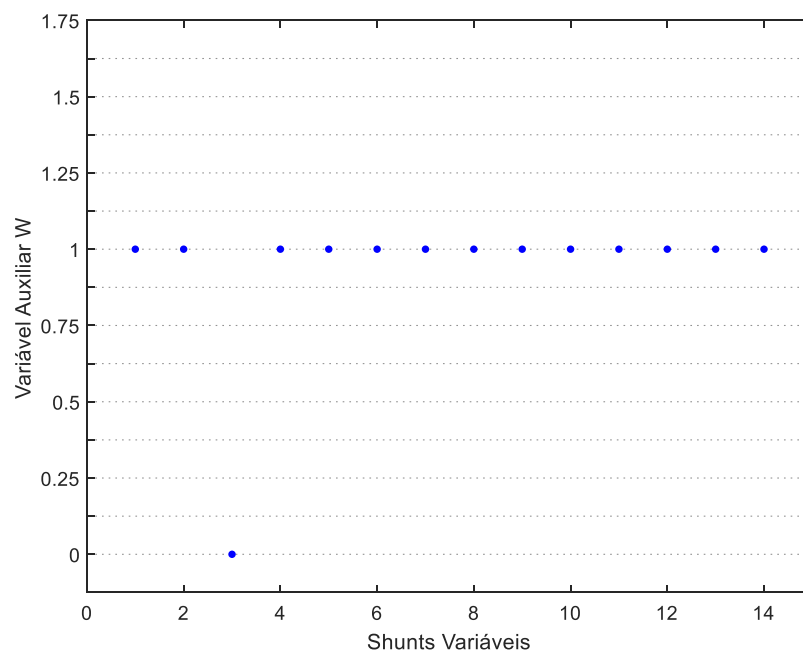


Figura 6.46 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

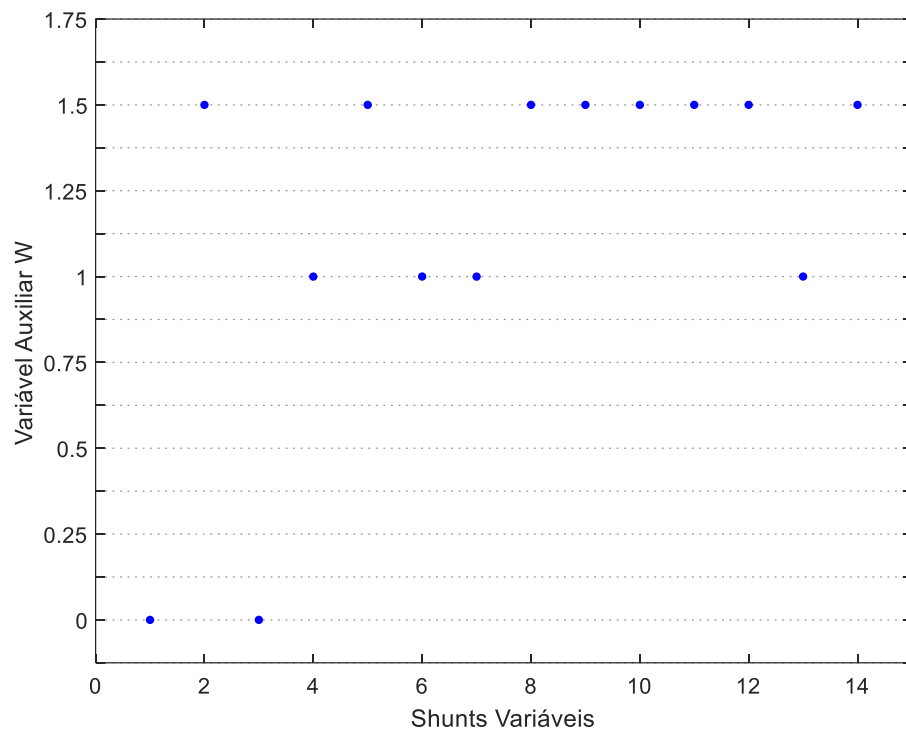


Figura 6.47 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

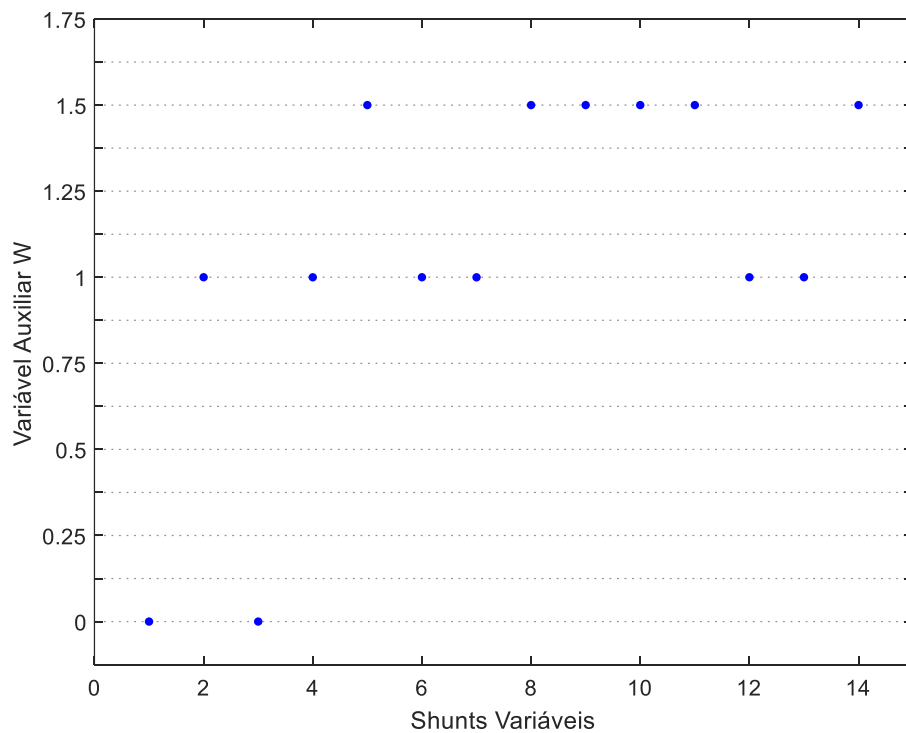


Figura 6.48 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

6.4.2.2. Convergência dos *taps* dos transformadores em fase

A seguir, as Figuras 6.49, 6.50, 6.51 e 6.52 ilustram os valores dos *taps* dos transformadores em fase na transmissão, para cada *solver* comercial.

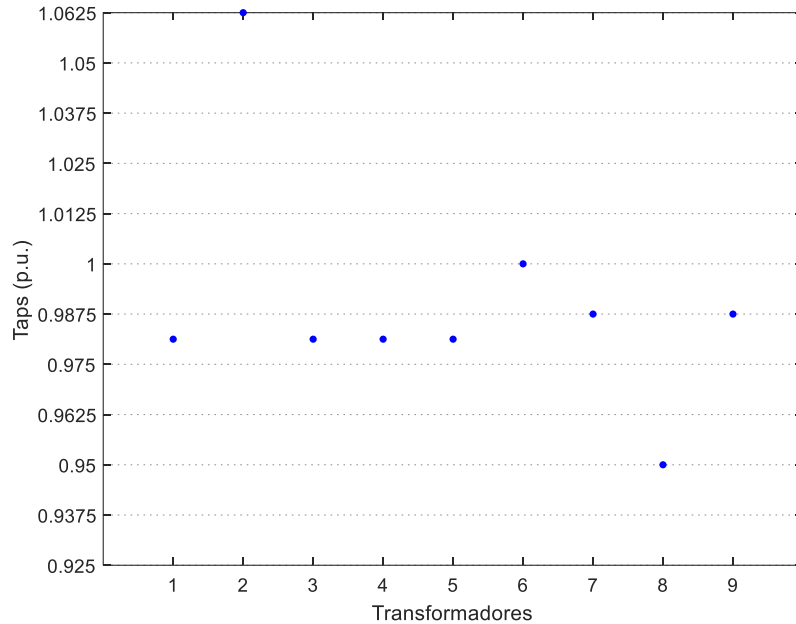


Figura 6.49 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

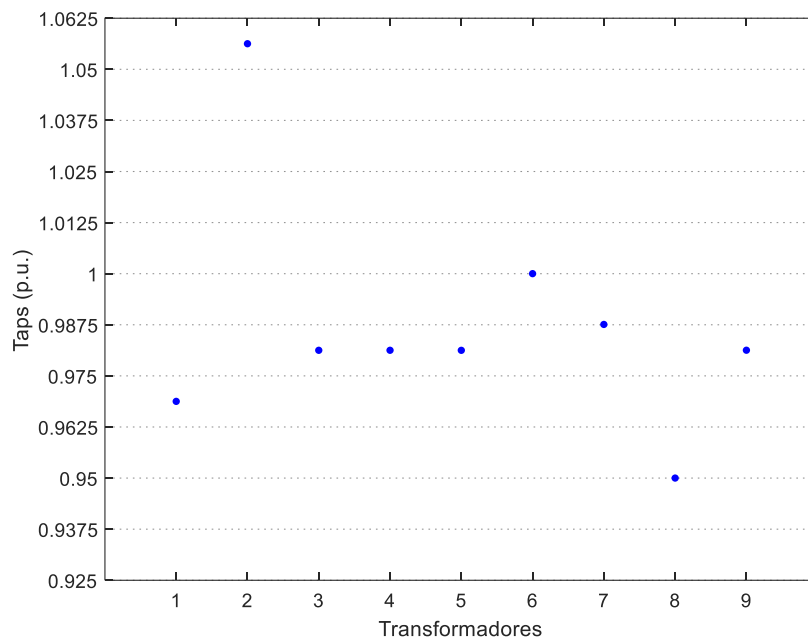


Figura 6.50 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

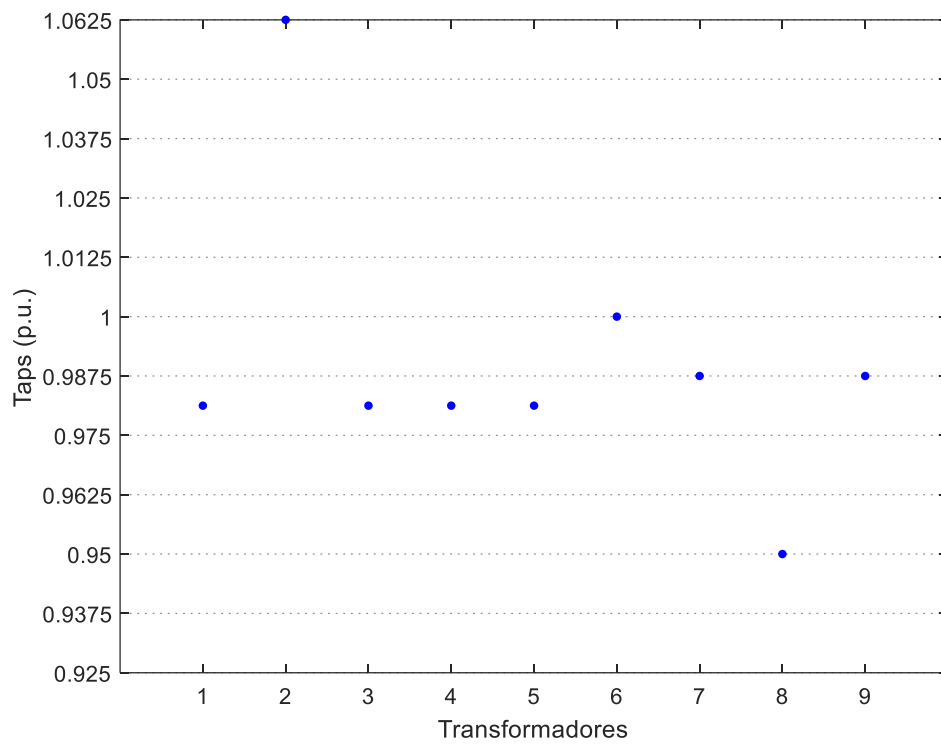


Figura 6.51 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

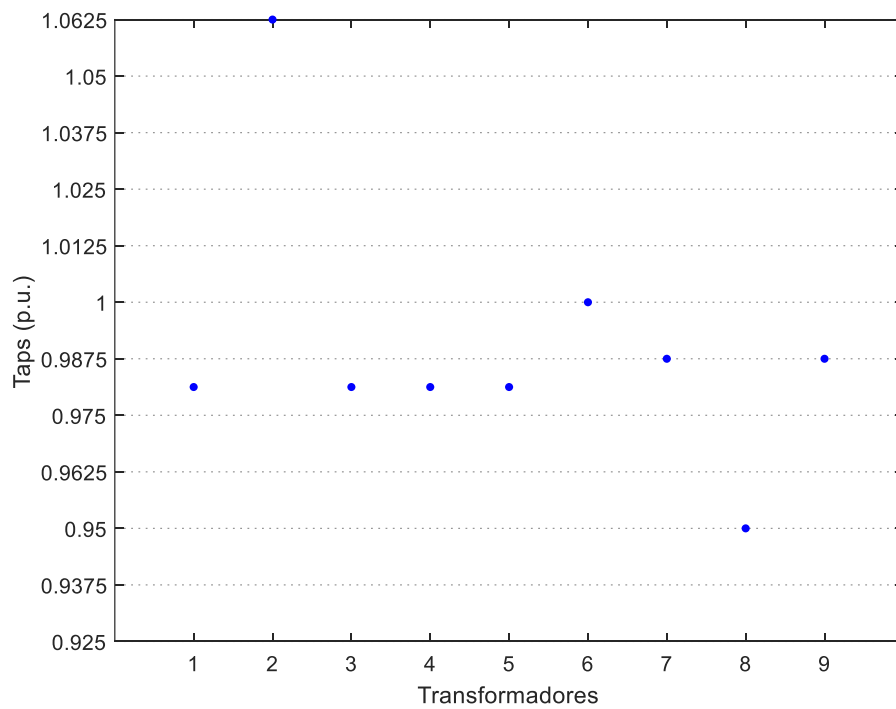


Figura 6.52 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

Por sua vez, as Figuras 6.53, 6.54, 6.55 e 6.56 ilustram os valores das variáveis auxiliares s_{km} , para cada *solver* comercial.

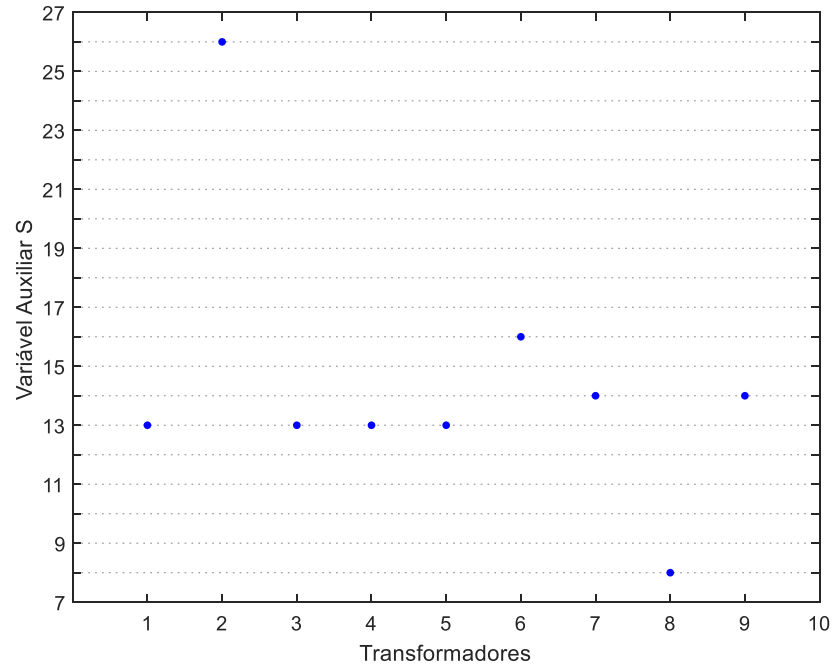


Figura 6.53 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

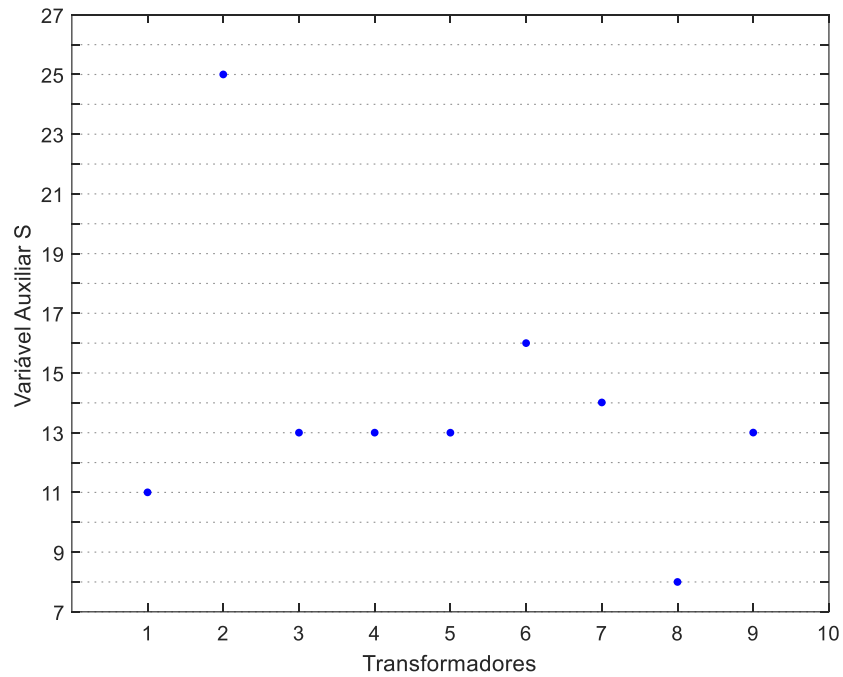


Figura 6.54 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

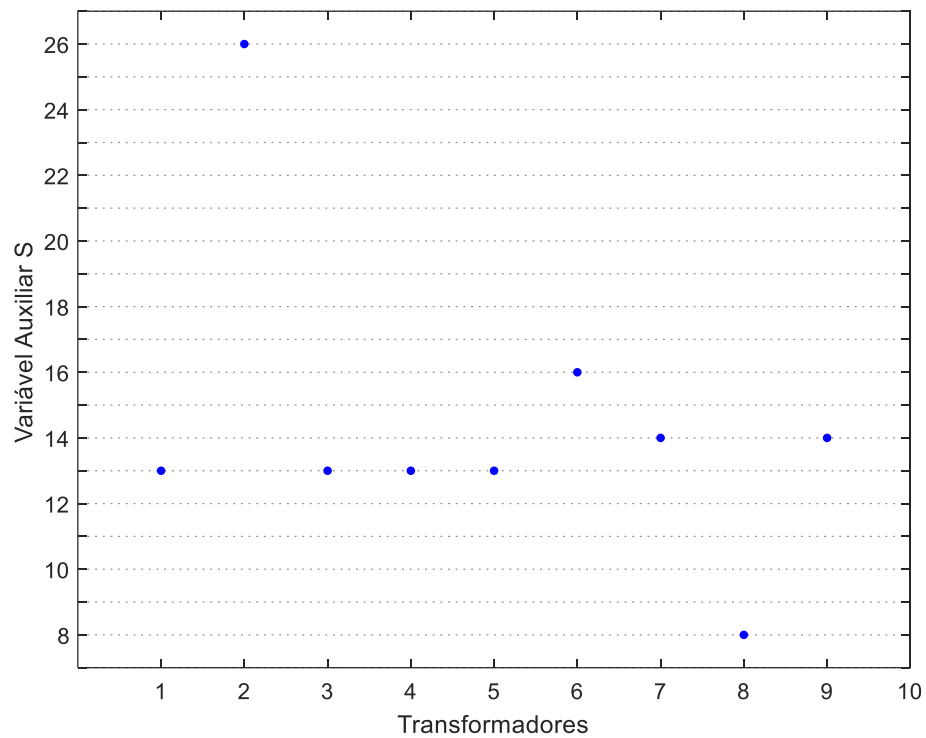


Figura 6.55 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* MINOS.

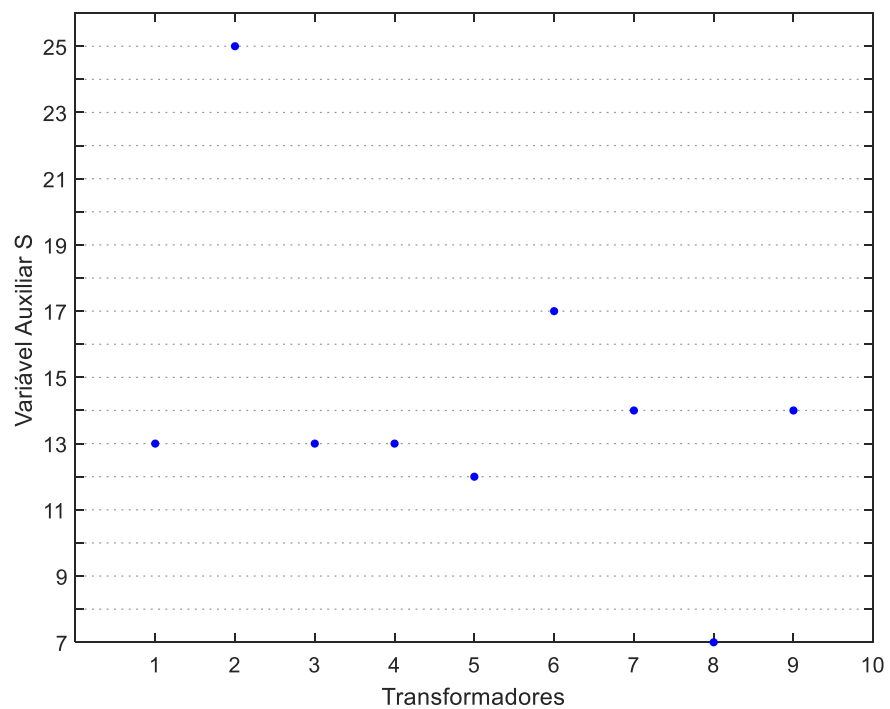


Figura 6.56 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

A Tabela 6.15 expõe os valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas, assim como as perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método, para cada *solver* comercial utilizado.

Tabela 6.15 - Valores ótimos das variáveis de controle do sistema IEEE de 118 barras pelo modelo com variáveis discretas.

		CONOPT		IPOPT		MINOS		SNOPT	
Barra		w_k	b_k^{sh}	w_k	b_k^{sh}	w_k	b_k^{sh}	w_k	b_k^{sh}
(k)		(p.u.)		(p.u.)		(p.u.)		(p.u.)	
5		0	0	1,0000	-0,3999	0	0	0	0
34		0	0	1,0000	0,1400	1,5	0,2100	0	0
37		4,04e-5	-1,01e-5	0	0	4,04e-5	-1,01e-5	4,04e-5	-1,01e-5
44		0,9998	0,0999	1,0000	0,1000	0,9998	0,0999	0,9998	0,0999
45		1,5000	0,1500	1,0000	0,1000	1,5000	0,1500	1,5000	0,1500
46		1,0000	0,1000	1,0000	0,1000	1,0000	0,1000	1,0000	0,1000
48		0,9998	0,1499	0,9999	0,1499	0,9998	0,1499	0,9998	0,1499
74		1,5000	0,1800	1,0000	0,1200	1,5000	0,1800	1,5000	0,1800
79		1,5000	0,3000	1,0000	0,2000	1,5000	0,3000	1,5000	0,3000
82		1,5000	0,3000	1,0000	0,2000	1,5000	0,3000	1,5000	0,3000
83		1,5000	0,1500	1,0000	0,1000	1,5000	0,1500	1,5000	0,1500
105		1,0000	0,2000	1,0000	0,2000	1,5000	0,3000	1,0000	0,2000
107		1,0000	0,0600	1,0000	0,0600	1,0000	0,0600	1,0000	0,0600
110		1,5000	0,0900	1,0000	0,0600	1,5000	0,0900	1,5000	0,0900
Nó inicial	Nó	s_{km}	t_{km}	s_{km}	t_{km}	s_{km}	t_{km}	s_{km}	t_{km}
(k)	final	(p.u.)		(p.u.)		(p.u.)		(p.u.)	
	(m)								
8	5	13	0,9812	11,002	0,9687	13	0,9812	13	0,9812
26	25	26	1,0625	25,001	1,0562	26	1,0625	26	1,0625
30	17	13	0,9812	13,001	0,9812	13	0,9812	13	0,9812
38	37	13	0,9812	13,002	0,9812	13	0,9812	13	0,9812
63	59	13	0,9812	13,000	0,9812	13	0,9812	13	0,9812

64	61	16	1,0000	16,002	1,0000	16	1,0000	16	1,0000
65	66	14	0,9875	14,013	0,9875	14	0,9875	14	0,9875
68	69	8	0,9500	8,000	0,9500	8	0,9500	8	0,9500
81	80	14	0,9875	13,004	0,9812	14	0,9875	14	0,9875
Perdas ativas na transmissão (MW)		117,1322 MW		117,2790 MW		117,1322 MW		117,1322 MW	
Número de iterações		9		6		9		9	

6.5. Sistema IEEE de 300 Barras

Este sistema é composto por:

- 1 barra *slack*;
- 68 barras do tipo PV, com controle de geração de reativos;
- 231 barras de carga (tipo PQ);
- 14 elementos *shunt* variáveis
 - 8 bancos de capacitores;
 - 6 reatores *shunt*;
- 411 ramos, divididos em:
 - 304 linhas de transmissão;
 - 106 transformadores com *tap* variável;
 - 1 transformador defasador;

Os limites máximo e mínimo da magnitude de tensão adotados para este sistema foram 1,07 e 0,92 p.u., respectivamente.

Os limites máximo e mínimo dos *taps* dos transformadores, assim como seus valores de $step_{km}$ não são constantes para todos os ramos *km* deste sistema.

6.5.1. Modelagem com Variáveis de Controle Contínuas

A partir da resolução do problema de FPOR para o sistema de 300 barras pela modelagem com variáveis contínuas através do *solver* CONOPT, determinou-se os ajustes ótimos das variáveis de controle. Estes valores foram utilizados para comparação com os resultados obtidos pela modelagem com variáveis de controle discretas. Os valores ótimos das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunts* e das suas variáveis auxiliares associadas estão expressos nas Figuras 6.57 e 6.58. Os valores dos *taps* dos transformadores, assim como os valores das variáveis auxiliares s_{km} , estão expostos nas Figuras 6.59 e 6.60, respectivamente. As perdas ativas do sistema de transmissão foram de 372,3246 MW, aproximadamente.

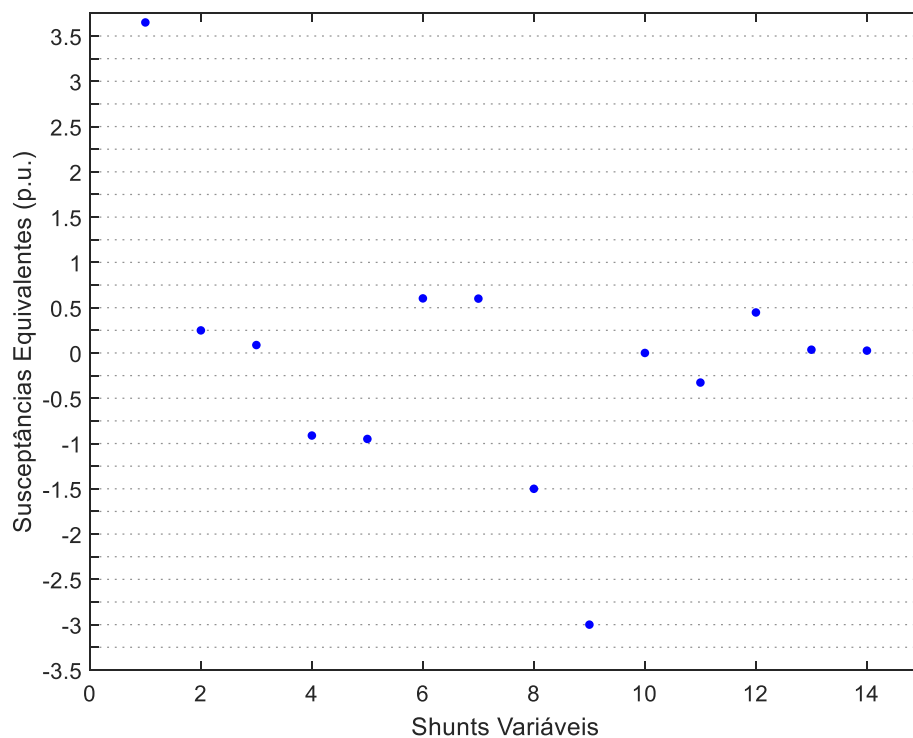


Figura 6.57 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

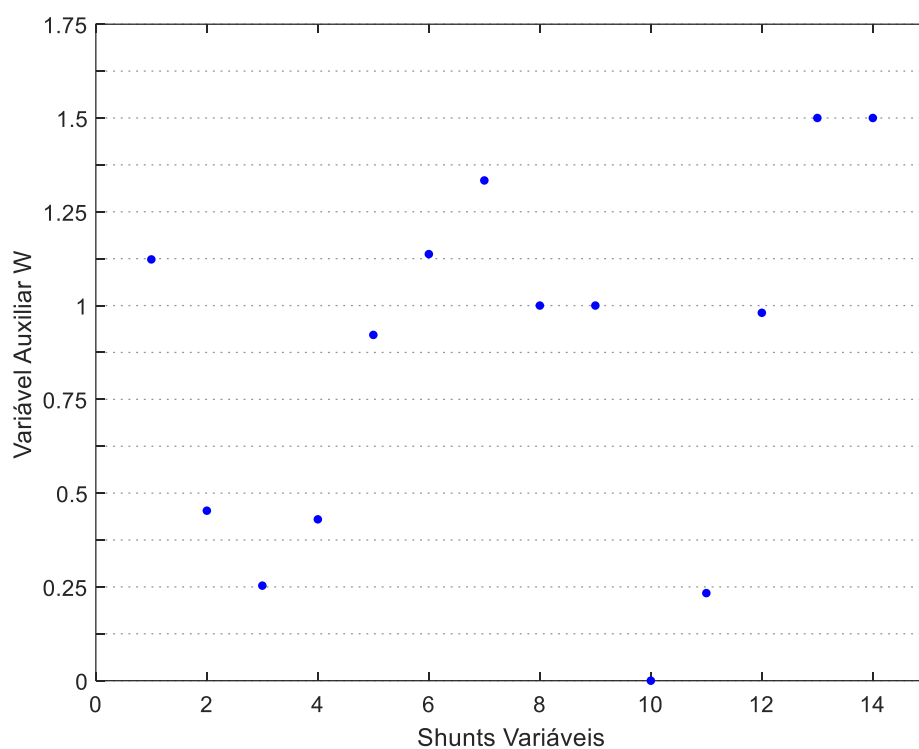


Figura 6.58 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

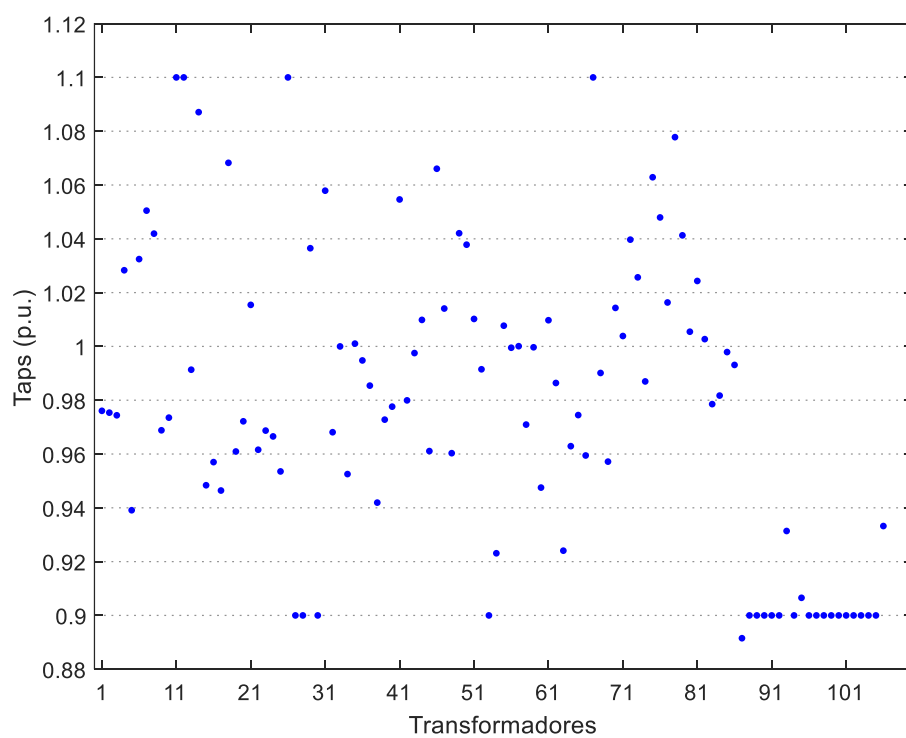


Figura 6.59 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

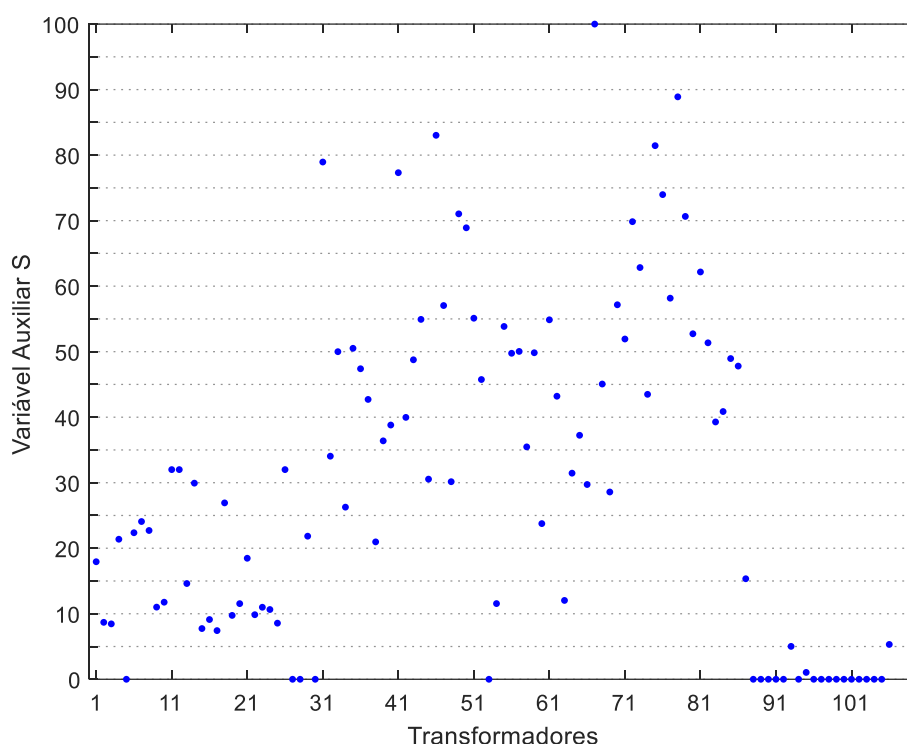


Figura 6.60 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis contínuas pelo *solver* CONOPT.

6.5.2. Modelagem com Variáveis de Controle Discretas

As estimativas iniciais dos parâmetros que compõem este modelo, para cada *solver* utilizado, estão descritas na Tabela 6.16. Em seguida, foram expostos os resultados obtidos a partir da aplicação do modelo ao sistema IEEE de 300 barras, para os *solvers* comerciais CONOPT, IPOPT e SNOPT. Para o sistema IEEE de 300 barras, o *solver* MINOS não atingiu a convergência do método.

Tabela 6.16 – Estimativa inicial dos parâmetros do modelo com variáveis de controle discretas, para cada *solver* comercial – Sistema IEEE de 300 barras.

	Conopt	Ipop	Snopt
γ_1	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}
γ_2	10^{-7}	10^{-6}	10^{-6}
β	1	1	1
τ	10	10	10
ξ	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

6.5.2.1. Convergência das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunt*

Os valores ótimos das susceptâncias equivalentes dos elementos *shunts* das barras estão expressos nas Figuras 6.61, 6.62 e 6.63 a seguir:

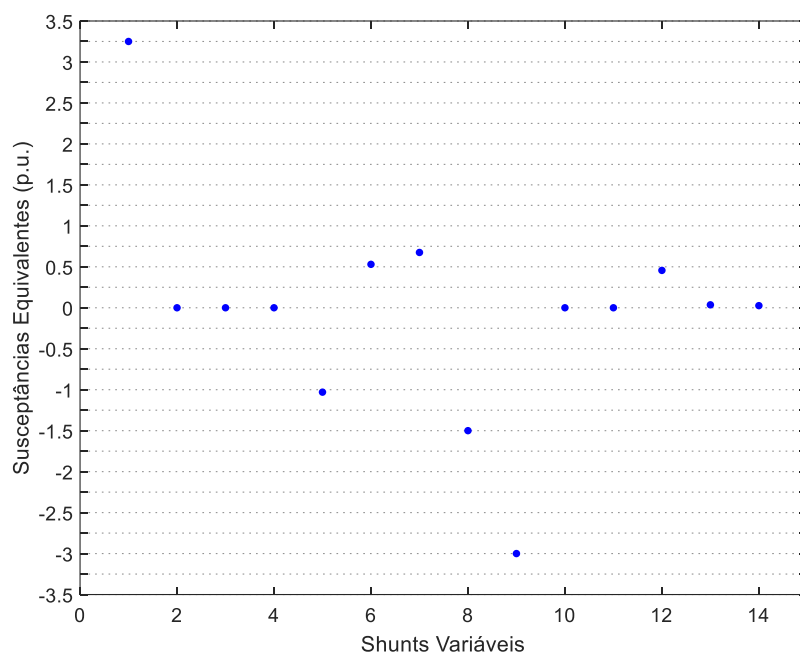


Figura 6.61 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

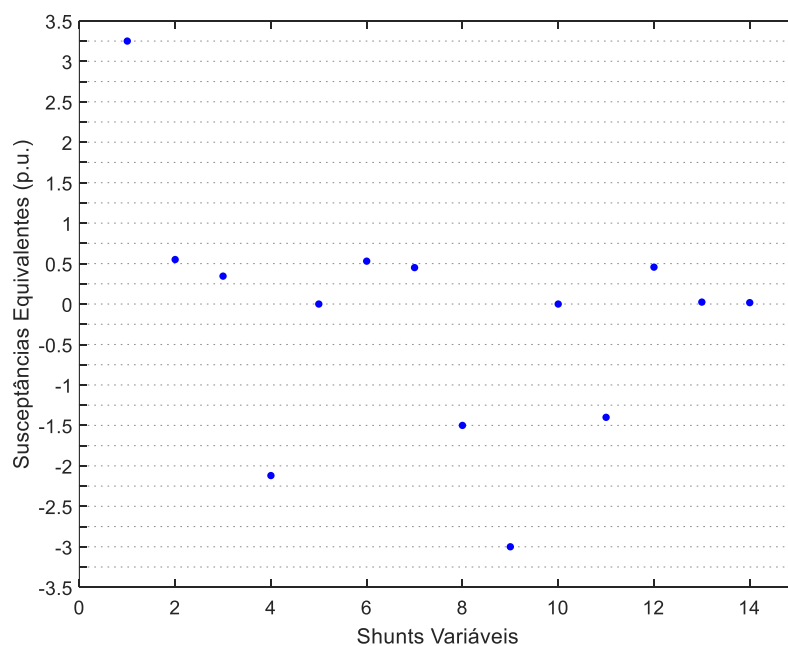


Figura 6.62 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

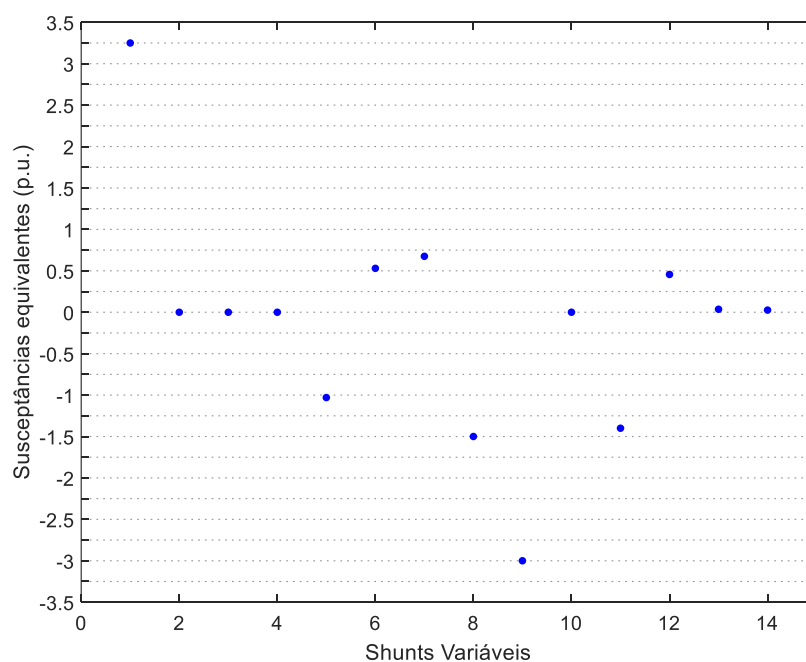


Figura 6.63 - Valores ótimos das susceptâncias equivalentes do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

Por sua vez, as Figuras 6.64, 6.65 e 6.66 ilustram os valores das variáveis auxiliares w_k , para cada *solver* utilizado.

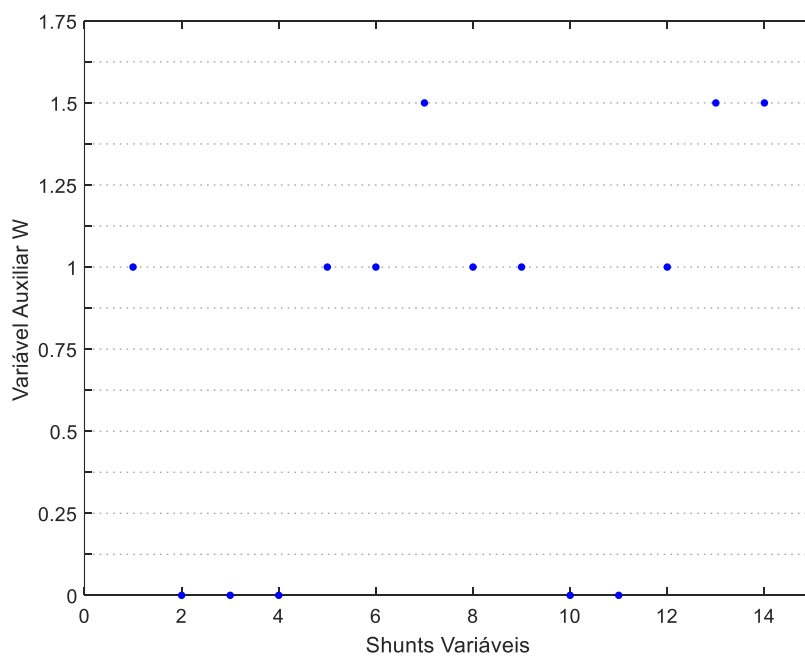


Figura 6.64 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

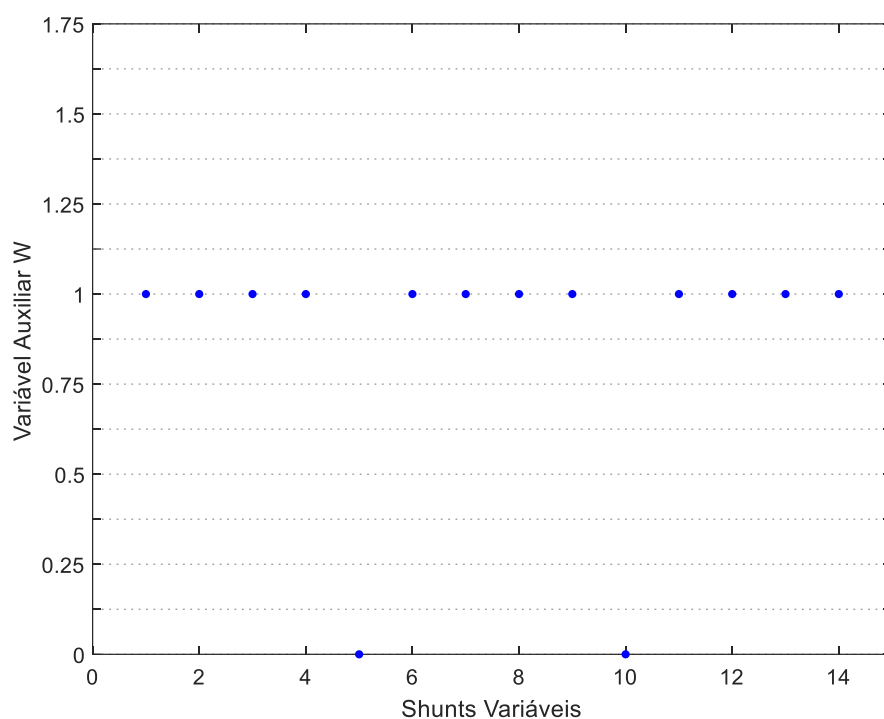


Figura 6.65 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

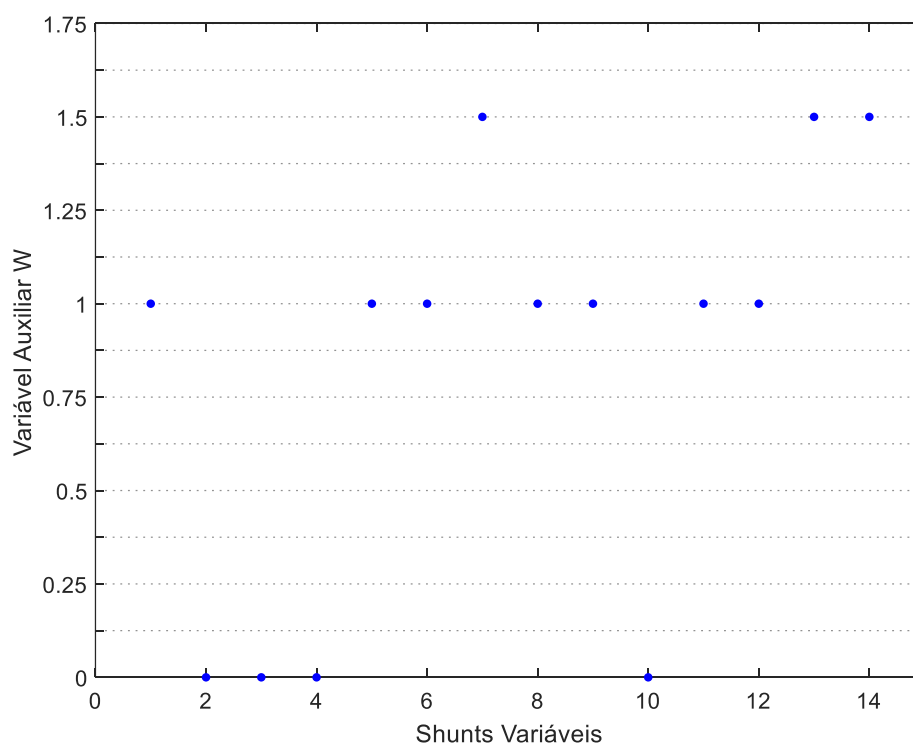


Figura 6.66 - Valores ótimos das variáveis auxiliares w_k do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

6.5.2.2. Convergência dos *taps* dos transformadores em-fase

Os valores dos *taps* dos transformadores para cada *solver* utilizado estão expostos nas Figuras 6.67, 6.68, 6.69 a seguir:

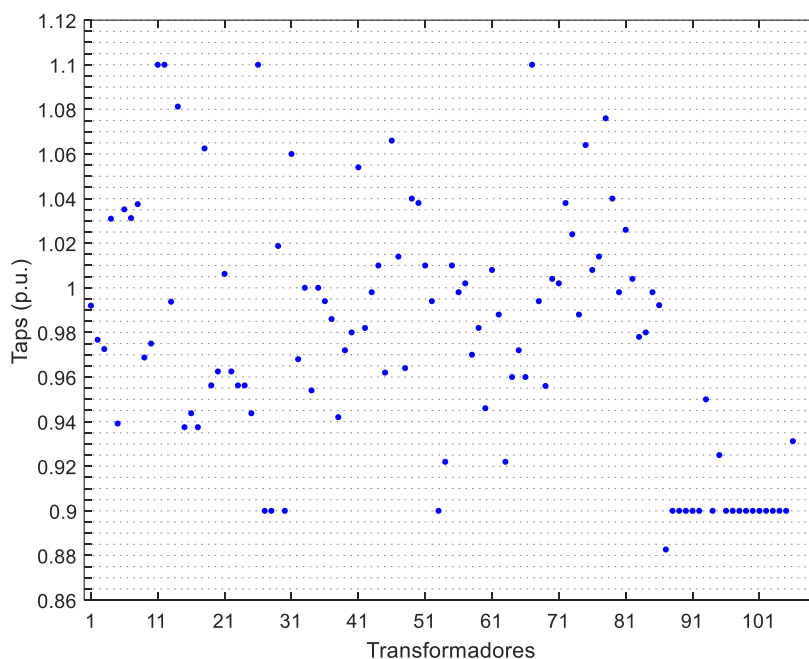


Figura 6.67 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* CONOPT.

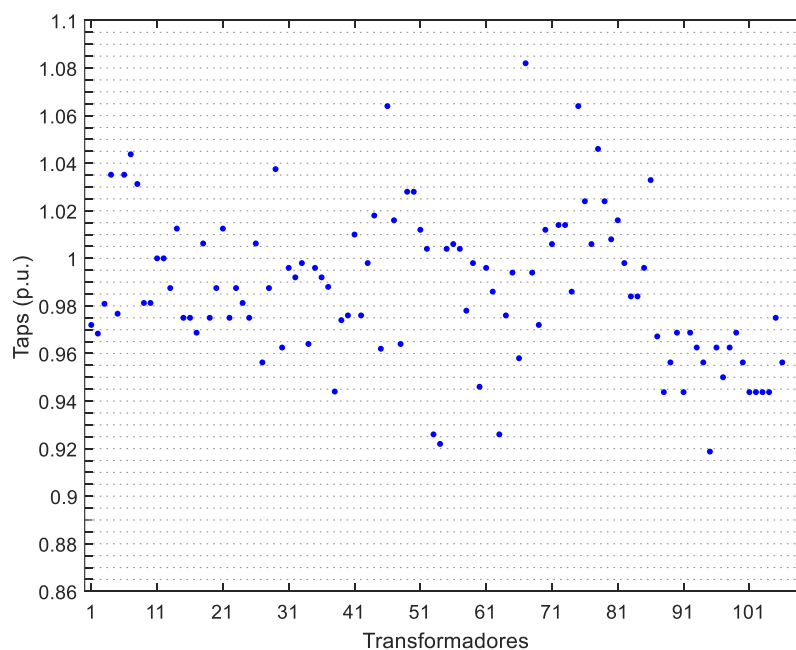


Figura 6.68 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

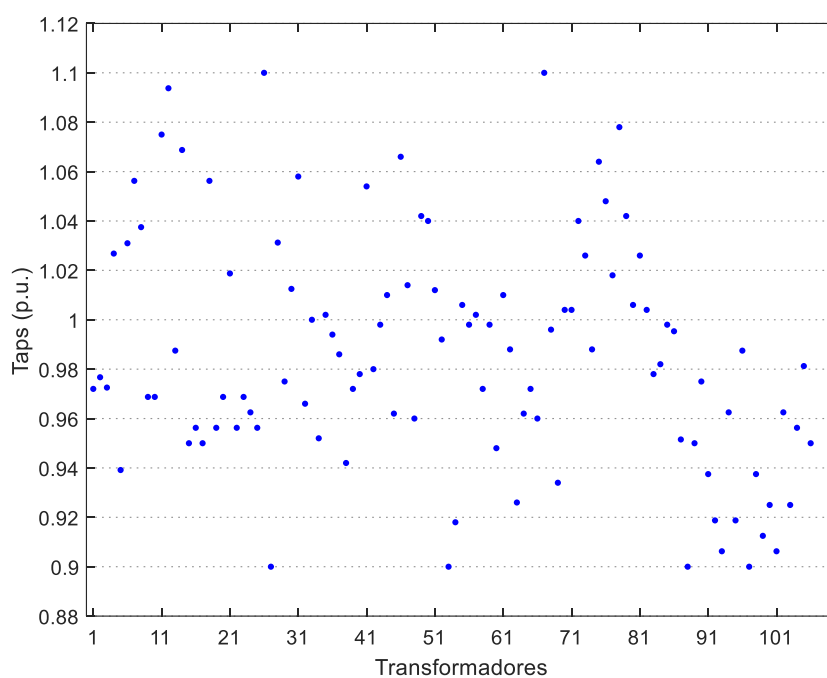


Figura 6.69 - Valores ótimos dos *taps* dos transformadores do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solvers* SNOPT.

Por sua vez, as Figuras 6.70, 6.71, 6.72 ilustram os valores das variáveis auxiliares s_{km} , para cada *solvers* utilizado.

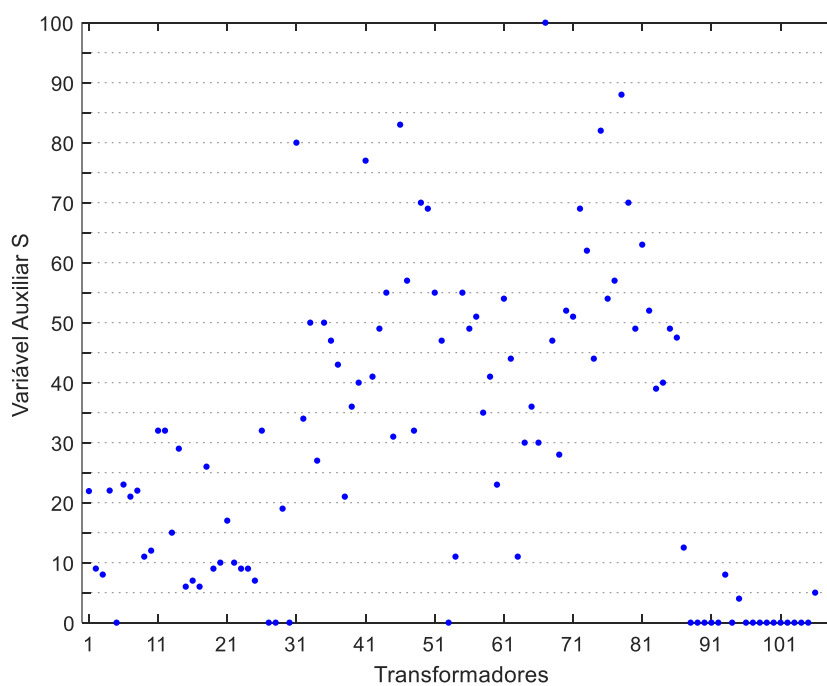


Figura 6.70 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solvers* CONOPT.

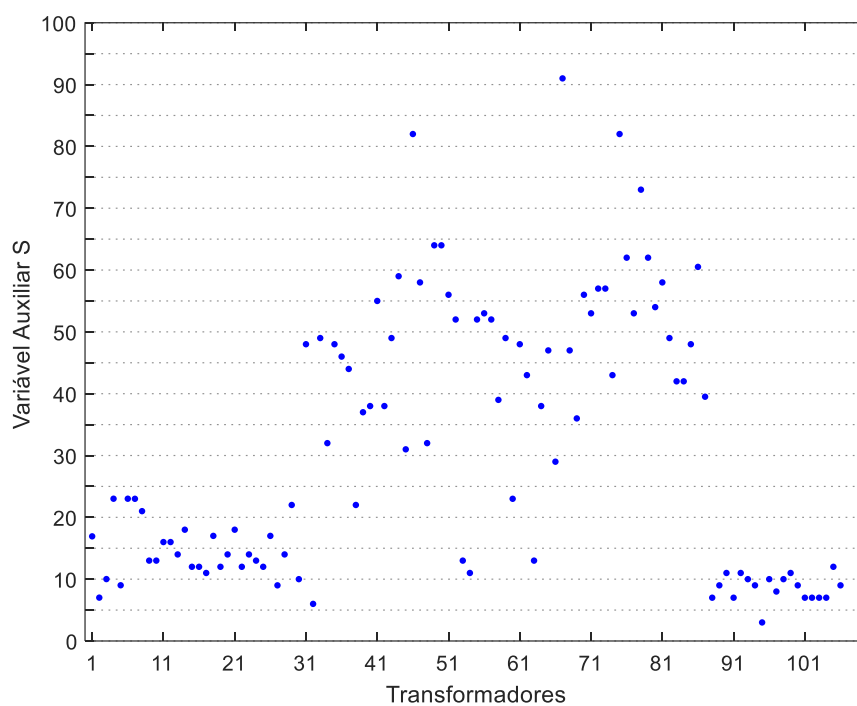


Figura 6.71 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* IPOPT.

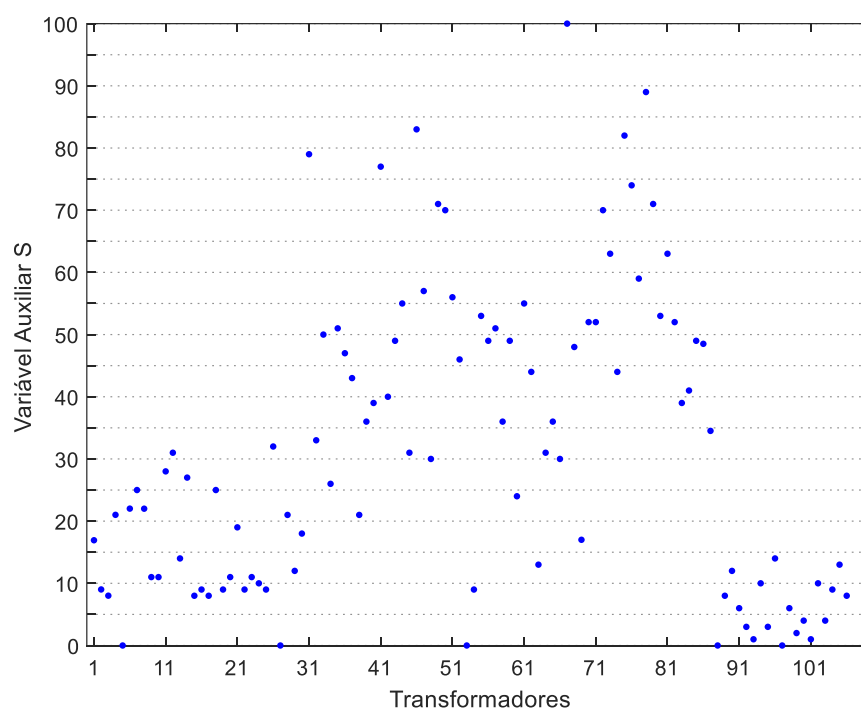


Figura 6.72 - Valores ótimos das variáveis auxiliares s_{km} do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas pelo *solver* SNOPT.

A Tabela 6.17 expõe as perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método para o sistema IEEE de 300 barras, para cada *solver* comercial utilizado.

Tabela 6.17 - Perdas ativas na transmissão e número de iterações até a convergência do método do sistema IEEE de 300 barras pelo modelo com variáveis discretas.

	CONOPT	IPOPT	MINOS	SNOPT
Perdas ativas na transmissão (MW)	373,5127 MW	374, 2074 MW	-	372,9578 MW
Número de iterações	10	9	-	9

7. Conclusões

A abordagem proposta neste trabalho busca aprimorar o processo de tomada de decisão na operação dos SEES, pela necessidade de ajuste das variáveis de controle por passos discretos. Para atingir este objetivo, aplicou-se um algoritmo para resolução de um problema de FPOR, o qual trata as variáveis discretas como contínuas através da função seno-quadrado ψ , e tem seu processo iterativo encerrado assim que todas as variáveis de controle discretas do sistema atingem a tolerância de discretização definida no início do método. Além disso, com a inclusão das variáveis auxiliares s_{km} e w_k ao problema, buscou-se a simplificação do processo de discretização das variáveis de controle.

A partir dos testes realizados nos sistemas IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras, foi comprovada a eficácia da abordagem proposta para resolução de problemas de FPOR. Além disso, observou-se a robustez do método para diferentes *solvers* comerciais. Os resultados obtidos, para cada *solver* utilizado, foram bem-sucedidos, com o método convergindo em um número razoável de iterações.

A continuidade da abordagem proposta neste trabalho pode ser dada por:

- aplicação do método para sistemas diferentes, de maior complexidade;
- aplicação do método para outros problemas de análise de SEEs;
- utilização dos resultados obtidos neste trabalho para comparação com outras abordagens de resolução de problemas de FPOR;

Referências Bibliográficas

- AFFONSO, C. M.; SILVA, L.J. da; SILVA, L. C. P. da. Avaliação da estabilidade de tensão do sistema brasileiro - um caso de estudo. *Revista Controle & Automação*, v. 19, n. 3, p. 327-336, jul., ago. e set. 2008.
- BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; SOUSA, V. A. de; COSTA, G. R. M. da. Primal-dual logarithmic barrier and augmented Lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*, v. 34, n. 7, p. 775-784, 2006.
- BRASIL. Ministério de Minas e Energia (MME). *Monitoramento do sistema elétrico brasileiro*: boletim de novembro de 2020. Brasília: MME, 2020. 45 p.
- CÂMARA DE COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA (CCEE). 2020. Disponível em: <<http://www.ccee.org.br>>. Acesso em 15 mar. 2021.
- CÂMARA DE COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA (CCEE). InfoMercado mensal: novembro de 2020. 2021. Disponível em: <<http://www.ccee.org.br>>. Acesso em 15 mar. 2021.
- CAPITANESCU, F.; WEHENKEL, L. Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 25, n. 4, p. 1780-1789, Nov. 2010.
- CARPENTIER, J. L. Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, v. 3, n. 8, p. 431-447, 1962.
- DOMMEL, H.W.; TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-87, n. 10, p. 1866-1876, Oct. 1968.
- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. AMPL: A modeling language for mathematical programming. 2nd. ed. [S.l.]: Duxbury Press, 2002. 540p.
- GISVOLD, K. M.; MOE, J. A method for nonlinear mixed-integer programming and its application to design problems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, v. 94, n. 1, p. 356-357, 1972.
- GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; CONEJO, A. J.; CAÑIZARES, C.A. *Sistemas de energia elétrica: análise e operação*. Tradução e revisão técnica Antonio Padilha Feltrin, José Roberto Sanches Mantovani, Rubén Romero. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 554 p.
- GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, p. 136-146, Feb. 1994.
- LAGE, G. G. O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão. 2013. 234 f. Tese (Doutorado em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia

de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

LIU, W.-H. E.; PAPALEXOPOULOS, A. D.; TINNEY, W. F. Discrete shunt controls in a Newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 4, p. 1509-1518, Nov. 1992.

RASHED, A. M. H.; KELLY, D. H. Optimal load flow solution using Lagrangian multipliers and the Hessian matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-93, n. 5, p. 1292-1297, Sept. 1974.

ROSEHART, W. Optimal power flows incorporating network stability. In: IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY WINTER MEETING, 2002, New York. *Proceedings...* New York: IEEE, 2002. v. 2.;

SASSON, A. M. Combined use of the Powell and Fletcher-Powell nonlinear programming methods for optimal load flows. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-88, n. 100, p. 1530 -1537, Oct. 1969.

SOLER, E. M. *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas*. 2011. 108 f. Tese (Doutorado em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

SOLER, E. M.; SOUSA, V. A. de; COSTA, G. R. M. da. A modified primal-dual logarithmic-barrier method for solving the optimal power flow problem with discrete and continuous control variables. *European Journal of Operational Research*, v. 222, n. 3, p. 616-622, 2012.

SOUSA, V. A. de; BAPTISTA, E. C.; COSTA, G. R. M. da. Modified barrier method for optimal power flow problem. In: IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING, 2004, Denver. *Proceedings...* Denver: IEEE, 2004.

SUN, D. I.; ASHLEY, B.; BREWER, B.; HUGHES, A.; TINNEY, W. F. Optimal power flow by Newton approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103, n. 10, p. 2864-2880, Oct. 1984.

WU, Y.-C.; DEBS, A. S.; MARSTEN, R. E. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 9, n. 2, p. 876-883, May 1994.