

Desvios moderados para o passeio aleatório minimal

Kelly Melo de Menezes

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Kelly Melo de Menezes

Desvios moderados para o passeio aleatório minimal

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

USP – São Carlos
Março de 2026

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Kelly Melo de Menezes, realizada em 06/05/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Renato Jacob Gava (UFSCAR)

Profa. Dra. Andressa Cerqueira (UFSCAR)

Prof. Dr. Cristian Flavio Coletti (UFABC)

Prof. Dr. Denis Araujo Luiz (UNICAMP)

Prof. Dr. Valdivino Vargas Junior (UFG)

Kelly Melo de Menezes

Moderate deviations for the minimal random walk

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Science – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Doctor in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

USP – São Carlos
March 2026

*Ao meu filho, Derick,
minha força motriz, meu recomeço e minha maior certeza.
Tudo é por você e para você.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs), à Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP), pela oportunidade e infraestrutura institucional oferecidas para a realização deste doutorado ¹. Agradeço à coordenação, aos professores do programa e às equipes das secretarias de pós-graduação de ambas as instituições.

Ao Prof. Dr. Renato Jacob Gava, pelo seu brilhantismo intelectual e pela orientação. Agradeço, de modo especial, a paciência e a valiosa compreensão diante das particularidades da minha trajetória ao longo destes anos.

Aos Profs. Drs. Andressa Cerqueira, Cristian Coletti, Denis Luiz e Valdivino Vargas, membros da banca examinadora, pelas valiosas correções e sugestões apresentadas na defesa.

Aos meus pais, Suzilei Ângela de Menezes Melo e Paulo de Melo Ferreira. Não existem palavras capazes de dimensionar o que vocês representam nesta conquista. Quando o peso das circunstâncias pareceu desabar sobre mim, vocês foram o meu porto seguro, o meu refúgio e o meu maior alicerce. Se hoje o meu nome assina este trabalho, é porque as mãos de vocês seguraram as minhas em todos os momentos. A resiliência e o mérito deste título pertencem inteiramente a vocês e à imensidão do amor incondicional que me deram.

Ao meu irmão, Jean Karlo Melo Menezes, a quem amo como a um verdadeiro filho: em uma tese de exatas, é justo registrar que o verdadeiro prodígio matemático da família sempre foi você. E você usou o seu dom mais especial — o seu jeito brincalhão — para trazer leveza e arrancar sorrisos nos meus dias mais difíceis. À minha cunhada, Thainá Izidoro Thomaz, agradeço por somar a essa parceria. Obrigada a ambos pelo carinho, pelo afeto e por serem parte fundamental da minha rede de apoio quando eu mais precisei.

Aos meus familiares e aos meus amados amigos: vocês sabem quem são. Seria injusto tentar nomear cada um e correr o risco de deixar de fora alguém que foi luz no meu caminho. Agradeço a todos que torceram por mim, que enviaram mensagens de conforto nos dias escuros, que perdoaram minhas ausências e que celebraram cada pequena vitória ao meu lado.

Por fim, eu dedico este trabalho ao meu amado filho, Derick Menezes do Carmo. Que no futuro, ao folhear estas páginas, ele possa entender que o amor e a união de uma família são capazes de nos fazer superar o impossível, e que vale a pena lutar por aquilo em que acreditamos.

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Entre teoremas e percalços, o maior aprendizado:
na travessia da vida, o percurso não é definido pelas certezas,
mas pelos desvios e pelas memórias que se guarda.*

RESUMO

MENEZES, K. M. **Desvios moderados para o passeio aleatório minimal**. 2026. 92 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2026.

Esta tese investiga o comportamento assintótico do passeio aleatório minimal (PAM), um modelo estocástico não markoviano caracterizado por memória de longo alcance. A dinâmica do processo baseia-se em uma regra de evolução na qual, a cada passo, um instante do passado é escolhido uniformemente ao acaso e o caminhante replica a ação tomada naquele momento (mover-se ou permanecer estacionário). Demonstra-se como o parâmetro de memória α governa o comportamento macroscópico do processo, determinando a influência da trajetória passada na probabilidade de movimentos futuros.

Para analisar tais comportamentos, estabelece-se uma conexão formal entre o PAM e os processos de urna de Pólya, permitindo a aplicação da teoria espectral de matrizes de substituição para a prova de teoremas de limite. Observa-se que, para $\alpha < 1/2$, o processo reside no regime difusivo, convergindo para um processo gaussiano com incrementos dependentes. No ponto crítico $\alpha = 1/2$, a memória torna-se assintoticamente irrelevante e o processo converge para o movimento browniano padrão. No regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$), a memória domina a evolução e a convergência ocorre para uma única variável aleatória não gaussiana. Adicionalmente, analisa-se o caso do passeio “mais preguiçoso” ($q = 0$), no qual a lei forte dos grandes números clássica falha e o processo converge para um limite aleatório com distribuição de Mittag-Leffler.

A principal contribuição original deste trabalho é a prova de um princípio de desvios moderados (PDM) para o PAM no regime difusivo ($\alpha < 1/2$). Empregando a teoria de martingais, determina-se a função taxa que caracteriza a probabilidade de tais desvios e sua respectiva velocidade de convergência. Este resultado preenche uma lacuna fundamental entre as flutuações típicas, descritas pelo teorema central do limite, e os eventos extremos, descritos pela teoria de grandes desvios, fornecendo uma caracterização rigorosa e completa das flutuações do modelo.

Palavras-chave: Passeio aleatório minimal, processos não markovianos, desvios moderados, modelos de urna, distribuição limite.

ABSTRACT

MENEZES, K. M. **Moderate deviations for the minimal random walk**. 2026. 92 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2026.

This dissertation investigates the asymptotic behavior of the minimal random walk (MRW), a non-Markovian stochastic model characterized by long-range memory. The dynamics of the process follow an evolution rule in which, at each step, a past time instant is chosen uniformly at random, and the walker replicates the action taken at that moment (either moving or remaining stationary). We demonstrate how the memory parameter α governs the macroscopic behavior of the process, determining the influence of the past trajectory on the probability of future movements.

To analyze such behaviors, we establish a formal connection between the MRW and Pólya urn schemes, enabling the application of the spectral theory of substitution matrices to prove limit theorems. We show that for $\alpha < 1/2$, the process lies in the diffusive regime, converging to a Gaussian process with dependent increments. At the critical point $\alpha = 1/2$, the memory becomes asymptotically irrelevant, and the process converges to standard Brownian motion. In the superdiffusive regime ($\alpha > 1/2$), the memory dominates the evolution, and convergence occurs toward a unique non-Gaussian random variable. Additionally, we analyze the “laziest” walk case ($q = 0$), in which the classical strong law of large numbers fails, and the process converges to a random limit with a Mittag-Leffler distribution.

The main original contribution of this work is the proof of a moderate deviations principle (MDP) for the MRW in the diffusive regime ($\alpha < 1/2$). Employing martingale theory, we determine the rate function that characterizes the probability of such deviations and their respective rate of convergence. This result fills a fundamental gap between typical fluctuations, described by the central limit theorem, and extreme events, described by large deviations theory, providing a rigorous and complete characterization of the model’s fluctuations.

Keywords: Minimal random walk, non-Markovian processes, moderate deviations, urn models, limit distribution.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Fundamentação física	17
1.1.1	<i>Movimento browniano</i>	18
1.1.2	<i>Difusão</i>	19
1.2	Passeio aleatório	21
2	PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL	25
2.1	Definição do modelo	26
2.2	Propriedades fundamentais e análise dos momentos	27
2.2.1	<i>Cálculo do primeiro momento</i>	29
2.2.2	<i>Cálculo do segundo momento e variância</i>	34
2.3	Comportamento assintótico da variância	35
2.3.1	<i>Análise do crescimento assintótico da variância</i>	36
2.3.2	<i>Análise da evolução da distribuição limite</i>	37
2.3.3	<i>Considerações Finais</i>	39
3	ANÁLISE ASSINTÓTICA VIA URNAS DE PÓLYA	41
3.1	Introdução às urnas de Pólya	41
3.1.1	<i>Urnas de Pólya generalizada e sua conexão com o passeio aleatório minimal</i>	43
3.1.2	<i>Matriz de substituição do passeio aleatório minimal</i>	44
3.2	Teoremas limite para o passeio aleatório minimal	45
3.3	Regime difusivo ($\alpha < 1/2$)	47
3.4	O regime marginalmente superdifusivo ($\alpha = 1/2$)	49
3.5	O regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$)	50
3.6	Discussão e síntese dos resultados	52
4	O CASO $Q=0$	55
4.1	Momentos e regimes de difusão	55
4.2	Convergência quase certa e o limite de Mittag-Leffler	57
4.3	Discussão e interpretação dos resultados	57
4.4	Comparativo estrutural entre os regimes $q > 0$ e $q = 0$	60

5	PRINCÍPIO DOS DESVIOS MODERADOS PARA O PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL	61
5.1	A hierarquia dos desvios e o princípio dos desvios moderados	61
5.2	O desafio da memória e o teorema principal	64
5.3	Estrutura de martingal do processo	64
5.4	Resultados preliminares para a prova principal	66
5.5	O princípio dos desvios moderados para o passeio aleatório minimal	68
5.5.1	<i>Exemplos de aplicação do PDM</i>	75
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
	REFERÊNCIAS	81
APÊNDICE A	RESULTADOS COMPLEMENTARES E DEMONSTRAÇÕES TÉCNICAS	83
A.1	Processos de urna e teoria espectral	83
A.1.1	<i>Elementos de teorias de matrizes</i>	83
A.1.2	<i>Urnas de Pólya generalizadas</i>	84
A.1.3	<i>Modelos de urna triangulares</i>	88
A.2	Ferramentas analíticas e probabilísticas	88
A.2.1	<i>Convergência, limites e funções especiais</i>	89
A.2.2	<i>Desigualdades de concentração e o PDM</i>	89
A.3	Expressão analítica do coeficiente $C(\alpha, q, s)$	90
A.4	Prova da identidade do primeiro momento	91

INTRODUÇÃO

Passeios aleatórios descrevem matematicamente um caminho formado por uma sucessão de deslocamentos aleatórios. É um dos principais conceitos da teoria da probabilidade, utilizado para modelar fenômenos em diversas áreas, desde a flutuação da taxa de câmbio na economia até o movimento de partículas em um fluido. Os modelos mais simples de passeios aleatórios geralmente possuem a **propriedade de Markov**, na qual o processo não possui **memória**: a distribuição de probabilidade de seus estados futuros depende apenas do estado atual, e não da trajetória que o levou até o presente. No entanto, muitos fenômenos de interesse exibem memória, onde a trajetória passada influencia as escolhas futuras. O foco deste trabalho são precisamente esses passeios aleatórios não markovianos. Neste capítulo, apresentaremos os conceitos essenciais para analisar com rigor o passeio aleatório minimal. Começaremos pela fundamentação física do problema para entender a origem desses modelos.

1.1 Fundamentação física

Os passeios aleatórios são modelos matemáticos frequentemente utilizados para descrever fenômenos físicos. A teoria da probabilidade oferece ferramentas que permitem entender como inúmeras interações aleatórias em nível **microscópico** têm um comportamento coletivo estatisticamente previsível, como os processos de difusão **macroscópicos**.

O objetivo desta seção é formalizar esta conexão. Para isso, introduziremos a linguagem da física estatística para classificar o comportamento de longo prazo de um caminhante, definindo os regimes de difusão normal e anômala. Estes conceitos são essenciais para a análise do passeio aleatório minimal, o objeto central desta tese.

1.1.1 Movimento browniano

Em um nível microscópico, as substâncias estão em constante movimento e colidindo entre si. O movimento dessas partículas é tão complexo e irregular que não pode ser descrito utilizando leis determinísticas. Assim, a posição de uma partícula em um dado momento é melhor descrita por meios probabilísticos.

Em 1827 o botânico Robert Brown estudava minúsculos grãos de pólen se movendo na água. Ele observou que esses grãos se moviam constantemente e de maneira irregular, mas não conseguiu descrever matematicamente os mecanismos que causavam este movimento. Anos depois, em 1905, Albert Einstein publicou um artigo explicando que o movimento observado por Brown era o resultado do pólen sendo bombardeado por moléculas de água individuais em movimento aleatório. De forma independente e quase simultânea, em 1906, Marian Smoluchowski desenvolveu uma abordagem baseada na teoria cinética dos gases para descrever o mesmo fenômeno. Enquanto o trabalho de Einstein focava na conexão entre difusão e o tamanho das partículas, Smoluchowski forneceu uma análise das flutuações estocásticas, o que estabeleceu bases teóricas fundamentais para a comprovação da existência de átomos. O esforço conjunto desses pesquisadores resultou na hoje consagrada relação de Einstein-Smoluchowski.

A formulação matemática rigorosa para o movimento browniano foi desenvolvida em 1923 por Norbert Wiener, e o modelo resultante ficou conhecido como processo de Wiener.

Definição 1.1 (Movimento browniano padrão). Um processo estocástico em tempo contínuo $(B_t)_{t \geq 0}$, definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é chamado de **movimento browniano padrão** (ou **processo de Wiener**) se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) **Ponto de partida:** $B_0 = 0$ quase certamente.
- (ii) **Trajетórias contínuas:** As funções $t \mapsto B_t(\omega)$ são contínuas para quase todo $\omega \in \Omega$.
- (iii) **Incrementos independentes e estacionários:** Para qualquer sequência de tempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, os incrementos $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são variáveis aleatórias independentes entre si. A propriedade de serem estacionários significa que a distribuição de qualquer incremento depende apenas da duração do intervalo de tempo.
- (iv) **Distribuição dos incrementos:** Para quaisquer $t_0, t \geq 0$, o incremento $B_{t+t_0} - B_{t_0}$ possui uma distribuição normal (ou gaussiana) com média zero e variância t . Em notação:

$$B_{t+t_0} - B_{t_0} \sim N(0, t).$$

Uma consequência direta de (i) e (iv) é que, para qualquer $t > 0$, a variável aleatória B_t tem distribuição $N(0, t)$.

Mais detalhes sobre o movimento browniano podem ser encontrados em [Karatzas e Shreve \(1991\)](#).

1.1.2 Difusão

O movimento browniano está diretamente ligado com diversos fenômenos físicos, como a difusão. Basicamente, a difusão descreve o movimento de partículas que tendem ir de uma região de maior concentração para uma de menor concentração, impulsionado pelo movimento aleatório dado pela colisão individual das partículas. Podemos citar como exemplos a dispersão de um corante em água ou o transporte de calor ao longo de uma barra de metal.

Uma maneira rigorosa de classificar um processo de difusão consiste em analisar o comportamento assintótico de sua **variância**. Para um processo estocástico $X(t)$, a variância em um instante t , dada por $\text{Var}(X(t)) = \mathbb{E}[X(t)^2] - (\mathbb{E}[X(t)])^2$, possui uma interpretação física direta: ela mede o deslocamento quadrático médio do processo em torno de sua posição média. Sendo o segundo momento central do processo, o crescimento da variância ao longo do tempo governa o regime de difusão.

Um processo exibe **difusão normal** quando sua variância cresce de forma assintoticamente linear com o tempo. Este é considerado o regime de difusão padrão, e por isso é comum, em alguns contextos, referir-se a ele simplesmente como um “**processo difusivo**”. No entanto, quando a variância cresce de forma não linear com o tempo, o processo exibe **difusão anômala**. Quando ela é uma função com crescimento mais rápido do que o linear, o processo é chamado de **superdifusivo** e quando é mais lento, **subdifusivo**.

Temos portanto a seguinte definição.

Definição 1.2. Dizemos que um processo estocástico $X(t)$ exibe difusão com expoente h se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(X(t))}{t^h} = C. \quad (1.1)$$

O expoente h classifica o regime de difusão da seguinte forma:

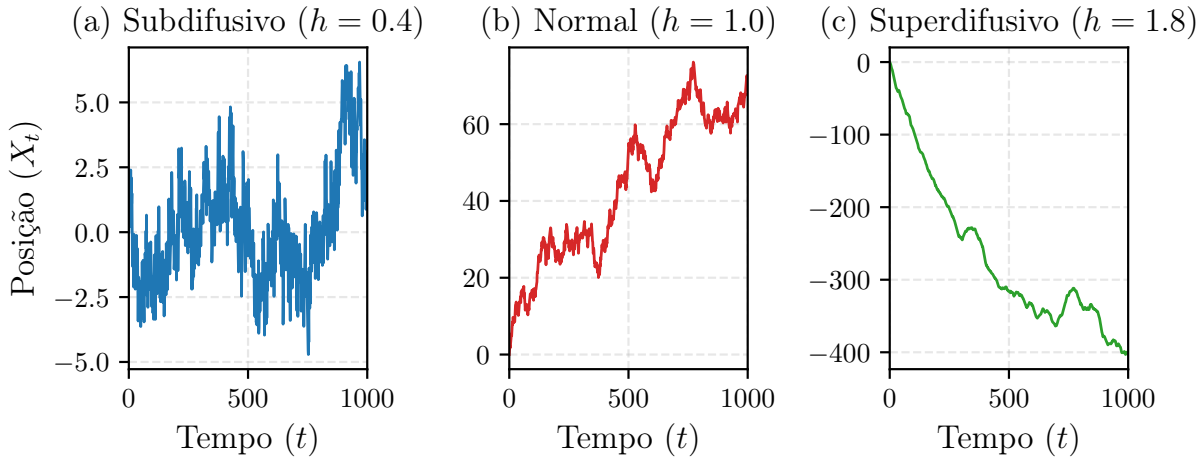
- Subdifusivo, se $h < 1$.
- Normal, se $h = 1$. Neste caso, C é o **coeficiente de difusão**.
- Superdifusivo, se $h > 1$.

Qualquer regime com $h \neq 1$ é chamado de difusão anômala.

Um caso especial importante, que marca a fronteira entre os regimes normal e superdifusivo, é o **marginalmente superdifusivo**, onde a variância cresce como $\text{Var}(X(t)) \sim t \log(t)$ (escreveremos $f(t) \sim g(t)$ para indicar que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = 1$).

A [Figura 1](#) ilustra trajetórias típicas para os três regimes de difusão. Para gerar estas curvas sem depender de modelos microscópicos específicos, utilizamos o **movimento browniano**

Figura 1 – Trajetórias típicas para diferentes regimes de difusão.



Fonte: Elaborada pela autora.

fracionário (fBm). O fBm é um processo gaussiano contínuo, $B_H(t)$, caracterizado pelo expoente de Hurst $H \in (0, 1)$, cuja variância cresce conforme $\text{Var}(B_H(t)) \sim t^{2H}$.

A relação entre o expoente de difusão h (definido na [Equação 1.1](#)) e o expoente de Hurst é dada por $h = 2H$. As trajetórias exibem as seguintes características:

- (a) **Regime subdifusivo ($h < 1$, ou $H < 0.5$):** Os incrementos do processo são negativamente correlacionados, o que significa que um passo em uma direção tende a ser seguido por uma reversão, mantendo o processo confinado próximo à origem.
- (b) **Regime normal ($h = 1$, ou $H = 0.5$):** Corresponde ao movimento browniano padrão. Os incrementos são independentes e a trajetória exibe uma dispersão moderada.
- (c) **Regime superdifusivo ($h > 1$, ou $H > 0.5$):** A trajetória exibe memória de longo alcance positiva. Os incrementos são positivamente correlacionados, resultando em longos percursos de tendência definida (movimento balístico), levando a um rápido afastamento da origem.

A recorrência da difusão normal na natureza está diretamente ligada ao **teorema central do limite (TCL)**. Este teorema clássico, estabelece que a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), desde que possuam média e variância finitas e não nula, converge em distribuição para uma distribuição normal.

A conexão com os passeios aleatórios é consequência de sua própria definição. A posição de um caminhante é dada pela soma dos incrementos de seus passos. Portanto, para qualquer passeio aleatório em que os incrementos são i.i.d. (a condição de ausência de memória), as hipóteses do TCL são satisfeitas. Nestes casos, a variância da posição cresce linearmente com o número de passos, o que caracteriza o regime de difusão normal. Assim, a difusão normal é tão

comum em sistemas físicos porque a soma de inúmeras flutuações microscópicas frequentemente resulta em uma distribuição gaussiana.

1.2 Passeio aleatório

Embora a teoria de passeios aleatórios possa ser desenvolvida em espaços mais gerais, nosso interesse aqui será no caso em que os passos ocorrem sobre o conjunto dos números inteiros. A definição a seguir formaliza este cenário.

Definição 1.3. Um **passeio aleatório** unidimensional em tempo discreto é uma sequência de variáveis aleatórias $(S_n)_{n \geq 0}$, com valores no conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O processo é caracterizado por uma **posição inicial** $S_0 = s_0$ e uma regra de evolução dada por

$$S_n = S_{n-1} + \delta_n, \quad \text{para } n \geq 1, \quad (1.2)$$

onde $(\delta_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias com valores em $\mathbb{Z}$, chamadas de **incrementos** do passeio.

Podemos interpretar esta definição da seguinte maneira intuitiva: uma partícula (ou caminhante) parte de uma posição inicial s_0 . Em cada instante n , o incremento δ_n representa seu deslocamento aleatório, e a variável S_n registra sua nova posição. A sequência $(S_n)_{n \geq 0}$ descreve, portanto, a **trajetória** completa do caminhante.

Uma consequência direta da definição é que a posição em n é a soma da posição inicial com todos os incrementos até aquele momento:

$$S_n = s_0 + \sum_{j=1}^n \delta_j.$$

A mudança de estado de S_{n-1} para S_n é chamada de **transição**, e a probabilidade de cada movimento é quantificada pelas **probabilidades de transição**. O conceito de memória em um passeio aleatório está ligado à informação necessária para determinar essas probabilidades. Para formalizar a noção de “informação acumulada”, utilizamos o conceito de **filtração**.

Uma filtração $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente de σ -álgebras, onde $\mathcal{F}_n$ representa o histórico completo do processo até o tempo n . Como a aleatoriedade do passeio vem dos incrementos, é natural definir a filtração natural do processo a partir deles: $\mathcal{F}_n = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$ para $n \geq 1$, com $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Com base nisso, podemos definir rigorosamente a ausência de memória.

Definição 1.4. Seja $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ a filtração natural gerada pelo passeio (S_n) . O passeio aleatório é dito **markoviano** se, para todo $n \geq 1$ e qualquer estado $s_n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}[S_n = s_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{P}[S_n = s_n | S_{n-1}].$$

Caso esta condição não esteja satisfeita ele é dito **não markoviano**.

A seguir vamos apresentar o exemplo mais fundamental de um passeio aleatório markoviano.

Exemplo 1.1 (passeio aleatório simples). O **passeio aleatório simples** (PAS) é o modelo canônico de um processo markoviano. Nele, os incrementos $(\delta_n)_{n \geq 1}$ são uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). No caso unidimensional, normalmente assumimos que os passos são de tamanho unitário, ou seja,

$$\mathbb{P}[\delta_n = 1] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\delta_n = -1] = 1 - p,$$

para alguma probabilidade $p \in [0, 1]$. Se $p = 1/2$, o passeio é dito **simétrico**.

A propriedade de Markov é uma consequência direta da independência dos incrementos. A distribuição de δ_n não depende de nenhum evento passado, portanto, a posição futura $S_n = S_{n-1} + \delta_n$ depende da história do processo apenas através do estado atual S_{n-1} .

O comportamento assintótico do PAS é bem conhecido. Primeiramente, a lei forte dos grandes números afirma que a posição média do caminhante converge para a média de um único passo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[\delta_1] = p - (1 - p) = 2p - 1, \text{ q.c..}$$

O teorema central do limite descreve as flutuações em torno dessa média. A posição, devidamente centrada e normalizada, converge em distribuição para uma variável gaussiana:

$$\frac{S_n - n(2p - 1)}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(\delta_1)}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

onde a variância de um passo é $\text{Var}(\delta_1) = \mathbb{E}[\delta_1^2] - (\mathbb{E}[\delta_1])^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$. Note que a variância do processo, $\text{Var}(S_n) = n \cdot 4p(1 - p)$, cresce linearmente com n , caracterizando o regime de difusão normal. Este comportamento difere dos regimes de difusão anômala que surgem em passeios com memória.

Nos processos não markovianos, onde a dinâmica futura depende da trajetória passada, a memória pode ser de **curto alcance**, se a dependência se limita a um número finito de passos, ou de **longo alcance**, se toda a história é relevante. Um exemplo de passeio aleatório de memória de longo alcance é o **passeio aleatório do elefante**, assim nomeado em alusão ao ditado popular que diz que os elefantes nunca esquecem. A seguir, temos o modelo original proposto por [Schütz e Trimper \(2004\)](#).

Exemplo 1.2 (Passeio aleatório do elefante). No **passeio aleatório do elefante** (PAE), a posição evolui como $S_n = S_{n-1} + \delta_n$, com $S_0 = 0$ e $\delta_n \in \{-1, 1\}$. A memória é implementada da seguinte forma:

- **Passo inicial:** $\mathbb{P}[\delta_1 = 1] = s$ para um dado $s \in [0, 1]$.
- **Evolução com memória:** Para $n \geq 1$, escolhe-se um passo anterior $n' \in \{1, \dots, n\}$ uniformemente ao acaso. O novo incremento δ_{n+1} é determinado pelo passo lembrado $\delta_{n'}$:

$$\delta_{n+1} = \begin{cases} +\delta_{n'} & \text{com probabilidade } p \\ -\delta_{n'} & \text{com probabilidade } 1 - p, \end{cases}$$

onde $p \in [0, 1]$ é o **parâmetro de memória**.

A dinâmica deste passeio depende do parâmetro p . Se $p = 1$, o caminhante sempre repete o passo lembrado, o que faz com que, após o primeiro passo, ele se mova deterministicamente em uma única direção. Se $p = 0$, o caminhante sempre inverte o passo lembrado. Surpreendentemente, este mecanismo resulta em um processo de difusão normal, análogo ao PAS, mas por razões distintas. Embora a memória seja extremamente forte, a regra de sempre inverter o passo lembrado gera um efeito de auto-correção. Essa auto-correção, combinada com a aleatoriedade na escolha de qual passo passado inverter, faz com que o processo se comporte efetivamente como um passeio sem memória.

O caso intermediário $p = 1/2$ remove o efeito da memória, pois δ_{n+1} será $+1$ ou -1 com probabilidade $1/2$ em qualquer caso, e o processo se reduz ao PAS (é markoviano).

Para $p \neq 1/2$, o processo é não-markoviano. A dinâmica de reforço ou anti-reforço da memória é definida como:

- Se $1/2 < p < 1$, o caminhante tende a repetir seus movimentos passados, portanto espera-se que ele se afaste da origem. Esse é um comportamento de **persistência**.
- Se $0 < p < 1/2$, ele tende a reverter movimentos passados, o que o mantém mais próximo da origem. Esse é um comportamento de **anti-persistência**.

Intuitivamente, poderíamos esperar que qualquer nível de persistência ($p > 1/2$) levasse a um afastamento acelerado da origem. No entanto, um dos resultados mais notáveis deste modelo é a existência de um ponto crítico em $p = 3/4$, que separa o regime de difusão normal do superdifusivo.

Para $3/4 < p < 1$, a persistência é forte o suficiente para induzir um regime **superdifusivo**, e o caminhante de fato se afasta rapidamente da origem. Para $0 < p < 3/4$ (incluindo todo o regime anti-persistente), o efeito da memória não é forte o bastante para alterar a escala do processo, que permanece no regime de difusão normal (ou seja, a variância ainda cresce linearmente com n), embora o coeficiente de difusão seja modificado pelo parâmetro de memória. O comportamento assintótico da variância, por exemplo, resume bem essa transição de fase. Para

o caso simétrico ($s = 1/2$), [Baur e Bertoin \(2016\)](#) mostra que a variância se comporta como:

$$\text{Var}(S_n) \sim \begin{cases} \frac{1}{3-4p} \cdot n, & \text{se } 0 \leq p < 3/4 \\ n \ln(n), & \text{se } p = 3/4 \\ C(p, s) \cdot n^{4p-2}, & \text{se } 3/4 < p \leq 1 \end{cases}$$

onde $C(p, s)$ é uma função que depende de p e s .

Consequentemente, o PAE exibe difusão normal para $0 \leq p < 3/4$, é marginalmente superdifusivo em $p = 3/4$, e superdifusivo para $3/4 < p \leq 1$. Este modelo mostra como regras de memória simples podem gerar regimes de difusão anômala.

Veremos que o passeio aleatório minimal, objeto central deste trabalho, apresentará um fenômeno análogo, porém governado por princípios diferentes.

As principais contribuições originais deste trabalho consistem em três resultados:

1. **Prova do princípio de desvios moderados (PDM):** Apresentamos, no [Capítulo 5](#), a prova inédita do PDM para o passeio aleatório minimal no regime difusivo. Este é o resultado central desta tese e estabelece a função taxa e a escala de decaimento das probabilidades de desvios intermediários, preenchendo uma lacuna na teoria estatística deste modelo.
2. **Formalização de teoremas limite funcionais:** No [Capítulo 3](#), estabelecemos formalmente os princípios de invariância para o PAM. Embora alguns comportamentos fossem esperados qualitativamente, a demonstração rigorosa das funções de covariância e a caracterização dos processos gaussianos limites para este modelo específico são contribuições originais deste trabalho.
3. **Correção e validação da variância crítica:** Identificamos e corrigimos uma discrepância na literatura vigente referente à variância do modelo no ponto crítico ($\alpha = 1/2$). Através de uma abordagem via martingais e validação por simulações de alta precisão, demonstramos que o coeficiente clássico proposto anteriormente estava incorreto, estabelecendo o valor analítico exato no [Capítulo 2](#).

Para alcançar esses resultados, apresentaremos no [Capítulo 2](#) análises teóricas e numéricas que sustentam os resultados que serão formalizados nos capítulos seguintes, garantindo o rigor matemático e a clareza necessários para a prova dos teoremas. Faremos ainda, uma conexão formal entre o PAM e os processos de urna de Pólya, o que fundamentará a demonstração dos teoremas limite.

PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL

Notações e Convenções

Ao longo desta tese, adotamos um conjunto de notações padrão que serão utilizadas de forma consistente. Para a conveniência do leitor, listamos aqui os símbolos mais recorrentes. As definições formais e o contexto específico serão apresentados nos capítulos apropriados.

- $f(n) \sim g(n)$ indica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$. Em contextos onde o foco reside apenas na ordem de grandeza, omitiremos as constantes multiplicativas por simplicidade.
- $f(n) = o(g(n))$ indica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ denota o espaço de probabilidade subjacente. A esperança com respeito a $\mathbb{P}$ é denotada por $\mathbb{E}$.
- $(S_n)_{n \geq 0}$ representa a posição do caminhante no instante n .
- $(\delta_n)_{n \geq 1}$ denota a sequência de incrementos aleatórios do passeio, com $\delta_n \in \{0, 1\}$.
- $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ é a filtração natural gerada pelos incrementos, ou seja, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_n = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$ para $n \geq 1$.
- Os parâmetros $p, q \in [0, 1]$ governam a memória do passeio aleatório minimal. A probabilidade de repetir um passo de movimento ($\delta_{n'} = 1$) é p , e a de iniciar um movimento após um passo de repouso ($\delta_{n'} = 0$) é q . O parâmetro $s \in [0, 1]$ é a probabilidade de movimento no primeiro passo.
- $\alpha = p - q$, definida na [Equação 2.1](#) é o parâmetro de memória, que determina os diferentes regimes de difusão do processo.

- A' (ou v') denota a transposta da matriz A (ou do vetor v). Por convenção, todos os vetores são definidos como vetores coluna, a menos que o símbolo de transposição seja explicitamente utilizado.
- $(a_n)_{n \geq 1}$ é a sequência de normalização fundamental do modelo, que surge naturalmente da sua estrutura recursiva, definida na [Equação 2.6](#).
- A conexão com a teoria de urnas é feita através de um processo $(X_n)_{n \geq 0}$, definido em (3.1), que descreve a composição da urna e de sua matriz de substituição A , definida na [Definição A.2](#).
- $(b_n)_{n \geq 1}$ é a sequência de constantes que define a escala dos desvios moderados, satisfazendo $b_n \rightarrow \infty$ e $b_n = o(\sqrt{n})$, como na [Equação 5.1](#).
- $(M_n)_{n \geq 1}$ é o martingal fundamental associado ao processo, definido por $M_n = (S_n - \mathbb{E}[S_n])/a_n$, como na [Equação 5.2](#).
- $(D_n)_{n \geq 1}$ é a sequência de diferenças de martingal, $D_n = M_n - M_{n-1}$, como na [Equação 5.3](#).
- $\langle M \rangle_n$ denota o processo de variação quadrática do martingal, definido na [Equação 5.4](#).

Outras notações serão introduzidas conforme forem necessárias ao longo do texto.

2.1 Definição do modelo

O modelo central desta tese é o **passeio aleatório minimal (PAM)**, proposto por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#). Trata-se de um passeio aleatório unidimensional, não-markoviano, em tempo discreto, cujo espaço de estados é $\mathbb{Z}_+$. Sua dinâmica, assim como a do passeio aleatório do elefante, possui memória de longo alcance, dependendo de toda a história do processo.

A trajetória do caminhante, $(S_n)_{n \geq 0}$, parte de $S_0 = 0$ e evolui segundo a relação de recorrência:

$$S_n = S_{n-1} + \delta_n, \quad n \geq 1,$$

onde os incrementos $(\delta_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias de Bernoulli, $\delta_n \in \{0, 1\}$, indicando se o caminhante se move para a direita ou permanece parado.

A dinâmica da memória é definida como se segue:

- **Passo inicial:** O primeiro incremento é definido por $\mathbb{P}[\delta_1 = 1] = s$, consequentemente $\mathbb{P}[\delta_1 = 0] = 1 - s$ para $s \in [0, 1]$.
- **Evolução com memória:** Para cada passo $n + 1$, um instante $n' \in \{1, \dots, n\}$ é escolhido uniformemente ao acaso. O passo lembrado, $\delta_{n'}$, determina a distribuição de δ_{n+1} através das probabilidades de transição:

- Se o passo lembrado é de movimento, $\delta_{n'} = 1$, então:

$$\mathbb{P}[\delta_{n+1} = 1 | \delta_{n'} = 1] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\delta_{n+1} = 0 | \delta_{n'} = 1] = 1 - p.$$

- Se o passo lembrado é de repouso, $\delta_{n'} = 0$, então

$$\mathbb{P}[\delta_{n+1} = 1 | \delta_{n'} = 0] = q \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\delta_{n+1} = 0 | \delta_{n'} = 0] = 1 - q.$$

Os parâmetros $p, q \in [0, 1]$ controlam a memória do processo. O caso trivial onde $p = 1$ e $q = 0$, que leva a um passeio determinístico após o primeiro passo, será excluído de nossa análise.

2.2 Propriedades fundamentais e análise dos momentos

O parâmetro que governa a memória do PAM será definido por:

$$\alpha := p - q. \tag{2.1}$$

Este parâmetro, que pertence ao intervalo $[-1, 1)$, determina três comportamentos macroscópicos distintos:

- **Persistente** ($\alpha > 0$): Quando $p > q$, um passo de movimento reforça a probabilidade de movimentos futuros. O caminhante tende a continuar suas sequências de movimento.
- **Anti-persistente** ($\alpha < 0$): Quando $p < q$, um passo de movimento reduz a probabilidade de movimentos futuros. O caminhante tende a interromper suas sequências de movimento.
- **Memória neutra** ($\alpha = 0$): A probabilidade de movimento independe do passo lembrado.

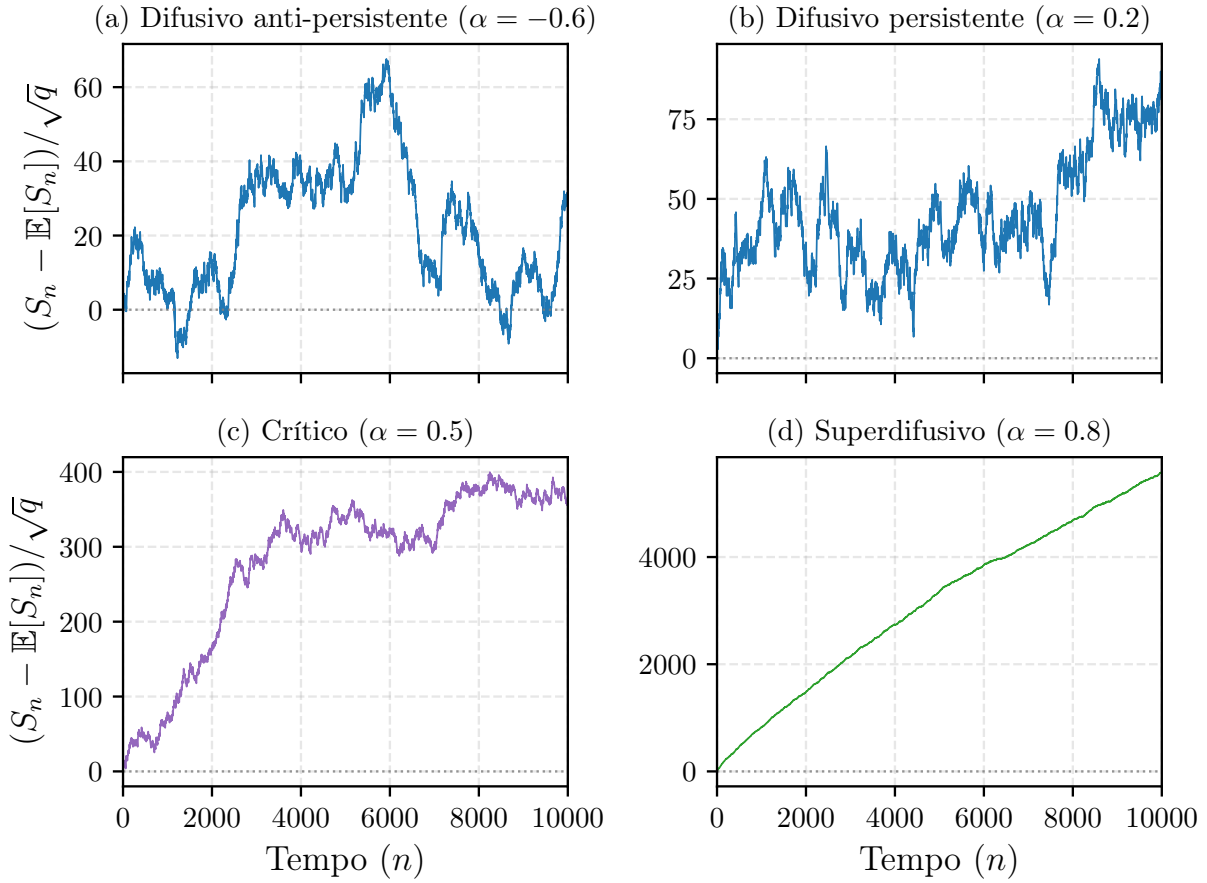
O **ponto crítico**, $\alpha = 1/2$, como veremos adiante, é um valor de fundamental importância, pois define a fronteira exata que separa o regime de difusão normal do superdifusivo. Ele corresponde a uma situação de equilíbrio particular, na qual a tendência de persistir em um movimento (p) supera a de iniciar um novo (q) por um valor fixo de $1/2$.

Para visualizar estes regimes, é necessário analisar as **flutuações** do processo em torno de sua trajetória média, $S_n - \mathbb{E}[S_n]$. Uma análise visual da trajetória S_n seria dominada por sua tendência de crescimento linear (para $q > 0$), mascarando as diferenças mais sutis no comportamento da variância, que é o que de fato define os regimes de difusão.

A [Figura 2](#) oferece uma ilustração da tendência de movimento. Para permitir uma comparação visual direta entre os regimes, as flutuações foram normalizadas por $\sqrt{q}$, compensando assim a intensidade média de movimento do caminhante, isolando o efeito da memória α .

Os gráficos (a) e (b) focam no regime difusivo ($\alpha < 1/2$), a tendência de memória de reverter seus passos limita sua dispersão em torno da média. No entanto, no regime anti-persistente as flutuações tendem a ser mais contidas, limitando seu espalhamento.

Figura 2 – Trajetórias simuladas e centralizadas do Passeio Aleatório Minimal (normalizadas por $\sqrt{q}$).



Fonte: Elaborada pela autora.

O gráfico (c) revela a característica única do ponto crítico, $\alpha = 1/2$. A escala do eixo vertical tem uma ordem de grandeza superior à dos casos difusivos, o que confirma que o processo deixou o regime de difusão normal.

O regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$), ilustrado em (d) para $\alpha = 0.8$, exibe um comportamento explosivo, afastando-se rapidamente da origem.

A intuição fornecida pela Figura 2 é formalizada por um conjunto de leis limite clássicas, adaptadas para o PAM. Apesar da complexa estrutura de memória, o processo ainda obedece uma versão da lei dos grandes números, do teorema central do limite e da lei do logaritmo iterado. Os teoremas a seguir, provados em Coletti, Gava e Lima (2019) com base na teoria de martingais, mostram que a memória α não quebra estas leis, mas sim redefine seus parâmetros característicos.

Teorema 2.1 (Lei dos grandes números para o PAM). Seja $(S_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório minimal. Para todo $\alpha \in [-1, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = 0 \quad \text{q.c..}$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{q}{1-\alpha} \quad \text{q.c..}$$

Teorema 2.2 (Teorema central do limite para o PAM). Seja $(S_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório minimal. Sejam $\alpha \leq 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$

(i) Se $\alpha < 1/2$, então

$$\frac{S_n - \frac{qn}{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)}\right).$$

(ii) Se $\alpha = 1/2$, então

$$\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0, 4q(1-p)).$$

Teorema 2.3 (Lei dos logaritmos iterados para o PAM). Seja $(S_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório minimal. Sejam $\alpha \leq 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$

(i) Se $\alpha < 1/2$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \frac{qn}{1-\alpha}|}{\sqrt{2n \log \log n}} = \sqrt{\frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)}} \quad \text{q.c..}$$

(ii) Se $\alpha = 1/2$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - 2qn|}{\sqrt{2n \log n \log \log n}} = \sqrt{4q(1-p)} \quad \text{q.c..}$$

Observação 2.1. Em conjunto, os teoremas limite apresentados nesta seção descrevem o comportamento assintótico do processo para o caso $q > 0$. É fundamental notar, contudo, que a dinâmica do processo muda drasticamente quando $q = 0$. Neste cenário, como será detalhado no [Capítulo 4](#), a própria lei dos grandes números exibe um comportamento não clássico, convergindo para um limite aleatório, o que por sua vez altera fundamentalmente a natureza das flutuações de segunda ordem.

2.2.1 Cálculo do primeiro momento

Lembremos que a posição no instante n é a soma dos incrementos:

$$S_n = \sum_{j=1}^n \delta_j. \quad (2.2)$$

Seja $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ a filtração natural gerada pelos incrementos, $\mathcal{F}_n = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$. A probabilidade condicional do próximo incremento, dado o histórico $\mathcal{F}_n$, pode ser escrita de forma

compacta. Para $\delta \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\delta_{n+1} = \delta | \mathcal{F}_n] &= \frac{S_n}{n} \mathbb{P}[\delta_{n+1} = \delta | \delta_{n'} = 1] + \frac{n - S_n}{n} \mathbb{P}[\delta_{n+1} = \delta | \delta_{n'} = 0] \\ &= 1 - \delta + (2\delta - 1) \left(q + \alpha \frac{S_n}{n} \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Pela lei da esperança total, obtemos expressões para a esperança do incremento δ_{n+1} :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= q + \alpha \frac{S_n}{n}. \\ \mathbb{E}[\delta_{n+1}] &= q + \alpha \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

A partir da [Equação 2.4](#) e da relação $S_n = S_{n-1} + \delta_n$, obtemos a seguinte relação de recorrência para $\mathbb{E}[S_n]$:

$$\mathbb{E}[S_n] = \left(1 + \frac{\alpha}{n-1} \right) \mathbb{E}[S_{n-1}] + q. \quad (2.5)$$

Para resolver esta recorrência, utilizamos o método do fator integrante (discreto). Introduzimos uma sequência auxiliar $(a_n)_{n \geq 1}$ que sirva como um fator de soma. Esta sequência é definida para satisfazer a parte homogênea da recorrência e é dada por:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_n := \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{j} \right), \quad \text{para } n \geq 2 \text{ e } \alpha > -1. \quad (2.6)$$

A partir da [Equação 2.6](#), podemos encontrar uma forma fechada para a sequência. Expandindo o produtório, temos:

$$\begin{aligned}a_n &= \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j + \alpha}{j} \right) = \frac{(1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n - 1 + \alpha)}{1 \cdot 2 \cdots (n - 1)} \\ &= \frac{(1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n - 1 + \alpha)}{(n - 1)!}.\end{aligned}$$

O numerador é um **fatorial ascendente**, ou **símbolo de Pochhammer**, denotado por $(\alpha + 1)_{n-1}$. A relação fundamental entre o símbolo de Pochhammer e a função gama, é dada por $(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}$. Utilizando esta identidade, e a propriedade de que $\Gamma(k) = (k-1)!$ para k inteiro positivo, podemos reescrever a_n de forma exata.

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n - 1 + \alpha) &= \frac{\Gamma((1 + \alpha) + (n - 1))}{\Gamma(1 + \alpha)} = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}. \\ (n - 1)! &= \Gamma(n).\end{aligned}$$

Combinando os dois resultados, obtemos a expressão exata de a_n em termos da função gama:

$$a_n = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Utilizando a conhecida aproximação de Stirling para a função gama ($\Gamma(n+a)/\Gamma(n) \sim n^a$), ver [Fulks \(1961\)](#), obtemos o comportamento assintótico de a_n :

$$a_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Vamos utilizar as propriedades da sequência a_n para calcular o primeiro momento do passeio minimal, dado pela [Equação 2.5](#).

Fazendo o quociente a_n/a_{n-1} obtemos a relação de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{n-1} \right). \quad (2.8)$$

Substituindo na [Equação 2.5](#) e dividindo por a_n :

$$\frac{\mathbb{E}[S_n]}{a_n} = \frac{\mathbb{E}[S_{n-1}]}{a_{n-1}} + \frac{q}{a_n}.$$

Esta equação pode ser resolvida iterativamente, formando uma soma telescópica que resulta no seguinte:

$$\mathbb{E}[S_n] = a_n \left(\frac{\mathbb{E}[S_1]}{a_1} + \sum_{j=2}^n \frac{q}{a_j} \right).$$

Como $\mathbb{E}[S_1] = s$ e $a_1 = 1$, a solução exata para o primeiro momento é dada por:

$$\mathbb{E}[S_n] = a_n \left(s + q \sum_{j=2}^n \frac{1}{a_j} \right). \quad (2.9)$$

Para analisar o comportamento assintótico do primeiro momento, investigamos o limite da [Equação 2.9](#) quando $n \rightarrow \infty$. A parte não trivial é aproximar a soma no lado direito. Utilizando o comportamento assintótico de a_n dado pela [Equação 2.7](#), temos que $1/a_j \sim \Gamma(1+\alpha)j^{-\alpha}$. A soma pode, portanto, ser aproximada pela integral correspondente:

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{a_j} \sim \int_1^n \frac{\Gamma(1+\alpha)}{x^\alpha} dx \sim \Gamma(1+\alpha) \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Substituindo esta aproximação e a da [Equação 2.7](#) na [Equação 2.9](#), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &\sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left[s + q \left(\Gamma(1+\alpha) \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{s \cdot n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{q}{1-\alpha} n. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in [-1, 1)$, o termo linear em n domina o termo de ordem n^α . Portanto, o comportamento assintótico do primeiro momento é:

$$\mathbb{E}[S_n] \sim \frac{q}{1-\alpha} n. \quad (2.10)$$

Se $q = 0$, o deslocamento do caminhante cresce como n^p . Abordaremos esse caso posteriormente, vamos considerar aqui que $q \neq 0$.

O comportamento assintótico de $E[S_n]$, descreve a trajetória média do processo em grande escala. Utilizando a mesma estrutura analítica, em particular a sequência auxiliar a_n , podemos obter uma expressão para a probabilidade de o caminhante se mover em um passo n qualquer. Seja

$$p_n := \mathbb{P}[\delta_n = 1]. \quad (2.11)$$

A [Proposição 1](#) explicita essa probabilidade de um passo.

Proposição 1. No passeio aleatório minimal, o caminhante vai para a direita no n -ésimo passo com probabilidade

$$p_n = \frac{q}{1-\alpha} + \alpha \frac{a_{n-1}}{n-1} \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right) \text{ para } \alpha < 1.$$

Demonstração. Da [Equação 2.4](#), a probabilidade de um passo é dada por $p_n = \mathbb{E}[S_n] = q + \alpha \frac{\mathbb{E}[S_{n-1}]}{n-1}$. Para analisar a dinâmica desta probabilidade, precisamos de uma expressão exata para $\mathbb{E}[S_{n-1}]$ que separe o comportamento de longo prazo da influência das condições iniciais. Essa expressão, que é a solução exata da [Equação 2.5](#) foi apresentada em [Coletti, Gava e Lima \(2019\)](#):

$$\mathbb{E}[S_{n-1}] = \frac{q(n-1)}{1-\alpha} + \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right) a_{n-1}. \quad (2.12)$$

No [Seção A.4](#) demonstramos que essa identidade é, de fato, solução para a relação de recorrência dada na [Equação 2.5](#).

Substituindo esta expressão na fórmula para p_n , obtemos:

$$\begin{aligned} p_n &= q + \frac{\alpha}{n-1} \left[\frac{q(n-1)}{1-\alpha} + \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right) a_{n-1} \right] \\ &= q + \frac{\alpha q}{1-\alpha} + \alpha \frac{a_{n-1}}{n-1} \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{q(1-\alpha) + \alpha q}{1-\alpha} + \alpha \frac{a_{n-1}}{n-1} \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{q}{1-\alpha} + \alpha \frac{a_{n-1}}{n-1} \left(s - \frac{q}{1-\alpha} \right), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Este resultado mostra como a história do processo influencia a dinâmica local, decompondo a probabilidade de movimento $\mathbb{P}[\delta_n = 1]$ em dois componentes:

- **Uma tendência de equilíbrio:** O termo constante $q/(1-\alpha)$ corresponde à velocidade média assintótica do processo (conforme mostra o [Teorema 2.1](#)). Ele representa o comportamento de longo prazo para o qual a probabilidade de passo converge.

- **Uma correção dependente da história:** O segundo termo, $\alpha(a_{n-1}/(n-1))(s - q/(1 - \alpha))$, quantifica o desvio dessa tendência de equilíbrio em um tempo finito n . Podemos analisar este termo da seguinte forma:

- A diferença $s - q/(1 - \alpha)$ representa o **viés** da condição inicial. Ela determina se o processo começou com uma probabilidade de movimento s maior ou menor que sua média de longo prazo.
- O fator $a_{n-1}/n - 1$ nos dá a **velocidade** da convergência. Usando o comportamento assintótico de a_n (Equação 2.7), temos que $a_{n-1}/(n-1) \sim (n-1)^{\alpha-1}$, que converge para zero para $\alpha < 1$. A taxa desta convergência (lenta para α próximo de 1 e rápida quanto menor for α) mede a influência da condição inicial ao longo do tempo.
- O sinal de α (persistente ou anti-persistente), combinado com o sinal do viés inicial, determina a **direção** da convergência, isto é, se p_n se aproxima da média por valores superiores ou inferiores.

O exemplo a seguir ilustra este resultado.

Exemplo 2.1. Considere um passeio com parâmetros $p = 0.7$ e $q = 0.1$. O parâmetro de memória nesse caso é $\alpha = p - q = 0.6$ (regime persistente). A probabilidade de equilíbrio para um passo é $\frac{q}{1-\alpha} = \frac{0.1}{1-0.6} = 0.25$.

Agora, vamos supor que o processo comece com uma baixa probabilidade de movimento, digamos $s = 0.05$. O viés inicial é, portanto, negativo: $s - \frac{q}{1-\alpha} = 0.05 - 0.25 = -0.2$. Pela [Proposição 1](#), temos que:

$$p_n = 0.25 + (0.6) \frac{a_{n-1}}{n-1} (-0.2) = 0.25 - 0.12 \frac{a_{n-1}}{n-1}.$$

Analisando esses parâmetros podemos verificar que:

Como o termo de correção é negativo, a probabilidade de passo p_n será sempre **menor** que seu limite de equilíbrio de 0.25.

A convergência se dará **por baixo**, ou seja, $p_n \uparrow 0.25$ quando $n \rightarrow \infty$.

Este exemplo mostra que mesmo em um regime persistente ($\alpha > 0$), a probabilidade de movimento em tempos finitos pode ser bem baixa se o processo começou lento (viés inicial negativo). A memória de persistência leva tempo para superar a inércia da condição inicial.

Dessa forma, a probabilidade de um passo p_n é a resultante da combinação entre sua tendência de equilíbrio e o efeito acumulado da memória, explicitando como a condição inicial afeta a trajetória do processo ao longo do tempo.

2.2.2 Cálculo do segundo momento e variância

Para calcular o segundo momento do passeio minimal, utilizamos a [Equação 2.2](#) e o fato que $\delta_n^2 = \delta_n$:

$$S_n^2 = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \delta_j + \delta_n \right)^2 = S_{n-1}^2 + 2\delta_n S_{n-1} + \delta_n. \quad (2.13)$$

Tomando a esperança condicional na [Equação 2.13](#) e utilizando a [Equação 2.4](#)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}^2] + 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta_n S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]] + \mathbb{E}[\delta_n] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}^2] + 2\mathbb{E}\left[\left(q + \alpha \frac{S_{n-1}}{n-1}\right) S_{n-1}\right] + \mathbb{E}[\delta_n] \\ &= \left(1 + \frac{2\alpha}{n-1}\right) \mathbb{E}[S_{n-1}^2] + q + \left(2q + \frac{\alpha}{n-1}\right) \mathbb{E}[S_{n-1}]. \end{aligned}$$

Essa equação foi resolvida por métodos de recorrência por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#), de modo a obtermos:

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{q^2 n^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{q(1-q-\alpha)n}{(\alpha-1)^2(1-2\alpha)} + \frac{2q(s-s\alpha-q)}{(1-\alpha)^2\Gamma(1+\alpha)} n^{1+\alpha} + C(\alpha, q, s) n^{2\alpha}. \quad (2.14)$$

onde $C(\alpha, q, s)$ é um coeficiente determinado pelas condições iniciais s e pelos parâmetros de memória do modelo. Devido à sua extensão algébrica, a expressão completa para $C(\alpha, q, s)$ encontra-se detalhada no [Seção A.3](#).

Quando $q > 0$ o primeiro termo da [Equação 2.14](#) é dominante, consequentemente o segundo momento do passeio minimal tem crescimento quadrático. Temos o seguinte:

$$\mathbb{E}[S_n^2] \sim \left(\frac{q}{1-\alpha} \right)^2 n^2. \quad (2.15)$$

A partir das expressões exatas dos momentos, o comportamento assintótico da variância $\text{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - (\mathbb{E}[S_n])^2$ pode ser prontamente estabelecido para o caso $q > 0$

$$\text{Var}(S_n) \sim \begin{cases} \frac{q(q+\alpha-1)}{(\alpha-1)^2(2\alpha-1)} n, & \text{se } \alpha < 1/2 \\ 2q(1-2q)n \log(n),^1 & \text{se } \alpha = 1/2 \\ C(\alpha, q, s) n^{2\alpha}, & \text{se } \alpha > 1/2 \end{cases} \quad (2.16)$$

¹ Este coeficiente está em concordância com o teorema central do limite para o PAM ([Teorema 2.2](#)). Este valor difere do coeficiente $2q^2(1-2q)$ calculado por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#). A razão para esta discrepância e a sua resolução são detalhadas no [Seção 2.3](#).

A análise da variância mostra uma transição de fase importante no comportamento do processo, com o ponto $\alpha = 1/2$ separando os regimes de difusão. Para $q > 0$, o PAM apresenta regime de difusão normal quando $\alpha < 1/2$, superdifusivo quando $\alpha > 1/2$, e marginalmente superdifusivo quando $\alpha = 1/2$. A origem para esta transição está nas propriedades de convergência de uma série construída a partir da sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, como na proposição a seguir.

Proposição 2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ converge se e somente se $\alpha > 1/2$.

Demonstração. Pelo comportamento assintótico dado pela [Equação 2.7](#), sabemos que $a_n^2 \sim C_\alpha n^{2\alpha}$ para uma constante $C_\alpha > 0$. Pelo critério da comparação no limite para séries, a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n^2$ é equivalente à convergência da p-série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2\alpha}$. Esta última converge se, e somente se, o expoente 2α for estritamente maior que 1, ou seja, $\alpha > 1/2$. $\square$

Esta proposição permite um bom entendimento do modelo. A convergência desta série para $\alpha > 1/2$ é a razão pela qual a variância cresce de forma anômala ($n^{2\alpha}$) e, como será visto nos capítulos seguintes, por que o processo limite converge para uma única variável aleatória. Por outro lado, a divergência da série para $\alpha \leq 1/2$ permite que as flutuações acumuladas sejam suficientes para formar um processo estocástico contínuo no tempo no limite. Assim, este resultado técnico justifica a separação dos regimes difusivo e superdifusivo.

2.3 Comportamento assintótico da variância

Nesta seção, apresentamos um estudo original que visa resolver a inconsistência analítica observada em trabalhos anteriores. Através de simulações de Monte Carlo e uma análise rigorosa da variância amostral, verificamos qual das constantes teóricas descreve a realidade assintótica do modelo, como apresentado na [Equação 2.16](#).

O [Teorema 2.2](#) estabelece que a **variância da distribuição limite** é $4q(1-p)$ que, para $\alpha = 1/2$ é igual a $2q(1-2q)$. Por outro lado, o resultado obtido em [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#) para o **limite da variância** do processo é diferente, dado por $2q^2(1-2q)$.

O motivo dessas discrepâncias muitas vezes é associado à falha da condição de integrabilidade uniforme em processos com memória de longo alcance. Se esta condição não for satisfeita, não há garantia de que o limite da variância de um processo normalizado coincida com a variância de sua distribuição limite, ou seja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{n \log n}$ e $\text{Var}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n \log n}})$ podem ser diferentes [Billingsley \(1999\)](#).

No entanto, para o passeio aleatório minimal, nossa análise indica uma conclusão muito mais sutil. As simulações realizadas, cujos gráficos serão apresentados a seguir, indicam que o limite da variância normalizada converge para o mesmo valor da variância do limite, $2q(1-2q)$. Isso implica que a condição de integrabilidade uniforme é de fato satisfeita. A complexidade do regime crítico é uma consequência da convergência extremamente lenta dos momentos no regime

crítico. No ponto $\alpha = 1/2$, a expansão da variância não se comporta de maneira polinomial simples, mas exibe **correções logarítmicas**. Isso resulta em uma convergência tão lenta que métodos clássicos de aproximação algébrica (como o truncamento de recorrências utilizado em Harbola, Kumar e Lindenberg (2014)) falham. Ao negligenciar os termos de decaimento logarítmico na expansão, tais métodos perdem informações fundamentais da série, resultando em uma constante limitante incorreta.

Por outro lado, a teoria de martingais que fundamenta o Teorema 2.2, mostra-se uma excelente ferramenta para a análise rigorosa de processos com memória de longo alcance, pois ela é projetada para lidar com essas instabilidades no cálculo dos momentos. Esta conclusão juntamente com a análise numérica, serve como um forte argumento para a conclusão de que $2q(1 - 2q)$ é, de fato, a constante correta.

2.3.1 Análise do crescimento assintótico da variância

O nosso objetivo é verificar experimentalmente o coeficiente que determina o comportamento assintótico da variância, $\text{Var}(S_n)$, para todos os regimes de difusão e, em particular, determinar a constante de proporcionalidade correta para o regime crítico. A análise baseia-se nos dados apresentados na Figura 3.

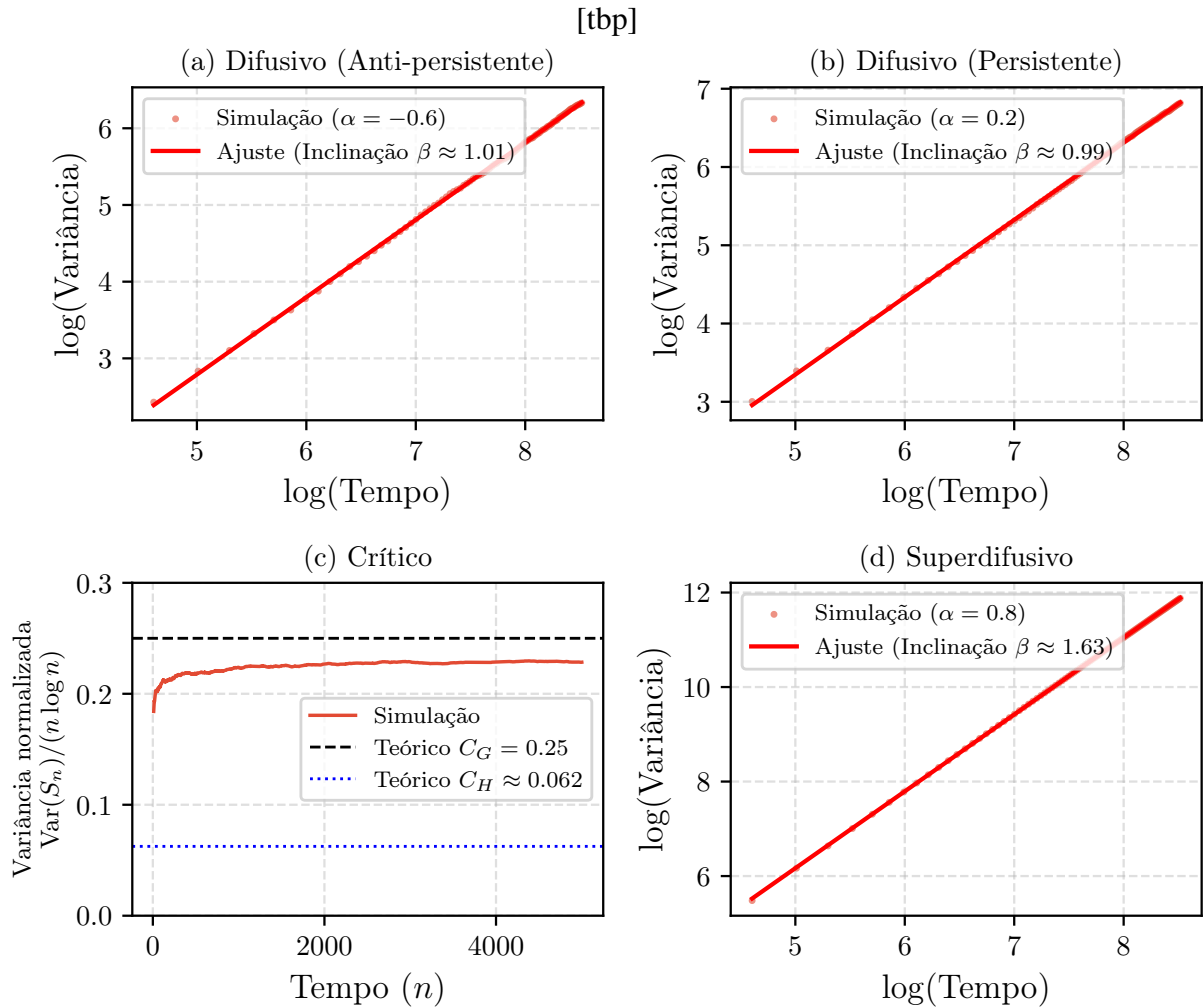
Para gerar este gráfico, foi realizada uma simulação de Monte Carlo, cuja validade teórica se apoia na lei forte dos grandes números. Para cada regime, foi gerado um conjunto de $N = 5000$ trajetórias independentes do passeio aleatório, cada uma com $n = 5000$ passos. A variância amostral foi calculada em cada instante de tempo, servindo como um estimador consistente para a variância teórica $\text{Var}(S_n)$.

A análise gráfica emprega duas técnicas distintas. Para os regimes difusivo e superdifusivo, onde se espera uma lei de potência $\text{Var}(S_n) \sim Cn^\beta$, utiliza-se um gráfico em **escala log-log**. Esta transformação lineariza a relação, permitindo que o expoente β seja estimado pela inclinação da reta ajustada. Para o regime crítico, onde a relação é $\text{Var}(S_n) \sim Cn \log(n)$, a análise é feita por **normalização**, representando-se graficamente a quantidade $\text{Var}(S_n)/(n \log n)$ para verificar sua convergência à constante C .

A análise da Figura 3 permite extrair as seguintes conclusões:

- **Regimes difusivos (a, b):** Para os casos anti-persistente ($\alpha = -0.6$) e persistente ($\alpha = 0.2$), a relação em escala log-log é claramente linear. As inclinações ajustadas, $\beta \approx 0.97$ e $\beta \approx 1.01$, são consistentes com o expoente teórico $\beta = 1$, confirmando o regime de difusão normal.
- **Regime superdifusivo (d):** Para $\alpha = 0.8$, a análise log-log também revela uma reta bem definida. A inclinação estimada, $\beta \approx 1.63$, confirma com excelente precisão a previsão teórica de $\beta = 2\alpha = 1.6$.

Figura 3 – Verificação numérica do comportamento assintótico da $\text{Var}(S_n)$ para diferentes regimes de difusão. Os painéis (a), (b) e (d) mostram a variância amostral em um gráfico log-log. O painel (c) mostra a variância normalizada por $n \log n$ para o regime crítico.



- **Regime crítico (c):** Este painel é o foco principal da análise. A variância normalizada, $\text{Var}(S_n)/(n \log n)$, converge claramente para a linha tracejada, que representa a constante $C_G = 0.25$ derivada da teoria de martingais de [Coletti, Gava e Lima \(2019\)](#). Ao mesmo tempo, a curva se afasta claramente da linha pontilhada, correspondente à constante $C_H \approx 0.062$ de [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#).

Este resultado experimental resolve a questão levantada, estabelecendo que a constante C_G é a que caracteriza o comportamento assintótico da variância do processo no regime crítico.

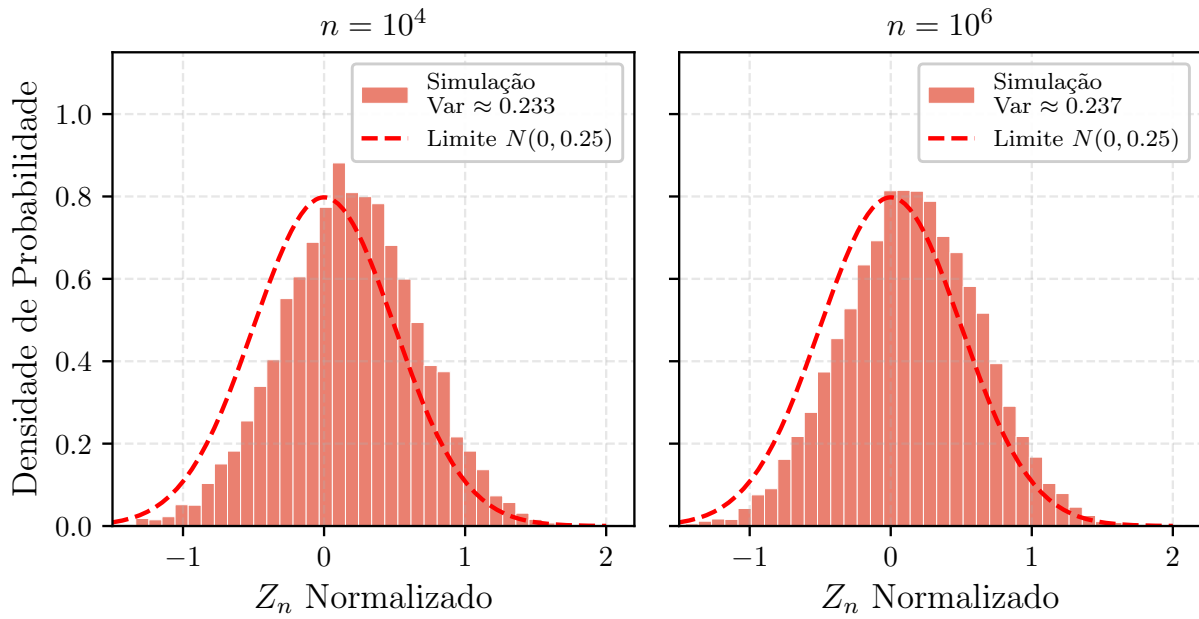
2.3.2 Análise da evolução da distribuição limite

Tendo estabelecido qual constante descreve a variância do processo, a segunda análise é sobre a natureza desta convergência. Como discutido anteriormente, complexidade teórica do regime crítico está ligada à falha da condição de integrabilidade uniforme, que resulta em

uma convergência lenta dos momentos. O objetivo desta seção é visualizar e quantificar essa convergência lenta.

Para isso, analisamos a distribuição de probabilidade da variável aleatória normalizada, $Z_n = (S_n - \mathbb{E}[S_n])/\sqrt{n \log n}$, em dois instantes de tempo distintos: um inicial ($n = 1000$) e um final ($n = 100000$). Os resultados estão apresentados na Figura 4.

Figura 4 – Evolução da distribuição de Z_n em tempos distintos. A curva tracejada representa a distribuição Normal limite, $N(0, C_G)$. A variância amostral da simulação em cada tempo é indicada na legenda.



Fonte: Elaborada pela autora.

A Figura 4 apresenta a evolução da densidade empírica de Z_n comparando um tempo de simulação padrão ($n = 10^4$) com uma simulação de longa duração ($n = 10^6$), acelerada via computação paralela.

A análise gráfica revela dois aspectos fundamentais sobre a natureza do regime crítico ($\alpha = 1/2$):

- **Convergência distribucional:** A forma da distribuição ajusta-se com precisão à densidade da normal limite (curva tracejada vermelha), corroborando o teorema central do limite para o modelo.
- **Convergência lenta dos momentos:** A variância amostral exibe uma resistência em atingir o valor teórico assintótico 0.25. Ao aumentar a escala temporal em duas ordens de magnitude (de 10^4 para 10^6 passos), a variância move-se apenas de ≈ 0.233 para ≈ 0.240 .

Este comportamento sugere que a convergência dos momentos no ponto crítico é governada por termos de correção logarítmica da forma $1/\log n$. Para que a variância simulada

coincidisse visualmente com 0.25, seriam necessários tempos de simulação proibitivos (da ordem de $n = 10^{10}$ ou superior).

Contudo, o resultado é suficiente para resolver a dúvida teórica: o valor obtido (≈ 0.240) é inequivocamente próximo da previsão teórica ($C_G \approx 0.25$) e afasta-se definitivamente da constante derivada por métodos de truncamento ($C_H \approx 0.06$).

2.3.3 Considerações Finais

A confirmação da variância do regime crítico valida a abordagem via martingais, que será essencial para a prova do princípio dos desvios moderados no [Capítulo 5](#).

ANÁLISE ASSINTÓTICA VIA URNAS DE PÓLYA

A análise do comportamento limite do passeio aleatório do elefante foi realizada em [Baur e Bertoin \(2016\)](#) por meio de uma conexão do passeio aleatório com o processo de urnas de Pólya. Neste capítulo, estabelecemos essa mesma conexão para o passeio aleatório minimal. Essa correspondência possibilita que os resultados assintóticos para o PAM sejam obtidos diretamente da bem estabelecida teoria de urnas, conforme detalhado no [Seção A.1](#).

3.1 Introdução às urnas de Pólya

Em teoria da probabilidade, um processo de urnas é um exemplo clássico de processo estocástico utilizado para modelar problemas em diversas áreas. No modelo geral, considera-se uma urna contendo bolas de cores distintas e estas são extraídas de forma aleatória com ou sem reposição. Às vezes, retirar bolas da urna é referido como amostragem. Para se adequar a cada situação, podemos estabelecer diversas regras: trabalhar com várias cores de bolas, acrescentar bolas ao longo do processo de acordo com algum critério, estabelecer relações entre mais de uma urna, etc. O trabalho de [Mahmoud \(2009\)](#) oferece uma compilação rigorosa de modelos fundamentais, como as urnas de Ehrenfest, as urnas de Friedman e os processos de Pólya-Eggenberger, conectando problemas clássicos da probabilidade a fenômenos modernos de propagação e contágio.

Um modelo de urnas consiste no conjunto de probabilidades que descreve os eventos deste processo. O principal objetivo ao estudar um modelo de urnas reside em formular uma teoria assintótica, isto é, identificar como sua composição evolui a longo prazo. Para isso precisamos estabelecer regras de modo que o processo não irá parar por não haver bolas a serem removidas, ou seja, o processo não se extingue.

O processo conhecido como urna de Pólya, nomeado assim em homenagem ao matemático húngaro George Pólya (1887-1985), surgiu pela primeira vez em trabalhos de Markov entre 1905 e 1907. Em 1923, Pólya popularizou o assunto modelando o contágio por epidemias em uma população e outros fenômenos de propagação semelhantes. Vários modelos matemáticos são utilizados para descrever esses fenômenos, mas as urnas de Pólya se destacam devido à sua formulação simples.

Inicialmente, este modelo leva em conta uma urna contendo bolas com cores distintas. A cada instante, uma bola é escolhida de forma aleatória e depois retorna à urna, enquanto uma certa quantidade de bolas da mesma cor são adicionadas ou removidas da urna. De modo geral, a quantidade de bolas adicionadas ou removidas da urna pode ser um valor determinístico ou aleatório.

Considere uma urna de Pólya com bolas de $k > 1$ cores distintas. Vamos denotar a composição da urna no tempo n por

$$X_n := (X_{n1}, \dots, X_{nk})' \quad (3.1)$$

tal que para $0 \leq i \leq k$, X_{ni} é o número de bolas na urna do tipo (ou cor) i no tempo n . Sua composição inicial é dada por um vetor X_0 .

A **matriz de substituição** do processo é uma matriz na qual cada coluna j é um vetor que dá mudança esperada $\mathbb{E} [\xi_{ji}]$, possivelmente escalado pela atividade a_j , como na [Definição A.2](#).

$$A := (a_j \mathbb{E} [\xi_{ji}])_{i,j=1,\dots,k}.$$

Como no PAM escolhemos um instante de tempo passado uniformemente ao acaso, ele corresponde a um modelo de urna de Pólya generalizada com atividades uniformes. Portanto, o vetor de atividades para o nosso modelo é $a = (1, 1)$.

A entrada i, j da matriz representa a mudança esperada no número de bolas da cor i quando uma bola da cor j é sorteada.

A matriz A descreve a tendência de crescimento e a evolução da composição da urna.

Por exemplo, considere uma urna com bolas pretas e brancas, sendo as bolas pretas do tipo 1 e as bolas brancas do tipo 2. Vamos considerar que, a cada instante, uma bola é sorteada de forma aleatória e uniforme (o que implica $a_j = 1$ para todo j). A mudança de composição da urna se dá pela matriz de substituição:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E} [\xi_{11}] & \mathbb{E} [\xi_{21}] \\ \mathbb{E} [\xi_{12}] & \mathbb{E} [\xi_{22}] \end{pmatrix}.$$

Nesta matriz, a primeira coluna representa a mudança esperada ao retirar uma bola preta e a primeira linha compreende o número de bolas pretas adicionadas quando uma bola de qualquer cor é retirada. Do mesmo modo, a segunda coluna representa as ações tomadas ao retirar uma

bola branca e a segunda linha compreende o número de bolas brancas adicionadas quando uma bola de qualquer cor é retirada.

Vamos supor que, a cada instante, as bolas são retiradas da urna uma de cada vez, sem reposição. Nesse caso, $\mathbb{E}[\xi_{11}] = \mathbb{E}[\xi_{22}] = -1$ e $\mathbb{E}[\xi_{21}] = \mathbb{E}[\xi_{12}] = 0$. É claro que este processo irá se extinguir em algum momento, independente da composição inicial da urna.

Note que, se todas as entradas da matriz de substituição forem não negativas, o processo não irá se extinguir uma vez que, nesse cenário, sempre adicionamos bolas ou as mantemos iguais. Nesse caso, após repetir esse processo n vezes, sortear bolas de determinada cor aumenta a chance de sortear mais bolas desta mesma cor. Um exemplo clássico deste fenômeno de reforço é a urna de Pólya padrão, onde a probabilidade de se observar uma cor no futuro aumenta com o número de vezes que ela foi observada no passado ((COLETTI; GAVA; LIMA, 2019)).

3.1.1 Urnas de Pólya generalizada e sua conexão com o passeio aleatório minimal

Neste trabalho, abordaremos um caso particular do modelo de urnas tratado em Janson (2004). Considere uma urna contendo bolas de duas cores, digamos pretas e brancas. A cada instante n , uma bola é retirada da urna de maneira aleatória e uniforme.

- Se uma bola **preta** for retirada, ela é recolocada na urna e uma nova bola é adicionada: preta com probabilidade p ou branca com probabilidade $1 - p$.
- Se uma bola **branca** for retirada, ela é recolocada na urna e uma nova bola é adicionada: preta com probabilidade q ou branca com probabilidade $1 - q$.

Agora, estabelecemos a conexão formal com o passeio aleatório minimal. A posição do caminhante, S_n , será definida diretamente a partir da evolução desta urna. Uma bola **preta** na urna corresponde a um passo em que o caminhante se move para a direita ($\delta = 1$), e uma bola **branca** corresponde a um passo em que o caminhante permanece no local ($\delta = 0$).

Seja $X_n = (X_{n1}, X_{n2})'$ o vetor que descreve a composição da urna no tempo $n \geq 1$. O processo é inicializado no instante $n = 1$ com um vetor aleatório X_1 tal que $\mathbb{P}[X_1 = (1, 0)'] = s$ e $\mathbb{P}[X_1 = (0, 1)'] = 1 - s$. Assim, a posição do caminhante no tempo n é igualmente distribuído como o número total de bolas pretas na urna:

$$S_n \stackrel{d}{=} X_{n1}, \quad \text{para } n \geq 1, \quad (3.2)$$

com $S_0 := 0$. Esta construção garante que o processo $(S_n)_{n \geq 0}$ tem, por definição, a mesma lei de probabilidade que o passeio aleatório minimal introduzido no Capítulo 2. A identidade em (3.2) nos permite transferir diretamente os resultados assintóticos da teoria de urnas para o nosso passeio aleatório.

Estamos interessados em estudar como a condição inicial (via s) e o parâmetro de memória (via p e q) influenciam o valor esperado e a variância do passeio aleatório minimal. Com esse propósito, iremos utilizar os resultados de Janson (2004), que emprega a teoria espectral da matriz de substituição para investigar o comportamento de longo prazo do processo de urna. Os resultados utilizados estão resumidos no Apêndice A.

3.1.2 Matriz de substituição do passeio aleatório minimal

Em Janson (2004), foi mostrado que os autovalores e autovetores da matriz de substituição do processo de urna são a chave para a compreensão da evolução do sistema.

No passeio minimal, os vetores que descrevem a mudança da composição da urna quando uma bola da cor $i \in \{1, 2\}$ é retirada são $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12})'$ e $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22})'$, tomando valores em $\{(1, 0)', (0, 1)'\}$. A matriz de substituição é $A = (\mathbb{E}[\xi_{ji}])_{i,j=1,2}$. Considerando as bolas pretas como sendo do tipo 1 e as bolas brancas do tipo 2, a primeira coluna da matriz de substituição será dada pela mudança esperada na composição da urna ao retirar uma bola preta enquanto que, a segunda coluna será a mudança esperada ao retirar uma bola branca. De acordo com a definição do passeio minimal temos que:

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema A.1, a matriz A é irredutível, pois todas suas entradas são positivas. Logo, pelo Teorema A.2, ela possui um autovalor dominante que é o maior autovalor de A .

Sejam λ_1 o maior autovalor e λ_2 o menor autovalor de A . Então:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= p - q = \alpha. \end{aligned}$$

Os autovetores à direita v_i e os autovetores à esquerda u_i , representados por seus vetores coluna associados, são respectivamente:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix}, & u_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & u_2 &= \begin{pmatrix} 1-p \\ -q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conforme a convenção detalhada na Seção A.1, a ação pela esquerda é realizada pelo vetor linha u'_i . Esses autovetores foram escolhidos de modo que $u'_1 v_1 = 1$ e $u'_2 v_2 = 1$, satisfazendo a condição de normalização (A.1), necessária para a aplicação dos resultados de Janson (2004).

Para o nosso modelo, a matriz de substituição A é irredutível (pois $p, q > 0$) (ver Teorema A.1). Além disso, as condições do Lema A.1 sobre a soma dos incrementos esperados são

satisfeitas. Portanto as condições (A1)–(A6) do ?? estão satisfeitas e o processo de extinção é impossível.

Observação 3.1. O autovetor à esquerda associado a $\lambda_1 = 1$ é $u_1 = (1, 1)$. É importante notar que isso não é uma coincidência. O nosso modelo adiciona exatamente uma bola (um passo de memória) a cada instante. De acordo com a teoria geral de urnas de Pólya com adição constante (ver Janson (2004, Lema 5.4)), para tais modelos, o autovetor á esquerda dominante u_1 é sempre igual ao vetor de atividades a e, como já vimos, no nosso caso $a = (1, 1)$.

3.2 Teoremas limite para o passeio aleatório minimal

Nesta seção, apresentamos resultados originais que descrevem o comportamento limite do PAM sob a ótica de princípios de invariância. Embora o comportamento de escala do PAM seja um tópico de interesse crescente, as provas formais dos teoremas de limite funcional e o cálculo explícito das funções de covariância para os regimes difusivo e crítico, apresentados a seguir, constituem uma formalização inédita e necessária para a literatura do modelo.

Mostraremos como a dinâmica microscópica do processo, definida pelas regras de memória em cada passo, dá origem a distintos regimes de difusão em escala macroscópica, que por sua vez caracterizam o comportamento de longo prazo do caminhante.

Nesta análise vamos considerar os casos em que $-1 < \alpha < 1$. O caso $\alpha = 1$ corresponde a um processo que se torna determinístico após o primeiro passo. O caso em que $\alpha = -1$ representa um regime de anti-persistência máxima que gera um efeito de auto-correção, análogo ao que foi discutido para o passeio aleatório do elefante no Capítulo 1. Por ora, assume-se que $q > 0$, postergando a análise do caso $q = 0$ para as próximas seções.

Denotaremos o processo de urna vetorial por $X_n = (X_{n1}, X_{n2})'$. Conforme a Equação 3.2, o passeio aleatório de interesse, S_n , é equivalente em lei ao processo que descreve a primeira componente da urna, isto é, $(S_n)_{n \geq 0} \stackrel{d}{=} (X_{n1})_{n \geq 0}$. Esta equivalência em distribuição dos processos nos permite transferir diretamente os teoremas de convergência fraca obtidos para o processo de urna para o passeio aleatório minimal.

Iremos analisar o comportamento limite do passeio aleatório minimal em seus diferentes regimes de difusão. Nossos resultados vão além do teorema central do limite, estabelecendo **princípios de invariância**, também conhecidos como **teoremas do limite funcional**, que descrevem a convergência da trajetória completa do passeio. Diferentemente do clássico teorema de Donsker para variáveis independentes (BILLINGSLEY, 1999), que resulta universalmente no movimento browniano, o objetivo aqui é mostrar como a complexa estrutura de memória deste modelo dá origem a diferentes processos limite em tempo contínuo, dependendo do regime de difusão.

Para formalizar essa ideia, tratamos a trajetória do passeio $(S_k)_{k \geq 0}$ como uma função

no espaço de Skorokhod $D[0, \infty)$, que é o espaço das funções contínuas à direita com limites à esquerda. Para cada n , construímos um processo em tempo contínuo, $S_n(t)$, através de uma **reescala do tempo**, definido por:

$$S_n(t) := S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Nesta construção, cada tempo contínuo t é associado ao índice discreto $k = \lfloor nt \rfloor$, permitindo que a sequência de processos $(S_n(t))$ seja analisada no contexto de **convergência funcional**. Este conceito é formalizado pela teoria da convergência fraca de medidas de probabilidade em espaços de funções (ver Billingsley (1999)). Os teoremas a seguir descrevem o comportamento limite da sequência $(S_n(t))$, devidamente normalizada, nos diferentes regimes do parâmetro de memória α .

Observação 3.2 (Sobre a estrutura das covariâncias). Em Janson (2004) foram demonstrados diversos teoremas que fornecem fórmulas gerais para a covariância dos processos limites. No contexto de urnas de Pólya, estes processos frequentemente exibem estruturas de covariância bem conhecidas, o que vale a pena destacar.

- **No regime difusivo** ($\alpha < 1/2$), a função de covariância do processo limite $W(t)$, para $s \leq t$, tem a forma $\mathbb{E}[W(s)W(t)] = C \cdot s^{1-\alpha}t^\alpha$. Esta estrutura é característica de certos processos gaussianos que, ao contrário do movimento browniano padrão, não possuem incrementos estacionários. Uma propriedade importante de tais processos é a **auto-similaridade**. Nesta classe de processos, um reescalonamento do tempo por um fator c , leva a um reescalonamento da amplitude por um fator c^H , onde H é o índice de auto-similaridade (ver Samoradnitsky e Taqqu (1994)). Esta propriedade também é conhecida como **propriedade de escala** em textos sobre o movimento Browniano como Karatzas e Shreve (1991). A forma simétrica da covariância para $s, t > 0$ é dada por $\mathbb{E}[W(s), W(t)] = C \cdot (\min(s, t))^{1-\alpha}(\max(s, t))^\alpha$.
- **No regime crítico** ($\alpha = 1/2$), o processo limite $B(t)$ é um movimento browniano reescalado. Sua covariância tem a forma canônica $\mathbb{E}[B(s), B(t)] = C' \cdot \min(s, t)$, que caracteriza um movimento browniano. Este processo é o modelo padrão de um processo auto-similar, com índice de auto-similaridade $H = 1/2$, e é caracterizado por possuir incrementos independentes, sendo portanto markoviano.

Cabe ressaltar que não incluímos o regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$) nesta análise de covariâncias pois, como veremos, o limite neste caso não é um processo Gaussiano contínuo no tempo, mas sim um limite degenerado determinado por uma única variável aleatória.

Cabe ressaltar que não incluímos o regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$) nesta análise de covariâncias pois, como veremos, o limite funcional neste caso não é um processo temporal com incrementos estocásticos, mas sim moldado inteiramente por uma única variável aleatória inicial.

Nas demonstrações a seguir, usaremos os teoremas do [Seção A.1](#) para calcular as constantes C e C' específicas do nosso modelo. Os teoremas descrevem o comportamento limite do passeio em cada um dos regimes de difusão.

3.3 Regime difusivo ($\alpha < 1/2$)

Teorema 3.1. Seja $\alpha < 1/2$ e $q > 0$. Então, quando $n \rightarrow \infty$, temos a seguinte convergência em distribuição no espaço $D[0, \infty)$:

$$\frac{S_{[nt]} - \frac{q}{1-\alpha}nt}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} W(t),$$

onde $W(t)$ é um processo gaussiano unidimensional com $W(0) = 0$ e $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ para todo $t \geq 0$. Sua função de covariância para $0 < s \leq t$ é dada por:

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)} s^{1-\alpha} t^\alpha.$$

Demonstração. A demonstração segue da aplicação do item (i) do [Teorema A.3](#) ao processo de urna vetorial $X_n = (X_{n1}, X_{n2})'$, onde o passeio aleatório é distribuído como a primeira componente do processo de urna, isto é, $S_n \stackrel{d}{=} X_{n1}$. O teorema garante que:

$$n^{-1/2}(X_{[nt]} - nt\lambda_1 v_1) \xrightarrow{d} V(t),$$

onde $V(t) = (V_1(t), V_2(t))'$ é um processo Gaussiano em $\mathbb{R}^2$. No nosso caso, $\lambda_1 = 1$ e $v_1 = \frac{1}{1-\alpha}(q, 1-p)'$. A primeira componente do termo de centralização é $nt\frac{q}{1-\alpha}$. Pelo teorema da aplicação contínua [Teorema A.6](#), o processo $S_{[nt]}$ converge para $W(t) = V_1(t)$ conforme o enunciado.

Resta calcular a função de covariância dada pela [Equação A.10](#). No nosso caso $m = 1$ de modo que

$$\mathbb{E}[V(s)V'(t)] = s\Sigma_I(t/s)^A. \quad (3.3)$$

Primeiro, calculamos a matriz Σ_I a partir da [Equação A.8](#), que no nosso caso é

$$\Sigma_I = \int_0^\infty P_{\lambda_2} e^{tA} B e^{tA'} P_{\lambda_2}' e^{-t} dt.$$

Para simplificar a integral, utilizamos as propriedades da decomposição espectral. Como a matriz A comuta com sua projeção P_{λ_2} a ação da exponencial matricial sobre o autoespaço de $\lambda_2 = \alpha$ pode ser simplificado do seguinte modo:

$$P_{\lambda_2} e^{tA} = P_{\lambda_2} e^{t\alpha} \quad \text{e} \quad e^{tA'} P_{\lambda_2}' = P_{\lambda_2}' e^{t\alpha}.$$

Substituindo estes resultados na integral, obtemos:

$$\Sigma_I = \int_0^\infty (P_{\lambda_2} e^{t\alpha}) B(e^{t\alpha} P'_{\lambda_2}) e^{-t} dt = P_{\lambda_2} B P'_{\lambda_2} \int_0^\infty e^{t(2\alpha-1)} dt.$$

Primeiramente calculamos a matriz B usando sua definição na [Equação A.7](#):

$$\begin{aligned} B &= v_{11} \mathbb{E} [\xi_1 \xi_1'] + v_{12} \mathbb{E} [\xi_2 \xi_2'] \\ &= \frac{q}{1-\alpha} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{1-p}{1-\alpha} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1-q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz de projeção P_{λ_2} dada pela [Equação A.5](#) será:

$$P_{\lambda_2} = v_2 u_2' = \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1-p & -q \\ p-1 & q \end{pmatrix}.$$

O produto matricial é, portanto:

$$\begin{aligned} P_{\lambda_2} B P'_{\lambda_2} &= \frac{1}{(1-\alpha)^3} \begin{pmatrix} 1-p & -q \\ p-1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -q & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^3} \begin{pmatrix} q(1-p) & -q(1-p) \\ q(p-1) & q(1-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -q & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -q & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^3} \begin{pmatrix} 1-p+q & p-1-q \\ -1+p-q & -p+1+q \end{pmatrix} \\ &= \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^3} \begin{pmatrix} 1-\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & 1-\alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que o resultado é uma matriz de posto 1, simétrica e proporcional a vv' , onde $v = (1, -1)'$ é um autovetor à direita de A associado a α . Esta estrutura é esperada pois posto 1 decorre do fato de que o espaço imagem da matriz $P_{\lambda_2} B P'_{\lambda_2}$ está contido no espaço imagem unidimensional de P_{λ_2} . A simetria, por sua vez, é preservada pela natureza da operação $P(\cdot)P'$, dado que a matriz B é simétrica.

Como $\alpha < 1/2$, a integral $\int_0^\infty e^{t(2\alpha-1)} dt = \frac{1}{1-2\alpha}$ converge para α fixado. Portanto:

$$\Sigma_I = \frac{q(1-p)}{(1-2\alpha)(1-\alpha)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos simplificar a expressão para a covariância. Lembrando que a potência matricial é formalmente definida via a exponencial de matrizes, isto é, $(t/s)^A := \exp(A \ln(t/s))$. Como as colunas da matriz Σ_I são proporcionais ao autovetor $v = (1, -1)'$ de A (associado ao autovalor α), a ação desta exponencial matricial sobre Σ_I se reduz a uma multiplicação escalar:

$$(t/s)^A \Sigma_I = (t/s)^\alpha \Sigma_I.$$

Substituindo este resultado e o valor calculado de Σ_I na fórmula da covariância, obtemos para $0 < s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(s)V(t)'] &= s \cdot (t/s)^\alpha \Sigma_I \\ &= s^{1-\alpha} t^\alpha \cdot \frac{q(1-p)}{(1-2\alpha)(1-\alpha)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A covariância $\mathbb{E}[W(s)W(t)]$ é a entrada (1,1) desta matriz, o que nos dá:

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \frac{q(1-p)}{(1-2\alpha)(1-\alpha)^2} s^{1-\alpha} t^\alpha.$$

Isso completa a demonstração. □

3.4 O regime marginalmente superdifusivo ($\alpha = 1/2$)

Teorema 3.2. Seja $\alpha = 1/2$ e $q > 0$. Então, quando $n \rightarrow \infty$, temos a seguinte convergência em distribuição no espaço $D[0, \infty)$:

$$\frac{S_{[nt]} - 2qnt}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} B(t)$$

em que $B(t)$ é um movimento browniano caracterizado por $B(0) = 0$, média nula e função de covariância dada por:

$$\mathbb{E}[B(s)B(t)] = 4q(1-p)s, \text{ para } 0 < s \leq t.$$

Demonstração. Para este regime crítico, aplicamos o item (ii) do [Teorema A.3](#) que garante a convergência para um processo gaussiano $V(t)$. Nos resta calcular sua função de covariância, dada pela [Equação A.11](#) que diz que, para $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[V(s)V(t)'] = s \cdot (\mathbb{I} - 2v_1 a' P_{\lambda_2}) \Sigma_H (\mathbb{I} - 2P_{\lambda_2}' a v_1'),$$

com $a' = (1, 1)$.

Primeiramente, analisamos os fatores de projeção. Note que $\mathbb{I} - 2v_1 a' P_{\lambda_2} = \mathbb{I}$, requer que a matriz $2v_1 a' P_{\lambda_2}$ seja nula.

Teoricamente este resultado é esperado. O termo $a' = (1, 1)$ é o autovetor à esquerda u_1' associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, enquanto $P_{\lambda_2} = v_2 u_2'$, projeta no autoespaço de $\lambda_2 = 1/2$. A

propriedade de ortogonalidade de autovetores associados a autovalores distintos implica que o produto deve ser nulo.

Podemos verificar este resultado através de um cálculo direto com as matrizes do nosso modelo. Já calculamos P_{λ_2} na demonstração do [Teorema 3.1](#). Temos que:

$$\begin{aligned} a'P_{\lambda_2} &= (1, 1) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1-p & -q \\ p-1 & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} ((1-p+p-1), (-q+q)) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

O próximo passo é calcular a matriz $\Sigma_{II} = P_{\lambda_2}BP'_{\lambda_2}$. Este é exatamente o produto matricial que foi calculado na demonstração do [Teorema 3.1](#). Utilizando o resultado daquele cálculo, temos diretamente:

$$\Sigma_{II} = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo este resultado e o valor $\alpha = 1/2$, a matriz de covariância entre $V(s)$ e $V(t)$ (para $s \leq t$) é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V(s)V(t)') &= s \cdot \frac{1}{(1/2)^2} \begin{pmatrix} q(1-p) & -q(1-p) \\ -q(1-p) & q(1-p) \end{pmatrix} \\ &= 4s \begin{pmatrix} q(1-p) & -q(1-p) \\ -q(1-p) & q(1-p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo teorema da aplicação contínua, o processo limite para $S_{[nt]}$, que denotamos por $B(t)$, é a primeira componente de $V(t)$. Sua covariância é a entrada (1,1) da matriz acima:

$$\mathbb{E}[B(s)B(t)] = 4q(1-p)s.$$

Como a função de covariância para o processo é da forma $C' \cdot s$ (como na [Observação 3.2](#) para o regime crítico), confirmamos que o processo limite $B(t)$ é, de fato, um movimento browniano reescalado. Isso completa a demonstração. $\square$

3.5 O regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$)

Teorema 3.3. Seja $\alpha > 1/2$ e $q > 0$. Então, quando $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{S_n - \frac{nq}{1-\alpha}}{n^\alpha} \xrightarrow{d} Y$$

onde Y é uma variável aleatória não-degenerada e não-gaussiana, cuja distribuição depende dos parâmetros do modelo.

Demonstração. Este resultado é uma consequência do [Teorema A.4](#), que descreve o comportamento no regime superdifusivo. O teorema garante a convergência em distribuição do processo de urna reescalado para uma variável aleatória limite $\hat{W}$:

$$n^{-\lambda_2/\lambda_1}(X_n - n\lambda_1 v_1) \xrightarrow{d} \hat{W}.$$

Traduzindo os parâmetros para o nosso modelo, com X_n sendo o processo da urna, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha$ e S_n sendo a primeira componente, obtemos:

$$\frac{S_n - \frac{nq}{1-\alpha}}{n^\alpha} \xrightarrow{d} \hat{W}_1,$$

onde $\hat{W}_1$ é a primeira componente do vetor limite $\hat{W}$. Como $S_n \stackrel{d}{=} X_{n1}$, a convergência do vetor X_n implica a convergência da sua primeira componente. Definindo $Y = \hat{W}_1$, o teorema está provado. O [Teorema A.4](#) garante que, neste regime, a variável limite $\hat{W}$ é não-degenerada e sua distribuição não é gaussiana, propriedades que são herdadas por sua componente Y . $\square$

O regime se torna superdifusivo para $\alpha > 1/2$ pois o parâmetro de memória p é suficientemente maior que q , fazendo com que o caminhante tenda a reforçar seus passos anteriores, afastando-se da origem mais rapidamente que no caso difusivo.

Observação 3.3 (Sobre o limite funcional no regime superdifusivo). Diferentemente dos regimes difusivo e crítico ([Teoremas 3.1 e 3.2](#)), o limite apresentado no [Teorema 3.3](#) é pontual (marginal). É natural questionar o comportamento da trajetória completa reescalada no tempo, aplicando a transformação funcional $t \mapsto \lfloor nt \rfloor$.

Ao avaliarmos o processo neste cenário, obtemos:

$$\frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - \frac{q}{1-\alpha} \lfloor nt \rfloor}{n^\alpha} = \left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - \frac{q}{1-\alpha} \lfloor nt \rfloor}{(\lfloor nt \rfloor)^\alpha} \right) \left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \right)^\alpha.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, o primeiro fator converge em distribuição para a variável aleatória Y (pelo [Teorema 3.3](#)), enquanto o segundo fator converge para t^α . Portanto, a convergência funcional no espaço de Skorokhod é dada por:

$$\frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - \frac{q}{1-\alpha} \lfloor nt \rfloor}{n^\alpha} \xrightarrow{d} Y \cdot t^\alpha, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Nesse caso, em vez de convergir para um processo estocástico com incrementos aleatórios contínuos (como o movimento browniano), a trajetória assintótica é governada por uma curva determinística (t^α) multiplicada por uma única variável aleatória Y . Isso indica que a forte memória do sistema ($\alpha > 1/2$) faz com que o processo perca a sua capacidade de flutuar macroscopicamente ao longo do tempo, uma vez que Y é decidido, o caminhante passa o resto do tempo seguindo uma curva determinística t^α .

3.6 Discussão e síntese dos resultados

Os teoremas de limite apresentados nesta seção mostram a transição de fase que ocorrem nas flutuações do processo para $q > 0$. A natureza do processo limite e a escala de normalização necessária para a convergência dependem fortemente do parâmetro de memória α . A [Tabela 1](#) compara as características de cada regime.

Tabela 1 – Comparativo dos regimes de difusão para $q > 0$

Característica	Difusivo	Crítico	Superdifusivo
Parâmetro α	$-1 < \alpha < 1/2$	$\alpha = 1/2$	$1/2 < \alpha < 1$
Centralização (média)	$\frac{q}{1-\alpha}nt$	$2qnt$	$\frac{nq}{1-\alpha}$
Normalização (escala)	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n \log n}$	n^α
Processo Limite	$W(t)$ (Gaussiano)	$B(t)$ (Browniano)	Y (Não gaussiano)
Resultado obtido	Limite funcional	Limite funcional	Limite pontual

Fonte: Elaborada pela autora.

O fator de normalização, que determina a escala das flutuações, está diretamente ligado ao comportamento assintótico da variância do processo da [Equação 2.16](#). No regime difusivo, a variância cresce linearmente ($\sim n$), exigindo uma normalização por $\sqrt{n}$. No ponto crítico, é necessária uma correção logarítmica ($\sim n \log n$), e no regime superdifusivo, o crescimento da variância ($\sim n^{2\alpha}$) resulta em flutuações muito maiores.

Comparando esses regimes, uma pergunta relevante seria: o que acontece com a natureza não-markoviana do passeio quando ele converge para seu processo limite em tempo contínuo? Curiosamente esse comportamento depende do regime.

No regime difusivo ($\alpha < 1/2$), a memória, embora seja fraca, não desaparece com a mudança de escala. O processo limite $W(t)$ tem incrementos dependentes e é não markoviano, o que pode ser observado na sua estrutura de covariância. No ponto crítico ($\alpha = 1/2$) ocorre a situação mais notável. Neste ponto, a propriedade de auto-similaridade observada no regime difusivo é preservada, mas a estrutura de memória desaparece assintoticamente. Aqui, embora o processo S_n ainda seja não-markoviano, a memória se torna irrelevante a longo prazo. O limite resultante é o Movimento Browniano $B(t)$, um processo que é auto-similar ($H = 1/2$) mas os deslocamentos em intervalos de tempo disjuntos são independentes, e portanto é um processo markoviano. Já no regime superdifusivo ($\alpha > 1/2$), a memória passa a ser a força dominante do sistema. As correlações são tão fortes que impedem a formação de uma trajetória contínua. Em vez de convergir para uma função que evolui no tempo, o processo converge para uma única variável aleatória Y , cujo valor determina o destino final do caminhante.

O mecanismo matemático que explica a transição de um limite funcional para um limite pontual baseia-se na [Proposição 2](#) que cria uma divisão dependente da convergência da série $\sum 1/a_j^2$.

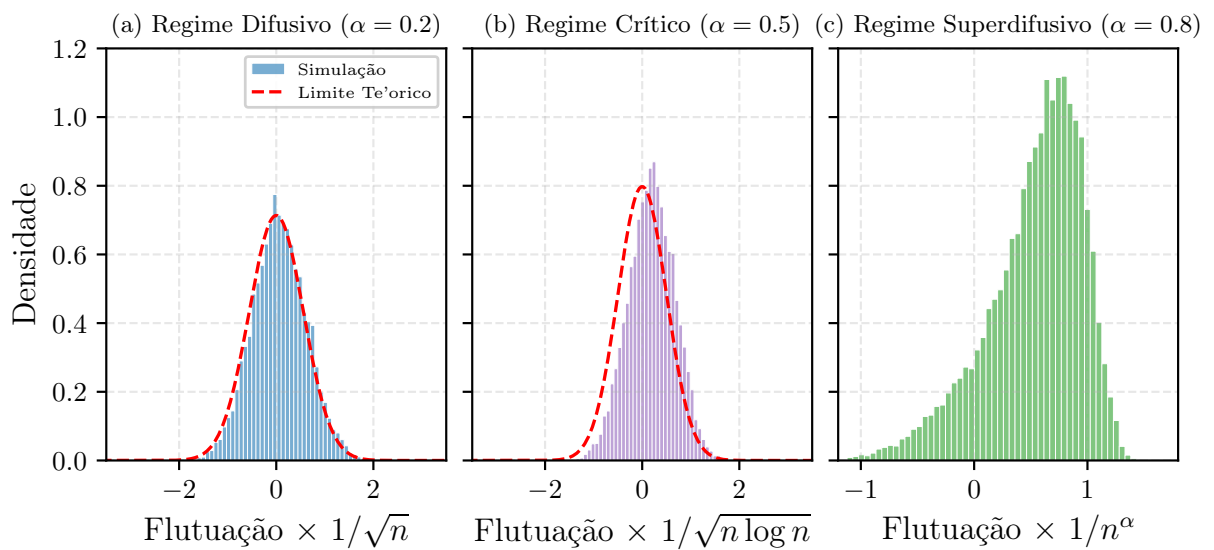
Esta série pode ser interpretada como a variância total acumulada do martingal associado ao processo (ver [Capítulo 5](#)).

- Para $\alpha \leq 1/2$, a série diverge. Em termos probabilísticos, isso indica que a variação quadrática do martingal associado diverge, ou seja, o processo acumula infinitas flutuações ao longo do tempo. Essa contínua injeção de ruído estocástico é o que “sustenta” o movimento errático do processo, permitindo que ele convirja para uma trajetória aleatória contínua com incrementos dinâmicos, como $W(t)$ ou $B(t)$.
- Para $\alpha > 1/2$, a série converge. Isso significa que a variação quadrática total (a variância acumulada das flutuações do martingal) é finita e as inovações estocásticas perdem sua influência ao longo do tempo. Consequentemente, o limite funcional não exibe flutuações dinâmicas contínuas. Em vez disso, a trajetória assintótica assume a forma $Y \cdot t^\alpha$. Neste limite a evolução temporal é determinística, e toda a incerteza do sistema concentra-se na variável inicial Y .

Assim, a [Proposição 2](#) é o resultado que explica a transição de um limite funcional para um limite pontual, fornecendo a justificativa matemática rigorosa para mudança no comportamento macroscópico do sistema.

A [Figura 5](#) ilustra o comportamento limite deste processo através de simulações das flutuações $S_n - \mathbb{E}[S_n]$, devidamente normalizadas. Cada histograma indica a distribuição limite teórica para diferentes valores de α .

Figura 5 – Distribuição da posição normalizada para o passeio minimal com $q > 0$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Uma observação importante resulta da análise dos histogramas (a) e (b). Embora os processos limites possuam naturezas dinâmicas distintas (não markoviano no regime difusivo e

markoviano no ponto crítico), a distribuição da posição normalizada em ambos os casos é de natureza gaussiana. Este resultado é uma consequência de uma versão do teorema central do limite para processos dependentes. A validade deste teorema implica que, em ambos os regimes, as correlações de longo alcance impostas pela memória do sistema não são fortes o suficiente para quebrar a universalidade da distribuição normal. A memória afeta a variância e a escala de normalização, mas não a forma fundamental da distribuição limite. No regime crítico (b), observa-se um ligeiro desvio na variância devido à lenta convergência logarítmica, como foi analisado com detalhes no [Capítulo 2](#). Em contraste, o histograma assimétrico e não gaussiano do regime superdifusivo (c) evidencia uma memória tão forte que viola as condições do TCL. A forma não universal desta distribuição é uma consequência da estrutura de correlação dominante do sistema.

Esta diferenciação gráfica entre os limites de segunda ordem servirá como um importante comparativo para a análise do caso $q = 0$ no [Capítulo 4](#), onde a lei dos grandes números perde seu caráter determinístico, convergindo para um limite estocástico.

O CASO $Q=0$

Neste capítulo, investigamos uma configuração limite do PAM que ocorre quando o parâmetro q é nulo. Fisicamente, essa condição implica que o estado de repouso é um regime de transição irreversível para a memória do caminhante: uma vez que um passo de repouso ($\delta_{n'} = 0$) é sorteado, a probabilidade de o caminhante realizar um movimento no passo seguinte torna-se nula.

Essa característica altera a estrutura estocástica do processo. Enquanto nos casos onde $q > 0$ o sistema exibe uma tendência de equilíbrio que apaga a influência das condições iniciais a longo prazo (ergodicidade), o caso $q = 0$ preserva a incerteza inicial por toda a trajetória. Como veremos, essa mudança faz com que a lei dos grandes números deixe de convergir para uma constante e passe a convergir para uma variável aleatória, fenômeno que exige ferramentas de análise distintas das utilizadas nos capítulos anteriores.

4.1 Momentos e regimes de difusão

Para que a dinâmica do processo seja não trivial no caso em que $q = 0$, é necessário assumir que o primeiro passo seja obrigatoriamente um movimento, ou seja, assumimos a probabilidade inicial $s = 1$.

A justificativa para essa escolha reside na natureza absorvente do repouso neste regime. Se permitíssemos $s < 1$, existiria uma probabilidade $1 - s$ de o caminhante sortear $\delta_1 = 0$. Como $q = 0$, qualquer passo futuro $n + 1$ que lembrasse esse primeiro passo teria probabilidade nula de movimento. No limite de muitos passos, a probabilidade de o caminhante ficar parado para sempre cresceria rapidamente, levando a uma trajetória degenerada em $S_n = 0$. Assim, $s = 1$ é a condição de contorno necessária para observar o surgimento do modelo de passeio aleatório minimal “mais preguiçoso” (*laziest minimal random walk model*), conforme discutido em [Miyasaki e Takei \(2020\)](#).

A análise dos momentos para este cenário expõe a forte dependência do parâmetro de persistência p . Fazendo $q = 0$ na equação de recorrência para $\mathbb{E}[S_n]$ (Equação 2.5) e aplicando a condição $s = 1$, o primeiro momento exhibe o seguinte comportamento assintótico:

$$\mathbb{E}[S_n] \sim \frac{n^p}{\Gamma(1+p)}. \quad (4.1)$$

Para o segundo momento, a relação de recorrência dada pela Equação 2.14 simplifica-se para:

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2] = \left(1 + \frac{2p}{n}\right) \mathbb{E}[S_n^2] + \frac{p}{n} \mathbb{E}[S_n]. \quad (4.2)$$

Embora a solução exata desta recorrência envolva termos de ordem inferior complexos, seu termo dominante foi calculado em Miyasaki e Takei (2020), e dado por:

$$\mathbb{E}[S_n^2] \sim \frac{2}{\Gamma(1+2p)} n^{2p}. \quad (4.3)$$

Este resultado nos permite classificar o regime de difusão do processo com base no comportamento da variância, $\text{Var}(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - (\mathbb{E}[S_n])^2$. Temos que $(\mathbb{E}[S_n])^2 \sim (\Gamma(1+p))^{-2} n^{2p}$. Portanto, o comportamento da variância é

$$\text{Var}(S_n) \sim \left(\frac{2}{\Gamma(1+2p)} - \frac{1}{\Gamma(1+p)^2} \right) n^{2p}.$$

O expoente $2p$ no crescimento da variância nos permite identificar os três regimes clássicos de difusão:

- **Subdifusivo** para $p < 1/2$ (expoente $2p < 1$).
- **Difusivo normal** para $p = 1/2$ (expoente $2p = 1$).
- **Superdifusivo** para $p > 1/2$ (expoente $2p > 1$).

A transição de fase em $p = 1/2$ marca uma diferença fundamental entre modelo e o caso $q > 0$ discutido anteriormente. Embora, no caso em que $q = 0$, os pontos críticos sejam numericamente iguais ($\alpha = p = 1/2$), a natureza física da transição é distinta. Quando $q > 0$, o comportamento assintótico do sistema é ditado pela interação de dois efeitos concorrentes: a persistência, governada por p , e a introdução de novos estados, governada por q . No caso em que $q = 0$, a memória torna-se a força dominante pois não é possível que o caminhante saia de um estado de repouso. A transição em $p = 1/2$ nesse caso não é sobre o equilíbrio entre duas forças, mas sobre o ponto no qual o parâmetro de memória p , por si só, é suficiente para alterar qualitativamente o regime de difusão do sistema.

4.2 Convergência quase certa e o limite de Mittag-Leffler

A análise do caso $q = 0$ através do ponto de vista do esquema de urnas também revela sua distinção do caso difusivo anterior. A matriz de substituição, dada na [Definição A.2](#), deixa de ser irredutível, tornando-se uma matriz triangular inferior:

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1-p & 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores dessa matriz são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = p$. Neste caso, os resultados padrão de [Janson \(2004\)](#) não são aplicáveis, pois o autovalor $\lambda_1 = 1$ não é estritamente dominante. Se o processo de urna começar com apenas uma bola branca (representando um passo de repouso), o sistema evoluirá apenas adicionando bolas brancas, e o número de bolas pretas (movimentos) será sempre zero.

Este tipo de urna triangular foi estudado em [Aguech \(2009\)](#), onde é mostrado que, com uma reescala adequada, o número de bolas pretas converge quase certamente para uma função não gaussiana, conhecida como **função de Mittag-Leffler** ([A.3](#)).

Teorema 4.1. Seja $q = 0$, $s = 1$ e $p \in (0, 1)$. Então

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{\text{q.c.}} K,$$

onde K é uma variável aleatória de Mittag-Leffler com parâmetro p .

Demonstração. A prova segue a conexão com o modelo de urna triangular de [Aguech \(2009\)](#). Com a notação do [Teorema A.5](#), temos um processo de urna de duas cores (preta e branca). Começando com uma bola preta ($s = 1$), quando uma bola preta é sorteada, ela retorna à urna junto com uma nova bola, que é preta com probabilidade p (variável Z) ou branca com probabilidade $1 - p$ (variável Y). O número total de bolas adicionadas é $X = 1$. Isso corresponde a $\mu_Z = p$, $\mu_Y = 1 - p$ e $\mu_X = 1$, resultando em $\rho = \mu_Z / \mu_X = p$. O [Teorema A.5](#) garante que o número de bolas pretas, X_{n1} , satisfaz $X_{n1} = Kn^p + o(n^p)$ q.c., onde K é uma variável aleatória positiva.

Devido à igualdade $S_n = X_{n1}$, a convergência do teorema segue imediatamente ao dividirmos por n^p . A identificação formal da lei de K como sendo de Mittag-Leffler é devida a [Miyasaki e Takei \(2020, Corolário 2.2\)](#). $\square$

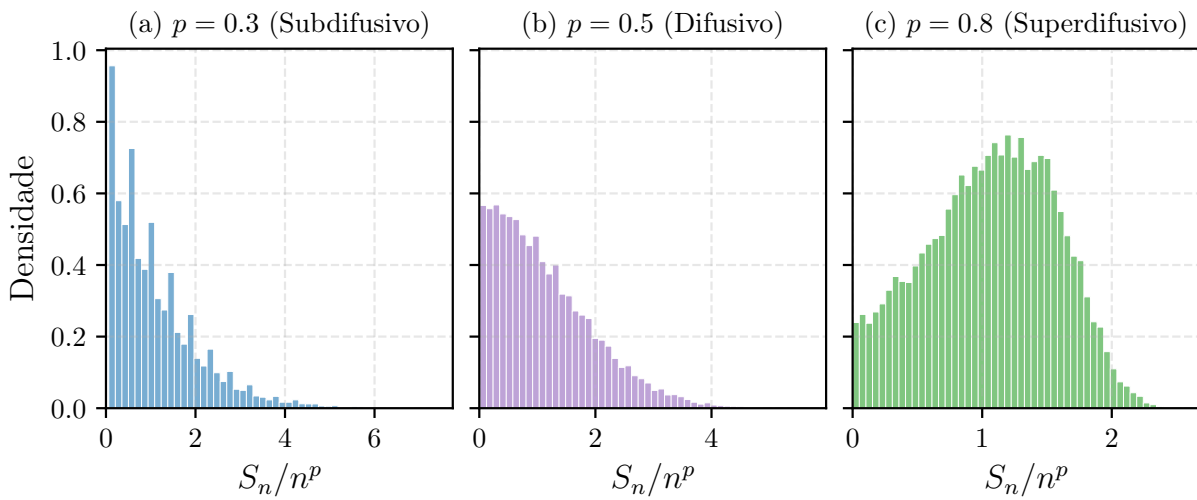
4.3 Discussão e interpretação dos resultados

A análise do [Teorema 4.1](#) revela a característica mais marcante do modelo preguiçoso: a quebra da natureza determinística da lei forte dos grandes números. Diferente dos regimes onde $q > 0$, nos quais a média amostral converge para uma constante, a posição normalizada do

caminhante converge para a variável aleatória não degenerada K . Sob o ponto de vista físico, esse limite estocástico indica que a evolução do sistema é fortemente determinada por sua história inicial, resultando em um processo onde não existe uma trajetória média única para a qual todas as realizações convergem.

A Figura 6 apresenta a simulação da distribuição dessa variável limite para diferentes valores de p , ilustrando a transição entre os regimes subdifusivo ($p = 0.3$) e superdifusivo ($p = 0.8$).

Figura 6 – Distribuição simulada da posição normalizada para o passeio minimal com $q = 0$.

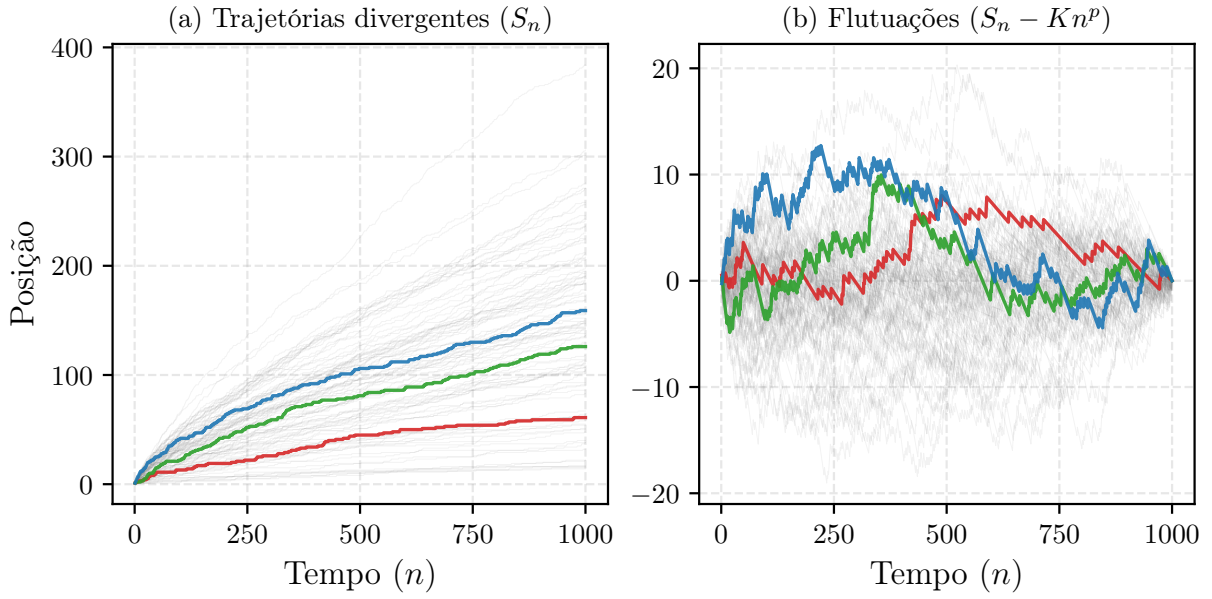


Fonte: Elaborada pela autora.

Observa-se que, à medida que o parâmetro de persistência p aumenta, a massa de probabilidade exibe uma maior dispersão. A variável normalizada S_n/n^p revela uma densidade com suporte contínuo e uma assimetria acentuada, característica fundamental da distribuição de Mittag-Leffler. Essa assimetria é uma característica distintiva do regime $q = 0$: enquanto a distribuição normal (típica do caso $q > 0$) concentra massa em torno de um centro, a distribuição de Mittag-Leffler para $p < 1$ concentra massa próximo à origem. Isso reflete a alta probabilidade de o caminhante realizar passos de repouso muito cedo na trajetória e, devido à ausência de um mecanismo de reinício, permanecer “estacionado” em valores baixos de deslocamento.

Para compreender como essa distribuição de “destinos finais” se manifesta na evolução temporal do processo, é necessário analisar as trajetórias individuais. Enquanto a Figura 6 descreve o comportamento do conjunto das realizações (o *ensemble*), a Figura 7 ilustra a dinâmica de cada caminhante individualmente.

No gráfico (a) da Figura 7, observa-se que as trajetórias partem juntas da origem, mas divergem progressivamente, formando o “leque” estatístico que dá origem à distribuição de Mittag-Leffler. As linhas coloridas destacam três realizações distintas (K_1, K_2, K_3), enfatizando que cada caminhante escolhe uma realização assintótica diferente da forma Kn^p . Essa divergência torna a análise de flutuações em torno de uma média global inviável, uma vez que não há um

Figura 7 – Comportamento das trajetórias e flutuações para o passeio minimal com $q = 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

caminho central determinístico de referência.

Podemos solucionar esse problema por meio da **centralização aleatória**, visualizada no gráfico (b). Ao subtrairmos de cada trajetória $S_{n,i}$ a sua própria tendência assintótica individual, estimada por $K_i n^p$, as flutuações residuais tornam-se comparáveis. Nota-se que, sob essa nova referência, as curvas de flutuação passam a oscilar em torno de um eixo comum e dentro de uma faixa de magnitude homogênea.

Essa intuição visual fundamenta a aplicação de teoremas de limite de segunda ordem para o modelo preguiçoso. Formalmente, utiliza-se o martingal S_n/a_n , onde $a_n \sim n^p/\Gamma(1+p)$. Através do teorema de convergência de martingais, demonstra-se que S_n/a_n converge quase certamente para uma variável limite W , que se relaciona com o fator da LGN por $W = K \cdot \Gamma(1+p)$. Sob essa ótica, as flutuações são descritas pelo seguinte resultado de Miyasaki e Takei (2020):

$$\frac{S_n - W a_n}{\sqrt{W a_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (4.4)$$

Diferente do Teorema 2.2 clássico, a escala de normalização no denominador da Equação 4.4 é, ela própria, uma variável aleatória. Este resultado indica que a magnitude das oscilações de um caminhante é proporcional à sua própria “sorte” inicial: caminhantes que atingem maiores distâncias (maior W) também apresentam flutuações de maior escala. Em suma, no caso $q = 0$, a memória de longo alcance não apenas define o destino final, mas governa toda a estrutura estatística das flutuações residuais do sistema.

4.4 Comparativo estrutural entre os regimes $q > 0$ e $q = 0$

Para sintetizar as diferenças entre o regime padrão investigado no [Capítulo 3](#) e o regime preguiçoso tratado aqui, a [Tabela 2](#) apresenta as principais características em cada regime.

Tabela 2 – Comparativo das propriedades assintóticas.

Propriedade	Regime padrão ($q > 0$)	Regime preguiçoso ($q = 0$)
Memória do repouso	Permite retorno ao movimento	Absorvente para a memória
Lei dos grandes números	Limite determinístico (constante)	Limite aleatório (variável K)
Referência de flutuação	Média determinística $\mathbb{E}[S_n]$	Trajeto individual Wa_n
Distribuição limite	Universal (gaussiana)	Não universal (Mittag-Leffler)
Influência de S_0	Esquecida assintoticamente	Preservada assintoticamente

Com esta comparação podemos observar que o caso $q = 0$ não é apenas uma variação paramétrica do PAM, mas uma classe de universalidade distinta. Enquanto no caso $q > 0$ as correlações de longo alcance afetam apenas a variância (a escala do erro), no caso $q = 0$ a memória é tão dominante que ela governa a própria “velocidade média” do caminhante, tornando-a uma variável estocástica.

PRINCÍPIO DOS DESVIOS MODERADOS PARA O PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL

Nos capítulos anteriores, apresentamos alguns teoremas que descrevem o comportamento assintótico do passeio aleatório minimal. A lei dos grandes números ([Teorema 2.1](#)) mostrou a convergência da posição normalizada, descrevendo o caminho médio em torno do qual o processo evolui. Posteriormente, o teorema central do limite ([Teorema 2.2](#)) e a lei do logaritmo iterado ([Teorema 2.3](#)) forneceram a ordem de grandeza das flutuações em torno dessa média. Ou seja, eles descreveram o quão longe o caminhante costuma se desviar do seu percurso principal.

Entretanto, estes resultados fornecem apenas o comportamento típico do processo ou os seus limites extremos. Uma questão importante permanece: como podemos calcular a probabilidade de desvios que são grandes demais para serem considerados típicos como no TCL, mas não tão extremos a ponto de se encaixarem na teoria de grandes desvios? A resposta a esta pergunta está em um conjunto de princípios que conectam o comportamento gaussiano, das flutuações típicas, ao exponencial dos eventos raros.

5.1 A hierarquia dos desvios e o princípio dos desvios moderados

Para formalizar a discussão e construir uma ponte entre os regimes, vamos organizar os desvios em uma hierarquia, com base em uma sequência de normalização b_n . A escolha de b_n determina se um desvio é típico, moderado ou grande.

O princípio dos desvios moderados, assim como o de grandes desvios, caracteriza a probabilidade de eventos raros através de uma função $I(\cdot)$ chamada *função taxa*. Esta função quantifica o “custo” ou a dificuldade de observar um valor atípico.

Definição 5.1. Seja S um espaço topológico. Uma função $I : S \rightarrow [0, \infty]$ é chamada de **função taxa** se ela for **semi-contínua inferiormente**. Isso significa que, para qualquer valor $c \geq 0$, o conjunto de nível

$$\phi_I(c) = \{x \in S : I(x) \leq c\}$$

é um conjunto **fechado** em S .

Além disso, dizemos que $I(\cdot)$ é uma **boa função taxa** se todos os seus conjuntos de nível $\phi_I(c)$ forem subconjuntos compactos de S .

A vantagem de trabalharmos com boas funções taxa é que o ínfimo sobre conjuntos fechados é sempre atingido.

Vamos classificar os teoremas de desvio pela sequência de normalização b_n aplicada à flutuação $S_n - \mathbb{E}[S_n]$.

- **Desvios típicos (TCL):** Com a normalização $b_n = \sqrt{n}$, estamos no regime do TCL, onde a flutuação $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}}$ converge em distribuição para uma normal.
- **Grandes desvios (PGD):** Com a normalização $b_n = n$, estudamos a flutuação macroscópica $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}$. O PGD afirma que a probabilidade de tais desvios decai exponencialmente com velocidade n e é governada por uma função taxa $I_{PGD}(x)$.
- **Desvios moderados (PDM):** Este princípio preenche a lacuna entre os dois regimes anteriores, usando uma sequência de normalização b_n que cresce mais rápido do que $\sqrt{n}$ e mais lentamente do que n , satisfazendo:

$$\frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \frac{b_n}{n} \rightarrow 0 \tag{5.1}$$

O princípio dos desvios moderados afirma que a probabilidade de desvios neste regime intermediário também diminui de forma exponencial, mas com uma velocidade mais lenta, b_n^2/n . A seguinte definição formaliza matematicamente este princípio.

Definição 5.2. Dizemos que a sequência $Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n}$ satisfaz o **princípio dos desvios moderados (PDM)** com velocidade $v_n = b_n^2/n$ e boa função taxa $I(x)$ se satisfizer as duas condições a seguir:

- (i) **Cota superior:** Para qualquer conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(Z_n \in F) \leq - \inf_{x \in F} I(x).$$

- (ii) **Cota inferior:** Para qualquer conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(Z_n \in G) \geq - \inf_{x \in G} I(x).$$

Observação 5.1. A definição acima estabelece limites superior e inferior para a probabilidade logarítmica. Para os chamados **conjuntos de continuidade** de $I(\cdot)$, onde $\inf_{x \in A^\circ} I(x) = \inf_{x \in \bar{A}} I(x)$, os limites da desigualdade coincidem. Nesses casos, o PDM nos garante um limite exato para a probabilidade de A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mathbb{P}(Z_n \in A) = - \inf_{x \in A} I(x).$$

A relação entre os regimes de desvio fica evidente pela análise da função taxa do PGD. A função taxa do PDM é, na verdade, a aproximação de segunda ordem da função taxa do PGD, $I_{PGD}(x)$, em torno da média do processo, μ . Expandindo $I_{PGD}(x)$ em uma série de Taylor para valores de x próximos de μ , temos:

$$I_{PGD}(x) \approx I_{PGD}(\mu) + I'_{PGD}(\mu)(x - \mu) + \frac{1}{2} I''_{PGD}(\mu)(x - \mu)^2.$$

Como a função taxa tem seu mínimo (zero) na média, os dois primeiros termos são nulos. Um resultado conhecido da teoria é que a segunda derivada no mínimo é o inverso da variância, $I''_{PGD}(\mu) = 1/\sigma^2$. Isso nos leva à aproximação quadrática para o custo de um pequeno desvio $(x - \mu)$:

$$I_{PGD}(x) \approx \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

O PDM foca precisamente nestes pequenos desvios. Se definirmos a variável do PDM como o próprio desvio, $y = x - \mu$, obtemos a forma universal da função taxa do PDM, $I_{PDM}(y) = y^2/(2\sigma^2)$, que está conectada diretamente à variância do TCL.

Basicamente, o PDM mostra que, para desvios moderados, a aproximação gaussiana continua sendo extremamente precisa. Para $Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n}$ obtemos:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n} \in A\right) \approx \exp\left(-\frac{b_n^2}{n} \inf_{x \in A} \frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

[Dembo e Zeitouni \(2010, Teorema 3.7.1\)](#)

A transição para o princípio dos grandes desvios acontece exatamente quando esta aproximação quadrática para de funcionar. Para desvios suficientemente grandes, os termos de ordem superior da série de Taylor, que dependem de todos os momentos da distribuição dos incrementos, passam a ser relevantes. É nesse ponto que a forma universal gaussiana é quebrada. A função taxa assume sua forma completa e específica, levando em conta todos os detalhes do processo. Assim, a hierarquia dos desvios (do típico ao extremo) pode ser vista como uma jornada através dos diferentes níveis de precisão da série de Taylor da função taxa ([TOUCHETTE, 2011](#))).

5.2 O desafio da memória e o teorema principal

Para que o princípio dos desvios moderados clássico seja válido, os passos do processo devem ser independentes. O passeio aleatório minimal não satisfaz essa condição pois sua memória de longo alcance (controlada por α) cria dependências complexas. Portanto, não temos garantia que exista um PDM para esse modelo.

Este capítulo apresenta nossa contribuição mais significativa à teoria de processos estocásticos não-markovianos. Demonstramos, de forma inédita, que o passeio aleatório minimal satisfaz um princípio de desvios moderados (PDM) e calculamos sua função taxa. A originalidade reside na superação das dificuldades técnicas impostas pela memória de longo alcance do modelo, que impede o uso de ferramentas clássicas de variáveis i.i.d.

A prova se baseará na teoria de martingais, utilizando uma versão do PDM para diferenças de martingais, como a desenvolvida em Djellout (2002), para lidar com a forte dependência causada pela memória.

5.3 Estrutura de martingal do processo

Seja $(S_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório minimal.

Definição 5.3. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ uma filtração em $\mathcal{F}$. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal com respeito a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ se

- (i) M_n é mensurável com respeito a $\mathcal{F}_n$,
- (ii) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$,
- (iii) $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ q.c..

Defina

$$M_n := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n}. \quad (5.2)$$

Proposição 3. $(M_n)_{n \geq 1}$ é um martingal com relação a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.

Demonstração. Usando a definição de M_{n+1} e a relação $S_{n+1} = S_n + \delta_{n+1}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} \left[\frac{(S_n - \mathbb{E}[S_n]) + (\delta_{n+1} - \mathbb{E}[\delta_{n+1}])}{a_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_{n+1}} + \frac{\mathbb{E}[\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\delta_{n+1}]}{a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dos capítulos anteriores, sabemos que $\mathbb{E}[\delta_{n+1}|\mathcal{F}_n] = q + \alpha \frac{S_n}{n}$ e $\mathbb{E}[\delta_{n+1}] = q + \alpha \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}$. Substituindo estes resultados, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_{n+1}} + \frac{\alpha \frac{S_n}{n} - \alpha \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_{n+1}} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right).\end{aligned}$$

Da [Equação 2.8](#), temos a relação de recorrência $a_{n+1} = a_n(1 + \alpha/n)$. Portanto, $\frac{1+\alpha/n}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n}$. Isso nos leva a:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (S_n - \mathbb{E}[S_n]) \frac{1}{a_n} = M_n.$$

Como as outras condições da [Definição 5.3](#) são satisfeitas pela construção do processo, concluímos que $(M_n)_{n \geq 1}$ é um martingal. $\square$

A partir do martingal (M_n) , definimos a sequência de **diferenças de martingal**

$$D_1 := M_1, \quad D_n := M_n - M_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2. \quad (5.3)$$

Por construção, esta sequência satisfaz a propriedade $\mathbb{E}[D_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ para todo $n \geq 2$.

Para analisar o comportamento assintótico do martingal (M_n) , é essencial entender como sua variância cresce. A **variação quadrática** do martingal, denotada por $\langle M \rangle_n$, é a soma das variâncias condicionais das diferenças:

$$\langle M \rangle_n := \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[D_j^2|\mathcal{F}_{j-1}]. \quad (5.4)$$

Para aplicar os teoremas de limite, precisamos determinar a escala de crescimento deste processo. Analisando o termo dentro da soma de $\langle M \rangle_n$, observa-se que seu comportamento é proporcional a $1/a^2$. Isso motiva a definição da seguinte sequência, que é a escala natural deste processo:

$$A_n^2 := \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}. \quad (5.5)$$

Em processos de difusão simples a variância adicionada em cada passo é constante, fazendo com que o tempo cronológico n seja a escala natural do processo. No passeio minimal a memória faz com que essa contribuição varie, sendo assintoticamente proporcional a $1/a_n^2$. A sequência A_n^2 é a escala de tempo que reflete a aleatoriedade acumulada real, funcionando como o **tempo efetivo** do processo.

5.4 Resultados preliminares para a prova principal

Para provar o teorema 5.1, precisaremos de alguns resultados técnicos específicos para o passeio aleatório minimal. Nós os apresentamos aqui como lemas para manter a demonstração principal organizada e focada em sua lógica central. Estes resultados possuem natureza puramente algébrica e são válidos para qualquer $\alpha > -1$ e parâmetros $p, q \in [0, 1]$.

Lema 5.1 (Forma explícita das diferenças de martingal). A sequência de diferenças de martingal (D_n) associada ao martingal (M_n) pode ser expressa em termos dos incrementos do passeio como:

$$D_n = \frac{1}{a_n} (\delta_n - \mathbb{E}[\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}]).$$

Demonstração. Das definições de D_n e S_n , obtemos $D_n = (S_n - \mathbb{E}[S_n])/a_n - (S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])/a_{n-1}$. Pela Equação 2.8 podemos escrever $\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right)$. Assim:

$$D_n = \frac{1}{a_n} \left[(S_n - \mathbb{E}[S_n]) - (S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]) \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) \right].$$

Agora, substituímos as relações $S_n = S_{n-1} + \delta_n$ e $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[S_{n-1}] + \mathbb{E}[\delta_n]$:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{a_n} \left[(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]) + (\delta_n - \mathbb{E}[\delta_n]) - (S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}]) - \frac{\alpha(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])}{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{a_n} \left[(\delta_n - \mathbb{E}[\delta_n]) - \frac{\alpha(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Da Equação 2.4 obtemos a seguinte relação

$$\mathbb{E}[\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[\delta_n] = \frac{\alpha(S_{n-1} - \mathbb{E}[S_{n-1}])}{n-1}.$$

Substituindo esta identidade na expressão de D_n :

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{a_n} [(\delta_n - \mathbb{E}[\delta_n]) - (\mathbb{E}[\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[\delta_n])] \\ &= \frac{1}{a_n} (\delta_n - \mathbb{E}[\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}]), \end{aligned}$$

□

Lema 5.2 (Decomposição da variância condicional). A variância condicional do incremento δ_j do Passeio Aleatório Minimal pode ser decomposta em termos da flutuação do processo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) &= p_j(1 - p_j) + \alpha(1 - 2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \\ &\quad - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2, \end{aligned}$$

onde $p_j = \mathbb{E}[\delta_j]$.

Demonstração. Como os incrementos δ_j são variáveis de Bernoulli $\delta_j^2 = \delta_j$, portanto podemos escrever a variância condicional de δ_j do seguinte modo:

$$\text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) = \mathbb{E}[\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}] (1 - \mathbb{E}[\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}])$$

Utilizamos a relação $\mathbb{E}[\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}] = q + \alpha \frac{S_{j-1}}{j-1}$ dada pela [Equação 2.4](#). Vamos centrar a variável aleatória S_{j-1} em torno de sua média, $\mathbb{E}[S_{j-1}]$. Fazemos isso adicionando e subtraindo este termo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}] &= q + \alpha \frac{\mathbb{E}[S_{j-1}] + (S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}])}{j-1} \\ &= \left(q + \alpha \frac{\mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right) + \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1}. \end{aligned}$$

O primeiro termo é a esperança não-condicional $\mathbb{E}[\delta_j] = \mathbb{P}(\delta_j = 1) = p_j$. Assim, decomponemos a esperança condicional em sua média mais uma flutuação:

$$\mathbb{E}[\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}] = p_j + \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1}.$$

Substituindo esta expressão na fórmula da variância condicional:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) &= \left(p_j + \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right) \left(1 - \left(p_j + \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right) \right) \\ &= \left(p_j + \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right) \left((1 - p_j) - \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right). \end{aligned}$$

Agora, expandimos o produto, tratando $(S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}])$ como a variável de interesse:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) &= p_j(1 - p_j) \quad (\text{termo constante}) \\ &\quad - p_j \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} + (1 - p_j) \alpha \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \quad (\text{termos lineares na flutuação}) \\ &\quad - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2 \quad (\text{termo quadrático na flutuação}). \end{aligned}$$

Agrupando os termos lineares, obtemos:

$$\text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) = p_j(1 - p_j) + \alpha(1 - p_j - p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2.$$

Isso nos leva diretamente à expressão final:

$$\text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}) = p_j(1 - p_j) + \alpha(1 - 2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2,$$

o que completa a demonstração. $\square$

5.5 O princípio dos desvios moderados para o passeio aleatório minimal

Este é o resultado principal desta tese. Demonstraremos que, apesar da memória de longo alcance, o passeio aleatório minimal satisfaz um princípio de desvios moderados com a forma gaussiana clássica.

Teorema 5.1 (PDM para o passeio aleatório minimal). Seja $(S_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório minimal com parâmetro $\alpha = p - q \in (-1/2, 1/2)$ com $p < 1$ e $q > 0$. Sejam (a_n) e (A_n^2) as sequências de escala da [Equação 5.5](#). Seja $(b_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números positivos que satisfaz as condições de desvio moderado:

$$\frac{b_n}{A_n} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \frac{b_n}{A_n^2} \rightarrow 0,$$

Então, a sequência de variáveis aleatórias $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n a_n}$ satisfaz o princípio dos desvios moderados com:

(i) **Velocidade:** $v_n = b_n^2 / A_n^2$.

(ii) **Boa função taxa:** $I(x) = \frac{x^2}{2\sigma^2}$, onde a constante de variância é dada por

$$\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2}.$$

Em outras palavras, o teorema garante que as cotas inferior e superior do princípio dos desvios moderados se aplicam. Em particular, para qualquer conjunto de continuidade $A \subset \mathbb{R}$ (onde o ínfimo no interior coincide com o ínfimo no fecho), temos a seguinte expressão explícita para o decaimento exponencial da probabilidade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n a_n} \in A \right) = - \inf_{x \in A} \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Corolário 5.1. Como consequência direta do [Teorema 5.1](#) e da propriedade da função taxa da [Observação 5.1](#), ao considerarmos o conjunto de continuidade $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > r\}$, para $r > 0$, o limite da probabilidade logarítmica existe e é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n a_n} \right| > r \right) = - \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

Demonstração. A prova consiste em verificar as condições do princípio dos desvios moderados para diferenças de martingal, estabelecido por [Djellout \(2002\)](#). Este resultado está enunciado de maneira adaptada ao propósito deste trabalho no [Teorema A.10](#). Nosso objetivo é analisar a sequência

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n a_n} = \frac{M_n}{b_n},$$

onde $(M_n)_{n \geq 1}$ é o martingal definido em (5.2). Para isso, devemos verificar que as suas diferenças de martingal, $(D_j)_{j \geq 1}$, definidas em (5.3), satisfazem o seguinte:

(H1) Existe uma constante $\sigma^2 > 0$ tal que, para todo $r > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left[\left| \frac{\langle M \rangle_n}{A_n^2} - \sigma^2 \right| > r \right] = -\infty.$$

(H2) Sejam $c(n) = A_n^2/b_n$ e $c^{-1}(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : c(n) \geq t\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \left(A_n^2 \sup_{1 \leq j \leq c^{-1}(b_{n+1})} \mathbb{P} [|D_j| > b_n | \mathcal{F}_{j-1}] \right) = -\infty.$$

(H3) Para todo $a > 0$ e $r > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left[\frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [|D_j|^2 \mathbb{I}_{\{|D_j| \geq a(A_n^2/b_n)\}} | \mathcal{F}_{j-1}] \geq r \right] = -\infty.$$

Passo 1: Verificação das condições (H2) e (H3)

Estas duas condições controlam o comportamento da cauda dos incrementos. Do [Lema 5.1](#), temos que $|D_j| = \frac{1}{a_j} |\delta_j - \mathbb{E} [\delta_j | \mathcal{F}_{j-1}]| \leq \frac{1}{a_j}$. O comportamento assintótico da normalização é dado por $a_j \sim \frac{j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$.

Devemos analisar o comportamento de $|D_j|$ em relação à escala b_n em dois casos:

- **Caso $\alpha \geq 0$ (Persistente ou neutro):** A sequência a_j é não-decrescente, logo $1/a_j$ é limitada por $1/a_1 = 1$. Neste caso, os incrementos de martingal são uniformemente limitados ($|D_j| \leq C$). Como $b_n \rightarrow \infty$, para n suficientemente grande teremos $b_n > C \geq |D_j|$ quase certamente.
- **Caso $-1/2 < \alpha < 0$ (Anti-persistente):** A sequência a_j decresce para zero, fazendo com que os incrementos do martingal cresçam assintoticamente como $|D_j| \sim j^{-\alpha}$. Contudo, pela definição de desvios moderados (Eq. 5.1), a sequência b_n deve crescer mais rápido que $\sqrt{n}$. Como impusemos a restrição $\alpha > -1/2$, temos que a ordem de crescimento dos incrementos ($-\alpha$) é estritamente menor que $1/2$. Consequentemente, a escala b_n domina o crescimento dos incrementos, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/|D_n| = \infty$. Portanto, para n suficientemente grande, também teremos $b_n > |D_j|$ quase certamente.

Em ambos os casos, para n suficientemente grande, o evento $\{|D_j| > b_n\}$ torna-se impossível. Isso implica que:

- **Condição (H2):** A probabilidade dentro do logaritmo torna-se zero, satisfazendo o limite para $-\infty$.

- **Condição (H3):** A função indicadora torna-se nula, anulando a soma e satisfazendo o limite.

Passo 2: Verificação da Condição (H1)

Esta condição exige que a probabilidade que variação quadrática normalizada do martingal, $\langle M \rangle_n / A_n^2$, se desvie da constante σ^2 decai para zero a uma taxa exponencial.

A variação quadrática é dada por $\langle M \rangle_n = \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}]$.

Primeiro, analisamos o termo geral da soma da variação quadrática. Partindo do [Lema 5.1](#), obtemos o seguinte:

$$\mathbb{E} [D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}] = \frac{1}{a_j^2} \text{Var}(\delta_j | \mathcal{F}_{j-1})$$

Pelo [Lema 5.2](#) obtemos a decomposição para o termo geral da variação quadrática em sua parte média assintótica e um termo de flutuação:

$$\mathbb{E} [D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}] = \frac{1}{a_j^2} \left[p_j(1-p_j) + \alpha(1-2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2 \right].$$

O primeiro termo, $p_j(1-p_j)$, é determinístico e converge para $\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2}$ quando $j \rightarrow \infty$. Os outros dois termos dependem da história aleatória do processo e constituem o resto R_n .

Somando essa equação de $j = 1$ até n para obter $\langle M \rangle_n$, e normalizando por A_n^2 , chegamos à decomposição:

$$\frac{\langle M \rangle_n}{A_n^2} = \sigma^2 + R_n,$$

onde agora temos uma expressão explícita para o termo de resto:

$$R_n := \frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \left[(p_j(1-p_j) - \sigma^2) + \alpha(1-2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2 \right].$$

A condição (H1) se resume a provar que, para todo $r > 0$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P}[|R_n| > r] = -\infty.$$

Para analisar R_n , vamos dividi-lo em duas partes: uma determinística e uma estocástica.

$$R_n = R_n^{(det)} + R_n^{(est)},$$

onde

$$R_n^{(det)} := \frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j) - \sigma^2}{a_j^2},$$

$$R_n^{(est)} := \frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \left[\alpha(1-2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2 \right].$$

Devemos mostrar que a probabilidade de ambas as partes se desviarem de zero decai exponencialmente.

Análise do termo determinístico $R_n^{(det)}$

O termo determinístico $R_n^{(det)}$ representa o desvio da média ponderada das variâncias locais em relação ao limite assintótico σ^2 .

Pela [Proposição 1](#), sabemos que a probabilidade de passo p_j converge para $p_\infty = q/(1 - \alpha)$. Consequentemente, o termo $p_j(1 - p_j)$ converge para $\sigma^2 = p_\infty(1 - p_\infty)$.

Como $\alpha < 1/2$, $A_n^2 = \sum a_j^{-2} \rightarrow \infty$. Além disso o termo geral converge, então pelo [Corolário A.1](#), a média ponderada converge para o mesmo limite, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{p_j(1 - p_j)}{a_j^2} = \sigma^2.$$

Isso implica diretamente que $R_n^{(det)} \rightarrow 0$ deterministicamente. Para qualquer $\delta > 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $|R_n^{(det)}| < \delta$. Assim, a probabilidade de desvio é nula para n grande, satisfazendo a condição de decaimento exponencial trivialmente.

Análise do termo estocástico $R_n^{(est)}$

O termo $R_n^{(est)}$ representa a contribuição das flutuações do processo para a variação quadrática. Podemos limitá-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |R_n^{(est)}| &= \left| \frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \left[\alpha(1 - 2p_j) \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} - \alpha^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right)^2 \right] \right| \\ &\leq \frac{C}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right|, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que engloba os termos limitados α e p_j . Como $|S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]| \leq |j-1|$, o termo quadrático é majorado pelo termo linear.

Para demonstrar que este termo vai a zero com probabilidade exponencial, seguimos a estratégia de partição da soma utilizada por [Miao, Ma e Yang \(2019, Eq. 3.7\)](#). Dividimos a soma em duas partes usando uma sequência q_n (a ser definida) tal que $1 < q_n < n$:

$$|R_n^{(est)}| \leq \frac{C}{A_n^2} \left(\sum_{j=1}^{q_n} \frac{1}{a_j^2} \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| + \sum_{j=q_n+1}^n \frac{1}{a_j^2} \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| \right).$$

Como $|S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]| \leq j-1$, o primeiro somatório é limitado trivialmente. Definimos uma sequência de índices q_n tal que

$$A_{q_n}^2 / A_n^2 \rightarrow 0,$$

o que implica que a primeira parte converge para zero deterministicamente. Portanto, para qualquer $r > 0$ e para n suficientemente grande, a primeira parte da soma é estritamente menor que $rA_n^2/2$.

Para que a soma total exceda rA_n^2 , a segunda parte da soma deve necessariamente exceder $rA_n^2/2$. Agora, precisamos controlar a probabilidade deste evento. Escolhemos um ε tal que $0 < \varepsilon < r/2$.

Observe que é impossível que a soma da segunda parte exceda $rA_n^2/2$ se todos os desvios individuais forem estritamente menores que ε . De fato:

$$\mathbb{P} \left(\sum_{j=q_n+1}^n \frac{1}{a_j^2} \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| > r \frac{A_n^2}{2}, \bigcap_{j=q_n}^n \left\{ \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| < \varepsilon \right\} \right) = 0.$$

Logo, se a soma excede $rA_n^2/2$, pelo menos um dos termos individuais deve ser maior ou igual a ε . Utilizando a subaditividade da probabilidade (limite da união), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sum_{j=q_n+1}^n \frac{1}{a_j^2} \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| > rA_n^2 \right) &\leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=q_n}^n \left\{ \left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| > \varepsilon \right\} \right) \\ &\leq \sum_{j=q_n}^n \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]}{j-1} \right| > \varepsilon \right) = \sum_{j=q_n}^n \mathbb{P} (|S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]| > \varepsilon(j-1)). \end{aligned}$$

Agora aplicamos a desigualdade de Azuma-Hoeffding. Para isso, utilizamos o martingal $M_n = (S_n - \mathbb{E}[S_n])/a_n$. De acordo com o [Lema 5.1](#), suas diferenças de martingal $D_j = M_j - M_{j-1}$ satisfazem $|D_j| \leq 1/a_j$. Pela desigualdade de Azuma-Hoeffding aplicada a M_{j-1} , e lembrando que $\sum_{i=1}^{j-1} (1/a_i)^2 = A_{j-1}^2$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} (|S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]| > \varepsilon(j-1)) &= \mathbb{P} \left(|M_{j-1}| > \frac{\varepsilon(j-1)}{a_{j-1}} \right) \\ &\leq 2 \exp \left(-\frac{(\varepsilon(j-1)/a_{j-1})^2}{2A_{j-1}^2} \right). \end{aligned}$$

Como no regime difusivo ($\alpha < 1/2$), a escala de tempo efetivo A_{j-1}^2 cresce mais lentamente que $(j-1)$, essa probabilidade decai exponencialmente com ordem j , resultando em:

$$\mathbb{P} (|S_{j-1} - \mathbb{E}[S_{j-1}]| > \varepsilon(j-1)) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2(j-1)}{2} \right).$$

Substituindo os resultados anteriores, obtemos uma soma que pode ser majorada por uma série geométrica convergente, uma vez que a razão $\exp(-\varepsilon^2/2)$ é estritamente menor que 1. Dessa forma, o comportamento da cauda é dominado pelo seu primeiro termo, q_n :

$$\mathbb{P} (|R_n^{(est)}| > r) \leq \sum_{j=q_n}^n 2e^{-\frac{\varepsilon^2(j-1)}{2}} \leq \frac{2e^{-\frac{\varepsilon^2(q_n-1)}{2}}}{1 - e^{-\varepsilon^2/2}} \leq C' e^{-\frac{\varepsilon^2 q_n}{2}},$$

onde a constante C' depende apenas de ε .

Para satisfazer a condição (H1), precisamos que esta probabilidade decaia a uma taxa que domine a velocidade $v_n = b_n^2/A_n^2$. Pelas hipóteses do teorema, temos $b_n/A_n \rightarrow \infty$, o que garante que a velocidade diverge. Ao escolhermos q_n tal que $b_n^2 = o(q_n)$ (por exemplo, tomando $q_n = n^{1-\delta}$ com δ suficientemente pequeno para que $n^{1-\delta} > b_n^2$), garantimos que o termo de erro é desprezível na escala do martingal:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P}(|R_n^{(est)}| > r) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \left(-\frac{\varepsilon^2 q_n}{2} \right) = -\infty,$$

verificando a condição (H1).

Passo 3: Conclusão da prova

Tendo verificado as condições (H1), (H2) e (H3), o [Teorema A.10](#) garante que o processo $Z_n(t) = M_{[nt]}/b_n$ satisfaz o PDM no espaço $D([0, 1], \mathbb{R})$ com velocidade b_n^2/A_n^2 e boa função taxa

$$I(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (\phi'(t))^2 dt, & \text{se } \phi \in \mathcal{AC}_0, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estamos interessados no PDM da variável aleatória $Z_n = M_n/b_n$, que corresponde à avaliação do processo em $t = 1$. Pelo princípio da contração ([Teorema A.9](#)), a função taxa para Z_n é dada por $I(x) = \inf\{I(\phi) : \phi(1) = x\}$. O ínfimo é atingido pela trajetória que minimiza a integral da derivada ao quadrado, que é a linha reta $\phi(t) = xt$. Para esta função, $\phi'(t) = x$, e a integral se torna:

$$I(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 x^2 dt = \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Isso estabelece a boa função taxa do teorema e completa a demonstração. $\square$

A função taxa $I(x)$ obtida no [Teorema 5.1](#) desempenha o papel central na quantificação da probabilidade de desvios moderados. A forma quadrática $I(x) = x^2/2\sigma^2$ indica que a probabilidade decai como uma gaussiana nas caudas, mas a largura dessa gaussiana é governada pela memória α .

A [Figura 8](#) ilustra o comportamento de $I(x)$ para diferentes regimes de memória (mantendo q fixo).

Observa-se que:

- No regime anti-persistente ($\alpha < 0$), a função taxa é mais íngreme (parábola fechada). Isso indica um custo probabilístico maior para a ocorrência de desvios, refletindo a tendência do processo de se auto-corrigir em direção à média.
- No regime persistente ($\alpha > 0$), a função taxa torna-se mais aberta (achatada). Isso significa que grandes desvios tem um custo menor, ou seja, são comparativamente mais prováveis do que no caso sem memória, devido à inércia criada pelo auto-reforço dos passos.

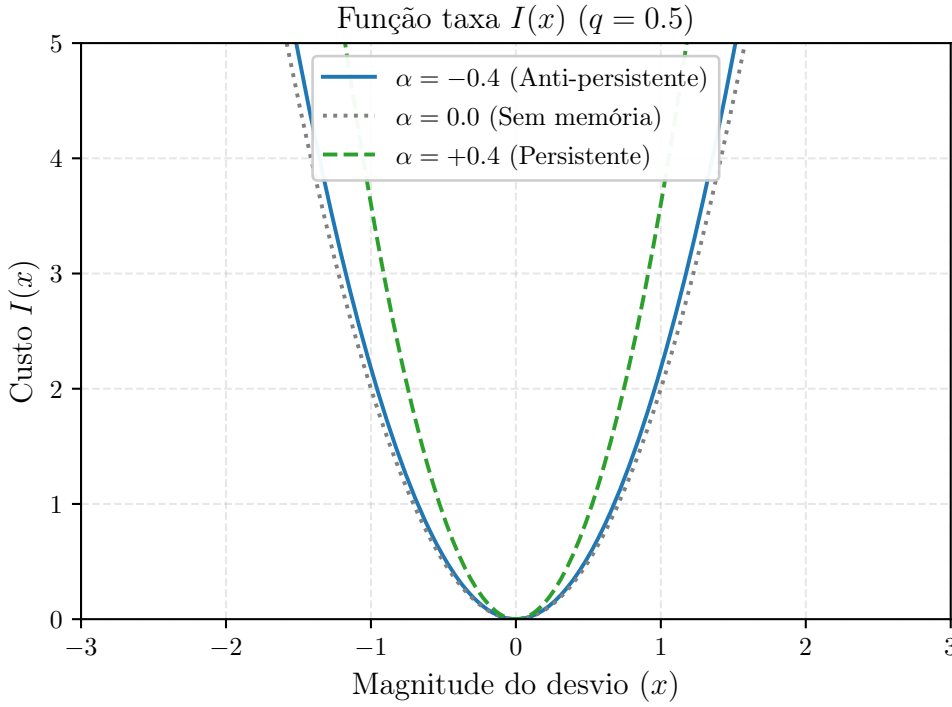


Figura 8 – Comportamento da função taxa $I(x)$ em função da memória α .

Fonte: Elaborada pela autora.

Observação 5.2 (Sobre a normalização do PDM). Note que a sequência estudada no [Teorema 5.1](#) é $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n a_n}$, e não a sequência $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{b_n}$ da [Definição 5.2](#). A presença do termo extra a_n na normalização é uma característica fundamental de processos com memória, necessária para a construção do martingal. O resultado, no entanto, é um PDM no sentido de que a velocidade e a função taxa têm a forma característica de desvios moderados.

Observação 5.3 (Sobre as constantes de variância). É importante observar que a constante $\sigma^2 = q(1-p)/(1-\alpha)^2$, que aparece na função taxa do PDM, não é a mesma que a variância da distribuição limite do (Teorema 2.2). Para fazer essa análise, vamos denotar aqui a variância do TCL para o PAM por σ_S^2 , onde:

$$\sigma_S^2 = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2(1-2\alpha)}.$$

A razão para essa diferença está na memória de longo alcance do processo. A constante σ^2 do PDM está ligada à variância do martingal (M_n) . A variância σ_S^2 do TCL descreve as flutuações do passeio (S_n) , que é o resultado final acumulado.

A conexão entre os dois é dada pela relação $S_n - \mathbb{E}[S_n] = a_n M_n$. A variância do passeio é, portanto, $\text{Var}(S_n) = a_n^2 \text{Var}(M_n)$. A análise assintótica das escalas a_n e da variância do martingal mostra que essa relação leva a uma correção. Como $A_n^2 \sim \frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}$ e $a_n^2 \sim n^{2\alpha}$, temos que $a_n^2 A_n^2 \sim \frac{n}{1-2\alpha}$. Isso leva a relação exata entre as duas constantes:

$$\sigma_S^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\alpha}.$$

O fator $(1 - 2\alpha)$ pode ser interpretado como um fator de correção que surge da memória do sistema. Ele ajusta a variância do martingal para resultar na variância observada no passeio aleatório.

Observação 5.4 (Comparação com o modelo de Bernoulli correlacionado). A estratégia de prova utilizada para verificar a condição (H1) baseia-se na técnica de truncamento utilizando a lei do logaritmo iterado, inspirada na abordagem de [Miao, Ma e Yang \(2019\)](#) para o modelo de Bernoulli correlacionado. No entanto, é importante observar que existe uma diferença na obtenção dos resultados.

No trabalho de [Miao, Ma e Yang \(2019\)](#), a análise é restrita a parâmetros de dependência não negativos ($\theta \geq 0$), focando principalmente em regimes de persistência. Neste trabalho, estendemos a aplicação dessa técnica para o passeio aleatório minimal no regime anti-persistente ($-1/2 < \alpha < 0$). Demonstramos que a aproximação gaussiana dos desvios moderados continua válida mesmo quando a memória tende a reverter o movimento (reduzindo a variância).

Observação 5.5 (Sobre as restrições dos parâmetros para o PDM). A restrição do parâmetro de memória ao intervalo $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ e a condição $q > 0$ são imprescindíveis para a existência de um PDM clássico (gaussiano):

- **A barreira superior** ($\alpha \geq 1/2$): No ponto crítico $\alpha = 1/2$, o processo exige velocidades e escalas logarítmicas adicionais devido ao crescimento da variância como $n \log n$. Para o regime superdifusivo $\alpha > 1/2$, o limite do processo é não-gaussiano (Teorema 3.3), inviabilizando um PDM com função taxa quadrática clássica.
- **A barreira inferior** ($\alpha \leq -1/2$): No regime fortemente anti-persistente, a série de tempo efetivo $A_n^2 = \sum 1/a_j^2$ torna-se uma p-série convergente (pois $-2\alpha \geq 1$). Isso implica que o martingal acumula uma variabilidade total finita, inviabilizando a escala de desvios $b_n \rightarrow \infty$ sob a condição $b_n/A_n^2 \rightarrow 0$.
- **O caso $q = 0$** : Conforme discutido no [Capítulo 4](#), o processo “preguiçoso” exibe um limite de Mittag-Leffler (não-gaussiano) devido à perda de ergodicidade, o que impede a obtenção de uma função taxa gaussiana para as flutuações.

5.5.1 Exemplos de aplicação do PDM

Para ilustrar a aplicação e as condições do [Teorema 5.1](#), apresentamos dois exemplos. O primeiro demonstra a existência de toda uma classe de sequências de desvio moderado, enquanto o segundo aplica o resultado a um caso numérico concreto.

Exemplo 5.1. Seja $\alpha \in (-1/2, 1/2)$. Conforme visto anteriormente, as escalas do processo são dadas por $a_n \sim n^\alpha$ e $A_n^2 = \sum_{j=1}^n 1/a_j^2 \sim n^{1-2\alpha}$. As condições de desvio moderado do [Teorema 5.1](#)

exigem que a sequência (b_n) satisfaça:

$$n^{\frac{1-2\alpha}{2}} = o(b_n) \quad \text{e} \quad b_n = o(n^{1-2\alpha}),$$

Para construir uma família de sequências que satisfaça essas condições podemos escolher:

$$b_n = n^{\frac{1-2\alpha}{2} + \beta},$$

onde β é uma constante a ser determinada.

A primeira condição, $b_n/A_n \rightarrow \infty$, implica que o expoente de b_n deve ser maior que o de $A_n \sim n^{(1-2\alpha)/2}$. Isso exige que $\beta > 0$.

A segunda condição, $b_n/A_n^2 \rightarrow 0$, implica que o expoente de b_n deve ser menor que o de $A_n^2 \sim n^{1-2\alpha}$. Portanto devemos impor que:

$$\frac{1-2\alpha}{2} + \beta < 1-2\alpha \implies \beta < \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Combinando as duas restrições, a sequência (b_n) satisfaz as condições de desvio moderado para qualquer β tal que $0 < \beta < \frac{1-2\alpha}{2}$.

Para esta família de sequências, o princípio dos desvios moderados se aplica com a função taxa $I(x) = x^2/(2\sigma^2)$ e com velocidade $v_n = b_n^2/A_n^2$. O comportamento assintótico desta velocidade é dado por $v_n \sim n^{2\beta}$.

Consequentemente, o enunciado formal do resultado para esta família de sequências garante que, para qualquer conjunto de continuidade $A \subset \mathbb{R}$, o princípio dos desvios moderados toma a seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n n^{\frac{1-2\alpha}{2} + \beta}} \in A \right) = - \inf_{x \in A} \frac{x^2}{2\sigma^2},$$

onde a constante de variância é $\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2}$.

Exemplo 5.2. Consideremos o caso com parâmetro de memória $\alpha = 0.2$, correspondente ao regime difusivo persistente. Neste caso, $1 - 2\alpha = 0.6$. Tomemos também $q = 0.1$, o que implica $p = 0.3$. Para este parâmetro de memórias, as ordens de grandeza das escalas de variação do martingal são dadas por:

$$a_n \sim n^{0.2} \quad \text{e} \quad A_n^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \sim n^{1-2(0.2)} = n^{0.6}.$$

Assim, a flutuação típica do martingal é de ordem $A_n \sim n^{0.3}$. Ao escolhermos $b_n = \sqrt{n} = n^{0.5}$, observamos que as condições de desvio moderado são satisfeitas:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n/A_n \sim \lim_{n \rightarrow \infty} n^{0.5}/n^{0.3} = \infty.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n / A_n^2 \sim \lim_{n \rightarrow \infty} n^{0.5} / n^{0.6} = 0.$$

A conclusão do [Teorema 5.1](#) é que a sequência de variáveis aleatórias $Z_n = (S_n - \mathbb{E}[S_n]) / (\sqrt{n}a_n)$ obedece ao princípio dos desvios moderados com:

- **Função taxa:** $I(x) = \frac{x^2}{2\sigma^2}$. Com os parâmetros escolhidos, o valor da constante de variância é:

$$\sigma^2 = \frac{q(1-p)}{(1-\alpha)^2} = \frac{0.1 \times (1-0.3)}{(1-0.2)^2} = \frac{0.07}{0.64} \approx 0.1094.$$

- **Velocidade:** $v_n = \frac{b_n^2}{A_n^2} = \frac{n}{A_n^2} \sim n^{1-0.6} = n^{0.4}$.

Assim, para $\alpha = 0.2$, a probabilidade de desvios moderados decai na escala exponencial de $n^{0.4}$, confirmando que as flutuação do processo S_n são corrigidas pela memória através da normalização a_n .

Assim, para $\alpha = 0.2$, reunindo estes parâmetros, o princípio dos desvios moderados toma a seguinte forma, para um conjunto de continuidade $A \subset \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{0.4}} \log \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{a_n \sqrt{n}} \in A \right) = - \inf_{x \in A} \frac{x^2}{2\sigma^2},$$

onde $\sigma^2 \approx 0.1094$. Esta expressão evidencia que a probabilidade de desvios moderados decai na escala exponencial de $n^{0.4}$, confirmando que as flutuações do processo S_n são corrigidas pela memória através da normalização a_n .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta tese, investigamos o passeio aleatório minimal (PAM), demonstrando que sua dinâmica de movimento, embora simples em regras locais, origina comportamentos assintóticos de alta complexidade regidos pela memória de longo alcance. A análise desenvolvida permitiu não apenas descrever os regimes de difusão, mas também quantificar de forma inédita as flutuações do modelo, o qual formalizamos por três teoremas de limite funcional.

A eficiência da nossa abordagem via martingais e a conexão estabelecida com a teoria de urnas de Pólya provaram ser fundamentais para lidar com a natureza não analítica da variância em regimes de memória persistente. Verificamos uma discrepância na literatura que ocorreu devido a abordagens clássicas de truncamento, validando a eficácia do nosso método.

A principal contribuição original deste trabalho foi o estabelecimento de um princípio de desvios moderados (PDM) para o regime difusivo ($\alpha < 1/2$). Este resultado inédito preenche uma lacuna importante na teoria do modelo, fornecendo a função taxa gaussiana e a velocidade de decaimento exponencial das probabilidades para desvios de escala intermediária. A abordagem via martingais mostrou-se uma ferramenta poderosa para contornar as dependências temporais intrínsecas ao modelo.

A caracterização estatística completa do PAM abre caminhos para novas investigações de relevância matemática. Uma extensão direta e de grande interesse é a análise do **princípio de desvios moderados no ponto crítico** ($\alpha = 1/2$). Dado que este regime é marcado por correções logarítmicas e uma convergência de momentos notadamente lenta, a prova de um PDM para este caso exigirá técnicas de martingais ainda mais refinadas.

Além disso, a investigação de **variantes do modelo PAM em dimensões superiores** ou com diferentes núcleos de memória poderia revelar novas classes de universalidade e regimes de difusão ainda não explorados. Embora a formulação de um princípio de grandes desvios (PGD) seja o passo teórico subsequente natural na hierarquia das flutuações, a complexidade imposta pela memória de longo alcance sugere que este problema permanece como um desafio aberto de

longo prazo para a teoria de processos estocásticos correlacionados.

REFERÊNCIAS

- AGUECH, R. Limit theorems for random triangular urn schemes. **Journal of Applied Probability**, v. 46, 2009. Citado nas páginas 57 e 88.
- BAUR, E.; BERTOIN, J. Elephant random walks and their connection to Pólya-type urns. **Physical Review**, v. 94, 2016. Citado nas páginas 24 e 41.
- BILLINGSLEY, P. **Convergence of probability measures**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado nas páginas 35, 45, 46 e 89.
- COLETTI, C. F.; GAVA, R. J.; LIMA, L. R. de. Limit theorems for a minimal random walk. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 8, 2019. Citado nas páginas 28, 32, 37 e 43.
- DEMBO, A.; ZEITOUNI, O. **Large deviations techniques and applications**. Corrected printing of the second edition. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. v. 38. (Stochastic Modelling and Applied Probability, v. 38). Citado nas páginas 63 e 89.
- DJELLOUT, H. Moderate deviations for martingale differences and applications to ϕ -mixing sequences. **Stochastics and Stochastic Reports**, v. 73, p. 37–63, 2002. Citado nas páginas 64, 68 e 89.
- FULKS, W. **Advanced calculus, an introduction to analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1961. Citado na página 31.
- HARBOLA, U.; KUMAR, N.; LINDENBERG, K. Memory-induced anomalous dynamics in a minimal random walk model. **Physical Review**, v. 90, 2014. Citado nas páginas 26, 34, 35, 36 e 37.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. New York: Cambridge University Press, 1994. Citado nas páginas 83 e 84.
- JANSON, S. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. **Stochastic Processes and their Applications**, v. 110, p. 177–245, 2004. Citado nas páginas 43, 44, 45, 46, 57, 84, 85, 86, 87 e 88.
- KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. **Brownian motion and stochastic calculus**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, Inc., 1991. Citado nas páginas 18 e 46.
- MAHMOUD, H. M. **Pólya urn models**. [S.l.]: CRC Press, 2009. Citado na página 41.
- MIAO, Y.; MA, H.; YANG, Q. Asymptotic behaviors for correlated Bernoulli model. **Probability in the Engineering and Informational Sciences**, Cambridge University Press, v. 33, n. 4, p. 515–527, 2019. Citado nas páginas 71 e 75.
- MIYASAKI, T.; TAKEI, M. Limit theorems for the 'laziest' minimal random walk model of elephant type. **Journal of Statistical Physics**, v. 181, 2020. Citado nas páginas 55, 56, 57 e 59.

SAMORADNITSKY, G.; TAQQU, M. S. **Stable non-gaussian random process**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1994. Citado na página [46](#).

SCHÜTZ, G. M.; TRIMPER, S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. **Physical Review**, v. 70, 2004. Citado na página [22](#).

STOUT, W. F. **Almost Sure Convergence**. New York: Academic Press, 1974. Citado na página [89](#).

TOUCHETTE, H. A basic introduction to large deviations: Theory, applications, simulations. In: LEIDL, R.; HARTMANN, A. K. (Ed.). **Modern computational science 11: lecture notes from the 3rd international oldenburg summer school**. [S.l.]: BIS-Verlag der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2011. Também disponível como arXiv:1106.4146. Citado na página [63](#).

RESULTADOS COMPLEMENTARES E DEMONSTRAÇÕES TÉCNICAS

Neste apêndice, apresentamos definições clássicas, lemas de suporte e detalhamentos algébricos que complementam a análise apresentada nos capítulos principais. O objetivo é fornecer as ferramentas de teoria de matrizes, processos estocásticos e análise matemática necessárias para fundamentar as provas desta tese, mantendo a fluidez do texto principal.

A.1 Processos de urna e teoria espectral

A conexão formal entre o passeio aleatório minimal e os processos de urna de Pólya generalizados, explorada no [Capítulo 3](#), depende fundamentalmente das propriedades espectrais da matriz de substituição associada ao modelo. Nesta seção, revisamos os teoremas clássicos de matrizes não-negativas e as formulações assintóticas para urnas.

A.1.1 Elementos de teorias de matrizes

A possibilidade de um processo de urna não se extinguir e convergir para limites bem definidos está intimamente ligada à irredutibilidade de sua matriz de substituição. Os resultados a seguir, baseados na teoria de Perron-Frobenius, garantem a existência e o comportamento do autovalor dominante.

Definição A.1 (Matriz irredutível). Uma matriz A é redutível se existir uma matriz de permutação P tal que $P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, em que B e D são matrizes quadradas. Caso contrário, a matriz é dita **irredutível**.

Teorema A.1 (([HORN; JOHNSON, 1994](#)), Teorema 6.2.23). Seja A uma matriz não-negativa de ordem n e $\mathbb{I}$ a matriz identidade. São equivalentes:

- (i) A é irredutível.
- (ii) $(\mathbb{I} + A)^{n-1} > 0$ (todas as entradas são estritamente positivas).
- (iii) $(\mathbb{I} + M(A))^{n-1} > 0$, onde $M(A)$ é a matriz indicadora de A .

Teorema A.2 (Perron-Frobenius). (HORN; JOHNSON, 1994) Se A é uma matriz quadrada, não-negativa e irredutível, então:

- (i) O raio espectral de A , definido por $\rho(A) = \lambda_1$, é um autovalor real, estritamente positivo ($\lambda_1 > 0$) e **simples** (sua multiplicidade algébrica e geométrica é igual a 1). Este λ_1 é denominado o **autovalor dominante** de A , de modo que para qualquer outro autovalor λ_i de A , vale a desigualdade $|\lambda_i| \leq \lambda_1$.
- (ii) Associados ao autovalor dominante λ_1 , existem autovetores à esquerda u_1 e à direita v_1 cujas componentes são todas estritamente positivas.

A.1.2 Urnas de Pólya generalizadas

Com as propriedades espectrais estabelecidas, podemos introduzir a formalização do processo de urna de Pólya–Eggenberger desenvolvida por Janson (2004). O autor utiliza o espectro da matriz de substituição para demonstrar diversos teoremas de limite funcional e pontual. Nesta subseção, adotamos a notação do referido artigo, adaptando os resultados gerais que dão suporte aos teoremas limites do nosso modelo.

Consideremos uma urna com bolas de k cores distintas, $k > 1$. Então a composição da urna no tempo n é dada por $X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nk})'$ tal que $X_{ni} \geq 0$ é o número de bolas na urna da cor i no tempo n . Sua composição inicial é dada por um vetor X_0 .

Para cada tipo i , atribui-se um peso (atividade) $a_i \geq 0$ e um vetor aleatório de coordenadas inteiras $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})'$ que descreve a mudança da composição da urna quando uma bola do tipo i é retirada, chamado de **vetor de substituição**.

Vamos impor que $\xi_{ij} \geq 0$ (isso significa que podemos adicionar, mas nunca remover bolas de uma cor diferente da sorteada), $i \neq j$ e $\xi_{ii} \geq -1$ (significa que quando uma bola de cor i é sorteada ela pode ser retirada com ou sem adição de bolas de outras cores).

Definição A.2.

$$A := (a_j \mathbb{E} [\xi_{ji}])_{i,j=1,\dots,k}.$$

A matriz A é a **matriz de substituição** do processo. O vetor $a = (a_1, \dots, a_k)$ é o vetor de atividades e generaliza a regra de amostragem da urna. Quando $a_j = 1$, cada bola é sorteada aleatoriamente e uniformemente. Nesse caso, a j -ésima coluna da matriz de substituição é a mudança esperada quando uma bola do tipo j é sorteada.

Alguns autores definem a matriz de substituição como sendo a transposta da matriz A dada na Definição A.2. No entanto, adotaremos aqui a notação utilizada em Janson (2004) onde uma matriz é considerada um operador agindo em vetores coluna à direita. Na notação padrão para cadeias de Markov, a matriz de transição atua em vetores linha à esquerda.

Vamos considerar que A é irredutível e não negativa. De acordo com o Teorema A.2, ela tem um maior autovalor real λ_1 , chamado de **autovalor dominante**. Logo podemos ordenar os autovalores de A de modo que as partes reais sejam não crescentes: $\lambda_1 > \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \operatorname{Re}(\lambda_3) \geq \dots$.

Escrevemos $i \succ j$ se for possível retirar uma bola de cor j da urna iniciando com uma única bola de cor i . A relação $\succ$ é transitiva e reflexiva, portanto particiona o conjunto de todas as cores em classes de equivalência $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_v$ tal que i e j pertencem à mesma classe se e somente se $i \succ j$ e $j \succ i$. Dizemos que a cor i é dominante se $i \succ j$ para toda cor j . Analogamente a classe $\mathcal{C}_k$ é dominante se todo $i \in \mathcal{C}_k$ é dominante.

Segundo Janson (2004), um processo de urnas será **essencialmente extinto** se em algum momento não houver nenhuma bola cuja cor é dominante. Em um processo irredutível, isto é cuja matriz de substituição é uma matriz irredutível (Definição A.1), extinção essencial é o mesmo que extinção.

Se ordenarmos as classes adequadamente e considerarmos as cores nesta ordem, A se tornará uma matriz em blocos triangulares. Por isso, o conjunto de autovalores de A (com multiplicidades) é a união dos conjuntos de autovalores das restrições de A às classes $\mathcal{C}_k$. Dizemos que um autovalor pertence a uma classe se for um autovalor da restrição de A a esta classe.

Vamos considerar as seguintes condições básicas:

- (A1) $\xi_{ij} \geq 0$ q.c. para todo $i \neq j$ e $\xi_{ii} \geq -1$.
- (A2) $\mathbb{E} [\xi_{ij}^2] < \infty$ para todo i, j .
- (A3) O maior autovalor real λ_1 de A é positivo.
- (A4) O maior autovalor real λ_1 de A é simples.
- (A5) Existe um tipo dominante j com $X_{0j} > 0$, isto é, começamos com pelo menos uma bola cujo tipo é dominante.
- (A6) λ_1 pertence à classe dominante.

Lema A.1. (JANSON, 2004, Lema 2.1) Se A for irredutível, as Condições (A1) e (A2) estiverem satisfeitas, $\sum_j \mathbb{E} [\xi_{ij}] \geq 0$ para todo i e $\sum_j \mathbb{E} [\xi_{ij}] > 0$ para algum i então as Condições (A1)-(A6) são válidas e a extinção (essencial) do processo de urnas é impossível.

Vamos denotar por u_i e v_i os autovetores à esquerda e à direita, respectivamente, associados ao autovalor dominante λ_1 da matriz A . Por convenção, ambos são definidos como vetores

coluna. Eles satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} Av_i &= \lambda_i v_i \quad (\text{autovetor à direita}) \\ u_i' A &= \lambda_i u_i' \quad (\text{autovetor à esquerda}) \end{aligned}$$

onde u_i' denota o vetor linha transposição de u_i .

De acordo com a condição (A4), u_1 e v_1 são únicos (considerando que seus múltiplos escalares são os mesmos) e, pelo Teorema A.2, eles podem ser escolhidos de modo que todas suas componentes sejam positivas. Esses autovetores são únicos se impusermos a seguinte condição de normalização:

$$u_1' v_1 = 1. \quad (\text{A.1})$$

Para a aplicação ao nosso modelos assumiremos que a matriz A é diagonalizável. Esta é uma simplificação de uma estrutura geral ((JANSON, 2004)), onde a decomposição de Jordan pode incluir termos nilpotentes N_λ . No nosso caso $N_\lambda = 0$. Podemos decompor o espaço $\mathbb{R}^k$ como a soma direta $\bigoplus E_\lambda$ de autoespaços generalizados E_λ em que $\lambda \in \Lambda$, sendo Λ o conjunto de autovalores de A . Em outras palavras, existem projeções P_λ que comutam com A e satisfazem:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = 1. \quad (\text{A.2})$$

$$AP_\lambda = P_\lambda A = \lambda \cdot P_\lambda \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = 0, \text{ se } i \neq j. \quad (\text{A.4})$$

Temos ainda que, se λ_i for um autovalor simples, P_{λ_i} é a projeção unidimensional dada por:

$$P_{\lambda_i} = v_i u_i'. \quad (\text{A.5})$$

De acordo com Janson (2004), o comportamento assintótico do processo de urnas depende da existência de um autovalor com parte real $> \lambda_1/2$. Vamos definir $\Lambda_1 := \{\lambda \in \Lambda : \text{Re}(\lambda) < \lambda_1/2\}$, $\Lambda_2 := \{\lambda \in \Lambda : \text{Re}(\lambda) = \lambda_1/2\}$ e $\Lambda_3 := \{\lambda \in \Lambda : \text{Re}(\lambda) > \lambda_1/2\}$. Vamos ainda definir a soma dos autoespaços generalizados com $\text{Re}(\lambda) < \lambda_1/2$:

$$P_I := \sum_{\lambda \in \Lambda_1} P_\lambda.$$

Vamos definir as seguintes matrizes:

$$B_i := \mathbb{E} \begin{bmatrix} \xi_i & \xi_i' \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

$$B := \sum_{i=1}^k v_{1i} a_i B_i \quad (\text{A.7})$$

$$\Sigma_I = \int_0^\infty P_I e^{sA} B e^{sA'} P_I' e^{-\lambda_1 s} ds. \quad (\text{A.8})$$

$$\Sigma_{II} = \sum_{\lambda \in \Lambda_{II}} P_\lambda B P_\lambda'. \quad (\text{A.9})$$

O resultado a seguir é um teorema adaptado de [Janson \(2004\)](#), que dá o limite funcional para o processo de urnas.

Teorema A.3. ([JANSON, 2004](#), Caso particular do Teorema 3.31) Suponha que as condições (A1)-(A6) são válidas e que A seja diagonalizável. Sob a condição de não extinção essencial, temos as seguintes convergências em distribuição em $D[0, \infty)$ quando $n \rightarrow \infty$.

(i) Se $\text{Re}(\lambda_2) < \lambda_1/2$, então:

$$n^{-1/2}(X_{[nt]} - [nt]\lambda_1 v_1) \xrightarrow{d} V(t)$$

onde $V(t)$ é um processo Gaussiano tal que $V(0) = 0$ e $\mathbb{E}[V(t)] = 0$, cuja matriz de covariância é dada pela fórmula para processos de urna ([JANSON, 2004](#), Equação 3.26).

(ii) Se $\lambda_2 = \lambda_1/2$ (e este autovalor é simples), então:

$$(n \ln n)^{-1/2}(X_{[nt]} - [nt]\lambda_1 v_1) \xrightarrow{d} V(t)$$

onde $V(t)$ é um processo Gaussiano tal que $V(0) = 0$ e $\mathbb{E}[V(t)] = 0$, cuja matriz de covariância é dada pela fórmula correspondente ([JANSON, 2004](#), Equação 3.27).

Observação A.1. Sob as condições gerais do Teorema A.3, as fórmulas gerais de covariância de Janson podem ser simplificadas em casos especiais relevantes para o nosso trabalho:

(i) Se a condição $a\mathbb{E}[\xi_i] = m$ for satisfeita (isso significa que, no processo de urnas, exatamente m bolas são adicionadas por vez), então acordo com o Lema 5.4 e a Observação 5.7 de [Janson \(2004\)](#), se $\text{Re}(\lambda_2) < \lambda_1/2$, para $0 < s \leq t$:

$$\mathbb{E}[V(s)V'(t)] = ms\Sigma_I(t/s)^{m-1}A. \quad (\text{A.10})$$

(ii) O fato de a matriz ser diagonalizável implica que $d = d_{\lambda_2} = 0$, além disso $\tilde{c}(d, s, t) = t$ ([JANSON, 2004](#), Equação 3.27). Logo, se $\lambda_2 = \lambda_1/2$, para $0 < s \leq t$:

$$\mathbb{E}[V(s)V'(t)] = s(I - 2v_1 a' P_{\lambda_2})\Sigma_{II}(I - 2P_{\lambda_2}' a v_1'), \quad (\text{A.11})$$

O resultado a seguir dá o limite funcional para o processo de urnas.

Teorema A.4. (JANSON, 2004, Caso particular do Teorema 3.24) Suponha que as condições (A1)-(A6) são válidas, $\lambda_2 > 1/2\lambda_1$ e que ambos autovalores sejam reais. Condicionada à não extinção, a família de variáveis aleatórias

$$Y(n) := n^{-\lambda_2/\lambda_1} (X_n - n\lambda_1 v_1), n \geq 2$$

converge em distribuição para $\hat{W} \in E_{\lambda_2}$ onde $\hat{W} = (\hat{W}_1, \hat{W}_2)$ é uma família de vetores aleatórios que pertencem ao autoespaço E_{λ_2} que para o modelo de urna de duas cores de interesse assume a forma $E_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^2; v = \lambda \frac{1}{1-\alpha}(1, -1)'; \lambda \neq 0\}$.

A.1.3 Modelos de urna triangulares

Quando a matriz de substituição de uma urna perde a característica de irredutibilidade, como ocorre no caso limite em que $q = 0$ (analisado no Capítulo 4), a matriz torna-se triangular e a teoria de Janson deixa de ser aplicável diretamente. Para este cenário de memória absorvente, o comportamento assintótico é caracterizado pelo teorema a seguir, que lida especificamente com distribuições limites não gaussianas.

Teorema A.5 ((AGUECH, 2009) Teorema 2). Considere uma urna de Pólya generalizada com duas cores cuja matriz de transição é da forma

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

em que X, Y e Z são variáveis aleatórias inteiras, independentes e não negativas que satisfazem

- (i) $\sigma[X] + \sigma[Y] + \sigma[Z] < \infty$
- (ii) $\mu[X] \geq \mu[Z]$
- (iii) $\mu[X](\mu[Y] + \mu[Z]) > 0$
- (iv) A composição inicial da urna é (W_0, B_0) , com $B_0 > 0$, onde W_0 conta o número de bolas brancas e B_0 o número de bolas pretas no momento inicial.

Sejam $\rho = \frac{\mu[Z]}{\mu[X]}$ e $K = \mu[X]^\rho B \left(W + \frac{\mu[Y]}{\mu[X] - \mu[Z]} B \right)^{-\rho}$, onde B e W são variáveis aleatórias positivas.

Para $\mu[X] > \mu[Z] > 0$ e $\mu[Y] > 0$ temos quase certamente:

$$W_n = \mu[X]n + o(n), \quad B_n = Kn^\rho + o(n^\rho).$$

A.2 Ferramentas analíticas e probabilísticas

Esta seção apresenta resultados fundamentais de convergência, desigualdades de concentração e princípios de desvios que fornecem o suporte técnico para as provas de teoremas limite e o princípio de desvios moderados desenvolvidos nesta tese.

A.2.1 Convergência, limites e funções especiais

Os teoremas clássicos a seguir permitem o transporte de propriedades de convergência sob transformações contínuas e o cálculo rigoroso do comportamento assintótico de médias ponderadas. Apresentamos também a formalização da função de Mittag-Leffler, que surge naturalmente em processos estocásticos com limites não determinísticos.

Teorema A.6 (Teorema da aplicação contínua). (BILLINGSLEY, 1999) Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos e $X_n \xrightarrow{d} X$. Se $g : M \rightarrow M'$ for uma função tal que o conjunto de seus pontos de descontinuidade D_g satisfaz $\mathbb{P}(X \in D_g) = 0$, então: $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Teorema A.7 (Lema de Toeplitz). (STOUT, 1974, p. 120) Seja $\{a_{ni}\}$ uma matriz de números reais e $\{x_i\}$ uma sequência tal que $x_i \rightarrow x$. Se: (i) $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}| \leq M$; (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \rightarrow 1$; e (iii) $a_{ni} \rightarrow 0$ para cada i fixo quando $n \rightarrow \infty$; então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i = x$.

Corolário A.1 (Médias ponderadas). Se $w_i > 0$ e $W_n = \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \infty$, então $x_n \rightarrow x \implies \frac{1}{W_n} \sum_{i=1}^n w_i x_i \rightarrow x$.

Definição A.3 (Função e distribuição de Mittag-Leffler). A função de Mittag-Leffler $E_{\alpha}(z)$ é definida por $E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$. Dizemos que K tem **distribuição de Mittag-Leffler** com parâmetro p , $K \sim ML(p)$, se seus momentos são $\mathbb{E}[K^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(np+1)}$.

A.2.2 Desigualdades de concentração e o PDM

Para a prova do princípio de desvios moderados (PDM) apresentada no [Capítulo 5](#), é necessário controlar rigorosamente as flutuações das diferenças de martingal e garantir a preservação topológica da função taxa sob avaliações pontuais. Os resultados a seguir fornecem as cotas exponenciais e a estrutura de contração exigidas para a análise.

Teorema A.8 (Desigualdade de Azuma-Hoeffding). Seja $(M_n, \mathcal{F}_n)$ um martingal tal que $|M_n - M_{n-1}| \leq K_n$ quase certamente. Então, para qualquer $x > 0$:

$$\mathbb{P}(|M_n - M_0| \geq x) \leq 2 \exp \left(\frac{-x^2}{2 \sum_{i=1}^n K_i^2} \right).$$

Teorema A.9 (Princípio da contração). (DEMBO; ZEITOUNI, 2010, Teorema 4.2.1) Sejam X e Y espaços topológicos de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se uma família de variáveis aleatórias satisfaz um princípio de desvios moderados (ou grandes desvios) em X com boa função taxa $I : X \rightarrow [0, \infty]$, então a imagem dessa família sob f satisfaz o princípio em Y com boa função taxa $J : Y \rightarrow [0, \infty]$ dada por:

$$J(y) = \inf \{I(x) : x \in X, f(x) = y\}.$$

Finalmente, apresentamos o resultado adaptado de Djellout (2002), que generaliza o PDM clássico para processos dependentes estruturados como diferenças de martingais, constituindo a principal ferramenta da demonstração do [Teorema 5.1](#).

Teorema A.10 (Princípio dos desvios moderados para diferenças de martingal). Seja A_n Seja (b_n) uma sequência que satisfaz as condições para desvios moderados como na [Equação 5.1](#), tal que a função de escala $c(n) := A_n^2/b_n$ seja não decrescente. Defina a função inversa $c^{-1}(t)$ por

$$c^{-1}(t) := \inf\{n \in \mathbb{N} : c(n) \geq t\}.$$

Sob as seguintes condições:

(H1) Existe uma constante $\sigma^2 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left[\left| \frac{\langle M \rangle_n}{A_n^2} - \sigma^2 \right| > \delta \right] = -\infty;$$

(H2)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \left(A_n^2 \sup_{1 \leq j \leq c^{-1}(b_{n+1})} \mathbb{P} [|D_j| > b_n | \mathcal{F}_{j-1}] \right) = -\infty;$$

(H3) Para todo $a > 0$ e $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P} \left[\frac{1}{A_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[|D_j|^2 \mathbb{I}_{\{|D_j| \geq a(A_n^2/b_n)\}} | \mathcal{F}_{j-1} \right] \geq \delta \right] = -\infty.$$

Então o processo $Z_n(t) := M_{\lfloor nt \rfloor} / b_n$ satisfaz o princípio dos desvios moderados (PDM) no espaço $D([0, 1], \mathbb{R})$, com velocidade b_n^2/A_n^2 e a boa função taxa $I : D([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ dada por:

$$I(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (\phi'(t))^2 dt, & \text{se } \phi \in \mathcal{AC}_0 \\ \infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

onde $\mathcal{AC}_0$ é o espaço das funções absolutamente contínuas $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi(0) = 0$.

Mais precisamente, para qualquer subconjunto de Borel $C \subset D([0, 1], \mathbb{R})$, temos que:

$$-\inf_{\phi \in C^o} I(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P}(Z_n(\cdot) \in C) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^2}{b_n^2} \log \mathbb{P}(Z_n(\cdot) \in C) \leq -\inf_{\phi \in \bar{C}} I(\phi).$$

A.3 Expressão analítica do coeficiente $C(\alpha, q, s)$

No [Capítulo 2](#), a análise do segundo momento do passeio aleatório minimal gerou uma constante $C(\alpha, q, s)$ que depende das condições iniciais e dos parâmetros de memória do modelo.

Devido à sua extensão algébrica, apresentamos sua forma completa a seguir:

$$\begin{aligned}
 C(\alpha, q, s) = & \frac{1}{(\alpha - 1)^3(2\alpha - 1)^2} \left[\frac{4^\alpha \alpha^2 (s\alpha^2 + \alpha q - 3q) \Gamma(\alpha + 1/2) \Gamma(1 + \alpha)}{\sqrt{\pi}(\alpha - 1)(2\alpha - 1) \Gamma(2\alpha - 2) \Gamma(1 + 2\alpha)} \right. \\
 & + s\alpha(7 - 19\alpha + 25\alpha^2 - 16\alpha^3) + 2q^2(8\alpha^3 - 16\alpha^2 + 5\alpha - 1) \\
 & + q\alpha(13\alpha - 6) + 2qs(1 - 6\alpha + 26\alpha^2 - 24\alpha^3 + 8\alpha^4) \\
 & + \frac{1}{\Gamma(1 + 2\alpha)} (q^2(8\alpha - 2 + 6\alpha^2 - 4\alpha^3) + q(5\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^3 + 2) \\
 & \left. + 2qs(1 - 6\alpha) + s(4\alpha^5 - 16\alpha^4 + 25\alpha^3 - 19\alpha^2 + 7\alpha - 2)) \right]. \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

A.4 Prova da identidade do primeiro momento

Este apêndice tem como objetivo demonstrar a identidade exata para o primeiro momento, $\mathbb{E}[S_n]$, utilizada na prova da [Proposição 1](#). Embora a solução da recorrência para $\mathbb{E}[S_n]$ tenha sido encontrada na forma de um somatório, ela pode ser reescrita de uma maneira que separa seu comportamento linear de longo prazo de um termo transiente, que depende das condições iniciais. Esta forma alternativa é útil para a interpretação do mecanismo de memória do processo.

Proposição. *O valor esperado da posição do caminhante no instante n , $\mathbb{E}[S_n]$, pode ser escrito de forma exata como:*

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{qn}{1 - \alpha} + \left(s - \frac{q}{1 - \alpha} \right) a_n.$$

Demonstração. A prova consiste em mostrar que esta expressão satisfaz a mesma relação de recorrência que a solução original e a mesma condição inicial. Pela unicidade da solução de uma recorrência linear de primeira ordem, isso garante que as duas formas são idênticas.

Lembremos que a recorrência para o primeiro momento, dada pela Equação (2.5), é:

$$\mathbb{E}[S_n] = \left(1 + \frac{\alpha}{n - 1} \right) \mathbb{E}[S_{n-1}] + q.$$

Definimos uma sequência auxiliar, C_n , que representa o desvio da solução exata em relação ao seu comportamento linear dominante:

$$C_n := \mathbb{E}[S_n] - \frac{qn}{1 - \alpha}.$$

Isolando $\mathbb{E}[S_n]$, temos $\mathbb{E}[S_n] = C_n + \frac{qn}{1 - \alpha}$. Vamos substituir esta expressão na recorrência original, tanto para o índice n quanto para $n - 1$:

$$C_n + \frac{qn}{1 - \alpha} = \left(1 + \frac{\alpha}{n - 1} \right) \left(C_{n-1} + \frac{q(n-1)}{1 - \alpha} \right) + q.$$

Agora, expandimos o lado direito da equação:

$$\begin{aligned}
 C_n + \frac{qn}{1-\alpha} &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) \frac{q(n-1)}{1-\alpha} + q \\
 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \frac{q(n-1)}{1-\alpha} + \frac{\alpha q(n-1)}{(n-1)(1-\alpha)} + q \\
 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \frac{qn-q}{1-\alpha} + \frac{\alpha q}{1-\alpha} + q.
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos que não dependem de C_{n-1} :

$$\begin{aligned}
 C_n + \frac{qn}{1-\alpha} &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \frac{qn-q+\alpha q}{1-\alpha} + q \\
 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \frac{qn-q(1-\alpha)}{1-\alpha} + q \\
 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \left(\frac{qn}{1-\alpha} - q\right) + q \\
 &= \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1} + \frac{qn}{1-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Cancelando o termo $\frac{qn}{1-\alpha}$ de ambos os lados, obtemos a relação de recorrência para C_n :

$$C_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) C_{n-1}.$$

Isso mostra que C_n satisfaz exatamente a recorrência homogênea associada ao problema. A solução para esta recorrência é da forma $C_n = C_1 \cdot a_n$, onde (a_n) é a sequência de normalização fundamental definida em (2.6).

Para encontrar a constante C_1 , usamos a condição inicial em $n = 1$:

$$C_1 = \mathbb{E}[S_1] - \frac{q(1)}{1-\alpha}.$$

Como $\mathbb{E}[S_1] = s$, temos:

$$C_1 = s - \frac{q}{1-\alpha}.$$

Juntando os resultados, a expressão exata para C_n é:

$$C_n = \left(s - \frac{q}{1-\alpha}\right) a_n.$$

Finalmente, substituindo C_n de volta em sua definição, obtemos a identidade desejada:

$$\mathbb{E}[S_n] = C_n + \frac{qn}{1-\alpha} = \frac{qn}{1-\alpha} + \left(s - \frac{q}{1-\alpha}\right) a_n,$$

o que completa a demonstração. □

