



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS



JOSÉ CLAUDEMIR SCHMITT

**ENSINO DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS COM
EXPERIMENTO PRÁTICO E APLICAÇÃO DA
TRANSFORMADA DE FOURIER NA
MODELAGEM DOS DADOS NO ENSINO
MÉDIO-TÉCNICO**

SOROCABA, SP
JUNHO DE 2026

José Claudemir Schmitt

**ENSINO DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS COM
EXPERIMENTO PRÁTICO E APLICAÇÃO DA
TRANSFORMADA DE FOURIER NA MODELAGEM DOS
DADOS NO ENSINO MÉDIO-TÉCNICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos. Área de concentração: Matemática.

Orientação: Raphael O. Garcia

Sorocaba, SP

Junho de 2026

Schmitt, José Claudemir

Ensino das Funções Periódicas com Experimento Prático e Aplicação da Transformada de Fourier na Modelagem dos Dados no Ensino Médio-Técnico / José Claudemir Schmitt -- 2026.

77f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Raphael de Oliveira Garcia

Banca Examinadora: Sadao Massago, Pedro Autreto da Silva

Bibliografia

1. Modelagem Matemática Aplicada. 2. Série de Fourier e Transformada de Fourier. 3. Experimento de Baixo Custo e Prática Pedagógica. I. Schmitt, José Claudemir. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato José Claudemir Schmitt, realizada em 03/06/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia (orientador, UNIFESP)
Prof. Dr. Pedro Autreto da Silva (UFABC)
Prof. Dr. Sadao Massago (UFSCar)

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado não teria sido possível sem o apoio, o incentivo e a colaboração de diversas pessoas, as quais expresso minha sincera gratidão.

Primeiramente, agradeço ao meu orientador pela orientação cuidadosa, pelas valiosas contribuições acadêmicas e pela confiança depositada ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do programa de pós-graduação pelos ensinamentos, pelas discussões enriquecedoras e pela dedicação à formação acadêmica.

Aos colegas e amigos, que compartilharam momentos de aprendizado, desafios e conquistas durante essa trajetória.

À minha família pelo apoio incondicional, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo incentivo constante para que eu pudesse seguir em frente.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

Resumo

Na busca por meios alternativos para o ensino de matemática a modelagem se perpetua sendo uma das ações mais eficazes, com o propósito de modelar situações reais do dia a dia, obtendo equações que permitem simular determinados fenômenos. Atribuindo a esta ideologia, este trabalho apresenta a utilização das funções trigonométricas, mais especificamente a transformada de Fourier, por meio de um experimento, para a obtenção de sinais característicos de amplitude de vibração, em sistemas dinâmicos. Sendo este um experimento de baixo custo, aplicável no Ensino Médio-técnico, por meio de uma prática pedagógica. Na busca por trabalhos voltados para o ensino de funções periódicas do tipo seno e cosseno, realizou-se uma revisão sistemática identificando a ausência de publicações de trabalhos que se relacionam diretamente às funções periódicas com a transformada de Fourier no Ensino Médio-técnico. No entanto, na revisão sistemática, um grande número de publicações de trabalhos utilizando a série e transformada de Fourier em diversas aplicações nos ramos das ciências e engenharias na resolução de problemas característicos de sinais. O método empregado neste trabalho baseou-se em um experimento, que se utiliza de equipamentos para a geração dos sinais característicos de vibração. Inicialmente com o uso de uma planilha eletrônica para trabalhar com funções periódicas conhecidas, evoluindo gradativamente para o experimento com a aplicações mais específica em sinais de vibração. O estudo contribui com a prática pedagógica que permite ensinar ao aluno, funções periódicas do tipo seno e cosseno, inicialmente aplicando os conceitos básicos das funções, podendo ser comparado a situações reais com o uso da planilha eletrônica. A prática pedagógica proposta visa contribuir para o ensino das funções do tipo seno e cosseno com a aplicação do experimento prático, permitindo que aluno possa identificar o uso da Matemática em aplicações específicas ou reais.

Palavras-chave: Modelagem matemática, transformada de Fourier, matemática aplicada, ensino médio-técnico, experimento.

Abstract

In the search for alternative means for teaching mathematics, modeling persists as one of the most effective actions, with the purpose of modeling real-life situations, obtaining equations that allow simulating certain phenomena. Attributing this ideology to this ideology, this work presents the use of trigonometric functions, more specifically the Fourier transform, through an experiment, to obtain characteristic signals of vibration amplitude in dynamic systems. This is a low-cost experiment, applicable in high school/technical education, through a pedagogical practice. In the search for works focused on teaching periodic functions of the type sine and cosine, a systematic review was carried out, identifying the absence of publications of works that are directly related to periodic functions with the Fourier transform in high school/technical education. However, in the systematic review, a large number of publications of works using the Fourier series and transform in various applications in the branches of science and engineering in solving characteristic problems of signals. The method employed in this work was based on an experiment that uses equipment to generate characteristic vibration signals. Initially, a spreadsheet was used to work with known periodic functions, gradually evolving to the experiment with more specific applications in vibration signals. The study contributes to the pedagogical practice that allows the student to learn periodic functions of the sine and cosine type, initially applying the basic concepts of the functions, which can be compared to real situations with the use of the spreadsheet. The proposed pedagogical practice aims to contribute to the teaching of sine and cosine functions with the application of the practical experiment, allowing the student to identify the use of mathematics in specific or real applications.

Keywords: Mathematical modeling, Fourier transform, applied mathematics, high school/technical education, experiment.

Lista de Figuras

FIGURA 1 — CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	18
FIGURA 2 — GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO	19
FIGURA 3 — GRÁFICO DA FUNÇÃO PERIÓDICA $f(x) = x - [x]$. .	32
FIGURA 4 — APROXIMAÇÃO DE FOURIER DA FUNÇÃO $f(x) = x - [x]$ COM 1 TERMO	34
FIGURA 5 — APROXIMAÇÃO DE FOURIER DA FUNÇÃO $f(x) = x - [x]$ COM 2 TERMOS	34
FIGURA 6 — APROXIMAÇÃO DE FOURIER DA FUNÇÃO $f(x) = x - [x]$ COM 6 TERMOS	34
FIGURA 7 — GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x)$ DEFINIDA POR PARTES	35
FIGURA 8 — GRÁFICO DA FUNÇÃO $\text{sinc}(x)$	36
FIGURA 9 — SINAL DE FREQUÊNCIA: ALTA, INTERMEDIÁRIA E BAIXA	37
FIGURA 10 —COMPOSIÇÃO DE UM SINAL COM TRÊS FREQUÊNCIAS DISTINTAS	37
FIGURA 11 —SINAL NO DOMÍNIO DO TEMPO	38
FIGURA 12 —SINAL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	38
FIGURA 13 —PLANILHA ELETRÔNICA	52
FIGURA 14 —AMPLITUDE E FUNÇÃO SENO $f(x) = 12 \text{sen}(1x)$. . .	53
FIGURA 15 —AMPLITUDE E FUNÇÃO SENO $f(x) = 12 \text{sen}(6x)$. . .	53
FIGURA 16 —AMPLITUDE E SOMA DE FUNÇÕES SENO	54
FIGURA 17 —FLUXO DO EXPERIMENTO	55
FIGURA 18 —ARDUINO UNO E O SENSOR ACELERÔMETRO . .	56
FIGURA 19 —BOMBA DE AR DE AQUÁRIO E LIGAÇÃO DO SENSOR	56
FIGURA 20 —LIGAÇÃO: SENSOR, BOMBA DE AR E PLACA ARDUINO UNO	57
FIGURA 21 —COLETA DE DADOS BOMBA DE AQUÁRIO NO ARDUINO	58
FIGURA 22 —BOMBA DE AQUÁRIO PARADA	58
FIGURA 23 —COLETA DE DADOS PYTHON	59
FIGURA 24 —DADOS DO EIXO X - NÚMERO TOTAL DE AMOSTRAS	59
FIGURA 25 —DADOS DO EIXO Y - NÚMERO TOTAL DE AMOSTRAS	60

FIGURA 26 —DADOS DO EIXO Z - NÚMERO TOTAL DE AMOS- TRAS	60
FIGURA 27 —DADOS DO EIXO X - NÚMERO REDUZIDO DE AMOSTRAS	61
FIGURA 28 —CONFIGURAÇÃO DO PROGRAMA - NÚMERO REDUZIDO DE AMOSTRAS	61
FIGURA 29 —VELOCIDADE X FREQUÊNCIA	62
FIGURA 30 —AMPLITUDE X FREQUÊNCIA	64

Lista de Quadros

QUADRO 1 — INFORMAÇÕES GERAIS	42
QUADRO 2 — OBJETIVOS DA AULA	42
QUADRO 3 — CONTEÚDOS ABORDADOS NA AULA	43
QUADRO 4 — METODOLOGIA - CONSTRUÇÃO CONCEITUAL . .	43
QUADRO 5 — RECURSOS DIDÁTICOS	44
QUADRO 6 — AVALIAÇÃO	44
QUADRO 7 — EXTENSÃO	45
QUADRO 8 — REFERÊNCIAS	45
QUADRO 9 — PLANILHA ELETRÔNICA	48
QUADRO 10 —COLUNA B	49
QUADRO 11 —COLUNA C	49
QUADRO 12 —COLUNA D	50
QUADRO 13 —COLUNA E	50
QUADRO 14 —COLUNA F	51
QUADRO 15 —COLUNA G	51
QUADRO 16 —COLUNA H	51
QUADRO 17 —PLANO DE AULA X AULA EXPERIMENTAL	63

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	OBJETIVOS	13
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	REVISÃO SISTEMÁTICA	16
2.2	FUNÇÕES PERIÓDICAS: SENOS E COSSENOS	17
2.3	IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	19
2.4	FUNÇÕES PARES E ÍMPARES	20
2.5	SÉRIE DE FOURIER	21
2.6	TRANSFORMADA DE FOURIER	29
3	EXEMPLOS: SÉRIE DE FOURIER E TRANSFORMADA DE FOURIER	32
3.1	EXEMPLO DA SÉRIE DE FOURIER	32
3.2	EXEMPLO DA TRANSFORMADA DE FOURIER	35
3.3	EXEMPLO USANDO A TRANSFORMADA DE FOURIER NO COMPUTADOR	36
4	MÉTODOS E MATERIAIS	39
4.1	INTRODUÇÃO	39
4.2	METODOLOGIA	39
4.3	AULA EXPERIMENTAL: PLANO DE AULA	41
4.4	AULA EXPERIMENTAL: ATIVIDADE 1	48
4.5	AULA EXPERIMENTAL: ATIVIDADE 2	55
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	63
6	CONSIDERAÇÕES GERAIS	66
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
	APÊNDICE A — CÓDIGO FONTE ARDUINO	70
	APÊNDICE B — CÓDIGO PYTHON - AQUISIÇÃO	72
	APÊNDICE C — CÓDIGO PYTHON - ANÁLISE	74

Capítulo 1

Introdução

Uma das formas de associar, representar e até mesmo prever eventos ou fenômenos reais são os modelos matemáticos que estão presentes em nosso cotidiano, a modelagem matemática é um processo que consiste em construir modelos matemáticos para representar e estudar situações do mundo real (Araujo; Avelar, 2022).

Na constante busca por técnicas, aplicações e métodos diversificados que possam proporcionar aos alunos um maior aproveitamento dos ensinamentos do professor, assim entende-se que o método tradicional de ensino por conteúdo nem sempre é eficaz, visto que em sala de aula o professor em momento de ensino, busca exemplos de aplicações do conteúdo (Shulman, 1986).

O ensino não pode estar centrado apenas na transmissão de conhecimento de um conteúdo já pronto, deve potencializar o desenvolvimento de habilidades e estratégias, as quais o estudante possa recorrer em situações dentro e fora da sala de aula. Além disso, o ensino de Matemática deve proporcionar ao estudante refletir sobre assuntos que estão a sua volta, assim tornando-o um sujeito com habilidades críticas e analíticas para análise de dados, e, assim podendo tomar decisões baseadas em dados reais (Schrenk; Vertuan, 2022).

O presente trabalho apresenta uma revisão sistemática relacionada ao ensino de Matemática, em específico a funções periódicas do tipo seno e cosseno, nos anos do ensino Médio-técnico, com o uso das funções trigonométricas em aplicações reais, por meio de modelos matemáticos.

O Ensino Médio teve uma transformação que hoje tem uma base itinerária atrelada com um nível técnico de formação. Pode-se definir que o Ensino Médio-técnico é o “ensino médio articulado com Educação Profissional e Tecnológica de nível Médio”, que permite que estudantes concluam tanto o Ensino Médio regular com um título técnico de nível médio ao mesmo tempo, é uma realidade pertinente.

A escolha de estudo e da proposta da atividade experimental das funções trigonométricas no presente trabalho consiste da revisão sistemática, da série e transformada de Fourier, em observação da grande aplicação do modelo na área de conhecimento do Ensino Médio-técnico de Mecânica e Mecatrônica.

A atividade experimental proposta permite que o aluno do Ensino Médio-técnico desenvolva competências e habilidades em analisar dados baseados em fenômenos naturais ou da geração de dados a partir do sistema dinâmico proposto.

A atividade proposta com o uso das funções periódicas do tipo seno e cosseno

são estudadas no segundo ano do ensino médio, segundo a BNCC - EM13MAT306 (código de classificação do conteúdo pela BNCC). A proposta aqui será desenvolvida no terceiro ano do ensino médio-técnico, devido as aulas de programação e manutenção serem no terceiro ano. A aplicação ocorre numa ETEC, escola que contem o ensino médio integrado ao técnico, são alunos do terceiro ano, com uma classe com trinta e cinco alunos.

O sistema dinâmico proposto na atividade experimental consiste na geração de dados proveniente de vibração, entendendo que a vibração é um resultado de funcionamento de uma máquina que está presente em seu cotidiano de aprendizado no decorrer do Ensino Médio-técnico de Mecânica e Mecatrônica.

A presente definição consiste que a vibração é o movimento oscilatório de um corpo em torno de uma posição de equilíbrio. De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas, “vibração é o movimento de um corpo em torno de uma posição de referência, de forma periódica ou não, causado por forças dinâmicas” (Normas Técnicas, 1987).

A grande existência de sistemas dinâmicos no ambiente de aprendizagem do Ensino Médio-técnico torna essencial o conhecimento do desempenho do sistema. Uma forma de analisar o estado de funcionamento do sistema ocorre por meio da análise de vibração, ou seja, da verificação da amplitude dos sinais de vibração de acordo com o padrão do sistema. O Ensino Médio-técnico deve proporcionar ao estudante oportunidades de conhecer e poder analisar eventos ou dados coletados de fenômenos naturais e ou de sistemas dinâmicos. A utilização de ferramentas ou modelos matemáticas já existentes pode proporcionar ao estudante habilidades de analisar estes dados.

A séries e transformada de Fourier são usadas na análise de sinais, juntamente com o modelagem matemática apropriada. A exemplo de ferramentas lidam com a transformada de Fourier temos o Python, Matlab, entre outros. O uso destas ferramentas para a atividade experimental tem como objetivo, proporcionar ao aluno entender a necessidade de aprender os conceitos básicos de Matemática nas funções periódicas do tipo seno e cosseno, sendo estes empregados em situações reais por meio de modelos já consagrados.

O presente trabalho caracteriza-se como uma pesquisa-ação de natureza qualitativa, advinda de trabalho de pesquisa quantitativa, uma vez que propõe uma prática pedagógica, por meio de uma atividade experimental proposta para ser aplicada no Ensino Médio-técnico. Segundo Thiollent (2011), a pesquisa-ação consiste em um tipo de pesquisa social em que o pesquisador participa ativamente da situação investigada, com o duplo objetivo de compreender o fenômeno estudado e promover transformações na prática. Assim, nesta investigação, o pesquisador atua como professor e observador do processo, planejando, analisando e avaliando a proposta da atividade experimental atrelada à prática pedagógica.

A atividade experimental se propõem a analisar, em um primeiro momento, dados gerados a partir das próprias funções trigonométricas propostas no experimento, em um

segundo momento, os dados reais são gerados por um sistema dinâmico proposto. A escolha dessa metodologia justifica-se pelo caráter mediador e reflexivo do estudo, pois busca-se não só descrever a atividade experimental, mas analisar criticamente sua efetividade e potencial formativo, mediante referenciais teóricos da área da Educação (Magalhães Júnior; Batista, 2021).

Mediante a proposta do trabalho de ser mediador do método proposto para a prática pedagógica, a construção da atividade experimental, na obtenção dos dados reais para análise, dada a proposta baseada na experimentação, ou seja atividade experimental, vinculada à prática pedagógica, visando o despertar do interesse do aluno no aprendizado em Matemática com o experimento.

1.1 OBJETIVOS

- Objetivos gerais

O objetivo deste trabalho é apresentar uma prática pedagógica no ensino de Matemática das funções periódicas do tipo seno e cosseno, voltada ao Ensino Médio-técnico. Permitindo o aprendizado do aluno em conceitos básicos das funções periódicas e a observação da aplicação de modelos matemáticos em uma aula experimental.

- Objetivos Específicos

Como objetivos específicos deste trabalho:

- a) Realizar revisão sistemática de trabalhos correlatos com os temas de série de Fourier, transformada de Fourier, Ensino Médio-técnico, modelagem matemática aplicada, funções periódicas seno e cosseno.
- b) Apresentar um experimento de baixo custo para geração e coleta de dados característicos de sistemas dinâmicos.
- c) Propor o uso de uma planilha eletrônica na aula experimental para introduzir os conceitos básicos das funções periódicas, gerar os gráficos de frequência e amplitudes dos sinais de uma função conhecida.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. O capítulo 1 apresenta a introdução que contém a motivação para o desenvolvimento do trabalho, um resumo da revisão sistemática e os objetivos.

No segundo capítulo apresenta-se o referencial teórico de modelagem matemática a sua importância, as funções periódicas que envolvem senos e cossenos, o surgimento da série de convergência das funções senos e cossenos por Fourier e a transformada de Fourier.

No terceiro capítulo descrevem-se as aplicações da série de Fourier e da transformada de Fourier na obtenção de funções periódicas, bem como aplicações da transformada de Fourier.

No quarto capítulo descreve-se a metodologia empregada no trabalho, a proposta da prática pedagógica por meio dos experimentos propostos.

No quinto capítulo estão os resultados e as discussões referentes aos experimentos propostos pela prática pedagógica e no sexto capítulo são elencadas as considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

Referencial Teórico

A modelagem matemática é um processo que consiste em construir modelos matemáticos para representar e estudar situações do mundo real.

A modelagem se sobressai perante a algumas atividades aplicadas no ensino médio, devido a exemplos de situações reais nas quais produzem uma visão mais realística do assunto abordado (Araujo; Avelar, 2022). A aplicação de modelagem na resolução de problemas tem origens antigas e a ideia de propor equações que possam simular ou prever situações reais é tão antiga quanto a matemática (Bertone; Bassanezi; Jafelice, 2014).

A busca por modelos que possam simular situações reais é um grande desafio de todas as ciências, pois um modelo que possa prever ou mesmo reconstruir situações reais, permite trabalhar em prevenções de falhas. A modelagem matemática no Ensino Médio-técnico pode despertar o interesse ou a motivação do aluno para um estudo mais intenso de uma determinada disciplina (Schrenk; Vertuan, 2022).

Ao Ensino Médio-técnico em termos de aplicação de conhecimento adquirido tanto da base técnica a qual constitui-se de componentes curriculares tais como Resistência dos Materiais, Tecnologia de Manutenção, entre outros, inserida ao conhecimento do aluno como da base comum como Língua Portuguesa, Matemática, entre outras, uma motivação que perpetua é o fato de ter um significado prático durante o ensino em sala de aula. No Ensino Médio-técnico na modalidade mecânica ou mecatrônica, no uso de equipamentos ou sistemas dinâmicos é comum no decorrer do seu aprendizado, não só na utilização dos equipamentos atrelado ao processo produtivo, mas também na manutenção e conservação.

Entende-se que a modelagem matemática provem de observações e análises de situações reais, então em experimentos em que possam simular sistemas dinâmicos, espera-se que os experimentos de baixo custo forneça, dados a serem modelados e analisados por modelos matemáticos em que remetem ao ensino de conteúdo desenvolvido em sala de aula (Carvalho, 2019).

Em sistemas dinâmicos, o uso das funções periódicas como o seno e o cosseno é uma prática comum, pois fornece parâmetros como velocidade, rotação, frequência, entre outras (Bonjorno; Giovanni; Sousa, 2016). Um dos modelos matemáticos que utiliza dados providos de sistemas dinâmicos é a transformada de Fourier, observou-se na revisão sistemática, a grande utilização do modelo no ramo de ciências e engenharias. Entende-se que uma função periódica, assume valores dentro de seu domínio e se repetem em um determinado período. Chamam-se de periódicos os fenômenos que se repetem sempre após o mesmo intervalo regular de tempo. Muitos deles podem ser observados na natureza como

o movimento das marés, o movimento do Sol e da Lua e também da órbita dos planetas, segundo Andrade (2020).

2.1 REVISÃO SISTEMÁTICA

O termo revisão sistemática tem como finalidade apresentar uma análise e uma síntese sobre uma determinada literatura, com o objetivo de responder algum questionamento relacionado à investigação de um problema de pesquisa. A adoção de um protocolo rigoroso permite uma revisão segura com critérios consistentes e previamente definidos para a seleção e análise dos estudos investigados. De acordo com Briner e Denyer (2012), a condução de uma revisão sistemática envolve cinco etapas principais:

- a) Planejamento da revisão;
- b) Identificação e localização dos estudos relevantes;
- c) Avaliação da qualidade e da contribuição dos trabalhos selecionados;
- d) Análise e síntese das evidências encontradas;
- e) Apresentação e discussão dos resultados obtidos.

Como estratégia metodológica, esta pesquisa adotou o modelo de revisão sistemática da literatura, com o objetivo de identificar e analisar a produção acadêmica brasileira relacionada ao tema investigado, especificamente no âmbito de teses e dissertações, que será apresentada um resumo contendo os pontos principais da metodologia aplicada.

- **Pontos principais: identificação, avaliação e contribuição dos trabalhos selecionados**

A revisão sistemática das publicações foi realizada na base de dados da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD (<http://bdtd.ibict.br/vufind/>), com o conectivo “transformada de Fourier”. Encontrando um total de 4.651 trabalhos públicos publicações que mencionam o tema, assim evidenciando a importância do modelo matemático em estudo.

Dando andamento ao trabalho, adicionou-se os conectivos “transformada de Fourier” AND “Ensino Médio-Técnico”, com o objetivo de identificar o ensino de funções periódicas no médio-técnico, em particular, na área de Mecânica e Mecatrônica, por meio da aplicação do modelo em questão. Não apresentou nenhum resultado de publicação, assim identificando uma lacuna de trabalhos não publicados voltados ao ensino de funções periódicas com o uso do modelo no Ensino Médio-técnico. Alterando os conectivos para uma nova busca no banco de dados sendo “transformada de Fourier” AND “ensino médio” foram encontrados 2 trabalhos.

Em uma nova busca no banco de dados por publicações, sendo esta pesquisa voltada a aplicações práticas nas áreas de Mecânica e Mecatrônica, com os conectivos

“transformada de Fourier” AND “Vibração”, no período de 2015 a 2025, foram encontradas 38 publicações.

Com o critério de exclusão “vibração como sistema dinâmico”, foram selecionadas para análise 8 pesquisas de dissertação de mestrado e teses de doutorado submetidas. Para cada trabalho apresentado pela plataforma foi realizada a leitura do título, das palavras-chave e dos resumos.

- **Apresentação e discussão dos resultados obtidos da revisão sistemática**

Os trabalhos que contemplaram os dois conectivos na análise foram selecionados para leitura na íntegra. Os trabalhos que não contemplaram, foram excluídos da seleção, constituindo assim o primeiro critério de exclusão, foram contemplados 8 trabalhos para análise.

Em resumo os trabalhos que foram selecionados para a análise, trata de verificações do comportamento dos sinais obtidos por meio de coleta de dados por sensores ou acelerômetros. Sendo estes sinais tratados com a transformada de Fourier com o propósito da verificação de parões de comportamento da amplitude dos sinais. Apresentou-se também uma aplicação das funções periódicas seno e cosseno voltada para o ensino médio, com o propósito de evidenciar a sua aplicação na série e transformada de Fourier.

Os trabalhos serão mencionados ao longo do texto, de forma que o objetivo aqui é identificar a lacuna na aplicação de ferramentas ou modelos que permitem facilitar o ensino de funções periódicas para os alunos, com aplicações em situações reais.

2.2 FUNÇÕES PERIÓDICAS: SENO E COSSENO

Definição: Dizemos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *periódica* quando existe um número real não nulo T , tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x),$$

Observe que neste caso,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + nT).$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$ é periódica com período $T = 2\pi$, pois:

$$f(x) = \text{sen}(x),$$

é periódica com período $T = 2\pi$.

De fato, no círculo trigonométrico, um acréscimo de 2π radianos corresponde a uma volta completa. Assim, os ângulos x e $x + 2\pi$ determinam o mesmo ponto sobre a circunferência. Como o seno de um ângulo é a ordenada desse ponto, segue que

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

De modo geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, adicionar n voltas completas ao ângulo não altera sua posição final no círculo trigonométrico. Portanto,

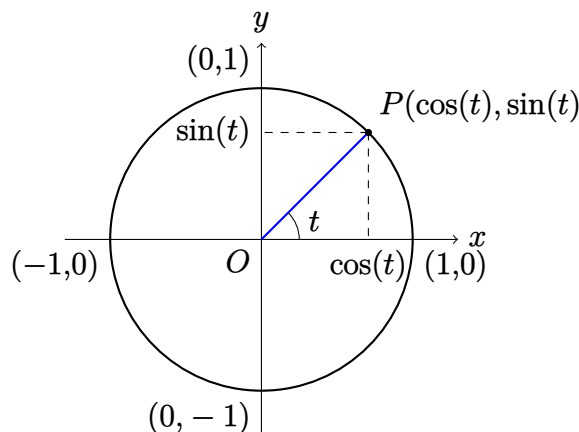
$$\text{sen}(x + 2n\pi) = \text{sen}(x),$$

mostrando que a função seno é periódica de período fundamental 2π .

O *período* da função é o menor número $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo x , segundo Andrade (2020). Dado um número real t , representando um ângulo em radianos, a função seno é definida como a coordenada y do ponto no círculo unitário correspondente ao ângulo t :

$$\text{sen}(t) = y$$

Figura 1 — Círculo trigonométrico



Fonte: Próprio autor

Analogamente defini-se para a função cosseno, um número real t , representando um ângulo em radianos, a função cosseno é definida como a coordenada x do ponto no círculo unitário correspondente ao ângulo t :

$$\cos(t) = x$$

Dadas abaixo as principais propriedades das funções seno e cosseno, em particular será tratado conceitualmente a definição das funções pares e ímpares na próxima seção.

- Propriedades da função seno e cosseno

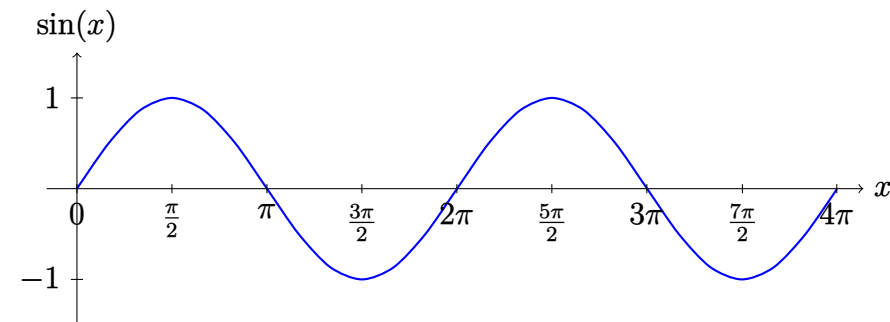
- a) Domínio: $\mathbb{R}$
- b) Imagem: $[-1, 1]$
- c) Período: 2π
- d) Seno é ímpar, isto é: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$

e) Cosseno é par, isto é: $\cos(-x) = \cos(x)$

As funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas, isso significa que parte do gráfico se repete de acordo com determinado período. No caso, um ciclo completo se dá de 2π em 2π , conforme mostra a fig. 2, o que equivale a dizer que o período dessa função é 2π .

- Gráfico da função $\sin(x)$

Figura 2 — Gráfico da função seno



Fonte: Próprio autor

2.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Na demonstração das integrais a seguir, precisamos de algumas identidades trigonométricas, em especial das fórmulas de transformação do produto de senos e cossenos em somas de senos e cossenos. Tomemos como fatos as fórmulas da soma e da diferença do cosseno e do seno de dois arcos a e b , tais que $a, b \in \mathbb{R}$. Uma demonstração dessas fórmulas se encontra no livro de Elon Lages Lima (Lima, 1997). Temos as seguintes identidades trigonométricas fundamentais:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b),$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a),$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a).$$

Somando e subtraindo membro a membro as duas primeiras expressões, obtemos:

- Soma:

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b).$$

- Subtração:

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b).$$

Portanto, o produto dos cossenos de dois arcos, é metade da soma dos cossenos da soma e da diferença desses arcos, isto é,

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)].$$

e também que, o produto dos senos de dois arcos, é a metade da diferença dos cossenos da soma e da diferença desses arcos, isto é,

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

Finalmente, somando as duas últimas expressões e dividindo por dois em ambos os lados, temos o produto do seno pelo cosseno de dois arcos que é igual a metade da soma dos senos da soma e da diferença desses arcos:

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)].$$

Da mesma forma, podemos escrever essa relação invertendo a ordem dos termos dentro dos parênteses, ou seja, em função da diferença e da soma desses arcos:

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b)].$$

2.4 FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **par** se satisfaz $f(x) = f(-x)$, e é dita **ímpar** se satisfaz $f(x) = -f(-x)$. Essas definições e propriedades podem ser encontradas, por exemplo, em Figueiredo (2012). Por exemplo:

$$\begin{aligned} \cos(nx) \text{ e } x^{2n} &\text{ são funções pares,} \\ \text{e } \operatorname{sen}(nx) \text{ e } x^{2n+1} &\text{ são funções ímpares,} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, se g e h são funções pares, e r e s são funções ímpares, temos as seguintes propriedades importantes:

$$(gh)(x) = g(x)h(x) = g(-x)h(-x) = (gh)(-x),$$

ou seja, o produto de duas funções pares é uma função par.

$$(gs)(x) = g(x)s(x) = g(-x)(-s(-x)) = -g(-x)s(-x) = -(gs)(-x),$$

isto é, o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

$$(rs)(x) = r(x)s(x) = (-r(-x))(-s(-x)) = r(-x)s(-x) = (rs)(-x),$$

portanto, o produto de duas funções ímpares é uma função par.

Essas propriedades são úteis no cálculo de integrais, pois a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico em relação ao zero é nula, e a integral de uma função par em um intervalo simétrico $[-L, L]$ é igual ao dobro da integral no intervalo $[0, L]$, conforme discutido em Figueiredo (2012).

2.5 SÉRIE DE FOURIER

• Série de Fourier

A ideia da possibilidade de decompor uma função arbitrária em termos de outras funções mais simples começou por conta de Leonard Euler em 1750, e prosseguiu, com outros matemáticos. Foi somente em 1822 que Jean Baptiste Joseph Fourier fez a primeira tentativa para provar que uma função arbitrária é igual a soma de uma série trigonométrica particular (Chiaradia, 2018).

Uma série de somas, ou simplesmente série infinita, é uma expressão matemática que representa a soma de uma sequência infinita de termos conforme equação 2.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (2.1)$$

Aqui, a_n representa o n -ésimo termo da sequência, e o símbolo $\sum$ (sigma) indica a operação de soma, uma série pode ser convergente ou divergente. Entende-se por uma série converge se a soma infinita tende a um valor finito a medida em que mais termos são adicionados; caso contrário, a série é dita divergente, segundo Anton, Bivens e Davis (2012).

Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França tratando do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos afirmando que toda função, não importando quão caprichosamente fosse definida em um intervalo $[-\pi, \pi]$, poderia ser representada como uma soma de senos e/ou cossenos, mais especificamente falando, essa soma seria uma série segundo Boyce e DiPrima (2017), conforme equação 2.2.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.2)$$

Atualmente sabemos que se uma função f for periódica de período 2π , sob certas restrições, poderá ser representada pela série. De acordo com Boyce e DiPrima (2017), se uma função f admite representação como série de Fourier, então ela será dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{2\pi nx}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi nx}{T} \right) \right]$$

onde a série obtida seria uma função de período $2L$. Obtemos a série 2.2 fazendo $L = \pi$, que seria o caso particular abordado neste trabalho por facilitar o cálculo dos coeficientes

an e bn. Esses coeficientes são o assunto central da próxima sessão.

• Integrais Trigonométricas

No cálculo dos coeficientes an e bn da série de Fourier aparecem alguns tipos de integrais trigonométricas em que é necessário aplicar as fórmulas de transformação de produto em somas, segundo Chiaradia (2018). Temos as seguintes integrais nas quais m e n representam números inteiros.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cos(mx) dx \quad (2.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \quad (2.5)$$

Começemos pela integral 2.5. Devemos transformar o produto em soma. Logo, se $m \neq n$, então:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((m+n)x)}{(m+n)} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((m-n)x)}{(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

No caso em que $m = n$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(2nx) + \cos(0)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(2nx) + 1] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Temos, portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Para a integral 2.3, aplicando a transformação do produto dos senos de dois arcos dados, se $m \neq n$ teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m-n)x)}{(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m+n)x)}{(m+n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

No caso em que $m = n$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(0) - \cos(2nx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(2nx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) dx \\ &= \frac{1}{2} [x]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Temos, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, a integral 2.4 pode ser comparada com a equação o produto do seno pelo cosseno de dois arcos. No caso em que $m \neq n$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos((m+n)x)}{(m+n)} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos((m-n)x)}{(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

$$= 0.$$

No caso em que $m = n$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(2nx) + \operatorname{sen}(0)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2nx) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2nx)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \pi, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

• Cálculo dos Coeficientes

Suponha que uma função f possa ser representada como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (2.6)$$

e que a série 2.6 seja convergente para $-\pi \leq x \leq \pi$. Para escrever a função nesse formato, primeiramente devemos calcular os coeficientes a_0 , a_n e b_n . Os termos dessa série costuma ser denominado como harmônicos da onda senoidal fundamental.

Para calcular o coeficiente a_0 , basta integrar a equação 2.6 no intervalo $[-\pi, \pi]$. Aplicando as propriedades do somatório e da integral definida, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) dx. \end{aligned}$$

Pode-se trocar a ordem do somatório com a integral devido à série ser uniformemente convergente.

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

devido à periodicidade de $\cos(nx)$ e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

pelo $\sin(nx)$ ser uma função ímpar, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi.$$

Logo, tem-se a seguinte fórmula para calcular o coeficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Para o coeficiente a_n , a estratégia é multiplicar ambos os membros da equação 2.6 por $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}$ e integrar no intervalo $[-\pi, \pi]$, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0,$$

pelo fato de que $\sin(nx) \cos(mx)$ ser uma função ímpar e como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \quad \text{quando } n = m,$$

então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \pi,$$

o que implica em

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Calcula-se agora o coeficiente b_n . Para calcular o coeficiente b_n , multiplica-se ambos os membros da equação 2.6 por $\text{sen}(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi]$. Tem-se, então:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \text{sen}(mx) dx \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx = 0,$$

pois $\cos(nx) \text{sen}(mx)$ é uma função ímpar no intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$, e como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx = \pi \quad \text{quando } n = m,$$

então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx = b_n \pi.$$

Logo, tem-se a seguinte fórmula para calcular o coeficiente b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx.$$

• Forma Compacta

A série de Fourier pode ser escrita em uma forma compacta, segundo Tolstov (1976). Para tal, encontra-se C_n e φ_n de forma que:

$$a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx) = \text{sen}(nx + \varphi_n).$$

Pode-se escrever aplicando a fórmula do seno da soma de dois arcos e multiplicando ambos os lados por C_n :

$$C_n \text{sen}(nx + \varphi_n) = C_n \text{sen}(nx) \cos \varphi_n + C_n \text{sen} \varphi_n \cos(nx).$$

Portanto, tem-se:

$$a_n = C_n \text{sen} \varphi_n \quad \text{e} \quad b_n = C_n \cos \varphi_n.$$

Tomando os quadrados e somando membro a membro, obtém-se a seguinte relação:

$$a_n^2 + b_n^2 = C_n^2(\sin^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n) = C_n^2.$$

Isolando C_n e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, tem-se:

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.7)$$

Tem-se:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{C_n \sin \varphi_n}{C_n \cos \varphi_n} = \frac{\sin \varphi_n}{\cos \varphi_n} = \tan \varphi_n,$$

ou seja,

$$\varphi_n = \arctan \left(\frac{a_n}{b_n} \right). \quad (2.8)$$

Podemos então escrever a série de Fourier na seguinte forma compacta:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx + \varphi_n),$$

onde temos

$$C_0 = \frac{a_0}{2},$$

sendo C_n e φ_n dados respectivamente pelas equações 2.7 e 2.8.

De forma semelhante, podemos escrever a forma compacta em termos do cosseno:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nx + \varphi_n).$$

Segundo Figueiredo (2012), a série de Fourier pode ser representada em termos de senos e cossenos. E usando a fórmula de Euler podemos reescrever a série de Fourier na forma complexa.

Seja:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right], \quad (2.9)$$

onde $f(x)$ é uma função $2L$ periódica e contínua, (pois o período fundamental de $\cos \left(\frac{\pi x}{L} \right)$ e $\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$ é $2L$) onde os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad e \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Usando as relações de Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2j}, \quad \text{onde } i^2 = -1,$$

podemos reescrever a equação 2.9 como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{jn\pi x/L} + e^{-jn\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{jn\pi x/L} - e^{-jn\pi x/L}}{2j} \right].$$

Pode-se adotar que

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Agrupando os termos exponenciais semelhantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\pi x/L} + c_n e^{-in\pi x/L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \end{aligned}$$

onde os coeficientes complexos c_n são definidos por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Assim, a forma complexa da série de Fourier representa de maneira mais compacta e simétrica os componentes harmônicos positivos e negativos da função periódica $f(x)$. Desta forma os coeficientes da série de Fourier de uma função f pode ser calculado e escritos no formato da série dada pela equação 2.6 ou na forma compacta.

• Série de Fourier em Tempo Discreto

Segundo Lathi (2006), a série de Fourier pode ser escrita na forma complexa em tempo discreto que será mencionada no próximo capítulo a título de amostragem para a análise.

Lembrando que uma integral pode ser vista como o limite de uma soma de Riemann:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i f(t_i) \Delta t.$$

Quando discretizamos o tempo, escrevemos

$$t = n\Delta t,$$

onde n é um índice inteiro.

Nesse caso, não fazemos mais $\Delta t \rightarrow 0$. Em vez disso, trabalhamos diretamente com as amostras do sinal:

$$x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1].$$

Assim, a integral contínua

$$\int_a^b f(t) dt$$

é substituída por uma soma discreta

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n].$$

Portanto, na Série de Fourier em Tempo Discreto (DTFS), a integração utilizada para calcular os coeficientes da série contínua é substituída por uma soma finita sobre um período do sinal.

Seja $x[n]$ uma sequência periódica de período N . A série de Fourier discreta no tempo pode ser escrita na forma exponencial complexa como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

onde os coeficientes $X[k]$ são dados por:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Nesta forma:

- $X[k]$ são os coeficientes complexos da série de Fourier discreta.
- O módulo $|X[k]|$ representa a amplitude do componente de frequência k .
- O argumento $\arg(X[k])$ representa a fase do componente de frequência k .

Esta representação é equivalente à forma seno-cosseno, mas é mais conveniente para cálculos computacionais, especialmente no uso da transformada discreta de Fourier (DFT) e transformada rápida de Fourier (FFT).

2.6 TRANSFORMADA DE FOURIER

• Transformada de Fourier em tempo contínuo

A Série de Fourier é utilizada para representar funções periódicas por meio de uma soma de exponenciais complexas:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t},$$

onde $\omega_0 = 2\pi/T$ é a frequência angular fundamental e T é o período da função. Como os valores de frequência são múltiplos inteiros de ω_0 , o espectro obtido é discreto.

À medida que o período T aumenta, a frequência fundamental ω_0 diminui, fazendo com que as componentes espectrais fiquem cada vez mais próximas umas das outras. Dessa forma, o espaçamento entre frequências,

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

torna-se progressivamente menor.

No limite em que o período tende ao infinito,

$$T \rightarrow \infty,$$

tem-se

$$\omega_0 \rightarrow 0.$$

Nesse caso, as frequências discretas tornam-se infinitamente próximas, preenchendo continuamente o eixo das frequências. Assim, ocorre a transição de um espectro discreto para um espectro contínuo.

Consequentemente, a soma presente na Série de Fourier é substituída por uma integral, resultando na Transformada de Fourier. Matematicamente, a passagem do discreto para o contínuo pode ser representada por

$$\sum \rightarrow \int,$$

obtendo-se a representação inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Portanto, a Transformada de Fourier pode ser interpretada como o caso limite da Série de Fourier quando o período da função tende ao infinito, permitindo a análise tanto de sinais periódicos quanto de sinais não periódicos integráveis. A seguinte definição é apresentada por Santos (2017).

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável. A **transformada de Fourier** de f , denotada por $\mathcal{F}(f)$, é definida por:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.10)$$

tal que a integral dada pela equação 2.10 seja convergente para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Lembremos que, pela definição de integral imprópria, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\int_{-b}^0 e^{-i\omega x} f(x) dx + \int_0^b e^{-i\omega x} f(x) dx \right].$$

Pela fórmula de Euler, sabemos que:

$$e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x),$$

então podemos escrever a transformada de Fourier também na forma:

$$F(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)] f(x) dx.$$

Esta transformada converge do domínio do tempo para o domínio da frequência, nos quais os dados podem apresentar mais relevância para o estudo e a serem analisados. Ao domínio na frequência entende-se que a sua amplitude pode resultar de variações no sistema dinâmico não normais, visto que variação pode ser entendida como vibração do sistema, e quando esta acima do normal, pode trazer situações agravantes ao sistema.

Logo, a transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ será real se a função for par, pois a parte imaginária da transformada se anula devido a $\sin(\omega x)f(x)$ ser uma função ímpar e sua integral ser zero.

Mais sobre os aspectos teóricos da transformada Fourier podem ser encontrados em Santos (2017) e Figueiredo (2012).

- **Transformada de Fourier em tempo discreto**

Obtendo os dados discreto tem-se a transformada de Fourier em tempo discreto de acordo com a equação, no formato de uma somatória.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n}$$

Usando a identidade de Euler $e^{-i\omega n} = \cos(\omega n) - i \sin(\omega n)$ pode-se obter a parte real e a parte imaginária da transformada.

- **Parte real:**

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos(\omega n)$$

- **Parte imaginária:**

$$\Im\{X(e^{j\omega})\} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin(\omega n)$$

Forma contendo a parte real e imaginária no formato dos senos e cossenos:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos(\omega n) - i \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin(\omega n)$$

Capítulo 3

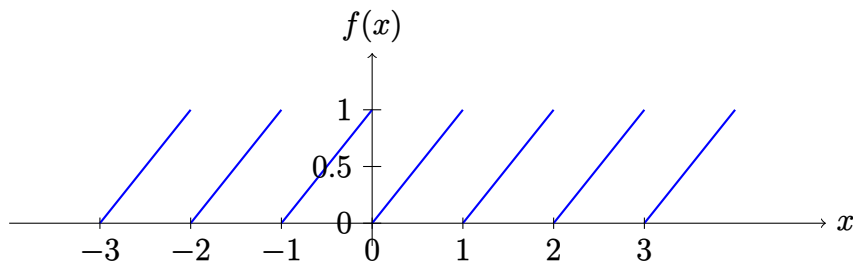
Exemplos: Série de Fourier e Transformada de Fourier

Este capítulo tem como objetivo, exemplificar aplicações da série de Fourier e transformada de Fourier. Trata-se, inicialmente, de exemplos teóricos da aplicação. A exemplo de série observando a conversão de uma função $f(x)$ obtendo os coeficientes da série e a convergência para a função periódica. Na transformada observa-se uma função pulso de onda quadrada à aplicação da transformada de Fourier em uma função periódica, não mais no tempo, mas em função da frequência.

3.1 EXEMPLO DA SÉRIE DE FOURIER

Para um exemplo da séries de Fourier, considere $f(x) = x - [x]$ fig. 3, onde $[x]$ representa o maior inteiro menor do que igual a x .

Figura 3 — Gráfico da função periódica $f(x) = x - [x]$



Fonte: Próprio autor

Esta é uma função periódica, conhecida como a função parte decimal de x , ou função serra dentada, com período $T = 1$. A partir dela, pode-se construir uma representação por meio de uma soma infinita de senos e cossenos. Segundo Figueiredo (2012), os coeficientes da série de Fourier podem ser obtidos por meio das integrais definidas conforme nas equações 3.1, 3.2 e 3.3.

Como a série de Fourier de uma função periódica $f(x)$ com período T é dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]$$

onde os coeficientes são definidos como:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \quad (3.1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad (3.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad (3.3)$$

Como a função $f(x) = x - [x]$, é ímpar (concentre para $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$), sua série de Fourier conterà apenas senos. Efetuando os cálculos necessários para obter b_n , tem-se:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi nx)}{n}.$$

Observa-se que esta série converge pontualmente para $f(x)$ em todos os pontos de continuidade e para a média dos limites laterais nos pontos de descontinuidade. O gráfico da fig. 6, exemplifica a função $f(x) = x - [x]$, obtida por uma série de senos e cossenos, neste caso de senos.

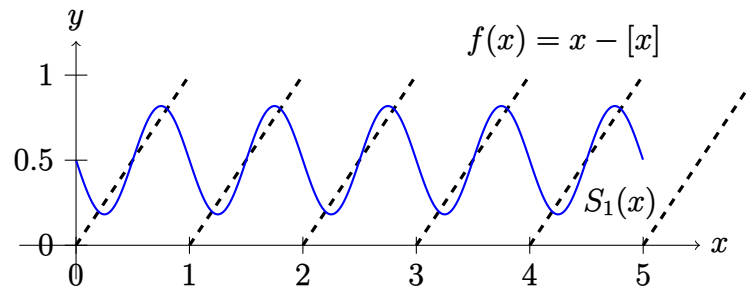
A aproximação da função $f(x) = x - [x]$ com os 6 primeiros termos da série de Fourier é dada por:

$$S_5(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\text{sen}(2\pi x)}{1} + \frac{\text{sen}(4\pi x)}{2} + \frac{\text{sen}(6\pi x)}{3} + \frac{\text{sen}(8\pi x)}{4} + \frac{\text{sen}(10\pi x)}{5} \right).$$

Observa-se que, quanto mais termos se adiciona à soma da série mais se aproxima da função $f(x)$, de forma periodicamente, ou seja, a série está convergindo para a função $f(x) = x - [x]$.

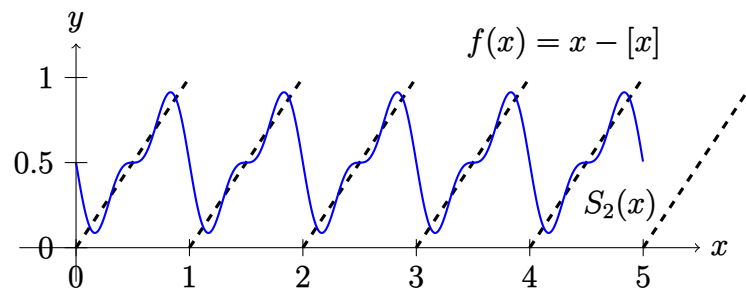
Segundo Figueiredo (2012) a convergência da série de Fourier é para funções contínuas e periódicas, vimos nos pontos de descontinuidades da função, como mostra as figuras: fig. 4, fig. 5 e fig. 6.

Figura 4 — Aproximação de Fourier da função $f(x) = x - [x]$ com 1 termo



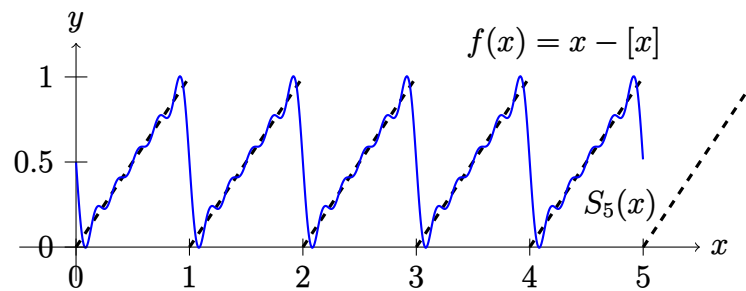
Fonte: Próprio autor

Figura 5 — Aproximação de Fourier da função $f(x) = x - [x]$ com 2 termos



Fonte: Próprio autor

Figura 6 — Aproximação de Fourier da função $f(x) = x - [x]$ com 6 termos



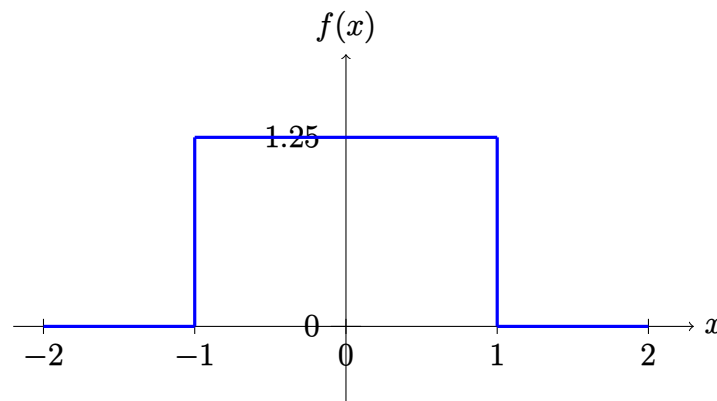
Fonte: Próprio autor

3.2 EXEMPLO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Como exemplo, consideremos a função f de um pulso de onda quadrada fig. 7 definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2T}, & \text{se } |x| \leq T, \\ 0, & \text{se } |x| > T. \end{cases}$$

Figura 7 — Gráfico da função $f(x)$ definida por partes



Fonte: Próprio autor

A função $f(x)$ é dada no domínio do tempo, enquanto sua transformada $F(f)(\omega)$ é dada no domínio da frequência. O gráfico no domínio do tempo dessa função é mostrado na fig. 7, para $T = 1$.

Calcula-se a transformada de Fourier dessa função. Como $f(x) = 0$ para $|x| > T$, mudando os limites de integração, teremos:

$$\begin{aligned} F(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-i\omega x} \frac{\sqrt{2\pi}}{2T} dx \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\omega x} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Euler $e^{-i\omega x} = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\omega x} dx &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)] dx \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega x) dx - \frac{i}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega x) dx. \end{aligned}$$

Como a integral da função ímpar $\text{sen}(\omega x)$ é nula, pois está em um intervalo simétrico em relação ao zero, e a integral da função par $\cos(\omega x)$ nesse intervalo é igual ao dobro da integral de 0 a T , então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega x) dx - i \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{sen}(\omega x) dx &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega x) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega x) dx \\ &= \frac{\text{sen}(\omega T)}{T\omega}. \end{aligned}$$

Esta última função é chamada de função sinc, definida como:

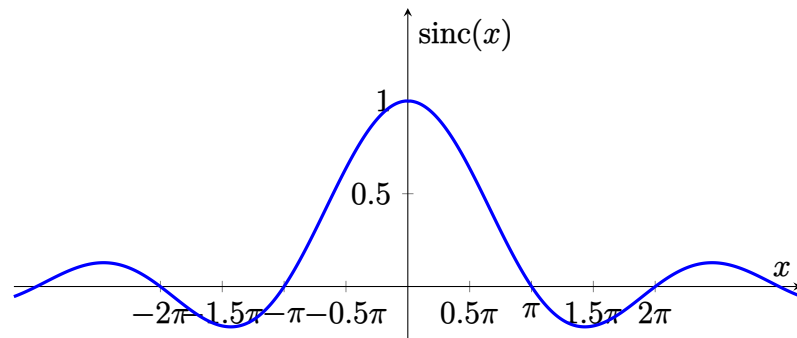
$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Logo, a transformada de Fourier da função f é:

$$F(f)(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} = \text{sinc}(\omega T).$$

O gráfico da função $\text{sinc}(x)$ é apresentado na Figura fig. 8.

Figura 8 — Gráfico da função $\text{sinc}(x)$.



Fonte: Próprio autor

3.3 EXEMPLO USANDO A TRANSFORMADA DE FOURIER NO COMPUTADOR

A transformada de Fourier é amplamente utilizada no tratamento de sinais, pois permite converter um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, possibilitando identificar as frequências dominantes e suas respectivas amplitudes.

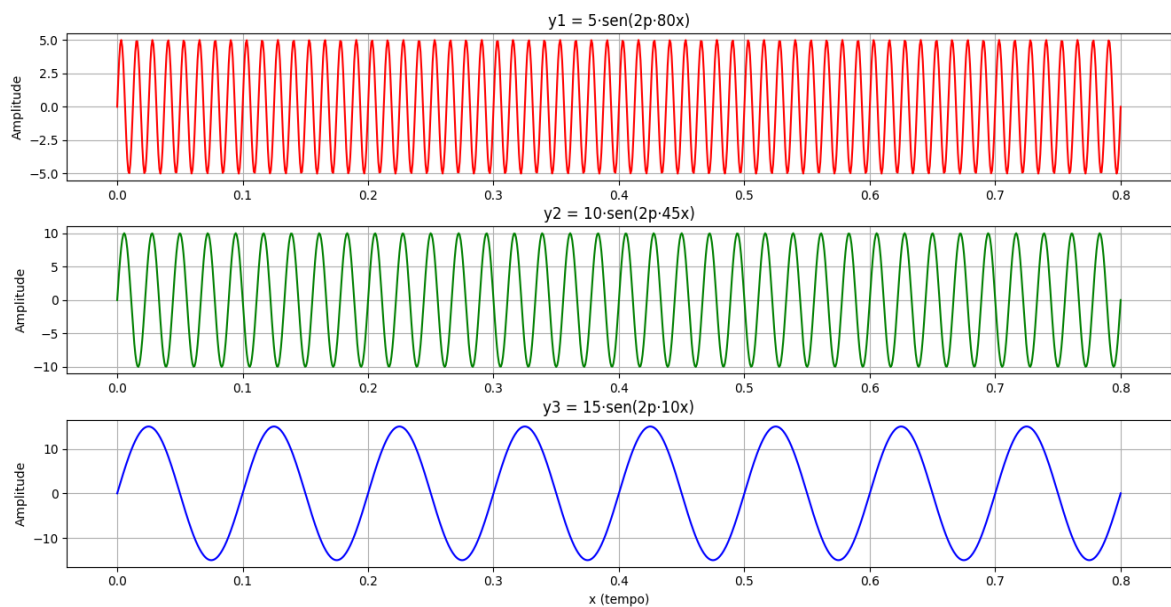
A exemplo desta aplicação utilizou-se o algoritmo de transformada rápida de Fourier preestabelecido no software Python, para obter as senoides abaixo estabelecidas.

Por exemplo, seja um sinal composto por 3 harmônicas, como mostrado na figura fig. 10, sendo as respectivas ondas:

$$\begin{aligned}y_1 &= 5 \operatorname{sen}(2\pi(80x)), \\y_2 &= 10 \operatorname{sen}(2\pi(45x)), \\y_3 &= 15 \operatorname{sen}(2\pi(10x)),\end{aligned}$$

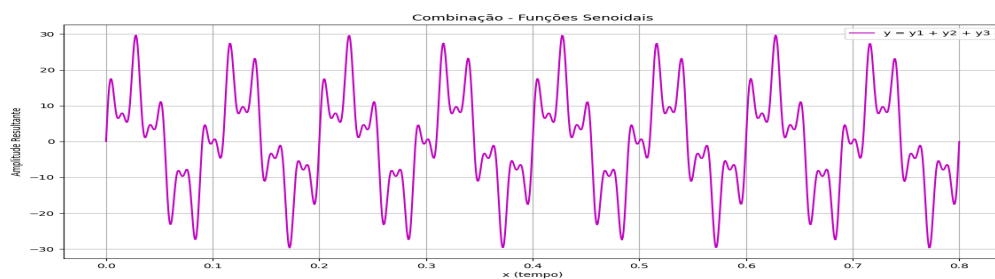
com as amplitudes de y_1 , y_2 e y_3 respectivamente 5, 10 e 15, e as frequências em Hz correspondentes a 80 Hz, 45 Hz e 10 Hz, como mostra a fig. 9.

Figura 9 — Sinal de frequência: alta, intermediária e baixa



Fonte: Próprio autor

Figura 10 — Composição de um sinal com três frequências distintas



Fonte: Próprio autor

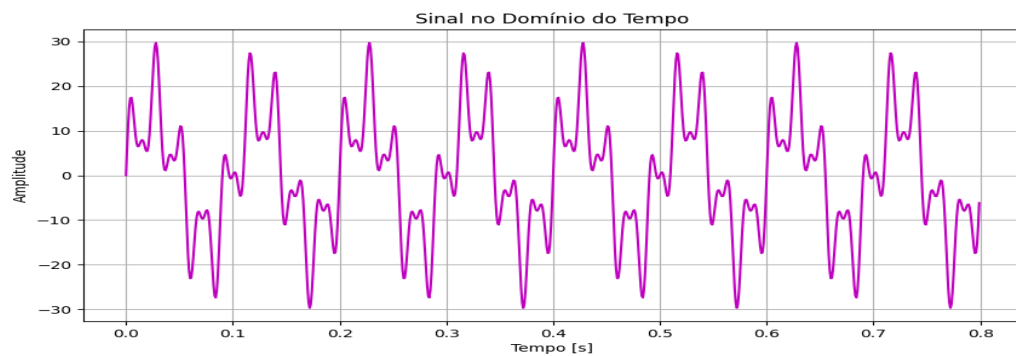
Observando a onda composta:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

Para iniciantes, não sendo fácil identificar visualmente quais frequências compõem as harmônicas envolvidas, como mostra a fig. 10.

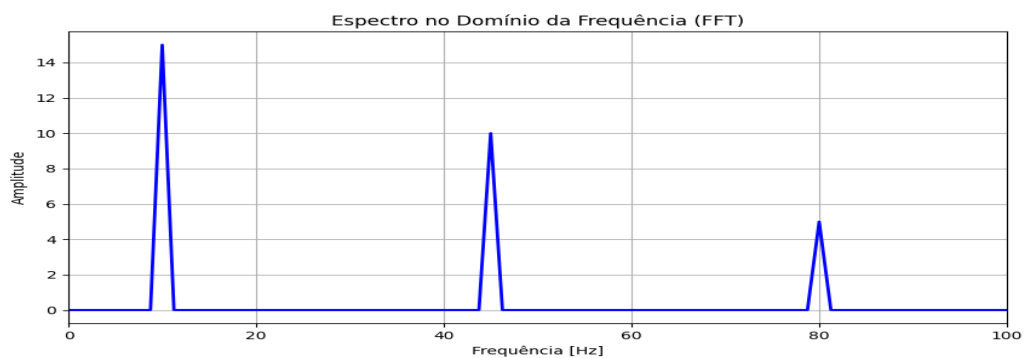
Para calcular a transformada de Fourier de uma função computacionalmente é utilizada Fast Fourier Transform (FFT), que é um algoritmo eficiente para o cálculo da transformada de Fourier. Na fig. 11, tem-se um sinal composto no domínio da tempo, com o uso da FFT, e um pacote do Python, para a realização do cálculo, obtendo a amplitude do sinal em função da frequência conforme fig. 12

Figura 11 — Sinal no Domínio do Tempo



Fonte: Próprio autor

Figura 12 — Sinal no Domínio da Frequência



Fonte: Próprio autor

Na qual destacam-se três frequências dominantes que compõe o y.

Capítulo 4

Métodos e Materiais

O presente capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia empregada no desenvolvimento da prática pedagógica, que é a construção das atividades experimentais, descrevendo os materiais empregados na construção do experimento de baixo custo.

4.1 INTRODUÇÃO

A proposta das atividades experimentais inicialmente apresenta o embasamento teórico das funções periódicas do tipo seno e cosseno com o propósito de motivar o aluno pelo assunto, que é apresentada por meio de uma planilha eletrônica. Em seguida apresenta-se a atividade experimental para gerar dados reais por meio de um sistema dinâmico com a utilização de equipamentos com a proposta de ser de baixo custo, tornando o experimento acessível, de forma que possa ser replicado.

Após coleta de dados será utilizado software específico para o tratamento dos dados, baseados na transformada de Fourier para a geração de parâmetros que possam ser analisados baseado no real funcionamento do sistema.

A análise dos dados proporciona ao aluno do Ensino Médio-técnico entender a importância do conhecimento da Matemática básica e entender o princípio da aplicação da modelagem matemática como ferramenta aplicada.

4.2 METODOLOGIA

Metodologia é o conjunto de métodos, técnicas, procedimentos e princípios utilizados para realizar uma pesquisa, um estudo ou a execução de uma atividade de forma organizada e sistemática (Foresti, 2008). Segundo Salvadego (2008) atividades experimentais “não requerem local específico nem carga horária e, portanto, podem ser realizadas a qualquer momento, tanto na explicação de conceitos, quanto na resolução de problemas, ou mesmo em uma aula exclusiva para experimentação”.

Segundo Rocha (2021), atividades experimentais têm como objetivo pedagógico o aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem, tornando-os interativos, podendo os estudantes participar de forma ativa no desenvolvimento da atividade. Sendo assim, as atividades experimentais podem proporcionar aos estudantes, o contato direto com a coleta de dados visando a busca pelas informações necessárias para a situação estudada. De forma geral, entendemos atividades experimentais como uma alternativa considerada

construtiva que pode possibilitar a interdisciplinariedade.

Assim entende-se que o objetivo pedagógico é o que o aluno deve aprender, ele expressa a competência, habilidade ou conhecimento que se pretende desenvolver. Segundo Sá (2020), a relação entre as atividades didáticas e as atividades experimentais tem o mesmo propósito, sendo este de atingir o objetivo pedagógica de ensino.

“Desse modo podemos afirmar que o ensino de matemática por atividade experimental é um processo didático desenvolvido por meio da realização de tarefas, envolvendo material concreto ou ideias, elaboradas pelo professor com objetivo de levar estudantes ao encontro com um conhecimento/conteúdo matemático específico após a realização da tarefa, do registro de resultados, análise e elaboração de reflexões sobre os resultados obtidos que culmina com a sistematização ou institucionalização de um conteúdo matemático”. Sá (2020)

- **Atividade experimental**

Mediante a proposta do trabalho de uma atividade experimental a partir de um modelo matemático, definem-se as fases de uma atividade experimento segundo Sá (2020) como sendo:

- Organização**
- Apresentação**
- Execução**
- Registro**
- Análise**
- Considerações finais**

- **Plano de aula**

Segundo Menezes (2024), o plano de aula estabelece uma estrutura, não engessada mas norteadora, na qual tem-se como objetivo estabelecer uma forma estruturada para auxiliar o professor no desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos. A seguir tem-se um modelo de uma estrutura de um plano de aula:

- Informações gerais**
- Objetivos de aprendizagem**
- Conteúdo**
- Metodologia/Desenvolvimento das aulas**
- Recursos didáticos**
- Avaliação**
- Extensão / Tarefa de casa**
- Referências**

Assim, com a estrutura do plano de aula e as fases da atividade experimental, estabelece-se um vínculo entre eles, ou seja, a atividade experimental sendo um método

do plano de aula. Ou, pode-se dizer, uma metodologia diferenciada atribuída ao plano de aula no ensino de Matemática. Na próxima sessão serão definidas com mais detalhes as fases da atividade experimental, bem como o exemplo do plano de aula da atividade experimental proposta no trabalho.

4.3 AULA EXPERIMENTAL: PLANO DE AULA

Nesta sessão serão contextualizadas as fases ou roteiro de uma atividade experimental, com um propósito de obter mais detalhamento da atividade e entender como ocorre cada fase, também será definido o plano de aula contextualizando a sua estrutura.

- **Definição das fases da atividade experimental:**

1. **Organização:** constitui-se de organizar a turma, preferencialmente em grupos de 4 estudantes, assim não criando distrações excessivas, que pode ser atribuído a um número muito grande de estudantes por grupos. O docente deve dirigir as ações e orientar a formação das equipes.
2. **Apresentação:** na apresentação da atividade experimental compete ao docente distribuir o material necessário para a realização das tarefas da atividade experimental incluindo o roteiro da mesma. O roteiro pode ser impresso ou disponibilizado no quadro, o que vai depender das condições estruturais da escola. Para as atividades experimentais com procedimentos mais longos é preferível que o roteiro seja disponibilizado de forma escrita para economizar tempo.
3. **Execução:** a execução corresponde à etapa da experimentação quando o pesquisador manipula os materiais, realiza medidas e/ou cálculo, compara e/ou observa.
4. **Registro:** corresponde ao momento da sistematização das informações na pesquisa científica. Neste momento espera-se que cada equipe registre as informações obtidas durante a execução dos procedimentos no respectivo espaço destinado no roteiro.
5. **Análise:** espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e descubram uma relação válida entre as informações. Este momento é crucial para o alcance do objetivo da atividade experimental por ser o momento em que os estudantes deverão ter o primeiro acesso à informação desejada pelo docente.
6. **Considerações finais:** o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise. O momento da institucionalização corresponde, grosso modo, ao momento da elaboração das considerações finais de um trabalho científico.

Dentro deste contexto, as fases da atividade experimental contemplam uma estrutura: organização, anotações, relatos, atividades e conclusão, todas fundamentadas por referências que as tornam sustentáveis pedagogicamente.

- **Definição da estrutura do plano de aula, em alguns tópicos serão apresentados exemplos:**

1. Informações Gerais

Quadro 1 — Informações Gerais

Informações gerais da aula	• Componente curricular; • Professor; • Data; • Duração da aula.
----------------------------	---

Fonte: Elaboração do autor

2. Objetivos de Aprendizagem

Quadro 2 — Objetivos da Aula

Objetivos: Descrever claramente o que os alunos devem ser capazes de fazer ao final da aula.	Exemplo: Funções Trigonométricas • Compreender o conceito de função seno e função cosseno; • Identificar o domínio, o contradomínio e o período dessas funções; • Representar graficamente as funções seno e cosseno; • Analisar o efeito de transformações nas funções (translação, amplitude e período); • Aplicar os conhecimentos em situações-problema (atividade experimental).
--	--

Fonte: Elaboração do autor

3. Conteúdos

Quadro 3 — Conteúdos abordados na aula

Conteúdo: Liste os principais tópicos que serão abordados na aula	• Círculo trigonométrico e coordenadas dos pontos correspondentes aos ângulos. • Definição de seno e cosseno. • Funções $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$. • Propriedades: domínio, imagem e período. • Transformações: $y = a \sin(bx + c) + d$ e $y = a \cos(bx + c) + d$. • Aplicações em fenômenos periódicos.
--	---

Fonte: Elaboração do autor

4. Metodologia / Desenvolvimento das Aulas

Quadro 4 — Metodologia - Construção conceitual

Metodologia: Introdução e Construção conceitual	• Motivação Teórica: Apresentar exemplos de fenômenos periódicos (ondas do mar, movimento de um pêndulo, corrente elétrica alternada). • Exploração Conceitual ou Exposição Teórica: Revisar o círculo trigonométrico. Definir: $\sin(x) = y$ e $\cos(x) = y$. Utilizar softwares como GeoGebra ou Excel para construir os gráficos de $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Observar amplitude, período e comportamento das funções. Apresentar exemplos de funções do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$. Discutir o significado dos parâmetros: amplitude, período, deslocamento horizontal (fase), deslocamento vertical. • Atividade Prática : Em duplas, os alunos escolhem uma função do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$ e constroem o gráfico manualmente, podendo este ser em papel quadriculado.
--	---

Fonte: Elaboração do autor

5. Recursos Didáticos

Quadro 5 — Recursos Didáticos

Recursos Didáticos: Indique os materiais e recursos tecnológicos que serão utilizados	• Quadro e marcadores; • Calculadora científica; • Computador e projetor multimídia; • Software GeoGebra ou Desmos; • Material descrito no experimento; • Folhas de atividades.
---	--

Fonte: Elaboração do autor

6. Avaliação

Quadro 6 — Avaliação

Explique como o aprendizado será avaliado	• Diagnóstica: perguntas iniciais sobre círculo trigonométrico. • Formativa: observação da participação e resolução das atividades. • Somativa: exercício final com interpretação de gráficos e problemas contextualizados.
---	--

Fonte: Elaboração do autor

7. Extensão / Tarefa de Casa

Quadro 7 — Extensão

Espaço para notas sobre ajustes necessários, considerações especiais ou feedback dos alunos sobre a aula.	• Pesquisar fenômenos reais que possam ser modelados por funções trigonométricas. • Criar uma função seno ou cosseno que represente um movimento periódico (exemplo: maré, pistão, roda-gigante).
--	--

Fonte: Elaboração do autor

8. Referências

Quadro 8 — Referências

Liste todos os materiais de referência que serão utilizados ou recomendados para estudo adicional.	• Citar referências: livros, artigos, sites, entre outros.
---	--

Fonte: Elaboração do autor

Mediante as fases acima mencionadas, tanto da atividade experimental, quanto do plano de aula, será proposto o plano de aula estruturado, com um exemplo, que se divide em duas etapas. Na primeira, tem-se a estruturação da parte teórica e didática da proposta como plano de aula, em seguida, na segunda etapa, será estruturada a atividade experimental em dois experimentos, um experimento em uma planilha eletrônica e o outro experimento sendo prático com dados reais.

No próximo tópico será apresentado um exemplo do plano de aula, contemplando a atividade experimental em seu descritivo, os experimentos serão apresentados nos próximos tópicos.

- **Plano de aula: Com a atividade experimental**

1. Informações Gerais

- **Disciplina:** [Nome da Disciplina]
- **Professor:** [Nome do Professor]
- **Data:** [DD/MM/AAAA]
- **Duração da Aula:** [X horas/minutos]

2. Objetivos de Aprendizagem

- Compreender o princípio da modelagem matemática;
- Compreender o conceito de função seno e função cosseno;
- Identificar o domínio, o contradomínio e o período dessas funções a partir do experimento;
- Representar graficamente as funções seno e cosseno;
- Analisar o efeito de transformações nas funções (translação, amplitude e período).

3. Conteúdo

- Definição do princípio de modelagem.
- Círculo trigonométrico e coordenadas dos ângulos.
- Definição de seno e cosseno.
- Funções $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$.
- Propriedades: domínio, imagem e período.
- Transformações: $y = a \sin(bx + c) + d$ e $y = a \cos(bx + c) + d$.

4. Metodologia / Desenvolvimento das aulas

- **Motivação Teórica:** Apresentar exemplos de fenômenos periódicos (ondas do mar, movimento de um pêndulo, corrente elétrica alternada).

- **Exploração Conceitual ou Exposição Teórica:**

Revisar o círculo trigonométrico, mostrando como as coordenadas de um ponto variam com o ângulo t .

Definir: $\sin(t) = y$ e $\cos(t) = x$.

Utilizar softwares como GeoGebra ou Excel para construir os gráficos de $\sin(t)$ e $\cos(t)$. Observar amplitude, período e comportamento das funções.

Apresentar exemplos de funções do tipo $y = a \sin(bt + c) + d$. Discutir o significado dos parâmetros: amplitude, período, deslocamento horizontal (fase) e deslocamento vertical.

- **Atividade Experimental:** Demonstração da atividade experimental, de forma que fique claro a aplicação da modelagem das funções seno e cosseno da obtenção dos dados reais do experimento.

5. Recursos Didáticos

- Quadro e marcadores;
- Calculadora científica;
- Computador e projetor multimídia;
- Software GeoGebra ou Desmos;
- Material descrito na atividade experimental;
- Folhas de atividades.

6. Avaliação

- **Diagnóstica:** Perguntas iniciais sobre círculo trigonométrico.
- **Formativa:** Observação da participação e resolução das atividades.
- **Somativa:** Exercício final com interpretação de gráficos e problemas contextualizados.

7. Extensão / Tarefa de casa

- Pesquisar fenômenos reais que possam ser modelados por funções trigonométricas.
- Criar uma função seno ou cosseno que represente um movimento periódico (exemplos: maré, pistão, roda-gigante).

8. Referências

- Listar as referências utilizadas como: livros, artigos, sites, entre outros.

4.4 AULA EXPERIMENTAL: ATIVIDADE 1

O propósito da atividade experimental é prover o contato do aluno com a modelagem matemática em uma situação real. A proposta inicial é que o aluno tenha contato com os dados obtidos inicialmente por meio de uma função periódica, já definida anteriormente, sendo ela de escolha do professor podendo ser seno ou cosseno. A primeira parte da atividade experimental será dividida em 2 fases: montagem da planilha e montagem dos gráficos. Estes dados serão gerados por meio de uma planilha eletrônica conforme o quad. 9, na qual descreve o conteúdo de cada coluna. Com os dados obtidos pela planilha eletrônica será possível realizar a análise e a construção de gráficos que permitem verificar a amplitude e a frequência da função, por meio da transformada de Fourier. A este exemplo trabalha-se com função tabelada de uma função continua na qual será aplicada a transformada de Fourier em tempo discreto.

O quad. 9 representa a planilha eletrônica, pela qual será realizado o primeiro contato com a transformada de Fourier. Descreve-se o significado de cada coluna e a equação que ela contém. As colunas da planilha serão indicadas, na primeira linha, pela sequência de letras de A até H, na segunda linha, será indicado as iniciais dos dados necessário para o cálculo da transformada de Fourier. Neste exemplo trabalhou-se com a função seno, com um período de 1 segundo com uma quantidade de 25 amostras por período.

- Montagem da planilha com as fórmulas

Quadro 9 — Planilha Eletrônica

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x	f(x)	Re	Im	Fk(Hz)	Rad/s	Amplitude
2	0	...						
...								
51	49	...						

Fonte: Elaboração do autor

Na coluna A é colocado o número de amostras que vai de 0 a 49, que é representada pela letra N. Com o número de amostras definidos, pode ser obtido a frequência de amostragem, ou seja, um determinado número de amostras em um período T estabelecido. No exemplo tem-se que $N = 50$ e $T = 1\text{segundo}$, assim pode ser definido a **frequência de amostragem** (F_s): medida em Hz. Neste caso utilizou-se $N=25$, devido ao fato de ser um número pequeno de amostras e será estabelecido para a função periódica de um ciclo por segundo.

$$F_s = \frac{T}{N} = \frac{1}{25} = 0,04$$

A coluna B representa os valores de x acumulados, que serão utilizados na função seno ou cosseno, então:

Quadro 10 — Coluna B

	A	B
1	N	x
2	0	$= 0,04 \cdot A_2$

Fonte: Elaboração do autor

Na coluna C é atribuída a função seno ou cosseno, com a possibilidade de ter seus parâmetros variáveis possibilitando novos valores, conforme mostra a equação 4.1.

$$f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx) \quad (4.1)$$

onde:

- a : deslocamento da função (fase);
- b : amplitude da função;
- c : frequência, representa o número de ciclos da função em um determinado período.

Observação: A função $f(x)$ pode ser composta pela soma de mais de uma função seno, como mostra a equação 4.2.

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(5x) + 5 \operatorname{sen}(2x) \quad (4.2)$$

Na coluna C tem-se os valores calculados da função periódica no ponto x, definida por uma frequência de amostragem, assim obtendo os valores discretos para serem utilizados na transformada de Fourier.

Quadro 11 — Coluna C

	A	...	C
1	N	...	Re
2	0	...	$= b \cdot \operatorname{sen}(c \cdot B_2)$

Fonte: Elaboração do autor

Nas colunas D e E serão calculados valores da transformada de Fourier por meio de uma equação que permite a realização da somatória de valores.

A equação da transformada de Fourier parte real:

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cos(\omega n)$$

A coluna D da planilha contém a equação equivalente ao somatório da equação da transformada de Fourier da parte real, onde implica em soma $f[n] \cos(\omega n)$ para todas as amostras.

Quadro 12 — Coluna D

	A	...	D
1	N	...	Re
2	0	...	=SOMARPRODUTO(\$C\$2:\$C\$51; COS(2*PI()*A2*(LIN(\$C\$2:\$C\$51)-LIN(\$C\$2))/50))

Fonte: Elaboração do autor

A equação da transformada de Fourier parte imaginária:

$$\Im\{X(e^{j\omega})\} = - \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \sin(\omega n)$$

A coluna E da planilha contém a equação equivalente ao somatório da equação da transformada de Fourier da parte imaginária, que implica em soma $f[n] \cos(\omega n)$ para todas as amostras.

Quadro 13 — Coluna E

	A	...	E
1	N	...	Im
2	0	...	=-SOMARPRODUTO(\$C\$2:\$C\$51; SEN(2*PI()*A2*(LIN(\$C\$2:\$C\$51)-LIN(\$C\$2))/50))

Fonte: Elaboração do autor

Na coluna F (F_k) temos a frequência física associada ao índice N, em Hertz dada pela equação abaixo:

$$F_k = \frac{k}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{1 \cdot 0,04} = 0,05 Hz$$

onde:

- k = índice da frequência (0, 1, 2, ..., $N - 1$)
- N = número total de amostras
- Δt = tempo entre amostras (0,04 s)

Quadro 14 — Coluna F

	A	...	F
1	N	...	F_k
2	0	...	$= A_2 \cdot 0,5$

Fonte: Elaboração do autor

A coluna G da planilha contém a equação equivalente à frequência em radianos por segundo:

$$\text{Rad/s} = 2 \cdot \pi \cdot F_k$$

Quadro 15 — Coluna G

	A	...	G
1	N	...	Rad/s
2	0	...	$= 2 \cdot \pi \cdot F_3$

Fonte: Elaboração do autor

A coluna H da planilha contém a equação equivalente à amplitude, que seria o módulo do número real mais o imaginário, tem-se módulo da parte real e parte imaginária:

$$|X_k| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

Quadro 16 — Coluna H

	A	...	H
1	N	...	Amplitude (A_k)
2	0	...	$=\text{SE}(A2=0;2*\text{RAIZ}(D2^2 + E2^2)/50;2*\text{RAIZ}(D2^2 + E2^2)/(50))$

Fonte: Elaboração do autor

Amplitude Real (A_k):

$$A_k = \frac{2|X_k|}{N}$$

Amplitude: valor máximo que a função pode atingir. A planilha permite calcular a amplitude real F_k , estabelecida pela função e a frequência (Hz) do sinal, ou seja, na função $f(x) = a + b \sin(cx)$ a amplitude sendo b e a frequência sendo c . A fig. 13 representa a planilha eletrônica completa.

Figura 13 — Planilha Eletrônica

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x	F(x)	Re	Im	Fk (Hz)	Rad/s	Amplitude real
2	0	0	0,00	0,00	0,00	0	0,0	0,00
3	1	0,04	2,98	0,00	0,00	0,5	3,1	0,00
4	2	0,08	5,78	0,00	-300,00	1	6,3	12,00
5	3	0,12	8,21	0,00	0,00	1,5	9,4	0,00
6	4	0,16	10,13	0,00	0,00	2	12,6	0,00
7	5	0,2	11,41	0,00	0,00	2,5	15,7	0,00
8	6	0,24	11,98	0,00	0,00	3	18,8	0,00
9	7	0,28	11,79	0,00	0,00	3,5	22,0	0,00
10	8	0,32	10,85	0,00	0,00	4	25,1	0,00

Fonte: Próprio autor

Observa-se na planilha completa na coluna (F) da frequência em hertz quando $N=2$, temos a frequência igual a 1 Hz e observa-se que na coluna (H) com $N=2$, o valor de 12 e os demais valores iguais a 0, onde a função utilizada é da equação 4.3.

$$f(x) = 12 \sin(1x) \quad (4.3)$$

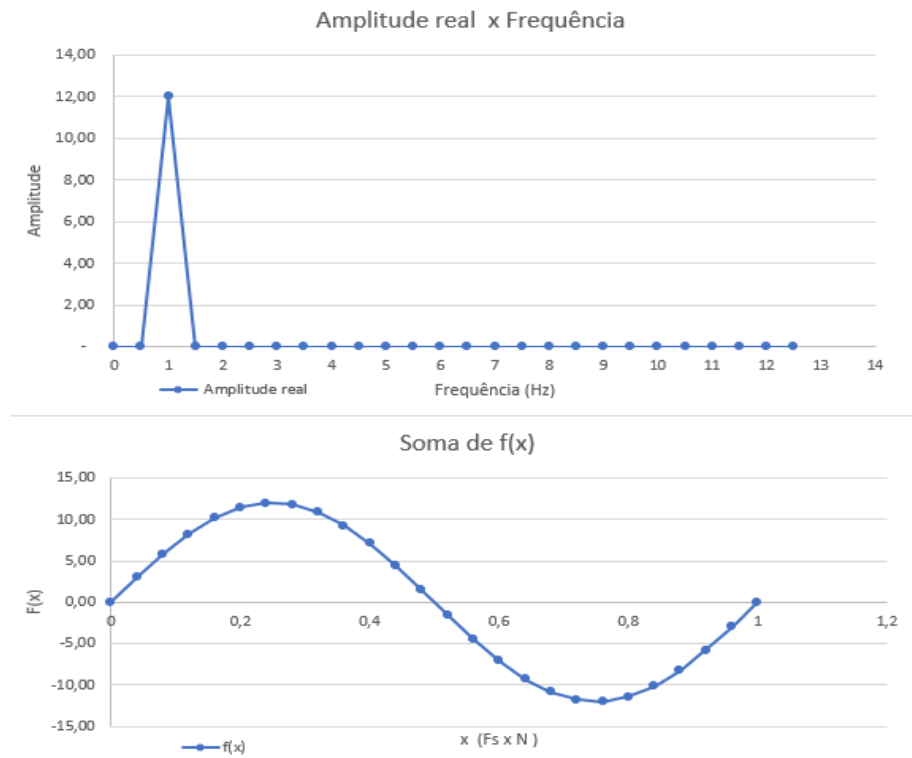
• Construção de gráficos para análise

Obtendo os dados com a planilha eletrônica pode-se montar gráficos para análise, em que o eixo x é a frequência e o eixo y a amplitude da função ou do sinal. O gráfico $f(x)$ terá a função $f(x) = a + b \sin(cx)$ e suas derivações de acordo com a prática. No trabalho serão apresentadas três situações: $f(x) = 12 \sin(1x)$; $f(x) = 12 \sin(6x)$ e $f(x) = 12 \sin(5x) + 5 \sin(2x)$.

A fig. 14 representa a função $f(x) = 12 \sin(1x)$, pode-se observar que a amplitude do gráfico é a mesma da função e é representada no gráfico amplitude x frequência, os dados de amplitude são obtidos por meio da transformada de Fourier.

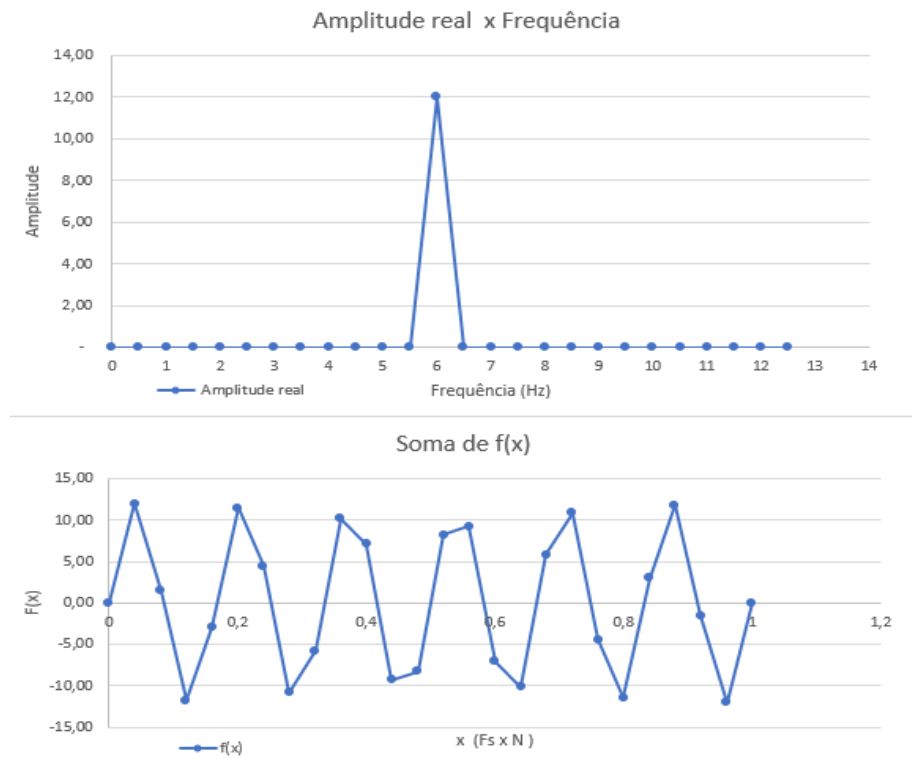
Na fig. 15 representa a função $f(x) = 12 \sin(6x)$, pode-se observar que a amplitude do gráfico se manteve a mesma da função e foi alterado sua frequência, os dados de amplitude são obtidos por meio da transformada de Fourier.

Figura 14 — Amplitude e Função seno $f(x) = 12 \sin(1x)$



Fonte: Próprio autor

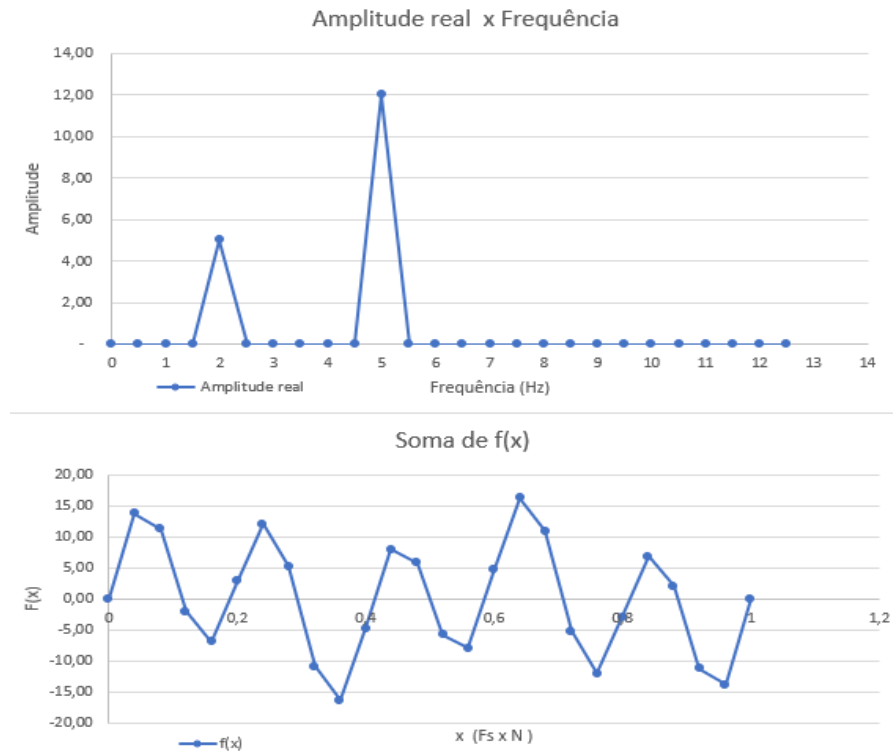
Figura 15 — Amplitude e função seno $f(x) = 12 \sin(6x)$



Fonte: Próprio autor

A fig. 16 representa a função $f(x) = 12\text{sen}(5x) + 5\text{sen}(2x)$, observa-se que os valores de amplitude e frequência são obtidos pela transformada de Fourier, no gráfico amplitude x frequência estão representados. No gráfico na forma de uma senoide, não é fácil observar a existência da soma das funções, mas com a transformada é possível obter os dados de frequência e amplitude das funções.

Figura 16 — Amplitude e soma de funções seno

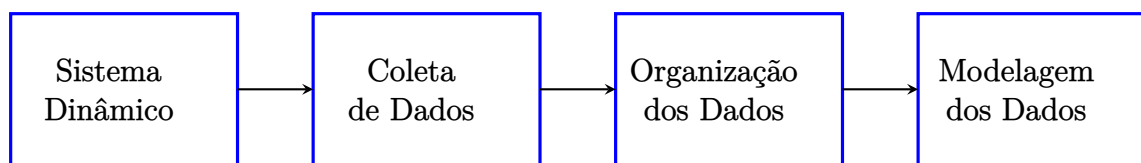


Fonte: Próprio autor

4.5 AULA EXPERIMENTAL: ATIVIDADE 2

A segunda atividade da aula experimental tem como objetivo prover dados reais de um sistema dinâmico. O sistema dinâmico no experimento tem por finalidade a obtenção de dados de aceleração, por meio do sensor que registra a aceleração do sistema sensor este MPU6050, o qual possui sensoriamento nos três eixos (x,y e z). O objetivo é gerar dados reais, coletados para serem analisados, por meio da transformada de Fourier, a fig. 17 apresenta o fluxograma do sistema dinâmico.

Figura 17 — Fluxo do Experimento



Fonte: Próprio autor

Para a realização do experimento, serão divididos três passos: componentes para o experimento, montagem dos componentes e coleta de dados.

• Passo 1: Componentes necessários para o experimento

Para a realização do experimento serão necessários os materiais listados abaixo, também será necessário que no computador seja instalado o Arduino para a gravação do arquivo que vai realizar a comunicação entre o sensor e placa Arduino Uno e também que tenha sido instalado o Python, que vai fazer uso da algoritmo da transformada de Fourier, por meio de sua biblioteca.

Material utilizado para o experimento:

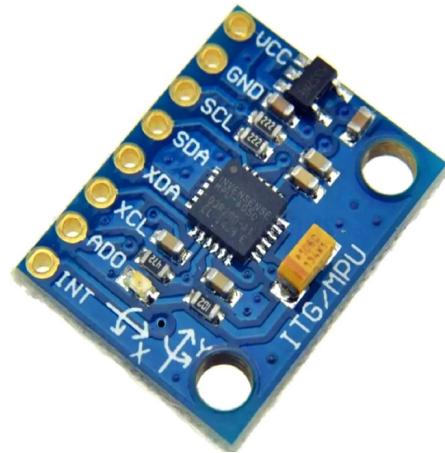
1. Computador com Arduino e Python 3.11 instalado;
2. Bomba de ar para aquário;
3. Placa Arduino UNO;
4. Cabo com USB e terminal para fonte;
5. Sensor MPU 5060;
6. Cabos ligação do sensor no Arduino;
7. Fita dupla face;

As fig. 18 e fig. 19 são as representações dos materiais para o experimento. Sendo que a fig. 19 (b) tem como finalidade, apresentar a ligação do sensor com a placa Arduino Uno.

Figura 18 — Arduino Uno e o Sensor Acelerômetro



(a) Arduino Uno



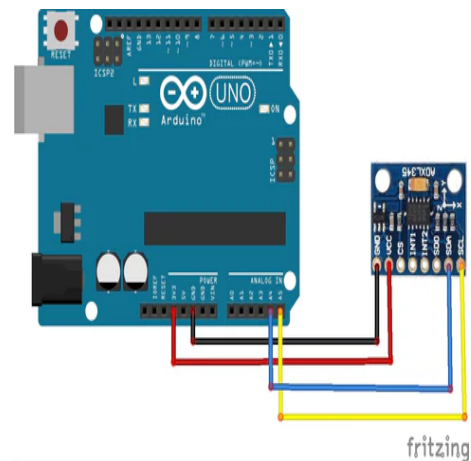
(b) Sensor Acelerômetro

Fonte: Próprio autor

Figura 19 — Bomba de ar de aquário e Ligação do Sensor



(a) Bomba de aquario



(b) Liação do Sensor Acelerômetro

Fonte: Próprio autor

• Passo 2: Montagem dos Componentes

Descritivo da sequência para ligação dos componentes:

- a) Ligar terminais do sensor na placa Arduino Uno de acordo com o diagrama da fig. 19 (b).

- b) Ligação da placa Arduino Uno com o computador: com o cabo com o terminal USB de um dos lados e conector de fonte do outro, liga-se no computador a uma saída USB e a outra extremidade na placa no Arduino Uno conforme fig. 20 (b).
- c) Fixar sensor: Fixação do sensor na bomba de ar de aquário de acordo com a fig. 20(a).
- d) Ligação da bomba de ar de aquário: conectar a bomba de ar de aquário em uma fonte 110 v.
- e) Instalar software Arduino e Python no computador (com a placa Arduino desligada).

Com os componentes instalados e o software, realizar os testes de funcionamento: abrir o software Arduino e configurar a placa de acordo com o componente adquirido (Arduino Uno) e verificar em qual porta esta conectado o cabo USB e configurar de acordo com a instalação do software e ligar todo o sistema.

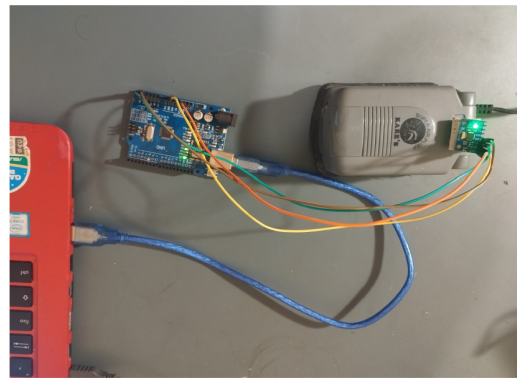
A verificação de funcionamento do sensor será realizada após a instalação do programa de leitura de dados na placa do Arduino Uno.

Figura 20 — Ligação: sensor, bomba de ar e placa Arduino Uno



(a) Fixação sensor na bomba de ar

Fonte: Próprio autor



(b) Liação do sistema

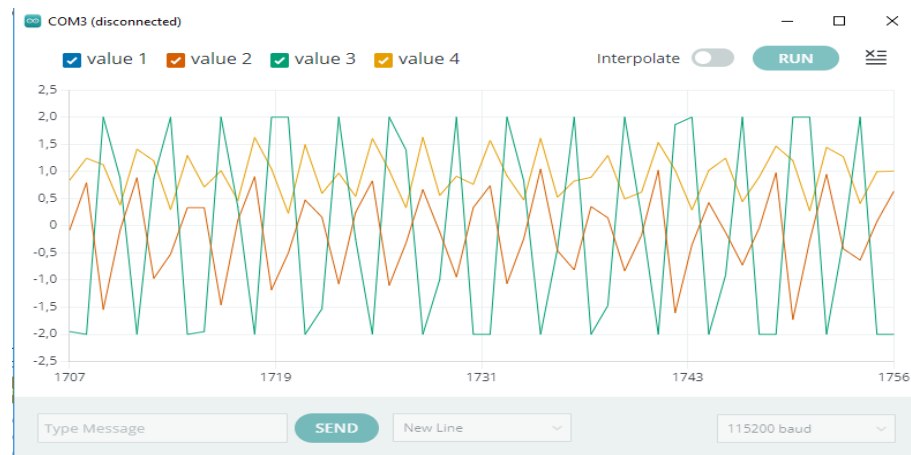
• Passo 3: Coleta de Dados

Para a coleta de dados devem ser seguidas as seguintes etapas:

Primeira Etapa: Abrir o software Arduino e carregar o programa (Apêndice A) de leitura de dados do sensor no software Arduino e gravar o programa na placa do Arduino Uno.

Observação: Com o programa gravado na placa, o software Arduino pode verificar o funcionamento do sensor ligando a bomba de aquário e observar a coleta de dados pelo software Arduino.

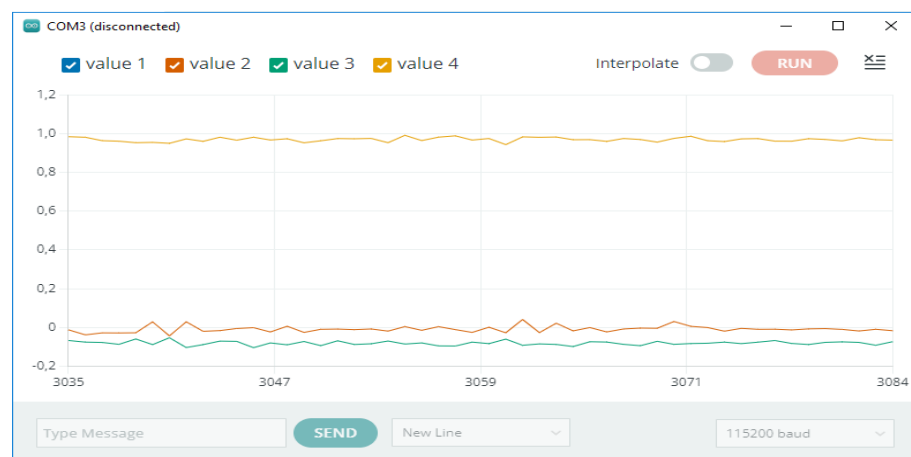
Figura 21 — Coleta de dados bomba de aquário no Arduino



Fonte: Próprio autor

A fig. 21 apresenta os dados coletados com a bomba de aquário em funcionamento, identificando os três eixos como value 1, value 2 e value 3, são valores reais de vibração devido ao funcionamento do sistema, coletadas pelo sensor de aceleração.

Figura 22 — Bomba de aquário parada

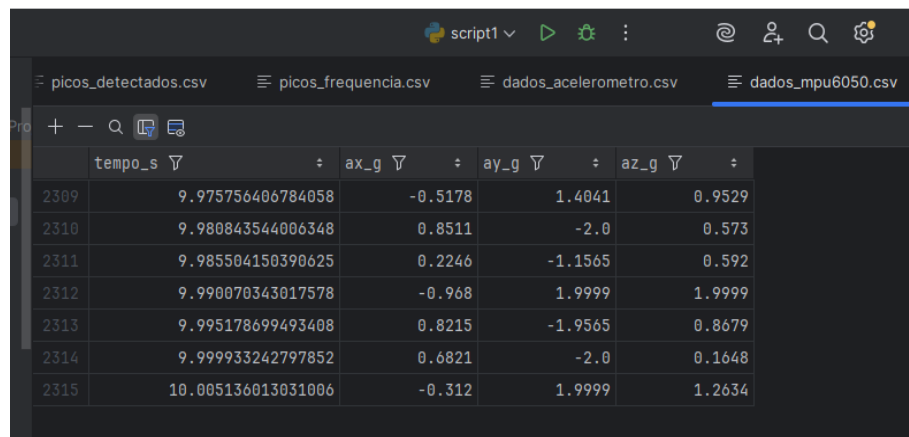


Fonte: Próprio autor

A fig. 22 apresenta os dados coletados com a bomba de aquário parada, identificando os três eixos como value 1, value 2 e value 3, são valores reais obtidos pelo sensor de aceleração.

Segunda Etapa: Abrir o software Python e carregar o programa (Apêndice B) de leitura e coleta de dados. O programa realiza a coleta de dados e armazena em um arquivo para ser analisado com a bomba de aquário em funcionamento, após a coleta o sistema pode ser desligado, pois os dados estão armazenados no arquivo.

Figura 23 — Coleta de dados Python



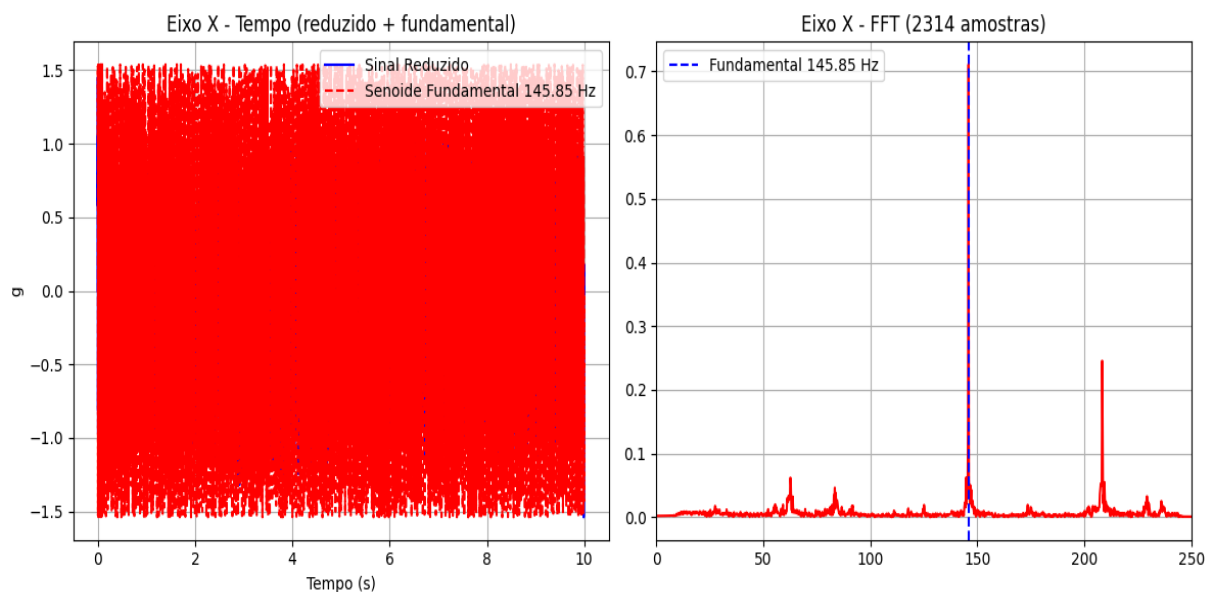
The screenshot shows a Python IDE with a CSV file named 'dados_mpu6050.csv' open. The file contains a table with 5 columns: 'tempo_s', 'ax_g', 'ay_g', and 'az_g'. The data is as follows:

	tempo_s	ax_g	ay_g	az_g
2309	9.975756406784058	-0.5178	1.4041	0.9529
2310	9.980843544006348	0.8511	-2.0	0.573
2311	9.985504150390625	0.2246	-1.1565	0.592
2312	9.990070343017578	-0.968	1.9999	1.9999
2313	9.995178699493408	0.8215	-1.9565	0.8679
2314	9.999933242797852	0.6821	-2.0	0.1648
2315	10.005136013031006	-0.312	1.9999	1.2634

Fonte: Próprio autor

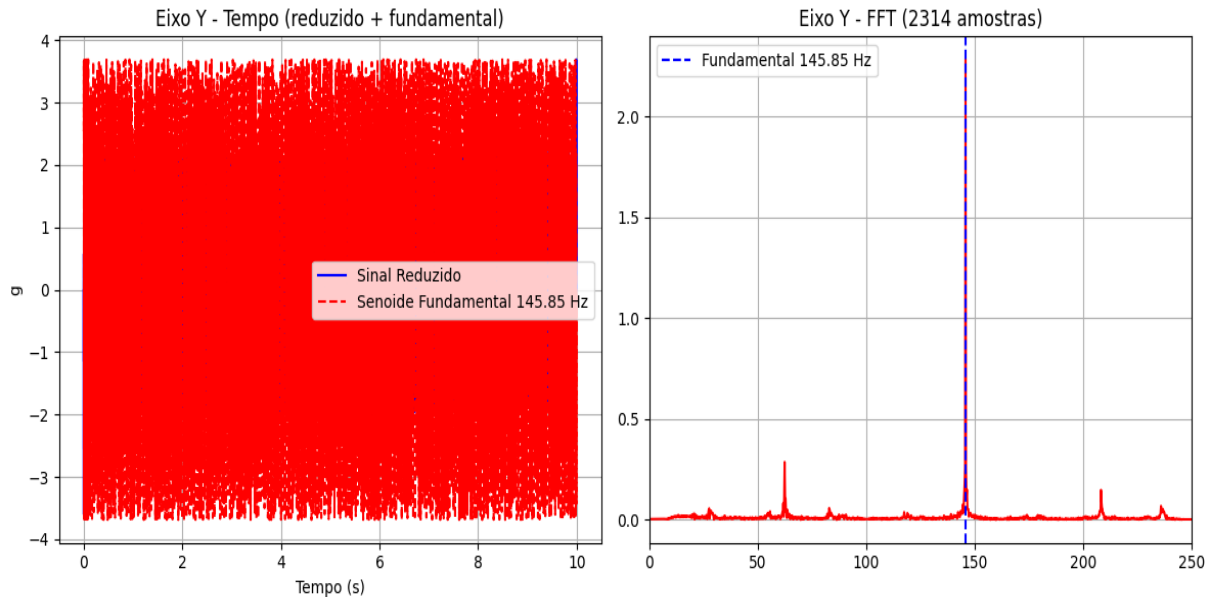
Terceira Etapa: O arquivo do Python contendo os dados, carregar o programa de análise de dados (Apêndice C), por meio deste programa, que utiliza a transformada de Fourier, para obter a amplitude e frequência fundamental da amostra. O programa vai gerar os gráficos das fig. 24, fig. 25 e fig. 26.

Figura 24 — Dados do Eixo X - Número Total de Amostras



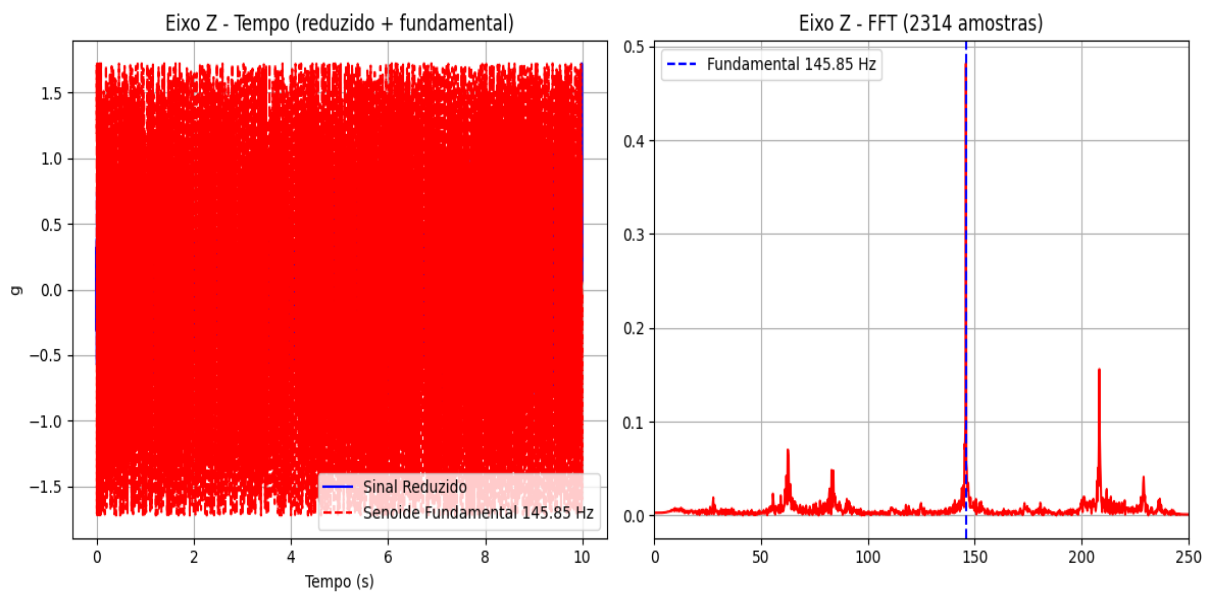
Fonte: Próprio autor

Figura 25 — Dados do Eixo Y - Número Total de Amostras



Fonte: Próprio autor

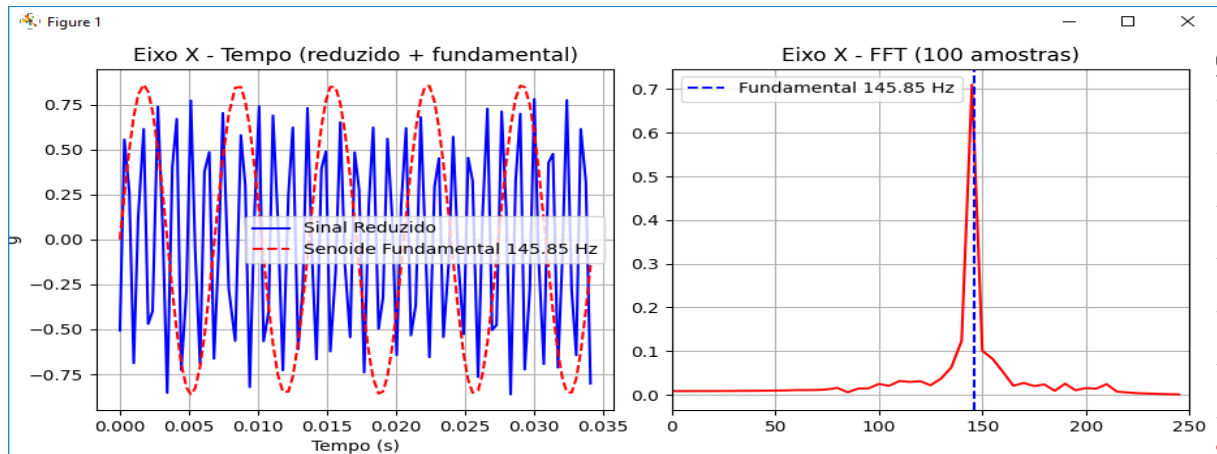
Figura 26 — Dados do Eixo Z - Número Total de Amostras



Fonte: Próprio autor

As fig. 24, fig. 25 e fig. 26 representam os valores obtidos na coleta de dados, que foram divididas em duas partes, uma representa os dados das amostras (tempo x aceleração) e a outra representa as frequências e amplitudes, respectivamente (frequência x amplitude). Em cada figura está indicado o eixo que gerou a aceleração e também está indicado a quantidade de amostras geradas pelo sistema durante o período de coleta.

Figura 27 — Dados do Eixo X - Número Reduzido de Amostras



Fonte: Próprio autor

Na fig. 27 tem-se o número de amostras reduzido, e é apresentada a frequência fundamental e sua amplitude, observa-se que a frequência fundamental e amplitude apresenta-se com os mesmos valores. A transformada de Fourier permite obter a frequência fundamental a partir de um número reduzido de amostras.

Figura 28 — Configuração do Programa - Número Reduzido de Amostras

```

script1.py x grafico_global.png grafico_X.png grafico_Y.png grafico_Z.png
16
17 # =====
18 # CONFIGURAÇÕES
19 # =====
20 ARQUIVO = "dados_mpu6050.csv"
21 FS = 500
22 DT = 1/FS
23 G_TO_MS2 = 9.80665
24
25 LP_FREQ = 245 # filtro passa baixa
26 HP_FREQ = 50 # filtro passa alta
27 LIMAR_AMPLITUDE = 0.1
28 TEMPO_COLETA = 10
29 NUM_CICLOS = 10 # número de ciclos desejado
30
31 # =====

```

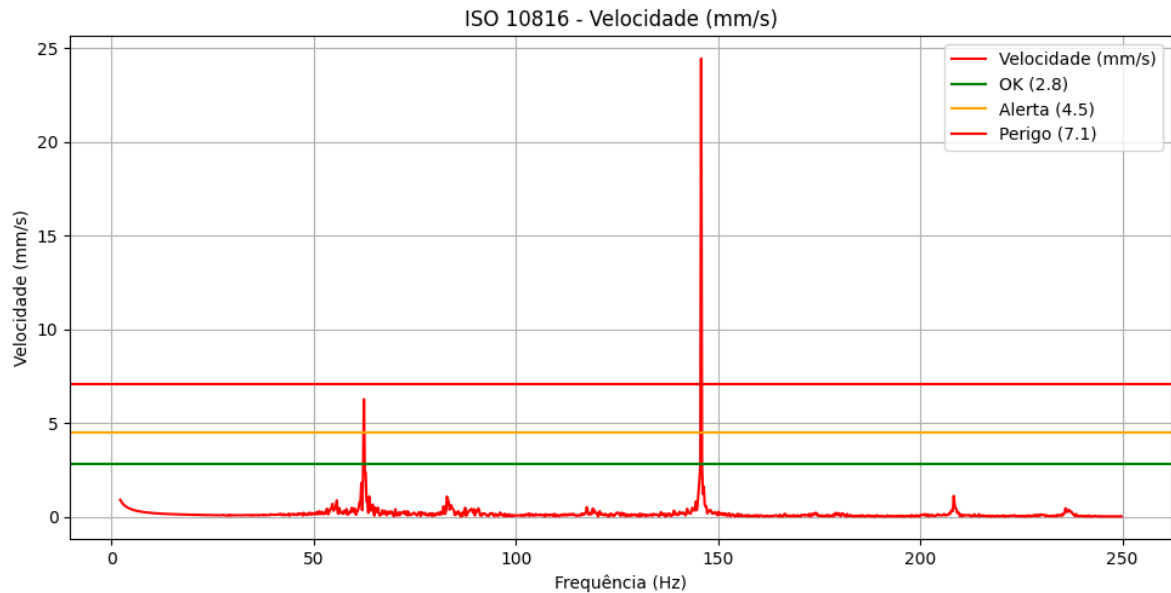
Fonte: Próprio autor

A fig. 28 representa uma parte do programa que pode ser realizado a configuração

para um número reduzido de amostras na obtenção da frequência fundamental.

Com os dados obtidos em aceleração, o programa do apêndice C gera um gráfico que apresenta frequência x velocidade, está indicando o deslocamento do sistema dinâmico.

Figura 29 — Velocidade x Frequência



Fonte: Próprio autor

A fig. 29 apresenta o deslocamento do sistema e faz uma referência à norma ISO 10816, que trata dos limites de velocidades para sistemas dinâmicos.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

O planejamento das aulas e suas atividades são de extrema importância para um aprendizado eficiente. Assim, observa-se o quanto um plano de aula e uma aula experimental bem planejada tornam o ensino mais consistente, atrativo e interessante para o aluno.

Em discussões nos capítulos anteriores sobre o plano de aula e a aula experimental foram subdivididos em tópicos nos quais observou-se uma semelhança e uma similaridade entre ambos, no qual o quad. 17 apresenta.

Quadro 17 — Plano de Aula x Aula Experimental

Plano de Aula	Aula Experimental	Plano de Aula Experimental
• Informações Gerais; • Objetivos da Aprendizagem; • Conteúdo; • Metodologia; • Recursos didáticos; • Avaliação • Extensão / Tarefa de casa; • Referências.	• Organização; • Apresentação; • Execução; • Registro; • Análise; • Considerações Finais.	• Informações Gerais; • Objetivo da Aprendizagem / Organização; • Conteúdo / Apresentação; • Metodologia / Execução; • Recursos Didáticos; • Avaliação / Análise; • Extensão / Considerações Finais; • Referências.

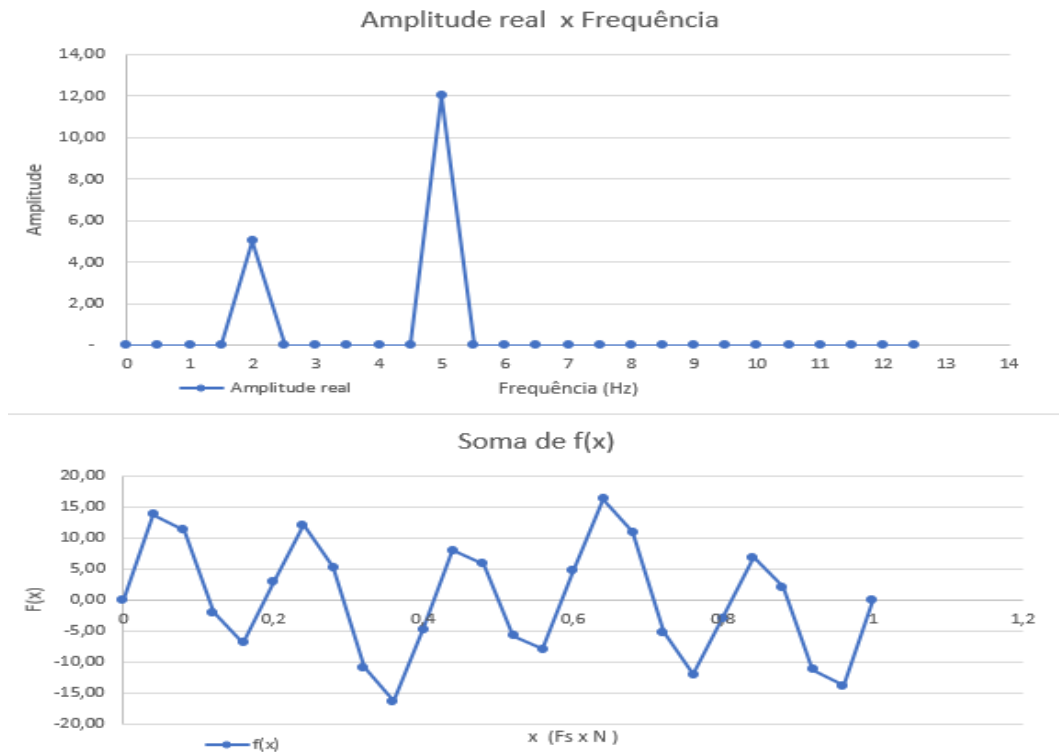
Fonte: Elaboração do autor

Devido a esta observação pode-se concluir que o próprio plano de aula, sendo este por definição flexível o que torna possível a integração ou a junção entre ambos, podendo ser definido como um plano de aula experimental. Tornando o trabalho do professor mais direcionado, sendo um guia de orientação para o planejamento de suas aulas.

Na atividade experimental introdutória na qual se utiliza a planilha eletrônica fica evidente a funcionalidade em observar os parâmetros das funções periódicas como frequência e amplitude, ao se aplicar a modelagem matemática utilizando a transformada de Fourier no qual podemos observar na fig. 30, em que a identificação da amplitude e a

frequência da senoide se apresenta como no gráfico.

Figura 30 — Amplitude x Frequência



Fonte: Próprio autor

Ainda na planilha eletrônica o professor tem acesso à inserção de novos parâmetros, como pode-se observar na função $f(x) = 12 \sin(5x) + 5 \sin(2x)$, facilitando o ensino das funções periódicas com novos exemplos, tornando a atividade mais dinâmica. Gerando uma expectativa no aluno para a aula experimental com os equipamentos que permitem a geração de dados reais de vibração, como proposto no trabalho.

Observando a definição de vibração, que é o movimento de um corpo em torno de uma posição de referência, de forma periódica ou não, causado por forças dinâmicas. Um exemplo desse movimento em que se percebe a existência de vibração são os equipamentos rotativos, sendo o ventilador doméstico podendo ser um deles.

Esta definição em Física é representada pelo movimento harmônico simples (MHS), que é um tipo de movimento vibratório no qual a força que atua sobre o corpo é sempre dirigida para a posição de equilíbrio e é proporcional ao deslocamento do corpo em relação a essa posição.

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2016), a posição de um corpo que executa MHS pode ser descrita por uma função periódica do tempo, dada pela equação:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Esta equação, $x(t)$ representa o deslocamento do corpo em relação à posição de

equilíbrio no instante t , A é a amplitude do movimento, ω é a frequência angular do sistema, relacionada à frequência f por $\omega = 2\pi f$, e φ é a fase inicial, que depende das condições iniciais do movimento.

A este destaque em Física tem-se as funções que foram trabalhadas na aula experimental, na qual pode-se observar a semelhança entre ambas.

- Função Periódica

$$f(x) = b \cos(cx)$$

- Representação em física (MHS)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Analisando as duas funções observa-se que a amplitude do movimento representada pela letra “A” e a amplitude da função periódica representada pela letra “b” são de mesma relação, ou seja, a transformada de Fourier permite obter a amplitude em relação a ambas, em contextos diferentes. Traduzindo para Física, temos a amplitude do movimento, seja este então o deslocamento da massa associada à vibração, sendo obtido a frequência e a amplitude de deslocamento da massa.

Fazer uma analogia entre as duas equações permite que o professor tenha condições, por meio do experimento, de ensinar as funções periódicas e exemplificar o uso das funções para obter valores relevantes em sistemas dinâmicos.

Capítulo 6

Considerações Gerais

O trabalho desenvolvido tem por objetivo, apresentar uma prática pedagógica no ensino de Matemática das funções periódicas do tipo seno e cosseno, voltada ao Ensino Médio-técnico, por meio de uma aula experimental com um experimento de baixo custo, permitindo a modelagem matemática dos dados coletados no experimento, por meio da transformada de Fourier para serem analisados.

A prática pedagógica se dividiu em dois experimentos, um consiste na utilização de uma planilha eletrônica, permitindo ao aluno a observação fragmentada do modelo e os conceitos matemáticos das funções periódicas associados a estes fragmentos. A segunda parte consiste no experimento prático, onde o modelo é aplicado na íntegra. Na busca por um formato para o planejamento da prática pedagógica, considerou-se a possibilidade da junção do plano de aula tradicional com a aula experimental, obtendo um plano de aula experimental.

Como um dos objetivos do trabalho é prover que o aluno tenha contato com uma ferramenta de modelagem matemática, foi apresentado uma sequência de experimentos em que o aluno vai tomando conhecimento da ferramenta na medida em que são executados, evidenciando que um simples experimento pode conter um alto grau de conhecimento de uma ferramenta com grande aplicabilidade em diversas áreas de conhecimento das ciências e engenharias.

A dinâmica do experimento em uma situação real tem como impacto não só prover conhecimento de Matemática ao aluno, mas também em despertar no aluno o interesse na Matemática e sua aplicação em situações reais por meio da modelagem. Com o experimento, o aluno tem valores e dados de uma situação real que pode ser associada a uma série de equipamentos que fazem parte do desenvolvimento de suas habilidades e competências no Ensino Médio-técnico.

A contribuição do trabalho está na prática pedagógica que permite ensinar as funções periódicas seno e cosseno por meio de um experimento de baixo custo. Isto ajuda a traduzir de forma simples e com exemplos práticos das aplicações e facilitando o ensino das funções periódicas.

Para a continuação deste trabalho, observa-se a importância da aplicação dos experimentos em sala de aula e os relatos dos resultados observados pelo professor após a aplicação da prática pedagógica.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

ANDRADE, T. M. **Matemática Interligada: Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação**. 1. ed. São Paulo-SP, Brasil: Editora Scipione, 2020.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo: Volume II**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

ARAUJO, J. L.; AVELAR, P. R. N. Modelagem Matemática e o Desenvolvimento do Pensamento Integral. **Bolema, Rio Claro (SP)**, v. 36, n. 72, p. 239–261, abr. 2022. DOI: 10.1590/1980-4415v36n72a11. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a11>.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Uberlândia, MG: Universidade Federal de Uberlândia (UFU), 2014.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. Jr.; SOUSA, P. R. C. **Matemática Completa**. 4. ed. São Paulo, SP, Brasil: FTD, 2016.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 10. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2017. ISBN 9781119381648.

BRINER, Rob B.; DENYER, David. Systematic Review and Evidence Synthesis as a Practice and Scholarship Tool. In: ROUSSEAU, Denise M. (ed.). **The Oxford Handbook of Evidence-Based Management**. Oxford: Oxford University Press, 2012. p. 112–129.

CARVALHO, D. **Desenvolvimento de um sistema de baixo custo para detecção precoce de desgaste em rolamentos de motores de indução trifásicos usando análise de vibrações**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. Escola de Engenharia – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

CHIARADIA, E. J. **Sintetizando Funções: Uma Aplicação das Séries de Fourier**. 2018. Dissertação de Mestrado – Universidade Florestal, Minas Gerais, Brasil.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. ISBN 9788524401206.

FORESTI, Miriam Celí P. P. Sobre prática pedagógica, planejamento e metodologia de ensino: a articulação necessária. *In*: PINHO, Sheila Zambello de (ed.). **Oficina de estudos pedagógicos: reflexões sobre a prática do ensino superior**. São Paulo: Cultura Acadêmica; Editora UNESP/Pró-Reitoria de Graduação, 2008. p. 103–116. Disponível em: <http://docplayer.com.br/11119086-Oficinas-de-estudos-pedagogicos-reflexoes-sobre-a-pratica-do-ensino-superior.html>.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física: Mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC, 2016.

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. Tradução da 2ª edição norte-americana. ISBN 9788536305094.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1997. ISBN 9788585818814.

MAGALHÃES JÚNIOR, Carlos Alberto de Oliveira; BATISTA, Michel Corci (ed.). **Metodologia da Pesquisa em Educação e Ensino de Ciências**. 1. ed. Maringá, PR: Gráfica e Editora Massoni, 2021. ISBN 978-65-87542-35-5.

MENEZES, Alexandre Junior de Souza. **Arte de planejar: guia prático para elaboração de planos de aula**. Petrolina, PE: [s. n.], 2024.

NORMAS TÉCNICAS, Associação Brasileira de. **NBR 10082: Vibração — Terminologia**. Rio de Janeiro, 1987. Norma Brasileira.

ROCHA, R. A. R. **Uma análise semiótica da comunicação em atividades de Modelagem Matemática com experimentação**. 2021. f. 153. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina.

SÁ, Pedro Franco de. As atividades experimentais no ensino de matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura — REMATEC**, v. 15, n. 35, p. 143–162, 2020. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n15.p143-162.id290. Disponível em: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n15.p143-162.id290>.

SALVADEGO, Wanda Naves Cocco. **A atividade experimental no ensino de Química: uma relação com o saber profissional do professor do ensino médio**. 2008. f. 161. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTOS, Reginaldo J. **Transformada de Fourier**. [Online; acessado em 18 de dezembro de 2017]. 2017. Disponível em: <https://regijs.github.io/eqdif/transfourier.pdf>.

SCHRENK, M. J.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como prática pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação**

Matemática, v. 24, n. 1, p. 194–224, 2022. DOI: 10.23925/1983-3156.2022v24i1p194-224. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/54665>.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011. Inclui bibliografia. ISBN 978-85-249-1716-5.

TOLSTOV, G. P. **Fourier Series**. 1. ed. New York, NY, USA: Dover Publications, 1976.

Apêndice A — Código fonte Arduino

O código apresentado a seguir foi utilizado para aquisição dos sinais e cálculo da transformada de Fourier no Arduino.

```
#include <Adafruit_ADXL345_U.h>
#include <Adafruit_I2CDevice.h>
#include <Adafruit_SPIDevice.h>
#include <Adafruit_Sensor.h>
#include <arduinoFFT.h>
#include "arduinoFFT.h" // importa a biblioteca da transformada de fourier
int SAMPLES = 512; // número de amostras
#define SAMPLING_FREQUENCY 10000 // Hertz

arduinoFFT FFT = arduinoFFT(); // cria o objeto FFT

unsigned int sampling_period_us;
unsigned long microseconds;
unsigned long tempo;
double vReal[128];
double vImag[128];
byte opcao;
int N, escolha = 1;
int i, j, k;
float kk;
int apodizacao[] = {
    FFT_WIN_TYP_RECTANGLE,
    FFT_WIN_TYP_HAMMING,
    FFT_WIN_TYP_HANN,
    FFT_WIN_TYP_TRIANGLE,
    FFT_WIN_TYP_NUTTALL,
    FFT_WIN_TYP_BLACKMAN,
    FFT_WIN_TYP_BLACKMAN_NUTTALL,
    FFT_WIN_TYP_BLACKMAN_HARRIS,
    FFT_WIN_TYP_FLT_TOP,
    FFT_WIN_TYP_WELCH
};
};
void setup() {
    Serial.begin(115200);
    sampling_period_us = round(1000000 * (1.0 / SAMPLING_FREQUENCY));
}
void loop() {
    if (Serial.available() > 0) {
        opcao = Serial.read();
    }
    switch (opcao) {
        case 'E':
            SAMPLES = Serial.parseInt();
            escolha = Serial.parseInt();
            Serial.print(SAMPLES);
            opcao = 100;
            break;
        case 'A':
            tempo = millis();
            for (i = 0; i < SAMPLES; i++) {
```

```

        microseconds = micros();
        vReal[i] = analogRead(0);
        vImag[i] = 0;
        while (micros() < (microseconds + sampling_period_us)) { }
    }
    for (k = 0; k < SAMPLES; k++) {
        kk = (k * 0.1);
        Serial.print(kk, 6);
        Serial.print(",");
        Serial.println(vReal[k]); }
    FFT.Windowing(vReal, SAMPLES, apodizacao[escolha], FFT_FORWARD);
    FFT.Compute(vReal, vImag, SAMPLES, FFT_FORWARD);
    FFT.ComplexToMagnitude(vReal, vImag, SAMPLES);
    for (j = 0; j < (SAMPLES / 2); j++) {
        Serial.print((j * 1.0 * SAMPLING_FREQUENCY) / SAMPLES, 1);
        Serial.print(",");
        Serial.println(vReal[j], 1);
    }
    opcao = 100;
    break;
}
}

```

Apêndice B — Código Python - Aquisição

O código apresentado a seguir foi utilizado para aquisição dos sinais e geração de arquivo no Python.

```
import serial
import time
import numpy as np
import csv

# === CONFIGURAÇÕES ===
PORTA_SERIAL = 'COM4' # Ajuste conforme necessário
BAUD_RATE = 115200
TEMPO_COLETA = 5 # segundos

# === INICIALIZA SERIAL ===
ser = serial.Serial(PORTA_SERIAL, BAUD_RATE, timeout=1)
time.sleep(2) # Aguarda Arduino iniciar
# === VARIÁVEIS ===
tempo = []
ax_list, ay_list, az_list = [], [], []

print("Iniciando coleta...")

start_time = time.time()
while (time.time() - start_time) < TEMPO_COLETA:
    try:
        linha = ser.readline().decode(errors='ignore').strip()
        if not linha:
            continue
        # --- Filtrar linhas no formato correto ---
        if linha.startswith("TIME,"):
            partes = linha.split(",")
            if len(partes) == 4:
                try:
                    ax = float(partes[1])
                    ay = float(partes[2])
                    az = float(partes[3])

                    tempo.append(time.time() - start_time)
                    ax_list.append(ax)
                    ay_list.append(ay)
                    az_list.append(az)
                except:
                    continue
    except Exception as e:
        print("Erro na leitura:", e)
        continue
ser.close()
print("Coleta finalizada.")

# === CONVERSÃO PARA ARRAYS ===
tempo = np.array(tempo)
```

```

ax = np.array(ax_list)
ay = np.array(ay_list)
az = np.array(az_list)

if len(tempo) < 2:
    print("Erro: dados insuficientes.")
    exit()

# === FUNÇÕES DE PROCESSAMENTO ===
def calcular_velocidade(accel, delta_t):
    # Converte aceleração em m/s²
    return np.cumsum(accel * 9.81) * delta_t

def calcular_deslocamento(vel, delta_t):
    return np.cumsum(vel) * delta_t

# === DELTA T ===
delta_t = tempo[1] - tempo[0]

# === CÁLCULOS POR EIXO ===
vel_x = calcular_velocidade(ax, delta_t)
vel_y = calcular_velocidade(ay, delta_t)
vel_z = calcular_velocidade(az, delta_t)

desl_x = calcular_deslocamento(vel_x, delta_t)
desl_y = calcular_deslocamento(vel_y, delta_t)
desl_z = calcular_deslocamento(vel_z, delta_t)

# === SALVAR DADOS EM CSV ===
def salvar_dados_csv(nome_arquivo="dados_mpu6050.csv"):
    if len(tempo) == 0:
        print("Nenhum dado para salvar!")
        return

    with open(nome_arquivo, 'w', newline='') as arquivo_csv:
        writer = csv.writer(arquivo_csv)
        writer.writerow(['tempo_s', 'ax_g', 'ay_g', 'az_g'])
        for t, x, y, z in zip(tempo, ax, ay, az):
            writer.writerow([t, x, y, z])

    print("\n=== RELATÓRIO DE COLETA ===")
    print(f"Total de amostras coletadas: {len(tempo)}")
    print(f"Frequência de amostragem estimada: {1/delta_t:.1f} Hz")
    print(f"Tempo total registrado: {tempo[-1]:.3f} s")
    print(f"Arquivo salvo como: {nome_arquivo}")

    print("\nPrimeiras amostras:")
    for i in range(min(5, len(tempo))):
        print(f"{tempo[i]:.2f}s | ax={ax[i]:.3f}g | ay={ay[i]:.3f}g | az={az[i]:.3f}g")

salvar_dados_csv()

```

Apêndice C — Código Python - Análise

O código apresentado a seguir foi utilizado para analisar os dados coletados que estão no arquivo do Python.

```
import csv
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

try:
    from scipy.signal import butter, filtfilt
    SCIPY_OK = True
except ImportError:
    SCIPY_OK = False
    print("Scipy não instalado - filtros não serão aplicados.")

try:
    from scipy.fft import fft, fftfreq
except ImportError:
    from numpy.fft import fft, fftfreq

# =====
# CONFIGURAÇÕES
# =====
ARQUIVO = "dados_mpu6050.csv"
FS = 500
DT = 1/FS
G_TO_MS2 = 9.80665

LP_FREQ = 245      # filtro passa baixa
HP_FREQ = 10       # filtro passa alta
LIMIAR_AMPLITUDE = 0.1
TEMPO_COLETA = 10
NUM_CICLOS = 0 # número de ciclos desejado

# =====
# FUNÇÕES
# =====
def ler_dados_csv(nome_arquivo):
    tempo, ax, ay, az = [], [], [], []
    with open(nome_arquivo, 'r') as f:
        reader = csv.DictReader(f)
        for linha in reader:
            t = float(linha['tempo_s'])
            if t > TEMPO_COLETA:
                break
            tempo.append(t)
            ax.append(float(linha['ax_g']))
            ay.append(float(linha['ay_g']))
            az.append(float(linha['az_g']))
    return np.array(tempo), np.array(ax), np.array(ay), np.array(az)

def butter_filter(data, cutoff, fs, btype, order=4):
```

```

    if not SCIPY_OK:
        return data
    nyq = 0.5 * fs
    normal = cutoff / nyq
    b, a = butter(order, normal, btype=btype)
    return filtfilt(b, a, data)

def aplicar_filtros(signal):
    signal = butter_filter(signal, LP_FREQ, FS, "low")
    signal = butter_filter(signal, HP_FREQ, FS, "high")
    return signal

def calcular_fft(sinal):
    N = len(sinal)
    freqs = fftfreq(N, DT)[:N//2]
    mags = np.abs(fft(sinal))[:N//2] * (2/N)
    return freqs, mags

def encontrar_inicio_fase(sinal):
    cruzamentos = np.where(np.diff(np.sign(sinal)) > 0)[0]
    return cruzamentos[0] if len(cruzamentos) > 0 else 0

def reduzir_por_ciclos(tempo, sinal, fdom, ciclos):
    if ciclos <= 0 or fdom <= 0:
        return tempo, sinal
    periodo = 1 / fdom
    t_final = ciclos * periodo
    idx_ini = encontrar_inicio_fase(sinal)
    tempo = tempo[idx_ini:] - tempo[idx_ini]
    sinal = sinal[idx_ini:]
    indices = np.where(tempo <= t_final)[0]
    return tempo[indices], sinal[indices]

def gerar_senoide_fundamental(amplitude, freq, tempo):
    return amplitude * np.sin(2 * np.pi * freq * tempo)

def plotar_funcao_fft(tempo_red, sinal_red, freqs, fft_mags, fdom, eixo):
    plt.figure(figsize=(12,5))

    # --- Tempo ---
    plt.subplot(1,2,1)
    plt.plot(tempo_red, sinal_red, 'b-', label="Sinal Reduzido")
    # Adiciona senóide da frequência fundamental
    A = np.max(np.abs(sinal_red))
    senoide = gerar_senoide_fundamental(A, fdom, tempo_red)
    plt.plot(tempo_red, senoide, 'r--', label=f"Senoide Fundamental {fdom:.2f} Hz")
    plt.grid(True)
    plt.title(f"Eixo {eixo} - Tempo (reduzido + fundamental)")
    plt.xlabel("Tempo (s)")
    plt.ylabel("g")
    plt.legend()

    # --- FFT ---
    plt.subplot(1,2,2)
    plt.plot(freqs, fft_mags, 'r')
    if fdom > 0:
        plt.axvline(fdom, color='b', linestyle='--', label=f'Fundamental {fdom:.2f} Hz')
    plt.title(f"Eixo {eixo} - FFT ({len(sinal_red)} amostras)")
    plt.grid(True)
    plt.xlim(0, FS/2)
    plt.legend()

```

```

plt.tight_layout()
plt.show()

def fft_velocidade(signal_g):
    N = len(signal_g)
    A = fft(signal_g * G_TO_MS2)[:N//2]
    freqs = fftfreq(N, DT)[:N//2]
    w = 2*np.pi*freqs
    w[0] = 1e-6
    V = A / (1j*w)
    return freqs, np.abs(V)*(2/N)*1000 # mm/s

# =====
# LEITURA E FILTRO
# =====
tempo, ax, ay, az = ler_dados_csv(ARQUIVO)

ax = aplicar_filtros(ax)
ay = aplicar_filtros(ay)
az = aplicar_filtros(az)

# =====
# DETECTAR FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DO EIXO Y
# =====
freq_y_full, fft_y_full = calcular_fft(ay)
indices = np.where(fft_y_full >= LIMAR_AMPLITUDE)[0]
fdom_y = freq_y_full[indices[np.argmax(fft_y_full[indices])]] if len(indices) > 0 else 0
print(f"Frequência fundamental detectada: {fdom_y:.2f} Hz")

# =====
# REDUZIR TEMPO E SINAL POR CICLOS
# =====
tempo_xr, ax_r = reduzir_por_ciclos(tempo, ax, fdom_y, NUM_CICLOS)
tempo_yr, ay_r = reduzir_por_ciclos(tempo, ay, fdom_y, NUM_CICLOS)
tempo_zr, az_r = reduzir_por_ciclos(tempo, az, fdom_y, NUM_CICLOS)

# Igualar tamanhos
N_min = min(len(ax_r), len(ay_r), len(az_r))
ax_r, ay_r, az_r = ax_r[:N_min], ay_r[:N_min], az_r[:N_min]
tempo_r = tempo_xr[:N_min]

# =====
# FFT REDUZIDA
# =====
freq_x, fft_x = calcular_fft(ax_r)
freq_y, fft_y = calcular_fft(ay_r)
freq_z, fft_z = calcular_fft(az_r)

# =====
# GRÁFICO ISO 10816 (velocidade eixo Y)
# =====
freq_v, V_y = fft_velocidade(ay)

valid = freq_v > 2

plt.figure(figsize=(14,6))
plt.plot(freq_v[valid], V_y[valid], "r", label="Velocidade (mm/s)")
plt.axhline(2.8, color="green", label="OK (2.8)")

```

```

plt.axhline(4.5, color="orange", label="Alerta (4.5)")
plt.axhline(7.1, color="red", label="Perigo (7.1)")

plt.title("ISO 10816 - Velocidade (mm/s)")
plt.xlabel("Frequência (Hz)")
plt.ylabel("Velocidade (mm/s)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# =====
# GRÁFICOS X, Y, Z (tempo reduzido + FFT + senóide fundamental)
# =====
plotar_funcao_fft(tempo_r, ax_r, freq_x, fft_x, fdom_y, "X")
plotar_funcao_fft(tempo_r, ay_r, freq_y, fft_y, fdom_y, "Y")
plotar_funcao_fft(tempo_r, az_r, freq_z, fft_z, fdom_y, "Z")

```