



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COHOMOLOGIA DE CECH E GERBES

Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes

São Carlos - SP
Janeiro de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COHOMOLOGIA DE CECH E GERBES

Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes

Orientador: Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Janeiro de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes, realizada em 28/01/2026.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino (UFSCar)

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni (UFSC)

Prof(a). Dr(a). Thais Maria Dalbello (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho à minha mãe, Rosemelia
e ao meu pai, Debrair (in memoriam).*

Agradecimentos

Por vezes imaginei como escrever esta seção, dividida entre algo simples e “genérico” ou algo mais profundo e pessoal. No entanto, esta etapa da minha vida foi, e continua sendo, significativa demais para não ser acompanhada de nomes e reflexões. Mas já antecipo um pedido de desculpas, pois muito provavelmente nem todos os nomes merecedores de estarem aqui, de fato estarão.

Agradeço inicialmente a Deus, pela graça da vida, pelas oportunidades de aprender e amadurecer, pela força concedida para superar os desafios e por todas as bênçãos que se fizeram presentes.

Uma pergunta que gosto de fazer a amigos e colegas — não apenas matemáticos, mas sobretudo matemáticos — é por que escolheram o curso que fazem. Lembro de também me fazerem essa pergunta quando ingressei na graduação. As respostas costumam ser diversas; nem sempre a matemática foi a primeira opção, mas, por diferentes caminhos, acabou se tornando a escolha. No meu caso, costumo dizer que sempre gostei e tinha facilidade para aprender, algo que fui percebendo ao longo da escola, em contraste com os interesses e afinidades dos meus colegas em relação ao mesmo tema. Agradeço aos educadores que fizeram parte da minha trajetória, principalmente àqueles que, no início da minha história, se dedicaram e contribuíram para despertar e fortalecer meu gosto pela aprendizagem.

Recordo-me do professor Vlademir, com quem realizei minha primeira iniciação científica, ainda no ensino médio, afirmando que eu seria uma futura aluna de matemática, justamente por conhecer meu interesse pela área. À época, essa ainda era apenas uma possibilidade, e eu não tinha convicção dessa escolha. Ainda assim, talvez essa afirmação tenha contribuído para inclinar a balança a favor desse caminho. Independentemente disso, levo comigo os aprendizados desse período, e ao professor Vlademir, deixo meu agradecimento.

Se retorno um pouco mais no tempo, guardo uma memória da infância: meu pai, Debrair, perguntando a mim e à minha irmã “quanto é uma dezena?”. Uma pergunta simples, à qual respondi corretamente. Não sei dizer se já havia aprendido, se deduzi pelo termo *dezena* ou se foi apenas um bom chute, mas me recordo do meu pai ficar orgulhoso. Por vezes me pergunto como seria minha vida se certos acontecimentos tivessem sido diferentes, mas evito supor que seria melhor; acredito que seria uma espécie de tortura comigo, e talvez até mesmo uma forma de injustiça com a minha própria trajetória. Ainda assim, não deixo de imaginar como seria ter meu pai acompanhando, ainda que a uma certa distância geográfica, os caminhos que percorro. A ele, minha profunda gratidão pela minha criação, pelo apoio e pelos incentivos. Sei que estaria (e talvez esteja) orgulhoso de mim.

À minha mãe, Rosemelia, agradeço por compreender e apoiar minha decisão de me mudar de estado em busca dos meus objetivos, bem como por toda a minha formação e incentivos. Aos meus pais em geral, algo pelo qual serei sempre grata é o incentivo constante, presente desde quando eu ainda nem sabia dizer meu próprio nome corretamente.

À minha família, deixo um agradecimento especial pelo apoio ao longo de toda a minha trajetória. À minha irmã, Larissa; aos meus tios, primos e demais familiares, pelo suporte constante; e, em especial, ao meu primo Danilo, que esteve presente e me auxiliou na minha mudança para São Carlos. Aos meus afilhados, Anna e Arthur, agradeço pelo carinho sempre tão acolhedor. Algumas escolhas exigem renúncias, e a minha implicou não estar plenamente presente em muitos momentos do cotidiano e em datas importantes. Ainda assim, sei que eles sabem que têm um lugarzinho muito especial no meu coração.

Aos meus amigos e amigas, cujo apoio e presença foram fundamentais ao longo dessa trajetória, deixo aqui meu sincero agradecimento. Em especial, às minhas amigas Duda, Livia e Morgana, pela constância, independentemente do tempo ou da distância; à minha amiga Roberta, por estar ao meu lado em momentos difíceis e pelo incentivo que antecedeu minha mudança para São Carlos.

Sou grata aos amigos, colegas, professores e funcionários do PPGM-UFSCar pelos ensinamentos e pelas inspirações. Em especial, agradeço ao Axel, Bruno, Leonardo, Gabi, Gabriel, Gustavo, Tamires e Vivian, pela convivência e pela amizade construída durante o mestrado, tornando esse percurso mais leve. Estendo ainda esse agradecimento a Diana, João, Nicolas, Vini e a tantos outros que cruzaram meu caminho nesse período e contribuíram para tornar essa caminhada mais agradável.

À professora Tânia, minha primeira orientadora após o início formal da minha trajetória na matemática, agradeço pelos ensinamentos, conselhos e apoio. Ao professor Wally, que também me orientou nesse período inicial, deixo igualmente meu reconhecimento. A ambos, agradeço não apenas pela orientação nesse início de percurso, mas também pela presença contínua em minha vida mesmo após a conclusão da graduação.

Ao meu orientador, Fabio Ruffino, expresso meu sincero agradecimento pela disponibilidade, paciência, compreensão e pelos ensinamentos ao longo deste trabalho. Tenho convicção de que este processo foi profundamente enriquecedor, e em grande parte, isso se deve pela forma como conduziu sua orientação. Agradeço também aos membros da banca pela disponibilidade e pelas considerações.

A todos que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo aqui meu reconhecimento e gratidão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

*As possibilidades são infinitas,
à espera de serem germinadas.*

*A cada passo,
cada escolha,
cada circunstância,
pequenas seções são definidas.*

*E mesmo quando,
em momentos de transição,
algo parece falhar,
ainda faz parte de algo maior,
pronto para se conectar.*

*Longas seções,
escritas no espaço-tempo,
ricas em detalhes.*

*Cada passo,
cada momento,
é importante
e indispensável para a construção do todo.*

*E por mais que tentemos (e talvez consigamos)
categorizar as fases e circunstâncias dessa caminhada,
tudo faz parte de um único e grandioso objeto chamado vida.*

E talvez viver seja, no fundo, uma constante ação de feixificação.

(Laurinda Moraes)

Resumo

A busca por propriedades globais de objetos matemáticos frequentemente passa pela análise de seus comportamentos locais. No entanto, quando tentamos conectar dados definidos em diferentes regiões de um espaço, encontramos obstruções que revelam informações topológicas sobre o próprio espaço. A Teoria dos Feixes organiza informações matemáticas definidas em regiões locais de um espaço, enquanto a Cohomologia de Čech mede quando essas informações locais não podem ser combinadas de forma consistente para formar um objeto global. Este trabalho aborda essas teorias, partindo inicialmente dos fundamentos categóricos, incluindo categorias monoidais e 2-categorias e avançando para teoria de feixes e para a cohomologia de Čech. Em seguida, aplicamos essas ferramentas ao estudo de fibrados vetoriais, apresentando um modelo geométrico para a primeira classe de Chern, a qual surge, no contexto da cohomologia de Čech, como a classe que classifica fibrados de linhas complexos a menos de isomorfismo, fornecendo assim uma interpretação geométrica do grupo de cohomologia $H^2(X, \mathbb{Z})$. Por fim, introduzimos as gerbes como estruturas que generalizam os fibrados de linhas em um contexto 2-categórico. Utilizando a cohomologia de Čech e a linguagem de 2-categorias, descreve-se como as gerbes se relacionam com classes de cohomologia em grau três, oferecendo um modelo geométrico de $H^3(X, \mathbb{Z})$.

Palavras-chave: Categorias; 2-Categorias; Teoria de Feixes; Cohomologia de Čech; Fibrados; Gerbes.

Abstract

The investigation for global properties of mathematical objects often relies on an understanding of their local behavior. However, when one attempts to assemble local data from different regions of a space, obstructions may rise, revealing intrinsic topological information about the space itself. Sheaf Theory organizes mathematical information defined on local regions, while Čech Cohomology measures when this local information cannot be consistently combined to form a global object. This work develops these theories, starting from categorical foundations, including monoidal categories and 2-categories, and advancing toward sheaf theory and Čech cohomology. Subsequently, these tools are applied to the study of vector bundles, presenting a geometric model for the first Chern class, which arises within the context of Čech cohomology as the class that classifies complex line bundles up to isomorphism, thus providing a geometric interpretation of the cohomology group $H^2(X, \mathbb{Z})$. Finally, we introduce gerbes as structures that generalize line bundles within a 2-categorical framework. Using Čech cohomology and the language of 2-categories, it is described how gerbes relate to third-degree cohomology classes, offering a geometric model of $H^3(X, \mathbb{Z})$.

Keywords: Categories; 2-Categories; Sheaf Theory; Čech Cohomology; Bundles; Gerbes.

Sumário

Introdução	5
1 Introdução à Teoria das Categorias	7
1.1 Categorias	7
1.1.1 Isomorfismo	8
1.1.2 Subcategorias	11
1.2 Funtores	11
1.2.1 Categoria oposta e funtores contravariantes	13
1.2.2 Isomorfismo de categorias	13
1.2.3 Mergulho de categorias	14
1.3 Transformação Natural	15
1.3.1 Equivalência de categorias	16
1.4 Adjunção	17
1.5 Categoria Produto	17
1.5.1 Bifuntores	18
2 Categoria Monoidal	21
2.1 Categoria Monoidal	21
2.2 Monoides em Categorias Monoidais	24
2.2.1 Monoide	24
2.2.2 Morfismo de monoides	26
2.3 Funtores monoidais	28
2.4 Transformação natural monoidal	29
2.5 Categoria monoidal simétrica	30
2.6 Categorias enriquecidas	31
3 2-categorias Fortes e Fracas	37
3.1 2-Categoria Forte	37
3.1.1 Exemplos	43
3.1.2 2-Funtores	46

3.1.3	Morfismos e 2-morfismos de 2-funtores	47
3.1.4	Definições Análogas	49
3.2	2-Categorias Fracas	51
4	Pré-feixes e Feixes	61
4.1	Pré-feixes	61
4.1.1	Morfismos de pré-feixes	63
4.1.2	Sub-pré-feixe	64
4.2	Talos e germes	65
4.3	Operações Fundamentais	68
4.3.1	Push-forward	68
4.3.2	Operações entre pré-feixes em X	69
4.3.3	Kernel, imagem e exatidão	70
4.4	Feixes	73
4.4.1	Morfismos e sub-feixes	74
4.4.2	Feixificação	75
4.4.3	Operações entre feixes	78
4.4.4	Kernel, imagem e exatidão	79
5	Cohomologia de Čech	83
5.1	Cohomologia de Čech	83
5.1.1	Independência da cobertura	85
5.1.2	Feixes Finos	86
5.1.3	Sequências exatas longas em cohomologia de Čech	90
6	Fibrados Vetoriais	95
6.1	Definições e propriedades fundamentais	95
6.2	Funções e seções de transição	102
6.2.1	Seções	102
6.2.2	Funções de transição	110
6.3	Cohomologia de Čech e fibrados de linhas	111
6.4	Primeira Classe de Chern	118
6.4.1	Cálculo da primeira classe de Chern	119
7	Gerbes	123
7.1	Pré-feixe de categorias	123
7.2	Feixe de categorias	126
7.3	Gerbe	127
7.3.1	Algumas propriedades	130

7.4	Cálculo da classe de cohomologia de uma gerbe com $\mathbb{C}^*$ -band	134
7.5	Algumas considerações	136
A	Noções de Álgebra Homológica	137
A.1	Complexo de (co)cadeias e (co)homologia	137
A.2	Sequências Exatas	141
A.3	Operações entre complexos de (co)cadeias	142
A.4	Homotopia de morfismo de complexo de (co)cadeias	142
A.5	Considerações	143
	Índice Remissivo	144
	Referências Bibliográficas	147

Lista de Símbolos

$\simeq$: Isomorfismo.

$\sqcup$: União disjunta.

$\text{Ob}(\mathcal{C})$: Classe dos objetos da categoria $\mathcal{C}$.

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$: Conjunto dos morfismos de X a Y , onde X e Y são objetos de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}^{\text{op}}$: Categoria oposta de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$: Produto de categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

Sets: Categoria dos conjuntos.

Grp: Categoria dos grupos.

GrpAb: Categoria dos grupos abelianos.

Vect $_{\mathbb{K}}$: Categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Top: Categoria dos espaços topológicos.

Cat: 2-categoria das categorias pequenas.

$(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$: Categoria monoidal com produto $\otimes$, unidade $\mathbb{1}$, associador α , unitores λ e ρ .

$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$: Isomorfismo associador em uma categoria monoidal.

$\lambda_X : \mathbb{1} \otimes X \xrightarrow{\sim} X$: Unitor à esquerda.

$\rho_X : X \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\sim} X$: Unitor à direita.

$\xi_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$: Isomorfismo de simetria.

Mon($\mathcal{C}$): Categoria dos monoides em $\mathcal{C}$.

GL(V): Grupo dos automorfismos lineares de V .

Hom $_{\mathcal{C}}$ (X, Y) (em 2-categorias): Categoria pequena dos 1-morfismos de X para Y .

$\alpha : f \Rightarrow g$: 2-morfismo de f para g .

$\circ$: Composição (vertical ou horizontal, conforme o contexto).

$\odot$: Composição horizontal de 2-morfismos.

$a_{f,g,h}$: Associador em uma 2-categoria fraca.

l_f : Unitor à esquerda em uma 2-categoria fraca.

r_f : Unitor à direita em uma 2-categoria fraca.

Top $_X$: Categoria dos abertos de X , cujos morfismos são inclusões.

PreFeixes $_{X,\mathcal{C}}$: Categoria dos pré-feixes em X com valores na categoria $\mathcal{C}$.

Feixes $_{X,\mathcal{C}}$: Categoria dos feixes em X com valores na categoria $\mathcal{C}$.

$\mathcal{P}(U)$: Seções de um pré-feixe $\mathcal{P}$ sobre o aberto U .

- $\mathcal{P}_{VU}$: Morfismo de restrição de $\mathcal{P}(U)$ para $\mathcal{P}(V)$.
- $\Gamma(\mathcal{P}) := \mathcal{P}(X)$: Conjunto das seções globais de $\mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}_a$: Talo de um pré-feixe $\mathcal{P}$ no ponto a .
- $[(U, s)]_a$: Germe da seção s no ponto a .
- $\text{supp}(s)$: Suporte de uma seção s .
- $f_*\mathcal{P}$: Push-forward de um pré-feixe $\mathcal{P}$ pela aplicação f .
- $\mathcal{P}^\sharp$: Feixe associado (feixificação) de $\mathcal{P}$.
- $\xi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp$: Morfismo canônico para a feixificação.
- $\text{Ker } \rho$: Kernel de um morfismo ρ .
- $\text{Im } \rho$: Imagem de um morfismo ρ .
- $\text{Ker}^\mathcal{F} \rho$: Kernel de um morfismo de feixes.
- $\text{Im}^\mathcal{F} \rho$: Imagem de um morfismo de feixes.
- $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$: Cobertura aberta de X .
- $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$: Interseção de abertos de uma cobertura.
- $\check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$: p -cocadeias de Čech de $\mathfrak{U}$ com coeficientes em $\mathcal{P}$.
- $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$: p -ésimo grupo de cohomologia de Čech de $\mathfrak{U}$ com coeficientes em $\mathcal{P}$.
- $\check{H}^p(X, \mathcal{P})$: p -ésimo grupo de cohomologia de Čech de X com coeficientes em $\mathcal{P}$.
- $E_x = \pi^{-1}(x)$: Fibra sobre $x \in X$.
- (U, ϕ) : Carta local (trivialização) de E sobre U .
- f^*E : Pull-back do fibrado E pela aplicação f .
- $\Gamma(E)$: Conjunto das seções globais de E .
- $\Gamma(E|_U)$: Conjunto das seções locais de E sobre U .
- $\text{LB}(X)$: Classes de isomorfismo de fibrados de linhas complexos sobre X .
- $c_1(L)$: Primeira classe de Chern do fibrado de linhas L .
- $C^0(U, \mathbb{K})$: Conjunto das funções contínuas com domínio em U e contradomínio $\mathbb{K}$.
- $C^\infty(U)$: Conjunto das funções $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ suaves.
- $\text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s)$: Grupo de automorfismos do objeto s na categoria $\mathcal{G}(U)$.
- $\{g_{ijk}\} \in \check{Z}^2(X, \mathbb{C}^*)$: 2-cociclo de Čech associado a uma gerbe com $\mathbb{C}^*$ -band.
- $(A_\bullet, \partial_\bullet)$: Complexo de cadeias com diferencial ∂ .
- $H_n(A_\bullet)$: n -ésimo grupo de homologia.
- $(A^\bullet, \delta^\bullet)$: Complexo de cocadeias com diferencial δ .
- $H^n(A^\bullet)$: n -ésimo grupo de cohomologia.

Introdução

A relação entre propriedades locais e globais constitui um dos temas recorrentes na matemática, atravessando áreas como topologia, geometria e análise. Historicamente, a dificuldade de estender estruturas definidas localmente a todo um espaço motivou o desenvolvimento de ferramentas fundamentais.

A própria origem de um dos conceitos centrais deste trabalho, a Teoria dos Feixes, é um marco histórico. Seu criador, Jean Leray (1906 - 1998), foi detido em um campo de prisioneiros na Áustria durante a Segunda Guerra Mundial. Lá, temendo que seus conhecimentos em matemática aplicada pudessem ser usados pelos alemães nos esforços de guerra, optou por focar na Topologia Algébrica.

Durante esse período, Leray buscou generalizar, para espaços topológicos mais gerais, teoremas importantes da Topologia Algébrica (em especial da teoria de formas diferenciais de Élie Cartan). Nesses esforços, ele desenvolveu a ferramenta que mais tarde chamaria de feixe (faisceau), além de seqüências espectrais e teoria de cohomologia. Grande parte desse trabalho se tornou conhecida após o fim da guerra, e foi apenas por volta de 1950, depois de cinco anos que a guerra havia acabado, que essas noções começaram a tomar a forma que conhecemos hoje, ampliada por Henri Cartan.

Paralelamente, a Cohomologia de Čech (1893- 1960), introduzida por Eduard Čech, surgiu como um método concreto para medir obstruções a essa "colagem" de dados locais por meio de coberturas abertas. Um pouco depois, após um desenvolvimento mais amplo da Teoria de Categorias, viu-se necessária uma reformulação categorial dessas ideias para uma forma mais simples e elegante. Essas teorias foram unificadas e generalizadas pela linguagem categórica, que passou a fornecer o substrato formal necessário para tratar não apenas objetos, mas também suas transformações.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo introdutório sobre a Cohomologia de Čech e as Gerbes, partindo dos fundamentos categóricos necessários para o desenvolvimento dessas teorias. A seguir, descrevemos brevemente a organização de cada capítulo:

- *Capítulo 1 – Introdução à Teoria das Categorias:* São apresentados os conceitos fundamentais da teoria das categorias, incluindo categorias, funtores, transformações naturais, equivalência de categorias e adjunção. Define-se também a noção de categoria produto e bifuntores, que são essenciais para a definição de categorias monoidais no capítulo seguinte.
- *Capítulo 2 – Categoria Monoidal:* As categorias monoidais são introduzidas. Elas generalizam a ideia de produto entre objetos matemáticos. Também é definido monoides em categorias

monoidais, funtores monoidais e transformações naturais monoidais. É apresentado o Teorema de Coerência de Mac Lane e as categorias monoidais simétricas. O capítulo é finalizado com a noção de categorias enriquecidas, que será relevante para a compreensão das 2-categorias.

- *Capítulo 3 – 2-Categorias Fortes e Fracas:* As 2-categorias são apresentadas. Elas generalizam as categorias ao introduzir morfismos entre morfismos. Distingue-se entre 2-categorias fortes, nas quais as composições são estritamente associativas e unitais, e 2-categorias fracas (bicategorias), onde essas propriedades valem apenas a menos de isomorfismos coerentes. Além disso, são apresentados alguns exemplos e outras definições análogas às que existem para categorias.
- *Capítulo 4 – Pré-feixes e Feixes:* São introduzidos os conceitos de pré-feixe, talos, germes e operações fundamentais como push-forward. Define-se os feixes e a construção da feixificação, destacando as diferenças entre sequências exatas na categoria de pré-feixes e na categoria de feixes, apresentando um exemplo que será de extrema importância para os resultados finais desse trabalho.
- *Capítulo 5 – Cohomologia de Čech:* É apresentada a cohomologia de Čech, uma ferramenta que mede a obstrução à colagem global de dados locais. Define-se o complexo de Čech associado a uma cobertura aberta, os grupos de cohomologia e a independência da cobertura via limite direto. Realiza-se o estudo dos feixes finos e demonstram-se resultados sobre sequências exatas longas em cohomologia de Čech para espaços paracompactos.
- *Capítulo 6 – Fibrados Vetoriais:* As ferramentas desenvolvidas anteriormente são aplicadas ao estudo de fibrados vetoriais. Definimos fibrados vetoriais, trivializações locais, atlas, funções de transição e seções, e exploramos algumas propriedades desses objetos. Em seguida, estabelece-se a relação entre a cohomologia de Čech e a classificação de fibrados de linhas complexos, mostrando que estes são classificados pelo grupo $\check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$, o qual é isomorfo a $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$. Sob certas condições, temos que o grupo de cohomologia de Čech $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ é isomorfo ao grupo de cohomologia singular $H^2(X, \mathbb{Z})$. Assim, obtemos um modelo geométrico para o grupo de cohomologia $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ por meio da primeira classe de Chern.
- *Capítulo 7 – Gerbes:* Nesse capítulo, generaliza-se a noção de fibrados de linhas para um contexto 2-categórico, introduzindo as gerbes. Define-se pré-feixes de categorias, stacks e, finalmente, gerbes com $\mathbb{C}^*$ -band. Assim como os fibrados de linhas são classificados por $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, as gerbes com $\mathbb{C}^*$ -band são classificadas por $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$, fornecendo assim um modelo geométrico para a cohomologia de grau três.
- *Apêndice A – Noções de Álgebra Homológica:* Apresentam-se, de forma sucinta, alguns conceitos de álgebra homológica, incluindo complexos de cadeias e cocadeias, grupos de homologia e cohomologia, sequências exatas e homotopia de morfismos de complexos.

Introdução à Teoria das Categorias

A teoria das categorias parte da ideia de que muitos conceitos matemáticos podem ser descritos de forma unificadas. Em vez de considerar apenas os objetos (como conjuntos, grupos ou espaços topológicos), observam-se também as aplicações entre eles e as relações que essas aplicações estabelecem, as quais podem ser associadas a diagramas de setas. Esses diagramas, que expressam a composição e a comutatividade das aplicações, permitem descrever de maneira uniforme conceitos que surgem em diferentes áreas da matemática.

Este capítulo apresenta uma introdução à teoria das categorias, com o objetivo de estabelecer uma base necessária para o desenvolvimento do trabalho. Além das definições formais, são incluídos alguns exemplos que auxiliam na compreensão de alguns conceitos da teoria.

1.1 Categorias

Definição 1.1 (Categoria). Uma *categoria* $\mathcal{C}$ é definida por:

- uma classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos;
- para todo par $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *morfismos*;
- para toda tripla $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, uma função, dita *composição*:

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

tais que:

- (i) se $(X, Y) \neq (Z, W)$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) = \emptyset$;
- (ii) a composição é associativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ quando os dois lados forem definidos;
- (iii) para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, existe um *morfismo identidade* $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, ou seja, um morfismo tal que $f \circ \text{id}_X = f$ e $\text{id}_X \circ g = g$, quando estas composições forem definidas.

Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é denotado por $f: X \rightarrow Y$ e o objeto X é chamado de *domínio*, enquanto o objeto Y é chamado de *contra-domínio* de f .

Observação 1.2. O morfismo identidade de um objeto é único. De fato, suponha que id_X e id'_X sejam duas identidades de X . Então, temos $\text{id}_X \circ \text{id}'_X = \text{id}_X$, uma vez que id'_X é uma identidade; de maneira análoga, $\text{id}_X \circ \text{id}'_X = \text{id}'_X$, pois id_X é uma identidade. Logo, $\text{id}_X = \text{id}'_X$. Assim, a identidade de um objeto X pode ser considerada de maneira única e sem ambiguidade.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos para melhor compreensão da definição.

Exemplo 1.3. Denotamos por **Sets** a categoria dos conjuntos, onde os objetos são conjuntos, os morfismos de X a Y são as funções cujo domínio é X e o contra-domínio é Y e a composição de dois morfismos é a própria composição de funções.

Exemplo 1.4. Denotamos por **Grp** a categoria dos grupos, definida da seguinte forma: os objetos são os grupos, os morfismos entre dois objetos X e Y são os homomorfismos de grupos de X a Y , e a composição de dois morfismos é dada pela composição usual de funções.

Exemplo 1.5. Denotamos por **GrpAb** a categoria dos grupos abelianos, definida de forma análoga à categoria **Grp**, mas agora considerando grupos abelianos como objetos.

Exemplo 1.6. Denotamos por $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, com $\mathbb{K}$ um corpo fixado, a categoria dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ definida da seguinte forma: os objetos são os espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, os morfismos de X a Y são as funções $\mathbb{K}$ -lineares de X a Y e a composição de dois morfismos coincide com a composição de funções.

Exemplo 1.7. Denotamos por **Top** a categoria dos espaços topológicos, onde os objetos são espaços topológicos, os morfismos são as funções contínuas entre os objetos e a composição de morfismos coincide com a composição de funções.

Definição 1.8 (Categoria pequena). Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita *pequena* quando a classe dos objetos é um conjunto.

Observação 1.9. Como exemplo de uma categoria não pequena temos a categoria **Sets**, explicitada no Exemplo 1.3. De fato, a classe de todos os conjuntos não pode ser um conjunto, pois isso levaria a contradições lógicas como o paradoxo de Russell¹. Assim, $\text{Ob}(\text{Sets})$ é uma *classe própria*.

1.1.1 Isomorfismo

Em seguida, introduziremos a noção de isomorfismo entre dois objetos de uma categoria.

¹O paradoxo de Russell mostra que a coleção de todos os conjuntos não pode ser um conjunto: considerando $A = \{x \mid x \notin x\}$, obtém-se a contradição $A \in A \iff A \notin A$.

Definição 1.10 (Isomorfismo). Um morfismo $f: X \rightarrow Y$ é denominado *isomorfismo* se existir um morfismo $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ e $f \circ g = \text{id}_Y$. Dois objetos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ são *isomorfos* se houver um isomorfismo entre eles. Nesse caso, usamos a notação $X \simeq Y$.

Se $f: X \rightarrow Y$ for um isomorfismo, então o morfismo inverso $g: Y \rightarrow X$, que satisfaz a Definição 1.10, é necessariamente único. De fato, suponha que g' seja outro inverso de f . Nesse caso, temos:

$$g' = g' \circ \text{id}_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

Portanto, o morfismo inverso g é único e pode ser denotado por f^{-1} , assim como f pode ser denotado por g^{-1} .

Afirmção 1. A noção de isomorfismo define uma classe de equivalência na classe dos objetos.

Demonstração. Para evidenciar isso, verificaremos que a relação de isomorfismo satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

- *Reflexividade:* Todo objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ é isomorfo a si mesmo. De fato, o morfismo identidade $\text{id}_X: X \rightarrow X$ é um isomorfismo. Assim, $X \simeq X$.
- *Simetria:* Se X é isomorfo a Y , existe um isomorfismo $f: X \rightarrow Y$. Por definição de isomorfismo, existe um morfismo $g: Y \rightarrow X$ tal que

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Assim, g é um isomorfismo de Y para X , e podemos escrever $Y \simeq X$.

- *Transitividade:* Se $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z$, então $X \simeq Z$. Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ isomorfismos. Por definição, existem os inversos $f^{-1}: Y \rightarrow X$ e $g^{-1}: Z \rightarrow Y$ tais que

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y, \quad g^{-1} \circ g = \text{id}_Y, \quad g \circ g^{-1} = \text{id}_Z.$$

Definimos o morfismo $h := g \circ f: X \rightarrow Z$. O inverso de h é dado por $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$, e verificamos que

$$h \circ h^{-1} = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z,$$

$$h^{-1} \circ h = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X.$$

Portanto, $h: X \rightarrow Z$ é um isomorfismo e podemos escrever $X \simeq Z$. Assim, a relação de isomorfismo é reflexiva, simétrica e transitiva, caracterizando-a como uma relação de equivalência na classe dos objetos de uma categoria. Como consequência, essa relação particiona a classe dos objetos em classes de equivalência.



Exemplo 1.11. Na categoria Sets (Exemplo 1.3), um isomorfismo é uma função bijetora. Nas categorias Grp e GrpAb (Exemplos 1.4 e 1.5) é um isomorfismo de grupos. Na categoria Vect $_{\mathbb{K}}$ (Exemplo 1.6) é uma função linear inversível. Na categoria Top (Exemplo 1.7) é um homeomorfismo.

Proposição 1.12. Sejam $f: X \xrightarrow{\sim} X'$ e $g: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ dois isomorfismos em uma categoria $\mathcal{C}$. Então, existe uma bijeção

$$\Theta_{f,g}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$$

definida por

$$\phi \mapsto g \circ \phi \circ f^{-1}.$$

Demonstração. Para demonstrar que $\Theta_{f,g}$ é uma bijeção, mostraremos que ela é injetora e sobrejetora.

- *Injetividade:* Sejam $\phi, \phi' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tais que

$$\Theta_{f,g}(\phi) = \Theta_{f,g}(\phi').$$

Por definição de $\Theta_{f,g}$, temos

$$g \circ \phi \circ f^{-1} = g \circ \phi' \circ f^{-1}.$$

Como g e f^{-1} são isomorfismos, ambos são morfismos invertíveis. Assim, podemos compor à esquerda com g^{-1} e à direita com f :

$$g^{-1} \circ (g \circ \phi \circ f^{-1}) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ \phi' \circ f^{-1}) \circ f.$$

Pela associatividade da composição, obtemos que $\phi = \phi'$. Portanto, $\Theta_{f,g}$ é injetora.

- *Sobrejetividade:* Seja $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$. Precisamos encontrar um $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que

$$\Theta_{f,g}(\phi) = \psi.$$

Por definição, queremos encontrar ϕ tal que

$$g \circ \phi \circ f^{-1} = \psi.$$

Multiplicando à esquerda por g^{-1} e à direita por f , obtemos

$$\phi = g^{-1} \circ \psi \circ f.$$

Como g^{-1} e f são morfismos bem definidos e inversos dos isomorfismos, ϕ é um morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Assim, $\Theta_{f,g}$ é sobrejetora.

Conforme mostrado anteriormente, a inversa de $\Theta_{f,g}$ é dada por

$$\Theta_{f,g}^{-1}(\psi) = g^{-1} \circ \psi \circ f.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\Theta_{f,g}^{-1} = \Theta_{f^{-1}, g^{-1}}.$$

Portanto, $\Theta_{f,g}$ é uma bijeção com inversa dada por $\Theta_{f^{-1}, g^{-1}}$, concluindo a demonstração. ■

1.1.2 Subcategorias

Uma *subcategoria* $\mathcal{C}'$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é uma categoria formada por alguns objetos e alguns morfismos de $\mathcal{C}$, preservando as identidades e composição. A definição formal de subcategoria é a seguinte:

Definição 1.13 (Subcategoria). Uma categoria $\mathcal{C}'$ é dita *subcategoria* de $\mathcal{C}$ se:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$;
- para todos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, Z)$, a composição $g \circ f$ em $\mathcal{C}'$ coincide com a composição em $\mathcal{C}$;
- para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, a identidade de X em $\mathcal{C}'$ coincide com a identidade em $\mathcal{C}$.

A subcategoria $\mathcal{C}'$ é dita *cheia* se ela preserva todos os morfismos entre os objetos de $\mathcal{C}'$, ou seja $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$.

Exemplo 1.14. A categoria GrupAb é uma subcategoria cheia da categoria Grp .

1.2 Funtores

Os funtores desempenham um papel fundamental na teoria das categorias, estabelecendo uma relação entre categorias distintas. Intuitivamente, um funtor pode ser compreendido como um mapeamento que preserva a estrutura categórica, isto é, associa objetos e morfismos de uma categoria a objetos e morfismos, respectivamente, de outra categoria, respeitando as operações de composição e identidades.

Definição 1.15 (Funtor). Um *funtor* (também chamado de *funtor covariante*) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre duas categorias é definido por:

- uma função $\mathcal{F} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$;
- para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, uma função

$$\mathcal{F}_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

tais que, para todos $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) preservação da composição:

$$\mathcal{F}_{X,Z}(g \circ f) = \mathcal{F}_{Y,Z}(g) \circ \mathcal{F}_{X,Y}(f);$$

(ii) preservação das identidades:

$$\mathcal{F}_{X,X}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}.$$

Notação 1. Frequentemente, denotaremos a aplicação $\mathcal{F}_{X,Y}$ simplesmente por $\mathcal{F}$, subentendendo os objetos X e Y .

Existem alguns funtores que são chamados de *esquecedores* (ou *funtores do esquecimento*), pois preservam a estrutura categórica básica (objetos, morfismos e composição), mas "esquecem" certos aspectos adicionais que fazem parte da estrutura matemática presente na categoria do domínio, sem mapeá-los para a categoria do contra-domínio. O funtor do Exemplo a seguir (Exemplo 1.16) trata-se de um funtor esquecedor.

Exemplo 1.16. Seja $\mathcal{F}: \text{Grp} \rightarrow \text{Sets}$ o funtor que a um grupo, ou seja, um objeto de Grp , associa o conjunto subjacente, que é um objeto de Sets ; e que a um morfismo entre dois grupos associa o morfismo mesmo, pensado como função entre conjuntos.

Proposição 1.17. Um funtor mapeia isomorfismos em isomorfismos. Além disso, se $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ for um funtor e f for um isomorfismo em $\mathcal{C}$, então

$$\mathcal{F}(f)^{-1} = \mathcal{F}(f^{-1}).$$

Demonstração. Seja $f: X \rightarrow Y$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Por definição, existe um morfismo $g: Y \rightarrow X$ tal que

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Aplicando o funtor $\mathcal{F}$, obtemos:

$$\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

e

$$\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(\text{id}_Y) = \text{id}_{\mathcal{F}(Y)}.$$

Portanto, $\mathcal{F}(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$, com inverso dado por $\mathcal{F}(g)$.

Como $g = f^{-1}$, temos que

$$\mathcal{F}(f)^{-1} = \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f^{-1}).$$



1.2.1 Categoria oposta e funtores contravariantes

Em diversas situações, é necessário considerar funtores que invertem a direção dos morfismos, os chamados *funtores contravariantes*. Uma abordagem natural para definir um funtor contravariante consiste em inverter a direção de um morfismos, de modo que, dado um morfismo $f: X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, o correspondente em $\mathcal{D}$ seja um morfismo $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$. Embora essa abordagem seja válida, é mais comum introduzir a noção de categoria oposta, que nos permite formalizar a construção de funtores contravariantes de maneira mais estruturada e intuitiva.

Definição 1.18 (Categoria oposta). Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A *categoria oposta* $\mathcal{C}^{\text{op}}$ é definida da seguinte maneira:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$;

- para $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X);$$

- dados $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z)$, ou seja, $f: Y \rightarrow X$ e $g: Z \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, a composição

$$g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Z)$$

é definida por

$$g \circ f := f \circ g,$$

onde o lado direito é a composição em $\mathcal{C}$.

Definição 1.19 (Funtor contravariante). Um *funtor contravariante* de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$, ou equivalentemente, um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.

1.2.2 Isomorfismo de categorias

O *isomorfismo de categorias* é a noção mais rígida de quando duas categorias podem ser vistas como “iguais”. Entretanto, devido a sua rigidez, não se torna tão interessante quanto a noção de *equivalência de categorias* (que será abordada ainda neste capítulo), que é mais útil devido a sua flexibilidade.

Definição 1.20 (Categorias isomorfas). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *isomorfas*, e escrevemos $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, se existem funtores

$$\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$$

tais que

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \text{id}_{\mathcal{D}}$$

onde $\text{id}_{\mathcal{C}}$ e $\text{id}_{\mathcal{D}}$ denotam os funtores identidade nas respectivas categorias.

Isso significa que para cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(X)) = X,$$

e para cada morfismo $f: X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f.$$

Exemplo 1.21. Seja TopD a categoria cujos objetos são espaços topológicos discretos e cujos morfismos são funções contínuas entre esses espaços. Defina o funtor

$$\mathcal{F}: \text{Sets} \rightarrow \text{TopD}$$

que a cada conjunto X , associa-se o espaço topológico $\mathcal{F}(X)$ obtido dotando X da topologia discreta; e a cada função $f: X \rightarrow Y$, associa-se a mesma função f , agora pensada como aplicação contínua entre os espaços discretos $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{F}(Y)$.

O funtor $\mathcal{F}$ é um isomorfismo de categorias, cujo inverso é o funtor esquecedor

$$\mathcal{F}^{-1}: \text{TopD} \rightarrow \text{Sets},$$

que associa a cada espaço topológico discreto o seu conjunto subjacente.

1.2.3 Mergulho de categorias

Um mergulho de categorias é a forma categorial de expressar a ideia de que uma categoria pode ser vista como uma subcategoria de outra, preservando toda a sua estrutura. Em termos formais, trata-se de um *funtor fiel* que é injetivo nos objetos, de modo que os morfismos e composições na categoria original ficam refletidos sem perda na categoria maior.

Definição 1.22 (Funtor fiel, cheio e plenamente fiel). Um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito *fiel* se para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, a função

$$\mathcal{F}_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

é injetora; é dito *cheio* se para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}_{X,Y}$ é sobrejetora; e é dito *plenamente fiel* se é cheio e fiel.

Definição 1.23 (Mergulho de categorias). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um *mergulho de categorias* é um funtor

$$\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

que é fiel e injetor sobre objetos. Se $\mathcal{F}$ for plenamente fiel, o mergulho é dito *cheio*.

Exemplo 1.24. Seja $\mathcal{F}: \text{Sets} \rightarrow \text{Top}$ o funtor definido como no Exemplo 1.21, mas pensando na categoria Top como contradomínio. O funtor $\mathcal{F}$ é um mergulho cheio de categorias, cuja imagem é a subcategoria cheia TopD de Top .

1.3 Transformação Natural

Na teoria das categorias, após introduzir o conceito de funtores surge a questão: é possível relacionar dois funtores? A resposta está na noção de *morfismo de funtores*, também conhecido como *transformação natural*.

Definição 1.25 (Morfismo de funtores). Dados dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, um *morfismo de funtores* ou *transformação natural* ou *morfismo canônico* $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é definido por um morfismo

$$\varphi(X): \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$$

para cada $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, de modo que o seguinte diagrama comute para todo morfismo $f: X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathcal{G}(Y). \end{array}$$

Para todo funtor $\mathcal{F}$ fica definido o *morfismo identidade* $\text{id}_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, que associa a cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ o morfismo $\text{id}_{\mathcal{F}(X)}: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$.

Definição 1.26. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Dados dois morfismos de funtores $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, definimos a *composição* entre φ e ψ por

$$(\psi \circ \varphi)(X) := \psi(X) \circ \varphi(X)$$

para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

A definição de composição de morfismo de funtores permite definir a *categoria de funtores*, denotada por $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, cujos objetos são os funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ e cujos morfismos são as transformações naturais entre eles. Em particular, dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são *isomorfos* quando o são como objetos da categoria $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, ou seja, quando existem dois morfismos $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tais que

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{F}} \quad \text{e} \quad \varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{G}}.$$

Um isomorfismo de funtores é chamado também de *isomorfismo canônico* ou *isomorfismo natural*.

Proposição 1.27. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois funtores. Seja ainda $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de funtores. φ é um isomorfismo se, e somente se, para todo objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, o morfismo $\varphi(X): \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ é um isomorfismo.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que φ seja um isomorfismo. Então existe uma transformação natural $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{F}}$ e $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{G}}$. Avaliando nos componentes, temos $\psi(X) \circ \varphi(X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$ e $\varphi(X) \circ \psi(X) = \text{id}_{\mathcal{G}(X)}$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Assim, $\varphi(X)$ é um isomorfismo com inverso $\psi(X)$.

($\Leftarrow$) Suponha que cada $\varphi(X)$ seja um isomorfismo e defina $\psi(X) = (\varphi(X))^{-1}$. Para mostrar que ψ é uma transformação natural, considere um morfismo $f: X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$. Pela naturalidade de φ , temos

$$\varphi(Y) \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \varphi(X), \quad (1.1)$$

dado pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathcal{G}(Y). \end{array}$$

Multiplicando (1.1) por $\psi(Y)$ à esquerda e por $\psi(X)$ à direita, obtemos

$$\mathcal{F}(f) \circ \psi(X) = \psi(Y) \circ \mathcal{G}(f)$$

Isso garante a naturalidade de ψ . Como $\psi(X)$ é o inverso de $\varphi(X)$ para cada X , segue que ψ é o inverso de φ na categoria de funtores. ■

1.3.1 Equivalência de categorias

A noção de *isomorfismo de categorias* é, na prática, muito restritiva. Se considerarmos dois funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ como candidatos a "inversos" um do outro, muitas vezes não existe a igualdade estrita: $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X) = X$ ou $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Y) = Y$. Em vez disso, é mais comum a situação em que o objeto $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X)$ é apenas *isomorfo* a X . Em outras palavras, os objetos coincidem, exceto por uma *identificação natural*, ou seja, $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X)$ é *naturalmente isomorfo* a X . A mesma flexibilidade se aplica a $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Y)$ e Y . Assim, precisamos de um conceito mais abrangente para capturar quando duas categorias são "estruturalmente idênticas".

Definição 1.28 (Equivalência de Categorias). Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *equivalentes* (ou que $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{D}$) se existem um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e um funtor $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Neste caso, os funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são chamados de *equivalências de categorias*.

Teorema 1.29. Um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\mathcal{F}$ é plenamente fiel;
- (ii) para todo objeto $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ existe $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $Y \simeq \mathcal{F}(X)$.

1.4 Adjunção

A noção de adjunção é um conceito fundamental da teoria das categorias. Intuitivamente, dois funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ são adjuntos quando existe uma correspondência natural entre morfismos $\mathcal{F}(X) \rightarrow Y$ em $\mathcal{D}$ e morfismos $X \rightarrow \mathcal{G}(Y)$ em $\mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é o *adjunto à esquerda* e $\mathcal{G}$ é o *adjunto à direita*.

Definição 1.30 (Adjunto à esquerda e à direita). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e sejam $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *adjunto à esquerda* de $\mathcal{G}$, ou que $\mathcal{G}$ é *adjunto à direita* de $\mathcal{F}$, se existe uma família de bijeções

$$\varphi_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)),$$

definida para todos os objetos $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, que é *natural* em X e em Y . A naturalidade significa que, para quaisquer morfismos $f: X' \rightarrow X$ em $\mathcal{C}$ e $g: Y \rightarrow Y'$ em $\mathcal{D}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), Y) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(Y)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f), g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \mathcal{G}(g)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X'), Y') & \xrightarrow{\varphi_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}(Y')). \end{array}$$

A família $\{\varphi_{X,Y}\}$ é chamada de *isomorfismo de adjunção*.

Observação 1.31. A naturalidade pode ser expressa da seguinte maneira: para todo $f: X' \rightarrow X$, todo $g: Y \rightarrow Y'$ e todo morfismo $h: \mathcal{F}(X) \rightarrow Y$, temos

$$\varphi_{X',Y'}(g \circ h \circ \mathcal{F}(f)) = \mathcal{G}(g) \circ \varphi_{X,Y}(h) \circ f.$$

1.5 Categoria Produto

Vamos definir o conceito de produto de duas categorias, que resulta na *categoria produto*, a qual pode ser vista como uma extensão do conceito do produto cartesiano.

O conceito de categoria produto será importante para os capítulos seguintes, onde serão abordados categoria monoidal e 2-categorias.

Definição 1.32 (Categoria produto). Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, a *categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é definida da seguinte maneira:

- $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$;

- para objetos $(X, Y), (X', Y') \in \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, temos $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$;
- dados $(f, g): (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ e $(f', g'): (X', Y') \rightarrow (X'', Y'')$, definimos $(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g)$.

O morfismo identidade em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ para um objeto (X, Y) é dado por

$$\text{id}_{(X, Y)} = (\text{id}_X, \text{id}_Y),$$

onde $\text{id}_X: X \rightarrow X$ e $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ são as identidades em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente.

Para qualquer morfismo $(f, g): (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, temos

$$(f, g) \circ (\text{id}_X, \text{id}_Y) = (f, g), \quad (\text{id}_{X'}, \text{id}_{Y'}) \circ (f, g) = (f, g),$$

mostrando que $(\text{id}_X, \text{id}_Y)$ realmente cumpre o papel de identidade na categoria produto.

1.5.1 Bifuntores

Categorias produto são usadas para definir bifuntores, os quais são funtores cujo domínio é uma categoria produto, de modo que a identidade e a composição são preservadas.

Definição 1.33 (Bifuntor). Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias. Um *bifuntor*, também chamado de *funtor binário* é um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ que é functorial em cada argumento. Explicitamente, isso significa que:

- Para todo $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{F}(\text{id}_X, \text{id}_Y) = \text{id}_{\mathcal{F}(X, Y)}.$$

- Para morfismos $f: X \rightarrow X', f': X' \rightarrow X''$ em $\mathcal{C}$ e $g: Y \rightarrow Y', g': Y' \rightarrow Y''$ em $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{F}(f' \circ f, g' \circ g) = \mathcal{F}(f', g') \circ \mathcal{F}(f, g).$$

Exemplo 1.34. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ a categoria de espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O produto tensorial define um bifuntor

$$\otimes: \text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}.$$

Em objetos temos

$$\otimes: \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) \times \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) \rightarrow \text{Ob}(\text{Vect}_{\mathbb{K}}) \quad (1.2)$$

$$(V, W) \mapsto V \otimes W, \quad (1.3)$$

e em morfismos lineares $f: V \rightarrow V'$ e $g: W \rightarrow W'$ definimos

$$\begin{aligned} f \otimes g: V \otimes W &\rightarrow V' \otimes W' \\ v \otimes w &\mapsto f(v) \otimes g(w). \end{aligned}$$

Para $\text{id}_V: V \rightarrow V$ e $\text{id}_W: W \rightarrow W$, temos

$$\begin{aligned} \text{id}_V \otimes \text{id}_W: V \otimes W &\rightarrow V \otimes W, \\ v \otimes w &\mapsto \text{id}_V(v) \otimes \text{id}_W(w) = v \otimes w. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{id}_V \otimes \text{id}_W = \text{id}_{V \otimes W},$$

mostrando que o funtor preserva identidades.

Agora, considere outro par de morfismos

$$f': V' \rightarrow V'', \quad g': W' \rightarrow W''.$$

A composição no bifuntor é $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g): V \otimes W \rightarrow V'' \otimes W''$.

Para verificar a ação em morfismos, calculamos em $v \otimes w$

$$\begin{aligned} ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(v \otimes w) &= (f' \otimes g')((f \otimes g)(v \otimes w)) \\ &= (f' \otimes g')(f(v) \otimes g(w)) \\ &= f'(f(v)) \otimes g'(g(w)) \\ &= (f' \circ f)(v) \otimes (g' \circ g)(w) \\ &= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(v \otimes w). \end{aligned}$$

Portanto, temos $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, mostrando que o produto tensorial é realmente um bifuntor.

Vimos que a categoria produto, ao generalizar o produto cartesiano, oferece o ambiente natural para definir funtores binários, como por exemplo o produto tensorial de espaços vetoriais. A construção $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, junto com o conceito de bifuntor, prepara o terreno para um próximo passo: formalizar a noção de produto dentro de uma categoria. É com esse objetivo que seguiremos para a Categoria Monoidal, onde um refinamento do conceito de bifuntor define um produto que mapeia $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ de volta em $\mathcal{C}$.

Categoria Monoidal

2.1 Categoria Monoidal

As categorias monoidais visam proporcionar uma generalização abstrata da ideia de “produto” entre objetos matemáticos. Elas fornecem um ambiente no qual é possível trabalhar com operações semelhantes ao produto cartesiano de conjuntos ou ao produto tensorial de espaços vetoriais, mas sem depender de uma construção específica.

De forma intuitiva, uma categoria monoidal é uma categoria equipada com uma operação binária, a qual é um bifuntor, que associa a cada par de objetos X e Y um novo objeto $X \otimes Y$, junto de um objeto especial que desempenha o papel de elemento neutro. A associatividade dessa operação e sua compatibilidade com o objeto neutro não são estritas, mas controladas por isomorfismos naturais, de modo que diferentes maneiras de reordenar ou agrupar os objetos conduzem a resultados essencialmente equivalentes.

Nesta seção, vamos introduzir a noção de categoria monoidal, acompanhada de alguns exemplos. Em seguida, apresentaremos também os conceitos de funtor monoidal e de transformação natural monoidal, que descrevem, respectivamente, os morfismos entre categorias monoidais e as transformações naturais compatíveis com as estruturas monoidais desses funtores.

Definição 2.1 (Categoria monoidal). Uma *categoria monoidal* é uma quintupla

$$(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho),$$

composta por

- uma categoria $\mathcal{C}$;
- um bifuntor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ chamado *produto monoidal*;
- um objeto $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$ chamado *unidade monoidal*;

- um isomorfismo natural

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z) \quad (2.1)$$

para quaisquer objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ chamado *isomorfismo associativo*;

- isomorfismos naturais

$$\lambda_X: \mathbb{1} \otimes X \xrightarrow{\cong} X \quad \text{e} \quad \rho_X: X \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\cong} X \quad (2.2)$$

para qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$ chamados *isomorfismo unitário à esquerda* e *isomorfismo unitário à direita*, respectivamente;

de modo que satisfaçam os seguintes axiomas, os quais também são chamados de *condições de coerência*:

Axioma da unidade: O seguinte diagrama é comutativo para todos os objetos $X, Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes \mathbb{1}) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{X,\mathbb{1},Y}} & X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \\ & \searrow \rho_X \otimes Y & \swarrow X \otimes \lambda_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

Além do mais, vale a seguinte igualdade

$$\lambda_{\mathbb{1}} = \rho_{\mathbb{1}}: \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{1}.$$

Axioma do pentágono: o diagrama pentagonal

$$\begin{array}{ccccc} & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & \\ & \nearrow \alpha_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow \alpha_{W, X, Y \otimes Z} & \\ ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\ & \searrow \alpha_{W, X, Y \otimes Z} & & \nearrow W \otimes \alpha_{X, Y, Z} & \\ (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & \xrightarrow{\alpha_{W, X \otimes Y, Z}} & & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \end{array}$$

é comutativo para quaisquer objetos $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Notação 2. Eventualmente, podemos nos referir à categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ simplesmente por *categoria monoidal* $\mathcal{C}$.

Definição 2.2 (Categoria monoidal estrita). Dizemos que uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ é *estrita* se os isomorfismos associativo e unitários são identidades, isto é,

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y,Z} &= \text{id}_{(X \otimes Y) \otimes Z}, \\ \lambda_X &= \text{id}_X, \\ \rho_X &= \text{id}_X, \end{aligned}$$

para quaisquer objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Observação 2.3. Em uma categoria monoidal:

- (i) A igualdade $\lambda_{\mathbb{1}} = \rho_{\mathbb{1}}$ não precisa ser imposta como axioma, pois ela é uma consequência de duas outras condições fundamentais em categorias monoidais: o axioma da unidade e o axioma do pentágono.
- (ii) Os diagramas

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{1} \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{1}, X, Y}} & \mathbb{1} \otimes (X \otimes Y) \\ & \searrow \lambda_{X \otimes Y} \quad \swarrow \lambda_{X \otimes Y} & \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\alpha_{X, Y, \mathbb{1}}} & X \otimes (Y \otimes \mathbb{1}) \\ & \searrow \rho_{X \otimes Y} \quad \swarrow X \otimes \rho_Y & \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

são comutativos. Eles são chamados de *diagrama da unidade à esquerda* e *diagrama da unidade à direita*, respectivamente.

Exemplo 2.4. Considere a categoria Sets. Definimos um bifunctor

$$\times : \text{Sets} \times \text{Sets} \longrightarrow \text{Sets}$$

dado pelo produto cartesiano de conjuntos. Tomamos como objeto unidade um conjunto com exatamente um elemento,

$$\mathbb{1} := \{*\}.$$

Para quaisquer conjuntos X, Y, Z , fixamos o isomorfismo associativo

$$\begin{aligned} \alpha_{X, Y, Z} : (X \times Y) \times Z &\longrightarrow X \times (Y \times Z) \\ ((x, y), z) &\longmapsto (x, (y, z)). \end{aligned}$$

Além disso, para cada conjunto X , consideramos os isomorfismos de unidade

$$\lambda_X : \mathbb{1} \times X \longrightarrow X, \quad \rho_X : X \times \mathbb{1} \longrightarrow X,$$

definidos por

$$(*, x) \longmapsto x \quad \text{e} \quad (x, *) \longmapsto x,$$

respectivamente.

Os isomorfismos α , λ e ρ são naturais e satisfazem as condições de coerência (axiomas do pentágono e do triângulo). Portanto,

$$(\text{Sets}, \times, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$$

é uma categoria monoidal.

Exemplo 2.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A categoria $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ admite uma estrutura monoidal dada pelo bifuntor

$$\otimes: \text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}},$$

que associa a cada par de espaços vetoriais (V, W) o seu produto tensorial $V \otimes W$. O objeto unidade é o próprio corpo $\mathbb{K}$, visto como espaço vetorial sobre si mesmo.

A associatividade do produto monoidal é expressa por isomorfismos naturais

$$(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U),$$

enquanto as propriedades de unidade são dadas por isomorfismos naturais

$$V \otimes \mathbb{K} \simeq V \simeq \mathbb{K} \otimes V.$$

Tais isomorfismos são induzidos pela propriedade universal do produto tensorial e satisfazem as condições de coerência usuais, de modo que $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ é uma categoria monoidal.

Exemplo 2.6. (Categoria Monoidal Oposta). Para cada categoria monoidal $\mathcal{C}$, a categoria oposta $\mathcal{C}^{\text{op}}$ também admite uma estrutura monoidal representada pela tupla

$$(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, \mathbb{1}, \alpha^{-1}, \lambda^{-1}, \rho^{-1}),$$

com o funtor

$$\otimes^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \simeq (\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\text{op}} \xrightarrow{\otimes^{\text{op}}} \mathcal{C}^{\text{op}};$$

isto é, para objetos $X, Y \in \mathcal{C}^{\text{op}}$, define-se

$$\underbrace{X \otimes^{\text{op}} Y}_{\in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})} := \underbrace{X \otimes Y}_{\in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

e para morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X', X)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y', Y)$ em $\mathcal{C}^{\text{op}}$ (isto é, $f: X \rightarrow X'$ e $g: Y \rightarrow Y'$ em $\mathcal{C}$), define-se

$$f \otimes^{\text{op}} g := f \otimes g: X \otimes Y \rightarrow X' \otimes Y'.$$

A unidade monoidal é a mesma $\mathbb{1}$. Os isomorfismos naturais α, λ, ρ de $\mathcal{C}$ também definem isomorfismos naturais em $\mathcal{C}^{\text{op}}$ (pois são invertíveis em $\mathcal{C}$, logo também o são em $\mathcal{C}^{\text{op}}$). Portanto, $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, \mathbb{1}, \alpha^{-1}, \lambda^{-1}, \rho^{-1})$ é uma categoria monoidal.

2.2 Monoides em Categorias Monoidais

2.2.1 Monoide

Uma vez fixada a noção de categoria monoidal, podemos definir o conceito de monoide nesse contexto. Intuitivamente, um monoide em uma categoria monoidal é um objeto munido de uma operação de multiplicação e de um morfismo unidade, compatíveis com a estrutura monoidal da categoria.

Definição 2.7 (Monoíde). Um *monoíde* em uma categoria monoídal $\mathcal{C}$ é uma tripla $(X, \mu, 1)$ onde

- X é um objeto em $\mathcal{C}$;
- $\mu: X \otimes X \longrightarrow X$ é um morfismo, chamado de *multiplicação*;
- $1: \mathbb{1} \longrightarrow X$ é um morfismo, chamado de *unidade*;

de modo que o *diagrama da associatividade* e o *diagrama da unidade* comutem:

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes X) \otimes X & \xrightarrow{\alpha} & X \otimes (X \otimes X) \\
 \downarrow \mu \otimes X & & \downarrow X \otimes \mu \\
 X \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\
 X & & X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} \otimes X & \xrightarrow{1 \otimes X} & X \otimes X & \xleftarrow{X \otimes \mathbb{1}} & X \otimes \mathbb{1} \\
 \searrow \lambda & & \downarrow \mu & & \swarrow \rho \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Exemplo 2.8. Seja $(X, \mu, 1)$ um monoíde na categoria monoídal do Exemplo 2.4, isto é, um monoíde no sentido usual da álgebra. Associamos a X uma categoria ΣX definida da seguinte forma:

- ΣX possui um único objeto, que denotamos por $*$;
- o conjunto de morfismos é dado por

$$\text{Hom}_{\Sigma X}(*, *) = X;$$

- a composição de morfismos

$$\circ: \text{Hom}_{\Sigma X}(*, *) \times \text{Hom}_{\Sigma X}(*, *) \longrightarrow \text{Hom}_{\Sigma X}(*, *)$$

é definida pela multiplicação do monoíde, isto é, $x \circ y := \mu(x, y)$;

- o morfismo identidade de $*$ é dado por

$$\text{id}_* := 1(*) \in X.$$

As axiomas de associatividade e de unidade do monoíde garantem que a composição é associativa e que id_* atua como identidade para a composição. Logo, ΣX é uma categoria.

Observação 2.9. Toda a informação do monoíde X é concentrada na categoria ΣX , que possui um único objeto. Nessa construção, os elementos de X são reinterpretados como endomorfismos desse objeto, e a operação do monoíde corresponde à composição de morfismos.

Exemplo 2.10. Assim como no exemplo anterior, considere $(X, \mu, 1)$ um monoide da categoria monoidal do Exemplo 2.4. Podemos considerar a categoria discreta X^{dis} , cujos objetos são os elementos de X e cujos únicos morfismos são as identidades. Definimos uma estrutura de categoria monoidal estrita em X^{dis} da seguinte forma:

- o produto monoidal nos objetos é dado pela operação do monoide, isto é, para $x, y \in X$, define-se

$$x \times y := \mu(x, y);$$

- o objeto unidade é o elemento $1 \in X$;
- como todos os morfismos são identidades, os isomorfismos de associatividade e de unidade são identidades.

A associatividade e a existência de unidade no monoide garantem que X^{dis} é uma categoria monoidal estrita.

2.2.2 Morfismo de monoides

Assim como no caso dos monoides clássicos, é natural considerar aplicações que preservem a estrutura de monoide. Em uma categoria monoidal, tais aplicações são definidas como morfismos que respeitam a multiplicação e a unidade. Essa noção permite organizar os monoides de uma categoria monoidal em uma categoria, cujos morfismos são os morfismos de monoides.

Definição 2.11 (Morfismo de monoides). Seja $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e sejam $(X, \mu^X, 1^X)$ e $(Y, \mu^Y, 1^Y)$ dois monoides em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Definimos o morfismo de monoides

$$f: (X, \mu^X, 1^X) \rightarrow (Y, \mu^Y, 1^Y)$$

de modo que a multiplicação e a unidade sejam preservadas, ou seja, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{f \otimes f} & Y \otimes Y \\ \mu^X \downarrow & & \downarrow \mu^Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{1^X} & X \\ & \searrow 1^Y & \downarrow f \\ & & Y. \end{array}$$

Dados dois morfismos de monoides

$$f: (X, \mu^X, 1^X) \rightarrow (Y, \mu^Y, 1^Y) \quad \text{e} \quad g: (Y, \mu^Y, 1^Y) \rightarrow (Z, \mu^Z, 1^Z)$$

a composição

$$g \circ f: (X, \mu^X, 1^X) \rightarrow (Z, \mu^Z, 1^Z)$$

é um morfismo de monoides, pois preserva a multiplicação e a unidade. A multiplicação é preservada pela composição $g \circ f$, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{g \circ f \otimes g \circ f} & Z \otimes Z \\ \mu^X \downarrow & & \downarrow \mu^Z \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \end{array}$$

comuta. Já a unidade é preservada, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{1^X} & X \\ & \searrow 1^Z & \downarrow g \circ f \\ & & Z \end{array}$$

é comutativo.

A comutatividade dos diagramas é garantida, pelo fato de que f e g são morfismos de monoides. De fato,

$$\begin{aligned} \mu^Z \circ (g \circ f \otimes g \circ f) &= \mu^Z \circ ((g \otimes g) \circ (f \otimes f)) && \text{(propriedade funtorial do produto monoidal)} \\ &= (\mu^Z \circ (g \otimes g)) \circ (f \otimes f) && \text{(associatividade da composição)} \\ &= (g \circ \mu^Y) \circ (f \otimes f) && \text{(comutatividade para } g, \text{ pois } g \text{ é morfismo de monoides)} \\ &= g \circ (\mu^Y \circ (f \otimes f)) && \text{(associatividade da composição)} \\ &= g \circ (f \circ \mu^X) && \text{(comutatividade para } f, \text{ pois } f \text{ é morfismo de monoides)} \\ &= (g \circ f) \circ \mu^X && \text{(associatividade da composição)} \end{aligned}$$

Portanto, a condição de preservação da multiplicação é satisfeita.

Agora vamos mostrar que o diagrama de unidade comuta, ou seja, que a igualdade

$$(g \circ f) \circ 1^X = 1^Z$$

é satisfeita.

Observe que

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ 1^X &= g \circ (f \circ 1^X) && \text{(associatividade da composição)} \\ &= g \circ 1^Y && \text{(preservação da unidade por } f, \text{ pois } f \text{ é morfismo de monoides)} \\ &= 1^Z && \text{(preservação da unidade por } g, \text{ pois } g \text{ é morfismo de monoides)} \end{aligned}$$

Portanto, a condição de preservação da unidade é satisfeita.

Agora que definimos morfismos de monoides, temos que dada uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, podemos definir a *categoria dos monoides* em $\mathcal{C}$ a qual denotamos por $\text{Mon}(\mathcal{C})$.

2.3 Funtores monoidais

Definição 2.12 (Funtor monoidal). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias monoidais. Um *funtor monoidal*

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

consiste de

- um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$;
- uma transformação natural

$$\mathcal{F}_2: \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X \otimes Y)$$

em $\mathcal{D}$, com $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;

- um morfismo

$$\mathcal{F}_0: \mathbb{1}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{1}^{\mathcal{C}})$$

em $\mathcal{D}$;

tais que os axiomas da associatividade e da unidade (à direita e à esquerda) são satisfeitos.

Associatividade: O diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)) \otimes \mathcal{F}(Z) & \xrightarrow{\alpha^{\mathcal{D}}} & \mathcal{F}(X) \otimes (\mathcal{F}(Y) \otimes \mathcal{F}(Z)) \\ \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}(Z) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}(X \otimes Y) \otimes \mathcal{F}(Z) & & X \otimes X \\ \mathcal{F}_2 \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\mathcal{F}\alpha^{\mathcal{C}}} & \mathcal{F}(X \otimes (Y \otimes Z)) \end{array}$$

é comutativo para quaisquer $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Unidade à esquerda: O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{F}(X)}^{\mathcal{D}}} & \mathcal{F}(X) \\ \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}(X) \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}(\lambda_X^{\mathcal{C}}) \\ \mathcal{F}(\mathbb{1}^{\mathcal{C}}) \otimes \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{F}(\mathbb{1}^{\mathcal{C}} \otimes X). \end{array}$$

é comutativo para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Unidade à direita: O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{1}^{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{F}(X)}^{\mathcal{D}}} & \mathcal{F}(X) \\ \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}_0 \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}(\rho_X^{\mathcal{C}}) \\ \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(\mathbb{1}^{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{F}(X \otimes \mathbb{1}^{\mathcal{C}}). \end{array}$$

é comutativo para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Notação 3. Um funtor monoidal $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_0)$ eventualmente pode ser denotado simplesmente por $\mathcal{F}$.

Definição 2.13 (Funtor monoidal forte e estrito). Um *funtor monoidal forte* é um funtor monoidal em que os morfismos $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_2$ são isomorfismos. Um *funtor monoidal estrito* é um funtor monoidal em que os morfismos $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_2$ são morfismos identidade.

2.4 Transformação natural monoidal

Assim como definimos morfismos de funtores no Capítulo 1, também podemos definir *morfismos entre funtores monoidais*, os quais também são chamados de *transformações naturais monoidais*.

Definição 2.14 (Transformação natural monoidal). Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores monoidais. Uma *transformação natural monoidal* $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma transformação natural entre os funtores subjacentes tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\theta_X \otimes \theta_Y} & \mathcal{G}(X) \otimes \mathcal{G}(Y) \\ \mathcal{F}_2 \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{F}(X \otimes Y) & \xrightarrow{\theta_{X \otimes Y}} & \mathcal{G}(X \otimes Y). \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} 1^{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\mathcal{F}_0} & \mathcal{F}(1^{\mathcal{C}}) \\ & \searrow \mathcal{G}_0 & \downarrow \theta_{1^{\mathcal{C}}} \\ & & \mathcal{G}(1^{\mathcal{C}}). \end{array}$$

são comutativos para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

Teorema 2.15 (Teorema de Coerência de Mac Lane). Para cada categoria monoidal $\mathcal{C}$, existe uma categoria monoidal estrita $\mathcal{C}_{\text{est}}$ e uma equivalência monoidal

$$L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{est}}$$

$$R: \mathcal{C}_{\text{est}} \rightarrow \mathcal{C}$$

tal que:

- (i) os funtores L e R são funtores monoidais fortes;
- (ii) $R \circ L = \text{id}_{\mathcal{C}}$

O Teorema de Coerência de Mac Lane afirma que toda categoria monoidal $\mathcal{C}$ é equivalente, no sentido categórico, a uma categoria monoidal estrita. Mais precisamente, existe uma categoria monoidal estrita $\mathcal{C}_{\text{est}}$ e uma equivalência adjunta

$$L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{est}}$$

$$R: \mathcal{C}_{\text{est}} \rightarrow \mathcal{C}$$

tal que os funtores L e R são fortemente monoidais e satisfazem $R \circ L = 1_{\mathcal{C}}$.

O conteúdo essencial do teorema é que todas as ambiguidades formais introduzidas pelos isomorfismos estruturais da categoria monoidal, em particular o isomorfismo associativo

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z),$$

bem como os isomorfismos de unidade

$$\lambda_X: \mathbb{1} \otimes X \longrightarrow X, \quad \rho_X: X \otimes \mathbb{1} \longrightarrow X,$$

são coerentes no sentido de que todo diagrama construído a partir dessas transformações comuta.

2.5 Categoria monoidal simétrica

Em muitos exemplos naturais, a operação monoidal não depende da ordem dos fatores, no sentido de que os objetos $X \otimes Y$ e $Y \otimes X$ podem ser identificados de maneira canônica. Essa situação é formalizada pela noção de categoria monoidal simétrica, na qual existe um isomorfismo natural que troca os fatores do produto monoidal, compatível com as estruturas de associatividade e de unidade.

Definição 2.16 (Categoria monoidal simétrica). Uma categoria monoidal simétrica é um par $(\mathcal{C}, \xi)$ em que:

- $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ é uma categoria monoidal como na Definição 2.1;
- ξ é um isomorfismo natural

$$\xi_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X$$

para objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, chamados *isomorfismo simétrico*;

de modo que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

- *Axioma de simetria:* O diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\xi_{X,Y}} & Y \otimes X \\ & \searrow \text{id}_{X \otimes Y} & \downarrow \xi_{Y,X} \\ & & X \otimes Y \end{array}$$

é comutativo para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

- *Axioma da unidade:* O diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\xi_{X,\mathbb{1}}} & \mathbb{1} \otimes X \\ & \searrow \rho_X & \downarrow \lambda_X \\ & & X \end{array}$$

é comutativo para qualquer objetos $X \in \mathcal{C}$

- *Axioma do hexágono*: O diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{X \otimes \xi_{Z,Y}} & X \otimes (Y \otimes Z) \\
 & \nearrow \alpha & & & \searrow \alpha^{-1} \\
 (X \otimes Z) \otimes Y & & & & (X \otimes Y) \otimes Z \\
 & \searrow \xi_{X \otimes Z, Y} & & & \nearrow \xi_{Y, X \otimes Z} \\
 & & Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & (Y \otimes X) \otimes Z
 \end{array}$$

é comutativo para quaisquer objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Definição 2.17 (Categoria monoidal estrita). Uma categoria monoidal é dita *estrta* se a categoria monoidal subjacente é uma categoria estrita.

Definição 2.18 (Monoide comutativo). Seja $(\mathcal{C}, \xi)$ uma categoria monoidal simétrica. Um *monoide comutativo* em $\mathcal{C}$ é um monoide $(X, \mu, 1)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes X & \xrightarrow{\xi_{X,X}} & X \otimes X \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X.
 \end{array}$$

Definição 2.19 (Funtor monoidal simétrico). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias monoidais simétricas. Um *funtor monoidal simétrico*

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_0): \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

é um funtor monoidal tal que, para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)}^{\mathcal{D}}} & \mathcal{F}(Y) \otimes \mathcal{F}(X) \\
 \mathcal{F}_2 \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_2 \\
 \mathcal{F}(X \otimes Y) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\sigma_{X,Y}^{\mathcal{C}})} & \mathcal{F}(Y \otimes X)
 \end{array}$$

é comutativo.

2.6 Categorias enriquecidas

Nessa seção veremos sobre categorias enriquecidas. Uma categoria enriquecida é uma generalização das categorias usuais, permitindo que os morfismos entre objetos pertençam a uma estrutura matemática mais geral que conjuntos (por exemplo, espaços vetoriais, grupos, etc.).

Definição 2.20 (Categoria enriquecida). Considere $\mathcal{V}$ uma categoria monoidal. Uma $\mathcal{V}$ -categoria $\mathcal{C}$, também chamada de *categoria enriquecida em $\mathcal{V}$* , consiste de:

- uma classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos em $\mathcal{C}$;

- para cada par de objetos X, Y em $\mathcal{C}$, um objeto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ em $\mathcal{V}$, chamado de *objeto hom* com domínio X e contradomínio Y ;
- para cada tripla de objetos X, Y e Z em $\mathcal{C}$, um morfismo

$$m_{XYZ} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

em $\mathcal{V}$ é chamado de *composição*;

- para cada objeto X em $\mathcal{C}$, um morfismo

$$i_X : \mathbb{1} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

em $\mathcal{V}$ é chamado de *identidade* de X .

Tais que o *diagrama associativo*

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)) \\
 \downarrow m \otimes 1 & & \downarrow 1 \otimes m \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \\
 & & \downarrow m \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \xrightarrow{m} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)
 \end{array}$$

e o *diagrama da unidade*

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes \mathbb{1} \\
 \downarrow i_Y \otimes 1 & \searrow \lambda & & \swarrow \rho & \downarrow \mathbb{1} \otimes \mathbb{X} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & & \\
 & \nearrow m & & \nwarrow m & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)
 \end{array}$$

sejam comutativos para objetos W, X, Y e Z em $\mathcal{C}$. Isso finaliza a definição de uma $\mathcal{V}$ -categoria.

A definição acima pode ser entendida como uma generalização direta da noção usual de categoria, na qual os conjuntos de morfismos são substituídos por objetos de uma categoria monoidal fixa $\mathcal{V}$. Assim, para cada par de objetos X, Y , o objeto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathcal{V}$ desempenha o papel do conjunto de morfismos de X para Y .

A composição de morfismos não é mais uma aplicação entre conjuntos, mas um morfismo em $\mathcal{V}$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

cujas definições utilizam essencialmente a estrutura monoidal de $\mathcal{V}$. Do mesmo modo, as identidades são codificadas por morfismos $\mathbb{1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, onde $\mathbb{1}$ é o objeto unidade de $\mathcal{V}$.

Os diagramas de associatividade e de unidade expressam que a composição é associativa e unital *no sentido de $\mathcal{V}$* , isto é, de maneira compatível com os isomorfismos estruturais da categoria monoidal.

Definição 2.21. Uma $\mathcal{V}$ -categoria $\mathcal{C}$ é dita *pequena* se $\text{Ob}(\mathcal{C})$ é um conjunto.

Definição 2.22. ($\mathcal{V}$ -funtor) Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas $\mathcal{V}$ -categorias. Um $\mathcal{V}$ -funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ consiste de:

- uma atribuição aos objetos

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) \\ X &\longmapsto \mathcal{F}(X); \end{aligned}$$

- para cada par de objetos X, Y em $\mathcal{C}$, um morfismo

$$\mathcal{F}_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

em $\mathcal{V}$;

tais que os seguintes dados sejam satisfeitos:

Composição: Para cada tripla de objetos X, Y, Z em $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\quad m \quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) & \xrightarrow{\quad m \quad} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Z)) \end{array}$$

em $\mathcal{V}$ é comutativo.

Identidades: Para cada objeto X pertencente a $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{\quad i_X \quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \\ & \searrow i_{\mathcal{F}(X)} & \downarrow \mathcal{F} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)). \end{array}$$

em $\mathcal{V}$ é comutativo.

Além disso:

- Para $\mathcal{V}$ -funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, a composição

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

é o $\mathcal{V}$ -funtor definido por composição as atribuições em objetos e formando o composto

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})_{XY} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)} \circ \mathcal{F}_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X), (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(Y))$$

- O $\mathcal{V}$ -funtor *identidade* de $\mathcal{C}$, denotado por $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, é dado pela função identidade em $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e o morfismo identidade $1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)}$ para objetos X, Y em $\mathcal{C}$.

A noção de $\mathcal{V}$ -funtor generaliza a ideia usual de funtor para o contexto enriquecido. Intuitivamente, um $\mathcal{V}$ -funtor é uma aplicação entre $\mathcal{V}$ -categorias que preserva não apenas os objetos, mas também a estrutura enriquecida dos morfismos.

Mais precisamente, além de enviar objetos de $\mathcal{C}$ em objetos de $\mathcal{D}$, um $\mathcal{V}$ -funtor associa a cada objeto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ um morfismo em $\mathcal{V}$

$$\mathcal{F}_{XY}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)),$$

de modo compatível com a composição e com as identidades. A comutatividade dos diagramas garante que a imagem da composição enriquecida coincide com a composição enriquecida das imagens, e que as identidades são preservadas no sentido enriquecido, isto é, os morfismos identidade $i_X: \mathbb{1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ são enviados, via os morfismos estruturais do $\mathcal{V}$ -funtor, às identidades $i_{\mathcal{F}(X)}: \mathbb{1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$.

Assim como no caso clássico, os $\mathcal{V}$ -funtores podem ser compostos e admitem identidades, formando a noção adequada de morfismo entre categorias enriquecidas.

Definição 2.23. Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois $\mathcal{V}$ -funtores.

(i) Uma $\mathcal{V}$ -transformação natural $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste de um morfismo

$$\theta_X: \mathbb{1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$$

em $\mathcal{V}$, chamado de *componente de θ em X* , para cada objeto X de $\mathcal{C}$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow[\simeq]{\lambda^{-1}} & \mathbb{1} \otimes \text{Hom}(X, Y) \\ \rho^{-1} \downarrow \simeq & & \downarrow \theta_Y \otimes \mathcal{F} \\ \text{Hom}(X, Y) \otimes \mathbb{1} & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{G}(Y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ \mathcal{G} \otimes \theta_X \downarrow & & \downarrow m \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{G}(X), \mathcal{G}(Y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) & \xrightarrow{m} & \text{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(Y)) \end{array}$$

é comutativo para quaisquer objetos X, Y em $\mathcal{C}$.

(ii) A $\mathcal{V}$ -transformação natural identidade de $\mathcal{F}$, denotada por $1_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, é definida pelo componente

$$(1_{\mathcal{F}})_X := i_{\mathcal{F}(X)}: \mathbb{1} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$$

para cada objeto X de $\mathcal{C}$.

Assim como no caso das categorias ordinárias, as transformações $\mathcal{V}$ -naturais admitem noções naturais de composição. Essas composições refletem a estrutura monoidal da categoria de enriquecimento e permitem organizar as $\mathcal{V}$ -categorias, os $\mathcal{V}$ -funtores e as $\mathcal{V}$ -transformações naturais em uma estrutura de natureza 2-categorial. A seguir, descrevemos explicitamente as composições vertical e horizontal dessas transformações.

Definição 2.24. Seja $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ uma $\mathcal{V}$ -transformação natural entre $\mathcal{V}$ -funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

- (i) Seja $\phi: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ outra $\mathcal{V}$ -transformação natural para um $\mathcal{V}$ -funtor $\mathcal{H}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. A *composição vertical*

$$\phi\theta: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$$

é a $\mathcal{V}$ -transformação natural cujo componente $(\phi\theta)_X$ é dado pelo composto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{(\phi\theta)_X} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{H}(X)) \\ \lambda^{-1} \downarrow \simeq & & \uparrow m \\ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\phi_X \otimes \theta_X} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{G}(X), \mathcal{H}(X)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)). \end{array}$$

em $\mathcal{V}$, para cada objeto X de $\mathcal{C}$.

- (ii) Suponha que $\theta': \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}'$ seja uma $\mathcal{V}$ -transformação natural entre $\mathcal{V}$ -funtores $\mathcal{F}', \mathcal{G}': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é uma $\mathcal{V}$ -categoria. A *composição horizontal*

$$\theta' \odot \theta: \mathcal{F}' \circ \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}' \circ \mathcal{G}$$

é a $\mathcal{V}$ -transformação natural cujo componente $(\theta' \odot \theta)_X$, para um objeto X de $\mathcal{C}$, é definido pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{(\theta' \odot \theta)_X} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{H}(X)) \\ \lambda^{-1} \downarrow \simeq & & \uparrow m \\ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\phi_X \otimes \theta_X} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{G}(X), \mathcal{H}(X)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)) \\ & & \uparrow 1 \otimes \mathcal{F}' \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}'(\mathcal{G}(X)), \mathcal{G}'(\mathcal{G}(X))) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}'(\mathcal{F}(X)), \mathcal{F}'(\mathcal{G}(X))) \end{array}$$

em $\mathcal{V}$ para todo $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Ao longo deste capítulo, exploramos como as categorias monoidais permitem formalizar estruturas onde objetos podem ser multiplicados de forma coerente através de um bifuntor, generalizando conceitos fundamentais da álgebra clássica para o ambiente categórico. Vimos que a introdução de unitores e associadores fornece a flexibilidade necessária para lidar com operações que, embora não sejam estritamente idênticas, são ligadas por isomorfismos naturais canônicos.

A discussão sobre categorias enriquecidas (ou $\mathcal{V}$ -categorias) mostrou que a estrutura dos morfismos entre dois objetos não precisa ser apenas um conjunto, mas pode pertencer a uma categoria monoidal $\mathcal{V}$. Esta mudança de perspectiva, onde a igualdade estrita dá lugar a isomorfismos coerentes e os morfismos ganham estrutura interna, é o passo fundamental em direção à teoria de categorias de dimensão superior.

No próximo capítulo, avançaremos para o estudo das *2-categorias*. Introduziremos os 2-morfismos (morfismos entre morfismos) e discutiremos as distinções fundamentais entre estruturas *fortes* e *fracas*, consolidando a base necessária para o estudo posterior de feixes de categorias e gerbes, desenvolvido no Capítulo 7 deste trabalho.

2-categorias Fortes e Fracas

Em uma categoria usual, temos objetos, morfismos entre objetos e composição de morfismos, que é *associativa* e *unital*¹ de forma estrita.

Em muitas situações matemáticas, no entanto, a associatividade e a unitalidade valem apenas a menos de isomorfismos canônicos. Por exemplo, em teoria de homotopia ou em certas estruturas algébricas, a composição não é estritamente associativa, mas sim associativa a menos de homotopia ou de um isomorfismo coerente.

A teoria de categorias de dimensão superior busca generalizar a noção de categoria, introduzindo não apenas objetos e morfismos, mas também morfismos entre morfismos. Neste capítulo, apresentamos as noções de 2-categorias fracas e fortes. A diferença essencial entre as duas está no nível de rigidez das operações de composição e identidade.

De forma resumida, temos:

- *2-categorias fortes*: a composição horizontal é estritamente associativa e unital.
- *2-categorias fracas*: a composição horizontal é associativa e unital a menos de isomorfismos coerentes (associador e unitores).

3.1 2-Categoria Forte

Em uma categoria usual, cada par de objetos X, Y está associado a um conjunto $\text{Hom}(X, Y)$ de morfismos de X para Y . Já em uma 2-categoria $\mathcal{C}$, para cada par $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, associamos não um simples conjunto, mas sim uma *categoria pequena*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

cujos objetos são os *1-morfismos* de X para Y , e cujos morfismos são chamados *2-morfismos* de $\mathcal{C}$.

¹Dizemos que a composição é unital quando o morfismo identidade (de um objeto) atua como elemento neutro à direita e à esquerda. Isto é, dados $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, X)$ e $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$, temos $f \circ \text{id}_X = f$ e $\text{id}_Y \circ g = g$.

Se

$$f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)),$$

então um 2-morfismo

$$\alpha: f \Rightarrow g$$

pode ser representado graficamente por

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \curvearrowright & Y \\ & \Downarrow \alpha & \\ & g & \end{array}$$

A composição dos morfismos da categoria $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ é chamada de *composição vertical*. Dados

$$f, g, h: X \rightarrow Y$$

$$\alpha: f \Rightarrow g$$

$$\gamma: g \Rightarrow h,$$

a composição vertical pode ser representada pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & f & \\ X & \curvearrowright & Y \\ & \Downarrow \alpha & \\ & \Downarrow \gamma & \\ & h & \end{array} & \dashrightarrow & \begin{array}{ccc} & f & \\ X & \curvearrowright & Y \\ & \Downarrow \gamma \circ \alpha & \\ & h & \end{array} \end{array}$$

Essa composição é associativa, respeitando o fato de que $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ é uma categoria.

Além disso, para que o conjunto desses dados forme de fato uma 2-categoria, precisamos de uma *composição horizontal*. Isto é, para toda tripla $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, existe um bifuntor

$$\circ_{X,Y,Z}: \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z).$$

Esse funtor atua tanto nos objetos quanto nos morfismos das categorias envolvidas:

- para objetos $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$, definimos

$$\circ_{X,Y,Z}(g, f) := g \circ f;$$

visualmente, temos

$$\begin{array}{ccccc} X & & f & & Y & & g & & Z \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & g \circ f & & & & & & \end{array}$$

- para 2-morfismos $\alpha: f_1 \Rightarrow g_1$ e $\beta: f_2 \Rightarrow g_2$, o funtor envia o par (β, α) em $\beta \odot \alpha$, onde o símbolo $\odot$ é utilizado apenas para distinguir a composição horizontal da composição vertical entre 2-morfismos.

Graficamente, a composição horizontal pode ser representada como

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} & Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} & Z & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 \circ f_1} \\ \Downarrow \beta \odot \alpha \\ \xrightarrow{g_2 \circ g_1} \end{array} & Z
 \end{array}$$

Dessa forma, uma 2-categoria forte $\mathfrak{C}$ é composta por:

- objetos (ou 0-morfismos);
- 1-morfismos entre objetos;
- 2-morfismos entre 1-morfismos, com duas composições: *vertical* (dentro de cada $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$) e *horizontal* (entre diferentes pares de objetos);

de modo que esses dados satisfazem certos axiomas.

A definição formal, é apresentada a seguir.

Definição 3.1 (2-Categoria Forte). Uma 2-categoria forte $\mathfrak{C}$ é definida por:

- uma classe $\text{Ob}(\mathfrak{C})$ de objetos, chamados *0-morfismos* de $\mathfrak{C}$;
- para todo par $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, uma categoria pequena $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, cujos objetos são chamados *1-morfismos* de $\mathfrak{C}$ e cujos morfismos dessa categoria são chamados de *2-morfismos* de $\mathfrak{C}$; a composição é dita *composição vertical*;
- para toda tripla $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, um bifuntor, dito *composição horizontal*,

$$\circ: \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z)$$

tais que:

- as categorias pequenas são duas a duas disjuntas para diferentes pares de objetos;
- a composição horizontal é associativa, ou seja

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \quad (\gamma \odot \beta) \odot \alpha = \gamma \odot (\beta \odot \alpha)$$

sempre que forem definidas;

- para todo $X \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, existe um morfismo identidade $\text{id}_X \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, X))$ tal que

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{e} \quad \text{id}_X \circ g = g$$

quando essas composições forem definidas;

(iv) a composição horizontal é unital nos 2-morfismos, ou seja

$$\text{id}_{\text{id}_X} \circ \alpha = \alpha \quad \text{e} \quad \beta \circ \text{id}_{\text{id}_X} = \beta$$

sempre que essas composições forem definidas.

Notação 4. A classe $\text{Ob}(\mathfrak{C})$ é denotada por $\mathfrak{C}_0$, enquanto a coleção dos 1-morfismos e a coleção dos 2-morfismos são denotadas respectivamente por $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$.

Agora vamos analisar o significado de cada parte da definição de 2-categoria forte.

As condições de (i) a (iv) da Definição anterior (Definição 3.1) garantem que essas duas composições interajam de modo coerente, assegurando a estrutura estrita de uma 2-categoria forte.

Analisemos os axiomas da Definição 3.1:

- O item (i) significa que para todos $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, se $(X, Y) \neq (Z, W)$ então as categorias $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, W)$ não possuem objetos e nem morfismos em comum, ou seja

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)) \cap \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, W)) &= \emptyset, \\ \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)}(f, g) \cap \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, W)}(h, l) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Caso isso não ocorra, podemos facilmente impor por construção tal condição, rotulando (indexando) esses conjuntos.

- Para o item (ii), no contexto

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & W \\ & \Downarrow \alpha & & \Downarrow \beta & & \Downarrow \gamma & \\ X & \xrightarrow{g_1} & Y & \xrightarrow{g_2} & Z & \xrightarrow{g_3} & W \end{array}$$

precisamos que a ordem com a qual aplicamos os funtores composição horizontal não altere o resultado final, ou seja,

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2) \circ f_3 &= f_1 \circ (f_2 \circ f_3), \\ (\gamma \odot \beta) \odot \alpha &= \gamma \odot (\beta \odot \alpha). \end{aligned}$$

Dito de outra forma, pedimos que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} & (f_3 \circ f_2) \circ f_1 & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \Downarrow (\gamma \odot \beta) \odot \alpha & \\ & (g_3 \circ g_2) \circ g_1 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 & f_3 \circ (f_2 \circ f_1) & \\
 X & \begin{array}{c} \searrow \\ \Downarrow \gamma \odot (\beta \odot \alpha) \\ \nearrow \end{array} & Y \\
 & g_3 \circ (g_2 \circ g_1) &
 \end{array}$$

sejam iguais.

- O fato de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ser uma categoria garante que para todo $f: X \rightarrow Y$, existe um 2-morfismo identidade

$$\text{id}_f: f \Rightarrow f$$

em $\mathcal{C}_2$ tal que

$$\alpha \circ \text{id}_f = \alpha,$$

$$\text{id}_f \circ \beta = \beta$$

sempre que essas composições verticais estiverem bem definidas. No entanto, isso não garante a existência do morfismo id_X do item (iii). Porém, uma vez que existe $\text{id}_X \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X))$, a existência de

$$\text{id}_{\text{id}_X} \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)}(\text{id}_X, \text{id}_X)$$

é garantida, sendo necessário exigir em (iv) apenas que

$$\text{id}_{\text{id}_X} \odot \alpha = \alpha = \alpha \odot \text{id}_{\text{id}_X},$$

quando estas composições forem definidas. Ou seja, considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{id}_X & & f & \\
 X & \begin{array}{c} \searrow \\ \Downarrow \text{id}_{\text{id}_X} \\ \nearrow \end{array} & X & \begin{array}{c} \searrow \\ \Downarrow \alpha \\ \nearrow \end{array} & Y \\
 & \text{id}_X & & g &
 \end{array}$$

e fazendo a composição horizontal, temos que os diagramas

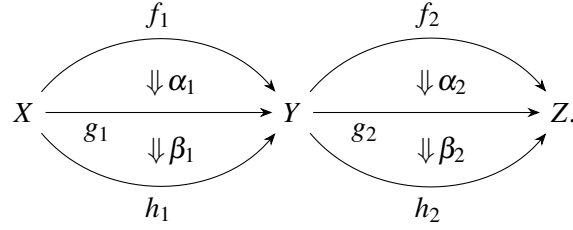
$$\begin{array}{ccc}
 & \text{id}_X \circ f & \\
 X & \begin{array}{c} \searrow \\ \Downarrow \text{id}_{\text{id}_X} \odot \alpha \\ \nearrow \end{array} & Y \\
 & \text{id}_X \circ g &
 \end{array}$$

e

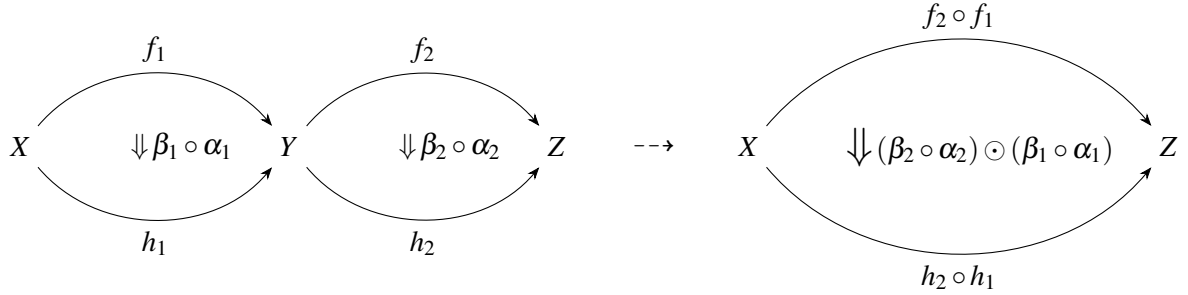
$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 X & \begin{array}{c} \searrow \\ \Downarrow \alpha \\ \nearrow \end{array} & Y \\
 & g &
 \end{array}$$

são iguais.

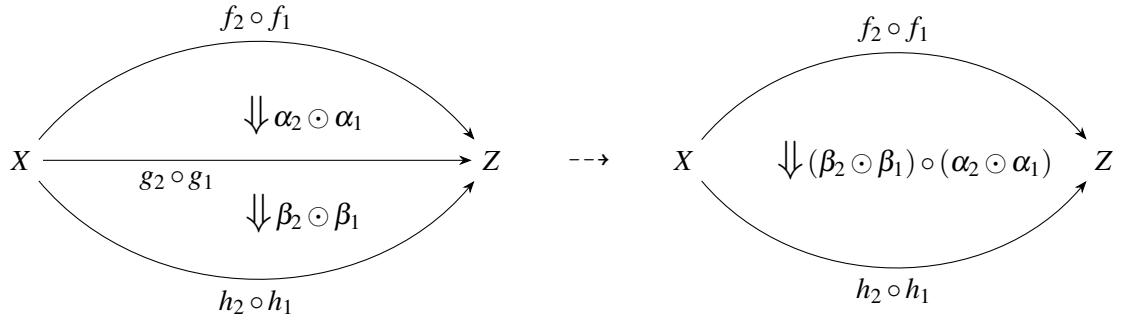
Lema 3.2. Considere o seguinte diagrama



Compor verticalmente e depois horizontalmente



é equivalente a compor horizontalmente e depois verticalmente



ou seja,

$$(\beta_2 \circ \alpha_2) \odot (\beta_1 \circ \alpha_1) = (\beta_2 \odot \beta_1) \circ (\alpha_2 \odot \alpha_1),$$

onde $\circ$ aplicado nos 2-morfismos denotada a composição vertical e $\odot$ denota a composição horizontal.

Demonstração. Como a composição horizontal é um bifuntor², segue da definição que a composição (vertical) dos 2-morfismos é preservada, mais especificamente, temos que

$$\begin{aligned} (\beta_2 \circ \alpha_2) \odot (\beta_1 \circ \alpha_1) &= \odot(\beta_2 \circ \alpha_2, \beta_1 \circ \alpha_1) \\ &= \odot(\odot(\beta_2, \beta_1), \odot(\alpha_2, \alpha_1)) \\ &= \odot((\beta_2 \odot \beta_1), (\alpha_2 \odot \alpha_1)) \\ &= (\beta_2 \odot \beta_1) \circ (\alpha_2 \odot \alpha_1). \end{aligned}$$

Portanto, os diagramas resultantes são equivalentes. ■

²Aqui, representamos o bifuntor composição horizontal como $\odot$ para expressar sua ação nos 2-morfismos de $\mathcal{C}$; enquanto $\circ$, abordado na demonstração, se refere a composição nas categorias $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$.

Observação 3.3. Segue do fato de que a *composição horizontal* é um bifuntor que para quaisquer

$$f_1: X \rightarrow Y \text{ e } f_2: Y \rightarrow Z,$$

temos

$$\text{id}_{f_2} \odot \text{id}_{f_1} = \text{id}_{f_2 \circ f_1}.$$

Isso significa que considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & f_1 & & f_2 & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & f_1 & & f_2 & \\ & \Downarrow \text{id}_{f_1} & & \Downarrow \text{id}_{f_2} & \end{array}$$

e fazendo a composição horizontal é equivalente a fazer a composição dos 1-morfismos f_1 e f_2 e aplicar o 2-morfismo identidade sobre essa composição, ou seja, temos que ambos os diagramas a seguir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2 \circ f_1} & Z, \\ & \Downarrow \text{id}_{f_2 \odot f_1} & \\ X & \xrightarrow{f_2 \circ f_1} & Z, \end{array}$$

são essencialmente iguais.

3.1.1 Exemplos

Definição 3.4 (Homotopia). Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ duas funções contínuas. Uma *homotopia* de f a g é uma função contínua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que f e g são *homotópicas*.

Definição 3.5 (Homotopia de homotopias). Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções contínuas e $H_0, H_1: X \times I \rightarrow Y$ homotopias de f a g . Uma *homotopia de homotopias* de H_0 a H_1 relativa a $X \times \partial I$ é uma função contínua $\theta: X \times I \times I \rightarrow Y$ tal que

- $\theta(x, t, 0) = H_0(x, t);$
- $\theta(x, t, 1) = H_1(x, t);$
- $\theta(x, 0, s) = f(x);$

$$\bullet \theta(x, 1, s) = g(x);$$

para todo $x \in X$ e $t, s \in I$.

Homotopias de homotopias definem uma relação de equivalência no conjunto das homotopias entre duas funções fixadas, conforme formalizado a seguir.

Afirmção 2. Fixem $f_0, f_1: X \rightarrow Y$. Seja $\mathcal{H}$ o conjunto das homotopias $H: X \times I \rightarrow Y$ tais que $H(x, 0) = f_0(x)$ e $H(x, 1) = f_1(x)$, para todo $x \in X$. Definimos $H_0 \sim H_1$ se existe uma homotopia de homotopias $\theta: X \times I \times I \rightarrow Y$ satisfazendo

$$\theta(x, t, 0) = H_0(x, t), \quad \theta(x, t, 1) = H_1(x, t),$$

e

$$\theta(x, 0, s) = f_0(x), \quad \theta(x, 1, s) = f_1(x),$$

para todo $x, t, s \in I$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{H}$.

Demonstração. Vamos mostrar que se trata efetivamente de uma relação de equivalência.

Reflexividade: Para $H \in \mathcal{H}$ basta tomar $\theta(x, t, s) := H(x, t)$. Então θ é contínua e satisfaz $\theta(\cdot, \cdot, 0) = \theta(\cdot, \cdot, 1) = H$ e as condições de bordo em $t = 0, 1$.

Simetria: Se θ é uma homotopia de homotopias de H_0 para H_1 , então $\tilde{\theta}(x, t, s) := \theta(x, t, 1 - s)$ é uma homotopia de homotopias de H_1 para H_0 , preservando as condições de bordo.

Transitividade: Se θ_1 é de H_0 para H_1 e θ_2 é de H_1 para H_2 , definimos a concatenação em s

$$\Theta(x, t, s) := \begin{cases} \theta_1(x, t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \theta_2(x, t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Pela igualdade $\theta_1(\cdot, \cdot, 1) = H_1 = \theta_2(\cdot, \cdot, 0)$, a função Θ é contínua em $s = \frac{1}{2}$ e $\Theta(\cdot, \cdot, 0) = H_0$, $\Theta(\cdot, \cdot, 1) = H_2$ e $\Theta(x, 0, s) = f_0(x)$, $\Theta(x, 1, s) = f_1(x)$. Assim $H_0 \sim H_2$.

Portanto $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é uma relação de equivalência em $\mathcal{H}$. ■

Agora que vimos essas definições, podemos definir a categoria pequena $\text{Hom}_{\mathfrak{T}\text{op}}(X, Y)$ tomando como objetos as funções contínuas de X a Y e para duas funções contínuas $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{T}\text{op}}(X, Y))$, o conjunto $\text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{T}\text{op}}(X, Y)}(f, g)$ é formado por classes de equivalências $[H]$, onde H é uma homotopia de f a g . Considerando $[H_1]: f \Rightarrow g$ e $[H_2]: g \Rightarrow h$, a composição vertical $[H_2] \circ [H_1]: f \Rightarrow h$ é definida por $[H_2 * H_1]$, onde

$$H_2 * H_1: X \times I \longrightarrow Y$$

$$(x, t) \longmapsto H_2 * H_1(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

e para cada $f: X \rightarrow Y$, a identidade $[\text{id}_f] \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{T}\text{op}}(X, Y)}(f, f)$ é a classe de homotopia $\text{id}_f: X \times I \rightarrow Y$ tal que $\text{id}_f(x, t) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Observação 3.6. É essencial considerar classes de equivalência de homotopias, pois, caso contrário, a composição definida acima seria apenas associativa a menos de homotopia, e a homotopia constante não atuaria como identidade estrita. Chamamos de *homotopia constante* associada a f a aplicação $\text{id}_f: X \times I \rightarrow Y$ definida por $\text{id}_f(x, t) = f(x)$. Sua classe de equivalência fornece o morfismo identidade em $\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(X, Y)$.

Exemplo 3.7. A 2-categoria forte $\mathcal{T}\text{op}$ é definida da seguinte forma:

- Os objetos são espaços topológicos;
- Para cada par de objetos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{T}\text{op})$, a composição horizontal

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(X, Z)$$

associa o par (g, f) à composição $g \circ f$; e para

$$([H_2], [H_1]) \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{T}\text{op}}(X, Y)}((g_1, f_1), (g_2, f_2)),$$

ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{g_1} & Z \\ & \Downarrow [H_1] & & \Downarrow [H_2] & \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y & \xrightarrow{g_2} & Z \end{array}$$

é associado a $[H_2] \odot [H_1] := [H_2 \# H_1]$, onde

$$\begin{aligned} H_2 \# H_1: X \times I &\longrightarrow Z \\ (x, t) &\longmapsto H_2(H_1(x, t), t). \end{aligned}$$

Vamos verificar a associatividade dessa composição. Considerando

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{g_1} & Z & \xrightarrow{h_1} & W \\ & \Downarrow [H_1] & & \Downarrow [H_2] & & \Downarrow [H_3] & \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y & \xrightarrow{g_2} & Z & \xrightarrow{h_2} & W \end{array}$$

temos

$$\begin{aligned} H_3 \# (H_2 \# H_1): X \times I &\longrightarrow W \\ (x, t) &\longmapsto H_3(H_2(H_1(x, t), t), t). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (H_3 \# H_2) \# H_1: X \times I &\longrightarrow W \\ (x, t) &\longmapsto H_3(H_2(H_1(x, t), t), t), \end{aligned}$$

e consequentemente $(H_3 \# H_2) \# H_1 = H_3 \# (H_2 \# H_1)$.

Além disso, qualquer 2-morfismo $[H]: f \Rightarrow g$ é um 2-isomorfismo, cujo inverso $[H]^{-1}: g \Rightarrow f$ é dado por $H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$.

Exemplo 3.8. A 2-categoria das categorias pequenas $\mathfrak{Cat}$ é definida por:

- Os objetos são as categorias pequenas;
- Os morfismos são funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$;
- Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores, então os 2-morfismos de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ são os morfismos de funtores $\varphi: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$;
- Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores e $\alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ e $\beta: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, a composição da categoria pequena $\text{Hom}_{\mathfrak{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ é a composição de transformações naturais usual $\beta \circ \alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}$;
- O funtor composição horizontal age nos objetos associando os funtores $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ à composição $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ de modo usual;
- Considerando dois 2-morfismos $\varphi_1: \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{G}_1$ e $\varphi_2: \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{G}_2$, onde $\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1: \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, definimos $\varphi_2 \odot \varphi_1: \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1$ por

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \odot \varphi_1)(X) &:= \varphi_2(\mathcal{G}_1(X)) \circ \mathcal{F}_2(\varphi_1(X)) \\ &= \mathcal{G}_2(\varphi_1(X)) \circ \varphi_2(\mathcal{F}_1(X)), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de $\varphi_1(X): \mathcal{F}_1(X) \rightarrow \mathcal{G}_1(X)$ ser um morfismo em $\mathcal{D}$ e do fato de φ_2 ser uma transformação natural, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(X)) & \xrightarrow{\varphi_2(\mathcal{F}_1(X))} & \mathcal{G}_2(\mathcal{F}_1(X)) \\ \mathcal{F}_2(\varphi_1(X)) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_2(\varphi_1(X)) \\ \mathcal{F}_2(\mathcal{G}_1(X)) & \xrightarrow{\varphi_2(\mathcal{G}_1(X))} & \mathcal{G}_2(\mathcal{G}_1(X)). \end{array}$$

é comutativo.

3.1.2 2-Funtores

Para definir um funtor, especifica-se uma função nos objetos e outra nos morfismos, que devem respeitar a composição e as identidades. De modo análogo, um 2-funtor consiste em funções nos objetos, nos 1-morfismos e também nos 2-morfismos, preservando tanto as composições (horizontal e vertical) quanto as identidades correspondentes.

Definição 3.9 (2-funtores). Sejam $\mathfrak{F}: \text{Ob}(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathfrak{D})$. Um 2-funtor $\mathfrak{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ é definido por

- Uma função $\mathfrak{F}: \text{Ob}(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathfrak{D})$;

- Para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, um funtor

$$\mathfrak{F}: \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Y))$$

tal que

- (i) $\mathfrak{F}_{X,X}(id_X) = id_{\mathfrak{F}(X)}$;
- (ii) $\mathfrak{F}(f \circ g) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g)$, para $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$;
- (iii) Para $\alpha: f_1 \Rightarrow g_1$ e $\beta: f_2 \Rightarrow g_2$, com $f_1, g_1: X \rightarrow Y$ e $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$,

$$\mathfrak{F}(\alpha \circ \beta) = \mathfrak{F}(\alpha) \circ \mathfrak{F}(\beta).$$

Observação 3.10. As condições (ii) e (iii) podem ser expressas conjuntamente pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\circ} & \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z) \\ \mathfrak{F}_{Y,Z} \times \mathfrak{F}_{X,Y} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{F}_{X,Z} \\ \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(Y), \mathfrak{F}(Z)) \times \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Y)) & \xrightarrow{\circ} & \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{F}(Z)). \end{array}$$

Este diagrama captura simultaneamente a preservação da composição horizontal de 1-morfismos (condição (ii)) e a preservação da composição vertical de 2-morfismos (condição (iii)).

Em outras palavras, um 2-functor é uma aplicação entre 2-categorias que respeita a estrutura categórica existente. Ele envia objetos em objetos, 1-morfismos em 1-morfismos e 2-morfismos em 2-morfismos, de modo compatível com todas as composições (horizontal e vertical) e identidades.

Ao desconsiderarmos os 2-morfismos de uma 2-categoria, obtemos naturalmente uma categoria comum. Da mesma forma, ao desconsiderarmos a ação do 2-functor nos 2-morfismos, temos um funtor. Reciprocamente, podemos interpretar qualquer categoria como uma 2-categoria particular, na qual, para cada par de objetos, o conjunto de morfismos é visto como uma categoria pequena onde os únicos morfismos (2-morfismos) são as identidades. Sob essa identificação, um 2-functor coincide exatamente com um funtor usual.

3.1.3 Morfismos e 2-morfismos de 2-funtores

Como visto anteriormente, dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos formar a categoria dos funtores $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. De modo análogo, para duas 2-categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$, o conjunto dos 2-funtores $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ também admite uma estrutura de 2-categoria, que denotaremos por $2\text{-Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$. Mas para estabelecer a estrutura dessa categoria, precisamos definir *morfismo de 2-funtores* e *2-morfismo de 2-funtores*.

Definição 3.11 (Morfismo de 2-funtores). Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ 2-categorias e $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ 2-funtores. Um *morfismo de 2-funtores* $\varphi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ consiste em atribuir, a cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$, um 1-morfismo $\varphi(X) \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{F}(X), \mathfrak{G}(X)))$, ou seja

$$\varphi(X): \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{G}(X)$$

tal que:

- Para todo 1-morfismo $f: X \rightarrow Y$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \mathfrak{G}(X) \\ \mathfrak{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{G}(f) \\ \mathfrak{F}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathfrak{G}(Y). \end{array}$$

é comutativo.

- Para todo par de 1-morfismos $f, g: X \rightarrow Y$ e todo 2-morfismo $\alpha: f \Rightarrow g$, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi(X) & & \\ & & \searrow & & \nearrow \\ \mathfrak{F}(X) & & \Downarrow \text{id}_{\varphi(X)} & & \mathfrak{G}(Y) \\ & \nearrow \varphi(X) & & \searrow \varphi(Y) & \\ \mathfrak{F}(f) & \mathfrak{F}(\alpha) & \mathfrak{F}(g) & \mathfrak{G}(f) & \mathfrak{G}(\alpha) & \mathfrak{G}(g) \\ & \searrow \mathfrak{F}(f) & & \searrow \mathfrak{G}(f) & \\ \mathfrak{F}(Y) & & \Downarrow \text{id}_{\varphi(Y)} & & \mathfrak{G}(Y) \\ & \nearrow \varphi(Y) & & \nearrow \varphi(Y) & \end{array}$$

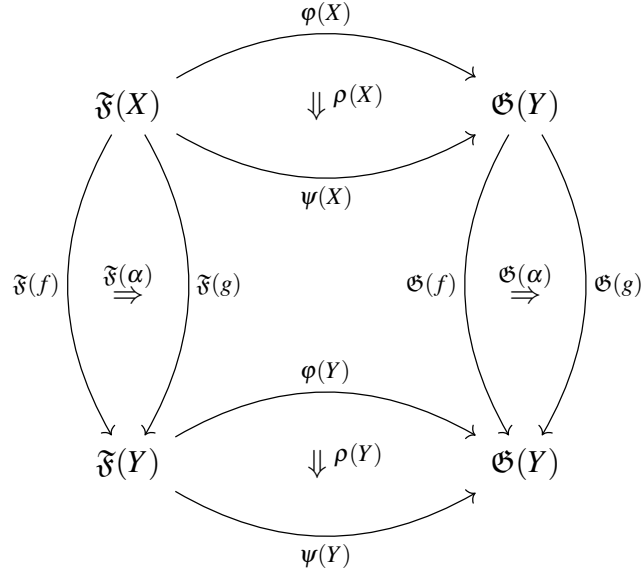
é 2-comutativo, ou seja

$$\text{id}_{\varphi(Y)} \odot \mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{G}(\alpha) \odot \text{id}_{\varphi(X)},$$

com respeito à composição (horizontal) $\odot$ em $\mathfrak{D}$.

Definição 3.12 (2-morfismo de 2-funtores). Sejam $\varphi, \psi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ morfismos de 2-funtores. Um *2-morfismo de 2-funtores* $\rho: \varphi \Rightarrow \psi$ é definido associando a cada $X \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ um 2-morfismo $\rho: \varphi(X) \Rightarrow \psi(X)$, de modo que para todos os morfismos $f, g: X \rightarrow Y$ e 2-morfismos $\alpha: f \Rightarrow g$

em $\mathfrak{C}$, o diagrama a seguir seja comutativo



ou seja,

$$\rho(Y) \odot \mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{G}(\alpha) \odot \rho(X),$$

com respeito à composição (horizontal) $\odot$ em $\mathfrak{D}$.

3.1.4 Definições Análogas

Podemos generalizar algumas das definições previamente apresentadas para categorias, estendendo-as ao contexto de 2-categorias.

Definição 3.13 (Equivalência entre objetos). Seja $\mathfrak{C}$ uma 2-categoria. Dizemos que dois objetos $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ são *equivalentes* se existem morfismos

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$g: Y \rightarrow X,$$

tais que existem 2-isomorfismos

$$\alpha: g \circ f \Rightarrow \text{id}_X,$$

$$\beta: f \circ g \Rightarrow \text{id}_Y.$$

Nesse caso, o morfismo f (ou g) é chamado de *equivalência* entre X e Y .

Definição 3.14 (Equivalência entre 2-categorias). Duas 2-categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ são *equivalentes* se existem 2-funtores

$$\mathfrak{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{G}: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C},$$

para os quais existem isomorfismos de 2-funtores

$$\begin{aligned}\alpha &: \mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} \Rightarrow \text{id}_{\mathfrak{C}}, \\ \beta &: \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} \Rightarrow \text{id}_{\mathfrak{D}}.\end{aligned}$$

O 2-funtor $\mathfrak{F}$ (ou $\mathfrak{G}$) é chamado de *equivalência* entre $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$.

Observação 3.15. Na 2-categoria $\mathfrak{Cat}$, a definição anterior coincide com a noção usual de equivalência entre categorias pequenas.

Definição 3.16 (Sub-2-categoria). Seja $\mathfrak{C}$ uma 2-categoria. Dizemos que uma 2-categoria $\mathfrak{D}$ é uma *sub-2-categoria* de $\mathfrak{C}$ se:

- $\text{Ob}(\mathfrak{D}) \subset \text{Ob}(\mathfrak{C})$;
- para todo $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{D})$, a categoria $\text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y)$ é uma subcategoria de $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, com as mesmas identidades e composições de $\mathfrak{C}$.

Dizemos que $\mathfrak{D}$ é uma *sub-2-categoria 2-cheia* de $\mathfrak{C}$ se, para quaisquer $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{D})$ e $f, g \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y)$, tivermos

$$\text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{D}}}(f, g) = \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}}}(f, g).$$

Dizemos que $\mathfrak{D}$ é uma *sub-2-categoria cheia* de $\mathfrak{C}$ se, para quaisquer $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{D})$, vale

$$\text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y).$$

Definição 3.17 (Categoria produto). Dadas duas 2-categorias $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$, definimos a *categoria produto* $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ como segue:

- $\text{Ob}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) := \text{Ob}(\mathfrak{C}) \times \text{Ob}(\mathfrak{D})$;
- para $(X, X'), (Y, Y') \in \text{Ob}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})$, define-se

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}((X, X'), (Y, Y')) := \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X', Y');$$

- para $f, g \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ e $f', g' \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X', Y')$, define-se

$$\text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}}((f, f'), (g, g')) := \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)}(f, g) \times \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{D}}(X', Y')}(f', g');$$

- a composição horizontal age nos 1-morfismos é dada por

$$(g, g') \circ (f, f') := (g \circ f, g' \circ f'),$$

enquanto nos 2-morfismos é dada por

$$(\alpha, \alpha') \odot (\beta, \beta') := (\beta \odot \alpha, \beta' \odot \alpha').$$

3.2 2-Categorias Fracas

Antes de definirmos as 2-categorias fracas, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.18. Definimos a categoria 1 em que $\text{Ob}(1) = \{1\}$, ou seja, a classe de objetos contém apenas um elemento, e há apenas o morfismo id_1 em $\text{Hom}(1, 1)$. Para qualquer que seja a categoria $\mathcal{C}$, existe apenas um funtor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow 1$. Entretanto, um funtor $\mathcal{G}: 1 \rightarrow \mathcal{D}$, se trata de um funtor onde escolhemos um objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ para ser imagem do objeto $1 \in \text{Ob}(1)$.

Começamos com a definição de 2-categoria fraca, que na referência é chamada de *bicategoria*.

Definição 3.19 (2-categoria fraca). Uma 2-categoria fraca é uma quintupla $(\mathfrak{B}, 1, \circ, a, l, r)$ consistindo dos seguintes dados:

- $\mathfrak{B}$ possui uma classe $\text{Ob}(\mathfrak{B}) =: \mathfrak{B}_0$, cujos elementos são chamados de *objetos* ou *0-morfismos* em $\mathfrak{B}$.
- Para cada par de objetos $X, Y \in \mathfrak{B}_0$, existe uma categoria pequena $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$, onde os objetos de $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ são chamados de *1-morfismos* e a classe $\text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y))$ é denotada por $\mathfrak{B}_1$. Os morfismos dessa categoria são chamados de *2-morfismos*, e a coleção de todos os 2-morfismos é denotada por $\mathfrak{B}_2$. As composições em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ são ditas *composições verticais* e a identidade nessa categoria é dita *2-morfismo identidade*, enquanto um isomorfismo nessa categoria é um *2-morfismo invertível* e o inverso é dito *inverso vertical*. Para cada 1-morfismo f , o 2-morfismo identidade é denotado por 1_f .
- Para cada objeto $X \in \mathfrak{B}_0$, temos o *1-morfismo identidade* $\text{id}_X \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, X))$, o qual podemos identificar com o funtor

$$1_X: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, X),$$

onde 1 é a categoria do Exemplo 3.18, e $1_X(1) = \text{id}_X$.

- Para cada tripla $X, Y, Z \in \mathfrak{B}_0$,

$$\circ_{XYZ}: \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Z)$$

é um bifuntor dito *composição horizontal*, onde $\circ_{XYZ}(g, f) := g \circ f$ (aplicado sobre objetos³) e $\circ_{XYZ}(\beta, \alpha) := \beta \odot \alpha$ (aplicado sobre morfismos⁴).

- Para objetos $W, X, Y, Z \in \mathfrak{B}_0$,

$$a_{W,X,Y,Z}: \circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,X)}) \longrightarrow \circ_{WYZ} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times \circ_{WXY})$$

³Nesse caso, são 1-morfismos.

⁴Que são 2-morfismos.

é um isomorfismo natural chamado *associador* entre os funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, Z).$$

- Para todos $X, Y \in \mathfrak{B}_0$,

$$\begin{aligned} l_{X,Y} &: \circ_{XY} \circ (1_Y \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \\ r_{X,Y} &: \circ_{XX} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)}, \end{aligned}$$

são isomorfismos naturais, ditos *unitor à esquerda* e *unitor à direita*, respectivamente.

Os subscritos em $\circ$ serão frequentemente omitidos. Os subscritos em a , l e r serão frequentemente usados para denotar seus componentes. Para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ e $k \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z)$, os dados acima devem satisfazer os dois axiomas a seguir:

- *Axioma da unidade*: O diagrama

$$\begin{array}{ccc} (g \circ 1_W) \circ f & \xrightarrow{a_{(g, 1_W, f)}} & g \circ (1_W \circ f) \\ & \searrow r_g \circ \mathrm{id}_f & \swarrow \mathrm{id}_g \circ l_f \\ & g \circ f & \end{array}$$

em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, X)$ é comutativo.

- *Axioma pentagonal*: O diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & ((k \circ h) \circ g) \circ f & & \\ & \nearrow a_{k \circ h, g, f} & & \searrow a_{k, h, g \circ f} & \\ ((k \circ h) \circ g) \circ f & & & & k \circ (h \circ (g \circ f)) \\ & \searrow a_{k, h, g} \circ \mathrm{id}_f & & \nearrow \mathrm{id}_k \circ a_{h, g, f} & \\ (k \circ (h \circ g)) \circ f & \xrightarrow{a_{k, h \circ g, f}} & & & k \circ ((h \circ g) \circ f) \end{array}$$

em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, Z)$ é comutativo.

Notação 5. Eventualmente podemos nos referir a 2-categoria fraca $(\mathfrak{B}, 1, \circ, a, l, r)$ simplesmente por $\mathfrak{B}$.

Vamos interpretar essa definição. De forma análoga ao caso das 2-categorias fortes, para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{B})$ a composição vertical em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ é associativa e possui identidades, pois $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ é, por si só, uma categoria. Além disso, a composição horizontal preserva tanto as composições verticais quanto os 2-morfismos identidade, uma vez que se trata de um funtor.

Mantemos a notação usual: para $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y))$ escrevemos $f, g: X \rightarrow Y$, e para um 2-morfismo $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y)}(f, g)$ usamos a notação $\alpha: f \Rightarrow g$.

As diferenças mais relevantes entre 2-categorias fortes e fracas residem na forma como a associatividade e os morfismos identidade se comportam. Na versão forte, essas condições são impostas por igualdades exatas; já na versão fraca, elas são substituídas por isomorfismos naturais. Essas transformações naturais são o cerne da definição, e vale a pena examiná-las com atenção.

- Vamos interpretar o *isomorfismo associador*. Considere $W, X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathfrak{B})$. O funtor de composição horizontal é dado por

$$\begin{aligned} \circ_{XYZ}: \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Z), \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g, \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \odot \beta. \end{aligned}$$

Compondo com a identidade em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X)$, obtemos o funtor

$$\begin{aligned} \circ_{XYZ} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X)}: \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X), \\ (f, g, h) &\longmapsto (f \circ g, h), \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto (\alpha \odot \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Compondo novamente com o funtor

$$\circ_{WXZ}: \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, Z),$$

temos

$$\begin{aligned} \circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X)}): \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, Z), \\ (f, g, h) &\longmapsto (f \circ g) \circ h, \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto (\alpha \odot \beta) \odot \gamma. \end{aligned}$$

De maneira simétrica, temos

$$\begin{aligned} \circ_{WYZ} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z)} \times \circ_{WXY}): \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, Z), \\ (f, g, h) &\longmapsto f \circ (g \circ h), \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto \alpha \odot (\beta \odot \gamma). \end{aligned}$$

Surge então o *isomorfismo natural associador*

$$a_{W, X, Y, Z}: \circ_{WXZ} \circ (\circ_{XYZ} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X)}) \longrightarrow \circ_{WYZ} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z)} \times \circ_{WXY}),$$

de modo que para quaisquer 1-morfismos $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y, Z))$, $g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X, Y))$ e $h \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, X))$

$$a_{(f,g,h)}: (f \circ g) \circ h \longrightarrow f \circ (g \circ h)$$

é um 2-morfismo invertível em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W, Z)$. A naturalidade de a garante a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g) \circ h & \xrightarrow{a_{(f,g,h)}} & f \circ (g \circ h) \\ \downarrow (\alpha \odot \beta) \odot \gamma & & \downarrow \alpha \odot (\beta \odot \gamma) \\ (f' \circ g') \circ h' & \xrightarrow{a_{(f',g',h')}} & f' \circ (g' \circ h') \end{array}$$

para quaisquer $\alpha: f \Rightarrow f'$, $\beta: g \Rightarrow g'$ e $\gamma: h \Rightarrow h'$.

- Agora vamos entender os *unitores*. Para cada $X, Y \in \text{Ob}(\mathfrak{B})$, temos o funtor

$$\begin{aligned} 1_Y \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)}: 1 \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(Y,Y) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y), \\ (1, f) &\longmapsto (\text{id}_Y, f), \\ (\text{id}_1, \alpha) &\longmapsto (\text{id}_{\text{id}_Y}, \alpha). \end{aligned}$$

Compondo com $\circ_{XY Y}$, obtemos o funtor

$$\begin{aligned} \circ_{XY Y} \circ (1_Y \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)}): 1 \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y), \\ (1, f) &\longmapsto \text{id}_Y \circ f, \\ (\text{id}_1, \alpha) &\longmapsto \text{id}_{\text{id}_Y} \odot \alpha. \end{aligned}$$

Exige-se então um isomorfismo natural

$$l_{XY}: \circ_{XY Y} \circ (1_Y \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)}) \longrightarrow \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)},$$

com componentes $l_f: \text{id}_Y \circ f \Rightarrow f$.

De modo análogo, temos o funtor

$$\circ_{XY Y} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X): \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y) \times 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)$$

e exigimos um isomorfismo natural

$$r_{XY}: \circ_{XY Y} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)} \times 1_X) \longrightarrow \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(X,Y)},$$

com componentes $r_f: f \circ \text{id}_X \Rightarrow f$.

O fato de l e r serem isomorfismos naturais garante a comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_Y \circ f & \xrightarrow{l_f} & f \\ \downarrow \text{id}_{\text{id}_Y} \odot \alpha & & \downarrow \alpha \\ \text{id}_Y \circ f' & \xrightarrow{l_{f'}} & f' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f \circ \text{id}_X & \xrightarrow{r_f} & f \\ \downarrow \alpha \odot \text{id}_{\text{id}_X} & & \downarrow \alpha \\ f' \circ \text{id}_X & \xrightarrow{r_{f'}} & f' \end{array}$$

- Para compreender o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (g \circ \text{id}_W) \circ f & \xrightarrow{a_{(g, \text{id}_W, f)}} & g \circ (\text{id}_W \circ f) \\
 \searrow r_g \odot \text{id}_f & & \swarrow \text{id}_g \odot I_f \\
 & g \circ f &
 \end{array}$$

do *axioma da unidade*, considere a seguinte situação

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\text{id}_W} W \xrightarrow{g} X,$$

que nos proporciona o associador

$$a_{V,W,W,X} : \underbrace{\circ_{VWX} \circ (\circ_{WWX} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V,X)})}_{\gamma_1} \longrightarrow \underbrace{\circ_{VWX} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,X)} \times \circ_{VWW})}_{\gamma_2},$$

onde

$$\gamma_1, \gamma_2 : \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,X) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,W) \times \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V,W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V,X)$$

com

$$\gamma_1(g, \text{id}_W, f) = (g \circ \text{id}_W) \circ f$$

$$\gamma_2(g, \text{id}_W, f) = g \circ (\text{id}_W \circ f)$$

e, consequentemente, temos o 2-morfismo

$$a_{(g, \text{id}_W, f)} : (g \circ \text{id}_W) \circ f \Rightarrow g \circ (\text{id}_W \circ f)$$

em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V,X)$.

Além disso, temos a transformação natural

$$r_{WX} : \circ_{WWX} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,X)} \times 1_W) \longrightarrow \text{id}_{\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(W,X)},$$

que proporciona o morfismo

$$r_g \sim r_{(g,1)} : g \circ \text{id}_W \Rightarrow g$$

resultando em

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g \circ \text{id}_W} & X \\
 & \Downarrow \text{id}_f & & \Downarrow r_g & \\
 V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

cuja composição horizontal resulta no 2-morfismo

$$r_g \odot \text{id}_f : (g \circ \text{id}_W) \circ f \Rightarrow g \circ f$$

em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, X)$.

Analogamente, obtemos

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_W \circ f} & W & \xrightarrow{g} & X \\ & \Downarrow l_f & & \Downarrow \text{id}_g & \\ V & \xrightarrow{\text{id}_W \circ f} & W & \xrightarrow{g} & X \end{array},$$

proporcionando o 2-morfismo

$$\text{id}_g \odot l_f : g \circ (\text{id}_W \circ f) \Rightarrow g \circ f.$$

E assim, temos

$$(r_g \odot \text{id}_f) \circ a_{(g, \text{id}_W, f)} : (g \circ \text{id}_W) \circ f$$

em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, X)$. Assim, o diagrama da unidade comutar significa que

$$r_g \odot \text{id}_f = (\text{id}_g \odot l_f) \circ a_{(g, \text{id}_W, f)}$$

em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, X)$.

- O *axioma do pentágono* afirma que, para k, h, g, f apropriados, ou seja, considerando

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z.$$

Dizer que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} & ((k \circ h) \circ g) \circ f & \\ a_{k \circ h, g, f} \nearrow & & \searrow a_{k, h, g \circ f} \\ ((k \circ h) \circ g) \circ f & & k \circ (h \circ (g \circ f)) \\ a_{k, h, g} \odot \text{id}_f \searrow & & \nearrow \text{id}_k \odot a_{h, g, f} \\ (k \circ (h \circ g)) \circ f & \xrightarrow{a_{k, h \circ g, f}} & k \circ ((h \circ g) \circ f) \end{array}$$

significa a igualdade entre os 2-morfismos

$$a_{(k, h, g \circ f)} \circ a_{(k \circ h, g, f)} = (\text{id}_k \odot a_{(h, g, f)}) \circ a_{(k, h \circ g, f)} \circ (a_{(k, h, g)} \odot \text{id}_f)$$

em $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, Z)$.

Observação 3.20. De modo intuitivo, uma 2-categoria fraca flexibiliza algumas das igualdades rígidas da 2-categoria forte, substituindo-as por isomorfismos naturais que satisfazem condições de compatibilidade. Em particular

- a composição horizontal é apenas *associativa e unital até isomorfismo natural*;
- os isomorfismos a , l e r estabelecem equivalências canônicas entre diferentes maneiras de compor ou inserir identidades;
- os axiomas da unidade e do pentágono garantem a coerência das composições formadas pelos isomorfismos a , l e r .

Tendo isso em mãos, uma definição equivalente para 2-categoria forte é a seguinte: uma 2-categoria forte é uma 2-categoria fraca $(\mathfrak{B}, 1, \circ, a, l, r)$ na qual o associador a , o unitor à esquerda l e o unitor à direita r são transformações naturais identidade.

Assim, toda 2-categoria forte pode ser vista como uma 2-categoria fraca em que os isomorfismos naturais de coerência são identidades.

Exemplo 3.21. Seja $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos. Definimos a 2-categoria fraca $2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}$ por:

- Os objetos são conjuntos da forma $\{n\}$, com n inteiro não negativo.
- Para $\{m\}, \{n\} \in \text{Ob}(2\text{-Vect}_{\mathbb{C}})$, a categoria $\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{m\}, \{n\})$ tem por objetos as $n \times m$ 2-matrizes $V = (V_{ij}) = (V_{ij})_{n \times m}$, onde cada V_{ij} é um espaço vetorial complexo de dimensão finita:

$$V_{n \times m} = \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & \cdots & V_{nm} \end{pmatrix}.$$

Um *morfismo* $\theta : V \rightarrow V'$ em $\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{m\}, \{n\})$ é dado por uma família $\theta = (\theta_{ij})$ de transformações lineares $\theta_{ij} : V_{ij} \rightarrow V'_{ij}$, ou seja

$$\begin{array}{ccc} \{m\} & \xrightarrow{V_{n \times m}} & \{n\} \\ & \Downarrow \theta & \\ \{m\} & \xrightarrow{V'_{n \times m}} & \{n\} \end{array}$$

A identidade de V é $(\text{id}_V)_{ij} = \text{id}_{V_{ij}}$, e a composição vertical é feita coordenada a coordenada

$$(\varphi \circ \theta)_{ij} = \varphi_{ij} \circ \theta_{ij}.$$

- Para $\{n\} \in \text{Ob}(2\text{-Vect}_{\mathbb{C}})$, o 1-morfismo identidade $\text{id}_{\{n\}} \in \text{Ob}(\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{n\}, \{n\}))$ é da forma

$$\text{id}_{\{n\}} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{C} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{C} \end{pmatrix}.$$

- Sejam $\{m\}, \{n\}, \{p\} \in \text{Ob}(2\text{-Vect}_{\mathbb{C}})$. O funtor de composição horizontal

$$\circ_{m,n,p} : \text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{n\}, \{p\}) \times \text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{m\}, \{n\}) \longrightarrow \text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(\{m\}, \{p\})$$

age nos objetos associando ao par $(W_{p \times n}, V_{n \times m})$ a matriz $(WV)_{p \times m}$ cujas entradas são dadas por

$$(WV)_{kj} = \bigoplus_{i=1}^n (W_{ki} \otimes V_{ij}), \quad 1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq m,$$

onde $\oplus$ é a soma direta e $\otimes$ é o produto tensorial de espaços vetoriais complexo de dimensão finita.

Segue que, para

$$W_{p \times n} = \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1} & \cdots & W_{pn} \end{pmatrix}, \quad V_{n \times m} = \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & \cdots & V_{nm} \end{pmatrix},$$

temos

$$WV_{p \times m} = \begin{pmatrix} \bigoplus_{i=1}^n (W_{1i} \otimes V_{i1}) & \cdots & \bigoplus_{i=1}^n (W_{1i} \otimes V_{im}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{i=1}^n (W_{pi} \otimes V_{i1}) & \cdots & \bigoplus_{i=1}^n (W_{pi} \otimes V_{im}) \end{pmatrix}.$$

Com relação aos morfismos, seja $\theta : V \Rightarrow V'$ e $\varphi : W \Rightarrow W'$. A composição horizontal leva o par (θ, φ) em

$$\varphi \odot \theta : WV \rightarrow W'V'$$

definida por

$$(\varphi \odot \theta)_{kj} = \bigoplus_{i=1}^n (\varphi_{ki} \otimes \theta_{ij}) : \bigoplus_{i=1}^n (W_{ki} \otimes V_{ij}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n (W'_{ki} \otimes V'_{ij}).$$

- Sejam $\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{q\} \in \text{Ob}(2\text{-Vect}_{\mathbb{C}})$ e

$$\{m\} \xrightarrow{V} \{n\} \xrightarrow{W} \{p\} \xrightarrow{X} \{q\},$$

o associador

$$a_{m,n,p,q} : \circ_{mnq} \circ (\circ_{npq} \times \text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(m,n)}) \longrightarrow \circ_{mpq} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(p,q)} \times \circ_{mnp})$$

é tal que cada

$$a_{X,W,V} : X(WV) \rightarrow (XW)V$$

tem suas entradas (i, j) induzidas pelos isomorfismos

$$\begin{aligned}
 [(XW)V]_{lj} &= \bigoplus_{i=1}^n (XW)_{li} \otimes V_{ij} \\
 &= \bigoplus_{i=1}^n \left(\bigoplus_{k=1}^p X_{lk} \otimes W_{ki} \right) \otimes V_{ij} \\
 &\simeq \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{k=1}^p (X_{lk} \otimes W_{ki}) \otimes V_{ij} \\
 &\simeq \bigoplus_{k=1}^p \bigoplus_{i=1}^n X_{lk} \otimes (W_{ki} \otimes V_{ij}) \\
 &\simeq \bigoplus_{k=1}^p X_{lk} \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n W_{ki} \otimes V_{ij} \right) \\
 &= \bigoplus_{k=1}^p X_{lk} \otimes (WV)_{kj} \\
 &= [X(WV)]_{lj}.
 \end{aligned}$$

Nos isomorfismos canônicos acima, foram usados os isomorfismos canônicos de distributividade

$$\begin{aligned}
 (A \oplus B) \otimes C &\simeq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \\
 A \otimes (B \oplus C) &\simeq (A \otimes B) \oplus (A \otimes C),
 \end{aligned}$$

o isomorfismo de simetria

$$A \oplus B \simeq B \oplus A,$$

e o isomorfismo de associatividade

$$(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C).$$

- Sejam $\{m\}, \{n\} \in \text{Ob}(2\text{-Vect}_{\mathbb{C}})$. Os unitores

$$\begin{aligned}
 l_{m,n} : \circ_{mnn} \circ (1_n \times \text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(m,n)}) &\xrightarrow{\simeq} \text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(m,n)}, & \rho_V : (V \circ \mathbf{1}_{\{m\}}) &\Rightarrow V, \\
 r_{m,n} : \circ_{mmn} \circ (\text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(m,n)}) &\xrightarrow{\simeq} \text{id}_{\text{Hom}_{2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}}(m,n) \times 1_m}, & \rho_V : (V \circ \mathbf{1}_{\{m\}}) &\Rightarrow V,
 \end{aligned}$$

são tais que, para cada $V_{n \times m}$, os 2-morfismos identidades

$$\begin{aligned}
 l_V : \text{id}_n V &\rightarrow V, \\
 r_V : V \text{id}_m &\rightarrow V
 \end{aligned}$$

são induzidos pelos isomorfismos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C} \otimes V_{ij} &\simeq V_{ij} \simeq V_{ij} \otimes \mathbb{C}, \\
 0 \otimes V_{ij} &\simeq 0 \simeq V_{ij} \otimes 0 \\
 0 \oplus V_{ij} &\simeq V_{ij} \simeq V_{ij} \oplus 0.
 \end{aligned}$$

Com dados, $2\text{-Vect}_{\mathbb{C}}$ constitui uma 2-categoria fraca.

Em síntese, a diferença entre as duas estruturas está na forma como as condições são impostas. A 2-categoria forte é mais simples e rigorosa, pois exige que as propriedades valham por igualdades exatas. Já a 2-categoria fraca é mais natural e flexível, substituindo essas igualdades por isomorfismos, o que a torna mais geral e abrangente. Além disso, uma 2-categoria forte é, necessariamente, uma categoria enriquecida.

Os conceitos introduzidos neste capítulo serão fundamentais para o estudo das gerbes, que serão tratadas no Capítulo 7. Visto que estas são definidas como feixes de grupoides, sua formalização exigirá a noção de 2-categorias.

Pré-feixes e Feixes

No contexto da topologia e geometria algébrica, a construção de estruturas algébricas em espaços topológicos frequentemente requer a consideração de coleções de dados locais que podem ou não ser compatíveis entre si. Para formalizar essas ideias, introduzimos os conceitos de pré-feixe e feixe.

Um *pré-feixe* em um espaço topológico X associa a cada aberto $U \subset X$ um conjunto ou um objeto com alguma estrutura algébrica (como grupo, anel ou módulo), de modo que os elementos de cada aberto podem ser restritos a subconjuntos menores. A estrutura de pré-feixe é composta por um sistema de restrições que permite mapear seções definidas em um aberto para seções em subconjuntos menores. No entanto, essas restrições não garantem a compatibilidade entre seções definidas em diferentes abertos.

Um *feixe*, por outro lado, é um pré-feixe que satisfaz condições adicionais de compatibilidade e unicidade. Em um feixe, exigimos que se um conjunto de seções locais é compatível em todas as interseções dos abertos, então existe uma seção global que as recupera por restrição. E se duas seções globais coincidem localmente em uma cobertura aberta, então elas são idênticas globalmente.

Essas propriedades garantem que os dados locais em um feixe possam ser concatenados de maneira consistente, o que não é exigido em um pré-feixe.

Nas próximas seções, formalizaremos essas definições e exploraremos alguns exemplos.

4.1 Pré-feixes

Nessa seção iremos definir um pré-feixe, mas antes vamos fazer algumas considerações.

Daqui em diante, denotamos por X um espaço topológico fixado (a menos que sinalizado o contrário). Definimos a categoria Top_X tomando os abertos de X como objetos, e como morfismos as inclusões entre eles. Mais formalmente, se U e V são subconjuntos abertos de X , então

$$\text{Hom}_{\text{Top}_X}(V, U) = \{i: V \hookrightarrow U\}$$

quando $V \subset U$, e $\text{Hom}_{\text{Top}_X}(V, U) = \emptyset$ caso contrário.

A composição é unicamente determinada, pois se $W \subset V \subset U$, então o único morfismo de W a U é a composição entre o único morfismo de W a V e o único morfismo de V a U . Isso é evidente ao considerar a composição das inclusões.

Ademais, fixamos uma categoria $\mathcal{C}$, escolhida dentre as seguintes: conjuntos, grupos abelianos, anéis comutativos, R -módulos, sendo R um anel fixado (em particular, $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, sendo $\mathbb{K}$ um corpo fixado), R -álgebras (em particular, $\mathbb{K}$ -álgebras) comutativas, R -álgebras (em particular, $\mathbb{K}$ -álgebras) comutativas unitárias.

Definição 4.1. (Pré-feixe) Um *pré-feixe* em X , com valores em $\mathcal{C}$, é um funtor $\mathcal{P}: \text{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, tal que $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$, sendo 0 o zero-objeto de $\mathcal{C}$.

De maneira clara, isso significa o seguinte: para todo $U \subset X$ aberto, fica definido o objeto $\mathcal{P}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Se $V \subset U$, temos o morfismo $\mathcal{P}_{VU}: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$, o qual é chamado de *morfismo de restrição*, de modo que

- (i) $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mathcal{P}_{UU}$ é a identidade de $\mathcal{P}(U)$;
- (iii) se $W \subset V \subset U$, então $\mathcal{P}_{WU} = \mathcal{P}_{WV} \circ \mathcal{P}_{VU}$.

Como $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ por hipótese, o morfismo associado à inclusão $\emptyset \hookrightarrow U$ é o morfismo

$$\mathcal{P}_{\emptyset U}: \mathcal{P}(U) \rightarrow 0.$$

Esse morfismo é o único morfismo com contradomínio no objeto zero de $\mathcal{C}$, em virtude da propriedade universal do zero-objeto¹.

Observação 4.2. A exigência de que $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ na Definição 4.1 pressupõe que a categoria alvo $\mathcal{C}$ possua um *zero-objeto* (um objeto que seja simultaneamente inicial e terminal). É importante notar a distinção de comportamento deste objeto em diferentes contextos:

- (i) *Em categorias algébricas:* Em categorias como a de grupos abelianos ou de R -módulos, o objeto zero é o grupo ou módulo trivial $\{0\}$. Nestes casos, a restrição $\mathcal{P}_{\emptyset U}: \mathcal{P}(U) \rightarrow 0$ é o único homomorfismo existente, determinado pela propriedade de terminalidade de 0 .
- (ii) *Na categoria de conjuntos (Sets):* Rigorosamente, Sets não possui um zero-objeto. O conjunto vazio $\emptyset$ é o objeto inicial, enquanto qualquer conjunto unitário $\{*\}$ é um objeto terminal. No entanto, para a teoria de feixes, o que se busca com a condição $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ é a *unicidade* do morfismo de restrição. Por essa razão, em Sets, tratamos o conjunto unitário $\{0\}$ como se fosse

¹Dizemos que um objeto 0 satisfaz a *propriedade universal de zero-objeto* se ele é simultaneamente inicial e terminal, isto é, se para todo objeto A existe um único morfismo $A \rightarrow 0$ e um único morfismo $0 \rightarrow A$. Além disso, caso exista, o zero-objeto é único a menos de isomorfismo único.

o zero-objeto. O fato de que $\text{Hom}(X, \{\emptyset\})$ contém exatamente um elemento para todo conjunto X , analogamente ao que ocorre com $\text{Hom}(X, 0)$ nas demais categorias, é suficiente em várias circunstâncias.

Exemplo 4.3. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para cada aberto $U \subset X$, consideramos $\mathcal{P}(U)$ como o conjunto das funções contínuas de U em $\mathbb{K}$, isto é, $\mathcal{P}(U) := C^0(U, \mathbb{K})$, dotado da estrutura natural de grupo abeliano, de anel comutativo unitário, de $\mathbb{K}$ -espaço vetorial ou de $\mathbb{K}$ -álgebra comutativa unitária. Dado um aberto $V \subset U$ e uma seção $\varphi \in \mathcal{P}(U)$, definimos o morfismo de restrição $\mathcal{P}_{VU}(\varphi) := \varphi|_V$. Essa construção define um pré-feixe em X com valores na categoria correspondente. Se, em vez de funções contínuas, considerarmos todas as funções de U para $\mathbb{K}$, o resultado continua sendo um pré-feixe.

Notação 6. Denotaremos por $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{C}}$ e $\underline{\mathbb{Z}}$ os feixes que, a cada aberto $U \subset X$, associam o grupo abeliano (ou anel) das funções contínuas com valores em $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}$, respectivamente. Quando consideramos apenas funções constantes em cada aberto, podemos denotá-los simplesmente por $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.4. Seja A um objeto fixado na categoria $\mathcal{C}$. Definimos o *pré-feixe constante* A por $\mathcal{P}(U) := A$, para todo objeto U da categoria Top_X , com $U \neq \emptyset$, sendo os morfismos $\mathcal{P}_{VU}$, com $V \subset U$, iguais a identidade.

Observação 4.5. No caso das funções contínuas com valores em $\mathbb{Z}$, como $\mathbb{Z}$ é discreto, todo mapeamento contínuo é localmente constante. Assim, o feixe $\underline{\mathbb{Z}}$ coincide com o feixe de funções constantes $\mathbb{Z}$.

Definição 4.6. (Seção local e seção global) Um elemento $s \in \mathcal{P}(U)$ é dito *seção local* (ou simplesmente *seção*) de $\mathcal{P}$ em U . Se $U = X$, a seção s é dita também *seção global*.

Notação 7. Sejam s uma seção em $\mathcal{P}(U)$ e $V \subset U$. Denotaremos $s|_V := \mathcal{P}_{VU}(s)$. Além disso, as condições $\mathcal{P}_{UU} = \text{id}_{\mathcal{P}(U)}$ e $\mathcal{P}_{WU} = \mathcal{P}_{WV} \circ \mathcal{P}_{VU}$, para $W \subset V \subset U$, temos como consequência que $s|_U = s$, e $(s|_V)|_W = s|_W$.

4.1.1 Morfismos de pré-feixes

Nesta seção, construiremos a *categoria de pré-feixes* sobre um espaço topológico X , definindo os morfismos correspondentes. Como um pré-feixe é um funtor, temos que um morfismo de pré-feixe é uma transformação natural.

Definição 4.7. (Morfismo de pré-feixes) Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q}: \text{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ dois pré-feixes. Um *morfismo de pré-feixes* de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ é um morfismo de funtores $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$.

De maneira concreta, um morfismo $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ entre dois pré-feixes sobre X com valores em uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em uma família de morfismos

$$\rho(U): \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(U)$$

definidos para cada aberto $U \subset X$. Esses morfismos são tais que, para todo aberto $V \subset U$, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\rho(U)} & \mathcal{Q}(U) \\ \mathcal{P}_{VU} \downarrow & & \downarrow \mathcal{Q}_{VU} \\ \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\rho(V)} & \mathcal{Q}(V). \end{array}$$

Adotando a notação ρ_U para o morfismo $\rho(U)$, a comutatividade do diagrama pode ser expressa da seguinte como

$$\rho_V(s|_V) = \rho_U(s)|_V, \quad \forall s \in \mathcal{P}(U).$$

Com isso, fica definida a categoria $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$, cujos objetos são os pré-feixes sobre X com valores em $\mathcal{C}$, e cujos morfismos são os morfismos de pré-feixes.

Exemplo 4.8. Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathcal{C}$, e seja $f: A \rightarrow B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Denotemos por $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ os pré-feixes constantes associado a A e a B , respectivamente. O morfismo $f: A \rightarrow B$ induz então um morfismo de pré-feixes constantes $\rho_f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, cujos morfismos de pré-feixes são dados por $(\rho_f)_U = f$ para todo aberto não vazio $U \subset X$.

Para todo $V \subset U$, a naturalidade de ρ_f garante a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}(U) & \xrightarrow{(\rho_f)_U} & \tilde{B}(U) \\ \tilde{A}_{VU} \downarrow & & \downarrow \tilde{B}_{VU} \\ \tilde{A}(V) & \xrightarrow{(\rho_f)_V} & \tilde{B}(V) \end{array}$$

Como $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ são pré-feixes constantes, temos $\tilde{A}(U) = \tilde{A}(V) = A$, $\tilde{B}(U) = \tilde{B}(V) = B$, $\tilde{A}_{VU} = \text{id}_A$, $\tilde{B}_{VU} = \text{id}_B$, e $(\rho_f)_U = (\rho_f)_V = f$. Assim, o diagrama acima pode ser reescrito como

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

e que comuta trivialmente.

4.1.2 Sub-pré-feixe

Ao trabalhar com pré-feixes sobre um espaço topológico X , pode ocorrer que certas seções de um pré-feixe $\mathcal{P}$ formem subconjuntos estáveis sob restrição. Quando isso acontece em todos os abertos, obtemos um *sub-pré-feixe*. Em termos práticos, basta escolher, para cada aberto $U \subset X$, um subobjeto $\mathcal{Q}(U) \subset \mathcal{P}(U)$ tal que, se $s \in \mathcal{Q}(U)$ e $V \subset U$, então $\mathcal{P}_{VU}(s) \in \mathcal{Q}(V)$. Assim, as restrições de $\mathcal{Q}$ são simplesmente aquelas de $\mathcal{P}$.

Formalizamos esse fenômeno na definição abaixo.

Definição 4.9. (Sub-pré-feixe) Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe com valores em uma categoria $\mathcal{C}$. Um *sub-pré-feixe* de $\mathcal{P}$ é um pré-feixe $\mathcal{Q}$ tal que:

1. para cada aberto $U \subset X$, $\mathcal{Q}(U)$ é um subobjeto de $\mathcal{P}(U)$;
2. para todos $V \subset U$ e $s \in \mathcal{Q}(U)$, a restrição de $\mathcal{Q}$ coincide com a de $\mathcal{P}$, isto é,

$$\mathcal{Q}_{VU}(s) = \mathcal{P}_{VU}(s).$$

Observe que esta definição garante, em particular, que as restrições de $\mathcal{Q}$ são bem definidas simplesmente herdando as de $\mathcal{P}$. Assim, não há ambiguidade em escrever $s|_V$ tanto para $\mathcal{P}$ quanto para $\mathcal{Q}$.

4.2 Talos e germes

Para calcular o diferencial de uma função suave $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, é necessário compreender o comportamento local de f em torno de a . Esse comportamento não se reduz apenas ao valor pontual $f(a)$, pois este, por si só, não fornece informação suficiente para determinar $df(a)$. Por outro lado, não é preciso fixar uma vizinhança específica U de a , já que, qualquer que seja a vizinhança escolhida, podemos sempre restringi-la sem perda de informação a respeito de $df(a)$. Assim, o que chamamos de comportamento local em a corresponde a uma informação intermediária: mais rica que o simples valor pontual, mas menos detalhada que toda a estrutura em uma vizinhança fixada.

A definição de *talo* e de *germe*, que apresentaremos a seguir, é justamente uma generalização abstrata dessa ideia, ou seja, tal como no exemplo das funções suaves, queremos identificar seções que coincidem em alguma vizinhança do ponto, capturando apenas o seu comportamento local essencial.

Notação 8. Fixado um ponto $a \in X$, denotamos por $\tilde{\mathcal{P}}_a$ o conjunto dos pares (U, s) , onde U é uma vizinhança aberta de a em X e $s \in \mathcal{P}(U)$.

Introduzimos a seguinte relação de equivalência em $\tilde{\mathcal{P}}_a$

$$(U, s) \sim (V, t) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V \text{ aberto, tal que } a \in W \text{ e } s|_W = t|_W. \quad (4.1)$$

Definição 4.10 (Talo e germe). O *talo* $\mathcal{P}$ em $a \in X$ é o quociente $\mathcal{P}_a := \tilde{\mathcal{P}}_a / \sim$. Um *germe* $\mathcal{P}$ em a é um elemento do talo $\mathcal{P}_a$.

Assim, um germe em $a \in X$ é uma classe de equivalência $[(U, s)]$, em que $U \subset X$ é uma vizinhança aberta de a e $s \in \mathcal{P}(U)$. Quando for necessário indicar o ponto, usamos a notação $[(U, s)]_a$;

O talo $\mathcal{P}_a$ se torna naturalmente um objeto de $\mathcal{C}$. Por isso, se a categoria $\mathcal{C}$ possui estrutura algébrica (como grupos, anéis ou módulos), o talo $\mathcal{P}_a$ herda naturalmente essa estrutura. As operações são definidas sobre representantes da seguinte forma:

- $[(U, s)] + [(V, t)] := [(U \cap V, s|_{U \cap V} + t|_{U \cap V})];$
- $[(U, s)] \cdot [(V, t)] := [(U \cap V, s|_{U \cap V} \cdot t|_{U \cap V})];$
- $\lambda \cdot [(U, s)] := [(U, \lambda s)].$

O elemento nulo de $\mathcal{P}_a$ é o germe $[(U, 0)]$ para qualquer vizinhança U de a ; se $\mathcal{C}$ for a categoria dos anéis (ou álgebras) unitários, a unidade é o germe $[(U, 1)]$ para qualquer vizinhança U de a .

Dados um aberto $U \subset X$ e um ponto $a \in U$, cada seção $s \in \mathcal{P}(U)$ define um germe em a , a saber $[(U, s)]_a$. Isso fornece o morfismo

$$\begin{aligned} \pi_a : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}_a \\ s &\longmapsto [(U, s)]_a, \end{aligned}$$

o qual, em geral, não é injetor, pois duas seções distintas podem coincidir em uma vizinhança de a , nem sobrejetor, pois um germe pode não admitir um representante definido em todo U .

Finalmente, para cada $a \in X$, um morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ induz canonicamente um morfismo entre os talos

$$\begin{aligned} \rho_a : \mathcal{P}_a &\longrightarrow \mathcal{Q}_a \\ [(U, s)]_a &\longmapsto [(U, \rho_U(s))]_a. \end{aligned}$$

o qual é um morfismo em $\mathcal{C}$.

Observação 4.11. O morfismo $\rho_a : \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{Q}_a$ está bem definido, ou seja, não depende do representante (U, s) escolhido. De fato, se $(U, s) \sim (V, t)$ em $\mathcal{P}_a$, existe uma vizinhança $W \subset U \cap V$ de a tal que $s|_W = t|_W$. Como ρ é um morfismo de pré-feixes, temos

$$\rho_U(s)|_W = \rho_W(s|_W) = \rho_W(t|_W) = \rho_V(t)|_W,$$

logo $[(U, \rho_U(s))]_a = [(V, \rho_V(t))]_a$ em $\mathcal{Q}_a$.

Definição 4.12 (Suporte). Seja s uma seção em $\mathcal{P}(U)$. O *suporte* de s , que denotamos por $\text{supp}(s)$, é o fecho em U do subconjunto formado pelos pontos a tais que $[(U, s)]_a \neq 0$.

Proposição 4.13. Sejam s uma seção de $\mathcal{P}(U)$ e a um ponto de U . Temos que $[(U, s)]_a = 0$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que $s|_V = 0|_V$, logo $s|_V = 0$.

Demonstração. O germe nulo $0 \in \mathcal{P}_a$ é representado pela seção nula 0_U sobre qualquer aberto U que contém a . Assim,

$$[(U, s)]_a = 0 \iff [(U, s)]_a = [(U, 0)]_a.$$

($\Rightarrow$) Suponha que $[(U, s)]_a = 0$. Então, pela igualdade de germes, existe uma vizinhança $V \subset U$ de a tal que

$$s|_V = 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha que existe uma vizinhança $V \subset U$ de a tal que $s|_V = 0$. Então

$$\begin{aligned} [(U, s)]_a &= [(V, s|_V)]_a \\ &= [(V, 0)]_a \\ &= [(U, 0)]_a \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Como um sub-pré-feixe $\mathcal{Q}$ está contido em um pré-feixe maior $\mathcal{P}$, é natural que essa inclusão também apareça no nível dos talos. De fato, qualquer germe de uma seção de $\mathcal{Q}$ pode ser visto, sem ambiguidade, como um germe da mesma seção em $\mathcal{P}$. Isso é formalizado na proposição a seguir.

Proposição 4.14. Sejam $\mathcal{Q}$ um sub-pré-feixe de $\mathcal{P}$ e $a \in X$. Fica definido naturalmente o morfismo injetor $\iota_a: \mathcal{Q}_a \hookrightarrow \mathcal{P}_a$, dado por $[(U, s)]_a \mapsto [(U, s)]_a$.

Demonstração. A inclusão $\mathcal{Q}(U) \subset \mathcal{P}(U)$ para todo aberto $U \subset X$ induz a aplicação

$$\iota_a: \mathcal{Q}_a \hookrightarrow \mathcal{P}_a, \quad [(U, s)]_a \mapsto [(U, s)]_a.$$

Agora vamos mostrar que essa aplicação está bem definida. Suponha que $[(U, s)]_a = [(V, t)]_a$ em $\mathcal{Q}_a$. Então existe uma vizinhança $W \subset U \cap V$ de a tal que

$$s|_W = t|_W$$

como seções de $\mathcal{Q}(W)$. Como $\mathcal{Q}(W) \subset \mathcal{P}(W)$, a mesma igualdade vale em $\mathcal{P}(W)$, e portanto

$$[(U, s)]_a = [(V, t)]_a$$

em $\mathcal{P}_a$. Assim, ι_a está bem definida.

Em seguida, vamos verificar que ι_a é injetora. Suponha que $\iota_a([(U, s)]_a) = \iota_a([(V, t)]_a)$ em $\mathcal{P}_a$. Então existe uma vizinhança $W \subseteq U \cap V$ de a tal que

$$s|_W = t|_W$$

como seções de $\mathcal{P}(W)$. Mas $s|_W$ e $t|_W$ pertencem a $\mathcal{Q}(W)$ (pois $\mathcal{Q}$ é sub-pré-feixe), de modo que a igualdade já ocorre em $\mathcal{Q}(W)$, o que implica

$$[(U, s)]_a = [(V, t)]_a$$

em $\mathcal{Q}_a$. Logo, ι_a é injetora. Portanto, concluímos que ι_a está bem definida e é injetora, como desejado.

■

4.3 Operações Fundamentais

4.3.1 Push-forward

Esta seção introduz o conceito de *push-forward* de um pré-feixe ao longo de uma função contínua. O push-forward é uma ferramenta que permite transportar um pré-feixe definido no espaço Y para um pré-feixe no espaço X , utilizando a pré-imagem f^{-1} dos abertos.

Definição 4.15. (Push-forward) Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e $\mathcal{P} : \text{Top}_Y^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ um pré-feixe. O *push-forward* $f_*\mathcal{P} : \text{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ é definido por

$$(f_*\mathcal{P})(U) := \mathcal{P}(f^{-1}(U)) \quad \text{e} \quad (f_*\mathcal{P})_{VU} := \mathcal{P}_{f^{-1}V f^{-1}U}.$$

Fica definido o seguinte morfismo natural para todo $b \in Y$, que em geral não é um isomorfismo

$$f_b^\# : (f_*\mathcal{P})_{f(b)} \rightarrow \mathcal{P}_b \quad (4.2)$$

$$[(U, s)]_{f(b)} \mapsto [f^{-1}U, s]_b. \quad (4.3)$$

Exemplo 4.16. Sejam $X = \mathbb{R} \times (0, 1)$ e $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi(a, t) = a$. Considere o pré-feixe $\mathbb{R}$ em X . Fixemos $(a, t) \in X$. O talo $(\pi_*\mathbb{R})_a$ é, em geral, bem diferente de $\mathbb{R}_{(a,t)}$, pois um elemento de $(\pi_*\mathbb{R})_a$ é representado por pares da forma $(U \times (0, 1), \varphi)$, onde $U \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança aberta de a . Assim, apenas vizinhanças de (a, t) que sejam da forma $U \times (0, 1)$ contribuem para a definição de $(\pi_*\mathbb{R})_a$. O morfismo natural

$$\pi_{(a,t)}^\# : (\pi_*\mathbb{R})_a \rightarrow \mathbb{R}_{(a,t)}$$

é dado por

$$\pi_{(a,t)}^\# [(U \times (0, 1), \varphi)] = [(U \times (0, 1), \varphi)].$$

aplicação $\pi_{(a,t)}^\#$ não é injetora. De fato, considere classes

$$[(U \times (0, 1), \varphi)]_a \quad \text{e} \quad [(V \times (0, 1), \psi)]_a,$$

onde φ e ψ são distintas em $\{a\} \times (0, 1)$, mas coincidem em alguma vizinhança de (a, t) em $\mathbb{R} \times (0, 1)$. Assim, elas são distintas em $(\pi_*\mathbb{R})_a$, mas seus germes em (a, t) coincidem, logo

$$\pi_{(a,t)}^\# [(U \times (0, 1), \varphi)] = \pi_{(a,t)}^\# [(V \times (0, 1), \psi)].$$

Entretanto, a aplicação $\pi_{(a,t)}^\#$ é sobrejetora, pois dado um germe em (a, t) , ele pode ser representado por uma função definida em uma vizinhança suficientemente pequena de (a, t) , e tal vizinhança sempre contém um aberto da forma $U \times (0, 1)$. Portanto, todo germe em $\mathbb{R}_{(a,t)}$ admite um representante que provém de $(\pi_*\mathbb{R})_a$. Em contrapartida, se estivéssemos trabalhando com funções analíticas a sobrejetividade poderia falhar.

O push-forward pode ser visto como um funtor

$$f_* : \text{PreFeixes}_{Y, \mathcal{C}} \longrightarrow \text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}.$$

De fato, dado um morfismo $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ de pré-feixes sobre Y , define-se

$$(f_* \rho)_U = \rho_{f^{-1}(U)}.$$

Além disso, temos que a identidade $\text{id}_X : X \rightarrow X$ induz a identidade em $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$, ou seja, $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}}$; e dados $g : Z \rightarrow Y$ e $f : Y \rightarrow X$, temos $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Como consequência, se f for um homeomorfismo, então o funtor f_* é um isomorfismo de categorias.

4.3.2 Operações entre pré-feixes em X

Nas categorias consideradas neste trabalho, fica definido o produto de dois objetos, que denotamos como soma direta, pois nos casos dos grupos abelianos e dos $\mathbb{R}$ -módulos, é efetivamente uma soma direta. Além disso, exceto na categoria dos conjuntos, fica definido o produto tensorial de dois objetos (onde o produto tensorial de grupos abelianos e de anéis comutativos é respectivamente o de $\mathbb{Z}$ -módulos e de $\mathbb{Z}$ -álgebras). Dessa forma, dados dois pré-feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ em X , com valores em $\mathcal{C}$, definimos os seguintes pré-feixes:

- a *soma direta*, isto é,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})(U) &:= \mathcal{P}(U) \oplus \mathcal{Q}(U) \\ (s, t)|_V &:= (s|_V, t|_V); \end{aligned}$$

- o *produto tensorial*, isto é,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})(U) &:= \mathcal{P}(U) \otimes \mathcal{Q}(U) \\ (s \otimes t)|_V &:= s|_V \otimes t|_V; \end{aligned}$$

- se $\mathcal{Q}$ for um sub-pré-feixe de $\mathcal{P}$, sendo $\mathcal{Q}(U)$ um ideal de $\mathcal{P}(U)$ nos casos dos anéis e das álgebras, o *quociente*, isto é,

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} / \mathcal{Q})(U) &:= \mathcal{P}(U) / \mathcal{Q}(U) \\ [s]|_V &:= [s|_V]. \end{aligned}$$

Além disso, temos os seguintes isomorfismos naturais para todo $a \in X$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})_a &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}_a \oplus \mathcal{Q}_a & (\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})_a &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}_a \otimes \mathcal{Q}_a \\ [(U, (s, t))] &\mapsto ([(U, s)], [(U, t)]) & [(U, s \otimes t)] &\mapsto [(U, s)] \otimes [(U, t)]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Os morfismos inversos são definidos por

$$\mathcal{P}_a \oplus \mathcal{Q}_a \xrightarrow{\cong} (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})_a, \quad [(U, s)] \oplus [(V, t)] \mapsto [(U \cap V, s|_{U \cap V} \oplus t|_{U \cap V})],$$

e

$$\mathcal{P}_a \otimes \mathcal{Q}_a \xrightarrow{\cong} (\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})_a, \quad [(U, s)] \otimes [(V, t)] \mapsto [(U \cap V, s|_{U \cap V} \otimes t|_{U \cap V})]$$

Subentendendo o mergulho ι_a , definido na Proposição 4.14, temos também o isomorfismo natural

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}/\mathcal{Q})_a &\xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_a/\mathcal{Q}_a \\ [(U, [s])] &\mapsto [(U, s)]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.3.3 Kernel, imagem e exatidão

A estrutura de categoria sobre os pré-feixes permite não apenas a análise de morfismos globais, mas também o estudo de suas propriedades algébricas intrínsecas. Nas categorias que possuem um objeto zero e permitem a noção de núcleos e imagens, podemos estender esses conceitos para o contexto de pré-feixes definindo-os de maneira pontual, ou seja, aberto a aberto. Esta seção dedica-se a formalizar as construções de núcleo, imagem e quocientes associadas a um morfismo de pré-feixes, estabelecendo as bases para o estudo da exatidão.

Dado um morfismo $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, excluindo a categoria dos conjuntos, ficam definidos os *pré-feixes kernel, imagem, cokernel e coimagem* da seguinte maneira:

- $(\text{Ker } \rho)(U) := \text{Ker}(\rho_U)$;
- $(\text{Im } \rho)(U) := \text{Im}(\rho_U)$;
- $(\text{Coker } \rho)(U) := \text{Coker}(\rho_U)$;
- $(\text{Coim } \rho)(U) := \text{Coim}(\rho_U)$;

O *kernel* é um sub-pré-feixe de $\mathcal{P}$, e a *imagem* é um sub-pré-feixe de $\mathcal{Q}$. De fato, seja $s \in (\text{Ker } \rho)(U)$. Isso significa que $s \in \mathcal{P}(U)$ e $\rho_U(s) = 0$. Dado $V \subset U$ aberto, devemos verificar que $s|_V \in (\text{Ker } \rho)(V)$. Com efeito,

$$\rho_V(s|_V) = \rho_U(s)|_V = 0|_V = 0.$$

Analogamente, seja $s \in (\text{Im } \rho)(U)$. Isso significa que $s \in \mathcal{Q}(U)$ e existe $t \in \mathcal{P}(U)$ tal que $\rho_U(t) = s$. Dado $V \subset U$ aberto, temos

$$s|_V = \rho_U(t)|_V = \rho_V(t|_V) \in (\text{Im } \rho)(V).$$

O pré-feixe $\text{Im } \rho$ é sub-pré-feixe de $\mathcal{Q}$, permitindo definir o *cokernel*

$$\text{Coker } \rho := \mathcal{Q}/\text{Im } \rho$$

o qual satisfaz $(\text{Coker } \rho)(U) = \text{Coker}(\rho_U)$, satisfazendo a definição. De forma análoga, definimos a *coimagem* como

$$\text{Coim } \rho := \mathcal{P} / \text{Ker } \rho,$$

com $(\text{Coim } \rho)(U) = \mathcal{P}(U) / (\text{Ker } \rho)(U)$.

Um morfismo $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ é dito *injetor* se $\text{Ker}(\rho) = 0$, sendo 0 o pré-feixe constante induzido pelo objeto 0 de $\mathcal{C}$; *sobreto* se $\text{Im}(\rho) = \mathcal{Q}$; e *bijeto* se é injetor e sobreto.

Segue que ρ é injetor/sobreto/bijeto se, e somente se,

$$\rho_U: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(U)$$

é injetor/sobreto/bijeto para todo aberto $U \subset X$.

Observação 4.17. Em todas as categorias consideradas, um morfismo é bijeto se, e somente se, é um isomorfismo. Seja ρ bijeto. Então ρ_U é bijeto (logo inversível) para todo aberto U , e podemos definir o inverso ponto a ponto como

$$(\rho^{-1})_U := (\rho_U)^{-1}.$$

Dessa forma, o morfismo inverso é bem definido, garantindo que se trata de um isomorfismo de pré-feixes.

Proposição 4.18. Para todo morfismo de pré-feixes $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, temos que:

- (i) $(\text{Ker } \rho)_a = \text{Ker}(\rho_a)$;
- (ii) $(\text{Im } \rho)_a = \text{Im}(\rho_a)$;
- (iii) $(\text{Coker } \rho)_a \simeq \text{Coker}(\rho_a)$;
- (iv) $(\text{Coim } \rho)_a \simeq \text{Coim}(\rho_a)$.

Demonstração. (i) Sendo $\text{Ker } \rho$ um sub-pré-feixe de $\mathcal{P}$, temos a inclusão $(\text{Ker } \rho)_a \subset \mathcal{P}_a$ pela Proposição 4.14. Seja $[(U, s)] \in (\text{Ker } \rho)_a$; logo, $s \in \text{Ker}(\rho_U)$. Temos que

$$[(U, s)] = [(U, \rho_U(s))] = [(U, 0)] = 0.$$

Isso mostra que $(\text{Ker } \rho)_a \subset \text{Ker}(\rho_a)$. Reciprocamente, seja $[(U, s)] \in \text{Ker}(\rho_a)$. Isso significa que

$$0 = \rho_a([(U, s)]) = [(U, \rho_U(s))].$$

Pela Proposição 4.13, existe $V \subset U$ tal que $\rho_V(s|_V) = 0$, isto é, $s|_V \in \text{Ker}(\rho_V)$. Isso mostra que $[(U, s)] = [(V, s|_V)] \in (\text{Ker } \rho)_a$. Portanto, $(\text{Ker } \rho)_a = \text{Ker}(\rho_a)$.

(ii) Sendo $\text{Im } \rho$ um sub-pré-feixe de $\mathcal{Q}$, temos a inclusão $(\text{Im } \rho)_a \subset \mathcal{Q}_a$ pela Proposição 4.14. Seja $[(U, \rho_U(s))] \in (\text{Im } \rho)_a$. Dado que $[(U, \rho_U(s))] = \rho_a([(U, s)])$, vale a inclusão $(\text{Im } \rho)_a \subset \text{Im}(\rho_a)$. Reciprocamente, seja $[(U, t)] \in \text{Im}(\rho_a)$. Como $[(U, t)] = [(U, \rho_U(s))]$ para algum $s \in \mathcal{P}(U)$, vale a inclusão $\text{Im}(\rho_a) \subset (\text{Im } \rho)_a$.

(iii) e (v) Seguem dos dois itens anteriores e do isomorfismo (4.5). ■

Tendo definido o kernel e a imagem, podemos agora falar em *sequências exatas de pré-feixes* sobre X . Uma sequência de pré-feixes e morfismos

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_{i-1} \xrightarrow{\rho_{i-1}} \mathcal{P}_i \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{P}_{i+1} \longrightarrow \cdots \quad (4.6)$$

é chamada *exata* se, e somente se, para todo índice $i \in \mathbb{Z}$, tivermos

$$\text{Ker}(\rho_i) = \text{Im}(\rho_{i-1}).$$

Pelas definições de kernel e imagem, a sequência acima é exata se, e somente se, para todo aberto $U \subset X$, a sequência de seções

$$\cdots \xrightarrow{(\rho_{i-2})_U} \mathcal{P}_{i-1}(U) \xrightarrow{(\rho_{i-1})_U} \mathcal{P}_i(U) \xrightarrow{(\rho_i)_U} \mathcal{P}_{i+1}(U) \xrightarrow{(\rho_{i+1})_U} \cdots,$$

formada por objetos e morfismos em $\mathcal{C}$, é exata para todo aberto $U \subset X$.

Proposição 4.19. Seja $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ um morfismo de pré-feixes sobre X .

- (i) Se ρ é injetor, então $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{Q}_a$ é injetor para todo $a \in X$.
- (ii) Se ρ é sobrejetor, então $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{Q}_a$ é sobrejetor para todo $a \in X$.
- (iii) Se ρ é bijetor, então $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{Q}_a$ é bijetor para todo $a \in X$.
- (iv) Se a sequência (4.6) for exata, então a sequência

$$\cdots \xrightarrow{(\rho_{i-2})_a} \mathcal{P}_{i-1}(a) \xrightarrow{(\rho_{i-1})_a} \mathcal{P}_i(a) \xrightarrow{(\rho_i)_a} \mathcal{P}_{i+1}(a) \xrightarrow{(\rho_{i+1})_a} \cdots$$

é exata para todo $a \in X$.

Demonstração. (i) Por hipótese, ρ é injetor, o que equivale a dizer que $\text{Ker } \rho = 0$ (o pré-feixe nulo). Pela proposição anterior (Proposição 4.18), temos $\text{Ker}(\rho_a) = (\text{Ker } \rho)_a$. Como o germe de um pré-feixe nulo em qualquer ponto $a \in X$ é o próprio objeto zero da categoria $\mathcal{C}$, segue que $\text{Ker}(\rho_a) = 0$. Portanto, $\rho_a: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{Q}_a$ é um morfismo injetor.

(ii) Se ρ é sobrejetor, então $\text{Im } \rho = \mathcal{Q}$. Aplicando o resultado para a imagem nos germes, temos $\text{Im}(\rho_a) = (\text{Im } \rho)_a$. Como $(\text{Im } \rho)_a = \mathcal{Q}_a$, concluímos que $\text{Im}(\rho_a) = \mathcal{Q}_a$, o que prova a sobrejetividade de ρ_a .

(iii) Um morfismo é bijetor se, e somente se, é simultaneamente injetor e sobrejetor. Pelos itens (i) e (ii) demonstrados acima, se ρ possui ambas as propriedades, então ρ_a é injetor e sobrejetor para todo $a \in X$, sendo, portanto, um morfismo bijetor (e, consequentemente, um isomorfismo na categoria $\mathcal{C}$).

(iv) A exatidão da sequência (4.6) no termo $\mathcal{P}_i$ significa que $\text{Ker}(\rho_i) = \text{Im}(\rho_{i-1})$. Tomando o germe em ambos os lados da igualdade para um ponto $a \in X$ arbitrário, obtemos:

$$(\text{Ker } \rho_i)_a = (\text{Im } \rho_{i-1})_a$$

Utilizando novamente a Proposição 4.18 para trocar a ordem das operações, a igualdade torna-se:

$$\text{Ker}((\rho_i)_a) = \text{Im}((\rho_{i-1})_a)$$

Como esta condição de igualdade entre o núcleo do morfismo de saída e a imagem do morfismo de entrada é satisfeita para todo índice $i \in \mathbb{Z}$, a sequência de germes

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{P}_{i-1})_a \xrightarrow{(\rho_{i-1})_a} (\mathcal{P}_i)_a \xrightarrow{(\rho_i)_a} (\mathcal{P}_{i+1})_a \longrightarrow \cdots$$

é exata para todo $a \in X$, como queríamos demonstrar. ■

As recíprocas de nenhum dos itens da Proposição 4.19 são válidas. Além disso, os três primeiros itens permanecem verdadeiros na categoria Sets, enquanto o último item exige a existência do kernel de um morfismo para que o enunciado faça sentido.

4.4 Feixes

Um *feixe* é uma maneira de organizar informações que são definidas localmente em um espaço topológico e que podem ser combinadas de forma consistente para produzir informações globais. Funções contínuas definidas em abertos de um espaço são um exemplo clássico de feixe, mas a noção é muito mais geral: feixes abstraem a ideia de informações locais compatíveis que se organizam de maneira coerente sobre o espaço.

Definição 4.20. (Feixe) Um pré-feixe $\mathcal{F}$ em X , com valores em $\mathcal{C}$, é dito um *feixe* quando, dado um aberto $U \subset X$ e uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de U , toda família de seções $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, compatível nas interseções $V_i \cap V_j$, ou seja, tal que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todos $i, j \in I$, determina uma única seção $s \in \mathcal{F}(U)$ satisfazendo $s|_{V_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Quando $\mathcal{C}$ não é a categoria dos conjuntos, faz sentido afirmar que uma seção é nula. Assim, com exceção em que $\mathcal{C}$ não é a categoria Sets, temos que a Definição 4.20 equivale a seguinte:

Definição 4.21. Um pré-feixe $\mathcal{F}$ em X , com valores em $\mathcal{C}$, é dito um *feixe* quando, dado um aberto $U \subset X$ e uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de U , temos que

- (i) Se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $s|_{V_i} = 0$, para todo $i \in I$, então $s = 0$;
- (ii) Se $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ para todo $i \in I$ e $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todos $i, j \in I$, então existe uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_i = s|_{V_i}$.

Exemplo 4.22. O pré-feixe do Exemplo 4.3 é um feixe.

Exemplo 4.23. O pré-feixe constante definido no Exemplo 4.4 não é um feixe. De fato, considere $U = U' \sqcup U''$, onde U' e U'' são duas componentes conexas distintas. Consideremos a cobertura aberta $\{U', U''\}$ de U , dois elementos distintos $\alpha, \beta \in A$ e $\alpha \in \mathcal{P}(U')$ e $\beta \in \mathcal{P}(U'')$. Como $U' \cap U'' = \emptyset$, α e β coincidem na interseção, entretanto não é possível encontrar uma seção constante em U que se restrinja a α e β simultaneamente.

Proposição 4.24. Sejam $\mathcal{F}$ um feixe e $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tais que $[(U, s)]_a = [(U, t)]_a$ para todo $a \in U$. Neste caso, $s = t$. Em particular, se $[(U, s)]_a = 0$ para todo a , então $s = 0$.

Demonstração. Por hipótese, para todo $a \in U$ existe uma vizinhança aberta $V_a \subset U$ tal que

$$s|_{V_a} = t|_{V_a}.$$

Pela definição de feixe, aplicada à cobertura $\{V_a\}_{a \in U}$ de U , existe uma única colagem em U das seções $\{s|_{V_a}\}_{a \in U}$. Equivalentemente, $\{t|_{V_a}\}_{a \in U}$. Logo, $s = t$.

No caso particular $t = 0$, o enunciado pode ser deduzido também a partir da Proposição 4.13, pela qual todo $a \in X$ admite uma vizinhança $V_a \subset U$ tal que

$$s|_{V_a} = 0.$$

Pela axioma (i) da definição de feixe (ver Definição 4.21), aplicada à cobertura $\{V_a\}_{a \in U}$, temos que $s = 0$. ■

O corolário afirma que se uma seção s é restringida a um aberto V que está contido no complementar do seu suporte, então essa restrição deve ser nula.

Corolário 4.25. Seja $s \in \mathcal{F}(U)$ e seja $V \subset U \setminus \text{supp}(s)$ aberto. Neste caso, temos $s|_V = 0$.

4.4.1 Morfismos e sub-feixes

Um *morfismo de feixes* é definido como um morfismo de pré-feixes. Consequentemente, a categoria dos feixes sobre X com valores em $\mathcal{C}$, que denotamos por $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$, é uma subcategoria cheia da categoria $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$.

Proposição 4.26. Sejam $\rho, \eta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ dois morfismos de feixes. Eles coincidem se, e somente se, $\rho_a = \eta_a$, para todo $a \in X$. Em particular, um morfismo de feixes $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é nulo se, e somente se, $\rho_a: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{G}_a$ é o morfismo nulo, para todo $a \in X$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\rho = \eta$. Então, para todo ponto $a \in X$, a aplicação induzida nos germes satisfaz

$$\rho_a([U, s]) = [U, \rho_U(s)] = [U, \eta_U(s)] = \eta_a([U, s]),$$

mostrando que $\rho_a = \eta_a$ para todo $a \in X$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\rho_a = \eta_a$ para todo $a \in X$. Se existisse algum aberto $U \subset X$ e alguma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_U(s) \neq \eta_U(s)$, então, pela Proposição 4.24, existiria algum ponto $a \in U$ tal que os germes diferissem, ou seja

$$[(U, \rho_U(s))]_a \neq [(U, \eta_U(s))]_a.$$

Mas isso implica

$$\rho_a([U, s]) \neq \eta_a([U, s]),$$

o que contradiz a hipótese de que $\rho_a = \eta_a$ para todo $a \in X$. Portanto, deve ocorrer que $\rho_U(s) = \eta_U(s)$ para todo U e toda seção s , ou seja, $\rho = \eta$. ■

Definição 4.27 (Sub-feixe). Um *sub-feixe* é um sub-pré-feixe que, adicionalmente, satisfaz as condições de feixe.

Proposição 4.28. Seja $\mathcal{F}$ um feixe em X e $\mathcal{G}$ um sub-feixe de $\mathcal{F}$. Sejam $U \subset X$ e $s \in \mathcal{F}(U)$. Temos que $s \in \mathcal{G}(U)$ se, e somente se, $[(U, s)]_a \in \mathcal{G}_a$, para todo $a \in U$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $s \in \mathcal{G}(U)$, então, por definição, para todo $a \in U$, temos

$$[(U, s)]_a \in \mathcal{G}_a.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $[(U, s)]_a \in \mathcal{G}_a$ para todo $a \in U$. Por definição de germe, para cada ponto $a \in U$ existe um aberto $V_a \subset U$ contendo a e uma seção $t_a \in \mathcal{G}(V_a)$ tal que

$$[(U, s)]_a = [(V_a, t_a)]_a.$$

Isso significa que existe um aberto $W_a \subset V_a$ contendo a tal que

$$s|_{W_a} = t_a|_{W_a} \in \mathcal{G}(W_a).$$

Como $\mathcal{G}$ é um feixe, as seções locais $\{s|_{W_a}\}_{a \in U}$ podem ser coladas de forma única para formar uma seção em U . Essa seção colada deve coincidir com s , logo

$$s \in \mathcal{G}(U).$$

4.4.2 Feixificação

Dado um pré-feixe $\mathcal{F}$, existe uma construção canônica para transformá-lo em feixe, chamada *feixificação*. A ideia central é que cada seção de um feixe é determinada de forma única pelos seus germes em cada ponto.

Definição 4.29. (Feixificação) Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. A feixificação de $\mathcal{P}$ é o feixe $\mathcal{P}^\natural$, definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}^\natural(U) := \left\{ \varphi : U \rightarrow \prod_{a \in U} \mathcal{P}_a \left| \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi(a) \in \mathcal{P}_a \text{ para todo } a \in U; \\ \text{(ii) } \varphi \text{ é localmente induzida por uma seção de } \mathcal{P} \text{ em } U \end{array} \right. \right\}.$$

O significado da condição (ii) é o seguinte: para todo $a \in U$, existem uma vizinhança aberta $V_a \subset U$ de a e uma seção $s_a \in \mathcal{P}(V_a)$ tais que $\varphi(b) = [(V_a, s_a)]_b$ para todo $b \in V_a$. Enfim, definimos $\mathcal{P}_V^\natural(\varphi) := \varphi|_V$.

Os elementos de $P^\natural(U)$ herdam a estrutura da categoria $\mathcal{C}$ por meio de operações definidas pontualmente, visto que cada P_a é um objeto de $\mathcal{C}$. A natureza de pré-feixe de $P^\natural$ é confirmada pela compatibilidade de suas aplicações de restrição: para qualquer seção $\varphi \in P^\natural(U)$ e para abertos $W \subset V \subset U$, as condições de identidade ($\varphi|_U = \varphi$) e de transitividade ($\varphi|_V|_W = \varphi|_W$) são verificadas de imediato.

Mais do que um pré-feixe, $P^\natural$ constitui um feixe, uma vez que sua estrutura local garante a unicidade global. De fato, se uma seção φ está definida em uma vizinhança de cada ponto $a \in U$, a sua aplicação em todo o aberto U fica determinada pela colagem dessas informações locais.

Fica definido o morfismo natural

$$\xi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\natural \quad (4.7)$$

por $(\xi_U(s))(a) := [(U, \varphi)]_a$. E assim, a imagem de ξ_U é formada pelas seções de $\mathcal{P}^\natural$ em U que são globalmente induzidas por uma seção de $\mathcal{P}$.

Proposição 4.30. Seja $a \in X$. Então:

- (i) O morfismo $\xi_a: \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a^\natural$, induzido por (4.7), é um isomorfismo e seu inverso coincide com a aplicação

$$\xi_a^{-1}[(U, \varphi)] := \varphi(a).$$

- (ii) O morfismo ξ é um isomorfismo de pré-feixes se, e somente se, $\mathcal{P}$ é um feixe.

A feixificação pode ser pensada como um funtor de $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$ a $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$. De fato, a construção acima mostra o comportamento de $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^\natural$. Resta verificar o comportamento em relação aos morfismos.

Definição 4.31. Seja $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ um morfismo de pré-feixes. Definimos $\rho^\natural: \mathcal{P}^\natural \rightarrow \mathcal{Q}^\natural$ por

$$(\rho^\natural(\varphi))(a) := \rho_a(\varphi(a)).$$

Vamos explicar essa definição. Fixando um aberto $U \subset X$, precisamos definir

$$\rho_U^\natural: \mathcal{P}^\natural(U) \rightarrow \mathcal{Q}^\natural(U).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{P}^\natural(U)$. Por definição, $\varphi(a) \in \mathcal{P}_a$ para todo $a \in U$. A imagem $\rho^\natural(\varphi)$ precisa assumir valores nos talos de $\mathcal{Q}$, de modo que $(\rho^\natural(\varphi))(a) := \rho_a(\varphi(a))$.

Denotando por $\xi_{\mathcal{P}}$ e $\xi_{\mathcal{Q}}$ os morfismos naturais

$$\xi_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\natural, \quad \xi_{\mathcal{Q}}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}^\natural,$$

temos então que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{Q} \\ \xi_{\mathcal{P}} \downarrow & & \downarrow \xi_{\mathcal{Q}} \\ \mathcal{P}^\natural & \xrightarrow{\rho^\natural} & \mathcal{Q}^\natural. \end{array}$$

comuta.

Isto mostra que a família de morfismos $\xi_{\mathcal{P}}$, variando $\mathcal{P}$, é um morfismo de funtores de $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$ para $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$ entre a identidade e a feixificação.

Proposição 4.32. (i) Se $\mathcal{Q}$ é um sub-pré-feixe de $\mathcal{P}$, então a inclusão $\iota: \mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{P}$ induz canonicamente um morfismo injetivo $\iota^\sharp: \mathcal{Q}^\sharp \hookrightarrow \mathcal{P}^\sharp$. Em particular, $\mathcal{Q}^\sharp$ identifica-se naturalmente com um sub-feixe de $\mathcal{P}^\sharp$.

(ii) Se $\mathcal{F}$ é um feixe e $\mathcal{Q}$ for um sub-pré-feixe de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{Q}^\sharp$ se identifica naturalmente como um sub-feixe de $\mathcal{F}$.

Demonstração. (i) Pela Definição 4.31, o morfismo

$$\iota^\sharp: \mathcal{F}^\sharp \longrightarrow \mathcal{P}^\sharp$$

é a composição pontual ι_a , o qual é um mergulho canônico pela Proposição 4.14. Portanto, $\iota^\sharp$ também é um mergulho canônico.

(ii) Composto $\iota^\sharp$ com $\xi^{-1}: \mathcal{F}^\sharp \rightarrow \mathcal{F}$, conforme o item (ii) da Proposição 4.30, obtemos um mergulho canônico de $\mathcal{Q}^\sharp$ em $\mathcal{F}$. ■

Corolário 4.33. Sejam $\mathcal{F}$ um feixe em X e $\mathcal{Q}$ um sub-pré-feixe de $\mathcal{F}$. Sejam ainda $U \subset X$ um aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$ uma seção. Temos que $s \in \mathcal{Q}^\sharp$ se, e somente se, $[(U, s)]_a \in \mathcal{Q}_a$ para todo ponto $a \in U$.

A proposição a seguir estabelece a caracterização da feixificação a partir de sua propriedade universal.

Proposição 4.34. Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Para todo morfismo de pré-feixes $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$, sendo $\mathcal{F}$ um feixe, existe um único morfismo de feixes $\tilde{\rho}: \mathcal{P}^\sharp \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\rho = \tilde{\rho} \circ \xi$, ou seja, tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F} \\ & \searrow \xi & \uparrow \tilde{\rho} \\ & & \mathcal{P}^\sharp \end{array}$$

comuta.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{P}^\sharp(U)$. Para cada ponto $a \in U$, escolha um aberto $V_a \subset U$ e uma seção $s_a \in \mathcal{P}(V_a)$ cuja classe determina pontualmente a restrição $\varphi|_{V_a}$. Escrevamos

$$V_{ab} := V_a \cap V_b.$$

Para quaisquer $a, b \in U$ e todo $c \in V_{ab}$, vale

$$[s_a|_{V_{ab}}]_c = [s_b|_{V_{ab}}]_c = \varphi(c),$$

e, portanto,

$$[\rho_{V_a}(s_a)|_{V_{ab}}]_c = [\rho_{V_b}(s_b)|_{V_{ab}}]_c = \rho_c(\varphi(c)).$$

Como $\mathcal{F}$ é um feixe, as seções $\rho_{V_a}(s_a)$ e $\rho_{V_b}(s_b)$ coincidem em V_{ab} para quaisquer $a, b \in U$; logo, a família local $\{\rho_{V_a}(s_a)\}_{a \in U}$ se cola numa única seção $t \in \mathcal{F}(U)$. Definimos então

$$\tilde{\rho}_U(\varphi) := t.$$

Se φ for induzida por alguma seção global $s \in \mathcal{P}(U)$, então, pelo modo como t foi construído,

$$\tilde{\rho}_U(\varphi) = t = \rho_U(s),$$

e, conseqüentemente,

$$\rho = \tilde{\rho} \circ \xi.$$

Em particular, para todo $a \in X$,

$$\rho_a = \tilde{\rho}_a \circ \xi_a.$$

Como o item (i) da Proposição 4.30 afirma que ξ_a é um isomorfismo, segue que

$$\tilde{\rho}_a = \rho_a \circ \xi_a^{-1},$$

mostrando que cada $\tilde{\rho}_a$ é completamente determinada por ρ . Aplicando o item (ii) da Proposição 4.32, obtemos que o morfismo $\tilde{\rho}$ é unicamente determinado por ρ . ■

4.4.3 Operações entre feixes

O push-forward de um feixe é um feixe. De fato, considere um feixe $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico Y e uma aplicação contínua $f: Y \rightarrow X$. Para verificar que $f_*\mathcal{F}$ constitui um feixe em X , tomemos um aberto $U \subset X$ e uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de U . Por definição, as seções $s_i \in (f_*\mathcal{F})(V_i)$ correspondem a seções $s_i \in \mathcal{F}(f^{-1}V_i)$. Uma vez que f é contínua, a família $\{f^{-1}V_i\}_{i \in I}$ define uma cobertura aberta de $f^{-1}U$ no espaço Y . A propriedade de feixe de $\mathcal{F}$ garante, portanto, a existência de uma única colagem $s \in \mathcal{F}(f^{-1}U)$, o que equivale a uma única seção $s \in (f_*\mathcal{F})(U)$. Este argumento estabelece o funtor

$$f_*: \text{Feixes}_{Y, \mathcal{C}} \longrightarrow \text{Feixes}_{X, \mathcal{C}},$$

o qual atua como uma restrição do funtor análogo definido para pré-feixes.

Analogamente, a soma direta de dois feixes permanece um feixe, visto que as condições de localidade e colagem podem ser verificadas componente a componente em cada fator da soma. Em contrapartida, é importante notar que o produto tensorial de dois feixes, em geral, não herda a estrutura de feixe (sendo apenas um pré-feixe), o que exige o processo de associar um feixe para retornar à categoria $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$. Além disso, o quociente de um feixe por um sub-feixe, em geral, também não é um feixe.

Denotando por $\mathcal{F} \oplus^P \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \otimes^P \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} /^P \mathcal{G}$ a soma direta, o produto tensorial e o quociente, respectivamente, na categoria $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$, podemos definir as mesmas operações na categoria $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$ da seguinte maneira:

- $\mathcal{F} \oplus^F \mathcal{G} := \mathcal{F} \oplus^P \mathcal{G}$;
- $\mathcal{F} \otimes^F \mathcal{G} := (\mathcal{F} \otimes^P \mathcal{G})^\sharp$;
- $\mathcal{F} /^F \mathcal{G} := (\mathcal{F} /^P \mathcal{G})^\sharp$

Além disso, na categoria dos feixes os isomorfismos canônicos (4.4) e (4.5) também são válidos, pois pelo primeiro item da Proposição 4.30, a feixificação respeita os germes.

4.4.4 Kernel, imagem e exatidão

Vamos agora analisar o comportamento do kernel e da imagem de um morfismo de feixes. Mostraremos que o kernel de um morfismo de feixes é sempre um sub-feixe do domínio, mas a imagem, em geral, é apenas um sub-pré-feixe do contradomínio.

Proposição 4.35. Seja $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre X . Então $\text{Ker } \rho$ é um feixe; em particular, é um sub-feixe de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Considere, com a notação da Definição 4.20, uma família $\{s_i\}_{i \in I}$ de seções de $\text{Ker } \rho$ definida sobre uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de um aberto U , de modo que as restrições coincidam nas interseções. Como cada s_i é, em particular, uma seção de $\mathcal{F}$, existe uma única colagem

$$s \in \mathcal{F}(U)$$

que coincide com todas as s_i nas interseções. Resta verificar que s pertence ao kernel.

Para todo $i \in I$, temos

$$\rho_U(s)|_{U_i} = \rho_{U_i}(s|_{U_i}) = \rho_{U_i}(s_i) = 0,$$

pois cada s_i pertence ao kernel. Como $\mathcal{G}$ é um feixe, a igualdade local implica que $\rho_U(s) = 0$; portanto

$$s \in \text{Ker}(\rho_U).$$

Assim, a colagem existe e é única dentro de $\text{Ker } \rho$. Se houvesse duas colagens distintas em $\text{Ker } \rho$, elas também seriam distintas em $\mathcal{F}$, contradizendo o fato de $\mathcal{F}$ ser um feixe. Logo, $\text{Ker } \rho$ é um feixe. ■

Motivados por isso, introduzimos a seguinte terminologia: escrevemos $\text{Ker}^P \rho$, $\text{Im}^P \rho$, $\text{Coker}^P \rho$ e $\text{Coim}^P \rho$ para os objetos correspondentes na categoria $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$, e usaremos $\text{Ker}^F \rho$, $\text{Im}^F \rho$, $\text{Coker}^F \rho$, $\text{Coim}^F \rho$ para os objetos correspondentes na categoria $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$.

Definição 4.36. Seja $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre X . Definimos:

- $\text{Ker}^F \rho := \text{Ker}^P \rho$;
- $\text{Im}^F \rho := (\text{Im}^P \rho)^\natural$;
- $\text{Coker}^F \rho := \mathcal{G} /^F \text{Im}^F \rho \simeq (\text{Coker}^P \rho)^\natural$;
- $\text{Coim}^F \rho := \mathcal{F} /^F \text{Ker}^F \rho \simeq (\text{Coim}^P \rho)^\natural$.

Dizemos que ρ é *injetor* na categoria $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se $\text{Ker}^F \rho = 0$; dizemos que é *sobrejetor* se $\text{Im}^F \rho = \mathcal{G}$; e dizemos que é *bijetor* se for injetor e sobrejetor.

Devido à definição de kernel, um morfismo entre feixes é injetor na categoria $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se, possui tal propriedade quando considerado na categoria $\text{PreFeixes}_{X,\mathcal{C}}$. Por definição, estendemos esta equivalência também à categoria dos conjuntos. Por outro lado, a sobrejetividade em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ exige que a feixificação do pré-feixe imagem coincida com o contradomínio; consequentemente, um morfismo sobrejetor entre feixes pode não sê-lo na categoria $\text{PreFeixes}_{X,\mathcal{C}}$. Veremos adiante que a bijeção entre feixes em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ é equivalente à bijeção em $\text{PreFeixes}_{X,\mathcal{C}}$.

Enfim, uma sequência de feixes e morfismos

$$\dots \xrightarrow{\rho_{i-2}} \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\rho_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{\rho_{i+1}} \dots \quad (4.8)$$

é exata na categoria $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se,

$$\text{Ker}^F \rho_i = \text{Im}^F \rho_{i-1} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z},$$

o que equivale a

$$\text{Ker}^P \rho_i = (\text{Im}^P \rho_{i-1})^\natural \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z};$$

portanto, a sequência poderia não ser exata na categoria $\text{PreFeixes}_{X,\mathcal{C}}$.

Proposição 4.37. Seja $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre X .

- O morfismo $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é injetor em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se, $\rho_a: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{G}_a$ é injetor em $\mathcal{C}$ para todo $a \in X$.
- O morfismo $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é sobrejetor em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se, $\rho_a: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{G}_a$ é sobrejetor em $\mathcal{C}$ para todo $a \in X$.
- O morfismo $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é bijetor em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se, $\rho_a: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{G}_a$ é bijetor em $\mathcal{C}$ para todo $a \in X$.
- A sequência 4.8 é exata em $\text{Feixes}_{X,\mathcal{C}}$ se, e somente se, a sequência

$$\dots \xrightarrow{(\rho_{i-2})_a} (\mathcal{F}_{i-1})_a \xrightarrow{(\rho_{i-1})_a} (\mathcal{F}_i)_a \xrightarrow{(\rho_i)_a} (\mathcal{F}_{i+1})_a \xrightarrow{(\rho_{i+1})_a} \dots$$

é exata em $\mathcal{C}$ para todo $a \in X$.

Proposição 4.38. Considere uma sequência de feixes da forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{G} \xrightarrow{\eta} \mathcal{H}.$$

Essa sequência é exata na categoria dos feixes se, e somente se, é exata na categoria dos pré-feixes.

Corolário 4.39. Seja $\rho: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ morfismo de feixes. ρ é um isomorfismo se, e somente se, é um isomorfismo de pré-feixes.

Observação 4.40. Pelo Corolário 4.39, se um morfismo de feixes é bijetor, então ele também é bijetor entre pré-feixes e portanto é um isomorfismo de pré-feixes, pela Observação 4.17. Isso equivale a ser um isomorfismo de feixes. Resumidamente, nas categorias que estamos considerando, um isomorfismo de feixes é um morfismo bijetor.

O exemplo a seguir ilustra uma sequência que apresenta exatidão quando considerada na categoria $\text{Feixes}_{X, \mathcal{C}}$, mas que falha em ser exata quando analisada estritamente como uma sequência em $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$. Este fenômeno ocorre, em geral, porque a sobrejetividade de um morfismo de feixes não garante a sobrejetividade das aplicações induzidas em níveis de seções sobre abertos arbitrários.

Exemplo 4.41. Seja X um espaço localmente contrátil. Considere a sequência de pré-feixes sobre X

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp} \underline{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0$$

onde:

- $\mathbb{Z}$ é o feixe constante dos inteiros;
- $\underline{\mathbb{C}}$ é o feixe das funções contínuas $X \rightarrow \mathbb{C}$;
- $\underline{\mathbb{C}}^*$ é o feixe das funções contínuas $X \rightarrow \mathbb{C}^*$;
- γ é a inclusão.

Essa é uma sequência exata de feixe, pois é exata nos talos, mas não é uma sequência exata de pré feixe, pois para abertos não simplesmente conexos (em particular não são contráteis), temos que existem seções em $\underline{\mathbb{C}}^*$ que não estão na imagem de $\exp$, ou seja, $\exp$ não é sobrejetor.

De forma resumida, temos as seguintes situações para morfismos ou sequências de pré-feixes:

- injetividade $\Rightarrow_{\neq}$ injetividade nos talos;
- sobrejetividade $\Rightarrow_{\neq}$ sobrejetividade nos talos;
- bijetividade $\Rightarrow_{\neq}$ bijetividade nos talos;
- exatidão $\Rightarrow_{\neq}$ exatidão nos talos.

Enquanto que para morfismos ou sequências de feixes, temos:

- injetividade entre pré-feixes $\Leftrightarrow$ injetividade entre feixes $\Leftrightarrow$ injetividade nos talos;
- sobrejetividade entre pré-feixes $\xRightarrow{\neq}$ sobrejetividade entre feixes $\Leftrightarrow$ sobrejetividade nos talos;
- bijetividade entre pré-feixes $\Leftrightarrow$ bijetividade entre feixes $\Leftrightarrow$ bijetividade nos talos;
- exatidão entre pré-feixes $\xRightarrow{\neq}$ exatidão entre feixes $\Leftrightarrow$ exatidão nos talos.

No Capítulo 5, veremos que sequências exatas de feixes induzem sequências exatas longas em cohomologia de Čech quando o espaço é paracompacto. Aplicando esse resultado à sequência exata do Exemplo 4.41, podemos identificar o isomorfismo

$$\check{H}^k(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^{k+1}(X, \mathbb{Z}).$$

Em particular, para $k = 1$, este isomorfismo nos dará a primeira classe de Chern, classificando fibrados de linhas complexo e fornecendo um modelo geométrico para $H^2(X, \mathbb{Z})$. Para $k = 2$, o mesmo princípio nos conduzirá às gerbes e à interpretação geométrica de $H^3(X, \mathbb{Z})$.

Cohomologia de Čech

Neste capítulo, introduzimos a *cohomologia de Čech*, uma ferramenta que permite o estudo cohomológico de feixes em espaços topológicos. A ideia central consiste em extrair invariantes globais a partir de dados locais, organizados por meio de coberturas abertas e das seções de um pré-feixe ou feixe sobre suas interseções.

A construção de Čech parte de uma cobertura aberta do espaço e associa a ela um complexo de cocadeia cujos termos são formados pelas seções do feixe sobre interseções finitas dos abertos da cobertura. O diferencial de Čech codifica a compatibilidade dessas seções nas sobreposições, e a cohomologia resultante mede a obstrução à colagem global de dados locais.

Os resultados desenvolvidos neste capítulo serão fundamentais nos capítulos seguintes. Em particular, a trivialidade de certos grupos de cohomologia e os isomorfismos obtidos a partir de sequências exatas longas permitirão a descrição explícita de classes características, como a primeira classe de Chern, por meio de cociclos de Čech.

5.1 Cohomologia de Čech

Sejam $\mathcal{P}$ um pré-feixe em X e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Assuma que $\mathcal{U}$ é rotulado por um conjunto I totalmente ordenado e defina

$$U_{i_0 i_1 \dots i_p} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

O *Complexo de Čech de $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{P}$* é definido como o complexo cujo p -ésimo ($p \geq 0$) termo é o grupo abeliano

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

Assim, uma *p-cocadeia* (ou *cadeia de grau p*) α é uma coleção $\{\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p}\}$, onde cada $\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p}$ é uma seção do pré-feixe $\mathcal{P}$ sobre a interseção dos abertos $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$, ou seja

$$\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p} \in \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

Como os índices $i_0, i_1, \dots, i_p$ são tomados em ordem estritamente crescente, cada interseção $U_{i_0 i_1 \dots i_p}$ aparece apenas uma vez no complexo. Isso garante que não há repetições nas contagens.

O *diferencial de Čech* $\delta^p: \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ é definido da seguinte forma: se $\alpha = \{\alpha_{i_0 i_1 \dots i_p}\} \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{P})$, então

$$(\delta^p \alpha)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} | U_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}}},$$

onde $\hat{i}_k$ significa a omissão do k -ésimo índice.

Por exemplo, considere $p = 0$ e $\alpha = \{\alpha_i\}$. Temos que a imagem de α pelo diferencial de Čech é

$$(\delta \alpha)_{ik} = \alpha_{k | U_i \cap U_k} - \alpha_{i | U_i \cap U_k}. \quad (5.1)$$

Afirmção 3. $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ para todo $p \geq 0$.

Demonstração. Seja $\alpha = \{\alpha_{i_0 \dots i_p}\}$ um elemento de $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ e sejam $i_0 < i_1 < \dots < i_{p+2}$ índices fixos. Então, pela definição,

$$\begin{aligned} (\delta^{p+1}(\delta^p \alpha))_{i_0 \dots i_{p+2}} &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j (\delta^p \alpha)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2} | U_{i_0 \dots i_{p+2}}} \\ &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \left(\sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_l \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2} | U_{i_0 \dots i_{p+2}}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{p+2} \sum_{l < j} (-1)^{j+l} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_l \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2}} + \sum_{j=0}^{p+2} \sum_{l > j} (-1)^{j+l-1} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_l \dots i_{p+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0.$$

■

Assim, temos que $\text{Im } \delta^p \subset \text{Ker } \delta^{p+1}$, o que nos permite definir os *grupos de cohomologia de Čech*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{P}) := \frac{\text{Ker}(\delta^p)}{\text{Im}(\delta^{p-1})}.$$

Lema 5.1. Se $\mathcal{F}$ é um feixe, $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é isomorfo a $\mathcal{F}(X)$.

Demonstração. Por definição, temos

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker}(\delta^0),$$

onde

$$\delta^0: \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Seja $\alpha \in \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Pela definição da cohomologia de Čech, temos que, para todos i, k , a restrição de α_k a $U_i \cap U_k$ coincide com a restrição de α_i a $U_i \cap U_k$, ou seja,

$$\alpha_k|_{U_i \cap U_k} = \alpha_i|_{U_i \cap U_k}.$$

Pelo segundo axioma do feixe, existe uma seção global $\tilde{\alpha} \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\tilde{\alpha}|_{U_i} = \alpha_i \quad \forall i.$$

Assim, obtemos um morfismo

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(X),$$

que é sobrejetivo.

Para a injetividade, considere que, pelo primeiro axioma do feixe, se duas seções $\alpha, \beta \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ coincidem localmente, então elas coincidem globalmente. Logo, o núcleo desse morfismo é trivial, garantindo a injetividade.

Portanto, o morfismo construído é um isomorfismo. ■

Exemplo 5.2. Seja $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ uma cobertura aberta do círculo S^1 , tal que U_0, U_1, U_2 são arcos (e portanto são contráteis) e as interseções $U_i \cap U_j$ são todas não vazias para $i \neq j$, mas $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Consideramos a cohomologia de Čech de $\mathcal{U}$ com coeficientes no feixe constante $\mathbb{R}$.

Neste caso, temos:

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \text{ e } \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = 0 \text{ para } k > 1,$$

pois não há interseções triplas.

O único diferencial não trivial é

$$\delta^0: \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}),$$

dado por

$$\delta^0(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 - x_0, x_0 - x_1).$$

Assim, os grupos de cohomologia são dados por:

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\delta^0) \simeq \mathbb{R},$$

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) / \text{Im}(\delta^0) \simeq \mathbb{R}.$$

5.1.1 Independência da cobertura

A priori, os grupos de cohomologia de Čech $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ dependem da escolha de uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X . No entanto, queremos uma noção de cohomologia que dependa apenas do par $(X, \mathcal{P})$, e não da cobertura escolhida. Para isso, consideramos simultaneamente todas as coberturas de X e tomamos um limite direto.

O conjunto de todas as coberturas abertas de X pode ser organizado como um conjunto parcialmente ordenado considerando a noção de refinamento de uma cobertura de um espaço topológico.

Definição 5.3 (Refinamento). Sejam $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ duas coberturas abertas de um espaço X . Dizemos que $\mathfrak{V}$ é um *refinamento* de $\mathfrak{U}$ se existe uma função $f: J \rightarrow I$ tal que $V_j \subseteq U_{f(j)}$ para todo $j \in J$.

Na classe das coberturas abertas de X , denotamos $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ (ou, equivalentemente, $\mathfrak{V} \succ \mathfrak{U}$) se, e somente se, $\mathfrak{V}$ é um refinamento de $\mathfrak{U}$. Esta relação define uma ordem parcial. Intuitivamente, um refinamento subdivide uma cobertura em conjuntos menores, mantendo a propriedade de cobrir todo o espaço. Com essa ordem definida, o conjunto das coberturas de X é dirigido, pois dadas duas coberturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ existe uma terceira que refina ambas, como por exemplo, a cobertura formada pelas interseções $U_i \cap V_j$ (esse resultado será generalizado e demonstrado posteriormente, no Lema 6.9).

Para cada cobertura $\mathfrak{U}$ temos um grupo $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$. Se $\mathfrak{V}$ refina $\mathfrak{U}$, existe um homomorfismo natural

$$\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \longrightarrow \check{H}^k(\mathfrak{V}, \mathcal{P}),$$

obtido ao considerar cocadeias definidos em $\mathfrak{U}$ como cocadeias em $\mathfrak{V}$. Dessa forma, os grupos $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ formam um sistema indutivo indexado pelo conjunto dirigido das coberturas de X , e podemos definir

$$\check{H}^k(X, \mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

Na prática, não é necessário tomar o limite sobre todas as coberturas, mas apenas sobre um subconjunto cofinal delas. Um subconjunto de coberturas é cofinal se, dada qualquer cobertura $\mathfrak{U}$, existe uma cobertura $\mathfrak{V}$ no subconjunto que refina $\mathfrak{U}$. Resultados gerais sobre limites diretos garantem que limites tomados sobre subconjuntos cofinais coincidem com o limite tomado sobre todo o conjunto dirigido. Em particular, diferentes escolhas de famílias cofinas de coberturas produzem o mesmo limite indutivo. Assim, os grupos $\check{H}^k(X, \mathcal{P})$ estão bem definidos e dependem apenas do par $(X, \mathcal{P})$, e não da escolha de uma cobertura particular.

Observação 5.4. A independência da cobertura obtida pelo limite direto é, em certo sentido, uma questão de representação: queremos definir grupos de cohomologia que não dependam de uma escolha específica de cobertura. Entretanto, o limite direto em questão só é “bem comportado” (ou seja, coincide com a cohomologia de feixes) quando o espaço X satisfaz certas condições topológicas, como a paracompacidade.

5.1.2 Feixes Finos

Um feixe fino é um tipo especial de feixe de anéis em um espaço topológico X que tem boas propriedades para a cohomologia de Čech. O conceito surge porque a cohomologia de Čech pode ter mau comportamento quando o espaço base não é paracompacto.

Definição 5.5 (Feixe fino). Um feixe de anéis R em um espaço topológico X é dito *fino* se, para qualquer cobertura aberta localmente finita $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X , existe uma família $\{s_i\}_{i \in I}$ de seções globais de R tal que:

- (i) $\sum_{i \in I} s_i = 1$;
- (ii) para cada $i \in I$, existe um subconjunto compacto $S_i \subset U_i$ tal que $(s_i)_x = 0$ sempre que $x \notin S_i$.
Dito de outra forma, para cada $x \in X$, existe $i \in I$, tal que o suporte de s_i está contida em U_i .

A família $\{s_i\}$ é chamada de uma *partição da unidade subordinada* à cobertura $\mathfrak{U}$.

Por exemplo, o feixe de funções contínuas em um espaço topológico paracompacto é fino porque, dado qualquer cobertura aberta localmente finita, é sempre possível construir uma partição da unidade usando funções contínuas cujos suportes são adequadamente controlados. Isso se deve ao fato de que espaços paracompactos admitem partições da unidade subordinadas a qualquer cobertura aberta localmente finita.

De maneira semelhante, o feixe de funções suaves em uma variedade diferenciável também é fino. Em variedades suaves, é possível construir partições da unidade formadas por funções suaves subordinadas a uma cobertura aberta, garantindo a existência das seções exigidas pela definição de feixe fino. Essa propriedade é essencial na teoria de feixes, pois permite técnicas como a resolução de problemas locais através de extensões globais.

Por outro lado, os feixes de funções analíticas reais ou complexas não são finos. Isso ocorre porque, ao contrário das funções suaves, as funções analíticas são altamente restritivas: se uma função analítica se anula em um conjunto com um ponto de acumulação, então ela é identicamente nula em sua região de definição. Essa rigidez impede a construção de partições da unidade formadas por funções analíticas, tornando impossível satisfazer a condição de feixe fino.

Definição 5.6 (Feixe acíclico). Um feixe $\mathcal{F}$ de grupos abelianos em um espaço topológico X é dito *acíclico* se

$$\check{H}^k(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para } k > 0.$$

Proposição 5.7. Seja R um feixe fino de anéis em um espaço paracompacto X . Então, todo feixe $\mathcal{M}$ de R -módulos é acíclico.

Demonstração. Seja $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta localmente finita de X , e seja $\{\rho_i\}_{i \in I}$ uma partição da unidade de R subordinada a $\mathfrak{U}$. Para qualquer cocadeia $\alpha \in \check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, definimos o operador φ

$$(\varphi^q \alpha)_{i_0 \dots i_{q-1}} = \sum_{\substack{j \in I \\ j < i_0}} \rho_j \alpha_{ji_0 \dots i_{q-1}} - \sum_{\substack{j \in I \\ i_0 < j < i_1}} \rho_j \alpha_{i_0 ji_1 \dots i_{q-1}} + \dots$$

Para demonstrar que $\mathcal{M}$ é acíclico, verificamos que $\varphi \delta + \delta \varphi = \text{id}$.

Seja $\alpha \in \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{M})$. Por definição¹:

$$(\varphi\alpha)_{i_0 \dots i_{q-1}} = \sum_{k=0}^q (-1)^k \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots i_{q-1}} \quad (5.2)$$

$$(\delta\alpha)_{i_0 \dots i_q} = \sum_{h=0}^q (-1)^h \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_q} \quad (5.3)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (\varphi\delta\alpha)_{i_0 \dots i_q} &\stackrel{(5.2)}{=} \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j (\delta\alpha)_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} \\ &\stackrel{(5.3)}{=} \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \left(\sum_{h=0}^{k-1} (-1)^h \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} + (-1)^k \alpha_{i_0 \dots i_q} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h=k}^q (-1)^{h+1} \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots \hat{i}_h \dots i_q} \right) \\ &= \sum_{0 \leq h \leq k-1} (-1)^{k+h} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} + \alpha_{i_0 \dots i_q} \sum_{j \neq i_0, \dots, i_q} \rho_j \\ &\quad + \sum_{k \leq h \leq q} (-1)^{k+h+1} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots \hat{i}_h \dots i_q} \\ &= \underbrace{\sum_{0 \leq h \leq k-2} (-1)^{k+h} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} - \sum_{1 \leq h} \sum_{i_{h-1} < j < i_h} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{h-2} j i_h \dots i_q}}_{\gamma_1} \\ &\quad + \underbrace{\alpha_{i_0 \dots i_q} (1 - \rho_{i_0} - \dots - \rho_{i_q})}_{\gamma_2} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{h \leq q} \sum_{i_{h-1} < j < i_h} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{h-1} j i_{h+1} \dots i_q} + \sum_{k+1 \leq h \leq q} (-1)^{k+h+1} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots \hat{i}_h \dots i_q}}_{\gamma_3} \end{aligned}$$

Ademais:

$$\begin{aligned} (\delta\varphi\alpha)_{i_0 \dots i_q} &\stackrel{(5.3)}{=} \sum_{h=0}^q (-1)^h (\varphi\alpha)_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_q} \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \sum_{h=0}^q (-1)^h \left(\sum_{k=0}^{h-1} (-1)^k \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots \hat{i}_h \dots i_q} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=h+2}^{q+1} (-1)^{k+1} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} \right) \\ &= \sum_{h=0}^q (-1)^h \left(\sum_{k=0}^{h-1} (-1)^k \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{k-1} j i_k \dots \hat{i}_h \dots i_q} \right. \\ &\quad + (-1)^h \sum_{i_{h-1} < j < i_h} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{h-1} j i_{h+1} \dots i_q} + (-1)^h \rho_{i_h} \alpha_{i_0 \dots i_q} \\ &\quad \left. + (-1)^h \sum_{i_h < j < i_{h+1}} \rho_j \alpha_{i_0 \dots i_{h-1} j i_{h+1} \dots i_q} + \sum_{k=h+2}^{q+1} (-1)^{k+1} \sum_{i_{k-1} < j < i_k} \rho_j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k-1} j i_k \dots i_q} \right) \end{aligned}$$

¹Na fórmula (5.2), fica subentendido o fato que as condições $i_{-1} < j$ e $j < i_q$ são sempre verificadas.

$$\begin{aligned}
(\delta\varphi\alpha)_{i_0\cdots i_q} = & \underbrace{\sum_{k+1\leq h\leq q} (-1)^{k+h} \sum_{i_{k-1}<j<i_k} \rho_j \alpha_{i_0\cdots i_{k-1}ji_k\cdots \hat{i}_h\cdots i_q} + \sum_{h=0}^q \sum_{i_{h-1}<j<i_h} \rho_j \alpha_{i_0\cdots i_{h-1}ji_{h+1}\cdots i_q}}_{\lambda_1} \\
& + \underbrace{\alpha_{i_0\cdots i_q}(\rho_{i_0} + \cdots + \rho_{i_q})}_{\lambda_2} \\
& + \underbrace{\sum_{h':=h+1\geq 1} \sum_{i_{h'-1}<j<i_{h'}} \rho_j \alpha_{i_0\cdots i_{h'-2}ji_{h'}\cdots i_q} + \sum_{k\geq h+2} (-1)^{k+h+1} \sum_{i_{k-1}<j<i_k} \rho_j \alpha_{i_0\cdots \hat{i}_h\cdots i_{k-1}ji_k\cdots i_q}}_{\lambda_3}
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\lambda_3 \\
\gamma_3 &= -\lambda_1 \\
\gamma_2 &= \alpha_{i_0\cdots i_q} - \lambda_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\varphi\delta\alpha + \delta\varphi\alpha)_{i_0\cdots i_q} = \alpha_{i_0\cdots i_q},$$

ou mais especificamente, definido o operador

$$\varphi^q: \check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow \check{C}^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}),$$

temos

$$\delta^{q-1} \circ \varphi^q + \varphi^{q+1} \circ \delta^q = \text{id}_{\check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M})},$$

ou seja, φ^q é um *operador de homotopia* entre a identidade e o morfismo zero. A representação desses morfismos pode ser vista por meio do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{q-2}} & \check{C}^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & \check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^q} & \check{C}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots \\
& & \text{id} \downarrow & \swarrow \varphi^q & \downarrow \text{id} & \swarrow \varphi^{q+1} & \downarrow \text{id} \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{q-2}} & \check{C}^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & \check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\delta^q} & \check{C}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots
\end{array}$$

Consequentemente, se $\alpha \in \text{Ker } \delta^q$, temos

$$\delta^{q-1}(\varphi^q(\alpha)) = \alpha,$$

ou seja, $\alpha \in \text{Im } \delta^{q-1}$, o que implica que $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) = 0$ para todo $q > 0$.

Como em um espaço paracompacto as coberturas localmente finitas são cofinais na família de todas as coberturas, podemos tomar o limite direto dessas coberturas, obtendo assim $\check{H}^q(X, \mathcal{M}) = 0$ para $q > 0$. ■

5.1.3 Sequências exatas longas em cohomologia de Čech

Nessa seção será mostrado que, quando X é paracompacto, qualquer sequência exata de feixes induz uma sequência exata longa correspondente em cohomologia de Čech.

Lema 5.8. Seja X um espaço topológico qualquer e seja

$$0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

uma sequência exata de pré-feixes em X . Então existe uma sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}'') \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{P}') \rightarrow \dots \\ \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{P}'') \rightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{P}') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Demonstração. Para cada cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X , temos que a sequência exata de pré-feixes (5.4) induz uma sequência exata de complexos diferenciais de Čech

$$0 \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow 0,$$

onde $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}')$, $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ e $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$ representam os complexos diferenciais de Čech associados aos pré-feixes $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}''$, respectivamente. A exatidão segue do fato de que a sequência de pré-feixes é exata em cada aberto $U_{i_0 \dots i_k}$, logo em cada grau dos complexos de Čech.

Agora, ao calcular a cohomologia de Čech desses complexos diferenciais, obtemos uma sequência exata longa (à direita) de cohomologia de Čech para cada cobertura aberta $\mathcal{U}$

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \dots$$

Finalmente, passando ao limite direto sobre o conjunto dirigido das coberturas abertas de X , ordenado por refinamento, obtemos a sequência exata longa de cohomologia de Čech

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}'') \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{P}') \rightarrow \dots$$

■

Lema 5.9. Seja X um espaço topológico paracompacto, $\mathcal{P}$ um pré-feixe em X cujo feixe associado é o feixe nulo. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X e seja $\alpha \in \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{P})$. Existe um refinamento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\tau(\alpha) = 0$, onde

$$\tau: \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{C}^k(\mathcal{V}, \mathcal{P})$$

é o morfismo induzido por restrição.

Demonstração. Como, por hipótese, o feixe associado $\mathcal{P}^\sharp$ é o feixe nulo, toda seção de $\mathcal{P}$ é localmente nula. Em particular, para cada componente de α , existe uma cobertura aberta na qual sua restrição se anula.

Como X é paracompacto (em particular, normal), dada a cobertura $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, existe um refinamento $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para todo $i \in I$, e tal que todas as restrições das seções que compõem α se anulam sobre as interseções correspondentes de elementos de $\mathfrak{V}$. Assim, ao restringir α ao refinamento $\mathfrak{V}$, obtemos $\tau(\alpha) = 0$. ■

Lema 5.10. Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe em um espaço X , e seja $\mathcal{P}^\sharp$ o feixe associado. Existe uma sequência exata de pré-feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp \rightarrow \mathcal{Q}_2 \rightarrow 0$$

com

$$\mathcal{Q}_1^\sharp = \mathcal{Q}_2^\sharp = 0.$$

Demonstração. Definimos $\mathcal{Q}_1$ como o pré-feixe do núcleo do morfismo canônico $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp$, ou seja, para $U \in X$,

$$\mathcal{Q}_1(U) = \text{Ker}(\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}^\sharp(U))$$

Isso significa que $\mathcal{Q}_1(U)$ consiste nas seções de $\mathcal{P}$ sobre U que são localmente nulas no feixe associado. Como essas seções desaparecem ao passar para o feixe associado, temos

$$\mathcal{Q}_1^\sharp = 0.$$

Definimos $\mathcal{Q}_2$ como o pré-feixe do cokernel de ϕ , ou seja,

$$\mathcal{Q}_2(U) = \text{coker}(\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}^\sharp(U)) = \mathcal{P}^\sharp(U) / \text{Im}(\mathcal{P}(U)).$$

Isso mede a "falha" de $\mathcal{P}$ em ser sobrejetivo sobre seu feixe associado. Como qualquer seção de $\mathcal{Q}_2$ já pertence a um feixe, ao passar para germes, tudo se anula, garantindo que:

$$\mathcal{Q}_2^\sharp = 0.$$

Agora verificamos a exatidão da sequência:

- $0 \rightarrow \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{P}$ é exata porque $\mathcal{Q}_1$ é o núcleo de ϕ .
- $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\sharp$ é a aplicação canônica.
- $\mathcal{P}^\sharp \rightarrow \mathcal{Q}_2 \rightarrow 0$ é exata porque $\mathcal{Q}_2$ mede precisamente a falha de $\mathcal{P}$ em ser sobrejetivo sobre $\mathcal{P}^\sharp$.

Portanto, conseguimos construir a sequência exata desejada. ■

O resultado a seguir (Proposição 5.11) essencialmente mostra que a cohomologia de Čech de um pré-feixe é invariante sob a operação de feixe associado quando o espaço é paracompacto. Isso é importante porque, em espaços paracompactos, a passagem de um pré-feixe ao seu feixe associado não altera a cohomologia, ou seja, os grupos de cohomologia calculados a partir de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{P}^\natural$ são isomorfos.

Proposição 5.11. Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe em um espaço paracompacto X , e seja $\mathcal{P}^\natural$ o feixe associado. Para todo $k \geq 0$, o morfismo natural $\check{H}^k(X, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{P}^\natural)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Pelo Lema 5.10 existe uma sequência exata de pré-feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\natural \rightarrow \mathcal{Q}_2 \rightarrow 0$$

com

$$\mathcal{Q}_1^\natural = \mathcal{Q}_2^\natural = 0. \quad (5.5)$$

Isso dá origem a

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}_2 \rightarrow 0, \quad (5.6)$$

onde $\mathcal{T}$ é o pré-feixe quociente $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}_1}$, isto é, o pré-feixe $U \rightarrow \frac{\mathcal{P}(U)}{\mathcal{Q}_1(U)}$. Pelo Lema 5.9, o isomorfismo (5.5) implica $\mathcal{Q}_1 = \check{H}(X, \mathcal{Q}_1) = \check{H}(X, \mathcal{Q}_2) = 0$. Então, tomando as sequências exatas longas de cohomologia a partir das sequências exatas (5.6), obtemos o isomorfismo desejado. ■

O Teorema 5.12, que será apresentado logo a seguir, constitui um resultado fundamental neste trabalho. Ele será utilizado nos capítulos posteriores, e, em conjunto com o fato de que certos grupos de cohomologia de Čech são triviais, permitirá estabelecer isomorfismos de grande relevância para alguns dos resultados finais.

Teorema 5.12. Seja

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata de feixes em um espaço paracompacto X . Existe uma sequência exata longa de grupos de cohomologia de Čech

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}'') \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots \\ \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^k(X, \mathcal{F}'') \rightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos o pré-feixe quociente

$$\mathcal{P} := \mathcal{F} / \mathcal{F}'.$$

Por construção, o feixe associado satisfaz $\mathcal{P}^\sharp \simeq \mathcal{F}''$, o que nos dá uma sequência exata de pré-feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 5.4, essa sequência de pré-feixes induz uma sequência exata longa de cohomologia de Čech

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Finalmente, usando o isomorfismo

$$\check{H}^k(X, \mathcal{P}) \simeq \check{H}^k(X, \mathcal{F}'') \quad \text{para todo } k \geq 0,$$

obtem-se a sequência exata longa desejada. ■

A trivialidade de certos grupos de cohomologia e os isomorfismos obtidos a partir de sequências exatas longas permitem utilizar cociclos de Čech como uma ferramenta para apresentar a primeira classe de Chern, como será feito no próximo capítulo.

Fibrados Vetoriais

Neste capítulo, introduziremos o conceito de *fibrado vetorial*, que constitui um dos pilares fundamentais da geometria diferencial e da topologia algébrica. Intuitivamente, um fibrado vetorial sobre um espaço base X pode ser visualizado como a atribuição contínua, a cada ponto de X , de um espaço vetorial.

Embora o exemplo mais simples de tal estrutura seja o produto cartesiano $X \times V$ (o fibrado trivial), a riqueza da teoria reside também na existência de fibrados “torcidos”, que são localmente simples, mas possuem uma topologia global distinta. Iniciaremos o estudo estabelecendo as definições formais e as propriedades que permitem tratar essas estruturas tanto do ponto de vista local, por meio de trivializações e atlas, quanto do ponto de vista global, através de morfismos e seções.

6.1 Definições e propriedades fundamentais

Definição 6.1 (Fibrado vetorial). Sejam X um espaço topológico conexo e V um espaço vetorial de dimensão finita. Um *fibrado vetorial* sobre X com *fibra típica* V é definido pelos seguintes dados:

- um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi: E \rightarrow X$;
- uma estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in X$;

tais que:

- (i) para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta $U \subset X$ contendo x e um homeomorfismo

$$\phi_U: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times V$$

tal que para todo $y \in U$, $\phi_U(\pi^{-1}(y)) = \{y\} \times V$;

- (ii) para todo $y \in U$, a restrição

$$\phi_U|_{\pi^{-1}(y)}: \pi^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times V$$

é um isomorfismo linear de espaços vetoriais.

Se X não for conexo, um fibrado vetorial sobre X é definido por um fibrado vetorial sobre cada componente conexa de X .

Observação 6.2. A propriedade (ii) da Definição 6.1 implica que a aplicação

$$\phi_U|_{\pi^{-1}(y)}: \pi^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times V$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais, visto que a mesma, sendo um homeomorfismo, é bijetiva.

Definição 6.3 (Fibra, espaço total e espaço base). Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V . Para cada ponto $x \in X$, a *fibra* de E sobre x é o conjunto $\pi^{-1}(x) = \{e \in E; \pi(e) = x\}$, denotado por E_x . O espaço E é chamado de *espaço total*, e X , de *espaço base*.

A partir de agora, uma vez definido um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$ com fibra típica V , passaremos, eventualmente, a nos referir a ele simplesmente pelo espaço total E , subentendendo os demais dados associados à sua definição. Além disso, consideraremos X conexo, a menos que sinalizado o contrário.

Definição 6.4 (Carta local ou trivialização local). Sejam $U \subset X$ um aberto e $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ um homeomorfismo, tais que as condições (i) e (ii) da Definição 6.1 são satisfeitas. Uma *carta local* (ou *trivialização local*) de um fibrado $\pi: E \rightarrow X$ é o par (U, ϕ) . Se $x \in U$, diz-se também que (U, ϕ) é uma *carta local em x* .

Definição 6.5 (Atlas). Um *atlas* de um fibrado $\pi: E \rightarrow X$ é uma família $\Phi_{\mathcal{U}} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de cartas locais tal que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X .

Observação 6.6. Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. A topologia de cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$, quando considerada como subespaço topológico de E , coincide com a estrutura de espaço vetorial de dimensão finita. Isso se deve ao fato de que, conforme a condição (3) da Definição 6.1, para todo $y \in X$, existe uma trivialização local $\phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$, cuja restrição à fibra, $\phi_U|_{\pi^{-1}(y)}: E_y \rightarrow \{y\} \times V \simeq V$, é um homeomorfismo. Dessa forma, a topologia herdada de E é compatível com a estrutura vetorial de V .

Definição 6.7 (Posto de um fibrado vetorial). Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Para cada ponto $x_0 \in X$, a dimensão do espaço vetorial $\pi^{-1}(x_0)$ é chamada de *posto de E em x_0* e é denotada por $\text{rk}_{x_0} E$. Esse valor depende apenas da componente conexa de x_0 . Em particular, se X for conexo, o posto é constante e denotado simplesmente por $\text{rk } E$.

Definição 6.8 (Fibrado de linhas). Um *fibrado de linhas* é um fibrado vetorial de posto 1.

De maneira análoga à classe das coberturas abertas de X , na classe dos atlas de um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$, existe uma ordem parcial definida da seguinte forma: dadas duas famílias

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}} &= \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}, \\ \Psi_{\mathcal{V}} &= \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}, \end{aligned}$$

definimos $\Phi_{\mathfrak{U}} \prec \Psi_{\mathfrak{V}}$ se, e somente se, $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ e, denotando por $f: J \rightarrow I$ a função que verifica a condição de refinamento,

$$\psi_j = \varphi_{f(j)}|_{V_j}, \quad \text{para todo } j \in J.$$

O resultado a seguir (Lema 6.9) assegurar que dado qualquer número finito de fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, existe um refinamento comum a todos eles, de modo que podemos trabalhar com trivializações locais compatíveis aos fibrados vetoriais considerados.

Lema 6.9. Dado um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$, existe um atlas de E . Além disso, dada uma família finita de fibrados vetoriais $E_1, \dots, E_n \rightarrow X$, com atlas

$$\Phi_{\mathfrak{U}_1}^{(1)}, \dots, \Phi_{\mathfrak{U}_n}^{(n)},$$

existe um refinamento comum $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$ e atlas $\Psi_{\mathfrak{U}}^{(1)}, \dots, \Psi_{\mathfrak{U}}^{(n)}$ tais que

$$\Phi_{\mathfrak{U}_i}^{(i)} \prec \Psi_{\mathfrak{U}}^{(i)}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Dado $\pi: E \rightarrow X$, para cada ponto $x \in X$, existe uma carta local (U_x, φ_x) conforme o item (3) da Definição 6.1. A família $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in X}$ constitui, portanto, um atlas de E .

Sejam agora $E_1, \dots, E_n \rightarrow X$ fibrados vetoriais com atlas

$$\Phi_{\mathfrak{U}_j}^{(j)} = \{(U_{j,i_j}, \varphi_{j,i_j})\}_{i_j \in I_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Para cada $x \in X$ e cada $j = 1, \dots, n$, existe um índice $\tilde{i}_j(x) \in I_j$ tal que $x \in U_{j,\tilde{i}_j(x)}$. Definimos então

$$U_x := U_{1,\tilde{i}_1(x)} \cap \dots \cap U_{n,\tilde{i}_n(x)}.$$

A família $\mathfrak{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ é, por construção, um refinamento comum das coberturas $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$.

Para cada $j = 1, \dots, n$, definimos

$$\psi_{j,x} := \varphi_{j,\tilde{i}_j(x)}|_{U_x},$$

e consideramos os atlas refinados

$$\Psi_{\mathfrak{U}}^{(j)} := \{(U_x, \psi_{j,x})\}_{x \in X}.$$

Por construção, temos $\Phi_{\mathfrak{U}_j}^{(j)} \prec \Psi_{\mathfrak{U}}^{(j)}$ para cada $j = 1, \dots, n$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 6.10 (Morfismo de fibrados vetoriais). Sejam $\pi: E \rightarrow X$ e $\pi': F \rightarrow Y$ fibrados vetoriais com fibras típicas V e W , respectivamente.

- Um *morfismo de fibrados vetoriais* de E em F é um par de funções contínuas (f, g) , onde $f: E \rightarrow F$ e $g: X \rightarrow Y$ tal que:

- $\pi' \circ f = g \circ \pi$, e consequentemente, $f(E_x) \subseteq F_{g(x)}$ para todo $x \in X$;
- $f|_{E_x}: E_x \rightarrow F_{g(x)}$ é *linear* para todo $x \in X$.

Isso equivale a dizer que o diagrama a seguir comuta, sendo f linear em cada fibra:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

- No caso particular em que $X = Y$, um *morfismo de fibrados vetoriais sobre X* de E em F é um par da forma (f, id_X) , onde $f: E \rightarrow F$ é uma função contínua tal que:

- $\pi' \circ f = \pi$, e consequentemente, $f(E_x) \subseteq F_x$ para todo $x \in X$;
- $f|_{E_x}: E_x \rightarrow F_x$ é *linear* para todo $x \in X$.

Isso equivale ao seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & X. & \end{array}$$

Em ambos os casos, um *isomorfismo* é um morfismo invertível. Ou seja, é um morfismo (f, g) tal que existe um morfismo inverso (f^{-1}, g^{-1}) satisfazendo

$$\begin{aligned} (f^{-1}, g^{-1}) \circ (f, g) &= (\text{id}_E, \text{id}_X), \\ (f, g) \circ (f^{-1}, g^{-1}) &= (\text{id}_F, \text{id}_Y). \end{aligned}$$

Com essa noção de morfismo, fica definida a categoria FibVect dos fibrados vetoriais. Fixado um espaço topológico X , consideramos então a subcategoria (não cheia) dos fibrados vetoriais sobre X , denotada por FibVect_X . Associada a essa, definimos ainda a categoria Vect_X , cujos objetos são precisamente as classes de isomorfismo de fibrados vetoriais sobre X . Quando a fibra típica for fixada, denotamos por $\text{Vect}_X(V)$.

Definição 6.11 (Fibrado produto, trivial e trivialização). Sejam X um espaço topológico conexo e V um espaço vetorial.

- Chamamos de *fibrado vetorial produto com fibra V* o fibrado

$$\begin{aligned} \pi: X \times V &\rightarrow X \\ (x, v) &\mapsto x. \end{aligned}$$

- Um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$ com fibra típica V é dito *trivial* se for isomorfo sobre X ao fibrado produto $X \times V$.

Um isomorfismo desse tipo é chamado de *trivialização* de E .

Equivalentemente, uma *trivialização* de E é uma aplicação contínua

$$f: E \rightarrow X \times V$$

tal que:

- $\pi = \text{proj}_X \circ f$ (onde proj_X é a projeção sobre X);
- para todo $x \in X$, a restrição $f|_{E_x}: E_x \rightarrow \{x\} \times V$ é um isomorfismo linear.

Observação 6.12. O homeomorfismo φ_U mencionado no item (3) da Definição 6.1 é um isomorfismo, sobre o aberto $U \subset X$, entre a restrição $E|_U$ e o fibrado produto correspondente. Assim, por definição, um fibrado vetorial é *localmente trivial*, ou seja, localmente isomorfo a um produto.

Exemplo 6.13. Um exemplo de fibrado de linhas real trivial sobre S^1 é o cilindro

$$E = S^1 \times \mathbb{R},$$

com a projeção

$$\begin{aligned} \pi: S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ (x, t) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Aqui, para cada $x \in S^1$, a fibra é

$$\pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R},$$

e o fibrado é globalmente um produto, o que significa que não há torção nenhuma, ao contrário do caso da fita de Möbius.

Exemplo 6.14. Um exemplo de fibrado de linhas real não trivial sobre S^1 é a faixa de Möbius. Ele pode ser definido como o quociente

$$E = ([0, 1] \times \mathbb{R}) / \sim,$$

onde $(0, t) \sim (1, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, e a projeção

$$\begin{aligned} \pi: E &\rightarrow S^1 \\ ([x, t]) &\mapsto e^{2\pi i x}. \end{aligned}$$

Definição 6.15 (Restrição de um fibrado). Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Seja $Y \subset X$ um subespaço topológico. A *restrição* de E a Y , denotada por $E|_Y$, é o fibrado

$$\pi|_{\pi^{-1}(Y)}: \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y,$$

obtido por restrição do domínio e contradomínio de π .

A noção de subfibrado vetorial formaliza a ideia de escolher, em cada fibra de um fibrado vetorial, um subespaço vetorial que varie de modo compatível com a estrutura de fibrado.

Definição 6.16 (Subfibrado vetorial). Sejam $\pi: E \rightarrow X$ e $\pi': F \rightarrow X$ dois fibrados vetoriais sobre X . Dizemos que F é um *subfibrado vetorial* de E se existe um morfismo

$$f: F \rightarrow E,$$

tal que f é injetor. Equivalentemente, temos que cada restrição $f|_{F_x}: F_x \rightarrow E_x$ é injetiva.

Isso significa que, ao restringirmos um fibrado a um subconjunto $Y \subset X$ (onde X é o espaço base), estamos apenas considerando as fibras sobre os pontos de Y . Por outro lado, ao tratarmos de um subfibrado, estamos restringindo cada fibra a um subespaço vetorial.

Definição 6.17 (Fibrado produto). Seja (f, g) uma par de funções contínuas onde $f: X \rightarrow Z$ e $g: Y \rightarrow Z$. Definimos o *fibrado produto* entre X e Y como

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y; f(x) = g(y)\}.$$

Notação 9. O produto fibrado não depende apenas de Z , mas também das funções f e g . Assim, quando necessário, escreveremos explicitamente $X \times_Z^{f,g} Y$.

A seguir, definiremos fibrado pull-back. Esse fibrado consiste em uma construção que permite “transportar” um fibrado ao longo de uma aplicação entre espaços, produzindo um novo fibrado cujo espaço base muda, mas cujas fibras são herdadas do fibrado original.

Definição 6.18 (Fibrado pull-back). Seja $f: Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua, e seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V . O *fibrado pull-back* de E ao longo de f é o fibrado $\pi': f^*E \rightarrow Y$, definido por

$$f^*E := E \times_X^{\pi, f} Y := \{(a, y) \in E \times Y \mid \pi(a) = f(y)\},$$

e $\pi'(a, y) := y$.

Verificaremos que f^*E é um fibrado vetorial com a mesma fibra típica V . De fato, para todo $y \in Y$, a fibra $(f^*E)_y$ é canonicamente isomorfa a $E_{f(y)}$, pois

$$(f^*E)_y \simeq E_{f(y)} \times \{y\} \simeq E_{f(y)}.$$

Fixando $y \in Y$, seja (U, φ) uma carta local de E em $f(y)$. Como f é contínua, $U' := f^{-1}(U) \subset Y$ é aberto. Definimos uma carta local (U', φ') de f^*E por

$$\varphi': (\pi')^{-1}(U') \rightarrow U' \times V,$$

da seguinte forma: seja $a_{f(z)} \in E_{f(z)} \simeq (f^*E)_z$. Seja $\varphi(a_{f(z)}) = (f(z), v)$. Então

$$\varphi'(a_{f(z)}, z) := (z, v).$$

Equivalentemente,

$$\varphi'(a) = (\pi'(a), \pi_V \circ \varphi(a)),$$

onde $\pi_V: U \times V \rightarrow V$ é a projeção de $U \times V$ sobre V .

Observação 6.19. Existe um morfismo natural de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \tilde{f}: f^*E &\rightarrow E \\ (a, y) &\mapsto a \end{aligned}$$

que cobre f . Ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi'} & Y \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{\pi} & X. \end{array}$$

O pull-back ao longo de f define um funtor

$$f^*: \text{FibVect}_X \rightarrow \text{FibVect}_Y.$$

que atua da seguinte forma:

- Sobre objetos: dado um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$ com fibra típica V , $f^*(\pi) := \pi'$, onde $\pi': f^*E \rightarrow Y$ é o fibrado pull-back de E através de f .
- Sobre morfismos: dado um morfismo de fibrados vetoriais $\varphi: E \rightarrow F$ sobre X , o pull-back $f^*\varphi: f^*E \rightarrow f^*F$ é definido por

$$f^*\varphi(a, y) := (\varphi(a), y).$$

Esse é um morfismo de fibrados vetoriais sobre Y que cobre a identidade de Y .

Observação 6.20. Dizer que um morfismo de fibrados vetoriais $f^*\varphi: f^*E \rightarrow f^*F$ cobre a identidade de Y significa que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f^*\varphi} & f^*F \\ \pi'_{f^*E} \downarrow & & \downarrow \pi'_{f^*F} \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Isto é, temos

$$\pi'_{f^*F} \circ f^* \varphi = \pi'_{f^*E}.$$

Como $f^* \varphi(a, y) = (\varphi(a), y)$ e $\pi'_{f^*F}(\varphi(a), y) = y$, concluímos que

$$\pi'_{f^*F} \circ f^* \varphi(a, y) = y = \pi'_{f^*E}(a, y),$$

para todo $(a, y) \in f^*E$. Assim, o morfismo $f^* \varphi$ preserva a base Y .

6.2 Funções e seções de transição

Vimos na seção anterior que um fibrado vetorial é, por definição, localmente trivial. Isso significa que, embora o fibrado como um todo possa ter uma estrutura topológica complexa, ele pode ser decomposto em pedaços menores que se comportam como produtos cartesianos simples. Surge, então, uma questão natural: como essas trivializações locais se relacionam nas regiões onde seus domínios se sobrepõem?

Nesta seção, estudaremos as *funções de transição*, que são aplicações que descrevem precisamente essa mudança de coordenadas entre duas cartas locais. Essas funções não apenas garantem a consistência da estrutura de espaço vetorial ao longo de todo o fibrado, mas carregam em si toda a informação necessária para reconstruir o fibrado e determinar sua topologia global. Complementarmente, exploraremos o conceito de *seções*, que formalizam a ideia de escolher um vetor em cada fibra de maneira contínua.

6.2.1 Seções

Nesta seção, introduziremos a noção de seção de um fibrado vetorial. Intuitivamente, uma seção pode ser vista como uma escolha contínua de um vetor em cada fibra do fibrado.

Definição 6.21 (Seção global). Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Uma *seção global* (ou simplesmente *seção*) de E é uma função contínua $s: X \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_X$.

Definição 6.22 (Seção local). Seja $U \subset X$ um aberto. Uma *seção local* de E é uma função contínua $s: U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_U$. Caso $x \in U$, s é dita *seção local em x* .

Notação 10. O conjunto das seções de E é denotado por $\Gamma(E)$, enquanto o conjunto das seções locais de E definidas sobre um aberto $U \subset X$ é denotado por $\Gamma(E|_U)$, onde $E|_U = \pi^{-1}(U)$.

Lema 6.23. Sejam $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V e (U, φ) uma carta local de E . A carta φ induz uma bijeção entre $\Gamma(E|_U)$ e $C^0(U, V)$.

Demonstração. Sejam $s \in \Gamma(E|_U)$ e $x \in U$. Temos que $\varphi(s(x)) = (x, v(x))$, onde $v(x) \in V$, e portanto fica definida a função $v: U \rightarrow V$, a qual é contínua pois resulta da composição da função contínua

$$\varphi \circ s: U \rightarrow U \times V$$

com a projeção (também contínua)

$$\text{proj}_V: U \times V \rightarrow V.$$

Reciprocamente, dada uma função contínua $v: U \rightarrow V$, podemos definir uma função

$$\begin{aligned} s: U &\rightarrow E \\ x &\mapsto s(x) := \varphi^{-1}(x, v(x)), \end{aligned}$$

cuja continuidade decorre da continuidade de v e φ^{-1} . Além disso,

$$\pi(s(x)) = \pi(\varphi^{-1}(x, v(x))) = x,$$

de modo que s é uma seção local do fibrado E sobre U .

Portanto, concluímos que há uma bijeção entre $\Gamma(E|_U)$ e $C^0(U, V)$. ■

Definição 6.24 (Push-forward de seções). Sejam $\pi: E \rightarrow X$ e $\pi': F \rightarrow Y$ fibrados vetoriais e seja $f: E \rightarrow F$ um morfismo de fibrados que cobre $g: X \rightarrow Y$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ F & \xrightarrow{\pi'} & Y \end{array}$$

é comutativo; equivalentemente $\pi' \circ f = g \circ \pi$. Dado um aberto $U \subset Y$, o morfismo f induz um morfismo de $C^\infty(U)$ -módulos

$$\begin{aligned} f_*: \Gamma(E|_{g^{-1}(U)}) &\longrightarrow \Gamma(F|_U) \\ s &\longmapsto f \circ s \circ g^{-1}, \end{aligned}$$

o qual é chamado de *push-forward de seções*.

Em particular, se f for um morfismo sobre X (isto é, $g = \text{id}_X$), obtemos um morfismo

$$f_*: \Gamma(E|_U) \rightarrow \Gamma(F|_U).$$

Se f for um isomorfismo de fibrados, então f_* é também um isomorfismo, e denotamos seu inverso por

$$f^* := (f^{-1})_*.$$

O Lema 6.23 é um caso particular dessa construção, aplicado ao isomorfismo local

$$\varphi: E|_U \rightarrow U \times V,$$

pois, via a identificação $\Gamma(E|_U) \simeq C^0(U, V)$, o push-forward induzido por φ coincide com a aplicação que envia uma seção $s \in \Gamma(E|_U)$ na função contínua $v \in C^0(U, V)$ dada por $\varphi \circ s(x) = (x, v(x))$.

Todo fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow X$ admite uma seção global nula, dada por

$$\begin{aligned} s_0: X &\rightarrow E \\ x &\mapsto 0_x, \end{aligned}$$

onde 0_x denota o vetor nulo na fibra E_x . Além disso, se $x \in X$ satisfaz $\text{rk}_x E > 0$, então podemos construir uma seção local de E em uma vizinhança de x que seja não nula em nenhum ponto. Com efeito, tomando uma carta local (U, φ) de E ao redor de x , com $\varphi: E|_U \rightarrow U \times V$, escolhemos um vetor $v \in V$ com $v \neq 0$ e definimos, para qualquer $y \in U$,

$$s(y) := \varphi^{-1}(y, v).$$

Trata-se de uma seção local de E sobre U , que não se anula em nenhum ponto. Em termos do Lema 6.23, s é exatamente a seção associada à função constante $v: U \rightarrow V$. A partir dessa observação, obtém-se o seguinte lema.

Lema 6.25. Sejam X um espaço topológico normal e $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Então para cada ponto $x \in X$ e cada vetor $a \in E_x$ existe uma seção global $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) = a$. Em particular, se o posto do fibrado em x é positivo (isto é, $\text{rk}_x E > 0$), então existe uma seção global $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) \neq 0$ (todavia, pode acontecer que qualquer seção global seja nula pelo menos em um ponto de X).

Demonstração. Seja $x \in X$ e seja $a \in E_x$. Como $\pi: E \rightarrow X$ é um fibrado vetorial, existe um aberto $U \subseteq X$ contendo x e um homeomorfismo de trivialização

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$$

tal que $\pi = \text{proj}_U \circ \varphi$. Pelo fato de φ ser uma trivialização, existe um vetor $v \in V$ tal que $\varphi(a) = (x, v)$.

Definimos uma seção local $s \in \Gamma(E|_U)$ por

$$s(y) = \varphi^{-1}(y, v),$$

para todo $y \in U$. Essa é uma seção contínua (pois φ é contínua) em U , e satisfaz $s(x) = a$.

Como X é normal, existe uma função de Urysohn $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que o suporte de ρ está contido em U , ou seja, existe uma vizinhança U' de x tal que $\bar{U}' \subset U$ e $f(X \setminus U') = \{0\}$ e $f(x) = 1$.

Definimos então a seção global $t \in \Gamma(E)$ por

$$t(y) = \begin{cases} f(y) \cdot s(y), & \text{se } y \in U', \\ 0_y, & \text{se } y \in X \setminus U', \end{cases}$$

onde 0_y denota o vetor nulo da fibra E_y .

A continuidade de t decorre do fato de que s e f são contínuas em U' , e que fora de U' temos $t = 0$, com transição suave garantida pela definição de suporte compacto de f . Assim, $s \in \Gamma(E)$ é uma seção global tal que $t(x) = s(x) = a$.

Em particular, se $\text{rk}_x E > 0$, então existe algum $a \in E_x$ tal que $a \neq 0$. Pela construção acima, existe $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) = a \neq 0$. ■

O Teorema a seguir (Teorema 6.26) é um resultado de topologia geral que garante a possibilidade de estender funções contínuas definidas em subconjuntos fechados de um espaço normal para todo o espaço sem perder continuidade. Ele será utilizado na demonstração do Lema 6.27.

Teorema 6.26 (Teorema de Extensão de Tietze). Sejam X um espaço normal e $Y \subset X$ um subconjunto fechado. Então qualquer função contínua $f: Y \rightarrow [a, b]$, onde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, admite uma extensão contínua $F: X \rightarrow [a, b]$. Além disso, qualquer função contínua $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser estendida a uma função contínua $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida em todo X .

Demonstração. Ver [7]. ■

Lema 6.27. Sejam X um espaço paracompacto, $Y \subset X$ um subconjunto fechado e $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra V . Nessas condições, se $s \in \Gamma(E|_Y)$, então é possível estender s a uma seção $S \in \Gamma(E)$.

Demonstração. Seja $x \in X$. Escolhemos uma carta local (U_x, φ_x) de E em torno de x . Como X é paracompacto, é normal, e portanto, regular. Assim, podemos tomar uma carta local refinada $(U'_x, \varphi_x|_{U'_x})$ tal que

$$\overline{U'_x} \subset U_x.$$

Se $U'_x \cap Y \neq \emptyset$, pelo Lema 6.23 a seção $s|_{U'_x \cap Y}$ corresponde a uma função contínua

$$f_x: \overline{U'_x} \cap Y \rightarrow V,$$

onde $V \simeq \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$, após fixar uma base da fibra.

Como $\overline{U'_x}$ é fechado e X é paracompacto (logo normal), pelo Teorema de Extensão de Tietze (Teorema 6.26) podemos estender f_x a uma função contínua

$$F_x: X \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{ou} \quad F_x: X \rightarrow \mathbb{C}^m$$

a qual define uma seção local $S_x \in \Gamma(E|_{U'_x})$ satisfazendo

$$S_x|_{U'_x \cap Y} = s|_{U'_x \cap Y}.$$

Se $U'_x \cap Y = \emptyset$, definimos simplesmente $F_x = 0$.

Como X é normal, existe uma partição da unidade $\{\phi_x\}_{x \in X}$ subordinada à cobertura $\mathcal{U}' = \{U'_x\}_{x \in X}$. Definimos então uma seção global

$$S = \sum_{x \in X} \phi_x S_x \in \Gamma(E).$$

Por construção, temos

$$S|_Y = \left(\sum_{x \in X} \phi_x S_x \right) \Big|_Y = \left(\sum_{x \in X} \phi_x \right) s = s.$$

Portanto, s pode ser estendida a uma seção global S . ■

Podemos observar que o Lema 6.25 é um caso particular do Lema 6.27. Basta tomar $Y = \{x\}$, considerado com a topologia do subespaço, e definir $s: Y \rightarrow E|_Y$ pela condição $s(x) = a$, para um vetor fixado $a \in E_x$. Pelo Lema 6.27, essa seção local s se estende a uma seção global $S \in \Gamma(E)$ com $S(x) = a$, exatamente como enunciado no Lema 6.25. Note, porém, que no Lema 6.25 é suficiente supor que X seja normal.

O próximo lema formaliza a ideia de que a independência linear de uma família de seções é uma condição aberta. Em outras palavras, se em um ponto $x \in U$ as seções $s_1, \dots, s_k$ são linearmente independentes na fibra E_x , então elas continuam independentes em toda uma vizinhança aberta de x .

Lema 6.28. Sejam $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V , $U \subset X$ um aberto e $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E|_U)$ seções locais. Definimos

$$A := \{x \in U \mid \{s_1(x), \dots, s_k(x)\} \text{ é uma família linearmente independente em } E_x\}.$$

Então A é aberto em U .

Demonstração. Seja $x \in A$ e (U', φ) uma carta local de E em x , com $U' \subset U$. Aplicando a carta φ e escolhendo uma base de V , identificamos $E|_{U'}$ com $U' \times \mathbb{R}^n$ (ou $U' \times \mathbb{C}^n$). Assim, cada seção s_i se escreve como

$$s_i(y) = (y, v_i(y)) \quad \text{para todo } y \in U',$$

com $v_i: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) funções contínuas.

A família $\{v_1(y), \dots, v_k(y)\}$ é linearmente independente se, e somente se, a matriz

$$M_y = [v_1(y) \ \cdots \ v_k(y)] \in M(n, k)$$

tem posto k .

O conjunto das matrizes de posto k é aberto em $M(n, k)$, pois existem índices I, J tais que a submatriz $M_{I,J}$ é quadrada $k \times k$ e tem determinante não nulo. Como o determinante é contínuo, existe uma vizinhança de M_y em $M(n, k)$ na qual $M_{I,J}$ continua invertível, logo todas as matrizes nesse aberto têm posto k .

A aplicação

$$\begin{aligned}\Phi: U' &\rightarrow M(n, k) \\ y &\mapsto \Phi(y) := [v_1(y) \cdots v_k(y)]\end{aligned}$$

é contínua, pois cada v_i é contínuo. Assim, Φ^{-1} da vizinhança aberta de M_y é uma vizinhança aberta de x em U' e consequentemente em U . Com isso, temos que para qualquer $x \in A$, existe uma vizinhança aberta de x contida em $U \subset A$. Portanto, A é aberto. ■

O lema a seguir dá um critério simples para saber quando um fibrado vetorial é trivial: ele mostra que um fibrado de posto n sobre um espaço conexo é trivial exatamente quando podemos encontrar n seções globais que, em cada ponto, formam uma família linearmente independente na fibra. Além disso, ao fixarmos uma base da fibra típica V , toda trivialização de E determina uma família de seções globais com essa propriedade, e reciprocamente, toda tal família de seções dá origem a uma trivialização de E .

Lema 6.29. Seja X um espaço topológico conexo e seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto n , com fibra típica V . Então E é trivial se, e somente se, existem seções globais $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ tais que, para todo $x \in X$, os vetores

$$s_1(x), \dots, s_n(x) \in E_x$$

são linearmente independentes (em particular, são todos não nulos). Além disso, fixando uma base de V , obtemos uma bijeção canônica entre o conjunto das trivializações de E e o conjunto das famílias de seções $(s_1, \dots, s_n)$ que satisfazem a propriedade acima.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha inicialmente que o fibrado E é trivial, ou seja, existe um isomorfismo de fibrados

$$\varphi: E \rightarrow X \times V.$$

Fixando uma base $(a_1, \dots, a_n)$ de V , definimos, para cada $i = 1, \dots, n$, uma seção global $s_i \in \Gamma(E)$ por

$$s_i(x) := \varphi^{-1}(x, a_i).$$

Como φ é contínua e linear nas fibras, cada s_i é uma seção contínua, e para todo $x \in X$ temos

$$\varphi(s_i(x)) = (x, a_i),$$

de modo que os vetores $s_1(x), \dots, s_n(x)$ são a imagem inversa de uma base de V e, portanto, são linearmente independentes em E_x .

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que existem seções globais $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ tais que, para todo $x \in X$, os vetores $s_1(x), \dots, s_n(x) \in E_x$ são linearmente independentes. Fixando uma base $(a_1, \dots, a_n)$ de V , definimos a aplicação

$$\varphi: E \rightarrow X \times V$$

por

$$\varphi(\lambda_1 s_1(x) + \cdots + \lambda_n s_n(x)) := (x, \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n).$$

Por fim, a correspondência construída acima define uma bijeção entre o conjunto das trivializações de E e o conjunto das famílias de seções $(s_1, \dots, s_n)$ que são linearmente independentes em cada fibra, uma vez que os dois procedimentos são inversos entre si quando a base $(a_1, \dots, a_n)$ de V é fixada. ■

Lema 6.30. Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V , e seja $F \subset E$ um subconjunto tal que, para cada $x \in X$, $F_x := F \cap E_x$ é um subespaço vetorial de E_x . A aplicação $\pi|_F: F \rightarrow X$, munida da topologia induzida e F_x da estrutura de espaço vetorial induzida, é um subfibrado vetorial de E se, e somente se, para todo $x \in X$, existem uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x e r seções locais $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E|_U)$, pontualmente independentes, tais que $\{s_1(y), \dots, s_r(y)\}$ é uma base de F_y para todo $y \in U$. Em particular, isso implica que a dimensão de F_x é localmente constante em x .

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que F seja um subfibrado vetorial de E . Então, para cada $x \in X$, existe uma carta local de F em torno de x . Essa carta é equivalente à escolha de r seções locais $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(F|_U)$, pontualmente independentes, que formam uma base de cada fibra F_y , $y \in U$. Portanto a condição é satisfeita.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U e r seções $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E|_U)$ tais que $\{s_1(y), \dots, s_r(y)\}$ é base de F_y para todo $y \in U$. Definimos a aplicação

$$\varphi: F|_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^r a_i s_i(y)\right) = (y, (a_1, \dots, a_r)).$$

Por hipótese, a escrita

$$v = \sum_{i=1}^r a_i s_i(y)$$

é única para cada $v \in F_y$, logo φ é bijetora e linear em cada fibra. As coordenadas $(a_1, \dots, a_r)$ dependem continuamente de v porque as seções s_i são contínuas: escrevendo uma trivialização local de $E|_U \simeq U \times V$ (Lema 6.23), as seções s_i correspondem a funções contínuas $U \rightarrow V$ e, ao expressar essas funções na base de V , obtém-se matrizes cujas entradas são funções contínuas em y ; a recuperação dos coeficientes a_i é então dada por uma aplicação linear (inversa de uma matriz) cujas entradas variam continuamente em y por ser inversa de uma matriz contínua com determinante não nulo. Dessa forma φ é contínua e sua inversa

$$\varphi^{-1}(y, (a_1, \dots, a_r)) = \sum_{i=1}^r a_i s_i(y)$$

também é contínua, portanto φ é um homeomorfismo entre $F|_U$ e $U \times \mathbb{R}^r$.

Assim, $F|_U$ é trivial de posto r , e as trivializações locais obtidas cobrem X , provando que F é um subfibrado vetorial de posto r . A afirmação sobre a dimensão localmente constante segue imediatamente. ■

Proposição 6.31. Sejam $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra típica V e $F \subset E$ um subfibrado vetorial com fibra típica W . Supondo, a menos de isomorfismo, que $W \subset V$, podemos escolher um atlas de E tal que as restrições a F das cartas formam um atlas de F .

Demonstração. Para cada $x \in X$, seja (U, φ) uma carta local de F em x . A carta equivale à escolha de r seções locais

$$s_1, \dots, s_r: U \rightarrow F$$

pontualmente independentes, sendo $r = \text{rk}_x F$. No ponto x , completamos a base de F_x a uma base de E_x escolhendo vetores $a_{r+1}, \dots, a_m \in E_x$ tais que $s_1(x), \dots, s_r(x), a_{r+1}, \dots, a_m$ forma uma base de E_x (aqui $m = \text{rk}_x E$).

Como E é um fibrado vetorial, existe uma carta (U', ψ) de E no ponto x , onde $U' \subset U$ é um aberto contendo x e

$$\psi: E|_{U'} \longrightarrow U' \times V$$

é compatível com a projeção, tal que, escolhendo convenientemente ψ , podemos supor $\psi(a_i) = (x, v_i)$, para $i = r+1, \dots, m$, para certos vetores fixos $v_{r+1}, \dots, v_m \in V$.

Definimos seções $s_{r+1}, \dots, s_m \in \Gamma(E|_{U'})$ por

$$s_i(y) := \psi^{-1}(y, v_i), \quad i = r+1, \dots, m, y \in U'.$$

Pela trivialização ψ , podemos escrever também

$$\psi(s_j(y)) = (y, v_j(y)), \quad j = 1, \dots, r, y \in U',$$

para certas funções contínuas $v_1, \dots, v_r: U' \rightarrow V$. No ponto $y = x$, temos

$$v_1(x), \dots, v_r(x), v_{r+1}, \dots, v_m$$

formando uma base de V , porque são justamente as coordenadas em V da base de E_x escolhida acima.

Pelo Lema 6.28, a propriedade de ser família linearmente independente é aberta, ou seja, como

$$\{v_1(x), \dots, v_r(x), v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

é base em V , existe uma vizinhança $U'' \subset U'$ de x tal que, para todo $y \in U''$,

$$\{v_1(y), \dots, v_r(y), v_{r+1}, \dots, v_m\}$$

continua sendo base de V . Isso equivale a dizer que, para todo $y \in U''$, $\{s_1(y), \dots, s_m(y)\}$ é uma base de E_y , e, em particular, $\{s_1(y), \dots, s_r(y)\}$ é uma base de F_y .

Assim, a aplicação

$$\Psi: E|_{U''} \longrightarrow U'' \times V, \quad \Psi\left(\sum_{i=1}^m a_i s_i(y)\right) = (y, (a_1, \dots, a_m))$$

é uma trivialização local de E sobre U'' , e sua restrição a F ,

$$\Psi|_{F|_{U''}} : F|_{U''} \longrightarrow U'' \times W,$$

é uma trivialização local de F . Repetindo esse procedimento para cada ponto $x \in X$, obtemos um atlas de E tal que as restrições das cartas a F formam um atlas de F . ■

Corolário 6.32. Sejam $\pi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial com fibra V e $F \subset E$ um subconjunto tal que $F_x \subset E_x$ é um subespaço vetorial para todo $x \in X$. Então $\pi|_F : F \rightarrow X$, sendo F dotado da topologia induzida e F_x da estrutura de espaço vetorial induzida, é um subfibrado vetorial de E se, e somente se, existir um atlas de E tal que as restrições a F das cartas formam um atlas de um fibrado vetorial (com fibra típica $W \subset V$ a menos de isomorfismo). Em particular, isso implica que a dimensão de F_x é localmente constante em x .

Demonstração. ($\Rightarrow$) É consequência imediata da Proposição 6.31.

($\Leftarrow$) Por hipótese existe um atlas de F , portanto F é um fibrado vetorial. É claro que o mergulho $i : F \hookrightarrow E$ é um morfismo injetor de fibrados vetoriais, portanto F é um subfibrado vetorial de E ■

6.2.2 Funções de transição

Assumiremos a partir de agora que X é conexo. Para um espaço arbitrário, podemos aplicar todos os argumentos que apresentaremos separadamente em cada componente conexa. Além disso, sempre que falarmos em isomorfismos de fibrados subentende-se que se tratam de isomorfismos sobre X .

Nosso objetivo será formalizar a noção de funções de transição, entender as condições de compatibilidade que elas devem satisfazer e exemplificar como essas funções permitem classificar e comparar fibrados vetoriais sobre X .

Considere um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow X$ de posto n , com um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Fixemos dois índices $i, j \in I$ tais que a interseção $U_{ij} = U_i \cap U_j$ seja não vazia. As trivializações locais

$$\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V \quad \text{e} \quad \varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times V$$

induzem uma aplicação

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_{ij} \times V \longrightarrow U_{ij} \times V.$$

Como φ_{ij} é um isomorfismo de fibrados triviais sobre a base U_{ij} , ele não altera a componente na base; em outras palavras, para cada $x \in U_{ij}$ fica definido um automorfismo linear de V , denotado por $(\tilde{\varphi}_{ij})_x$, tal que

$$\varphi_{ij}(x, v) = (x, (\tilde{\varphi}_{ij})_x(v)).$$

Dessa forma, dado um ponto $p \in E_x$, tal que $\varphi(p) = (x, v)$, a represeção correspondente em U_j será $\varphi_j(p) = (x, \tilde{\varphi}_{ij}(v))$.

Definição 6.33 (Função de transição). Sejam $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial munido com o atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. Para $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapa

$$\tilde{\varphi}_{ij}: U_{ij} \rightarrow \text{GL}(V) \quad (6.1)$$

$$x \mapsto (\tilde{\varphi}_{ij})_x \quad (6.2)$$

é chamado de *função de transição* associada às trivializações (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) .

6.3 Cohomologia de Čech e fibrados de linhas

Nessa seção considere X um espaço topológico paracompacto e $\mathbb{C}$ o espaço vetorial de dimensão 1 sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os resultados a seguir também valem no caso real, quando a fibra típica é o espaço vetorial $\mathbb{R}$ de dimensão 1 sobre $\mathbb{R}$.

Seja X um espaço conexo, e seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X fixada.

Considere o feixe de grupos abelianos $\underline{\mathbb{C}}^*$, onde, para cada aberto $U \subset X$, temos

$$\underline{\mathbb{C}}^*(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ contínuas}\}.$$

Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado de linhas complexo, ou seja, para cada $x \in X$, a fibra satisfaz $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}$. Suponha fixado um atlas de trivializações locais $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, com

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}.$$

Em cada interseção $U_i \cap U_j$, as trivializações são relacionadas por uma função de transição

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{C} \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C},$$

a qual é da forma

$$\varphi_{ij}(x, v) = (x, \tilde{\varphi}_{ij}(x) \cdot v),$$

para uma função contínua $\tilde{\varphi}_{ij}: U_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^*$, ou seja, $\tilde{\varphi}_{ij} \in \underline{\mathbb{C}}^*(U_{ij})$.

Podemos interpretar a função $\tilde{\varphi}_{ij}$ como a mudança de uma base local para outra. Por exemplo, se s_i é uma seção local trivial sobre U_i , então $s_j := \tilde{\varphi}_{ij} \cdot s_i$ define a mesma seção em $U_i \cap U_j$, mas expressa na base correspondente a φ_j . Assim, temos

$$s_j(x) = \tilde{\varphi}_{ij}(x) \cdot s_i(x),$$

o que mostra explicitamente como $\tilde{\varphi}_{ij}$ relaciona as bases locais em U_i e U_j .

Em interseções triplas $U_i \cap U_j \cap U_k := U_{ijk}$, consideramos a composição

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_k^{-1} \circ \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} = \text{id}. \quad (6.3)$$

Note que, como

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki}(x, v) &= (x, \tilde{\varphi}_{ij}(x) \cdot \tilde{\varphi}_{jk}(x) \cdot \tilde{\varphi}_{ki}(x) \cdot v) \\ &\stackrel{(6.3)}{=} (x, v), \end{aligned}$$

temos

$$\tilde{\varphi}_{ij}(x) \cdot \tilde{\varphi}_{jk}(x) \cdot \tilde{\varphi}_{ki}(x) = 1, \quad \forall x \in U_{ijk}. \quad (6.4)$$

Além disso, como $\varphi_{ki} = \varphi_{ik}^{-1}$, temos que $\tilde{\varphi}_{ki} = \tilde{\varphi}_{ik}^{-1}$ e como $\mathbb{C}^*$ é um grupo abeliano, a equação (6.4) coincide com a imagem de $\tilde{\varphi}_{ij}$ pelo operador diferencial de Čech

$$\delta^1: \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*) \rightarrow \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*).$$

De fato,

$$\begin{aligned} (\delta^1 \tilde{\varphi})_{ijk} &= \tilde{\varphi}_{jk} \cdot \tilde{\varphi}_{ik}^{-1} \cdot \tilde{\varphi}_{ij} \\ &= \tilde{\varphi}_{ij} \cdot \tilde{\varphi}_{jk} \cdot \tilde{\varphi}_{ki} \\ &\stackrel{(6.4)}{=} 1, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\varphi}_{ij}$, $\tilde{\varphi}_{jk}$, $\tilde{\varphi}_{ki}$ e $\tilde{\varphi}_{ik}^{-1}$ são restritas a U_{ijk} .

Portanto, o conjunto de funções de transição $\{\tilde{\varphi}_{ij}\}_{i,j \in I}$ satisfaz a condição de cociclo de grau 1 de Čech, isto é,

$$(\tilde{\varphi}_{ij}) \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*).$$

Isso prova a seguinte Proposição:

Proposição 6.34. Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de linhas, onde X é um espaço paracompacto e conexo. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X . As funções de transição φ_{ij} induzem um cociclo $\check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*) \subset \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ na Cohomologia de Čech.

Teorema 6.35. Seja $\pi: E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de linhas com fibra típica $\mathbb{C}$. E é trivial, se, e somente se, $\varphi_{ij} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*)$ é um cobordo.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que E seja um fibrado trivial, ou seja, existe um homeomorfismo $\varphi: E \xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{C}$. Do Lema 6.29 temos que existe uma seção global $s: X \rightarrow E$ nunca nula, de modo que podemos definir φ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi: E &\xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{C} \\ \lambda \cdot s(x) &\mapsto (x, \lambda) \end{aligned}$$

Temos que se $x \in U_{ij}$, então podemos escrever

$$s_i(x) = \varphi_{ij}(x)s_j(x). \quad (6.5)$$

Além disso, existem funções contínuas $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ e $\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ tais que

$$s_i(x) = \varphi_i(x)s(x) \quad \text{e} \quad (6.6)$$

$$s_j(x) = \varphi_j(x)s(x) \quad (6.7)$$

Substituindo (6.6) e (6.7) em (6.5), temos

$$\begin{aligned} \varphi_i(x)s(x) &= \varphi_{ij}(x)\varphi_j(x)s(x) \xrightarrow{s \neq 0} \varphi_i(x) = \varphi_{ij}(x)\varphi_j(x) \\ &\implies \varphi_{ij}(x) = \varphi_i(x)\varphi_j^{-1}(x) \end{aligned}$$

Isso significa que quando E é trivial, $\{\varphi_{ij}\}$ é um cobordo.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\varphi_{ij} \in \check{Z}^1(U, \underline{\mathbb{C}}^*)$ é um cobordo, então pode ser expresso como

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \cdot \varphi_j^{-1}, \quad (6.8)$$

para certas funções φ_i e φ_j definidas nos abertos U_i e U_j , respectivamente. Sendo $\{\varphi_i\} \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{C}}^*)$. Defina

$$\tilde{s}_i := \varphi_i^{-1}s_i \quad \text{e} \quad \tilde{s}_j := \varphi_j^{-1}s_j. \quad (6.9)$$

Suponhamos que $\tilde{s}_i = \tilde{\varphi}_{ij}\tilde{s}_j$. Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i &= \tilde{\varphi}_{ij}\tilde{s}_j \xrightarrow{(6.9)} \varphi_i^{-1}s_i = \tilde{\varphi}_{ij}\varphi_j^{-1}s_j \\ &\implies \varphi_i^{-1}\varphi_{ij}s_j = \tilde{\varphi}_{ij}\varphi_j^{-1}s_j \\ &\xrightarrow{s_j \neq 0} \tilde{\varphi}_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j\varphi_{ij} \\ &\xrightarrow{(6.8)} \tilde{\varphi}_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j\varphi_i\varphi_j^{-1} \\ &\implies \tilde{\varphi}_{ij} = 1. \end{aligned}$$

Mas isso implica que $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$ em U_{ij} , para quaisquer $i, j \in I$ tal que $U_{ij} \neq \emptyset$. Com isso concluímos que existe $\tilde{s}$ global nunca nula, e portanto o fibrado E é trivial. $\blacksquare$

Concluímos, portanto, que a partir de um fibrado de linhas podemos associar um cociclo de Čech com valores no feixe $\underline{\mathbb{C}}^*$. Este cociclo é um cobordo se, e somente se, o fibrado é trivial. Assim, a classe de cohomologia associada mede precisamente a obstrução à trivialização do fibrado. Em outras palavras, a cohomologia de Čech com coeficientes em $\underline{\mathbb{C}}^*$ classifica os fibrados de linhas complexos sobre X , a menos de isomorfismo. Fibrados com mesma classe de cohomologia são isomorfos, e o fibrado trivial corresponde à classe nula.

Observação 6.36. O grupo de cohomologia $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}^*)$ está naturalmente relacionado ao grupo dos fibrados de linhas complexos sobre X , cujas classes de isomorfismo formam um grupo abeliano sob o produto tensorial. Essa identificação será explorada com mais detalhes posteriormente.

Considerando dois fibrados isomorfos, podemos mostrar que os cociclos correspondentes são homólogos, ou seja, diferem por um cobordo. Reciprocamente, se temos dois fibrados e os cociclos induzidos diferem por um cobordo, podemos construir um isomorfismo entre os fibrados.

A classe de cohomologia de φ_{ij} , sendo φ_{ij} o cociclo induzido por um atlas qualquer, corresponde à classe de isomorfismo do fibrado de linhas. E portanto, cohomologia de Čech de grau 1 do feixe $\mathbb{C}^*$ classifica os fibrados de posto 1.

Afirmção 4. $(LB_{\mathcal{U}}(X), \otimes)$ é um grupo abeliano.

Demonstração. Devemos verificar os axiomas de grupo abeliano:

Elemento neutro:

O fibrado trivial $\underline{1} = X \times \mathbb{C}$ atua como identidade. De fato, para qualquer fibrado de linhas L , temos:

$$(L \otimes \underline{1})_x \simeq L_x \otimes \mathbb{C} \simeq L_x.$$

O isomorfismo é dado por:

$$\begin{aligned} V \otimes \mathbb{C} &\xrightarrow{\simeq} V \\ v \otimes \lambda &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Em particular, $v \otimes 1 \mapsto v$.

Elemento inverso:

Para cada $[L] \in LB_{\mathcal{U}}(X)$, temos $[L]^{-1} = [L^V]$, onde $L^V = \text{Hom}(L, \underline{1})$ é o fibrado dual. Pontualmente:

$$(L^V)_x = (L_x)^V = \text{Hom}(L_x, \mathbb{C}).$$

Afirmamos que $L \otimes L^V \simeq \underline{1}$. De fato, defina:

$$\begin{aligned} \alpha : L \otimes L^V &\xrightarrow{\simeq} X \times \mathbb{C} \\ \alpha_x : L_x \otimes (L_x)^V &\xrightarrow{\simeq} \mathbb{C} \\ v \otimes \xi &\longmapsto \xi(v) \end{aligned}$$

Este mapa é linear em cada fibra¹ e fornece um isomorfismo de fibrados. Portanto:

$$[L] \otimes [L^V] = [\underline{1}] \Rightarrow [L^V] = [L]^{-1}.$$

Associatividade e comutatividade:

Seguem das propriedades do produto tensorial de espaços vetoriais, aplicadas fibra a fibra.

Morfismo de grupos:

Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi : LB_{\mathcal{U}}(X) &\rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}^*) \\ [L] &\mapsto [\{\varphi_{ij}\}] \end{aligned}$$

¹Segue da definição de produto tensorial.

onde $\{\varphi_{ij}\}$ são as funções de transição de L .

Para $L = \underline{1} = X \times \mathbb{C}$, escolha a seção global $s(x) = (x, 1)$, com $s|_{U_i}(x) = s_i(x) = (x, 1)$. Então

$$s_i(x) = \varphi_{ij}(x)s_j(x), \forall x \in U_{ij} \Rightarrow \varphi_{ij}(x) = 1, \forall i, j \in I.$$

Portanto, $[\underline{1}] \mapsto [\{1\}] = 1$.

Agora, se L e L' tem funções de transição $\{\varphi_{ij}\}$ e $\{\psi_{ij}\}$ respectivamente, então $L \otimes L'$ tem funções de transição $\{\varphi_{ij}\psi_{ij}\}$. Logo:

$$\Phi([L] \otimes [L']) = [\{\varphi_{ij}\psi_{ij}\}] = [\{\varphi_{ij}\}] \cdot [\{\psi_{ij}\}] = \Phi([L]) \cdot \Phi([L']).$$

Portanto, Φ é um homomorfismo de grupos.

Como Φ é bijetor (pelo Lema 6.37) e $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{C}}^*)$ é um grupo abeliano, segue que $(LB_{\mathfrak{U}}(X), \otimes)$ também é um grupo abeliano. ■

Lema 6.37. Seja X um espaço paracompacto. Existe uma bijeção natural

$$\Phi: LB(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}^*),$$

onde $LB(X)$ representa as classes de isomorfismos de fibrados de linhas complexos sobre X e $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}^*)$ é o grupo de cohomologia de Čech de grau 1 com coeficientes em $\underline{\mathbb{C}}^*$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X fixada. Vamos definir

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathfrak{U}}: LB_{\mathfrak{U}}(X) &\xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{C}}^*) \\ [L] &\longmapsto [\{\varphi_{ij}\}], \end{aligned}$$

onde $LB_{\mathfrak{U}}(X)$ é o grupo formado pelas classes de isomorfismos dos fibrados de linhas complexos sobre X que são triviais em cada U_i .

Dada $[L] \in LB_{\mathfrak{U}}(X)$, escolhemos um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de L , o que é equivalente

Sobrejetividade: Dado um cociclo $\{\varphi_{ij}\} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{C}}^*)$, construímos o fibrado de linhas

$$L := \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C} \right) / \sim,$$

onde $(x, z)_i \sim (x, \varphi_{ij}(x)z)_j$ para $x \in U_i \cap U_j$, com $(x, z)_i \in U_i \times \mathbb{C}$ e $(x, \varphi_{ij}(x)z)_j \in U_j \times \mathbb{C}$. A condição de cociclo garante que $\sim$ é relação de equivalência. De fato, como as funções φ_{ij} satisfazem as identidades

$$\varphi_{ii} = 1, \tag{6.10}$$

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}, \tag{6.11}$$

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk} \quad \text{em } U_{ijk}, \tag{6.12}$$

temos que as relação de reflexividade e simetria são satisfeitas pelas igualdades (6.10) e (6.11), respectivamente, enquanto que a transitividade é satisfeita por (6.12), pois se

$$(x, z)_i \sim (x, z')_j \quad \text{e} \quad (x, z')_j \sim (x, z'')_k,$$

onde

$$z' = \varphi_{ij}(x)z \quad \text{e} \quad z'' = \tilde{\varphi}_{jk}(x)z',$$

temos que

$$z'' = \varphi_{jk}(x)\varphi_{ij}(x)z \stackrel{(6.12)}{=} \varphi_{ik}(x)z$$

e portanto

$$(x, z)_i \sim (x, z'')_k,$$

o que prova a transitividade.

Além disso, podemos munir o quociente L da projeção $\pi([x, z]_i) = x$.

Para cada $i \in I$, definimos

$$\varphi_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow L|_{U_i} \tag{6.13}$$

$$(x, z) \mapsto [x, z]_i \tag{6.14}$$

onde $[x, z]_i$ denota a classe de equivalência do ponto (x, z) no quociente $L = (\bigsqcup_i U_i \times \mathbb{C}) / \sim$.

Temos que φ_i leva cada ponto (x, z) do espaço trivial $U_i \times \mathbb{C}$ para o ponto correspondente no fibrado L que está na fibra L_x e tem coordenada z na trivialização sobre U_i .

Em outras palavras, φ_i nos diz como identificar o espaço trivial $U_i \times \mathbb{C}$ com a parte do fibrado L que está sobre U_i , ou seja as aplicações do tipo

$$\varphi_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow L|_{U_i}$$

$$(x, z) \mapsto [x, z]_i,$$

são trivializações locais com funções de transição dadas por φ_{ij} . Assim, L é um fibrado de linhas cuja imagem por $\Phi_{\mathcal{U}}$ é exatamente $[\{\tilde{\varphi}_{ij}\}]$. Logo $\Phi_{\mathcal{U}}$ é sobrejetiva.

$\Phi : LB(X) \rightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}^*)$ está bem definido.

Agora, vamos mostrar que se L e L' são fibrados de linhas isomorfos, então os cociclos de Čech associados $\tilde{\varphi}_{ij}$ e $\tilde{\varphi}'_{ij}$ são cohomólogos.

Seja $f : L \rightarrow L'$ um isomorfismo de fibrados de linhas. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X que trivializa ambos os fibrados. Escolha seções locais não nulas s_i de L sobre U_i , e s'_i de L' sobre U_i .

As funções de transição são dadas por $\tilde{\varphi}_{ij}, \tilde{\varphi}'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$, de modo que

$$s_i = \tilde{\varphi}_{ij} s_j \quad \text{e} \quad s'_i = \tilde{\varphi}'_{ij} s'_j \tag{6.15}$$

em $U_i \cap U_j$.

Como f é um isomorfismo fibra a fibra, existe $\lambda_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que

$$f(s_i) = \lambda_i s'_i. \quad (6.16)$$

Calculando de $f(s_i)$ usando a relação de transição em L , temos que

$$s_i = \tilde{\varphi}_{ij} s_j \Rightarrow f(s_i) = f(\tilde{\varphi}_{ij} s_j) = \tilde{\varphi}_{ij} f(s_j) = \tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j s'_j. \quad (6.17)$$

E usando as expressões (6.15) e (6.16), temos

$$f(s_i) = \lambda_i s'_i = \lambda_i \tilde{\varphi}'_{ij} s'_j. \quad (6.18)$$

Comparando (6.17) e (6.18) temos que

$$\tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j s'_j = \lambda_i \tilde{\varphi}'_{ij} s'_j.$$

Como s'_j é não nulo, obtemos

$$\tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j = \lambda_i \tilde{\varphi}'_{ij}.$$

Logo

$$\tilde{\varphi}_{ij} \tilde{\varphi}'_{ij}{}^{-1} = \lambda_i \lambda_j^{-1},$$

onde λ_i e λ_j^{-1} são restritas a U_{ij} . Isso mostra que $\tilde{\varphi}'_{ij}$ e $\tilde{\varphi}_{ij}$ diferem pelo cobordo da 0-cocadeia (λ_i) , portanto representam a mesma classe em $\check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$. Assim, Φ está bem definida.

Injetividade de Φ : $LB(X) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$.

Agora vamos mostrar que se $\Phi(L) = \Phi(L')$, então $L \simeq L'$.

Sejam $\tilde{\varphi}_{ij}$ e $\tilde{\varphi}'_{ij}$ os cociclos de Čech associados a L e L' , respectivamente. Suponha que exista uma 0-cocadeia (λ_i) , com $\lambda_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$, tal que:

$$\tilde{\varphi}'_{ij} = \lambda_i^{-1} \tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j.$$

Sejam s_i e s'_i seções locais não nulas de L e L' sobre U_i , respectivamente, satisfazendo

$$s_i = \tilde{\varphi}_{ij} s_j, \quad s'_i = \tilde{\varphi}'_{ij} s'_j.$$

Defina f localmente em U_i por

$$f(s_i) = \lambda_i s'_i. \quad (6.19)$$

Precisamos verificar compatibilidade em $U_i \cap U_j$.

Como $s_i = \tilde{\varphi}_{ij} s_j$:

$$f(s_i) = f(\tilde{\varphi}_{ij} s_j) = \tilde{\varphi}_{ij} f(s_j) = \tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j s'_j. \quad (6.20)$$

Mas $s'_i = \tilde{\varphi}'_{ij} s'_j$, logo $s'_j = (\tilde{\varphi}'_{ij})^{-1} s'_i$. Substituindo temos

$$f(s_i) = \tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j (\tilde{\varphi}'_{ij})^{-1} s'_i. \quad (6.21)$$

Da hipótese, $\tilde{\varphi}'_{ij} = \lambda_i^{-1} \tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j$, então

$$(\tilde{\varphi}'_{ij})^{-1} = \lambda_j^{-1} \tilde{\varphi}_{ij}^{-1} \lambda_i. \quad (6.22)$$

Substituindo (6.22) em (6.21),

$$\tilde{\varphi}_{ij} \lambda_j \cdot (\lambda_j^{-1} \tilde{\varphi}_{ij}^{-1} \lambda_i) s'_i = \lambda_i s'_i, \quad (6.23)$$

e assim, as expressões (6.19) e (6.21) coincidem, logo f está bem definido e com isso concluímos que f é um isomorfismo fibra a fibra (pois $\lambda_i \neq 0$) que comuta com as projeções, logo $L \simeq L'$. Portanto, Φ é injetiva. ■

6.4 Primeira Classe de Chern

Considere a sequência exata de feixe do Exemplo 4.41

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0,$$

onde γ é a inclusão e $\exp(z) = e^{2\pi iz}$.

Pelo Teorema 5.12, temos que existe a sequência exata longa em cohomologia de Čech

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^0(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}) \dots \\ \rightarrow \check{H}^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^k(X, \mathbb{C}) \rightarrow \check{H}^k(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^{k+1}(X, \mathbb{C}) \dots \end{aligned}$$

Mas como $\mathbb{C}$ admite partição da unidade, segue que $\check{H}^k(X, \mathbb{C})$ é acíclico, ou seja

$$\check{H}^k(X, \mathbb{C}) = 0, \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Logo, por exatidão, temos o isomorfismo

$$\check{H}^k(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^{k+1}(X, \mathbb{Z}), \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Como visto anteriormente,

$$(LB_{\mathbb{U}}(X), \otimes) \simeq \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

onde $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ representa a primeira classe de Chern, ou seja

$$[L] \mapsto c_1[L].$$

Com isso, temos que os fibrados de linhas proporcionam um modelo geométrico de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$.

6.4.1 Cálculo da primeira classe de Chern

Agora, vamos ver concretamente como calcular a primeira classe de Chern. Suponha que $\mathcal{U}$ é uma boa cobertura fixada de X .

Em cada interseção U_{ij} , temos as funções de transição φ_{ij} , de modo que $\{\varphi_{ij}\} \in \check{Z}^1(X, \mathbb{C}^*)$, e a classe de cohomologia correspondente $[\{\varphi_{ij}\}] \in \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$ classifica os fibrados de linhas complexos módulo isomorfismo.

Vamos encontrar o morfismo de conexão

$$\sigma: \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \check{H}^2(X, \mathbb{Z}).$$

Para isso, considere o seguinte morfismo de sequências exatas curtas de complexos de Čech:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{C}^1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_1} & \check{C}^1(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\exp_1} & \check{C}^1(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\gamma_2} & \check{C}^2(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\exp_2} & \check{C}^2(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como $\exp$ é sobrejetor e a cobertura é boa, admite um levantamento local das funções de transição, ou seja, dada uma função de transição $\varphi_{ij} \in \check{C}^1(X, \mathbb{C}^*)$, existe $\{\psi_{ij}\} \in \check{C}^1(X, \mathbb{C})$ tal que

$$\exp(\psi_{ij}) = \varphi_{ij}, \quad \text{em } U_{ij}.$$

Aplicando o operador cobordo δ , obtemos em U_{ijk} que

$$\begin{aligned} \exp_2((\delta\psi)_{ijk}) &= (\delta \exp_1 \psi)_{ijk} \\ &= (\delta\varphi)_{ijk} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isto significa que $(\delta\psi)_{ijk}$ toma valores no núcleo de $\exp$, ou seja, em $2\pi i\mathbb{Z}$. Recordando a inclusão $\gamma: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(n) = n$, segue que existe $\{c_{ijk}\} \in \check{C}^2(X, \mathbb{Z})$ tal que

$$(\delta\psi)_{ijk} = \gamma(c_{ijk}).$$

Como $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$ e γ é um morfismo de complexos, a família $\{c_{ijk}\}$ é de fato um 2-cociclo em $\check{Z}^2(X, \mathbb{Z})$. Definimos então

$$\sigma([\{\varphi_{ij}\}]) := [\{c_{ijk}\}] \in \check{H}^2(X, \mathbb{Z}),$$

o qual é precisamente um morfismo de conexão.

De forma mais concreta, escolhendo seções locais não nulas s_i em cada U_i e escrevendo

$$s_i = \varphi_{ij}s_j, \quad \text{em } U_{ij},$$

tomamos ramos contínuos do logaritmo em cada U_{ij} e definimos $\psi_{ij} = \log \varphi_{ij}$. Então, em U_{ijk} ,

$$\psi_{ij} + \psi_{jk} - \psi_{ik} = 2\pi i n_{ijk},$$

com $n_{ijk} \in \mathbb{Z}$. A classe $[\{n_{ijk}\}] \in \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ é exatamente $c_1([L])$, a primeira classe de Chern do fibrado de linhas L determinado por $\{\varphi_{ij}\}$.

A afirmação a seguir mostra como o produto tensorial de fibrados de linhas se reflete neste contexto cohomológico.

Afirmção 5. O isomorfismo

$$\sigma: \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\simeq} \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

envia a classe de isomorfismo do fibrado de linhas $[L]$ na sua primeira classe de Chern $c_1(L)$. Em particular, a operação de tensor de fibrados de linhas corresponde à soma de classes em $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, fazendo de $(LB_{\mathbb{A}}(X), \otimes)$ um modelo geométrico para $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$.

Demonstração. Sejam L_1 e L_2 dois fibrados de linhas sobre X , definidos, respectivamente, pelas funções de transição

$$\{\varphi_{ij}\}, \quad \{\psi_{ij}\} \in \check{Z}^1(X, \mathbb{C}^*).$$

O fibrado tensorial $L_1 \otimes L_2$ é definido pelas funções de transição

$$\{\varphi_{ij}\psi_{ij}\} \in \check{Z}^1(X, \mathbb{C}^*).$$

Escolhendo levantamentos locais

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \check{C}^1(X, \mathbb{C}) \quad \text{tais que} \quad \exp(\alpha_{ij}) = \varphi_{ij}, \quad \exp(\beta_{ij}) = \psi_{ij},$$

temos para o produto tensorial

$$\exp(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = \exp(\alpha_{ij}) \exp(\beta_{ij}) = \varphi_{ij} \psi_{ij}.$$

Aplicando δ , obtemos:

$$\begin{aligned} (\delta(\alpha + \beta))_{ijk} &= (\delta\alpha)_{ijk} + (\delta\beta)_{ijk} = \gamma(c_{ijk}^{(1)}) + \gamma(c_{ijk}^{(2)}) \\ &= \gamma(c_{ijk}^{(1)} + c_{ijk}^{(2)}), \end{aligned}$$

onde $c_{ijk}^{(1)}$ e $c_{ijk}^{(2)}$ são os cociclos inteiros associados a L_1 e L_2 . Logo, o cociclo associado a $L_1 \otimes L_2$ é dado por

$$c_{ijk}^{(1 \otimes 2)} = c_{ijk}^{(1)} + c_{ijk}^{(2)},$$

o que implica, passando à cohomologia,

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2) \in \check{H}^2(X, \mathbb{Z}).$$

Assim, o homomorfismo

$$c_1 : \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo de grupos abelianos, e o conjunto dos fibrados de linhas sobre X com o produto tensorial forma o grupo

$$(LB_{\mathcal{U}}(X), \otimes) \simeq \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*),$$

de modo que

$$c_1([L_1 \otimes L_2]) = c_1([L_1]) + c_1([L_2]).$$

Portanto, os fibrados de linhas complexos fornecem um modelo geométrico de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, com a soma de classes correspondendo ao produto tensorial. ■

Quando X paracompacto e admite boa cobertura, temos o isomorfismo

$$\check{H}^n(X, \mathbb{Z}) \simeq H^n(X; \mathbb{Z}),$$

onde $H^n(X; \mathbb{Z})$ representa o grupo de cohomologia singular de grau n . Em particular, temos

$$\check{H}^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^2(X; \mathbb{Z}).$$

A construção anterior mostra que o grupo $(LB_{\mathcal{U}}, \otimes)$ é isomorfo a $\check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$, e através do isomorfismo c_1 obtemos um modelo geométrico do grupo $H^2(X; \mathbb{Z})$.

Gerbes

Os fibrados de linhas complexos, como vimos, são objetos geométricos classificados (a menos de isomorfismo) pela primeira classe de Chern em $H^2(X, \mathbb{Z})$. Eles descrevem, de certa forma, o “torcimento” de um produto trivial $X \times \mathbb{C}$ ao longo do espaço base. Mas o que acontece quando queremos ir além? Existe um objeto geométrico que seja classificado pelo próximo grupo de cohomologia, $H^3(X, \mathbb{Z})$?

A resposta é sim: essas são as *gerbes*. Informalmente, uma gerbe pode ser vista como um objeto que associa a cada aberto $U \subset X$ uma categoria (mais precisamente, um grupoide), em vez de apenas um conjunto de seções.

Veremos ainda o conceito de $\mathbb{C}^*$ -band: uma estrutura que identifica, de forma compatível, os grupos de automorfismos dos objetos locais com o feixe $\underline{\mathbb{C}}^*$. Isso permite associar à gerbe um invariante cohomológico análogo à primeira classe de Chern. Mais precisamente, a falha de compatibilidade dos isomorfismos de transição dá origem a um 2-cociclo com valores em $\underline{\mathbb{C}}^*$, cuja classe em $\check{H}^2(X, \underline{\mathbb{C}}^*)$ corresponde, por meio de isomorfismos, a uma classe de $H^3(X, \mathbb{Z})$. Este capítulo é dedicado a construir essa classe de maneira explícita, utilizando as ferramentas de cohomologia de Čech.

7.1 Pré-feixe de categorias

Definição 7.1 (Pseudo-functor). Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{D}$ uma 2-categoria. Um *pseudo-functor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é definido por:

- uma função $\mathcal{F} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$;
- para todos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, uma função

$$\mathcal{F} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)),$$

tal que

$$\mathcal{F}_{X,X}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$$

tais que, para todos $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- existe um 2-isomorfismo

$$\alpha_{f,g}: \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(g \circ f)$$

de modo que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{F}(h)} \odot \alpha_{g,f}} & \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g \circ f) \\ \downarrow \alpha_{h,g} \odot \text{id}_{\mathcal{F}(f)} & & \downarrow \alpha_{h,g \circ f} \\ \mathcal{F}(h \circ g) \circ \mathcal{F}(f) & \xrightarrow{\alpha_{h \circ g, f}} & \mathcal{F}(h \circ g \circ f). \end{array}$$

equivalentemente, podemos considerar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{F}(h \circ g \circ f) & & & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & & & \\ & \alpha_{g \circ f, h} & & \alpha_{f, h \circ g} & & & \\ & \nearrow & \mathcal{F}(g \circ f) & & \mathcal{F}(h \circ g) & \nwarrow & \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} & \mathcal{F}(Z) & \xrightarrow{\mathcal{F}(h)} & \mathcal{F}(W) \\ & \nwarrow \alpha_{f,g} & & \nearrow \alpha_{g,h} & & & \end{array}$$

Definição 7.2 (Pré-feixe de categorias). Um *pré-feixe de categorias* em X é um pseudo-funtor $\mathcal{P}: \text{Top}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}\text{at}$, onde $\mathcal{C}\text{at}$ é a 2-categoria das categorias pequenas (Ver Exemplo 3.8).

Concretamente, temos que a definição de pré-feixe de categorias implica que

- para cada aberto $U \subset X$ associamos uma categoria pequena $\mathcal{P}(U)$;
- se $V \subset U$ são abertos, existe o *funtor de restrição*

$$\mathcal{P}_{VU}: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V);$$

- se $W \subset V \subset U$, existe o isomorfismo de funtores

$$\mathcal{P}_{WVU}: \mathcal{P}_{WV} \circ \mathcal{P}_{VU} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{WU}, \quad (7.1)$$

satisfazendo as coerências de um pseudo-funtor.

Notação 11. Usaremos a mesma notação de restrição empregada no contexto dos feixes. Em particular, dado um objeto (o qual eventualmente será denotado por *objeto-seção*) $a \in \mathcal{P}(U)$, denotamos por $a|_V$ o objeto $\mathcal{P}_{VU}(a)$ e, dado um morfismo $\varphi: a \rightarrow b$ em $\mathcal{P}(U)$, denotamos por $\varphi|_V: a|_V \rightarrow b|_V$ o morfismo $\mathcal{P}_{VU}(\varphi)$.

A coerência pode ser expressa pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} a|_V|_W|_Z & \xrightarrow{\mathcal{P}_{WVU}(a)|_Z} & a|_W|_Z \\ \mathcal{P}_{WZU}(a|_V) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_{WZU}(a) \\ a|_V|_Z & \xrightarrow{\mathcal{P}_{ZVU}(a)} & a|_Z. \end{array}$$

Definição 7.3 (Grupóide). Um *grupóide* é uma categoria onde todo morfismo é um isomorfismo.

Dada a noção de pré-feixe de categorias, podemos pedir, em particular, que cada $\mathcal{P}(U)$ seja um grupóide, para todo aberto $U \subset X$, então podemos definir pré-stack.

Definição 7.4 (Pré-stack). Um *pré-stack* em X é um pré-feixe de grupóides.

Considere um pré-feixe (ou pré-stack) $\mathcal{P}$ de categorias em X , abertos $U_i, U_j \subset X$ e objetos

$$a \in \text{Ob}(\mathcal{P}(U_i)) \quad \text{e} \quad b \in \text{Ob}(\mathcal{P}(U_j)). \quad (7.2)$$

Definimos o pré-feixe de conjuntos $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b}$ em $U_{ij} = U_i \cap U_j$ de modo que para todo $V \subset U_{ij}$ associamos o conjunto

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b}(V) := \text{Hom}_{\mathcal{P}(V)}(a|_V, b|_V), \quad V \subset U.$$

Equivalentemente, dado um aberto $U = U_{ij} \subset X$, fica definido o pré-feixe

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b} : \text{Top}_U^{\text{op}} &\longrightarrow \text{Sets} \\ V &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{P}(V)}(a|_V, b|_V), \end{aligned}$$

onde os objetos de Top_U^{op} são os abertos de X que estão contidos em U .

Se $W \subset V \subset U$, e considerando a e b objetos-seções como em (7.2), temos, pelo isomorfismo de restrição $\mathcal{P}_{WVU}$ (definido em (7.1)), que

$$\mathcal{P}_{WU}(a) \simeq \mathcal{P}_{WV} \circ \mathcal{P}_{VU}(a),$$

ou seja, $a|_W \simeq a|_V|_W$.

Além disso, como $a|_V$ e $b|_V$ são ambos objetos da categoria $\mathcal{P}(V)$, podemos considerar um morfismo $\varphi : a|_V \rightarrow b|_V$, o qual, em particular, é uma seção associada ao pré-feixe de conjuntos $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b}$ aplicado em $V \subset U$, ou seja, $\varphi \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b}(V)$. Temos, portanto, a restrição

$$\varphi|_W : a|_V|_W \rightarrow b|_V|_W.$$

Compondo com o isomorfismo de restrição $\mathcal{P}_{WVU}$, podemos definir o morfismo

$$\varphi||_W : a|_W \rightarrow b|_W$$

como

$$\varphi|_W := \mathcal{P}_{WVU}(b) \circ \varphi|_W \circ \mathcal{P}_{WVU}(a)^{-1}.$$

Podemos observar essa construção por meio do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} a|_V|_W & \xrightarrow{\varphi|_W} & b|_V|_W \\ \mathcal{P}_{WVU}(a)^{-1} \uparrow \simeq & & \simeq \downarrow \mathcal{P}_{WVU}(b) \\ a|_W & \xrightarrow{\varphi|_W} & b|_W. \end{array}$$

Proposição 7.5. Sejam $a \in \text{Ob}(\mathcal{P}(U_i))$, $b \in \text{Ob}(\mathcal{P}(U_j))$ objetos e sejam Z, W, V, U abertos de X tais que $Z \subset W \subset V \subset U$, com $U = U_{ij}$. Considere um morfismo $\varphi: a|_V \rightarrow b|_V$ em $\mathcal{P}(V)$ e defina $\varphi|_W \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{P}}^{a,b}(W)$ pela construção padrão de restrição via os isomorfismos de coerência, isto é

$$\varphi|_W := \mathcal{P}_{WVU}(b) \circ \varphi|_W \circ \mathcal{P}_{WVU}(a)^{-1}: a|_W \rightarrow b|_W.$$

Então, para a restrição a Z vale

$$\varphi|_Z = (\varphi|_W)|_Z.$$

7.2 Feixe de categorias

Definição 7.6 (Dado de descida). Seja $\{V_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de um aberto $U \subset X$. Um *dado de descida* consiste em:

- objetos $a_i \in \mathcal{P}(V_i)$, $\forall i \in I$;
- isomorfismos

$$\varphi_{ij}: a_i|_{V_{ij}} \xrightarrow{\simeq} a_j|_{V_{ij}};$$

- compatibilidades

$$\varphi_{jk}|_{V_{ijk}} \circ \varphi_{ij}|_{V_{ijk}} = \varphi_{ik}|_{V_{ijk}}.$$

Dizemos que o dado de descida é *efetivo* se existem únicos, a menos de isomorfismo:

- $a \in \mathcal{P}(U)$;
- isomorfismos

$$\psi_i: a|_{V_i} \xrightarrow{\simeq} a_i$$

tais que

$$\varphi_{ij} = \psi_j|_{V_{ij}} \circ (\psi_i|_{V_{ij}})^{-1}. \quad (7.3)$$

A unicidade a menos de isomorfismo significa que se existem outro objeto $a' \in \mathcal{P}(U)$ e outros morfismos $\psi'_i: a'|_{V_i} \xrightarrow{\simeq} a_i$ que satisfazem a condição (7.3), então existe um isomorfismo $\Phi: a \xrightarrow{\simeq} a'$ tal que $\psi'_i \circ \Phi = \psi_i$.

Definição 7.7 (Feixe de categorias). Um *feixe de categorias* em X é um pré-feixe de categorias no qual todo dado de descida é efetivo e todo pré-feixe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{a,b}$ é um feixe.

Definição 7.8 (Stack). Um *stack* é um feixe de grupoides.

7.3 Gerbe

Definição 7.9 (Gerbe). Uma *gerbe* é um stack $\mathcal{F}$ em X tal que

- $\mathcal{F}$ é localmente não vazio, ou seja, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x , de modo que $\mathrm{Ob}(\mathcal{F}(U)) \neq \emptyset$;
- dois objetos quaisquer são localmente isomorfos, ou seja, para quaisquer $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F}(U))$ e $b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F}(V))$, sendo $U \cap V \neq \emptyset$, e para todo $x \in U \cap V$, existe $W \subset U \cap V$ vizinhança de x tal que $a|_W \simeq b|_W$.

Considere um espaço topológico X e um $\mathbb{C}^*$ -fibrado principal P . Podemos identificar esse fibrado principal com o feixe de conjuntos $\mathcal{F}$ formado pelas seções locais de P , dotado da ação de $\underline{\mathbb{C}}^*$. Mais precisamente, dado um aberto U em X , definimos

$$\mathcal{F}(U) = \{s: U \rightarrow P|_U \text{ seções}\},$$

de modo que a restrição é definida por $\mathcal{F}_{VU}(s) := s|_V$. Ademais, considerando uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ e uma função contínua ou suave $f \in \underline{\mathbb{C}}^*(U)$, fica definida a seção

$$(fs)(x) := \underbrace{f(x)}_{\mathbb{C}^*} \underbrace{s(x)}_P.$$

A ação é compatível com as restrições, ou seja

$$(fs)|_V = f|_V \cdot s|_V.$$

Portanto, fica definido o morfismo de feixes

$$\mathcal{F} \times \underline{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathcal{F}$$

que para cada aberto $U \subset X$ associa o morfismo

$$\mathcal{F}(U) \times \underline{\mathbb{C}}^*(U) \rightarrow \mathcal{F}(U).$$

Pode ser verificado facilmente que $(fg)s = f(gs)$ e $1 \cdot s = s$.

Além disso, $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathbb{C}^*(U)$ -*torsor*, ou seja, dadas duas seções $s, t \in \mathcal{F}(U)$, existe uma única função $f \in \mathbb{C}^*(U)$ tal que $t = s \cdot f$. Por isso, uma seção s fixada induz uma bijeção entre $\mathcal{F}(U)$ e $\mathbb{C}^*(U)$.

Analogamente ao que vimos na seção 6.3, fixando uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e uma família de seções locais, podemos associar esse fibrado a um cociclo de Čech $g_{\alpha\beta} \in \check{Z}^1(\mathbb{C}^*)$.

Resumindo, um $\mathbb{C}^*$ -fibrado principal é equivalente a feixe de conjuntos com estrutura de $\mathbb{C}^*$ -tutor. Como esses fibrados principais coincidem essencialmente com os vetoriais, são classificados por $H^2(X, \mathbb{Z})$. Agora, vamos introduzir o conceito de *gerbes com $\mathbb{C}^*$ -band*. Esses objetos geométricos serão classificados por $H^3(X, \mathbb{Z})$.

Definição 7.10 ($\mathcal{G}$ -cobertura). Seja $\mathcal{G}$ uma gerbe em X . Uma $\mathcal{G}$ -cobertura de X é uma boa cobertura¹ $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que

- $\mathcal{G}(U_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in I$;
- para todos $i, j \in I$ e $a \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_i))$, existe $b \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_j))$ tal que

$$a|_{U_{ij}} \simeq b|_{U_{ij}},$$

caso $U_{ij} \neq \emptyset$. Em particular, se $i = j$, então $a \simeq b$, ou seja, dois objetos quaisquer em um aberto são isomorfos.

Essencialmente, isso significa que a cada aberto da cobertura fixada associamos uma categoria cuja família de objetos não é vazia e dois objetos quaisquer sobre o mesmo aberto são sempre isomorfos; e dois objetos sobre abertos distintos tornam-se isomorfos ao restringirmos aos abertos de interseção (quando essa é não vazia).

Observação 7.11. Se X é uma variedade suave ou um CW -complexo finito, então X admite boas coberturas e, mais ainda, a família das boas coberturas de X é *cofinal* no conjunto de todas as coberturas abertas de X .

Proposição 7.12. Seja X um espaço em que a família das boas coberturas é cofinal. Neste caso, para todo gerbe $\mathcal{G}$, existe uma $\mathcal{G}$ -cobertura.

Demonstração. Como $\mathcal{G}$ é uma gerbe sobre X , ela é, por definição, localmente não-vazia. Isto significa em particular que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que, para todo $i \in I$,

$$\mathcal{G}(U_i) \neq \emptyset,$$

e mais ainda: quaisquer dois objetos definidos numa vizinhança comum tornam-se isomorfos depois de uma refinamento adequado.

Seja $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ um refinamento de $\mathcal{U}$ que é uma boa cobertura. Vamos verificar que $\mathfrak{V}$ é uma $\mathcal{G}$ -cobertura. Primeiramente vamos verificar a não vacuidade nos abertos V_j . Dado $j \in J$ existe $i \in I$ com $V_j \subseteq U_i$ (porque $\mathfrak{V}$ é refinamento de $\mathcal{U}$). Como $\mathcal{G}(U_i) \neq \emptyset$, restringindo um objeto de $\mathcal{G}(U_i)$ obtemos um objeto em $\mathcal{G}(V_j)$. Logo $\mathcal{G}(V_j) \neq \emptyset$ para todo j .

¹Uma boa cobertura significa que qualquer aberto da cobertura e quaisquer interseção entre os abertos é contrátil.

Agora, vamos verificar que dois objetos tornam-se isomorfos nas interseções. Sejam $j, k \in J$ e considere

$$a \in \text{Ob}(\mathcal{G}(V_j)), \quad e \quad b \in \text{Ob}(\mathcal{G}(V_k)).$$

Se $V_{jk} = V_j \cap V_k = \emptyset$ não há nada a provar. Suponhamos $V_{jk} \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{G}$ é localmente conexa, existe uma boa cobertura $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V_{jk} tal que, para cada W_α , as restrições $a|_{W_\alpha}$ e $b|_{W_\alpha}$ são isomorfas. Isto é, para cada $\alpha \in A$, existe um isomorfismo

$$\varphi_\alpha: a|_{W_\alpha} \xrightarrow{\cong} b|_{W_\alpha}.$$

Como $\{V_j\}_{j \in J}$ é uma boa cobertura, em particular V_{jk} é contrátil e, portanto, conexo. Assim, quaisquer duas interseções $W_\alpha \cap W_\beta$ não-vazias também são conexas. Pelos axiomas de gerbe (que é um tipo específico de stack), temos que os isomorfismos φ_α e φ_β coincidem nas interseções, pois dois morfismos entre as mesmas restrições sobre um aberto conexo que coincidem sobre um refinamento devem ser isomorfas.

Portanto, os φ_α colam em um único isomorfismo global

$$\varphi: a|_{V_{jk}} \xrightarrow{\cong} b|_{V_{jk}}.$$

Assim, para quaisquer $a \in \mathcal{G}(V_j)$ e $b \in \mathcal{G}(V_k)$, suas restrições a V_{jk} são isomorfas sempre que V_{jk} é não-vazio.

Logo, $\{V_j\}_{j \in J}$ satisfaz as duas condições da definição de $\mathcal{G}$ -cobertura: é uma boa cobertura, cada V_j tem objetos e quaisquer dois objetos sobre V_j e V_k tornam-se isomorfos sobre as interseções V_{jk} .

Portanto, existe uma $\mathcal{G}$ -cobertura de X . ■

Ao trabalhar com uma gerbe $\mathcal{G}$ sobre um espaço X , fixamos uma *band*, que controla seus automorfismos locais. No caso que nos interessa, essa band é o feixe $\mathbb{C}^*$. Essa escolha permitirá, no resultado seguinte, relacionar naturalmente esse feixe com os automorfismos de cada objeto local. Assim, introduzimos a definição de $\mathbb{C}^*$ -band.

Definição 7.13 ($\mathbb{C}^*$ -band). Seja $\mathcal{G}$ uma gerbe em X . Uma $\mathbb{C}^*$ -band em $\mathcal{G}$ é formada por:

- uma $\mathcal{G}$ -cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$;
- para todo $i \in I$, um objeto $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ fixado, e um isomorfismo de feixes de grupos

$$\Theta_i: \mathbb{C}^*|_{U_i} \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(U_i)}(s_i),$$

tais que, para todos $i, j \in I$ e objetos $s_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_i))$, $s_j \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_j))$, qualquer isomorfismo

$$\psi_{ij}: s_i|_{U_{ij}} \longrightarrow s_j|_{U_{ij}},$$

satisfaz a relação de compatibilidade

$$(\Theta_j)_{U_{ij}}(f) \circ \psi_{ij} = \psi_{ij} \circ (\Theta_i)_{U_{ij}}(f), \tag{7.4}$$

para todo $f \in \mathbb{C}^*(U_{ij})$, onde $(\Theta_i)_{U_{ij}}: \mathbb{C}^*(U_{ij}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(U_{ij})}(s_i|_{U_{ij}})$.

Equivalentemente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} s_i|_{U_{ij}} & \xrightarrow{(\Theta_j)_{U_{ij}}(f)} & s_i|_{U_{ij}} \\ \psi_{ij} \downarrow & & \downarrow \psi_{ij} \\ s_j|_{U_{ij}} & \xrightarrow{(\Theta_i)_{U_{ij}}(f)} & s_j|_{U_{ij}} \end{array}$$

comuta.

7.3.1 Algumas propriedades

Uma vez escolhida uma $\mathbb{C}^*$ -band na gerbe $\mathcal{G}$, cada objeto local s definido em um aberto $U \subset X$ vem acompanhado de um isomorfismo natural entre $\mathbb{C}^*(U)$ e o grupo de automorfismos de s .

Proposição 7.14. Seja $\mathcal{G}$ uma gerbe sobre X munida de uma $\mathbb{C}^*$ -band definida em uma $\mathcal{G}$ -cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$. Para todo aberto $U \subset X$ e para todo objeto $s \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U))$ (quando existir), existe um isomorfismo de grupos

$$\theta_s: \mathbb{C}^*(U) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s),$$

onde $\text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s)$ denota o grupo dos automorfismos de s na categoria $\mathcal{G}(U)$.

Demonstração. Como a $\mathbb{C}^*$ -band foi dada em uma $\mathcal{G}$ -cobertura fixada $\{U_i\}_{i \in I}$, temos para cada i um objeto fixo $s_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_i))$ e um isomorfismo de grupos $\Theta_i: \mathbb{C}^*(U_i) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\mathcal{G}(U_i)}(s_i)$. Além disso, para cada interseção não vazia $U_{ij} = U_i \cap U_j$ escolhemos um isomorfismo $\psi_{ij}: s_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} s_j|_{U_{ij}}$ que satisfaz as compatibilidades de $\mathbb{C}^*$ -band

$$\Theta_j(f)|_{U_{ij}} \circ \psi_{ij} = \psi_{ij} \circ \Theta_i(f)|_{U_{ij}} \quad (\forall f \in \mathbb{C}^*(U_{ij})). \quad (7.5)$$

Seja agora um aberto arbitrário $U \subset X$ e suponha dado um objeto $s \in \mathcal{G}(U)$. Queremos construir um isomorfismo de grupos $\theta_s: \mathbb{C}^*(U) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s)$.

Como $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma $\mathcal{G}$ -cobertura, para cada $x \in U$ existe algum índice i tal que $x \in U \cap U_i$, de modo que $\mathcal{G}(U \cap U_i) \neq \emptyset$, pois, por hipótese de $\mathcal{G}$ -cobertura, existe $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$, e assim podemos tomamos $s_i|_{U \cap U_i} \in \mathcal{G}(U \cap U_i)$. Cubra U por abertos da forma $V_i := U \cap U_i$ (ignoramos os índices para os quais a interseção é vazia). Para cada índice relevante temos, por hipótese de gerbe, que os objetos $s|_{V_i}$ e $s_i|_{V_i}$ são isomorfos de modo que podemos escolher isomorfismos

$$\phi_i: s|_{V_i} \xrightarrow{\sim} s_i|_{V_i}.$$

Dado $g \in \mathbb{C}^*(U)$, denote por $g|_{V_i} \in \mathbb{C}^*(V_i)$ sua restrição. Pela definição de $\mathbb{C}^*$ -band, temos o automorfismo $\Theta_i(g|_{V_i}) \in \text{Aut}_{\mathcal{G}(V_i)}(s_i|_{V_i})$. Transportando esse automorfismo para $s|_{V_i}$ via ϕ_i obtemos o automorfismo

$$\tilde{\theta}_{s,i}(g) := \phi_i^{-1} \circ \Theta_i(g|_{V_i}) \circ \phi_i \in \text{Aut}_{\mathcal{G}(V_i)}(s|_{V_i}). \quad (7.6)$$

Verificaremos agora que está bem definida. Precisamos mostrar que as definições (7.6) coincidem nas interseções $V_{ij} = V_i \cap V_j = U \cap U_{ij}$; isto garante que os automorfismos locais colam e definem um automorfismo global de s sobre U .

Considere a sobreposição V_{ij} . Observamos duas maneiras de obter um automorfismo de $s|_{V_{ij}}$ a partir de g :

- via o índice i : $\tilde{\theta}_{s,i}(g)|_{V_{ij}} = \phi_i^{-1}|_{V_{ij}} \circ \Theta_i(g|_{V_i}) \circ \phi_i|_{V_{ij}}$;
- via o índice j : $\tilde{\theta}_{s,j}(g)|_{V_{ij}} = \phi_j^{-1}|_{V_{ij}} \circ \Theta_j(g|_{V_j}) \circ \phi_j|_{V_{ij}}$.

Para comparar esses dois morfismos, escrevemos a relação entre ϕ_j e ϕ_i usando os isomorfismos ψ_{ij} da band: como $s_i|_{V_{ij}}$ e $s_j|_{V_{ij}}$ descrevem a mesma band nas interseções, existe a igualdade (por definição das escolhas)

$$\phi_j|_{V_{ij}} = \psi_{ij}|_{V_{ij}} \circ \phi_i|_{V_{ij}}. \quad (7.7)$$

Usando (7.7) e a compatibilidade da band (7.5) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{s,j}(g)|_{V_{ij}} &= \phi_j^{-1}|_{V_{ij}} \circ \Theta_j(g|_{V_j}) \circ \phi_j|_{V_{ij}} \\ &= \phi_i^{-1}|_{V_{ij}} \circ \psi_{ij}^{-1}|_{V_{ij}} \circ \Theta_j(g|_{V_j}) \circ \psi_{ij}|_{V_{ij}} \circ \phi_i|_{V_{ij}} \\ &= \phi_i^{-1}|_{V_{ij}} \circ \Theta_i(g|_{V_i}) \circ \phi_i|_{V_{ij}} \\ &= \tilde{\theta}_{s,i}(g)|_{V_{ij}}. \end{aligned}$$

Assim as duas descrições locais coincidem sobre V_{ij} para todo par (i, j) .

Pelas igualdades verificadas nas interseções, as seções locais $\tilde{\theta}_{s,i}(f) \in \text{Aut}_{\mathcal{G}(V_i)}(s|_{V_i})$ colam a um automorfismo global $\theta_s(f) \in \text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s)$. Fazendo isto para cada $f \in \mathbb{C}^*(U)$ obtém-se uma aplicação

$$\begin{aligned} \theta_s: \mathbb{C}^*(U) &\xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{G}(U)}(s) \\ f &\longmapsto \theta_s(f). \end{aligned}$$

Por construção esta aplicação é um homomorfismo de grupos, pois a operação em $\text{Aut}(s)$ corresponde ponto a ponto à operação em $\mathbb{C}^*$ e a composição com as ϕ_i preserva produtos e inversos.

Resta mostrar que θ_s é um isomorfismo. Mas isto é imediato, pois a propriedade local de band garante que, para cada i , a restrição $\theta_s|_{V_i}: \mathbb{C}^*(V_i) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(V_i)}(s|_{V_i})$ coincide (através do isomorfismo ϕ_i) com o isomorfismo dado pela band $\Theta_i: \mathbb{C}^*(V_i) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{G}(V_i)}(s_i|_{V_i})$. Assim θ_s é localmente um isomorfismo de grupos; como ambos os lados são feixes (ou simplesmente pela verificação direta da bijeção usando as escolhas locais), concluímos que θ_s é um isomorfismo global. ■

Seja $\mathcal{G}$ uma gerbe com $\mathbb{C}^*$ -band em X . Para dar um $\mathbb{C}^*$ -band, tomamos $\{U_i\}_{i \in I}$ uma $\mathcal{G}$ -cobertura; temos $s_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_i))$ e

$$\phi_{ij}: s_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} s_j|_{U_{ij}},$$

para todo $i \in I$, e temos o isomorfismo (de grupos)

$$\Theta_i : \underline{\mathbb{C}}^*(U_i) \xrightarrow{\simeq} \text{Aut}(s_i).$$

Agora considere um espaço X , e U_i, U_j, U_k abertos de X , com $U_{ijk} \neq \emptyset$ e

$$s_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_i)), \quad s_j \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_j)), \quad s_k \in \text{Ob}(\mathcal{G}(U_k)).$$

temos as funções de transição φ_{ij} , φ_{jk} , e φ_{ik} .

Sobre o aberto U_{ijk} , temos os isomorfismos

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}, \quad \varphi_{ik} : s_i|_{U_{ijk}} \longrightarrow s_k|_{U_{ijk}}.$$

Como $\mathcal{G}$ é um stack, a composição

$$\alpha_{ijk} := \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} \circ \varphi_{ki}$$

é um automorfismo de $s_k|_{U_{ijk}}$, isto é, $\alpha_{ijk} \in \text{Aut}(s_k|_{U_{ijk}})$.

Agora, como a gerbe possui $\mathbb{C}^*$ -band, o isomorfismo

$$\Theta_{k,ijk} : \underline{\mathbb{C}}^*(U_{ijk}) \xrightarrow{\simeq} \text{Aut}(s_k|_{U_{ijk}})$$

é bijetivo. Portanto, existe um único

$$g_{ijk} \in \underline{\mathbb{C}}^*(U_{ijk})$$

tal que

$$\alpha_{ijk} = \Theta_{k,ijk}(g_{ijk}).$$

Substituindo a definição de α_{ijk} , obtemos

$$\Theta_{k,ijk}(g_{ijk}) = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} \circ (\varphi_{ik})^{-1}.$$

Multiplicando à direita por φ_{ik} , obtemos a identidade fundamental

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \Theta_{k,ijk}(g_{ijk}) \circ \varphi_{ik}.$$

Afirmção 6. Os elementos g_{ijk} satisfazem a condição de cociclo de Čech

$$g_{jkl} g_{ikl}^{-1} g_{ijl} g_{ijk}^{-1} = 1.$$

em U_{ijkl} , ou seja,

$$\{g_{ijk}\} \in \check{Z}^2(X, \underline{\mathbb{C}}^*).$$

e portanto, $[\{g_{ijk}\}]$ é uma classe em $\check{H}^2(X, \underline{\mathbb{C}}^*)$.

Demonstração. Sejam U_i, U_j, U_k, U_l abertos da $\mathcal{G}$ -cobertura tais que $U_{ijkl} \neq \emptyset$. Queremos mostrar que

$$g_{jkl} g_{ikl}^{-1} g_{ijl} g_{ijk}^{-1} = 1 \quad \text{em } \mathbb{C}^*(U_{ijkl}).$$

Partimos da identidade fundamental que define os g_{ijk} :

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \Theta_{k,ijk}(g_{ijk}) \circ \varphi_{ik} \quad \text{em } U_{ijk}, \quad (7.8)$$

onde $\Theta_{k,ijk} : \mathbb{C}^*(U_{ijk}) \xrightarrow{\simeq} \text{Aut}(s_k|_{U_{ijk}})$ é o isomorfismo fornecido pela $\mathbb{C}^*$ -band.

Analogamente, sobre U_{jkl} temos

$$\varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} = \Theta_{l,jkl}(g_{jkl}) \circ \varphi_{jl} \quad \text{em } U_{jkl}. \quad (7.9)$$

Sobre U_{ijl} temos

$$\varphi_{jl} \circ \varphi_{ij} = \Theta_{l,ijl}(g_{ijl}) \circ \varphi_{il} \quad \text{em } U_{ijl}. \quad (7.10)$$

E sobre U_{ikl} temos

$$\varphi_{kl} \circ \varphi_{ik} = \Theta_{l,ikl}(g_{ikl}) \circ \varphi_{il} \quad \text{em } U_{ikl}. \quad (7.11)$$

Considere agora a composição $\varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ em U_{ijkl} . Calculamos esta composição de duas formas distintas.

Por um lado, utilizando (7.9) e em seguida (7.10), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} &= (\Theta_{l,jkl}(g_{jkl}) \circ \varphi_{jl}) \circ \varphi_{ij} \\ &= \Theta_{l,jkl}(g_{jkl}) \circ (\varphi_{jl} \circ \varphi_{ij}) \\ &= \Theta_{l,jkl}(g_{jkl}) \circ (\Theta_{l,ijl}(g_{ijl}) \circ \varphi_{il}) \\ &= \Theta_{l,ijkl}(g_{jkl} \cdot g_{ijl}) \circ \varphi_{il}, \end{aligned}$$

onde $\Theta_{l,ijkl}$ denota a restrição do isomorfismo Θ_l a U_{ijkl} , que coincide com $\Theta_{l,jkl}|_{U_{ijkl}}$ e com $\Theta_{l,ijl}|_{U_{ijkl}}$ sobre a interseção.

Por outro lado, utilizando (7.8) e em seguida (7.11), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} &= \varphi_{kl} \circ (\Theta_{k,ijk}(g_{ijk}) \circ \varphi_{ik}) \\ &= (\varphi_{kl} \circ \Theta_{k,ijk}(g_{ijk})) \circ \varphi_{ik}. \end{aligned}$$

Agora, a propriedade de compatibilidade (7.4) da $\mathbb{C}^*$ -band nos dá

$$\varphi_{kl} \circ \Theta_{k,ijk}(g_{ijk}) = \Theta_{l,ikl}(g_{ijk}) \circ \varphi_{kl} \quad \text{em } U_{ikl},$$

pois $\Theta_{k,ijk}(g_{ijk})$ é um automorfismo de $s_k|_{U_{ijk}}$ e, ao compor com φ_{kl} , obtemos um automorfismo de $s_l|_{U_{ikl}}$ que corresponde a g_{ijk} via $\Theta_{l,ikl}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} &= \Theta_{l,ikl}(g_{ijk}) \circ \varphi_{kl} \circ \varphi_{ik} \\ &= \Theta_{l,ikl}(g_{ijk}) \circ (\Theta_{l,ikl}(g_{ikl}) \circ \varphi_{il}) \\ &= \Theta_{l,ijkl}(g_{ijk} \cdot g_{ikl}) \circ \varphi_{il}. \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtidas para $\varphi_{kl} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$, temos

$$\Theta_{l,ijkl}(g_{jkl} \cdot g_{ijl}) \circ \varphi_{il} = \Theta_{l,ijkl}(g_{ijk} \cdot g_{ikl}) \circ \varphi_{il} \quad \text{em } U_{ijkl}.$$

Como φ_{il} é um isomorfismo, obtemos

$$\Theta_{l,ijkl}(g_{jkl} \cdot g_{ijl}) = \Theta_{l,ijkl}(g_{ijk} \cdot g_{ikl}) \quad \text{em } U_{ijkl}.$$

Finalmente, como $\Theta_{l,ijkl}$ é um isomorfismo de grupos, temos

$$g_{jkl} \cdot g_{ijl} = g_{ijk} \cdot g_{ikl} \quad \text{em } U_{ijkl},$$

reorganizando, obtemos a condição de cociclo

$$g_{jkl} g_{ikl}^{-1} g_{ijl} g_{ijk}^{-1} = 1 \quad \text{em } U_{ijkl},$$

como queríamos demonstrar. ■

7.4 Cálculo da classe de cohomologia de uma gerbe com $\mathbb{C}^*$ -band

Assim como fizemos para os fibrados de linhas na Seção 6.4.1, vamos agora descrever explicitamente como associar uma classe de cohomologia em $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ a uma gerbe com $\mathbb{C}^*$ -band.

Seja $\mathcal{G}$ uma gerbe sobre X munida de uma $\mathbb{C}^*$ -band. Fixemos uma $\mathcal{G}$ -cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de X e objetos $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$. Em cada interseção $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, escolhemos isomorfismos

$$\varphi_{ij}: s_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} s_j|_{U_{ij}}.$$

Sobre as interseções triplas $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, consideramos a composição

$$\alpha_{ijk} := \varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}: s_i|_{U_{ijk}} \longrightarrow s_i|_{U_{ijk}},$$

que é um automorfismo de $s_i|_{U_{ijk}}$.

Como a gerbe possui $\mathbb{C}^*$ -band, temos o isomorfismo

$$\Theta_i: \mathbb{C}^*(U_{ijk}) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(s_i|_{U_{ijk}}).$$

Portanto, existe um único $g_{ijk} \in \mathbb{C}^*(U_{ijk})$ tal que

$$\alpha_{ijk} = \Theta_i(g_{ijk}).$$

Explicitamente, escrevemos

$$\varphi_{ik}^{-1} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \Theta_i(g_{ijk}) \quad \text{em } U_{ijk}.$$

Equivalentemente,

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \Theta_i(g_{ijk}) \circ \varphi_{ik} \quad \text{em } U_{ijk}.$$

Os elementos g_{ijk} satisfazem a condição de 2-cociclo de Čech

$$g_{jkl} \cdot g_{ikl}^{-1} \cdot g_{ijl} \cdot g_{ijk}^{-1} = 1 \quad \text{em } U_{ijkl},$$

ou seja, $\{g_{ijk}\} \in \check{Z}^2(X, \mathbb{C}^*)$.

Agora, considere a sequência exata de feixes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\exp} \underline{\mathbb{C}}^* \longrightarrow 0.$$

Como $\underline{\mathbb{C}}$ é acíclico, temos o isomorfismo

$$\check{H}^2(X, \underline{\mathbb{C}}^*) \simeq \check{H}^3(X, \mathbb{Z}).$$

Para obter explicitamente a classe em $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$, escolhemos levantamentos locais $\psi_{ij} \in \check{C}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$ tais que

$$\exp(\psi_{ij}) = \varphi_{ij} \quad \text{em } U_{ij}.$$

Sobre as interseções triplas, temos

$$\exp((\delta\psi)_{ijk}) = (\delta\varphi)_{ijk} = g_{ijk}.$$

Como $g_{ijk} \in \underline{\mathbb{C}}^*(U_{ijk})$ está no núcleo de $\exp$, temos que $(\delta\psi)_{ijk}$ assume valores em $2\pi i\mathbb{Z}$. Escrevemos

$$(\delta\psi)_{ijk} = 2\pi i \cdot h_{ijk},$$

com $h_{ijk} \in \mathbb{Z}$. A família $\{h_{ijk}\}$ é um 3-cociclo em $\check{Z}^3(X, \mathbb{Z})$. Sua classe de cohomologia

$$c(\mathcal{G}) := [\{h_{ijk}\}] \in \check{H}^3(X, \mathbb{Z})$$

é o invariante associado à gerbe $\mathcal{G}$.

De forma mais concreta, escolhendo os isomorfismos φ_{ij} e os levantamentos ψ_{ij} , obtemos em U_{ijk} a relação

$$\psi_{ij} + \psi_{jk} - \psi_{ik} = 2\pi i \cdot h_{ijk},$$

com $h_{ijk} \in \mathbb{Z}$. A classe $\{h_{ijk}\}$ em $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$ é exatamente o invariante que classifica a gerbe.

7.5 Algumas considerações

De modo análogo ao que fizemos para fibrados de linhas no Capítulo 6, temos que um cociclo $\{g_{ijk}\} \in \check{Z}^2(X, \mathbb{C}^*)$ é um cobordo se, e somente se, a gerbe correspondente é trivial. Assim como nos fibrados de linhas, onde a classe $[\{\varphi_{ij}\}] \in \check{H}^1(X, \mathbb{C}^*)$ media a obstrução à trivialização, aqui a classe $[\{g_{ijk}\}] \in \check{H}^2(X, \mathbb{C}^*)$ mede a obstrução correspondente para gerbes.

Seguindo o mesmo procedimento adotado para fibrados de linhas, onde obtivemos o isomorfismo

$$\check{H}^1(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^2(X, \mathbb{Z}),$$

temos agora, através da sequência exata de feixes e do fato de $\mathbb{C}$ ser acíclico, o isomorfismo

$$\check{H}^2(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^3(X, \mathbb{Z}).$$

Este isomorfismo nos permite concluir que as classes de isomorfismo de gerbes com $\mathbb{C}^*$ -band sobre X estão em correspondência biunívoca com os elementos de $\check{H}^3(X, \mathbb{Z})$, assim como os fibrados de linhas são classificados por sua primeira classe de Chern em $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$.

Considerando que, para espaços que admitem boa cobertura, a cohomologia de Čech coincide com a cohomologia singular, concluímos que o grupo das classes de isomorfismo de gerbes com $\mathbb{C}^*$ -band sobre X é isomorfo a $H^3(X, \mathbb{Z})$. Assim, as gerbes fornecem a interpretação geométrica para este grupo.

O mesmo princípio pode ser estendido para n -gerbes. Nesse contexto, trabalha-se com uma $(n+1)$ -categoria, e uma n -gerbe é classificada por uma classe em $\check{H}^{n+1}(X, \mathbb{C}^*)$, e através do isomorfismo

$$\check{H}^{n+1}(X, \mathbb{C}^*) \simeq \check{H}^{n+2}(X, \mathbb{Z}),$$

obtemos um modelo geométrico para o grupo de cohomologia $H^{n+2}(X, \mathbb{Z})$. Dessa forma, a hierarquia de gerbes fornece uma interpretação geométrica para todos os grupos de cohomologia de grau superior, generalizando a correspondência entre fibrados de linhas e $H^2(X, \mathbb{Z})$.

APÊNDICE A

Noções de Álgebra Homológica

A álgebra homológica surgiu na topologia algébrica como uma forma de estudar espaços topológicos usando estruturas algébricas. Neste capítulo, vamos apenas introduzir alguns conceitos básicos dessa teoria.

A.1 Complexo de (co)cadeias e (co)homologia

Nesta seção e nas subsequentes, trabalharemos no contexto da categoria dos grupos abelianos (ou, de modo equivalente, dos $\mathbb{Z}$ -módulos). No entanto, todas as definições e resultados apresentados são igualmente válidos na categoria dos R -módulos, onde R é um anel comutativo unitário previamente fixado.

Definição A.1 (Complexo de cadeias). Um *complexo de cadeias* $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ é uma sequência de grupos abelianos e morfismos de grupos abelianos da seguinte forma:

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{i-1}} A_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} A_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} A_{i+1} \xleftarrow{\partial_{i+2}} \cdots \quad (\text{A.1})$$

satisfazendo a condição

$$\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os morfismos ∂_i são chamados de *morfismos de bordo*, e os elementos de A_i são chamados de *cadeias de grau i* .

A condição $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ equivale a

$$\text{Im}(\partial_{i+1}) \subset \text{Ker}(\partial_i).$$

o que possibilita a seguinte definição:

Definição A.2 (Grupo de homologia). Os grupos de homologia do complexo de cadeias A.1 são definidos como os quocientes:

$$H_i(A_\bullet) = \frac{\text{Ker}(\partial_i)}{\text{Im}(\partial_{i+1})}.$$

Além disso, definimos:

$$Z_i(A_\bullet) := \text{Ker}(\partial_i),$$

$$B_i(A_\bullet) := \text{Im}(\partial_{i+1}),$$

e conseqüentemente,

$$H_i(A_\bullet) := \frac{Z_i(A_\bullet)}{B_i(A_\bullet)}.$$

Os elementos de $Z_i(A_\bullet)$ são chamados de *ciclos de grau i* , os grupos $B_i(A_\bullet)$ são chamados *bordos de grau i* e os grupos $H_i(A_\bullet)$ são chamados de *classes de homologia de grau i* .

Observe que $B_i(A_\bullet) \subseteq Z_i(A_\bullet) \subseteq A_i$, o que implica que todo bordo de grau i é, necessariamente, um ciclo do mesmo grau e, analogamente, todo ciclo de grau i é uma cadeia desse grau. Uma classe de homologia $[a] \in H_i(A_\bullet)$ é representada por um ciclo a , ou seja, uma cadeia $a \in A_i$ tal que $\partial_i a = 0$. Além disso, duas cadeias a e a' representam a mesma classe de homologia, isto é,

$$[a] = [a'],$$

se, e somente se, existe uma cadeia $b \in A_{i+1}$ tal que

$$a' = a + \partial_{i+1} b,$$

ou equivalentemente,

$$a - a' = \partial_{i+1} b,$$

o que nos permite dizer que os ciclos a e a' são homólogos quando diferem por um bordo.

Em seguida, apresentaremos os *morfismos* entre complexos de cadeias, e posteriormente definiremos a categoria correspondente.

Definição A.3 (Morfismo de complexos de cadeias). Dados dois complexos de cadeias $(A_\bullet, \partial_\bullet^A)$ e $(B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, um *morfismo de complexos de cadeias* $\varphi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ é uma sequência de morfismos de grupos abelianos $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$ para cada grau i , tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xleftarrow{\partial_{i-1}^A} & A_{i-1} & \xleftarrow{\partial_i^A} & A_i & \xleftarrow{\partial_{i+1}^A} & A_{i+1} \xleftarrow{\partial_{i+2}^A} \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{i-1} & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i+1} \\ \cdots & \xleftarrow{\partial_{i-1}^B} & B_{i-1} & \xleftarrow{\partial_i^B} & B_i & \xleftarrow{\partial_{i+1}^B} & B_{i+1} \xleftarrow{\partial_{i+2}^B} \cdots \end{array}$$

ou seja, para todo i , tem-se

$$\varphi_{i-1} \circ \partial_i^A = \partial_i^B \circ \varphi_i.$$

Com isso, definimos a categoria CompCad , cuja classe de objetos é formada pelos complexos de cadeias e cujos morfismos são os morfismos de complexos de cadeias.

O grupo de homologia H_i foi definido a partir de um objeto da categoria CompCad . Agora, definiremos a ação correspondente nos morfismos. Dado um morfismo $\varphi_\bullet: (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, definimos o morfismo induzido entre grupos de homologia

$$\varphi_{*,i}: H_i(A_\bullet) \rightarrow H_i(B_\bullet) \quad (\text{A.2})$$

de forma natural por

$$\varphi_{*,i}([a]) = [\varphi_i(a)],$$

onde $[a]$ denota a classe de homologia representada pelo ciclo $a \in A_i$.

Afirmção 7. O morfismo A.2 está bem definido

Demonstração. Queremos mostrar que se $a \in Z_i(A_\bullet)$, então $\varphi_i(a) \in Z_i(B_\bullet)$. Ou seja, vamos garantir que a imagem de um ciclo ainda é um ciclo.

Seja $a \in Z_i(A_\bullet)$, então $\partial_i^A(a) = 0$. Pela comutatividade do diagrama, temos:

$$\partial_i^B(\varphi_i(a)) = \varphi_{i-1}(\partial_i^A(a)) = \varphi_{i-1}(0) = 0.$$

Portanto, $\varphi_i(a) \in Z_i(B_\bullet)$, ou seja, a imagem de um ciclo é um ciclo.

Agora, vamos verificar que se $a, a' \in A_i$ são tais que $[a] = [a']$, então $[\varphi_i(a)] = [\varphi_i(a')]$. Queremos garantir que a relação de equivalência na homologia é preservada pelo morfismo.

Se $[a] = [a']$, então existe $b \in A_{i+1}$ tal que:

$$a' = a + \partial_{i+1}^A(b).$$

Aplicando o morfismo φ_i , obtemos:

$$\varphi_i(a') = \varphi_i(a + \partial_{i+1}^A(b)) = \varphi_i(a) + \varphi_i(\partial_{i+1}^A(b)).$$

Pela comutatividade do diagrama:

$$\varphi_i(\partial_{i+1}^A(b)) = \partial_{i+1}^B(\varphi_{i+1}(b)).$$

Assim, temos:

$$\varphi_i(a') = \varphi_i(a) + \partial_{i+1}^B(\varphi_{i+1}(b)).$$

Logo, $[\varphi_i(a')] = [\varphi_i(a)]$, ou seja, a relação de equivalência na homologia é preservada.

Concluimos, portanto, que o morfismo $\varphi_{*,i}$ está bem definido, pois ele respeita a estrutura de ciclo e a relação de equivalência entre classes de homologia. ■

Assim, obtemos uma sequência de funtores (um para cada $i \in \mathbb{Z}$):

$$H_i : \text{CompCad} \rightarrow \text{GrpAb}.$$

Para tratar todos os graus simultaneamente, definimos SeqGrpAb como a categoria das sequências de grupos abelianos indexados por $\mathbb{Z}$, onde os objetos são sequências de grupos abelianos $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, e os morfismos são sequências de morfismos $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

A categoria SeqGrAb pode ser vista como uma subcategoria plena de CompCad , já que uma sequência pode ser interpretada como um complexo de cadeias em que todos os morfismos de bordo são nulos.

Os grupos de homologia induzem então o funtor:

$$H_\bullet : \text{CompCad} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

Invertendo o sentido das setas, obtemos a noção dual de cohomologia.

Definição A.4 (Complexo de cocadeias). Um *complexo de cocadeias* é uma sequência de morfismos de grupos abelianos da forma:

$$\dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{\delta^{i-1}} A^i \xrightarrow{\delta^i} A^{i+1} \rightarrow \dots \quad (\text{A.3})$$

satisfazendo $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os morfismos δ_i são chamados de *morfismos de cobordo*, e os elementos de A_i são chamados de *cocadeias de grau i* .

De maneira análoga temos as seguintes definições:

Definição A.5 (Grupo de cohomologia). Os *grupos de cohomologia* do complexo de cocadeias A.3 são definidos como os quocientes

$$H^i(A^\bullet) = \frac{\text{Ker}(\delta^i)}{\text{Im}(\delta^{i-1})}.$$

Além disso, definimos

$$\begin{aligned} Z^i(A^\bullet) &:= \text{Ker}(\delta^i), \\ B^i(A^\bullet) &:= \text{Im}(\delta^{i+1}) \\ H^i(A^\bullet) &:= \frac{Z^i(A^\bullet)}{B^i(A^\bullet)} \end{aligned}$$

Os elementos de $Z_i(A_\bullet)$ são chamados de *cociclos de grau i* , os grupos $B_i(A_\bullet)$ são chamados *cobordos de grau i* e os grupos $H_i(A_\bullet)$ são chamados de *classes de cohomologia de grau i* .

De forma análoga ao que fizemos para complexos de cadeias, podemos definir morfismos entre complexos de cocadeias, e assim ficam definidos a categoria CompCocad e o funtor covariante

$$H^\bullet : \text{CompCocad} \rightarrow \text{SeqGrAb}.$$

A.2 Sequências Exatas

Definição A.6 (Sequência de morfismo). Uma *sequência de morfismos* de grupos abelianos é uma sequência da forma:

$$\dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} A^i \xrightarrow{\varphi^i} A^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots \quad (\text{A.4})$$

Dizemos que essa sequência é *exata* se

$$\text{Ker}(\varphi^i) = \text{Im}(\varphi^{i-1})$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Quando o conjunto de índices é $\mathbb{Z}$ a sequência exata é chamada de *sequência exata longa*. Veremos em breve outros casos semelhantes. Naturalmente, é possível inverter o sentido das setas.

Uma sequência exata longa é um caso particular de um complexo de (co)cadeias, em que os grupos de (co)homologia são todos nulos (portanto, podemos interpretar os morfismos φ_i como ∂_i ou δ^i). Isso significa que, dado um complexo de (co)cadeias, os grupos de (co)homologia medem a obstrução à exatidão. A noção de morfismo de complexos de (co)cadeias se restringe às sequências exatas longas, definindo a categoria SeqExL, onde os objetos são sequências exatas longas de grupos abelianos e os morfismos são morfismos de sequências exatas longas.

A categoria SeqExL é uma subcategoria plena de CompCad ou CompCocad, dependendo da direção das setas.

Podemos também restringir os conjuntos de índices, considerando sequências dos seguintes tipos:

- Finitas:

$$A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \rightarrow A^n.$$

- Infinitas à direita:

$$A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \dots$$

- Infinitas à esquerda:

$$\dots \rightarrow A^{-2} \rightarrow A^{-1} \rightarrow A^0.$$

- Infinitas em ambas as direções:

$$\dots \rightarrow A^{-1} \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots$$

Definição A.7 (Sequência exata curta). Uma *sequência exata curta* é uma sequência exata finita da forma

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0.$$

Nesse caso, i é, necessariamente injetor e π sobrejetor.

A.3 Operações entre complexos de (co)cadeias

Ao lidarmos com complexos de cadeias e cocadeias, é natural considerar operações que relacionam diferentes complexos ou que combinam suas estruturas. Tais operações são essenciais para a construção de novos complexos. Nesta seção, introduziremos algumas operações fundamentais entre complexos de (co)cadeias, explorando suas propriedades e aplicações no contexto da álgebra homológica.

Consideremos dois morfismos de complexos de cadeias $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$. Definimos o morfismo soma $\varphi_\bullet + \psi_\bullet$ somando φ_n e ψ_n em cada grau n . Essa soma resulta em um morfismo de complexos. De fato, temos:

$$\begin{aligned} (\varphi_n + \psi_n) \circ \partial_{n+1}^A &= \varphi_n \circ \partial_{n+1}^A + \psi_n \circ \partial_{n+1}^A \\ &= \partial_{n+1}^B \circ \varphi_{n+1} + \partial_{n+1}^B \circ \psi_{n+1} \\ &= \partial_{n+1}^B \circ (\varphi_{n+1} + \psi_{n+1}). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto dos morfismos de $(A_\bullet, \partial_\bullet^A)$ para $(B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ possui naturalmente a estrutura de um grupo abeliano. Além disso, essa estrutura é compatível com a composição de morfismos. Em outras palavras, para morfismos definidos, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_\bullet \circ (\psi_\bullet + \eta_\bullet) &= (\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet) + (\varphi_\bullet \circ \eta_\bullet), \\ (\varphi_\bullet + \psi_\bullet) \circ \eta_\bullet &= (\varphi_\bullet \circ \eta_\bullet) + (\psi_\bullet \circ \eta_\bullet). \end{aligned}$$

A soma direta e o produto direto de uma família de complexos são definidos aplicando a soma direta ou o produto direto de grupos abelianos em cada grau.

Além disso, dado um morfismo $\varphi_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$, podemos definir o *kernel* correspondente por $(\text{Ker } \varphi)_n := \text{Ker}(\varphi_n)$, restringindo os morfismos de bordo. A restrição é bem definida, pois se $a \in \text{Ker}(\varphi_{n+1})$, então $\partial_{n+1}^A a \in \text{Ker}(\varphi_n)$. Com efeito:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\partial_{n+1}^A a) &= \partial_{n+1}^B(\varphi_{n+1}(a)) \\ &= \partial_{n+1}^B(0) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, definimos a *imagem*, o *cokernel* e a *coimagem*.

A.4 Homotopia de morfismo de complexo de (co)cadeias

Em álgebra homológica, a noção de *homotopia* entre morfismos de complexos desempenha um papel fundamental na análise da estrutura dos complexos e na definição de equivalências. Dois morfismos de complexos são ditos homotópicos se suas diferenças podem ser expressas através de um operador específico, denominado operador de homotopia. Esta construção permite relacionar complexos aparentemente distintos, estabelecendo uma equivalência mais fraca que a isomorfia, mas que

ainda preserva informações essenciais sobre a homologia e a cohomologia dos complexos envolvidos. A seguir, formalizaremos a definição de homotopia.

Definição A.8 (Homotopia). Sejam $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \rightarrow (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ morfismos de complexos de cadeias. Uma *homotopia* de $\varphi_\bullet$ a $\psi_\bullet$ é uma sequência de morfismos de grupos abelianos $P_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$ tal que:

$$\varphi_n - \psi_n = \partial_{n+1}^B \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^A.$$

Se existe uma homotopia entre $\varphi_\bullet$ e $\psi_\bullet$, dizemos que esses morfismos são *homotópicos*.

O conceito de homotopia define uma relação de equivalência, e com isso, podemos definir a categoria CompCadH , onde os objetos são complexos de cadeia, e os morfismos são classes de equivalência de morfismo de complexos de cadeias a menos de homotopia.

A.5 Considerações

As definições e propriedades discutidas neste apêndice constituem uma linguagem universal. Não nos aprofundamos em uma teoria específica, como a (co)homologia simplicial, singular ou de De Rham, mas sim nas estruturas que elas compartilham. Neste nível de generalidade, o complexo de cadeias funciona como uma "máquina" algébrica: não importa se as cadeias representam triângulos em uma superfície ou formas diferenciais em uma variedade, o processo de tomar o quociente do núcleo pela imagem permanece o mesmo. A (co)homologia atua, portanto, como uma ferramenta de diagnóstico que detecta "buracos" ou obstruções em diferentes contextos matemáticos. Aqui apresentamos uma base teórica, que fornece um vocabulário necessário para explorar ramificações da topologia algébrica e da geometria, onde essas estruturas abstratas adquiram conteúdo geométrico e intuitivo concreto.

Índice Remissivo

- $\mathcal{V}$ -Transformação natural, 34
- $\mathcal{V}$ -categoria, 31
- $\mathbb{C}^*$ -band, 129
- 0-morfismo, 51
- 1-morfismo, 51
 - identidade, 51
- 2-Categoria
 - forte, 39
 - fraca, 51
- 2-morfismo, 51
 - de 2-funtores, 48
 - identidade, 51
 - invertível, 51
- Adjunto
 - à direita, 17
 - à esquerda, 17
- Adjunção, 17
- Associador, 52
- Atlas, 96
- Axioma
 - da unidade, 22
 - do pentágono, 22
- Bifuntor, 18
- Bordos de grau i , 138
- Carta local, 96
- Categoria, 7
 - $2\text{-Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 47
 - CompCad, 139
 - CompCadH, 143
 - CompCocad, 140
 - dos monoides, 27
 - Grp, 8
 - GrpAb, 8
 - pequena, 8
 - SeqExL, 141
 - SeqGrpAb, 140
 - Sets, 8
 - Top, 8
 - $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$, 8
 - enriquecida, 31
 - FibVect, 98
 - FibVect_X , 98
 - $\text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, 15
 - monoidal, 21
 - monoidal estrita, 22, 31
 - monoidal simétrica, 30
 - oposta, 13
 - $\text{PreFeixes}_{X, \mathcal{C}}$, 64
 - produto, 17, 50
 - Vect_X , 98
 - $\text{Vect}_X(V)$, 98
- Categorias isomorfas, 13
- Ciclos de grau i , 138
- Classes
 - de cohomologia de grau i , 140
 - de homologia de grau i , 138
- Cobordo de grau i , 140
- Cociclo de grau i , 140
- Cohomologia de Čech, 83, 84

Coimagem, 70, 142
 Cokernel, 70, 142
 Complexo
 de cadeias, 137
 de Čech, 83
 de cocadeias, 140
 Composição
 horizontal, 35, 51
 vertical, 35, 51
 Categoria
 dos funtores, 15
 Dado
 de descida, 126
 de descida efetivo, 126
 Diferencial de Čech, 84
 Equivalência, 49, 50
 de categorias, 16
 Espaço base, 96
 Espaço total, 96
 Feixe, 73
 acíclico, 87
 fino, 86
 de categorias, 127
 Feixificação, 75
 Fibra, 96
 típica, 95
 Fibrado
 de linhas, 96
 pull-back, 100
 produto, 98, 100
 trivial, 98
 vetorial, 95
 Funtor, 11
 monoidal estrito, 29
 monoidal forte, 29
 binário, 18
 cheio, 14
 contravariante, 13
 covariante, 11
 de restrição, 124
 fiel, 14
 monoidal, 28
 monoidal simétrico, 31
 plenamente fiel, 14
 Função de transição, 111
 Gerbe, 127
 Germe, 65
 Grupo
 de cohomologia, 140
 de homologia, 138
 Homotopia, 143
 de funções contínuas, 43
 de homotopias, 43
 Imagem, 70, 142
 Isomorfismo, 9, 98
 simétrico, 30
 associativo, 22
 canônico, 15
 de adjunção, 17
 natural, 15, 30
 Kernel, 70, 142
 Mergulho
 cheio, 14
 de categorias, 14
 Monoide, 25
 comutativo, 31
 Morfismo
 de bordo, 137
 de cobordo, 140
 de pré-feixes, 63
 de restrição, 62

- canônico, 15
- de 2-funtores, 47
- de complexos de cadeias, 138
- de feixes, 74
- de fibrados vetoriais, 97
- de funtores, 15
- de funtores monoidais, 29
- de monoides, 26
- identidade, 15

Posto de um fibrado vetorial, 96

Produto

- monoidal, 21

Pré-feixe, 62

- constante, 63

Pseudo-funtor, 123

Push-forward, 68, 103

Refinamento, 86

Sequência

- exata, 141
- exata curta, 141
- exata de pré-feixe, 72
- exata longa, 141
- de morfismo, 141

Seção, 63

- global, 63, 102
- local, 63, 102

Stack, 127

Sub-2-categoria, 50

Sub-feixe, 75

Sub-pré-feixe, 64

Subcategoria, 11

Subfibrado, 100

Suporte, 66

Talo, 65

Torsor, 127

Transformação

- natural, 15
- natural monoidal, 29

Trivialização, 98

- local, 96

Unidade monoidal, 21

Unitor

- à direita, 52
- à esquerda, 52

Referências Bibliográficas

- [1] BRUZZO, U. *Introduction to algebraic topology and algebraic geometry*. Notas de curso ministrado na International School for Advanced Studies – SISSA, Trieste, durante o ano acadêmico de 2002/2003. Genova, 2004. Disponível em: <https://people.sissa.it/bruzzo/notes/IATG/notes.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2025.
- [2] BRYLINSKI, Jean-Luc. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*. Berlin: Springer, 1992.
- [3] GODEMENT, Roger. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. (Actualités scientifiques et industrielles). Paris: Hermann, 1998.
- [4] JOHNSON, Niles; YAU, Donald. *2-Dimensional Categories*. Oxford: Oxford University Press, 2020.
- [5] MAC LANE, Saunders. *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer Verlag, 1998.
- [6] MILNOR, John W.; STASHEFF, James D. *Characteristic Classes*. Princeton: Princeton University Press, 1974.
- [7] MUNKRES, J. R. *Topology*. Second edition. United States of America: Pearson, 2000.
- [8] RUFFINO, Fabio Ferrari. *Introdução à Geometria Algébrica*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo. (A publicar)