



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cálculo funcional associado a problemas com condições dinâmicas de contorno

Muriel Andreane Dalcy

São Carlos-SP
Fevereiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Cálculo funcional associado a problemas com condições dinâmicas de contorno

Muriel Andreane Dalcy

Orientador: Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi

Coorientador: Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutora em Matemática.

São Carlos-SP
Fevereiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Muriel Andreane Dalcy, realizada em 27/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi (UFSCar)

Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (USP)

Prof. Dr. Éder Ritis Aragão Costa (USP)

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon (USP)

Profa. Dra. Karina Schiabel (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho à minha mãe, Roseli.

Agradecimentos

À minha mãe pelo carinho e incentivo aos meus estudos.

Ao meu irmão Anderson pelo apoio e confiança em mim.

Aos amigos Gustavo, Bárbara, Mateus, Amanda e Ian pelo constante apoio e incentivo.

Ao meu orientador Rafael Barostichi pela orientação, incentivo e paciência.

Ao meu coorientador Pedro Lopes pela paciência e dedicação a este trabalho.

Ao professor Tiago Picon pela orientação durante a graduação e pelo incentivo para que ingressasse na pós-graduação.

Ao professor Jorge Hounie pela orientação e apoio durante o Mestrado.

À minha psicóloga Laura, cujo suporte foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

A todos os professores que tive ao longo de minha formação.

À CAPES pelo financiamento da bolsa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo do cálculo funcional holomorfo associado ao problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u)) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) + c_\Omega u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u)) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u) - a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) \cdot \nu + c_\Gamma u + g(u), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u &= u_0, & t = 0, x \in \overline{\Omega},\end{aligned}$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^∞ . Nosso objetivo principal é mostrar que o operador setorial associado ao problema acima possui um cálculo funcional H_∞ limitado e, para isso, utilizaremos ferramentas presentes no cálculo de Boutet de Monvel, assim como alguns conceitos de Análise Funcional.

Palavras-chave: Cálculo funcional, problemas de contorno, equações parabólicas, operadores pseudodiferenciais, Boutet de Monvel.

Abstract

This work aims to study the holomorphic functional calculus associated with the problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u)) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) + c_\Omega u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u)) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u) - a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) \cdot \nu + c_\Gamma u + g(u), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u &= u_0, & t = 0, x \in \overline{\Omega},\end{aligned}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded and connected open set with C^∞ boundary $\Gamma = \partial\Omega$. Our main goal is to show that the sectorial operator associated with the above problem has a bounded H_∞ functional calculus and, for this purpose, we will utilize tools from the Boutet de Monvel calculus, as well as concepts from Functional Analysis.

Keywords: Functional calculus, boundary value problem, parabolic equations, pseudo-differential operators, Boutet de Monvel.

Sumário

Lista de Símbolos	xiii
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Interpolação complexa	5
1.2 Potências de operadores positivos	7
1.3 Cálculo funcional	10
2 Problema com coeficientes constantes	15
2.1 Formulação	15
2.2 Cálculo do resolvente de A_{aux}	17
2.3 Setorialidade de A_{aux}	19
2.4 Cálculo funcional H_∞ limitado	25
3 Caso geral	31
3.1 Formulação	31
3.2 Cálculo funcional H_∞ limitado	33
3.3 Localização	43
A Operadores pseudodiferenciais	47
A.1 Classes de símbolos	48
A.2 Integrais oscilatórias	52
A.3 Composição	55

A.4	Operadores pseudodiferenciais elípticos e parametrizes	57
B	Cálculo de Boutet de Monvel	59
B.1	Definições e resultados preliminares	59
B.2	Operadores de Boutet de Monvel	61
B.3	Boutet de Monvel com parâmetros	66
	Referências Bibliográficas	73

Lista de Figuras

1	Curva Γ' .	3
1.1	Setor Σ_ω e curva Γ .	12

Lista de Tabelas

B.1 Composições de operadores de Boutet de Monvel.	71
--	----

Lista de Símbolos

1) $\langle \xi \rangle \doteq (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2) $\langle \xi, \lambda \rangle \doteq (1 + |\xi|^2 + |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) $d\xi \doteq (2\pi)^{-n} d\xi$.

4) $\mathcal{F}$ denota o operador transformada de Fourier, definido por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

Também utilizaremos a notação $\widehat{u}(\xi) \doteq \mathcal{F}(u)(\xi)$.

5) $\mathcal{F}^{-1}$ denota a transformada de Fourier inversa, dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) \doteq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} u(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} u(\xi) d\xi.$$

6) $\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'}$ denota a transformada de Fourier parcial, definida por

$$\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u \doteq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} u(x', x_n) dx'.$$

Também utilizaremos a notação $\acute{u}(\xi', x_n) \doteq \mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u$.

7) Δ_Γ denota o operador de Laplace-Beltrami, definido por $\Delta_\Gamma f \doteq -\operatorname{div}_\Gamma \operatorname{grad}_\Gamma f$.

8) $\mathbb{R}_+^n$ e $\mathbb{R}_-^n$ denotam os conjuntos

$$\mathbb{R}_\pm^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \gtrless 0\}.$$

Precisaremos também dos seguintes espaços:

1) $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço de todos os operadores lineares e limitados $T : X \rightarrow Y$. Se $X = Y$, escrevemos apenas $\mathcal{L}(X)$.

2) $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, denota o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|f\|_p \doteq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

3) $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, denota o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\langle D_x \rangle^s f \doteq \mathcal{F}^{-1} \left[\langle \xi \rangle^s \widehat{f}(\xi) \right] \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

4) O espaço $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ será denotado apenas por $H^s(\mathbb{R}^n)$.

5) $H_0^1(\Omega)$ denota o fecho do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

6) $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, $1 < p, q < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, denota o espaço de Besov, formado pelas funções $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} \doteq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\varphi_j(D_x)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

no qual $\{\varphi_j\}_{j \geq 0}$ é uma partição da unidade.

Introdução

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u)) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) + c_\Omega u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u)) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u) - a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) \cdot \nu + c_\Gamma u + g(u), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u &= u_0, & t = 0, x \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^∞ . Observe que o problema acima pode ser reformulado como $u'(t) + Au(t) = F(u)$, no qual $F(u) = (f(u), g(u))$ e $A : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -\operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}) - b_\Omega \cdot \operatorname{grad} - c_\Omega & 0 \\ a_\Omega \cdot \operatorname{grad} \cdot \nu & -\operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma) - b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma - c_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Barostichi e Lopes provaram em [3] existência e regularidade de soluções globais do problema acima, assim como a setorialidade do operador A .

Nosso objetivo neste trabalho será o estudo do cálculo funcional do operador A , visando, entre outras coisas, o estudo de espaços de interpolação complexos associados a (1). Para isso, trabalhamos primeiramente em garantir a existência de potência fracionária limitada para o operador A definido em (2) por meio do estudo de seu cálculo funcional. Isto é, nosso primeiro passo será mostrar que o operador A possui cálculo funcional H_∞ limitado, ou seja, satisfaz $\|f(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \|f\|_{L^\infty}$ para certa classe de funções holomorfas limitadas, e então concluir que o mesmo possui potência fracionária limitada. Os principais conceitos aqui citados serão apresentados com mais detalhes no capítulo 1.

Para ilustrar nossos resultados, considere inicialmente X um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|$ e um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear não limitado, fechado e densamente definido em X com domínio $D(\tilde{A})$. Assuma também que $\tilde{A}$ seja autoadjunto e positivo definido. Considere então o seguinte problema de evolução linear e homogêneo:

$$\begin{aligned} u_t + \tilde{A}u &= 0, & t > 0, \\ u(0) &= v. \end{aligned}$$

Denotando $X_\alpha \doteq D(\tilde{A}^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, segue pelos resultados da referência [16] que X_α forma uma escala

de espaços de Hilbert. E em particular, para $0 < \alpha < \beta < 1$, as inclusões

$$D(\tilde{A}) = X_1 \subset X_\beta \subset X_\alpha \subset X_0 = X$$

são contínuas. Mais ainda, como $\tilde{A}$ é autoadjunto e positivo definido, segue pelo Teorema 4.36 da referência [18] que $D(\tilde{A}^\alpha) = [X, D(\tilde{A})]_\alpha$.

A igualdade anterior não é trivial quando tratamos de operadores associados a problemas com condições de contorno dinâmicas na fronteira. Por este motivo, o capítulo 2 ilustra, a partir de um problema já conhecido, uma possível abordagem para o caso citado anteriormente. Como motivação, vejamos a seguir um exemplo mais simples no qual possuímos um operador definido no espaço de Hilbert $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 0.1. Considere o operador $A = 1 - \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. Por meio do uso de ferramentas de análise funcional é possível vermos que A é um operador autoadjunto e positivo definido, e por isso setorial e possui cálculo funcional H_∞ limitado (vide referência [22], capítulo 16). No entanto, tal resultado também pode ser obtido através do estudo do resolvente $R(\lambda, A)$. De fato, se $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $(\lambda - A)u = f$, obtemos pela transformada de Fourier que

$$R(\lambda, A)f = (\lambda - A)^{-1}f = \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \hat{f} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \hat{f}(\xi) d\xi$$

para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Mais ainda, se $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, segue pelo Teorema de Plancherel que

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \hat{f} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\| (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{C}{1 + |\lambda|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

o que mostra que A é setorial.

Agora, seja ω_A com $0 < \omega_A < \frac{\pi}{2}$. Como o espectro $\sigma(A)$ está contido no eixo real positivo, tem-se em particular que A é um operador setorial com ângulo ω_A . Dado ω tal que $\omega_A < \omega \leq \frac{\pi}{2}$, considere o espaço $\dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, definido em 1.21. Recordamos que, para toda $h \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, um cálculo funcional de A pode ser definido por

$$h(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

no qual Γ é uma curva como a ilustrada na figura 1.1.

Vejamos que o operador $A = 1 - \Delta$ possui cálculo funcional H_∞ limitado. Com efeito, sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$. Temos que

$$\begin{aligned} h(1 - \Delta)f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} f d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \hat{f}(\xi) d\xi \right) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} d\lambda \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} d\lambda \widehat{f}(\xi) \right).$$

Aplicando o Teorema de Plancherel, obtemos que

$$\begin{aligned} \|h(1 - \Delta)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} d\lambda \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= (2\pi)^{-n} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} d\lambda \widehat{f}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} d\lambda \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\lambda)}{\lambda - 1 - |\xi|^2} d\lambda \right|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Note que podemos trocar a curva Γ por outra fechada Γ' em torno de $1 + |\xi|^2$, como ilustra a figura a seguir.

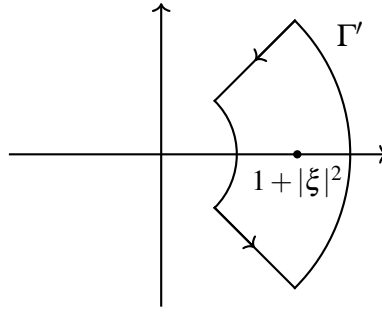


Figura 1: Curva Γ' .

Assim, segue por aplicação da fórmula integral de Cauchy que

$$\begin{aligned} \|h(1 - \Delta)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= C \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{h(\lambda)}{\lambda - 1 - |\xi|^2} d\lambda \right|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |h(\lambda - 1 - |\xi|^2)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C \|h\|_{\infty}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

e portanto concluímos que $A = 1 - \Delta$ possui cálculo funcional H_{∞} limitado.

O presente trabalho está organizado como segue. No Capítulo 1, apresentamos alguns dos principais conceitos utilizados ao longo do texto, como interpolação complexa, setorialidade de operadores e cálculo funcional. No Capítulo 2, estudamos um caso particular do problema (1) com coeficientes constantes com o objetivo de encontrarmos uma possível abordagem para o caso geral; este último é estudado com mais detalhes no Capítulo 3, onde apresentamos o principal resultado deste trabalho, enunciado a seguir:

Teorema 0.2. *Sejam $\omega \in (0, \pi]$ e $A_{aux} : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$ o operador definido por*

$$A_{aux} = - \begin{pmatrix} \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad} + c_\Omega & 0 \\ 0 & \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma + c_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Então A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, isto é, $\|f(A_{aux})\| \leq C_\omega \|f\|_\infty$ para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$ e para uma constante $C_\omega > 0$, no qual

$$f(A_{aux}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda)(\lambda - A_{aux})^{-1} d\lambda,$$

para toda $f \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$.

O Apêndice A apresenta os conceitos de operadores pseudodiferenciais e parametrizes de operadores elípticos e o Apêndice B apresenta brevemente os elementos do cálculo de Boutet de Monvel.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns dos principais conceitos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo do texto. Todos os resultados aqui citados foram retirados das referências [18] e [22].

1.1 Interpolação complexa

Iniciamos com algumas definições presentes nos capítulos 1 e 2 da referência [18].

Definição 1.1. Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que (X, Y) é um par de interpolação se ambos X e Y estão imersos continuamente em um espaço vetorial topológico Hausdorff $\mathcal{V}$. Neste caso, a interseção $X \cap Y$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ e é um espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{X \cap Y} \doteq \max\{\|v\|_X, \|v\|_Y\}.$$

Mais ainda, a soma $X + Y \doteq \{x + y; x \in X, y \in Y\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ e é munido da norma

$$\|v\|_{X+Y} \doteq \inf_{\substack{x \in X, y \in Y \\ x+y=v}} \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Definição 1.2. Se (X, Y) é um par de interpolação, então um espaço intermediário é dado por qualquer espaço de Banach E que satisfaz

$$X \cap Y \subset E \subset X + Y.$$

Notação: Dado um operador linear $T : X + Y \rightarrow X + Y$, dizemos que $T \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y)$ se sua restrição a X pertence a $\mathcal{L}(X)$ e sua restrição a Y pertence a $\mathcal{L}(Y)$.

Definição 1.3. Um espaço de interpolação E entre X e Y é um espaço intermediário tal que, para todo $T \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y)$, a restrição de T a E pertence a $\mathcal{L}(E)$.

Isto implica o seguinte resultado.

Lema 1.4. *Seja (X, Y) um par de interpolação e seja E um espaço de interpolação entre X e Y . Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada operador linear $T : X + Y \rightarrow X + Y$ com $T|_X \in \mathcal{L}(X)$ e $T|_Y \in \mathcal{L}(Y)$, temos que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C \max \left\{ \|T\|_{\mathcal{L}(X)}, \|T\|_{\mathcal{L}(Y)} \right\}.$$

A demonstração do lema acima pode ser encontrada na introdução da referência [18].

Seja (X, Y) um par de interpolação de espaços de Banach complexos.

Definição 1.5. Considere a faixa $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; 0 \leq x \leq 1\}$. Denotamos por $\mathcal{F}(X, Y)$ o espaço de todas as funções $f : S \rightarrow X + Y$ tais que

1. f é analítica no interior de S e contínua e limitada até a fronteira, com valores em $X + Y$;
2. $t \mapsto f(it) \in C_b(\mathbb{R}, X)$, $t \mapsto f(1 + it) \in C_b(\mathbb{R}, Y)$, e

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)} = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_Y \right\} < \infty.$$

Definição 1.6. Para cada $\theta \in [0, 1]$, definimos

$$\begin{aligned} [X, Y]_\theta &\doteq \{f(\theta); f \in \mathcal{F}(X, Y)\}, \\ \|a\|_{[X, Y]_\theta} &\doteq \inf_{\substack{f \in \mathcal{F}(X, Y) \\ f(\theta) = a}} \|f\|_{\mathcal{F}(X, Y)}. \end{aligned}$$

O conjunto $[X, Y]_\theta$ é isomorfo ao espaço quociente $\mathcal{F}(X, Y)/\mathcal{N}_\theta$, no qual $\mathcal{N}_\theta$ é o subconjunto de $\mathcal{F}(X, Y)$ formado pelas funções que se anulam em $z = \theta$. Como $\mathcal{N}_\theta$ é fechado, o espaço quociente é de Banach, e portanto $[X, Y]_\theta$ é um espaço de Banach.

São válidas as seguintes propriedades.

1. Para cada $\theta \in (0, 1)$, vale a igualdade $[X, Y]_\theta = [Y, X]_{1-\theta}$.
2. Se $Y = X$ então $[X, X]_\theta = X$, com normas idênticas.
3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ e cada $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, temos que $f(\theta + it) \in [X, Y]_\theta$ para cada $\theta \in (0, 1)$ e também

$$\|f(\theta + it)\|_{[X, Y]_\theta} = \|f(\theta)\|_{[X, Y]_\theta}.$$

Proposição 1.7. *Seja $\theta \in (0, 1)$. Temos que*

$$X \cap Y \subset [X, Y]_\theta \subset X + Y.$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada na página 50 da referência [18].

O resultado a seguir garante que os espaços $[X, Y]_\theta$ são espaços de interpolação. Sua demonstração pode ser encontrada na página 51 da referência [18].

Teorema 1.8. *Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) pares de interpolação complexos. Se T é um operador linear tal que $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2) \cap \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$, então a restrição de T a $[X_1, Y_1]_\theta$ pertence a $\mathcal{L}([X_1, Y_1]_\theta, [X_2, Y_2]_\theta)$ para cada $\theta \in (0, 1)$. Mais ainda,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_1, Y_1]_\theta, [X_2, Y_2]_\theta)} \leq \left(\|T\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{\mathcal{L}(Y_1, Y_2)}\right)^\theta. \quad (1.1)$$

Corolário 1.9. *Para cada $\theta \in (0, 1)$, temos que*

$$\|y\|_{[X, Y]_\theta} \leq \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^\theta, \quad (1.2)$$

para todo $y \in X \cap Y$.

Finalizamos a seção com um exemplo extraído da referência [18].

Exemplo 1.10. Seja (Ω, μ) um espaço de medida no qual μ é uma medida σ -finita, e sejam $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Então

$$[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_\theta = L^p(\Omega), \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

e suas normas coincidem. Caso $p_0 = \infty$ ou $p_1 = \infty$, a afirmação permanece válida se considerarmos a convenção $1/\infty = 0$.

1.2 Potências de operadores positivos

Os resultados e definições presentes nesta seção foram extraídos dos capítulos 1 e 4 das referências [22] e [18], respectivamente. Ao longo desta seção, X denotará um espaço vetorial complexo de Banach.

Definição 1.11. Seja $A : D(A) \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido em X . Então seu conjunto resolvente $\rho(A)$ é definido como o conjunto de todos os números complexos λ tais que $(\lambda - A)$ possui uma inversa limitada $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. A função $(\lambda - A)^{-1}$ definida para $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A . Mais ainda, o complemento de $\rho(A)$ é chamado de espectro de A e é denotado por $\sigma(A)$.

Definição 1.12. Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é positivo se o conjunto resolvente de A contém $(-\infty, 0]$ e se existe $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \leq 0. \quad (1.3)$$

Se $A : X \rightarrow X$ é um operador positivo e limitado, então as potências A^z , para $z \in \mathbb{C}$, são definidas por

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^z R(\lambda, A) d\lambda,$$

no qual γ é uma curva suave por partes positivamente orientada contornando $\sigma(A)$, sem passar por $(-\infty, 0]$, com índice 1 em relação a todo elemento de $\sigma(A)$.

Para definirmos A^z para o caso em que A é um operador não limitado, precisamos do lema a seguir.

Lema 1.13. *Seja A um operador positivo. Então o conjunto resolvente de A contém o conjunto*

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \leq 0, |\operatorname{Im} \lambda| < \frac{|\operatorname{Re} \lambda| + 1}{M} \right\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < \frac{1}{M} \right\},$$

no qual M é o mesmo da Definição 1.3, e para cada $\theta_0 \in (0, \arctan 1/M)$, $r_0 \in (0, 1/M)$, existe $M_0 > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_0}{1 + |\lambda|}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq r_0$, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda < 0$ e $|\operatorname{Im} \lambda|/|\operatorname{Re} \lambda| \leq \tan \theta_0$.

Nos resultados a seguir, vamos fixar um operador A positivo. Para $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $r > 0$, considere a curva $\gamma_{r,\theta}$ definida por

$$\gamma_{r,\theta} = -\gamma_{r,\theta}^{(1)} - \gamma_{r,\theta}^{(2)} + \gamma_{r,\theta}^{(3)},$$

no qual $\gamma_{r,\theta}^{(1)}$ e $\gamma_{r,\theta}^{(3)}$ são parametrizadas por $z = \xi e^{i\theta}$ e $z = \xi e^{-i\theta}$, respectivamente, para $\xi \geq r$, e $\gamma_{r,\theta}^{(2)}$ é o círculo parametrizado por $z = re^{i\eta}$, para $-\theta \leq \eta \leq \theta$. Desta forma, podemos definir A^z para $\operatorname{Re} z < 0$ por meio de uma integral de Dunford.

Definição 1.14. Fixe quaisquer $r \in (0, 1/M)$, $\theta \in (\pi - \arctan 1/M, \pi)$. Para $\operatorname{Re} \alpha < 0$, defina

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\theta}} \lambda^\alpha R(\lambda, A) d\lambda. \quad (1.4)$$

Como $\lambda \mapsto \lambda^\alpha R(\lambda, A) = \lambda^\alpha (\lambda I - A)^{-1}$ é analítica em $\Lambda \setminus (-\infty, 0]$ com valores em $\mathcal{L}(X)$, a integral é um elemento de $\mathcal{L}(X)$ independente de r e θ .

Proposição 1.15. *São válidas as seguintes propriedades.*

1. Para $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, o operador definido em (1.4) coincide com A^{-n} (n -ésima potência do inverso de A);
2. Para $\operatorname{Re} z < -k$, $k \in \mathbb{N}$, a imagem de A^z está contida no domínio $D(A^k)$ e

$$A^k A^z x = A^{k+z} x, \quad x \in X.$$

3. Para $\operatorname{Re} z < 0$ e $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$, temos que $A^z x \in D(A^k)$ e

$$A^z A^k x = A^k A^z x.$$

4. Para $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 < 0$, temos que

$$A^{z_1} A^{z_2} = A^{z_1 + z_2}.$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada nas páginas 88 e 89 da referência [18].

Segue do item (4) da Proposição 1.15 que A^z é injetor, pois se $A^z x = 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é tal que $-n < \operatorname{Re} z$, então $A^{-n} x = A^{-n-z} A^z x = 0$, e portanto $x = 0$. Logo, é possível definir A^α para $\operatorname{Re} \alpha > 0$ como o inverso de $A^{-\alpha}$. Vejamos a seguir uma definição mais geral, que funciona também para $\operatorname{Re} \alpha = 0$.

Definição 1.16. Sejam $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < n$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$D(A^\alpha) = \{x \in X; A^{\alpha-n} x \in D(A^n)\}, \quad A^\alpha x = A^n A^{\alpha-n} x.$$

O operador A^α é independente de $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $m > n > \operatorname{Re} \alpha$, temos pelo item (4) da Proposição 1.15 que

$$A^{\alpha-m} x = A^{n-m} A^{\alpha-n} x,$$

e se $n > m$, a mesma igualdade segue do item (2) tomando $z = \alpha - n$ e $k = n - m$. Logo, $A^{\alpha-m} x \in D(A^m)$ se, e somente se, $A^{n-m} A^{\alpha-n} x \in D(A^m)$, isto é, $A^{\alpha-n} x \in D(A^n)$.

Se $\alpha = 0$, obtemos pela definição que $A^0 = I$. Mais ainda, se $\operatorname{Re} \alpha > 0$, temos que

$$D(A^\alpha) = A^{-\alpha}(X), \quad A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}.$$

De fato, $A^{\alpha-n} x \in D(A^n) = \operatorname{Im}(A^{-n})$ se, e somente se, existe $y \in X$ tal que $A^{\alpha-n} x = A^{-n} y$. Como A^{-n} é injetor, então y é único e, por definição, $A^\alpha x = A^n A^{\alpha-n} x = y$. Mais ainda,

$$A^{-n} A^{-\alpha} y = A^{-\alpha} A^{-n} y = A^{-\alpha} A^{\alpha-n} x = A^{-n} x,$$

e portanto $x = A^{-\alpha} y$ pertence à imagem de $A^{-\alpha}$ e $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$.

Seja $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Como A^α possui inversa limitada, então A^α é um operador fechado e $D(A^\alpha)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico. Como A^α possui inversa limitada, sua norma do gráfico é equivalente a

$$x \mapsto \|A^\alpha x\|,$$

que usualmente é considerada a norma canônica de $D(A^\alpha)$.

Observação 1.17. Se $\operatorname{Re} \alpha = 0$, i.e. $\alpha = it$ com $t \in \mathbb{R}$, então A^{it} é a inversa de A^{-it} no sentido que, para cada $x \in D(A^{it})$, $A^{it}x \in D(A^{-it})$ e $A^{-it}A^{it}x = x$.

De fato, se $x \in D(A^{it})$, então $A^{it-1}x \in D(A)$ e $A^{it}x = A(A^{it-1}x)$ por definição. Logo,

$$A^{-1-it}A^{it}x = A^{-1-it}A \cdot A^{it-1}x = A \cdot A^{-1-it}A^{it-1}x = A \cdot A^{-2}x = A^{-1}x \in D(A),$$

e portanto $A^{it}x \in D(A^{-it})$ e $A^{-it}A^{it}x = x$.

De forma geral, os operadores A^{it} não são limitados. No entanto, são operadores fechados, uma vez que A^{-1+it} é limitado, A é fechado e $A^{it} = A \cdot A^{-1+it}$. Logo, $D(A^{it})$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico de A^{it} .

Segue da definição anterior que, se $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < n \in \mathbb{N}$, o domínio $D(A^n)$ está imerso continuamente em $D(A^\alpha)$. De fato, para cada $x \in D(A^n)$, temos pelo item (3) da Proposição 1.15 que $A^{\alpha-n}x \in D(A^n)$ e também

$$A^\alpha x = A^n A^{\alpha-n}x = A^{\alpha-n}A^n x,$$

de forma que

$$\|A^\alpha x\| \leq \|A^{\alpha-n}\| \|A^n x\|.$$

Tal propriedade é generalizada no próximo teorema.

Teorema 1.18. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \alpha$. Então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ e, para cada $x \in D(A^\alpha)$, $A^\beta x = A^{\beta-\alpha}A^\alpha x$. Mais ainda, para cada $x \in D(A^\alpha)$, temos que $A^\beta x \in D(A^{\alpha-\beta})$ e $A^{\alpha-\beta}A^\beta x = A^\alpha x$. Reciprocamente, se $x \in D(A^\beta)$ e $A^\beta x \in D(A^{\alpha-\beta})$, então $x \in D(A^\alpha)$ e também $A^{\alpha-\beta}A^\beta x = A^\alpha x$.*

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada na página 91 da referência [18].

1.3 Cálculo funcional

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção serão essenciais para a abordagem que será utilizada ao longo deste texto, com ênfase no conceito de cálculo funcional; os mesmos foram extraídos dos capítulos 1, 2 e 16 da referência [22].

Iniciamos com algumas definições que serão amplamente utilizadas ao longo do texto.

Definição 1.19. Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e seja $A : D(A) \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido em X . Suponha que o espectro de A esteja contido em um setor aberto Σ_ω de forma que

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \omega\}, \quad (1.5)$$

para $0 < \omega \leq \pi$, e que seu resolvente seja tal que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad (1.6)$$

para $\lambda \notin \Sigma_\omega$ com alguma constante $M \geq 1$. Se A é um operador com tais propriedades, dizemos então que A é um operador setorial de X .

Segue da condição (1.5) que a origem não pertence a $\sigma(A)$, e portanto A possui uma inversa limitada A^{-1} em X . Como exemplo, vimos na Introdução que o operador $1 - \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador setorial de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.20. Sejam A um operador linear limitado de X e $\sigma(A)$ seu espectro. Para qualquer função f que seja analítica em um domínio simplesmente conexo D contendo $\sigma(A)$, definimos

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (1.7)$$

no qual C é uma curva de Jordan retificável em D contornando $\sigma(A)$ positivamente orientada. O operador $f(A)$ é chamado de cálculo funcional de A em relação a f , e a integral é chamada de integral de Dunford.

A integral acima é definida em $\mathcal{L}(X)$, de forma que $f(A)$ é um operador linear limitado em X . Mais ainda, a definição de $f(A)$ independe da escolha da curva C .

As definições a seguir serão necessárias para determinarmos quando um operador A é tal que $D(A^\theta)$ e $[X, D(A)]_\theta$ coincidem para $0 < \theta < 1$.

Definição 1.21. Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $A : D(A) \rightarrow X$ um operador setorial de X com ângulo $0 \leq \omega_A < \pi$. Para qualquer ângulo ω tal que $\omega_A < \omega \leq \pi$, $H_\infty(\Sigma_\omega)$ denota a álgebra de Banach formada por todas as funções holomorfas e limitadas definidas no setor Σ_ω munidas da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \Sigma_\omega} |f(\lambda)|,$$

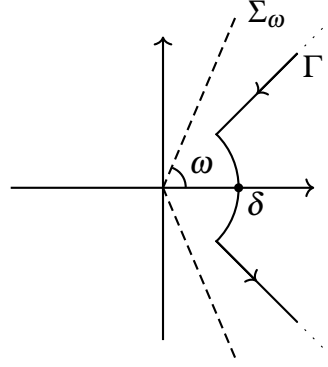
para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$. Mais ainda, denotamos por $\dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$ o subespaço de $H_\infty(\Sigma_\omega)$ definido por

$$\dot{H}_\infty(\Sigma_\omega) = \{f \in H_\infty(\Sigma_\omega); |f(\lambda)| \leq C|\lambda|^{v_f}(1 + |\lambda|)^{-2v_f} \text{ para algum } C > 0 \text{ e } v_f > 0\}.$$

Assim, para qualquer função em $\dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, um cálculo funcional de A pode ser definido pela integral

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (1.8)$$

no espaço $\mathcal{L}(X)$, no qual $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, com Γ_0 dada por $\lambda = \delta e^{i\varphi}$, para $-\omega' \leq \varphi \leq \omega'$, e $\Gamma_\pm$ dadas por $\lambda = \rho e^{\pm i\omega'}$, para $\delta \leq \rho < \infty$, nos quais ω' denota qualquer ângulo tal que $\omega_A < \omega' < \omega$ e δ denota qualquer constante tal que $0 < \delta < \|A^{-1}\|^{-1}$. A figura a seguir ilustra o setor Σ_ω e a curva Γ .

Figura 1.1: Setor Σ_ω e curva Γ .

Como $f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$ é integrável em Γ , então $f(A)$ é um operador limitado em X , e portanto sua definição independe da escolha do contorno Γ contornando $\sigma(A)$. Mais ainda, dadas $f, g \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, temos que $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$ e $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

Se a aplicação $f \mapsto f(A)$ se estende de $H_\infty(\Sigma_\omega)$ a $\mathcal{L}(X)$ como um homomorfismo limitado de álgebra de Banach, então dizemos que A possui cálculo funcional H_∞ limitado em Σ_ω . Por definição, se A possui cálculo funcional H_∞ limitado, então a estimativa

$$\|f(A)\| \leq C_\omega \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)}, \quad (1.9)$$

para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$, vale para alguma constante $C_\omega > 0$, assim como as propriedades

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) \text{ e } (fg)(A) = f(A)g(A),$$

para $f, g \in H_\infty(\Sigma_\omega)$. Caso (1.9) valha para toda $f \in \dot{H}_\infty$, então pode-se provar que A possui cálculo funcional H_∞ limitado.

Teorema 1.22. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $A : D(A) \rightarrow X$ um operador setorial de X com ângulo $0 \leq \omega_A < \pi$. Se A^* denota a adjunta de A , considere as seguintes condições:*

1. *Seja $\Gamma_\omega : \lambda = \rho e^{\pm i\omega}$, $0 \leq \rho < \infty$, um contorno em forma de V , no qual $\omega_A < \omega \leq \pi$. A condição*

$$\int_{\Gamma_\omega} |\lambda|^{2\theta-1} \left| \left\langle A^{2(1-\theta)} (\lambda - A)^{-2} F, G \right\rangle \right| |d\lambda| \leq C_{\omega, \theta} \|F\| \|G\|_*,$$

com $F \in X, G \in X^$, é válida para todo expoente $0 < \theta < 1$ para alguma constante $C_{\omega, \theta} > 0$.*

2. *Em qualquer domínio Σ_ω , com $\omega_A < \omega \leq \pi$, A possui um cálculo funcional H_∞ limitado.*
3. *As potências imaginárias A^{iy} são limitadas em X e satisfazem as estimativas $\|A^{iy}\| \leq N e^{\beta|y|}$, com $y \in \mathbb{R}$, para algum expoente $\beta \geq 0$ e alguma constante $N \geq 1$.*
4. *Para cada $0 < \theta < 1$, $D(A^\theta) = [X, D(A)]_\theta$ e $D(A^{*\theta}) = [X^*, D(A^*)]_\theta$ com equivalência de normas.*

Então os itens 1 e 2 são equivalentes. Mais ainda, 1 e 2 implicam 3 e 3 implica 4.

Uma demonstração para o resultado anterior pode ser encontrada nas páginas 543 e 544 da referência [22].

Problema com coeficientes constantes

2.1 Formulação

Vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 - \Delta u_1 &= f, & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - \Delta_\Gamma u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} &= g, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

no qual $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Se $\gamma: H^2(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ denota o operador traço, considere o espaço

$$H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1}) \doteq \{(u, v) \in H^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus H^2(\mathbb{R}^{n-1}); \gamma(u) = v\},$$

que é subespaço fechado de $H^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus H^2(\mathbb{R}^{n-1})$. O problema acima pode ser reformulado como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

no qual $A: H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ é dado por

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \end{pmatrix} = A_{\text{aux}} + P. \quad (2.3)$$

Neste caso, note que $\eta = (0, \dots, -1)$, de forma que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial u}{\partial x_n}$.

A fim de obtermos um cálculo funcional para A , vamos analisar o operador A_{aux} e então utilizar dois resultados sobre perturbações. O primeiro, enunciado a seguir, pode ser encontrado na página 123 da referência [22].

Teorema 2.1. *Sejam $A : D(A) \rightarrow X$ um operador setorial com ângulo $\omega_A < \frac{\pi}{2}$ e $B : D(B) \rightarrow X$ um operador linear tal que, para algum $0 < v \leq 1$,*

$$\|BA^{v-1}\| \leq C, \quad (2.4)$$

para alguma constante $C > 0$. Então $A + B : D(A) \rightarrow X$ é um operador setorial com ângulo $\omega > \omega_A$.

O segundo resultado pode ser encontrado na página 255 da referência [15].

Teorema 2.2. *Seja $A : D(A) \rightarrow X$ um operador setorial com cálculo funcional H_∞ limitado em X e assumamos que $0 \in \rho(A)$. Seja $\delta \in [0, 1)$ e suponhamos $B : D(B) \rightarrow X$ um operador linear em X que satisfaça $D(A) \subset D(B)$ e*

$$\|Bx\| \leq C \|A^{1-\delta}x\|, \quad (2.5)$$

para todo $x \in D(A)$, no qual $C > 0$. Então $v + A + B$ possui cálculo funcional H_∞ limitado em X para $v \geq 0$ suficientemente grande.

Assumindo que A_{aux} possua cálculo funcional H_∞ limitado, vejamos que, a menos de uma constante, o mesmo resultado vale para o operador A . Com efeito, observe que as condições (2.4) e (2.5) são equivalentes. Mais ainda, se $X = L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ e $B = P$, com $P(u, \gamma_0 u) = \left(0, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, podemos tomar

$$D(P) = H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}_+^n) \cap H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1}) \supset H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1}) = D(A_{\text{aux}})$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, segue pelo Teorema 1.22 que

$$D(A_{\text{aux}}^\alpha) = [L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), D(A_{\text{aux}})]_\alpha = [L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1})]_\alpha.$$

Mais ainda, sabemos pelos resultados obtidos em [3] por Barostichi e Lopes que

$$[L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1})]_\alpha = H^{2\alpha}(\mathbb{R}_+^n) \cap H^{2\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$$

para $\alpha > \frac{1}{4}$. Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \|P(u, \gamma_0 u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})} &= \left\| \left(0, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &= C \|u\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left(\|u\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|(u, \gamma_0 u)\|_{H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}_+^n) \cap H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &= C \|(u, \gamma_0 u)\|_{[L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1})]_{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &= C \left\| A_{\text{aux}}^{\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon}{2}}(u, \gamma_0 u) \right\|, \end{aligned}$$

e portanto segue dos resultados anteriores que $A = A_{\text{aux}} + P$ é setorial e que $A + v$ possui cálculo funcional H_∞ limitado para $v \geq 0$ suficientemente grande.

O próximo passo, portanto, será mostrar que o operador A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado. Para isso, precisamos primeiramente analisar a expressão de seu resolvente, como faremos a seguir.

2.2 Cálculo do resolvente de A_{aux}

Para obtermos o resolvente $(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1}$ de A_{aux} , escrevemos primeiramente

$$\lambda I - A_{\text{aux}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 + \Delta & 0 \\ 0 & \lambda - 1 + \Delta_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Note que

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 + \Delta & 0 \\ 0 & \lambda - 1 + \Delta_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

se, e somente se, $(\lambda - 1 + \Delta)u = f$ e $(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)v = g$. Logo, $v = (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g$.

Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ e seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = 1$ em uma vizinhança da origem. Considere o operador $\mathcal{K}_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ definido por

$$\mathcal{K}_0 \phi = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto \xi'}^{-1} \left(\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \widehat{\phi}(\xi') \right),$$

no qual $\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle = (1 + |\xi'|^2 + |\lambda|)^{\frac{1}{2}}$, dado que $\langle \xi', \lambda \rangle \doteq (1 + |\xi'|^2 + |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}$. Note que os resultados do Teorema B.6 permanecem válidos neste caso, isto é, $\mathcal{K}_0$ pode ser estendido a um operador contínuo (também denotado por $\mathcal{K}_0$) de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ tal que $\mathcal{K}_0$ é a inversa à direita do operador traço $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Munidos desta definição, temos que

$$(\lambda - 1 + \Delta)(u - \mathcal{K}_0(v)) = f - (\lambda - 1 + \Delta)(\mathcal{K}_0(v)),$$

no qual

$$(u - \mathcal{K}_0(v))|_{\mathbb{R}^{n-1}} = u|_{\mathbb{R}^{n-1}} - \mathcal{K}_0(v)|_{\mathbb{R}^{n-1}} = v - \gamma_0 \mathcal{K}_0(v) = v - v = 0,$$

e portanto $u - \mathcal{K}_0(v) \in H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$. Seja $\Delta_D : D(\Delta_D) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^n)$ o operador definido por $\Delta_D u \doteq \Delta u$, no qual $D(\Delta_D) = H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$. Como o operador $\lambda - 1 + \Delta = \lambda - 1 + \Delta_D : H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H_0^1(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^n)$ é invertível e

$$(\lambda - 1 + \Delta)(u - \mathcal{K}_0(v)) = (\lambda - 1 + \Delta_D)(u - \mathcal{K}_0(v)) = f - (\lambda - 1 + \Delta)(\mathcal{K}_0(v)),$$

obtemos que

$$u - \mathcal{K}_0(v) = (\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} (f - (\lambda - 1 + \Delta)(\mathcal{K}_0(v))).$$

Com isso, obtemos a seguinte expressão para o resolvente de A_{aux} :

$$(u, v) = ((\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} f - (\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} (\lambda - 1 + \Delta) (\mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g)) + \mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g), (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g). \quad (2.7)$$

Com o objetivo de simplificar a análise do resolvente de A_{aux} , veremos a seguir uma reformulação para o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}$. Para isso, vamos definir o operador $K_\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ por

$$K_\gamma : \varphi(x') \mapsto \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right), \quad (2.8)$$

no qual a raiz quadrada é tomada considerando o ramo principal da função logaritmo. Vejamos que K_γ satisfaz a seguinte generalização do Teorema B.4.

Teorema 2.3. *Considere o operador $K_\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ definido como acima. Valem:*

1. $\gamma_0 K_\gamma \varphi = \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$;
2. $(\lambda - 1 + \Delta) K_\gamma \varphi = 0$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$;
3. K_γ se estende a uma aplicação contínua (denotada também por K_γ) de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Mais ainda, a primeira identidade se estende a toda $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ e a segunda identidade se estende a toda $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Demonstração. De fato, observe que

$$\gamma_0 K_\gamma \varphi = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right) \Big|_{x_n=0} = \varphi.$$

Mais ainda, $(\lambda - 1 + \Delta) K_\gamma \varphi = 0$, pois

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 + \Delta) K_\gamma \varphi &= (\lambda - 1 + \Delta) \left(\mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right) \right) \\ &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left((\lambda - 1 + \Delta_{x'} + \partial_{x_n}^2) \left(e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right) \right) \\ &= ((\lambda - 1 - |\xi'|^2) + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)) e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \\ &= 0. \end{aligned}$$

A existência de extensão contínua segue de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema B.4, que pode ser encontrada na página 224 da referência [12].

■

Considere então o problema

$$\begin{cases} (\lambda - 1 + \Delta)u = f \text{ em } \mathbb{R}_+^n \\ u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Se $\mathbb{R}_+^n$ e $\mathbb{R}_-^n$ denotam os conjuntos

$$\mathbb{R}_\pm^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \gtrless 0\},$$

sejam r^+ e r^- operadores de restrição de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}_+^n$ e a $\mathbb{R}_-^n$, respectivamente, definidos por $r^\pm u = u|_{\mathbb{R}_\pm^n}$. E sejam e^+ e e^- operadores de extensão por zero definidos por

$$e^\pm u = \begin{cases} u & \text{em } \mathbb{R}_\pm^n, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_\pm^n, \end{cases}$$

Seja $\bar{u} = r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$. Se u é solução do problema (2.9), então $z = u - \bar{u}$ é solução do problema

$$\begin{cases} (\lambda - 1 + \Delta)z = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^n \\ z = \varphi & \text{em } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \end{cases} \quad (2.10)$$

no qual $\varphi = -\gamma_0 r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f = -\gamma_0 \bar{u}$, pois

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 + \Delta)(u - \bar{u}) &= (\lambda - 1 + \Delta)(u - r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f) \\ &= (\lambda - 1 + \Delta)u - (\lambda - 1 + \Delta)r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f \\ &= f - f = 0 \end{aligned}$$

e $\gamma_0(u - \bar{u}) = \gamma_0 u - \gamma_0 \bar{u} = -\gamma_0 \bar{u}$. Pela generalização obtida no Teorema 2.3, temos que

$$z = K_\gamma \varphi = -K_\gamma \gamma_0 r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f$$

é solução do problema (2.10). Escrevendo $u = \bar{u} + z$, obtemos que

$$u = r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f - K_\gamma \gamma_0 r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f \in H^2(\mathbb{R}_+^n)$$

é solução do problema (2.9). Isto é,

$$(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}f = r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f - K_\gamma \gamma_0 r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+f. \quad (2.11)$$

2.3 Setorialidade de A_{aux}

Utilizando a expressão do resolvente de A_{aux} encontrada na Seção 2.2, dada por

$$\begin{aligned} R(\lambda, A_{aux})(f, g) &= ((\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}f - (\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}(\lambda - 1 + \Delta)(\mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g)) \\ &\quad + \mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g), (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g), \end{aligned}$$

mostraremos a seguir o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Seja $A_{aux} : H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ o operador definido por*

$$A_{aux} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta & 0 \\ 0 & 1 - \Delta_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Então para qualquer $\omega \in (0, \pi]$, o operador A_{aux} é setorial com ângulo ω . Em particular, $\sigma(A_{aux}) \subset [1, \infty)$ e para todo $\omega \in (0, \pi]$, existe $C_\omega \geq 1$ tal que

$$\|R(\lambda, A_{aux})\| \leq \frac{C_\omega}{|\lambda| + 1},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega$, no qual $\Sigma_\omega \doteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \omega\}$.

Nos cálculos a seguir, utilizaremos a notação

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi$$

para $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, no qual $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$ e a integral acima é entendida como um limite em L^2 de integrais truncadas, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < R} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi.$$

Uma notação análoga também será utilizada para $\mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1}$, no qual $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Demonstração. Vamos supor que $\omega \in (0, \pi)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega$. De maneira análoga ao que fizemos no Exemplo 0.1, podemos ver que o operador $(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$ é setorial e possui cálculo funcional H_∞ limitado. Estudando os demais termos que compõem o resolvente $R(\lambda, A_{aux})$, veremos que A_{aux} é um operador setorial.

Passo 1: Para o termo $\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \mathcal{F}((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g)(\xi') \right] \\ &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right], \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \left\| \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\ &= \int_0^\infty \left\| \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 dx_n \\ &= (2\pi)^{-n+1} \int_0^\infty \left\| \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 dx_n \\ &= (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \left| \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right|^2 dx_n d\xi'. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n = (1 + |\xi'|^2 + |\lambda|)^{\frac{1}{2}} x_n$, obtemos

$$\|\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty |\psi(y)|^2 dy \right) (1 + |\xi'|^2 + |\lambda|)^{-\frac{1}{2}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-2} |\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi' \\
&\leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,
\end{aligned}$$

uma vez que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Passo 2: Agora, sabemos que o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}$ pode ser expresso como

$$(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} f = r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f - K_\gamma \gamma_0 r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f.$$

Para o primeiro termo à direita na igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
\|r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \|(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \|e^+ f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{C}{1 + |\lambda|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}.
\end{aligned}$$

Para o segundo termo, vemos primeiramente que, dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\begin{aligned}
K_\gamma \varphi(x) &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[e^{-(1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right] \\
&= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \mathcal{F}_{\xi_n \mapsto x_n}^{-1} \left[\mathcal{F}_{x_n \mapsto \xi_n} \left(e^+ e^{-(1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \right) \widehat{\varphi}(\xi') \right] \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}_{x_n \mapsto \xi_n} \left(e^+ e^{-(1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \right) \widehat{\varphi}(\xi') \right],
\end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{x_n \mapsto \xi_n} \left(e^+ e^{-(1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \right) &= \int_0^\infty e^{-ix_n \xi_n} e^{-(1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} dx_n \\
&= \int_0^\infty e^{x_n (-i\xi_n - (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})} dx_n \\
&= (i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$K_\gamma \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[(i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \widehat{\varphi}(\xi') \right]. \quad (2.12)$$

Mais ainda, sabemos que

$$\begin{aligned}
\gamma_0 r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix' \cdot \xi'} (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi) d\xi \\
&= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \xi_n^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right) \\
&= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi', \eta) d\eta \right),
\end{aligned} \quad (2.13)$$

e portanto temos de (2.12) e (2.13) que

$$\begin{aligned} & K_\gamma \gamma_0 r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[(i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi', \eta) d\eta \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Plancherel, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|K_\gamma \gamma_0 r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= C \left\| (i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi', \eta) d\eta \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\lambda|)^2} \left| \int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} \widehat{e^+ f}(\xi', \eta) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\lambda|)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-2} d\eta \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{e^+ f}(\xi', \eta)|^2 d\eta \right) d\xi \\ &\leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

o que mostra a desigualdade desejada para o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}$.

Passo 3: Considere agora o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$. Do anterior, temos que

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \\ &= r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \\ &\quad - K_\gamma \gamma_0 r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \\ &= Q - K_\gamma \gamma_0 Q, \end{aligned}$$

no qual $Q \doteq r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1}e^+(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$. Vejamos que o termo $e^+(\lambda - 1 + \Delta)f$ pode ser expresso como

$$e^+(\lambda - 1 + \Delta)f = (\lambda - 1 + \Delta)(e^+ f) - Rf,$$

no qual

$$Rf = \partial_{x_n} f|_{x_n=0} \delta_{x_n} + f|_{x_n=0} \partial_{x_n} \delta_{x_n}.$$

De fato, começamos observando que se $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $e^+ f = \tilde{f}$ e H denota a função Heaviside, então $\tilde{f}(x)H(x) = e^+ f(x)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}[e^+ f] = \frac{d}{dx}[\tilde{f}H] = e^+ f'(x) + \tilde{f}(x)\delta(x) = e^+ \left(\frac{df}{dx} \right)(x) + f(0)\delta,$$

de forma que

$$\frac{d^2}{dx^2}[e^+ f] = e^+ \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) + \frac{df}{dx}(0)\delta + f(0)\frac{d}{dx}\delta.$$

De forma geral, obtemos que

$$\Delta(e^+ f) = e^+(\Delta f) + \partial_{x_n} f|_{x_n=0} \delta_{x_n} + f|_{x_n=0} \partial_{x_n} \delta_{x_n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\lambda - 1 + \Delta)(e^+ f) &= (\lambda - 1)(e^+ f) + \Delta(e^+ f) \\ &= e^+((\lambda - 1)f) + \left[e^+(\Delta f) + \left(\partial_{x_n} f|_{x_n=0} \delta_{x_n} + f|_{x_n=0} \partial_{x_n} \delta_{x_n} \right) \right] \\ &= e^+(\lambda - 1 + \Delta)f + \left(\partial_{x_n} f|_{x_n=0} \delta_{x_n} + f|_{x_n=0} \partial_{x_n} \delta_{x_n} \right). \end{aligned}$$

Do anterior, temos que

$$\begin{aligned} Q &= r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+(\lambda - 1 + \Delta) \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \\ &= r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} [(\lambda - 1 + \Delta) e^+ - R] \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \\ &= \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} - r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

no qual

$$R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} = \partial_{x_n} \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \Big|_{x_n=0} \delta_{x_n} + \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \Big|_{x_n=0} \partial_{x_n} \delta_{x_n}.$$

Estudando os termos da expressão anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g|_{x_n=0} &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \Big|_{x_n=0} \\ &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} [(\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi')], \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} \partial_{x_n} \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g|_{x_n=0} &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle \psi'(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \Big|_{x_n=0} \\ &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left[\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle \psi'(0) (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois ψ é constante em uma vizinhança da origem. Logo,

$$R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} [(\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi')] \partial_{x_n} \delta_{x_n},$$

e portanto segue que

$$\begin{aligned} &r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g \\ &= r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} \left(\mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} [(\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi')] \partial_{x_n} \delta_{x_n} \right) \\ &= r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F} \left(\mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} [(\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi')] \partial_{x_n} \delta_{x_n} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F}_{x_n \mapsto \xi_n} \left[(\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \partial_{x_n} \delta_{x_n} \right] \right) \\
&= r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right).
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\
&\leq \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |(\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n|^2 d\xi_n d\xi' \\
&\leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{g}(\xi')|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n^2}{|\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \xi_n^2|^2} d\xi_n d\xi' \\
&\leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2.
\end{aligned}$$

Por (2.14), sabemos que $Q = \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} - r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$, e portanto segue a desigualdade desejada. Por fim, precisamos analisar o termo $K_\gamma \gamma_0 Q$. Dos cálculos anteriores, sabemos que

$$\begin{aligned}
K_\gamma \gamma_0 Q g &= K_\gamma \gamma_0 \left[\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} - r^+(\lambda - 1 + \Delta)^{-1} R \mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} \right] (g) \\
&= K_\gamma \gamma_0 \left[\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g - r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right) \right] \\
&= K_\gamma (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g - K_\gamma \gamma_0 r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right) \\
&= (Q_1 - Q_2)g,
\end{aligned}$$

no qual

$$Q_1 g = K_\gamma (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g$$

e

$$Q_2 g = K_\gamma \gamma_0 r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i \xi_n \right).$$

Recordando que, por (2.12), $K_\gamma \varphi$ pode ser expresso como

$$K_\gamma \varphi = \mathcal{F}^{-1} \left[(i \xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \widehat{\varphi}(\xi') \right],$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
Q_1 g &= \mathcal{F}^{-1} \left[(i \xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} \left((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1} g \right) (\xi') \right] \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left[(i \xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|Q_1 g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[(i \xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| (i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}}|^{-2} d\xi_n \right) |\lambda - 1 - |\xi'|^2|^{-2} |\widehat{g}(\xi')|^2 d\xi' \\
&\leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2.
\end{aligned}$$

Por fim, para estimar Q_2 , observamos que

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 r^+ \mathcal{F}^{-1} \left((\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i\xi_n \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix' \cdot \xi'} (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i\xi_n d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi|^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i\xi_n d\xi_n d\xi' \\
&= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto \xi'}^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i\eta d\eta \right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$Q_2 g = \mathcal{F}^{-1} \left[(i\xi_n + (1 + |\xi'|^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}})^{-1} \int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} (\lambda - 1 - |\xi'|^2)^{-1} \widehat{g}(\xi') i\eta d\eta \right].$$

Como as integrais acima são entendidas como limites em L^2 de integrais truncadas, isto é,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2)^{-1} i\eta d\eta \right| = \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{i\eta}{\lambda - 1 - |\xi'|^2 - \eta^2} d\eta \right| = 0,$$

concluimos que $Q_2 g = 0$.

Com isso, concluimos que o operador A_{aux} é setorial.

■

2.4 Cálculo funcional H_∞ limitado

O que faremos a seguir será mostrar como os termos obtidos na expressão do resolvente de A_{aux} podem ser vistos como operadores mais gerais, de forma a simplificar o estudo de cada termo. Para isso, utilizaremos as ferramentas presentes no cálculo de Boutet de Monvel. As definições e principais resultados que utilizaremos a respeito deste tópico estão presentes no Apêndice B, e podem ser encontradas com mais detalhes na referência [12]. A partir das generalizações obtidas para cada termo, será possível provar o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Sejam $\omega \in (0, \pi]$ e A_{aux} o operador definido como no Teorema 2.4. Então A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, isto é,*

$$\|f(A_{\text{aux}})\| \leq C_\omega \|f\|_\infty, \quad (2.15)$$

para toda $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$ e para uma constante $C_\omega > 0$, no qual, para $f \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, temos

$$f(A_{aux}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - A_{aux})^{-1} d\lambda.$$

Observe que obtivemos um operador pseudodiferencial de fronteira de ordem -2 , dado por $S(\lambda) = (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$. Mais ainda, podemos ver que $\mathcal{K}_0$ é um operador de Poisson de ordem zero. Com efeito, lembremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 \phi &= \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\psi \left(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n \right) \widehat{\phi}(\xi') \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \psi \left(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n \right) \widehat{\phi}(\xi') d\xi', \end{aligned}$$

no qual $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é tal que $\psi(t) = 1$ em uma vizinhança de zero. Observamos primeiramente que

$$\partial_{\xi'_j} \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) = \psi'(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle^{-1} x_n \xi'_j,$$

$$\partial_{\xi'_k} \partial_{\xi'_j} \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) = \psi''(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle^{-2} x_n^2 \xi'_j \xi'_k - \frac{\psi'(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n)}{\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle} \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle^{-2} \xi'_k \xi'_j,$$

e, de forma mais geral, obtemos por indução que existe $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\partial_{\xi'}^\alpha \left[\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \right] = \tilde{\psi}(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle^{-|\alpha|}.$$

Mais ainda, temos que

$$x_n^k \partial_{x_n}^{k'} \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) = C(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \psi^{(k')}(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle^{-k+k'},$$

e assim

$$\left| x_n^k D_{x_n}^{k'} D_{\xi'}^\alpha \psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n) \right| \leq \phi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle) \langle \xi', \lambda \rangle^{-k+k'-|\alpha|},$$

com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, isto é, $\mathcal{K}_0$ é um operador de Poisson de ordem zero. Segue portanto do Teorema B.15 que o termo $\mathcal{K}_0(\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$ é um operador de Poisson de ordem -2 .

Como vimos anteriormente, o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}$ pode ser expresso como

$$(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} f = r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f - K_\gamma \gamma_0 r^+ (\lambda - 1 + \Delta)^{-1} e^+ f,$$

no qual $K_\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ é um operador definido por

$$K_\gamma : \phi(x') \mapsto \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(e^{-(1+|\xi'|^2-\lambda)^{\frac{1}{2}} x_n} \widehat{\phi}(\xi') \right)$$

que se estende a uma aplicação contínua (também denotada por K_γ) de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $H^m(\mathbb{R}_+^n)$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Considere $P(\lambda) = (\lambda - 1 + \Delta)^{-1}$ e observe que $P(\lambda)$ é um operador pseudodiferencial de ordem -2 que satisfaz a condição de transmissão definida em B.7, por ser a parametriz de um operador diferencial elíptico. Utilizando a notação $P_+ f = r^+ P e^+ f$, segue do anterior que podemos escrever

$$(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} f = P_+(\lambda) f - K_\gamma \gamma_0 P_+(\lambda) f.$$

Novamente utilizando o Teorema B.15, vemos que $\gamma_0 P_+(\lambda)$ é um operador traço de ordem -2 . De forma semelhante ao operador $\mathcal{K}_0$, temos que K_γ é um operador de Poisson de ordem zero, e portanto $K_\gamma \gamma_0 P_+(\lambda)$ é um operador de Green $G(\lambda)$ de ordem -2 . Concluimos assim que $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1} = P_+(\lambda) + G(\lambda)$.

Por fim, as observações anteriores nos permitem escrever

$$(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}) = (P_+(\lambda) + G(\lambda))(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0 S(\lambda)$$

e concluir, ainda pelo Teorema B.15, que o termo $(\lambda - 1 + \Delta_D)^{-1}(\lambda - 1 + \Delta)\mathcal{K}_0((\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1})$ pode ser visto como um operador de Poisson de ordem -2 .

Vimos que A_{aux} é um operador setorial com ângulo $\omega_{\text{aux}} < \frac{\pi}{2}$. Para qualquer ω tal que $\omega_{\text{aux}} < \omega \leq \pi$, considere o espaço $\dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$ definido em 1.21. Recordamos que, para qualquer função $f \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$, um cálculo funcional de A_{aux} pode ser definido como

$$f(A_{\text{aux}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1} d\lambda,$$

no qual $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$ é definida assim como no Exemplo 0.1.

Conhecendo os termos do resolvente $R(\lambda, A_{\text{aux}})$, nosso próximo passo será ver que A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado. Para isso, enunciamos agora dois lemas extraídos da referência [7].

Lema 2.6. *Seja $1 < p < \infty$. Então existe uma constante $C = C(p, n, R)$ tal que, se $k(x, t, \xi, s)$ tem suporte em $|x| \leq R$ e satisfaz*

$$|\xi|^{|\beta|} \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta k(x, t, \xi, s) \right| \leq \frac{1}{t+s}$$

para $s, t > 0$, $|\beta| \leq n-1$ e $|\alpha| \leq n$, então $\|\text{Op}''(k)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C$, no qual

$$\text{Op}''(k)u(x, t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix \cdot \xi} k(x, t, \xi, s) \dot{u}(\xi, s) d\xi ds,$$

para $x, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t, s \in \mathbb{R}$.

Lema 2.7. *Suponha que $k(x, t, \xi, s, \lambda)$ se anule para $|x| \geq R$ e que exista uma constante positiva c tal que*

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta k \right| \leq e^{-c(t+s)} |\xi| |\lambda|^{\frac{1}{m}} (|\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{1-m-|\beta|},$$

para $m \geq 1$, $|\alpha| \leq n$ e $|\beta| \leq n$. Então para cada $1 < p < \infty$, existe uma constante C_p dependendo de p, c, R e n tal que

$$\left\| \text{Op}'' \left(\int_\Gamma \psi(\lambda) k(x, t, \xi, s, \lambda) d\lambda \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_p \|\psi\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)},$$

para $\psi \in H_\infty(\Sigma_\omega)$, no qual $\Sigma_\omega = \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0 \text{ e } |\arg z| < \omega\}$ e, para $\omega < \theta$, Γ é o contorno definido pela função

$$g(t) = \begin{cases} -te^{-i\theta}, & -\infty < t \leq 0 \\ te^{i\theta}, & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Os três lemas apresentados a seguir, assim como suas demonstrações, são reformulações dos Lemas 2.6 e 2.7. Em particular, o lema a seguir apresenta uma reformulação para o Lema 2.7, cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados na página 120 da referência [7].

Lema 2.8. *Seja $1 < p < \infty$ e suponha que $g(x', x_n, y_n, \xi', \lambda)$ seja symbol-kernel de um operador de Green de ordem $d < -1$ tal que*

$$\left| x_n^{k_1} y_n^{l_1} D_{x_n}^{k_2} D_{y_n}^{l_2} D_{x'}^\alpha D_{\xi'}^\beta D_\lambda^r g(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) \right| \leq C \langle \xi', \lambda \rangle^{d-k_1+k_2-|\beta|-l_1+l_2}$$

para $|\alpha|, |\beta| \leq n$ e para alguma constante $C > 0$. Então existe uma constante C tal que

$$\left\| \text{OP} \left(\int_\Gamma \psi(\lambda) g(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) d\lambda \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C \|\psi\|_{L^\infty},$$

para toda $\psi \in H_\infty$.

Demonstração. Assumindo as hipóteses acima, temos que

$$\begin{aligned} \left| (x_n + y_n) D_{x'}^\alpha \xi'^\beta D_{\xi'}^\beta \int_\Gamma \psi(\lambda) g(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) d\lambda \right| &\leq 2C |\xi'|^{|\beta|} \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \xi', \lambda \rangle^{d-|\beta|} |d\lambda| \\ &\leq C' |\xi'|^{|\beta|} \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \xi' \rangle^{-|\beta|} \langle \lambda \rangle^d |d\lambda| \\ &\leq C'' \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \lambda \rangle^d |d\lambda| \\ &\leq C''' \|\psi\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\xi'|^{|\beta|} \left| D_{x'}^\alpha D_{\xi'}^\beta \int_\Gamma \psi(\lambda) g(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) d\lambda \right| \leq \frac{C \|\psi\|_{L^\infty}}{x_n + y_n},$$

e portanto o resultado segue do Lema 2.6. ■

O resultado acima pôde ser obtido graças ao Lema 2.6 e garante que certos tipos de operadores de Green de ordem -2 possuem cálculo funcional H_∞ limitado. Para lidarmos com operadores de Poisson de ordem -2 , precisamos da seguinte reformulação do Lema 2.6. Como anteriormente, sua demonstração segue de forma análoga à do Lema 2.6, a qual pode ser encontrada na página 119 da referência [7].

Lema 2.9. *Seja $1 < p < \infty$ e suponha $k(x', x_n, \xi', \lambda)$ tal que*

$$|\xi'|^{|\beta|} \left| D_{x'}^\alpha D_{\xi'}^\beta k(x', x_n, \xi', \lambda) \right| \leq \frac{1}{x_n + 1}$$

para $x_n > 0$, $|\beta| \leq n-1$ e $|\alpha| \leq n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\text{OP}(k)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C$.

Demonstração. Para cada $x_n > 0$, defina $k_{x_n}(x', \xi', \lambda) = k(x', x_n, \xi', \lambda)$. Por hipótese, temos que $|\xi'|^{|\beta|} \left| D_{x'}^\alpha D_{\xi'}^\beta (x_n + 1) k_{x_n}(x', \xi', \lambda) \right| \leq 1$, e portanto $k_{x_n}(\cdot, \cdot, \lambda) \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Pelo Teorema A.26, sabemos que $\text{OP}(k_{x_n})$ se estende a um operador em $\mathcal{L}(L^p)$, e portanto podemos concluir que

$$\|\text{OP}(k_{x_n}(x', \xi', \lambda))\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq \frac{C}{x_n + 1}.$$

Assim, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, segue que

$$\begin{aligned} \|\text{OP}(k(x', x_n, \xi', \lambda))f(x')\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} k_{x_n}(x', \xi', \lambda) \widehat{f}(\xi') d\xi' \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\text{OP}(k_{x_n})f(x')|^p dx' dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^\infty \|\text{OP}(k_{x_n})f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{C}{x_n + 1} \right)^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C' \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{aligned}$$

■

Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado, o qual apresenta uma reformulação para o Lema 2.7 para o caso em que k representa um symbol-kernel de um operador de Poisson:

Lema 2.10. *Seja $1 < p < \infty$. Suponha $k(x', x_n, \xi', \lambda)$ symbol-kernel de um operador de Poisson de ordem $d < -1$ e suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que*

$$|x_n^k D_{x_n}^{k'} D_{x'}^\beta D_{\xi'}^\alpha D_\lambda^r k(x', x_n, \xi', \lambda)| \leq C \langle \xi', \lambda \rangle^{d-k+k'-|\alpha|}$$

para $|\alpha|, |\beta| \leq n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \text{OP} \left(\int_\Gamma \psi(\lambda) k(x', x_n, \xi', \lambda) d\lambda \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq C \|\psi\|_{L^\infty}$$

para toda $\psi \in H_\infty$.

Demonstração. Assumindo as hipóteses acima, temos que

$$\begin{aligned} \left| (1 + x_n) D_{x'}^\alpha \xi'^\beta D_{\xi'}^\beta \int_\Gamma \psi(\lambda) k(x', x_n, \xi', \lambda) d\lambda \right| &\leq C |\xi'|^{|\beta|} \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \xi', \lambda \rangle^{d-|\beta|} |d\lambda| \\ &\leq C' |\xi'|^{|\beta|} \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \xi' \rangle^{-|\beta|} \langle \lambda \rangle^d |d\lambda| \\ &\leq C'' \|\psi\|_{L^\infty} \int_\Gamma \langle \lambda \rangle^d |d\lambda| \\ &\leq C''' \|\psi\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\xi'|^{|\beta|} \left| D_{x'}^\alpha D_{\xi'}^\beta \int_{\Gamma} \psi(\lambda) k(x', x_n, \xi', \lambda) d\lambda \right| \leq \frac{C \|\psi\|_{L^\infty}}{1 + x_n},$$

e portanto o resultado segue do Lema 2.9. ■

Dos resultados anteriores, podemos provar o Teorema 2.5.

Demonstração do Teorema 2.5. Vimos na seção anterior que, com exceção do termo de fronteira $S(\lambda) = (\lambda - 1 + \Delta_\Gamma)^{-1}$ e do termo $P_+(\lambda) = r^+(\lambda - 1 + \lambda)^{-1}e^+$, os demais termos que compõe o resolvente de A_{aux} podem ser vistos como operadores de Poisson ou de Green de ordem -2 . Assim, se $k(x', x_n, \xi', \lambda)$ é o symbol-kernel de um operador de Poisson de ordem -2 , temos para toda $h \in H_\infty$ que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(\lambda) \text{OP}(k(x', x_n, \xi', \lambda)) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \text{OP} \left(\int_{\Gamma} h(\lambda) k(x', x_n, \xi', \lambda) d\lambda \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \\ &\leq C \|h\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

O mesmo vale para um operador de Green de ordem -2 , como visto acima. Por fim, a análise para os termos $P_+(\lambda)$ e $S(\lambda)$ segue assim como na demonstração do Exemplo 0.1, neste último caso sendo necessário apenas substituir $L^2(\mathbb{R}^n)$ por $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. ■

Com isso, provamos que A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado. Mais ainda, concluímos pelos Teoremas 2.1 e 2.2 que $A = A_{\text{aux}} + P$ é setorial e que $A + v$ possui cálculo funcional H_∞ limitado em $L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ para $v \geq 0$ suficientemente grande. Renomeando o operador $A + v$ apenas como A , vemos que os resultados anteriores provam o seguinte teorema:

Teorema 2.11. *Seja $A : H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ o operador dado por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 + v - \Delta & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 1 + v - \Delta_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Então existe $R > 0$ tal que, se $v \geq R$, A possui cálculo funcional H_∞ limitado.

Mais ainda, podemos concluir pelo Teorema 1.22 que

$$D(A^\theta) = [L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), D(A)]_\theta = [L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^{n-1}), H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}^{n-1})]_\theta$$

para quaisquer $0 < \theta < 1$.

Caso geral

3.1 Formulação

Consideramos aqui o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u)) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) + c_\Omega u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u)) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma(u) - a_\Omega \cdot \operatorname{grad}(u) \cdot \nu + c_\Gamma u + g(u), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u &= u_0, & t = 0, x \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, limitado e conexo e $\Gamma = \partial\Omega$ é de classe C^∞ . Assumimos que $a_\Omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_\Omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $c_\Omega : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções em C^∞ e, para cada $x \in \overline{\Omega}$, $a_\Omega(x)$ pode ser identificada com a matriz $(a_{\Omega,ij}(x))_{i,j}$. Mais ainda, supomos que $a_{\Omega,ij} \xi^i \xi^j \geq a |\xi|^2$ e $a_{\Gamma,ij} \xi^i \xi^j \geq a |\xi'|^2$, para alguma constante $a > 0$.

Assim, considere o operador $A : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$ dado por

$$Au = - \begin{pmatrix} \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad} u) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad} u + c_\Omega u \\ \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma u) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma u - a_\Omega \cdot \operatorname{grad} u \cdot \nu + c_\Gamma u \end{pmatrix}.$$

Sabemos do Teorema 11 e da Proposição 13 do artigo [3] que existe $C > 0$ tal que $C + A$ é positivo e setorial, com

$$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \omega\}$$

para $0 < \omega \leq \pi$. Nosso objetivo será mostrar que existe $c > 0$ tal que $c + A$ possui cálculo funcional H_∞ limitado.

Como fizemos no caso com coeficientes constantes, consideramos $A = A_{\text{aux}} + P$, no qual

$$A_{\text{aux}} = - \begin{pmatrix} \operatorname{div}(a_\Omega \cdot \operatorname{grad}) + b_\Omega \cdot \operatorname{grad} + c_\Omega & 0 \\ 0 & \operatorname{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma) + b_\Gamma \cdot \operatorname{grad}_\Gamma + c_\Gamma \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_\Omega \cdot \text{grad} \cdot \mathbf{v} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

e $A_{\text{aux}} : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$.

Sabemos também do artigo [3] que $P : H_p^\alpha \cap H_p^\alpha \rightarrow L^p \oplus L^p$, para $1 + \frac{1}{p} < \alpha < 2$, é limitado, isto é, $\|Pu\|_{L^p \oplus L^p} \leq C \|u\|_{D(A^\alpha)}$. Logo, se A_{aux} possuir cálculo funcional H_∞ limitado, então teremos pelo teorema de perturbação 2.2 que $A = A_{\text{aux}} + P$ também possui cálculo funcional H_∞ limitado.

Logo, é suficiente mostrarmos que A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, isto é, que

$$\|f(A_{\text{aux}})\| \leq C_\omega \|f\|_\infty,$$

para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$, no qual $f(A_{\text{aux}})$ é definido por

$$f(A_{\text{aux}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda f(\lambda) (\lambda - A_{\text{aux}})^{-1} d\lambda,$$

assim como na expressão (1.8). Para isso, é necessário primeiramente conhecermos o resolvente $(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1}$. Do artigo [3] sabemos que existe $R > 0$ tal que, para todo λ com $\text{Re } \lambda < R$, vale a igualdade

$$\begin{aligned} & (\lambda - A_{\text{aux}})^{-1}(f, g) \\ &= ((\lambda + A_{\Omega, D})^{-1}(f - (\lambda + A_\Omega) \mathcal{E}(\lambda)((\lambda + A_\Gamma)^{-1}g)) + \mathcal{E}(\lambda)((\lambda + A_\Gamma)^{-1}g), (\lambda + A_\Gamma)^{-1}g), \end{aligned} \quad (3.4)$$

no qual

$$A_\Omega = \text{div}(a_\Omega \cdot \text{grad}) + b_\Omega \cdot \text{grad} + c_\Omega, \quad A_\Gamma = \text{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma) + b_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma + c_\Gamma$$

e $A_{\Omega, D}$ denota a restrição

$$A_{\Omega, D} = A_\Omega : H_{p, D}^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

onde $H_{p, D}^2(\Omega) \doteq \{u \in H_p^2(\Omega); \gamma(u) = 0\}$. Tal como apresentado na Proposição 3 do artigo [3], $\mathcal{E}(\lambda) : \cup_{s \in \mathbb{R}} B_{pp}^s(\Gamma) \rightarrow \cup_{s \in \mathbb{R}} H_p^s(\Omega)$ é um operador linear cujas restrições $\mathcal{E}(\lambda) : B_{pp}^s(\Gamma) \rightarrow H_p^{s+\frac{1}{p}}(\Omega) \cap B_{pp}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)$ são bem definidas e limitadas para todo $s \in \mathbb{R}$ e tal que, para $s > 0$, $\mathcal{E}(\lambda)$ é a inversa à direita do operador traço γ , isto é, $\gamma(\mathcal{E}(u)) = u$ para toda $u \in B_{pp}^s(\Gamma)$. Mas como $H_p^s(\Gamma) \subset B_{pp}^{s-\varepsilon}(\Gamma)$ para $\varepsilon > 0$, então podemos considerar $u \in H_p^s(\Gamma)$.

Observe agora que o termo $(\lambda + A_\Gamma)^{-1}$ é um operador pseudodiferencial de ordem -2 . Dos resultados da referência [21], temos que $(\lambda + A_{\Omega, D})^{-1}$ pode ser visto como uma soma $P_+ + G$, na qual P_+ denota um operador pseudodiferencial que satisfaz a condição de transmissão e G denota um operador de Green, ambos de ordem -2 . Mais ainda, podemos tomar $\mathcal{E}(\lambda)$ localmente como

$$\mathcal{E}(\lambda)\varphi = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\psi(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle) x_n \widehat{\varphi}(\xi') \right),$$

no qual $\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle = (1 + |\xi'|^2 + |\lambda|)^{\frac{1}{2}}$ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é tal que $\psi(t) = 1$ em uma vizinhança de zero. Neste caso, já vimos na seção 2.4 que $\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{K}_0 : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}_+^n)$ é um operador de Poisson de ordem zero. Mas do Teorema 3.11 da referência [14], segue que $\mathcal{E}(\lambda)$ se estende a um operador de Poisson contínuo de $B_{pp}^s(\Gamma)$ em $H_p^{s+\frac{1}{p}}(\Omega) \cap B_{pp}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)$. Desta forma, segue da Tabela B.1 que $\mathcal{E}(\lambda)(\lambda + A_\Gamma)^{-1}$ é um operador de Poisson de ordem -2 . Analogamente, obtemos que $(\lambda + A_\Omega)\mathcal{E}(\lambda)(\lambda + A_\Gamma)^{-1}$ é de Poisson de ordem zero, e portanto $(\lambda + A_{\Omega,D})^{-1}(\lambda + A_\Omega)\mathcal{E}(\lambda)(\lambda + A_\Gamma)^{-1}$ é um operador de Poisson de ordem -2 .

Desta forma, vemos que o resolvente $(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1}$ pode ser expresso por meio de operadores de Boutet de Monvel, isto é,

$$(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1}(f, g) = (P_+(\lambda)f + G(\lambda)f + K(\lambda)g, S(\lambda)g).$$

Ou seja, para mostrarmos que

$$\|f(A_{\text{aux}})\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} f(\lambda)(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1} d\lambda \right\| \leq C \|f\|_{\infty},$$

vamos estudar

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} f(\lambda)M(\lambda)d\lambda$$

para $M(\lambda) = S(\lambda), G(\lambda), K(\lambda)$ e $P_+(\lambda)$. Por simplicidade, vamos assumir a princípio que $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, com $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$, e que os coeficientes $a_\Omega, b_\Omega, c_\Omega$ e $a_\Gamma, b_\Gamma, c_\Gamma$ em (3.1) são de classe C_b^∞ , isto é, são de classe C^∞ com derivadas limitadas. O caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e suave segue por localização.

3.2 Cálculo funcional H_∞ limitado

Teorema 3.1. *Sejam $\omega \in (0, \pi]$ e $A_{\text{aux}} : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$ o operador definido por*

$$A_{\text{aux}} = - \begin{pmatrix} \text{div}(a_\Omega \cdot \text{grad}) + b_\Omega \cdot \text{grad} + c_\Omega & 0 \\ 0 & \text{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma) + b_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma + c_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Então A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, isto é, $\|f(A_{\text{aux}})\| \leq C_\omega \|f\|_\infty$ para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$ e para uma constante $C_\omega > 0$, no qual

$$f(A_{\text{aux}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda)(\lambda - A_{\text{aux}})^{-1} d\lambda,$$

para toda $f \in \dot{H}_\infty(\Sigma_\omega)$.

Demonstração. Vamos separar a demonstração em quatro passos.

Passo 1: Iniciamos pelo termo $S(\lambda) = (\lambda + A_\Gamma)^{-1}$. Como A_Γ é elíptico, vamos denotar $S(\lambda)$ por $(\lambda - \text{OP}(a))^{-1}$, no qual a é um símbolo elíptico por parâmetros em $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$, isto é,

$|\lambda - a(x, \xi)| \geq C \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^m$ para $\lambda \in \Sigma_\omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, $m = 2$, mas a construção a seguir ainda é válida para qualquer $m > 0$. Pelo Teorema A.22 e pela igualdade (A.11), podemos escrever

$$(\lambda - \text{OP}(a))^{-1} = \text{OP}((\lambda - a)^{-1}) + \text{OP}(r),$$

no qual $(\lambda - a)^{-1} \in S^{-m}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}, \Sigma_\omega)$ e $r \in S^{-m-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}, \Sigma_\omega)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) S(\lambda) d\lambda &= \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) (\lambda - \text{OP}(a))^{-1} d\lambda \\ &= \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}(r) d\lambda + \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}((\lambda - a)^{-1}) d\lambda \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Afirmção: Se

$$r_f(x, \xi) \doteq \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) r(x, \xi, \lambda^{\frac{1}{m}}) d\lambda,$$

então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, temos que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_f(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\beta|}.$$

Assumindo a afirmação acima verdadeira, temos que, para um certo $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}(r) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(L^p)} &= \left\| \text{OP} \left(\int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) r(x, \xi, \lambda^{\frac{1}{m}}) d\lambda \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^p)} \\ &= \left\| \text{OP}(r_f(x, \xi)) \right\|_{\mathcal{L}(L^p)} \\ &\leq C \max_{|\alpha|+|\beta| \leq M} \left| \langle \xi \rangle^{|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_f(x, \xi) \right| \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

e portanto obtemos a desigualdade desejada para o termo (I). Vejamos agora que a afirmação é de fato verdadeira. Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_f &= \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) r(x, \xi, \lambda^{\frac{1}{m}}) d\lambda \\ &= \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x, \xi, \lambda^{\frac{1}{m}}) d\lambda, \end{aligned}$$

pois $r \in S^{-m-1}$, isto é, $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r| \leq C \langle \xi \rangle^{-m-1-|\beta|}$. Fazendo as mudanças de variáveis $\lambda = \rho e^{i\theta}$ e então $s = \rho^{\frac{1}{m}}$ na integral anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(\rho e^{i\theta}) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r \left(x, \xi, \rho^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta}{m}} \right) e^{i\theta} d\rho \right| &= \left| \int_0^\infty f(s^m e^{i\theta}) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r \left(x, \xi, s e^{i\theta} \right) m s^{m-1} ds \right| \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle \xi, s \rangle^{-m-1-|\beta|} s^{m-1} ds \\ &= C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle \xi, s \rangle^{-m-1} \langle \xi, s \rangle^{-|\beta|} s^{m-1} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle s \rangle^{-m-1} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} s^{m-1} ds \\
&\leq C \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\beta|},
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Para o termo (II), considere o conjunto $\Sigma_{x,\xi} = \{\lambda \in \Sigma_\omega; |\lambda| \leq 2|a(x, \xi)|\}$. Como a aplicação $\lambda \mapsto (\lambda - a_0(x, \xi))^{-1}$ é analítica, então para cada $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ de (x, ξ) tal que

$$\begin{aligned}
(II) &= \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}((\lambda - a(x, \xi))^{-1}) d\lambda = \text{OP} \left(\int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) (\lambda - a(x, \xi))^{-1} d\lambda \right) \\
&= \text{OP} \left(\int_{\Sigma_{x,\xi}} f(\lambda) (\lambda - a(x, \xi))^{-1} d\lambda \right),
\end{aligned}$$

para todo (y, η) em V . Considere agora a função

$$a_f \doteq \int_{\Sigma_{x,\xi}} f(\lambda) (\lambda - a(x, \xi))^{-1} d\lambda.$$

Então para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{n-1}$, temos que

$$\left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_f \right| \leq C \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}.$$

De fato, note que

$$\partial_x(\lambda - a)^{-1} = (\lambda - a)^{-2} \partial_x a = (\lambda - a)^{-1} \frac{\partial_x a}{\lambda - a},$$

de forma que

$$|\partial_x(\lambda - a)^{-1}| \leq C |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^{-m} \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^m = C |(\lambda - a)^{-1}|,$$

dado que $a \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ é elíptico por parâmetros. Note ainda que

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \partial_x (\lambda - a)^{-1} &= \partial_\xi \left((\lambda - a)^{-1} \frac{\partial_x a}{\lambda - a} \right) \\
&= \left((\lambda - a)^{-1} \frac{\partial_\xi a}{\lambda - a} \right) \frac{\partial_x a}{\lambda - a} + (\lambda - a)^{-1} \left(\frac{\partial_\xi \partial_x a (\lambda - a) + \partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right) \\
&= (\lambda - a)^{-1} \left(\frac{\partial_\xi a}{\lambda - a} \frac{\partial_x a}{\lambda - a} + \frac{\partial_\xi \partial_x a}{\lambda - a} + \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right) \\
&= \left(\frac{\partial_\xi \partial_x a}{(\lambda - a)^2} + 2 \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^3} \right),
\end{aligned}$$

e portanto

$$|\partial_\xi \partial_x (\lambda - a)^{-1}| \leq \left| \frac{\partial_\xi \partial_x a}{(\lambda - a)^2} + 2 \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^3} \right| \leq C |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-1},$$

pois $|\partial_x a| \leq C \langle \xi \rangle^m$, $|\partial_\xi a| \leq C \langle \xi \rangle^{m-1}$, $|\partial_\xi \partial_x a| \leq C \langle \xi \rangle^{m-1}$ e $|(\lambda - a)^{-1}| \leq C \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^{-m}$.

Deste modo, procedendo por indução e supondo que $|\partial_x^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha'} (\lambda - a)^{-1}| \leq C |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-|\alpha'|}$ para $|\alpha'| \leq |\alpha|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\lambda - a)^{-1} \right| &= \left| \partial_x^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha'} (\partial_x \partial_\xi (\lambda - a)^{-1}) \right| \\
&= \left| \partial_x^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha'} (\lambda - a)^{-1} \left(\frac{\partial_\xi \partial_x a}{\lambda - a} + 2 \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right) \right| \\
&\leq \left| \partial_x^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha'} (\lambda - a)^{-1} \frac{\partial_\xi \partial_x a}{\lambda - a} \right| + 2 \left| \partial_x^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha'} (\lambda - a)^{-1} \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right| \\
&\leq \sum_{\sigma \leq \alpha'} \sum_{\gamma \leq \beta'} \binom{\alpha'}{\sigma} \binom{\beta'}{\gamma} \left| \partial_x^\gamma \partial_\xi^\sigma (\lambda - a)^{-1} \right| \left| \partial_x^{\beta' - \gamma} \partial_\xi^{\alpha' - \sigma} \frac{\partial_x \partial_\xi a}{(\lambda - a)} \right| \\
&\quad + 2 \sum_{\sigma \leq \alpha'} \sum_{\gamma \leq \beta'} \binom{\alpha'}{\sigma} \binom{\beta'}{\gamma} \left| \partial_x^\gamma \partial_\xi^\sigma (\lambda - a)^{-1} \right| \left| \partial_x^{\beta' - \gamma} \partial_\xi^{\alpha' - \sigma} \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right|, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

no qual $\left| \partial_x^\gamma \partial_\xi^\sigma (\lambda - a)^{-1} \right| \leq C |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-|\sigma|}$ e

$$\begin{aligned}
&\left| \partial_x^{\beta' - \gamma} \partial_\xi^{\alpha' - \sigma} \frac{\partial_x \partial_\xi a}{(\lambda - a)} \right| \\
&\leq \sum_{\delta \leq \beta' - \gamma} \sum_{\varphi \leq \alpha' - \sigma} \binom{\beta' - \gamma}{\delta} \binom{\alpha' - \sigma}{\varphi} \left| \partial_\xi^\varphi \partial_x^\delta (\lambda - a)^{-1} \partial_\xi^{\alpha' - \sigma - \varphi} \partial_x^{\beta' - \gamma - \delta} (\partial_x \partial_\xi a) \right| \\
&\leq C \sum_{\delta \leq \beta' - \gamma} \sum_{\varphi \leq \alpha' - \sigma} \binom{\beta' - \gamma}{\delta} \binom{\alpha' - \sigma}{\varphi} |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-|\varphi|} \left| \partial_\xi^{\alpha' - \sigma - \varphi + 1} \partial_x^{\beta' - \gamma - \delta + 1} a \right| \\
&\leq C \sum_{\delta \leq \beta' - \gamma} \sum_{\varphi \leq \alpha' - \sigma} \binom{\beta' - \gamma}{\delta} \binom{\alpha' - \sigma}{\varphi} |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-|\varphi|} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha' - \sigma - \varphi + 1|},
\end{aligned}$$

com $|\alpha' - \sigma - \varphi + 1| \leq |\alpha'|$. Para o último termo da segunda soma em (3.5), temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \partial_x^{\beta' - \gamma} \partial_\xi^{\alpha' - \sigma} \frac{\partial_x a \partial_\xi a}{(\lambda - a)^2} \right| \\
&\leq \sum_{\delta \leq \beta' - \gamma} \sum_{\varphi \leq \alpha' - \sigma} \binom{\beta' - \gamma}{\delta} \binom{\alpha' - \sigma}{\varphi} \left| \partial_\xi^\varphi \partial_x^\delta (\lambda - a)^{-2} \right| \left| \partial_\xi^{\alpha' - \sigma - \varphi} \partial_x^{\beta' - \gamma - \delta} (\partial_x a \partial_\xi a) \right|.
\end{aligned}$$

Do anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\lambda - a)^{-1} \right| &\leq C |(\lambda - a)^{-1}| \sum \langle \xi \rangle^{-|\sigma|} \langle \xi \rangle^{-m - |\varphi|} \langle \xi \rangle^{m - |\alpha' - \sigma - \varphi + 1|} \\
&\leq C |(\lambda - a)^{-1}| \sum \langle \xi \rangle^{-|\alpha' - \sigma - \varphi + 1| - |\sigma| - |\varphi|} \\
&\leq C' |(\lambda - a)^{-1}| \langle \xi \rangle^{-|\alpha|},
\end{aligned}$$

pois $-|\alpha' - \sigma - \varphi + 1| - |\sigma| - |\varphi| \leq -m - |\alpha|$. Logo, obtemos que

$$\left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_f \right| = \left| \int_{\Sigma_{x,\xi}} f(\lambda) \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\lambda - a(x, \xi))^{-1} d\lambda \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \left| \int_{\Sigma_{x,\xi}} |(\lambda - a)^{-1}| |d\lambda| \right| \\
&\leq C \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} |a(x, \xi)| \sup_{\lambda \in \Sigma_{x,\xi}} |(\lambda - a)^{-1}|,
\end{aligned}$$

no qual $|a(x, \xi)|$ é proporcional ao perímetro da região $\Sigma_{x,\xi}$. Sabemos ainda que $|a(x, \xi)(\lambda - a(x, \xi))^{-1}| \leq C$, pois

$$\begin{aligned}
|\lambda - a(x, \xi)| &\geq C \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^m \quad \text{e} \\
|a(x, \xi)| &\leq C \langle \xi \rangle^m \leq C \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^m,
\end{aligned}$$

isto é,

$$|a(x, \xi)(\lambda - a(x, \xi))^{-1}| \leq C \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^m \langle \xi, |\lambda|^{\frac{1}{m}} \rangle^{-m} = C.$$

Logo, $|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_f| \leq C \|f\|_{L^\infty} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$ e portanto a desigualdade procurada para (II) segue por aplicação do Teorema de Mikhlin A.27, de forma análoga ao que fizemos para o termo (I).

Passo 2: Seja $G(\lambda)$ operador de Green de classe zero e ordem $\mu < 0$, i.e. $G(\lambda) = \text{OPG}(g)$, com symbol-kernel $g \in S^{\mu-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++}, \Sigma_\omega)$, ou seja,

$$\left\| x_n^k D_{x_n}^{k'} y_n^m D_{y_n}^{m'} D_{x'}^\beta D_{(\xi, \eta)}^\alpha g \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)} \leq C \langle \xi', \eta \rangle^{\mu+1-k+k'-m+m'-|\alpha|}, \quad (3.6)$$

no qual $\eta = \lambda^\mu$. Vejamos que, para $f \in H_\infty(\Sigma_\omega)$, vale a desigualdade

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OPG}(g)(\lambda) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+^n))} = \|\text{OPG}(h_f)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}_+^n))} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)}, \quad (3.7)$$

no qual h_f é definido por

$$h_f \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda.$$

Em outras palavras, vejamos que

$$\|\text{OPG}(h_f)u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)},$$

para $u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$. Para isso, começamos mostrando que $h_f \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ para x_n e y_n fixos, isto é,

$$|\partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha h_f| \leq \frac{C}{x_n + y_n} \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|} \|f\|_{L^\infty},$$

para então concluirmos pelo Teorema A.26 que $\text{OP}(h_f)$ se estende a um operador em $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$.

De fato, fazendo a mudança de variável $\lambda = \eta^{-\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned}
h_f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) g(x', \xi', \lambda, x_n, y_n) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma'_\omega} f(\eta^{-\mu}) g(x', \xi', \eta, x_n, y_n) (-\mu) \eta^{-\mu-1} d\eta,
\end{aligned}$$

de forma que

$$\left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha h_f \right| \leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha g(x', \xi', \rho, x_n, y_n) \right| \rho^{-\mu-1} d\rho.$$

Vamos considerar dois casos separadamente.

i) Suponha $|\alpha| \geq 1$. Como $g \in S^{\mu-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++}, \Sigma_\omega)$, então

$$(x_n + y_n) |\partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha g| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu+1-1-|\alpha|} = C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha g(x', \xi', \rho, x_n, y_n) \right| \rho^{-\mu-1} d\rho \leq C \int_0^\infty \frac{\langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|}}{x_n + y_n} \rho^{-\mu-1} d\rho \\ &= \frac{C}{x_n + y_n} \int_0^\infty \langle \xi', \langle \xi' \rangle \sigma \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \xi' \rangle^{-\mu-1} \sigma^{-\mu-1} \langle \xi' \rangle d\sigma \\ &= \frac{C}{x_n + y_n} \int_0^\infty \langle \xi' \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \sigma \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \xi' \rangle^{-\mu-1} \sigma^{-\mu-1} \langle \xi' \rangle d\sigma \\ &= \frac{C}{x_n + y_n} \int_0^\infty \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|} \langle \sigma \rangle^{\mu-|\alpha|} \sigma^{-\mu-1} d\sigma \\ &\leq \frac{C' \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|}}{x_n + y_n} \int_0^\infty \langle \sigma \rangle^{-1-|\alpha|} d\sigma \\ &\leq \frac{C'' \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|}}{x_n + y_n} \end{aligned}$$

para $|\alpha| \geq 1$. Na primeira igualdade acima usamos a mudança de variável $\rho = \langle \xi' \rangle \sigma$, e na segunda usamos que

$$\langle \xi', \langle \xi' \rangle \sigma \rangle = (1 + |\xi'|^2 + (1 + |\xi'|^2) \sigma^2)^{\frac{1}{2}} = ((1 + |\xi'|^2)(1 + \sigma^2))^{\frac{1}{2}} = \langle \xi' \rangle \langle \sigma \rangle.$$

Logo,

$$\left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha h_f \right| \leq \frac{C}{x_n + y_n} \|f\|_{L^\infty} \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|}.$$

ii) Suponha $|\alpha| = 0$. Então $|g(x', \xi', \rho, x_n, y_n)| \leq C \langle (x_n + y_n) \langle \xi', \rho \rangle \rangle^{-2} \langle \xi', \rho \rangle^{1+\mu}$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \langle (x_n + y_n) \langle \xi', \rho \rangle \rangle^{-2} &= (1 + (x_n + y_n)^2 \langle \xi', \rho \rangle^2)^{-1} \\ &\geq C (1 + x_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2 + y_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Como $g \in S^{\mu-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++}, \Sigma_\omega)$, sabemos que

$$(x_n^2 + y_n^2) |g(x', \xi', \rho, x_n, y_n)| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu+1-2},$$

e portanto

$$(1 + x_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2 + y_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2) |g(x', \xi', \rho, x_n, y_n)| \leq C' \langle \xi', \rho \rangle^{\mu+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |g(x', \xi', \rho, x_n, y_n)| &\leq C'(1 + x_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2 + y_n^2 \langle \xi', \rho \rangle^2)^{-1} \langle \xi', \rho \rangle^{\mu+1} \\ &\leq C'' \langle (x_n + y_n) \langle \xi', \rho \rangle \rangle^{-2} \langle \xi', \rho \rangle^{1+\mu}. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} |h_f| &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty |g(x', \xi', \rho, x_n, y_n)| \rho^{-\mu-1} d\rho \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle (x_n + y_n) \langle \xi', \rho \rangle \rangle^{-2} \langle \xi', \rho \rangle^{1+\mu} \rho^{-\mu-1} d\rho \\ &= C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle (x_n + y_n) \langle \xi', \langle \xi' \rangle \sigma \rangle \rangle^{-2} \langle \xi', \langle \xi' \rangle \sigma \rangle^{1+\mu} \langle \xi' \rangle^{-\mu-1} \sigma^{-\mu-1} d\sigma \\ &= C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle (x_n + y_n) \langle \xi' \rangle \langle \sigma \rangle \rangle^{-2} \langle \xi' \rangle^{1+\mu} \langle \sigma \rangle^{\mu+1} \langle \xi' \rangle^{-\mu} \sigma^{-\mu-1} d\sigma \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle (x_n + y_n) \langle \xi' \rangle \langle \sigma \rangle \rangle^{-2} \langle \xi' \rangle d\sigma \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \langle \sigma \rangle^{-2} \langle \xi' \rangle (x_n + y_n)^{-1} \langle \xi' \rangle^{-1} d\sigma \\ &\leq \frac{C \|f\|_{L^\infty}}{x_n + y_n}. \end{aligned}$$

Considere agora $u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \text{OPG}(h_f)u &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_{\mathbb{R}_+} h_f(x', \xi', x_n, y_n) \acute{u}(\xi', y_n) dy_n d\xi' \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} h_f(x', \xi', x_n, y_n) \acute{u}(\xi', y_n) d\xi' \right) dy_n \\ &= \int_0^\infty \text{OP}(h_f)(x', x_n, y_n, D') u(x', y_n) dy_n. \end{aligned}$$

Observe que, se $v \in L^p(\Omega, L^p(\tilde{\Omega}))$, então

$$\|v\|_{L^p(\Omega, L^p(\tilde{\Omega}))} \doteq \left(\int_\Omega \|v\|_{L^p(\tilde{\Omega})}^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

de forma que

$$\|v\|_{L^p(\Omega, L^p(\tilde{\Omega}))} = \left(\int_\Omega \int_{\tilde{\Omega}} |v(x, y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|v\|_{L^p(\Omega \times \tilde{\Omega})}.$$

Segue do anterior e do Teorema A.26 que

$$\begin{aligned} \|\text{OPG}(h_f)u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \|\text{OPG}(h_f)u\|_{L^p(\mathbb{R}_{+, x_n}, L^p(\mathbb{R}_{x'}^{n-1}))} \\ &= \left\| \int_0^\infty \text{OP}(h_f)(x', x_n, y_n, D') u(x', y_n) dy_n \right\|_{L^p(\mathbb{R}_{+, x_n}, L^p(\mathbb{R}_{x'}^{n-1}))} \\ &= \left(\int_0^\infty \left\| \int_0^\infty \text{OP}(h_f)(x', x_n, y_n, D') u(x', y_n) dy_n \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \|\text{OP}(h_f)(x', x_n, y_n, D')u(x', y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} dy_n \right)^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} (x_n + y_n)^{-1} \|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} dy_n \right)^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{x_n + y_n} \|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} dy_n \right)^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Mas note que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x_n + y_n} \|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} dy_n = H \left(\|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right),$$

no qual H denota o operador integral singular conhecido como transformada de Hilbert, que é um operador contínuo em $L^p(\mathbb{R}_+)$ para $1 < p < \infty$. Mais detalhes sobre a transformada de Hilbert podem ser encontrados na referência [1]. Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|\text{OPG}(h_f)u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &\leq C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \left(\int_0^\infty \left| H \left(\|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right) \right|^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \left\| H \left(\|u(\cdot, y_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \\
&\leq C' \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)},
\end{aligned}$$

o que nos permite obter a desigualdade desejada para o termo $G(\lambda)$.

Passo 3: Seja $K(\lambda)$ operador de Poisson de classe zero e ordem $\mu \leq -2$, i.e. $K(\lambda) = \text{OPK}(k)$, com symbol-kernel $k \in S_{cl}^{\mu-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Sigma_\omega)$, ou seja,

$$\left\| x_n^k D_{x_n}^{k'} D_{x'}^\beta D_{\xi'}^\alpha D_\lambda^\gamma k \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C \langle \xi', \lambda \rangle^{\mu-k+k'-|\alpha|-|\gamma|},$$

no qual $\eta = \lambda^\mu$. Analogamente ao que fizemos para o operador $G(\lambda)$, vamos mostrar que, se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OPK}(k)(\lambda) d\lambda = \text{OPK} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) k(\lambda) d\lambda \right) = \text{OPK}(k_f),$$

no qual

$$k_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) k(\lambda) d\lambda,$$

então

$$\|\text{OPK}(k_f)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^{n-1}), L^p(\mathbb{R}_+^n))} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)}. \quad (3.8)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos

$$k_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) k(x', \xi', \lambda, x_n) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega'} -\mu f(\eta^{-\mu}) k(x', \xi', \eta, x_n) \eta^{-\mu-1} d\eta,$$

de forma que

$$\left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k_f \right| \leq C \|f\|_{L^\infty} \int_0^\infty \left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k(x', \xi', \rho, x_n) \right| \rho^{-\mu-1} d\rho.$$

Assim como fizemos para o caso anterior, vamos estudar a integral acima separadamente para os casos em que $|\alpha| \geq 1$ e $|\alpha| = 0$.

i) Suponha $|\alpha| \geq 1$. Como $|x_n^k \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|-k}$, então

$$(1+x_n) \left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq C_1 \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|} + C_2 \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-1-|\alpha|},$$

de forma que

$$\left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq \frac{C}{1+x_n} \left(\langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|} + \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-1-|\alpha|} \right) \leq \frac{C}{1+x_n} \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \rho^{-\mu-1} d\rho &\leq \frac{C}{1+x_n} \int_0^\infty \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|} \rho^{-\mu-1} d\rho \\ &= \frac{C}{1+x_n} \int_0^\infty \langle \xi' \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \sigma \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \xi' \rangle^{-\mu-1} \sigma^{-\mu-1} \langle \xi' \rangle d\sigma \\ &\leq \frac{C' \langle \xi' \rangle^{-|\alpha|}}{1+x_n} \int_0^\infty \langle \sigma \rangle^{-|\alpha|-1} d\sigma \\ &\leq \frac{C''}{1+x_n}. \end{aligned}$$

ii) Suponha $|\alpha| = 0$ e sejam $s = q + t$ com $t \in (0, 1)$ e $q \in \mathbb{N}$. Então

$$\left| x_n^q \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-q-|\alpha|} = (I), \quad \text{e}$$

$$\left| x_n^{q-1} \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-q-1-|\alpha|} = (II).$$

Fazendo $(I)^{1-t} (II)^t$, obtemos que

$$\left| x_n^{q(1-t)} x_n^{(q+1)t} \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|-(q(1-t)+(q+1)t)} = C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|-s},$$

ou seja,

$$\left| x_n^s \partial_{x'}^\beta \partial_{\xi'}^\alpha k \right| \leq C \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-|\alpha|-s}$$

para todo $s \in \mathbb{R}_+$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \partial_{x'}^\beta k \right| \rho^{-\mu-1} d\rho &\leq \frac{C}{x_n^s} \int_0^\infty \langle \xi', \rho \rangle^{\mu-s} \rho^{-\mu-1} d\rho \\ &= \frac{C}{x_n^s} \int_0^\infty \langle \xi' \rangle^{\mu-s} \langle \sigma \rangle^{\mu-s} \langle \xi' \rangle^{-\mu-1} \sigma^{-\mu-1} \langle \xi' \rangle d\sigma \\ &\leq \frac{C'}{x_n^s} \int_0^\infty \langle \xi' \rangle^{-s} \langle \sigma \rangle^{-s-1} d\sigma \\ &\leq \frac{C''}{x_n^s}. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $k_f \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ e portanto segue do Teorema A.26 que $\text{OP}(k_f)$ é um operador em $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$, para $1 < p < \infty$. Logo, se $u \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que

$$\text{OPK}(k_f)u(x', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{x' \cdot \xi'} k_f(x', x_n, \xi') \hat{u}(\xi') d\xi'.$$

Por fim, vimos que $|\partial_{x'}^\beta k_f| \leq C \|f\|_{L^\infty} x_n^{-s}$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$. Desta forma, tomando $0 < \varepsilon < \frac{1}{p}$, temos que $|x_n^\varepsilon \partial_{x'} k_f| \leq C' \|f\|_{L^\infty}$ e $|x_n \partial_{x'} k_f| \leq C'' \|f\|_{L^\infty}$, de forma que $(x_n + x_n^\varepsilon) |\partial_{x'} k_f| \leq C \|f\|_{L^\infty}$, isto é,

$$|\partial_{x'} k_f| \leq \frac{C}{x_n + x_n^\varepsilon} \|f\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} \frac{C \|f\|_{L^\infty}}{x_n} & \text{se } x_n \geq 1, \\ \frac{C \|f\|_{L^\infty}}{x_n^\varepsilon} & \text{se } x_n < 1. \end{cases}$$

Logo, segue do anterior que

$$\begin{aligned} \|\text{OPK}(k_f)u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \left(\int_0^\infty \|\text{OP}(k_f(x_n))u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \frac{C}{(x_n^\varepsilon + x_n)^p} \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)}^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \frac{C}{x_n^{\varepsilon p}} dx_n + \int_1^\infty \frac{C}{x_n^p} dx_n \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(\Sigma_\omega)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}, \end{aligned}$$

desde que $\varepsilon < \frac{1}{p}$.

Passo 4: Por fim, vamos analisar o termo $P_+(\lambda)$. Lembramos que, para $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $P(\lambda) = \text{OP}(p)$ satisfazendo a condição de transmissão, com $p = p(x, \xi, \lambda)$ em $S^{-2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Sigma_\omega)$, então $P_+(\lambda)u = r^+ P(\lambda) e^+ u = r^+ \text{OP}(p) e^+ u$. Assim,

$$\int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) P_+(\lambda) u d\lambda = \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) r^+ \text{OP}(p) e^+ u d\lambda = r^+ \left(\int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}(p) e^+ u d\lambda \right).$$

Usando o que obtivemos para o termo $S(\lambda)$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) P_+(\lambda) u d\lambda \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} r^+ \left(\int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}(p) e^+ u d\lambda \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \text{OP}(p) e^+ u d\lambda \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty} \|e^+ u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|f\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}. \end{aligned}$$

Dos itens acima, concluímos que A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado. ■

Segue portanto do resultado anterior e do Teorema 2.2 que o operador $c + A$ também possui cálculo funcional H_∞ limitado para $c \geq 0$ suficientemente grande. Renomeando o operador $c + A$ apenas como A , concluímos do Teorema 1.22 que

$$D(A^\theta) = [L^p(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^p(\mathbb{R}^{n-1}), D(A)]_\theta = [L^p(\mathbb{R}_+^n) \oplus L^p(\mathbb{R}^{n-1}), H_p^2(\mathbb{R}_+^n) \cap H_p^2(\mathbb{R}^{n-1})]_\theta.$$

3.3 Localização

Os resultados da seção anterior foram obtidos assumindo que $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ e $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$. Nosso objetivo é generalizar os resultados obtidos anteriormente, agora para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e conexo com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^∞ . A construção apresentada a seguir possui como inspiração aquela apresentada no capítulo 8 da referência [12] por Gerd Grubb para encontrar uma parametriz de um operador elíptico em uma variedade suave e compacta.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto definido como acima. Considere o operador $A_{\text{aux}} : H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma) \rightarrow L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma)$ definido por

$$A_{\text{aux}} = - \begin{pmatrix} \text{div}(a_\Omega \cdot \text{grad}) + b_\Omega \cdot \text{grad} + c_\Omega & 0 \\ 0 & \text{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma) + b_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma + c_\Gamma \end{pmatrix}.$$

Denotando $-\text{div}(a_\Omega \cdot \text{grad}) - b_\Omega \cdot \text{grad} - c_\Omega$ e $-\text{div}_\Gamma(a_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma) - b_\Gamma \cdot \text{grad}_\Gamma - c_\Gamma$ por P_+ e S , respectivamente, e tomando $\lambda \in \Lambda$, considere o operador

$$\lambda - A_{\text{aux}} = \begin{pmatrix} \lambda - P_+ & 0 \\ 0 & \lambda - S \end{pmatrix}.$$

Dos resultados da seção anterior, sabemos que o operador A_{aux} possui resolvente $R(\lambda, A_{\text{aux}})$ dado por

$$R(\lambda, A_{\text{aux}}) = \begin{pmatrix} \lambda - P_+ & 0 \\ 0 & \lambda - S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_{+, \lambda} + G_\lambda & K_\lambda \\ 0 & S_\lambda \end{pmatrix}.$$

Lembrando que o cálculo funcional $f(A_{\text{aux}})$ de A_{aux} é dado por

$$f(A_{\text{aux}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) R(\lambda, A_{\text{aux}}) d\lambda,$$

vejamos que A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado, ou seja, $\|f(A_{\text{aux}})\| \leq C_\omega \|f\|_\infty$. Para isso, sejam $\{U_j\}_{1 \leq j \leq J}$ cobertura aberta de Ω e $\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq J}$ partição da unidade associada a esta cobertura. Com isso, podemos encontrar $\{\theta_j\}_{1 \leq j \leq J}$ em $C_0^\infty(U_j)$ tal que, para cada $j = 1, \dots, J$, $\theta_j(x) = 1$ em uma vizinhança do suporte de ψ_j . Seja $\{k_j : U_j \rightarrow V_j\}_{1 \leq j \leq J}$ um atlas para Ω , no qual $V_j \subset \mathbb{R}_+^n$ para cada j .

Desta forma, se $\psi_j = (\psi_j, \psi_j|_\Gamma)$, então

$$R(\lambda, A_{\text{aux}}) = \sum_{j \leq J} R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j = \sum_{j \leq J} \theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j + \sum_{j \leq J} (1 - \theta_j) R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(A_{\text{aux}}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \sum_{j \leq J} \theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \sum_{j \leq J} (1 - \theta_j) R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j d\lambda \\ &= (I) + (II). \end{aligned}$$

Vamos estudar cada termo separadamente.

Para a parcela (II), sabemos pelo Lema 7.9 da referência [12] que $R_\lambda \doteq \sum_{j \leq J} (1 - \theta_j) R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j$ denota um operador regularizante, isto é, um operador integral com núcleo em

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}(\lambda, C^\infty(\Omega \times \Omega)) & \mathcal{S}(\lambda, C^\infty(\Omega \times \partial\Omega)) \\ \mathcal{S}(\lambda, C^\infty(\partial\Omega \times \Omega)) & \mathcal{S}(\lambda, C^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} R_{\lambda,11} & R_{\lambda,12} \\ R_{\lambda,21} & R_{\lambda,22} \end{pmatrix},$$

no qual

$$R_{\lambda,ij}u = \int_D r_{ij}(\lambda, x, y) u(y) dy$$

onde $D = \Omega$ se $j = 1$ e $D = \Gamma$ se $j = 2$. Mais ainda, para cada r_{ij} , vale a estimativa

$$\left| \partial_\lambda^k \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r_{ij}(\lambda, x, y) \right| \leq C_N \langle \lambda \rangle^{-N}.$$

Assim, observe que

$$\|R_{\lambda,11}u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left| \int_\Omega r_{11}(\lambda, x, y) u(y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

no qual

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega r_{11}(\lambda, x, y) u(y) dy \right|^p &\leq C \langle \lambda \rangle^{-N} \left| \int_\Omega u(y) dy \right|^p \\ &\leq C \langle \lambda \rangle^{-N} \left| \|1\|_{L^q(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \right|^p \\ &= C \langle \lambda \rangle^{-N} |\Omega|^{\frac{p}{q}} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \|R_{\lambda,11}u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left(\int_\Omega C \langle \lambda \rangle^{-N} |\Omega|^{\frac{p}{q}} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C' \langle \lambda \rangle^{\frac{-N}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \|u\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C' \langle \lambda \rangle^{\frac{-N}{p}} |\Omega| \|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) R_{\lambda,11} u d\lambda \right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \int_{\Sigma_\omega} |f(\lambda)| \|R_{\lambda,11}u\|_{L^p(\Omega)} d\lambda \\ &\leq C \|f\|_\infty \|u\|_{L^p(\Omega)} \int_{\Sigma_\omega} \langle \lambda \rangle^{\frac{-N}{p}} d\lambda \\ &\leq C' \|f\|_\infty \|u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

e portanto obtemos a desigualdade desejada para o termo $R_{\lambda,11}$. Para os demais termos, a desigualdade segue de forma análoga.

Para o termo (I), observe que cada parcela $\theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j$ é levada para $V_j \subset \mathbb{R}_+^n$ como $\theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j(u \circ k_j) \circ k_j^{-1}$. Utilizando as notações $\tilde{\theta}_j$ e $\tilde{\psi}_j$ para denotar $\theta \circ k_j^{-1}$ e $\psi \circ k_j^{-1}$, respectivamente, temos que

$$\sum_{j \leq J} \theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j u = \sum_{j \leq J} [\tilde{\theta}_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \tilde{\psi}_j u] \circ k_j.$$

Utilizando os resultados obtidos na seção anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \sum_{j \leq J} \theta_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \psi_j u d\lambda \right\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Gamma)} &= \left\| \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) \sum_{j \leq J} [\tilde{\theta}_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \tilde{\psi}_j u] \circ k_j d\lambda \right\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Gamma)} \\ &\leq \sum_{j \leq J} \left\| \int_{\Sigma_\omega} f(\lambda) [\tilde{\theta}_j R(\lambda, A_{\text{aux}}) \tilde{\psi}_j u] \circ k_j d\lambda \right\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Gamma)} \\ &\leq C \|f\|_\infty \|u\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Gamma)}. \end{aligned}$$

De (I) e (II) concluímos que o operador A_{aux} possui cálculo funcional H_∞ limitado.

Logo, assim como fizemos na seção anterior, podemos concluir pelo Teorema 2.2 que o operador $\tilde{A} = c + A$ possui cálculo funcional H_∞ limitado para $c \geq 0$ suficientemente grande, e portanto segue do Teorema 1.22 que

$$D(\tilde{A}^\theta) = [L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma), D(\tilde{A})]_\theta = [L^p(\Omega) \oplus L^p(\Gamma), H_p^2(\Omega) \cap H_p^2(\Gamma)]_\theta.$$

APÊNDICE A

Operadores pseudodiferenciais

Todos os resultados e definições apresentados neste capítulo foram extraídos da referência [1]. Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes e considere a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ dada por

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de forma que sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$ seja da forma

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} g(\xi) d\xi$$

para $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, no qual $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$. O operador P pode então ser expresso como

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial_x^\alpha \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

no qual $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$ denota o *símbolo* do operador P . Logo, o estudo das propriedades de um operador diferencial linear pode ser reduzido ao estudo de seu símbolo, sendo esta a motivação para a definição de símbolo para o caso de operadores pseudodiferenciais.

Antes de apresentarmos as primeiras definições a respeito de símbolos pseudodiferenciais, precisamos relembrar algumas definições e resultados.

Definição A.1 (Espaço de Schwartz). O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ das funções suaves de decrescimento rápido é o conjunto de todas as funções suaves $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que, para todos $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $N \in \mathbb{N}_0$, existe uma

constante $C_{\alpha,N}$ tal que

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N} \quad (\text{A.1})$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{N}$, definimos a seminorma

$$|f|_{m,\mathcal{S}} = \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)|.$$

Lema A.2. *Seja $C_{poly}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções suaves limitadas polinomialmente, isto é, o conjunto de todas as funções suaves $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, existem $m_\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $C_\alpha > 0$ com*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então para cada $f \in C_{poly}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição A.3. Um espaço vetorial V é chamado de espaço de Fréchet se existe uma sequência de seminormas $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as condições a seguir.

1. $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente: $p_m(f) \leq p_{m+1}(f)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $f \in V$;
2. $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ separa pontos: para qualquer $f \neq 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p_m(f) \neq 0$;
3. V é completo: toda sequência de Cauchy $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para alguma $f \in V$.

Teorema A.4. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que*

1. *para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a função $t \mapsto f(x,t)$ é diferenciável em I ;*
2. *para cada $t \in I$, a função $x \mapsto f(x,t)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^n$;*
3. *existe uma função $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|\partial_t f(x,t)| \leq F(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Então, a aplicação

$$t \mapsto g(t) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) dx, \quad t \in I,$$

é diferenciável em I e, para todo $t \in I$, vale

$$g'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f(x,t) dx.$$

A.1 Classes de símbolos

Definição A.5. Sejam $m \in \mathbb{R}$ e $n, N \in \mathbb{N}$. Então $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial de todas as funções suaves $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad (\text{A.2})$$

para todos $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, no qual $C_{\alpha,\beta}$ é independente de $x \in \mathbb{R}^N$ e de $\xi \in \mathbb{R}^n$. Uma função $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ é chamada de símbolo pseudodiferencial e m é chamada de ordem de p . Mais ainda,

$$S_{1,0}^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \doteq \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S_{1,0}^m(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n),$$

$$S_{1,0}^{-\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) \doteq \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{1,0}^m(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n).$$

Definição A.6. Se $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ é um símbolo, então

$$p(x, D_x)f(x) \doteq \text{OP}(p)f(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{A.3})$$

define o operador pseudodiferencial associado, no qual $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função apropriada e $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$.

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema A.2, temos que $p(x, \xi)\widehat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em relação a ξ para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, e portanto a integral em (A.3) existe e $p(x, D_x)f$ está bem definida.

Exemplo A.7. Seja

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

com $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, um polinômio em ξ de ordem $m \in \mathbb{N}_0$ com coeficientes suaves $c_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$. Então $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e

$$p(x, D_x)f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D_x^\alpha f$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, sejam $\gamma, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Note que

$$\left| \partial_\xi^\gamma \partial_x^\beta p(x, \xi) \right| = \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \partial_x^\beta c_\alpha(x) \partial_\xi^\gamma \xi^\alpha \right| \leq C_{\gamma,\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\gamma|},$$

pois $c_\alpha(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $|\alpha| \leq m$,

$$|\partial_\xi^\gamma \xi^\alpha| \leq C_{\gamma,\alpha} |\xi|^{\alpha-\gamma} \leq C_{\gamma,\alpha} |\xi|^{|\alpha|-|\gamma|}.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} p(x, D_x)f &= \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) i^{-|\alpha|} (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \widehat{(D_x^\alpha f)} \right) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D_x^\alpha f. \end{aligned}$$

Portanto, todo operador diferencial linear com coeficientes suaves e limitados é um operador pseudodiferencial. Em particular, o Laplaciano $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ é um operador pseudodiferencial com símbolo $-|\xi|^2$.

Exemplo A.8. A função $\langle \xi \rangle \doteq \sqrt{1 + |\xi|^2}$ é um símbolo pseudodiferencial de ordem 1. Como $1 + |\xi|^2$ é o símbolo de $1 - \Delta$, então o operador pseudodiferencial associado

$$\langle D_x \rangle f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sqrt{1 + |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

pode ser considerado como a “raiz quadrada” de $1 - \Delta$. Denotamos $\langle D_x \rangle = \sqrt{1 - \Delta}$. De forma mais geral, vejamos que $\langle \xi \rangle^m \in S_{1,0}^m$ para todo $m \in \mathbb{R}$ e $\langle D_x \rangle^m = (1 - \Delta)^{\frac{m}{2}}$, isto é,

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Para isso, seja $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e considere a função

$$f(a, x) = (a^2 + |x|^2)^{\frac{m}{2}}, \quad a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

e note que f é positivamente homogênea de grau m . Daí,

$$\partial_x^\alpha f(\lambda a, \lambda x) = \lambda^{m - |\alpha|} \partial_x^\alpha f(a, x)$$

e portanto

$$|\partial_x^\alpha f(a, x)| \leq |(a, x)|^{m - |\alpha|} \sup_{|(a, x)|=1} |\partial_x^\alpha f(a, x)| \leq C(\alpha, m) |(a, x)|^{m - |\alpha|}.$$

Como $f(a, \xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$ se $a = 1$, então

$$|\partial_\xi^\alpha (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}| \leq C(\alpha, m) |(1, \xi)|^{m - |\alpha|} \leq C(\alpha, m) (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|},$$

e portanto $(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \in S_{1,0}^m$.

Podemos definir uma família de seminormas em $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ relacionada à família de desigualdades (A.2). Seja

$$|p|_k^{(m)} \doteq \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} \left| D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi) \right| (1 + |\xi|)^{-m + |\alpha|} \quad (\text{A.4})$$

para $k \in \mathbb{N}$. O supremo acima é a menor constante $C_{\alpha,\beta}$ tal que (A.2) vale para todos $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ fixados.

O espaço $S_{1,0}^m$ munido de tais seminormas é um espaço de Fréchet.

Observação A.9. A função $(1 + |\xi|)$ nas estimativas (A.2) pode ser substituída por $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ sem alterar as classes dos símbolos, uma vez que

$$\sqrt{1 + |\xi|^2} \leq (1 + |\xi|) \leq \sqrt{2} \sqrt{1 + |\xi|^2}.$$

Proposição A.10. Sejam $p_j \in S_{1,0}^{m_j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, e considere

$$p(x, \xi) = p_1(x, \xi) p_2(x, \xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Então $p \in S_{1,0}^{m_1 + m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Mais ainda, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante C_k dependendo apenas de k e n tal que

$$|p|_k^{(m_1 + m_2)} \leq C_k |p_1|_k^{(m_1)} |p_2|_k^{(m_2)}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Segue da fórmula de Leibniz que

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi) &= \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta [p_1(x, \xi) p_2(x, \xi)] \\ &= \partial_\xi^\alpha \left[\sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_x^\gamma p_1(x, \xi) \partial_x^{\beta-\gamma} p_2(x, \xi) \right] \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\beta}{\gamma} \binom{\alpha}{\sigma} \partial_\xi^\sigma \partial_x^\gamma p_1(x, \xi) \partial_\xi^{\alpha-\sigma} \partial_x^{\beta-\gamma} p_2(x, \xi). \end{aligned}$$

Como $p_1 \in S_{1,0}^{m_1}$ e $p_2 \in S_{1,0}^{m_2}$, então

$$|\partial_\xi^\sigma \partial_x^\gamma p_1(x, \xi)| \leq C_{\sigma, \gamma} (1 + |\xi|)^{m_1 - |\sigma|} \text{ e } |\partial_\xi^{\alpha-\sigma} \partial_x^{\beta-\gamma} p_2(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m_2 - |\alpha-\sigma|}$$

para todos $\gamma \leq \beta$ e $\sigma \leq \alpha$, no qual $-|\sigma| - |\alpha - \sigma| = -(|\sigma| + |\alpha - \sigma|) = -|\alpha|$. Logo,

$$|\partial_\xi^\sigma \partial_x^\gamma p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m_1 + m_2 - |\alpha|},$$

e portanto $p \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} |p|_k^{(m_1+m_2)} &= \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} \left| D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi) \right| (1 + |\xi|)^{-(m_1+m_2)+|\alpha|} \\ &\leq \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} \sum_{\gamma \leq \beta} \sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\beta}{\gamma} \binom{\alpha}{\sigma} |\partial_\xi^\sigma \partial_x^\gamma p_1(x, \xi)| |\partial_\xi^{\alpha-\sigma} \partial_x^{\beta-\gamma} p_2(x, \xi)| \\ &\quad \times (1 + |\xi|)^{-(m_1+m_2)+|\alpha|} \\ &\leq C_k |p_1|_k^{(m_1)} |p_2|_k^{(m_2)}. \end{aligned}$$

■

Teorema A.11. *Seja $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, um símbolo pseudodiferencial. Então*

$$p(x, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

é uma aplicação limitada. Mais precisamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$|p(x, D_x) f|_{k, \mathcal{S}} \leq C_k |p|_k^{(m)} |f|_{m+2(n+1)+k, \mathcal{S}}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema A.12 (Desigualdade de Peetre). *Seja $\langle \xi \rangle \doteq (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Então para todo $s \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade*

$$\langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \langle \eta \rangle^s, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

A.2 Integrais oscilatórias

Sabemos pelo A.11 que a composição de dois operadores pseudodiferenciais $p_1(x, D_x)$ e $p_2(x, D_x)$ é um operador bem definido e limitado

$$p_1(x, D_x)p_2(x, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

mas no entanto, não sabemos se este é também um operador pseudodiferencial, isto é, se existe um símbolo $p \in S_{1,0}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$p(x, D_x) = p_1(x, D_x)p_2(x, D_x).$$

Considere os operadores

$$p_1(x, D_x)g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \eta} p_1(x, \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \eta} p_1(x, \eta) g(y) dy d\eta$$

e

$$p_2(x, D_x)f(x)|_{x=y} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-z) \cdot \xi} p_2(y, \xi) f(z) dz d\xi.$$

Seguindo com o cálculo de maneira informal, obtemos para $g(y) = p_2(x, D_x)f|_{x=y}$ que

$$\begin{aligned} p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)f(x) &= \iint e^{i(x-y) \cdot \eta} p_1(x, \eta) \left(\iint e^{i(y-z) \cdot \xi} p_2(y, \xi) f(z) dz d\xi \right) dy d\eta \\ &= \iiint e^{i(x-z) \cdot \xi} e^{-i(x-y) \cdot (\xi - \eta)} p_1(x, \eta) p_2(y, \xi) f(z) dy d\eta dz d\xi. \end{aligned}$$

Usando a substituição $x' = y - x$ e $\xi' = \eta - \xi$, obtemos

$$\begin{aligned} p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)f &= \iint e^{i(x-z) \cdot \xi} \left(\iint e^{-ix' \cdot \xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) dx' d\xi' \right) f(z) dz d\xi \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} \left(\iint e^{-ix' \cdot \xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) dx' d\xi' \right) \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Logo, o símbolo de $p_1(x, D_x)p_2(x, D_x)$ seria dado por

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) \doteq \iint e^{-ix' \cdot \xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) dx' d\xi'. \quad (\text{A.5})$$

A integral acima não necessariamente existe no sentido clássico, e por este motivo é necessário defini-la como uma *integral oscilatória*:

$$\begin{aligned} \text{Os} \iint e^{-ix' \cdot \xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) dx' d\xi' \\ \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \chi(\varepsilon x', \varepsilon \xi') e^{-ix' \cdot \xi'} p_1(x, \xi + \xi') p_2(x + x', \xi) dx' d\xi', \end{aligned}$$

no qual $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com $\chi(0, 0) = 1$. Para isto, precisamos da definição a seguir.

Definição A.13. O espaço das amplitudes $\mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m, \tau \in \mathbb{R}$, é o conjunto das funções suaves $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\eta|)^m (1 + |y|)^\tau$$

uniformemente em $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Mais ainda, seja

$$|a|_{\mathcal{A}_\tau^m, k} \doteq \max_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{y, \eta \in \mathbb{R}^n} (1 + |\eta|)^{-m} (1 + |y|)^{-\tau} |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \eta)|, \quad k \in \mathbb{N},$$

a sequência associada de seminormas monótona crescente.

O espaço $A_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet. Mais ainda, temos que $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ continuamente, isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $l = l(k) \in \mathbb{N}$ e $C_k > 0$ tais que

$$|p|_{\mathcal{A}_0^m, k} \leq C_k |p|_{l(k)}^{(m)}$$

para todo $p \in S_{1,0}^{(m)}$. De fato, se $k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} |p|_{\mathcal{A}_0^m, k} &= \max_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{y, \eta \in \mathbb{R}^n} (1 + |\eta|)^{-m} |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta p(y, \eta)| \\ &\leq \max_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \sup_{y, \eta \in \mathbb{R}^n} (1 + |\eta|)^{-m+|\alpha|} |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta p(y, \eta)| \\ &= |p|_k^{(m)}, \end{aligned}$$

e daí segue a continuidade da inclusão.

Teorema A.14. Seja $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, com $m, \tau \in \mathbb{R}$, e seja $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ com $\chi(0, 0) = 1$. Então

$$\text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \eta} a(y, \eta) dy d\eta \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) e^{-iy \cdot \eta} a(y, \eta) dy d\eta$$

existe e

$$\text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \eta} a(y, \eta) dy d\eta = \iint e^{-iy \cdot \eta} \langle y \rangle^{-2l'} \langle D_\eta \rangle^{2l'} [\langle \eta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} a(y, \eta)] dy d\eta, \quad (\text{A.6})$$

no qual $l, l' \in \mathbb{N}_0$ são escolhidos de forma que $2l > n + m$ e $2l' > n + \tau$ e o integrando está em $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Em particular, a definição não depende da escolha de χ e

$$\left| \text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \eta} a(y, \eta) dy d\eta \right| \leq C_{m, \tau} |a|_{\mathcal{A}_\tau^m, 2(l+l')}, \quad (\text{A.7})$$

no qual $C_{m, \tau} > 0$ não depende de a .

Corolário A.15. Seja $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uma sequência limitada tal que, para cada $y, \eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a_j(y, \eta) = \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(y, \eta)$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e algum $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \eta} a_j(y, \eta) dy d\eta = \text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \eta} a(y, \eta) dy d\eta.$$

Exemplo A.16. Seja $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $a(y, \eta) = e^{ix \cdot \eta} u(y) \in \mathcal{A}_0^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e

$$\text{Os-}\iint e^{i(x-y) \cdot \eta} u(y) dy d\eta$$

está bem definido. Se ψ é uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(0) = 1$, tomamos $\chi(y, \eta) = \psi(y)\psi(\eta)$, de forma que

$$\begin{aligned} \text{Os-}\iint e^{i(x-y) \cdot \eta} u(y) dy d\eta &= \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} e^{ix \cdot \eta} u(y) dy d\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) e^{i(x-y) \cdot \eta} u(y) dy d\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \psi(\varepsilon y) u(y) \left(\int e^{i(x-y) \cdot \eta} \psi(\varepsilon \eta) d\eta \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \psi(\varepsilon y) u(y) \varepsilon^{-n} \mathcal{F}^{-1}[\psi] \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \psi(\varepsilon(x - \varepsilon y')) u(x - \varepsilon y') \mathcal{F}^{-1}[\psi](y') dy' \\ &= \int u(x) \mathcal{F}^{-1}[\psi](y') dy' \\ &= u(x) \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\psi]](0) \\ &= u(x) \psi(0) = u(x), \end{aligned}$$

pois $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\varepsilon(x - \varepsilon y')) u(x - \varepsilon y') = \psi(0)u(x) = u(x)$. Formalmente, obtemos que $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]] = u$ para toda $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lema A.17. Sejam $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m, \tau \in \mathbb{R}$, e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Então

$$\begin{aligned} \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} y^\alpha a(y, \eta) dy d\eta &= \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} D_\eta^\alpha a(y, \eta) dy d\eta, \\ \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} \eta^\alpha a(y, \eta) dy d\eta &= \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} D_y^\alpha a(y, \eta) dy d\eta. \end{aligned}$$

Teorema A.18 (Teorema de Fubini para integrais oscilatórias). Seja $a \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k})$, $m, \tau \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$. Então

$$b(y, \eta) \doteq \text{Os-}\iint e^{-iy' \cdot \eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

no qual a integração é em relação a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, e

$$\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta b(y, \eta) = \text{Os-}\iint e^{-iy' \cdot \eta'} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta'. \quad (\text{A.8})$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} &\text{Os-}\iiint e^{-iy \cdot \eta - iy' \cdot \eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy dy' d\eta d\eta' \\ &= \text{Os-}\iint e^{-iy \cdot \eta} \left(\text{Os-}\iint e^{-iy' \cdot \eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \right) dy d\eta. \end{aligned}$$

Note que a integral oscilatória $\text{Os-}\iiint$ acima é entendida como

$$\text{Os-}\iint e^{-i(y, y') \cdot (\eta, \eta')} a((y, y'), (\eta, \eta')) d(y, y') d(\eta, \eta').$$

A.3 Composição

Podemos agora formalizar os cálculos realizados para a composição de operadores pseudodiferenciais. Se p é um símbolo pseudodiferencial em $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} p(x, D_x)u &= \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int \left(\int e^{i(x-y) \cdot \xi} p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \text{Os-} \iint e^{-ix' \cdot \xi} p(x, \xi) u(x+x') dx' d\xi \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, note que $pu \in \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, uma vez que $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_0^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomando $\chi(x, \xi) = \varphi(x)\varphi(\xi)$, com $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(0) = 1$, obtemos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} p(x, D_x)u &= \int \left(\int e^{i(x-y) \cdot \xi} p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \int \left(\int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-iy \cdot \xi} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \int \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{-iy \cdot \xi} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi, \end{aligned}$$

pois $\varphi(\varepsilon y)u(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} &\int \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{-iy \cdot \xi} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \int \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{ix \cdot \xi} \varphi_\varepsilon(\xi) p(x, \xi) \int e^{-iy \cdot \xi} \varphi_\varepsilon(y) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \int \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{ix \cdot \xi} \varphi_\varepsilon(\xi) p(x, \xi) \mathcal{F}[\varphi_\varepsilon u](\xi) \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(e^{ix \cdot \xi} \varphi_\varepsilon(\xi) p(x, \xi) \mathcal{F}[\varphi_\varepsilon u](\xi) \right) d\xi, \end{aligned}$$

pois $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F}[\varphi_\varepsilon u](\xi) = (\widehat{\varphi_\varepsilon} * \widehat{u})(\xi)$, com $\|\widehat{\varphi_\varepsilon} * \widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{\varphi_\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Logo,

$$\begin{aligned} p(x, D_x)u &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int e^{-iy \cdot \xi} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int \langle \xi \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} (e^{-iy \cdot \xi}) e^{ix \cdot \xi} \varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y) dy \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int \langle \xi \rangle^{-2l} e^{-iy \cdot \xi} e^{ix \cdot \xi} \langle D_y \rangle^{2l} (\varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y)) dy \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int \langle \xi \rangle^{-2l} e^{-i(y-x) \cdot \xi} \langle D_y \rangle^{2l} (\varphi(\varepsilon y) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(y)) dy \right) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int \langle \xi \rangle^{-2l} e^{-ix' \cdot \xi} \langle D_{x'} \rangle^{2l} (\varphi(\varepsilon(x+x')) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(x+x')) dx' \right) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int \langle x' \rangle^{-2l'} \langle D_\xi \rangle^{2l'} (e^{-ix' \cdot \xi}) \langle \xi \rangle^{-2l} \langle D_{x'} \rangle^{2l} (\varphi(\varepsilon(x+x')) \varphi(\varepsilon \xi) p(x, \xi) u(x+x')) dx' \right) d\xi \\
&= \iint e^{-ix' \cdot \xi} \langle x' \rangle^{-2l'} \langle D_\xi \rangle^{2l'} \left[\langle \xi \rangle^{-2l} \langle D_{x'} \rangle^{2l} (p(x, \xi) u(x+x')) \right] dx' d\xi \\
&= \text{Os-} \iint e^{-ix' \cdot \xi} p(x, \xi) u(x+x') dx' d\xi.
\end{aligned}$$

Sejam $p_1 \in S_{1,0}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $p_2 \in S_{1,0}^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Usando a representação acima e o Teorema A.18, obtemos que

$$\begin{aligned}
&p_1(x, D_x) p_2(x, D_x) u \\
&= \text{Os-} \iint e^{-ix' \cdot \xi} p_1(x, \xi) \left(\text{Os-} \iint e^{-ix'' \cdot \xi'} p_2(x+x', \xi') u(x+x'+x'') dx'' d\xi' \right) dx' d\xi \\
&= \text{Os-} \iiint e^{-ix' \cdot \xi - ix'' \cdot \xi'} p_1(x, \xi) p_2(x+x', \xi') u(x+x'+x'') dx'' d\xi' dx' d\xi \\
&= \text{Os-} \iiint e^{-ix' \cdot \eta - iy \cdot \xi'} p_1(x, \xi' + \eta) p_2(x+x', \xi') u(x+y) dx' d\xi' dy d\eta \\
&= \text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \xi'} \left(\text{Os-} \iint e^{-ix' \cdot \eta} p_1(x, \xi' + \eta) p_2(x+x', \xi') dx' d\eta \right) u(x+y) dy d\xi' \\
&= \text{Os-} \iint e^{-iy \cdot \xi'} p_1 \# p_2(x, \xi') u(x+y) dy d\xi',
\end{aligned}$$

no qual $p_1 \# p_2$ é definido como em (A.5).

Teorema A.19. *Sejam $p_1 \in S_{1,0}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $p_2 \in S_{1,0}^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dois símbolos pseudodiferenciais. Então existe $p_1 \# p_2 \in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$p_1(x, D_x) p_2(x, D_x) = (p_1 \# p_2)(x, D_x).$$

Mais ainda, $p_1 \# p_2$ possui a expansão assintótica

$$p_1 \# p_2(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_1(x, \xi) D_x^\alpha p_2(x, \xi), \quad (\text{A.10})$$

isto é,

$$p_1 \# p_2(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_1(x, \xi) D_x^\alpha p_2(x, \xi) \in S_{1,0}^{m_1+m_2-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

O resultado anterior nos permite concluir que a composição de dois operadores pseudodiferenciais é também um operador pseudodiferencial. Em particular, tomando $N = 1$ na expansão assintótica, obtemos que

$$p_1 \# p_2(x, \xi) = p_1(x, \xi) p_2(x, \xi) + r(x, \xi), \quad (\text{A.11})$$

no qual $r(x, \xi) \in S_{1,0}^{m_1+m_2-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

A.4 Operadores pseudodiferenciais elípticos e parametrizes

Definição A.20. Um símbolo $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, é chamado elíptico se existem $C, R > 0$ tais que

$$|p(x, \xi)| \geq C|\xi|^m \quad (\text{A.12})$$

para todos $|\xi| \geq R$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo A.21. Seja $p(\xi) = |\xi|^2$ o símbolo do operador $-\Delta$. Então p é um símbolo elíptico de ordem $m = 2$. Mais ainda, $q(\xi) = \langle \xi \rangle^m$, $m \in \mathbb{R}$, é um símbolo elíptico de ordem m , pois $\langle \xi \rangle \leq (1 + |\xi|) \leq \sqrt{2}\langle \xi \rangle$.

Teorema A.22. Seja $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$. São equivalentes:

- a) O símbolo p é elíptico;
- b) Existe um símbolo $q \in S_{1,0}^{-m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $p(x, D_x)q(x, D_x) = I + r(x, D_x)$, no qual $r \in S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$;
- c) Para cada $N \in \mathbb{N}$, existem $q_N, q'_N \in S_{1,0}^{-m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que

$$p(x, D_x)q_N(x, D_x) = I + r_N(x, D_x),$$

$$q'_N(x, D_x)p(x, D_x) = I + r'_N(x, D_x),$$

nos quais $r_N, r'_N \in S_{1,0}^{-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

O teorema anterior implica o seguinte resultado:

Proposição A.23. Seja $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$. Então p é um símbolo elíptico se, e somente se, existe um símbolo $q_\infty \in S_{1,0}^{-m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$p(x, D_x)q_\infty(x, D_x) = I + r_\infty(x, D_x), \quad (\text{A.13})$$

com $r \in S_{1,0}^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Neste caso, o símbolo q_∞ é chamado de parametriz do operador $p(x, D_x)$.

Finalizamos esta seção com alguns resultados a respeito de operadores pseudodiferenciais. Os mesmos podem ser encontrados na referência [1].

Teorema A.24. Seja $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Então $p(x, D_x)$, definida como

$$p(x, D_x)u(x) = \text{Os-}\iint e^{-ix' \cdot \xi} p(x, \xi) u(x + x') dx' d\xi \quad (\text{A.14})$$

para $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, é um operador linear e limitado

$$p(x, D_x) : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Teorema A.25 (Unicidade do símbolo). *Sejam $p, q \in S_{1,0}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Se $p(x, D_x)u = q(x, D_x)u$ para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $p(x, \xi) = q(x, \xi)$.*

Teorema A.26. *Sejam $p \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $1 < q < \infty$. Então $p(x, D_x)$ (primeiramente definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) se estende a um operador linear limitado $p(x, D_x) : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema A.27 (Teorema do multiplicador de Mikhlin). *Seja $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função continuamente diferenciável $n + 2$ vezes tal que*

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq A |\xi|^{-|\alpha|} \quad (\text{A.15})$$

para todo $\xi \neq 0$ e $|\alpha| \leq n + 2$. Então para todo $1 < p < \infty$ o operador $m(D_x)$, definido por

$$m(D_x)f = \mathcal{F}^{-1}[m(x)\widehat{f}(\xi)]$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se estende a um operador linear e limitado

$$m(D_x) : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

Proposição A.28. *Sejam m como no Teorema A.27 e $A > 0$ como em (A.15). Então para cada $1 < p < \infty$, existe uma constante $C_p > 0$, independente de A , tal que*

$$\|m(D_x)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_p A. \quad (\text{A.16})$$

APÊNDICE B

Cálculo de Boutet de Monvel

Utilizamos [12], [13] e [17] como principais referências para o estudo do cálculo de Boutet de Monvel neste trabalho, de forma que todos os resultados apresentados a seguir foram extraídos das mesmas.

B.1 Definições e resultados preliminares

Iniciamos com algumas definições presentes nos capítulos 7 e 9 da referência [12].

Definição B.1. O espaço $S^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dos símbolos poli-homogêneos de grau d é definido como o conjunto de símbolos $p(X, \xi) \in S_{1,0}^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para os quais existe uma sequência de funções $p_{d-l}(X, \xi) \in C^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n)$ para $l \in \mathbb{N}_0$ satisfazendo:

1. Cada função p_{d-l} é positivamente homogênea de grau $d-l$ em ξ para $|\xi| \geq 1$;
2. p possui a expansão assintótica

$$p(X, \xi) \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} p_{d-l}(X, \xi) \text{ em } S_{1,0}^d(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad (\text{B.1})$$

isto é, para qualquer compacto $K \subset \Sigma$, quaisquer multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \beta \in \mathbb{N}_0^{n'}$ e qualquer $M \in \mathbb{N}_0$, existe uma constante $c_{\alpha,\beta,M,K}$ tal que para todos $(X, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$,

$$\left| D_X^\beta D_\xi^\alpha \left[p(X, \xi) - \sum_{0 \leq l < M} p_{d-l}(X, \xi) \right] \right| \leq c_{\alpha,\beta,M,K} \langle \xi \rangle^{d-|\alpha|-M}. \quad (\text{B.2})$$

Como pôde ser observado na introdução deste texto, a transformada de Fourier foi uma ferramenta de grande utilidade para o tratamento do operador $1 - \Delta$ em $\mathbb{R}^n$. No entanto, caso o operador seja

considerado em $\mathbb{R}_+^n$, precisamos do conceito de transformada de Fourier parcial. Para isso, vejamos antes algumas definições e notações.

Vamos denotar o operador restrição de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}_+^n$ por r^+ , e o operador restrição de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}_-^n$ por r^- , no qual

$$\mathbb{R}_\pm^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \gtrless 0\}.$$

Utilizaremos também a notação

$$r_\Omega u = u|_\Omega, \text{ e em particular, } r^\pm = r_{\mathbb{R}_\pm^n}, \quad (\text{B.3})$$

definida para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Os operadores de extensão por zero e_Ω , em particular $e^+ = e_{\mathbb{R}_+^n}$ e $e^- = e_{\mathbb{R}_-^n}$, são definidos para funções f em Ω por

$$e_\Omega f = \begin{cases} f & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad \text{e } e^\pm = e_{\mathbb{R}_\pm^n}. \quad (\text{B.4})$$

Mais ainda, consideramos os seguintes espaços de funções suaves em $\overline{\mathbb{R}_+^n}$:

$$C_{(0)}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) = r^+ C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) = r^+ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (\text{B.5})$$

no qual r^+ é definido em (B.3).

Definição B.2. Dada $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, definimos sua transformada de Fourier parcial na variável $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ como

$$\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u = \hat{u}(\xi', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} u(x', x_n) dx'.$$

Teorema B.3. Seja $m \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq j \leq m-1$, a aplicação traço

$$\gamma_j : u(x', x_n) \mapsto D_{x_n}^j u(x', 0)$$

de $C_{(0)}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ a $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ se estende por continuidade a uma aplicação linear sobrejetora, também chamada de γ_j , de $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ em $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Teorema B.4. Considere o operador de Poisson $K_\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, definido por

$$K_\gamma : \varphi(x') \mapsto \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(e^{-\langle \xi' \rangle x_n} \widehat{\varphi}(\xi') \right). \quad (\text{B.6})$$

Valem:

1. $\gamma K_\gamma \varphi = \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$;
2. $(I - \Delta) K_\gamma \varphi = 0$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$;
3. K_γ se estende a uma aplicação contínua (denotada também por K_γ) de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Mais ainda, a primeira identidade se estende a toda $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ e a segunda identidade se estende a toda $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Antes de enunciarmos os próximo teorema, precisamos da seguinte definição.

Definição B.5. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o operador traço de Cauchy associado a m por

$$\rho_{(m)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{pmatrix} : H^m(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Teorema B.6. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com $\psi(t) = 1$ em uma vizinhança de zero. Definimos o operador de Poisson $\mathcal{K}_{(m)}$, definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^m$ com valores em $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, por

$$\mathcal{K}_{(m)}\varphi = \mathcal{K}_0\varphi_0 + \cdots \mathcal{K}_{m-1}\varphi_{m-1},$$

para $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1})$, no qual

$$\mathcal{K}_j\varphi_j = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\frac{(ix_n)^j}{j!} \psi(\langle \xi' \rangle x_n) \widehat{\varphi}_j(\xi') \right)$$

para cada $j = 0, \dots, m-1$. Então

$$\rho_{(m)}\mathcal{K}_{(m)}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^m.$$

Mais ainda, $\mathcal{K}_{(m)}$ pode ser estendido a um operador contínuo (também denotado por $\mathcal{K}_{(m)}$) de $\prod_{j=1}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ a $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ que também satisfaz a igualdade anterior para toda $\varphi \in \prod_{j=1}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

B.2 Operadores de Boutet de Monvel

Iniciamos esta seção apresentando os elementos necessários para a introdução do cálculo de Boutet de Monvel. Todos os resultados e definições apresentados aqui foram extraídos do capítulo 10 da referência [12].

Se P é um operador pseudodiferencial em $\mathbb{R}^n$, seu truncamento (ou restrição) ao subconjunto $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ é definido por

$$P_+u = r^+Pe^+u, \text{ também denotado por } P_{\mathbb{R}_+^n}u \text{ ou } P_\Omega u, \quad (\text{B.7})$$

no qual, assim como definidas em (B.3) e (B.4), r^+ restringe $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$, e e^+ estende funções localmente integráveis em $\mathbb{R}_+^n$ por zero em $\mathbb{R}_-^n$. Observe que r^+ restringe ao interior de $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, de forma que as singularidades suportadas em $x_n = 0$ desaparecem. Identificamos $C^0(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ como subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$.

Definição B.7. Dizemos que um operador P satisfaz a propriedade de transmissão em relação a $\mathbb{R}_+^n$ se $P_{\mathbb{R}_+^n}$ “preserva C^∞ até a fronteira”, ou seja, se $P_{\mathbb{R}_+^n}$ leva $C_{(0)}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ em $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Esta propriedade também é conhecida como condição de transmissão.

Segundo Grubb [12], Boutet de Monvel mostrou em 1966 uma condição necessária e suficiente para que um símbolo poli-homogêneo $p(x, \xi) \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} p_{d-l}(x, \xi)$ defina um operador $\text{OP}(p)$ com a propriedade de transmissão em relação a $\mathbb{R}_+^n$. Ela afirma que os termos homogêneos p_{d-l} devem possuir a propriedade de simetria

$$D_x^\beta D_\xi^\alpha p_{d-l}(x', 0, 0, -\xi_n) = e^{i\pi(d-l-|\alpha|)} D_x^\beta D_\xi^\alpha p_{d-l}(x', 0, 0, \xi_n) \quad (\text{B.8})$$

para $|\xi_n| \geq 1$ e quaisquer índices α, β, l .

Exemplo B.8. Seja $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha(x) D_x^\alpha$ um operador diferencial de ordem d . Observe que seu símbolo $p(x, \xi)$ pode ser expresso como

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha \xi^\alpha = \sum_{l=0}^d \sum_{|\alpha|=d-l} c_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_{l=0}^d p_{d-l}(x, \xi),$$

no qual

$$\begin{aligned} p_{d-l}(x', 0, 0, -\xi_n) &= \sum_{|\alpha|=d-l} c_\alpha(x', 0) (-(0, \xi_n))^\alpha \\ &= (-1)^{d-l} \sum_{|\alpha|=d-l} c_\alpha(x', 0) (0, \xi_n)^\alpha \\ &= (-1)^{d-l} p_{d-l}(x', 0, 0, \xi_n). \end{aligned}$$

Isto é, $p_{d-l}(x', 0, 0, \xi_n)$ é homogêneo de grau $d-l$ em ξ , e portanto

$$D_x^\beta D_\xi^\gamma p_{d-l}(x', 0, 0, -\xi_n) = (-1)^{d-l-|\gamma|} p_{d-l}(x', 0, 0, \xi_n).$$

Logo, o operador P possui a propriedade de transmissão em relação a $\mathbb{R}_+^n$.

Exemplo B.9. Uma parametriz $q(x, \xi)$ para um operador diferencial elíptico P de ordem d possui a propriedade de transmissão, uma vez que os termos da expansão q_{d-l} são funções racionais de ξ . Mais ainda, $q(x, \xi)$ satisfaz

$$q_{d-l}(x, -\xi) = (-1)^{d-l} q_{d-l}(x, \xi) \quad (\text{B.9})$$

para $|\xi| \geq 1$ e para todo l , garantindo a propriedade de transmissão para qualquer direção tomada como x_n .

Vamos agora introduzir as seguintes notações: $\mathbb{R}_{++}^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\overline{\mathbb{R}}_{++}^2 = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_{++}^2) = r_{x_n}^+ r_{y_n}^+ \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, no qual r_z^+ indica a restrição a $\{z > 0\}$. Relembrando (B.5), temos também que $C_{(0)}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n) = r^+ C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n) = r^+ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Utilizaremos aqui as abreviações:

$$\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \mathcal{S}_+ \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_{++}^2) = \mathcal{S}_{++}. \quad (\text{B.10})$$

Definição B.10. Sejam $d \in \mathbb{R}$ e Ξ um aberto em $\mathbb{R}^{n'}$.

1. O espaço $S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ consiste no espaço das funções $\tilde{f}(X, x_n, \xi') \in C^\infty(\Xi \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{n-1})$, pertencendo a $\mathcal{S}_+$ em relação a x_n , tal que para todos α, β, k, k' ,

$$\left\| x_n^k D_{x_n}^{k'} D_X^\beta D_{\xi'}^\alpha \tilde{f}(X, x_n, \xi') \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq c(X) \langle \xi' \rangle^{d+\frac{1}{2}-k+k'-|\alpha|}, \quad (\text{B.11})$$

com funções contínuas $c(X)$. Mais ainda, dizemos que $\tilde{f}$ possui a expansão assintótica $\tilde{f} \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \tilde{f}_{d-l}$ em $S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ se existir uma sequência de funções $\tilde{f}_{d-l}$ pertencentes a $S_{1,0}^{d-l}(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ tal que

$$\tilde{f} - \sum_{l < M} \tilde{f}_{d-l} \in S_{1,0}^{d-M}(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$$

para qualquer $M \in \mathbb{N}_0$.

2. O subespaço $S^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ dos elementos poli-homogêneos consiste no espaço das funções $\tilde{f} \in S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ que possuem expansões assintóticas $\tilde{f} \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \tilde{f}_{d-l}$ nas quais as funções $\tilde{f}_{d-l}$ possuem a propriedade de quasi-homogeneidade

$$\tilde{f}_{d-l} \left(X, \frac{1}{\lambda} x_n, \lambda \xi' \right) = \lambda^{d+1-l} \tilde{f}_{d-l}(X, x_n, \xi') \quad (\text{B.12})$$

para $\lambda \geq 1$ e $|\xi'| \geq 1$.

3. O espaço $S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$ consiste no espaço das funções $\tilde{g}(X, x_n, y_n, \xi') \in C^\infty(\Xi \times \overline{\mathbb{R}}_{++}^2 \times \mathbb{R}^{n-1})$, pertencentes a $\mathcal{S}_{++}$ em relação a (x_n, y_n) , tais que para todos $\alpha, \beta, k, k', m, m'$,

$$\left\| x_n^k D_{x_n}^{k'} y_n^m D_{y_n}^{m'} D_X^\beta D_{\xi'}^\alpha \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi') \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{++}^2)} \leq c(X) \langle \xi' \rangle^{d+1-k+k'-m+m'-|\alpha|}. \quad (\text{B.13})$$

Aqui, dizemos que $\tilde{g}$ possui a expansão assintótica $\tilde{g} \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \tilde{g}_{d-l}$ em $S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$ quando existem funções $\tilde{g}_{d-l} \in S_{1,0}^{d-l}(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$ tais que

$$\tilde{g} - \sum_{l < M} \tilde{g}_{d-l} \in S_{1,0}^{d-M}(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$$

para qualquer $M \in \mathbb{N}_0$.

4. O subespaço $S^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$ dos elementos poli-homogêneos consiste no espaço das funções $\tilde{g} \in S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$ que possuem expansões assintóticas $\tilde{g} \sim \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \tilde{g}_{d-l}$ nas quais as funções $\tilde{g}_{d-l}$ possuem a propriedade de quasi-homogeneidade

$$\tilde{g}_{d-l} \left(X, \frac{1}{\lambda} x_n, \frac{1}{\lambda} y_n, \lambda \xi' \right) = \lambda^{d+2-l} \tilde{g}_{d-l}(X, x_n, y_n, \xi') \quad (\text{B.14})$$

para $\lambda \geq 1$ e $|\xi'| \geq 1$.

Funções com as propriedades da Definição B.10 são chamadas de *symbol-kernels*. As propriedades das funções poderiam também ser formuladas de forma equivalente em termos de norma do supremo, isto é, $\tilde{f} \in S_{1,0}^d(\Xi, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$ se, e somente se,

$$\sup_{x_n > 0} \left| x_n^k D_{x_n}^{k'} D_X^\beta D_{\xi'}^\alpha \tilde{f}(x', x_n, \xi') \right| \leq c(X) \langle \xi' \rangle^{d+1-k+k'-|\alpha|}. \quad (\text{B.15})$$

Daqui em diante, vamos assumir que todos os símbolos de operadores pseudodiferenciais de ordem inteira mencionados satisfazem a condição de transmissão. Utilizamos a notação $p(x', \xi', D_n)$ or $\text{OP}_n(p(x, \xi))$ para denotarmos um operador em $\mathbb{R}$ no qual a definição de operador pseudodiferencial dada em A.6 se aplica apenas em relação a (x_n, ξ_n) , e denotamos por $\text{OP}'(p(x, \xi))$ um operador em $\mathbb{R}^{n-1}$ no qual a definição de operador pseudodiferencial se aplica em relação a (x', ξ') .

Munidos das definições anteriores, podemos então introduzir os elementos do cálculo de Boutet de Monvel. Vamos considerar sistemas da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P_+ + G & K \\ T & S \end{pmatrix} : \begin{matrix} C_{(0)}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})^N \\ \times \\ C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})^M \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})^{N'} \\ \times \\ C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})^{M'} \end{matrix}, \quad (\text{B.16})$$

nos quais P é um operador pseudodiferencial em $\mathbb{R}^n$; T é um operador traço, indo de $\mathbb{R}_+^n$ a $\mathbb{R}^{n-1}$; K é chamado de operador de Poisson, indo de $\mathbb{R}^{n-1}$ a $\mathbb{R}_+^n$; S é um operador pseudodiferencial em $\mathbb{R}^{n-1}$; e G é um operador em $\mathbb{R}_+^n$ chamado de operador singular de Green.

Como exemplo, considere o seguinte problema de valor de contorno em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$ suave, que pode ser encontrado na referência [13]:

$$\begin{aligned} Pu &= f \text{ em } \Omega, \\ Tu &= \varphi \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

no qual P pode ser tomado como o operador $-\Delta$ e $Tu = \gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$. Neste caso, teríamos sistemas da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P_+ \\ T \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

para $M = 0$ e $M' > 0$, e

$$\mathcal{A}^{-1} = (Q_+ + G \quad K) \quad (\text{B.19})$$

quando $\mathcal{A}$ possui inversa, no qual G e K são chamados de operadores de Green e de Poisson, respectivamente, e Q_+ é um operador pseudodiferencial.

Apresentamos a seguir a definição de cada um dos elementos em (B.16).

Definição B.11. Um operador traço de ordem $d \in \mathbb{R}$ e classe $r \in \mathbb{N}_0$ é um operador da forma

$$Tu = \sum_{0 \leq j \leq r-1} S_j \gamma_j + T', \quad (\text{B.20})$$

no qual γ_j denota o operador traço usual dado por $(\gamma_j u)(x') = D_{x_n}^j u(x', 0)$, S_j é um operador pseudo-diferencial em $\mathbb{R}^{n-1}$ de ordem $d - j$ e

$$(T'u)(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_0^\infty \tilde{t}'(x', x_n, \xi') \acute{u}(\xi', x_n) dx_n d\xi', \quad (\text{B.21})$$

com $\tilde{t}' \in S_{1,0}^d(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$; A função $\tilde{t}'$ é chamada de *symbol-kernel* de T' .

Definição B.12. Um operador de Poisson de ordem d é um operador definido por

$$(Kv)(x', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{k}(x', x_n, \xi') \hat{v}(\xi') d\xi' \quad (\text{B.22})$$

no qual o *symbol-kernel* $\tilde{k} \in S_{1,0}^{d-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+)$.

Exemplo B.13. Seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = 1$ em uma vizinhança da origem. O operador $\mathcal{K}_0$, definido por

$$\mathcal{K}_0 \phi = \mathcal{F}_{\xi' \mapsto x'}^{-1} \left(\psi \left(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n \right) \hat{\phi}(\xi') \right) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \psi \left(\langle \xi', |\lambda|^{\frac{1}{2}} \rangle x_n \right) \hat{\phi}(\xi') d\xi',$$

é um operador de Poisson de ordem zero, como observamos na seção 2.4.

Definição B.14. Um operador singular de Green G de ordem $d \in \mathbb{R}$ e classe $r \in \mathbb{N}_0$ é um operador da forma

$$G = \sum_{0 \leq j \leq r-1} K_j \gamma_j + G', \quad (\text{B.23})$$

no qual cada K_j é um operador de Poisson de ordem $d - j$ e

$$(G'u)(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_0^\infty \tilde{g}'(x', x_n, y_n, \xi') \acute{u}(\xi', y_n) dy_n d\xi', \quad (\text{B.24})$$

no qual o *symbol-kernel* $\tilde{g}' \in S_{1,0}^{d-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++})$.

Veremos a seguir um resultado a respeito das composições dos operadores na variável x_n .

Teorema B.15. Considere um símbolo pseudodiferencial $p(x', 0, \xi', \xi_n)$ e *symbol-kernels* do tipo traço, de Poisson e de Green dados por $\tilde{t}(x', x_n, \xi')$, $\tilde{k}(x', x_n, \xi')$ e $\tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi')$ de ordem d , e $\tilde{t}'(x', x_n, \xi')$, $\tilde{k}'(x', x_n, \xi')$ e $\tilde{g}'(x', x_n, y_n, \xi')$ de ordem d' , todos de classe zero. Seja $d'' = d + d'$. Temos então as seguintes propriedades de composição:

1. Se p é de ordem $\mathcal{O}(\langle \xi_n \rangle^{-1})$, então $\gamma_0 \text{OP}_n(p)_+ = \text{OPT}_n(\tilde{t}'')$, no qual $\tilde{t}''(x', x_n, \xi') = \tilde{p}(x', 0, \xi', -x_n)|_{x_n > 0}$ é um *symbol-kernel* de ordem d e classe zero;
2. $\gamma_0 \text{OPK}_n(k) = s''$, no qual $s''(x', \xi') = \tilde{k}(x', 0, \xi')$ é um símbolo pseudodiferencial de ordem d ;
3. $\gamma_0 \text{OPG}_n(\tilde{g}) = \text{OPT}_n(\tilde{t}'')$, no qual $\tilde{t}''(x', y_n, \xi') = \tilde{g}(x', 0, y_n, \xi')$ é um *symbol-kernel* do tipo traço de ordem d e classe zero;

4. $\text{OPK}_n(\tilde{k}) \text{OPT}_n(\tilde{t}') = \text{OPG}_n(\tilde{g}'')$, no qual $\tilde{g}''(x', x_n, y_n, \xi') = \tilde{k}(x', x_n, \xi') \tilde{t}'(x', y_n, \xi')$ é um symbol-kernel de Green de ordem d'' e classe zero;

5. $\text{OPT}_n(\tilde{t}) \text{OPK}_n(\tilde{k}') = s''$, um símbolo pseudodiferencial de ordem d'' definido por

$$s''(x', \xi') = \int_0^\infty \tilde{t}(x', x_n, \xi') \tilde{k}'(x', x_n, \xi') dx_n;$$

6. $\text{OPG}_n(\tilde{g}) \text{OPK}_n(\tilde{k}') = \text{OPK}_n(\tilde{k}'')$, de ordem d'' e definido por

$$\tilde{k}''(x', x_n, \xi') = \int_0^\infty \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi') \tilde{k}'(x', y_n, \xi') dy_n;$$

7. $\text{OPT}_n(\tilde{t}) \text{OPG}_n(\tilde{g}') = \text{OPT}_n(\tilde{t}'')$, de ordem d'' e classe zero, e definida por

$$\tilde{t}''(x', y_n, \xi') = \int_0^\infty \tilde{t}(x', x_n, \xi') \tilde{g}'(x', x_n, y_n, \xi') dx_n;$$

8. $\text{OPG}_n(\tilde{g}) \text{OPG}_n(\tilde{g}') = \text{OPG}_n(\tilde{g}'')$, de ordem d'' e classe zero, e definida por

$$\tilde{g}''(x', x_n, y_n, \xi') = \int_0^\infty \tilde{g}(x', x_n, z_n, \xi') \tilde{g}'(x', z_n, y_n, \xi') dz_n;$$

9. Para todos $l, m \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\begin{aligned} x_n^l D_{x_n}^m \text{OPK}_n(\tilde{k}(x', x_n, \xi')) \varphi &= \text{OPK}_n(x_n^l D_{x_n}^m \tilde{k}(x', x_n, \xi')) \varphi, \\ x_n^l D_{x_n}^m \text{OPG}_n(\tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi')) u &= \text{OPG}_n(x_n^l D_{x_n}^m \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi')) u, \end{aligned}$$

com operadores resultantes de ordem $d - l + m$.

Uma demonstração para o resultado anterior pode ser encontrada na referência [12].

B.3 Boutet de Monvel com parâmetros

Apresentamos brevemente nesta seção os elementos do cálculo de Boutet de Monvel dependente de parâmetros. Todos os resultados e definições aqui citados foram extraídos da referência [17]. O conjunto de parâmetros dos operadores será um cone aberto denotado por $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$, isto é, $p \in \Lambda$ implica que $tp \in \Lambda$ para todo $t > 0$.

Definição B.16. O espaço $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$ de símbolos dependentes de parâmetros de ordem $m \in \mathbb{R}$ consiste em todas as funções $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda)$ tais que

$$\left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \partial_\lambda^\gamma p(x, \xi, \lambda) \right| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle \xi, \lambda \rangle^{m-|\alpha|-|\gamma|}$$

para $(x, \xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$.

Um símbolo p define um operador pseudodiferencial dependente de parâmetros $\text{OP}(p)(\lambda) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pela fórmula

$$\text{OP}(p)(\lambda)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi, \lambda) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Definição B.17. Dizemos que p é um símbolo clássico se existem símbolos $p_{(m-j)} \in S^{m-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$, para $j \in \mathbb{N}_0$, tais que:

1. Para quaisquer $t \geq 1$ e $|(\xi, \lambda)| \geq 1$, temos que $p_{(m-j)}(x, t\xi, t\lambda) = t^{m-j} p_{(m-j)}(x, \xi, \lambda)$;
2. Temos a expansão assintótica $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{(m-j)}$, isto é, $p - \sum_{j=0}^{N-1} p_{(m-j)} \in S^{m-N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$ para todo $N \in \mathbb{N}_0$.

O subconjunto de tais símbolos é denotado por $S_{cl}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$.

Definição B.18. Considere um símbolo $p \in S_{cl}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$, $m \in \mathbb{Z}$, escrito como função de $(x', x_n, \xi', \xi_n, \lambda) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \Lambda$. Dizemos que p satisfaz a condição de transmissão se $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{(m-j)}$ e se, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+l}$, tivermos que

$$D_{x_n}^k D_{(\xi, \lambda)}^\alpha p_{(m-j)}(x', 0, 0, 1, 0) = (-1)^{m-j-|\alpha|} D_{x_n}^k D_{(\xi, \lambda)}^\alpha p_{(m-j)}(x', 0, 0, -1, 0).$$

Neste caso, o operador $P(\lambda)_+ \doteq r^+ \text{OP}(p)(\lambda) e^+ : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ está bem definido.

Definição B.19. Denotamos por $S^m(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$, com $m \in \mathbb{R}$, o espaço de todas as funções $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \Lambda)$ tais que

$$\left\| x_n^k D_{x_n}^{k'} D_{x'}^{\beta'} D_{\xi'}^{\alpha'} D_{\lambda}^\gamma \tilde{f}(x', x_n, \xi', \lambda) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{+x_n})} \leq C_{k, k', \alpha', \beta', \gamma} \langle \xi', \lambda \rangle^{m+1-k+k'-|\alpha'|-|\gamma|}.$$

O subconjunto $S_{cl}^m(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$ consiste de todas as funções $\tilde{f}$ com uma expansão assintótica $\tilde{f} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{f}_{(m-j)}$, isto é, existem funções $\tilde{f}_{(m-j)} \in S^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$, $j \in \mathbb{N}_0$, tais que $\tilde{f} - \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_{(m-j)} \in S^{m-N}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$ para todo $N \in \mathbb{N}_0$ e

$$\tilde{f}_{(m-j)} \left(x', \frac{1}{t} x_n, t \xi', t \lambda \right) = t^{m+1-j} \tilde{f}_{(m-j)}(x', x_n, \xi', \lambda)$$

para $t \geq 1$, $|(\xi', \lambda)| \geq 1$.

De forma similar, $S^m(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_{++}, \Lambda)$ denota o espaço de todas as funções $\tilde{g}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}_{++}^2} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \Lambda)$ tais que

$$\begin{aligned} & \left\| y_n^l x_n^k D_{y_n}^{l'} D_{x_n}^{k'} D_{x'}^{\beta'} D_{\xi'}^{\alpha'} D_{\lambda}^\gamma \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) \right\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{R}_{++}^2(x_n, y_n)})} \\ & \leq C_{k, k', l, l', \alpha', \beta', \gamma} \langle \xi', \lambda \rangle^{m+2-k+k'-l+l'-|\alpha'|-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Podemos enfim definir os operadores do cálculo de Boutet de Monvel para o caso com parâmetros.

Definição B.20. Sejam $\lambda \in \Lambda$, $m \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{N}_0$.

1. Um operador de Poisson dependente de parâmetros de ordem m clássico é uma família de operadores $K(\lambda) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ associados a $\tilde{k} \in S_{cl}^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$ da forma

$$K(\lambda)u(x', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \hat{u}(\xi') d\xi'.$$

Para $\tilde{k} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{k}_{(m-1-j)}$, definimos $\tilde{k}_{(m-1)}(x', \xi', D_n, \lambda) : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ por

$$\tilde{k}_{(m-1)}(x', \xi', D_n, \lambda)(v) = v \tilde{k}_{(m-1)}(x', x_n, \xi', \lambda).$$

2. Um operador traço dependente de parâmetros de ordem m e classe d é uma família de operadores $T(\lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ da forma

$$T(\lambda) = \sum_{j=0}^{d-1} S_j(\lambda) \gamma_j + T'(\lambda),$$

no qual $S_j(\lambda)$ é um operador pseudodiferencial dependente de parâmetro de ordem $m - j$ em $\mathbb{R}^{n-1}$ e $T'(\lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ é da forma

$$T'(\lambda)u(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) (\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u)(\xi', x_n) dx_n d\xi',$$

com $\tilde{t} \in S_{cl}^m(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{S}_+, \Lambda)$. Para $\tilde{t} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{t}_{(m-j)}$, definimos $\tilde{t}_{(m)}(x', \xi', D_n, \lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\tilde{t}_{(m)}(x', \xi', D_n, \lambda)u = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{t}_{(m)}(x', x_n, \xi', \lambda) u(x_n) dx_n.$$

3. Um operador singular de Green dependente de parâmetro de ordem m e classe d é uma família de operadores $G(\lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \mapsto \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ da forma

$$G(\lambda) = \sum_{j=0}^{d-1} K'_j(\lambda) \gamma_j + G'(\lambda),$$

no qual K'_j são operadores de Poisson de ordem $m - j$ e $G'(\lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \mapsto \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ é um operador da forma

$$G'(\lambda)u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) (\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u)(\xi', y_n) dy_n d\xi',$$

com $\tilde{g} \in S_{cl}^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_{++}, \Lambda)$. Definimos o operador $g_{(m-1)}(x', \xi', D_n, \lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \mapsto \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ por

$$\begin{aligned} g_{(m-1)}(x', \xi', D_n, \lambda)u(x_n) &= \sum_{l=0}^{d-1} \tilde{k}'_{l(m-l-1)}(x', x_n, \xi', \lambda) D_{x_n}^l u(0) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{g}_{(m-1)}(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) u(y_n) dy_n. \end{aligned}$$

Observação B.21. Dado um símbolo $p \in S_{cl}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$ que satisfaz a condição de transmissão, associamos a este o operador $p_+(x', 0, \xi', D_n, \lambda) : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ definido por

$$p_+(x', 0, \xi', D_n, \lambda)u(x_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_n \xi_n} p(x', 0, \xi', \xi_n, \lambda) \widehat{e^+ u}(\xi_n) d\xi_n.$$

Definição B.22. Sejam $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}_0$. O conjunto de operadores clássicos de Boutet de Monvel dependentes de parâmetro em $\mathbb{R}_+^n$, denotado por $\mathcal{B}_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{m, d}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, para $m \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{N}_0$, ou apenas por $\mathcal{B}^{m, d}(\mathbb{R}^n, \Lambda)$, consiste em todos os operadores $\mathcal{A}$ dados por

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} P_+(\lambda) + G(\lambda) & K(\lambda) \\ T(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)^{n_1} \\ \oplus \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^{n_2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^n)^{n_3} \\ \oplus \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^{n_4} \end{matrix},$$

nos quais P_+ é um operador pseudodiferencial de ordem m satisfazendo a condição de transmissão, G é um operador singular de Green de ordem m e classe d , K é um operador de Poisson de ordem m , T é um operador do tipo traço de ordem m e classe d e S é um operador pseudodiferencial de ordem m , todos dependentes de parâmetros em suas respectivas classes.

Definição B.23. Para cada $s \in \mathbb{R}$, definimos o operador $\langle D \rangle^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como o operador pseudodiferencial de símbolo $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \xi \rangle^s$. Mais ainda, escrevemos $\varphi_j(D)u = \text{OP}(\varphi_j)u$.

1. O espaço potencial de Bessel $H_p^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \langle D \rangle^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$, para $1 < p < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$, é o espaço de Banach com a norma $\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} \doteq \|\langle D \rangle^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
2. O espaço de Besov $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, para $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p, q < \infty$, é o espaço de Banach de todas as distribuições temperadas $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} \doteq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsp} \|\varphi_j(D_x)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Os operadores do cálculo de Boutet de Monvel com parâmetros satisfazem ainda as propriedades de composição mencionadas anteriormente. Como forma de ilustrar brevemente como se dão tais composições, vamos analisar $K(\lambda)T(\lambda)$ para o caso em que $K(\lambda)$ e $T(\lambda)$ são de classe zero.

Sejam $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que $\varphi(0) = 1$ e defina $\varphi_\varepsilon(u) = \varphi(\varepsilon u)$. Então um operador $K(\lambda)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} K(\lambda)v(x', x_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \widehat{v}(\xi') d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\eta' \cdot \xi'} v(\eta') d\eta' d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} e^{-i\eta' \cdot \xi'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon \eta') \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) v(\eta') d\eta' d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\eta' \cdot \xi'} \varphi(\varepsilon \eta') v(\eta') d\eta' \right) d\xi' \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \mathcal{F}(\varphi_\varepsilon v)(\xi') d\xi',$$

uma vez que $\varphi_\varepsilon v \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ e portanto pudemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Como $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ e $|\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon v)| = |\widehat{\varphi_\varepsilon} * \widehat{v}|$, temos que

$$\|\mathcal{F}(\varphi_\varepsilon v)\|_\infty = \|\widehat{\varphi_\varepsilon} * \widehat{v}\|_\infty = \|\widehat{v}\|_{L^1} \|\widehat{\varphi_\varepsilon}\|_\infty < \infty.$$

Mais ainda, segue do Lema A.2 que $\tilde{k}\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Assim, segue novamente por aplicação do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} K(\lambda)v(x', x_n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi' \cdot (\eta' - x')} \varphi(\varepsilon \eta') \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) v(\eta') d\eta' d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi' \cdot y} \varphi(\varepsilon(y + x')) \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) v(y + x') dy d\xi' \\ &= \text{Os} \int \int e^{-i\xi' \cdot y} \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) v(y + x') dy d\xi'. \end{aligned}$$

A última igualdade acima se deve ao fato de que $\tilde{k}(x', x_n, \cdot, \lambda) v(\cdot + x') \in \mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1})$ para $m, \tau \in \mathbb{R}$, o que pode ser visto através da fórmula de Leibniz.

Analogamente, se $T(\lambda)$ é um operador traço de classe zero e $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, então

$$\begin{aligned} T(\lambda)u(x') &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty e^{ix' \cdot y'} \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) (\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u)(\xi', x_n) dx_n d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{ix' \cdot \xi'} \varphi(\varepsilon \xi') \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) \mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'}(\varphi_\varepsilon u)(\xi', x_n) dx_n d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\xi' \cdot (y' - x')} \varphi_\varepsilon(\xi') \varphi_\varepsilon(y') \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) u(y', x_n) dy' dx_n d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_\varepsilon(\xi') \varphi_\varepsilon(z + x') e^{-i\xi' \cdot z} \int_0^\infty \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) u(z + x', x_n) dx_n dz d\xi' \\ &= \text{Os} \int \int e^{-i\xi' \cdot z} \int_0^\infty \tilde{t}(x', x_n, \xi', \lambda) u(z + x', x_n) dx_n dz d\xi', \end{aligned}$$

e do mesmo modo, se $G(\lambda)$ é um operador de Green de classe zero, temos que

$$\begin{aligned} G(\lambda)u(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty e^{ix' \cdot \xi'} \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) (\mathcal{F}_{x' \mapsto \xi'} u)(\xi', y_n) dy_n d\xi' \\ &= \text{Os} \int \int e^{-iz' \cdot \xi'} \int_0^\infty \tilde{g}(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) u(z' + x', y_n) dy_n dz d\xi'. \end{aligned}$$

Do anterior, segue pelo Teorema de Fubini para integrais oscilatórias A.18 que

$$\begin{aligned} K(\lambda)T(\lambda)u(x) &= \text{Os} \int \int \int \int e^{-i\xi' \cdot y} e^{-i\xi'' \cdot z} \tilde{k}(x', x_n, \xi', \lambda) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \tilde{t}(y + x', \tilde{x}_n, \xi'', \lambda) u(z + y + x', \tilde{x}_n) d\tilde{x}_n dz d\xi'' dy d\xi' \\ &= \text{Os} \int \int \int \int e^{-i\eta \cdot y - i\xi'' \cdot w} \tilde{k}(x', x_n, \eta + \xi'', \lambda) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \tilde{t}(y + x', \tilde{x}_n, \xi'', \lambda) u(w + x', \tilde{x}_n) d\tilde{x}_n dy d\xi'' dw d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Os-} \iint e^{-i\xi'' \cdot w} \int_0^\infty \left(\text{Os-} \iint e^{-i\eta \cdot y} \tilde{k}(x', x_n, \eta + \xi'', \lambda) \tilde{t}(y + x', \tilde{x}_n, \xi'', \lambda) dy d\eta \right) d\tilde{x}_n \\
&\quad \cdot u(w + x', \tilde{x}_n) dw d\xi'' \\
&= \tilde{G}(\lambda) u(x),
\end{aligned}$$

no qual $\tilde{G}(\lambda)$ é um operador de Poisson com symbol-kernel g' dado por

$$g'(x', x_n, y_n, \xi', \lambda) = \text{Os-} \iint e^{-i\eta \cdot y} \tilde{k}(x', x_n, \eta + \xi'', \lambda) \tilde{t}(y + x', \tilde{x}_n, \xi'', \lambda) dy d\eta.$$

De forma mais geral, temos o seguinte resultado a respeito da composição de operadores do cálculo de Boutet de Monvel com parâmetros. O mesmo pode ser encontrado nas páginas 1156 e 1157 da referência [17].

Teorema B.24. *Sejam $A \in \mathcal{B}_{E_1, F_1, E_2, F_2}^{m, d}(M, \Lambda)$, $B \in \mathcal{B}_{E_0, F_0, E_1, F_1}^{m', d'}(M, \Lambda)$. Então $AB \in \mathcal{B}_{E_0, F_0, E_2, F_2}^{m+m', d''}(M, \Lambda)$, no qual $d'' = \max\{m' + d, d'\}$. De modo similar, se $A \in \tilde{\mathcal{B}}_{E_1, F_1, E_2, F_2}^p(M, \Lambda)$ e $B \in \tilde{\mathcal{B}}_{E_0, F_0, E_1, F_1}^p(M, \Lambda)$, então $AB \in \tilde{\mathcal{B}}_{E_0, F_0, E_2, F_2}^p(M, \Lambda)$.*

A tabela a seguir ilustra as composições de operadores de Boutet de Monvel com parâmetros. Sejam P_+ , G , K , T e S como na definição B.22 e P'_+ , G' , K' , T' e S' de ordem m' , com G' e T' de classe d' . Todas as composições apresentadas na seguinte tabela são de ordem $m + m'$ e classe $\max\{m' + d, d'\}$, quando fizer sentido.

	tipo	symbol-kernel
$P_+ \circ P'_+$	$P''_+(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$
$P_+ \circ G'$	$G''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_{++}, \Lambda)$
$P_+ \circ K'$	$K''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$
$G \circ G'$	$G''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_{++}, \Lambda)$
$G \circ P'_+$	$G''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_{++}, \Lambda)$
$G \circ K'$	$K''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$
$K \circ T'$	$G''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_{++}, \Lambda)$
$K \circ S'$	$K''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'-1}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$
$T \circ P'_+$	$T''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$
$T \circ G'$	$T''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$
$T \circ K'$	$S''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}, \Lambda)$
$S \circ S'$	$S''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}, \Lambda)$
$S \circ T'$	$T''(\lambda)$	$S_{cl}^{m+m'}(\mathbb{R}^{n-1}, S_+, \Lambda)$

Tabela B.1: Composições de operadores de Boutet de Monvel.

Referências Bibliográficas

- [1] ABELS, H. **Pseudodifferential and singular integral operators: an introduction with applications.** Walter de Gruyter, 2012.
- [2] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev spaces.** 2 ed. Oxford: Academic Press, 2003. 305 p. (Pure and Applied Mathematics; 140).
- [3] BAROSTICHI, R.; LOPES, P. **Higher Order Regularity of Semilinear Heat Equations with Dynamic Boundary Conditions.**
- [4] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional.** SBM, 2015.
- [5] CORIASCO, S.; SCHROHE E. and SEILER J. **Realizations of Differential Operators on Conic Manifolds with Boundary.** Annals of Global Analysis and Geometry 31, 223–285, Springer Science and Business Media LLC, 2007. <https://doi.org/10.1007/s10455-006-9019-7>
- [6] CZAJA, R. **Differential Equations with Sectorial Operator.** Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2002.
- [7] DUONG, X. **H^∞ functional calculus of elliptic operators with C^∞ coefficients on L^p spaces of smooth domains.** Journal of the Australian Mathematical Society, 48(1), 113-123. doi:10.1017/S1446788700035242, 1990.
- [8] ENGEL, KJ.; NAGEL, R. **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.** Springer, New York, 2000.
- [9] EVANS, L. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, 2010.
- [10] FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.** John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [11] FOLLAND, G. **Introduction to Partial Differential Equations.** Princeton University Press, 1995.
- [12] GRUBB, G. **Distributions and Operators.** Springer, 2009.
- [13] GRUBB, G. **Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems.** Birkhäuser Boston, MA, 1996.
- [14] GRUBB, G. (1990). **Pseudo-differential boundary problems in L^p spaces.** Communications in Partial Differential Equations, 15(3), 289–340. <https://doi.org/10.1080/03605309908820688>

- [15] KUNSTMANN, P.C.; WEIS, L. **Maximal L^p -regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞ -functional Calculus.** In: Iannelli, M., Nagel, R., Piazzera, S. (eds) *Functional Analytic Methods for Evolution Equations. Lecture Notes in Mathematics*, vol 1855. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-540-44653-8_2
- [16] LARSSON, S. **The Cahn-Hilliard Equation.** 1988.
- [17] LOPES, P.; SCHROHE, E. **Spectral Invariance of Pseudodifferential Boundary Value Problems on Manifolds with Conical Singularities**, *J Fourier Anal Appl* 25, 1147–1202, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00041-018-9607-5>
- [18] LUNARDI, A. **Interpolation Theory.** Scuola Normale Superiore, Pisa, 2018.
- [19] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Springer, New York, 1992.
- [20] RUDIN, W. **Functional Analysis.** McGraw-Hill, 1991.
- [21] SCHROHE, E.; KRIETENSTEIN, T. **Bounded H^∞ -calculus for a degenerate elliptic boundary value problem.** *Math. Ann.* 383, 1597–1646, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00208-021-02251-1>
- [22] YAGI, A. **Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications.** Springer, 2010.