

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO

ABORDAGENS PARA REAGENDAMENTO DE VOOS DE
HELICÓPTEROS EM UMA EMPRESA DE ÓLEO E GÁS
NATURAL

TARLEY MANSUR FANTAZZINI

SÃO CARLOS
2025

TARLEY MANSUR FANTAZZINI

**ABORDAGENS PARA REAGENDAMENTO DE VOOS DE
HELICÓPTEROS EM UMA EMPRESA DE ÓLEO E GÁS NATURAL**

Tese apresentada junto ao programa de
Doutorado em Engenharia de Produção
do **Universidade Federal de São Carlos**,
como requisito parcial à obtenção do título de
Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito.

Coorientador:

Prof. Dr. Pedro Munari.

SÃO CARLOS

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Tarley Mansur Fantazzini, realizada em 24/04/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Reinaldo Morabito Neto (UFSCar)

Prof. Dr. Pedro Augusto Munari Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Fabrício Oliveira (AU)

Prof. Dr. Angelo Aliano Filho (UTFPR)

Prof. Dr. Paulo Cesar Ribas (HiMolde)

Prof. Dr. Cláudio Barbieri da Cunha (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção (PPGEP). Agradeço também ao Programa CAPES Print, que viabilizou a bolsa de doutorado sanduíche para a Finlândia, uma experiência fundamental para o desenvolvimento da minha pesquisa.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Reinaldo Morabito Neto, pela orientação dedicada, pelos ensinamentos e pela paciência ao longo desses quatro anos de doutorado. O seu constante incentivo foi fundamental para o desenvolvimento e a conclusão desta pesquisa. Agradeço igualmente ao meu coorientador, Dr. Pedro Munari, pelo apoio, pelas contribuições valiosas à minha pesquisa e pela amizade que se fortaleceu ao longo dessa trajetória.

Agradeço profundamente aos amigos que encontrei ao longo desta jornada. Ao Eduardo, pela amizade sincera que sei que vai ser pra vida toda e pelo apoio nos momentos de necessidade. A Kamyla Ferreira e o Alex Paranahyba, pela amizade, que vai além do laboratório, se estendendo a nossas aventuras ao redor do mundo. Sou grato também ao Grupo de Pesquisa Operacional (GPO) e a todos os seus membros, que me receberam com tanto acolhimento e me proporcionaram inúmeras oportunidades.

Agradeço ao Dr. Fabrício Oliveira por me supervisionar durante seis meses na Aalto University, na Finlândia. Esse período foi repleto de novas experiências e ensinamentos que levarei para toda a minha vida. Sou muito grato pela oportunidade e pela orientação oferecida durante minha vivência internacional.

Agradeço ao Markku Haussila, que foi uma pessoa muito especial que conheci durante o período que passei na Finlândia e fez o meu processo de adaptação em um país com uma cultura e clima muito diferentes ser tranquilo e muito divertido.

Agradeço, especialmente, aos meus amigos Germano Pestana, que, mesmo distante, sempre me oferece apoio, me faz rir e está sempre disposto a ajudar no que eu precisar. À Luciana Vilela e ao Marcelo Werner, meus amigos de infância, com quem tenho um carinho imenso, e também à Paula e ao Marcus, amigos mais recentes, que já considero profundamente.

Por fim, expresso minha eterna gratidão à minha mãe e à minha irmã, que me apoiaram incondicionalmente ao longo de toda esta jornada. Sua presença constante, carinho e suporte foram essenciais para que eu superasse os desafios e chegasse até aqui.

RESUMO

O transporte aéreo de passageiros conta com um planejamento antecipado dos voos a serem realizados. Entretanto, imprevistos podem impactar o agendamento desses voos, tornando necessário realizar recuperações e reprogramações por meio de reagendamentos. Nesse contexto, surge o problema de recuperação de aeronaves (*Aircraft Recovery Problem* – *ARP*), que visa reprogramar os voos afetados por tais eventos. Este trabalho aborda um ARP específico de uma empresa brasileira de extração de óleo e gás natural com operações em plataformas *offshore*, onde helicópteros terceirizados são utilizados para o transporte de funcionários entre aeroportos e unidades marítimas. São propostas diversas abordagens baseadas em otimização para modelar e resolver esse problema. Inicialmente, aplicou-se programação por metas hierárquicas com três objetivos escalonados: minimizar o número de voos adiados, o uso de helicópteros e o atraso total. Foram obtidas soluções ótimas ou próximas da otimalidade com baixos tempos computacionais para instâncias com até 50 voos. Em seguida, adotaram-se modelos multiobjetivos com a métrica de Chebyshev ponderada e a abordagem de Lokman e Köksalan, permitindo encontrar soluções não-dominadas que compõem a superfície de Pareto. Tais métodos apresentaram bons resultados, com *gaps* inferiores a 12% e tempos computacionais reduzidos, mesmo com a redução do limite de tempo computacional. Para complementar as abordagens determinísticas, são incorporadas técnicas de programação estocásticas para lidar com as incertezas associadas aos parâmetros do problema, buscando capturar e analisar a variabilidade e os riscos de parâmetros incertos, como o tempo de voo entre o aeroporto e as unidades marítimas. A integração dessas abordagens determinísticas e estocásticas proporcionou uma análise abrangente e flexível deste ARP, permitindo otimizar os resultados tanto em cenários controlados quanto em condições de incerteza, e contribuindo para uma gestão mais eficaz das operações de recuperação de aeronaves.

Palavras-chave: Problema de recuperação de aeronaves. Helicópteros. Programação inteira. Programação Multiobjetivo. Programação estocástica. Indústria de Óleo e Gás.

ABSTRACT

Air transportation of passengers relies on prior planning of scheduled flights. However, unforeseen events may affect this scheduling, making recovery and rescheduling actions necessary. In this context, the Aircraft Recovery Problem (ARP) arises, aiming to reschedule flights affected by such disruptions. This work addresses a specific ARP faced by a Brazilian oil and natural gas extraction company operating offshore platforms, where third-party helicopters are used to transport employees between airports and maritime units. Several optimization-based approaches are proposed to model and solve this problem. Initially, hierarchical goal programming was applied with three sequential objectives: minimizing the number of postponed flights, helicopter usage, and total delays. Optimal or near-optimal solutions were obtained with low computational times for instances with up to 50 flights. Subsequently, multi-objective models were adopted, including the weighted Chebyshev metric and the approach proposed by Lokman and Köksalan, enabling the identification of non-dominated solutions that compose the Pareto frontier. These methods showed promising results, with computational gaps below 12% and reduced execution times, even with a shortened time limit. To complement the deterministic approaches, stochastic programming techniques were incorporated to handle uncertainties in the problem parameters, aiming to capture and analyze the variability and risks associated with uncertain values such as flight time between the airport and maritime units. The integration of deterministic and stochastic approaches provided a comprehensive and flexible analysis of this ARP, enabling result optimization in both controlled and uncertain scenarios, and contributing to more effective management of aircraft recovery operations.

Keywords: Aircraft recovery problem. Helicopters. Integer programming. Multi-objective programming. Stochastic Programming. Oil and Gas Industry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Motivos de atrasos de voos	12
Figura 1.2 – Etapas para a condução da pesquisa	15
Figura 2.1 – Passos para condução de uma revisão sistemática de literatura	24
Figura 2.2 – Passos da filtragem de publicações	25
Figura 2.3 – Parâmetros de busca	25
Figura 3.1 – Mapa de operações de transportes aéreos	36
Figura 3.2 – Programação inicial de voos para um dia d	37
Figura 3.3 – Reprogramação dos voos com adição de voos transferidos de dias anteriores para o dia (d)	38
Figura 4.1 – Determinação do valor de $Dmax_i$	50
Figura 4.2 – Trade-off entre qualidade de solução e tempo computacional das instâncias I35, I40, I42 e I46.	61
Figura 5.1 – Pontos não-dominados para a instância I20 com a utilização do método de Lokman e Köksalan	75
Figura 5.2 – Pontos não-dominados para a instância I20 com a utilização do método de Chebyshev	76
Figura 6.1 – Resultado dos 30 experimentos com a instância I14 com $k = 10$	96
Figura 6.2 – Comparação entre aleatório e $k-means$ - in-sample e out-of-sample	97
Figura 7.1 – Espaço da variável de decisão e da função objetivo.	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Dados de voos por ano	12
Tabela 2.1 – Comparação de abordagens para ARP	35
Tabela 4.1 – Descrição das 15 instâncias	57
Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as 15 instâncias nas quatro abordagens. . . .	58
Tabela 4.3 – Resultados obtidos em cada objetivo para as quatro abordagens . . .	59
Tabela 4.4 – Resultados obtidos em relação aos tipos de helicópteros utilizados . .	61
Tabela 5.1 – Tabela de comparação de tempo priorizando as funções objetivo FO1, FO2 e FO3.	66
Tabela 5.2 – Valores de λ_1, λ_2 e λ_3	69
Tabela 5.3 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens sem R1/R2, com R1 e com R2.	70
Tabela 5.4 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens TL1, TL2 e TL3.	71
Tabela 5.5 – Resultados detalhados para a instância I38.	72
Tabela 5.6 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens Sem R1/R2, Com R1 e Com R2.	73
Tabela 6.1 – Descrição das 15 instâncias utilizadas nos modelos estocásticos	93
Tabela 6.2 – Comparação das métricas entre os métodos Aleatório e <i>K-means</i> para o modelo M1 na instância I14	95
Tabela 6.3 – Tabela de Resultados do Modelo Estocástico M1	99
Tabela 6.4 – Tabela de Resultados do Modelo Estocástico M2	99
Tabela 6.5 – Tabela de Resultados dos Modelos M1 e M2 com EVPI e VSS	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Justificativa	11
1.2	Objetivo	13
1.3	Método de pesquisa	13
1.4	Contribuições	16
1.5	Organização do texto	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	Contextualização da literatura	19
2.2	Revisão Sistemática da Literatura	23
2.2.1	Seleção de artigos	24
2.2.2	Análise do conteúdo dos artigos	26
3	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	36
4	MODELO DE PROGRAMAÇÃO POR METAS	42
4.1	Abordagem A1	47
4.2	Abordagem A2	47
4.3	Abordagem A3	49
4.4	Abordagem A4	55
4.5	Experimentos Computacionais	56
5	MODELO MULTIOBJETIVO	63
5.1	Método de Chebyshev Ponderado Aumentado	63
5.2	Método de Lokman e Köksalan	65
5.3	Experimentos Computacionais	68
6	MODELO MATEMÁTICO ESTOCÁSTICO	77

6.1	Abordagem M1-E1	84
6.2	Abordagem M1-E2	85
6.3	Abordagem M2-E1	89
6.4	Abordagem M2-E2	90
6.5	Experimentos Computacionais	92
6.5.1	Geração de Cenários	94
6.5.2	Resultados Obtidos com os Modelos Estocásticos	98
7	CONCLUSÕES	102
	REFERÊNCIAS	105
	Apêndice A - Programação por metas	114
	Apêndice B - Otimização Multiobjetivo	117
	Apêndice C - Programação estocástica	126

1 INTRODUÇÃO

Empresas aéreas têm uma demanda crescente na prestação de serviços aos seus consumidores e investem no desenvolvimento de agendamento de voos com o objetivo de maximização de lucro e satisfação dos seus clientes. Estes agendamentos de voos são planejados com antecedência, de acordo com a estimativa de demanda de passageiros, disponibilidade de frota, aeronave, portão de embarque, pista de decolagem e pouso, entre outros fatores a serem considerados. Entretanto, eventos imprevistos podem impactar no agendamento destes voos, tornando necessário realizar recuperações e reprogramações por meio de reagendamentos.

A programação de voos é tipicamente realizado em quatro etapas: (1) desenvolvimento do cronograma de voos; (2) atribuição de frota; (3) rota de aeronaves; e (4) atribuição de tripulação. A primeira etapa é uma decisão realizada a longo prazo, com a definição das cidades a serem atendidas, o tempo e a frequência de voos. A segunda etapa inclui a atribuição de diferentes tipos de aeronaves aos voos previamente agendados, e é realizada com base em previsões de demanda, com o objetivo de maximização de lucro, considerando as restrições de cada aeronave em relação aos custos operacionais e de manutenção, combustível e tamanho da tripulação necessária. A terceira etapa, é constituída pela designação de aeronaves individuais aos portões de embarque, com o objetivo de redução dos custos operacionais e preenchimento dos requisitos de manutenção necessários. Por fim, a quarta etapa envolve a designação da tripulação de voo e de cabine às aeronaves ([Bouarfa et al., 2014](#)).

Os eventos imprevistos, ao afetarem o cronograma de agendamentos, causam atrasos e cancelamento de voos e conexões. Estes são provenientes de fontes internas e/ou externas. Entre os exemplos de eventos de origem interna estão: manutenções não planejadas, falta de combustível, falhas mecânicas, ausência de membros da tripulação e atrasos no carregamento de bagagens. Por outro lado, eventos externos podem incluir condições meteorológicas adversas, restrições no controle de tráfego aéreo e atrasos de passageiros para o embarque ([Su et al., 2021](#)).

Devido ao impacto causado por estes eventos imprevistos, operações de gerenciamento são necessárias para reduzir os custos de interrupções nos agendamentos. [Wen et al. \(2020\)](#) apontam que o gerenciamento pode ser realizado de duas formas: planejamento robusto e planejamento de recuperação. O primeiro refere-se à integração de possíveis ocorrências de interrupções não programadas no quadro de decisões na fase de planejamento, com o objetivo de produzir cronogramas que sejam capazes de permanecer

viáveis e menos vulneráveis em ambientes perturbados. O último refere-se à reprogramação do plano original na ocorrência de uma interrupção, sendo o seu resultado a remarcação ou cancelamento de voos, por meio da reatribuição de membros da tripulação ou reacomodação de passageiros.

Há uma grande diferença entre o agendamento e recuperação de voos. O primeiro foca em otimização para aumento de lucro e satisfação dos clientes, já o segundo busca uma solução factível com menor impacto nos voos já agendados, com o menor atraso possível e, almeja também, a redução de cancelamento de voos. Outra diferença é a incerteza que engloba o problema de recuperação, que requer rapidez para ser solucionado, enquanto o agendamento pode ser planejado com antecedência.

Devido à necessidade de recuperação de voos pelas linhas aéreas, aparece, conforme descrito na literatura, o problema de recuperação de linhas aéreas (*Airline Recovery Problem*). [Clarke \(1998\)](#) descreve este problema como um modelo de decisão híbrido tridimensional, pois abrange outros três subproblemas, sendo eles: o Problema de Recuperação de Aeronaves (*Aircraft Recovery Problem* – ARP); o Problema de Recuperação de Tripulantes (*Crew Recovery Problem* – CRP); e o Problema de Recuperação de Passageiros (*Passenger Recovery Problem* – PRP).

Estes subproblemas visam minimizar o custo de retomada das operações de empresas aéreas em situações na qual o cronograma de agendamento de voos foi afetado por um ou mais eventos imprevistos. O ARP consiste na designação de aeronaves aos voos a serem reagendados, o CPR envolve a atribuição de tripulantes a estas aeronaves e, por fim, o PRP proporciona acomodação e apoio aos passageiros. Alguns estudos, como em [Teodorović e Stojković \(1995\)](#) e em [Malucelli et al. \(2006\)](#), adotam uma ordem para recuperação de voos, sendo: (1) recuperação de aeronaves, (2) recuperação de tripulantes e, por fim, (3) recuperação de passageiros, porém outros autores questionam esta ordem de execução e desenvolvem modelos de resolução simultânea ([Nedjati et al., 2017](#); [Naz Yetimoğlu; Selim Aktürk, 2021](#)).

As problemáticas discutidas anteriormente não se restringem ao contexto da aviação comercial, estendendo-se também aos voos corporativos, que são operações aéreas realizadas por empresas com o objetivo de transportar seus próprios colaboradores, gestores ou equipamentos, geralmente para fins operacionais ou estratégicos. Por exemplo, empresas petrolíferas e de extração de gás possuem plataformas *offshore* para a retirada destes recursos naturais e necessitam, constantemente, transportar equipes de funcionários, gestores, mantenedores etc., entre aeroportos e unidades marítimas. Estes voos são realizados com frequência, sendo necessária a definição de um cronograma de voos, e conta com uma frota de helicópteros para suprir a demanda. Os voos realizados por estas

empresas também estão sujeitos a eventos imprevistos internos e externos e, por isso, a aplicação de problemas de recuperação de voos também se torna relevante ao reduzir custos de transportes e realizar o máximo de voos previstos sem atrasos ou necessidade de cancelamento.

Especificamente, o problema do presente estudo foi motivado pelo problema de reagendamento de voos e recuperação de aeronaves de uma empresa brasileira de exploração e produção de petróleo e gás e conta com diversas plataformas *offshore*. Para a realização do transporte aéreo de passageiros, a empresa conta com uma frota de helicópteros com diferentes capacidades e autonomias de voo. O cronograma de transporte de passageiros da empresa pode envolver dezenas de voos diários entre alguns aeródromos e múltiplas plataformas marítimas. O problema desta empresa tem similaridades com os problemas de outras empresas deste setor.

Este estudo abrange o problema de recuperação de aeronaves de/para alguns aeroportos para/de múltiplas plataformas marítimas, e está sujeito a diferentes prioridades de reagendamento, janelas de tempo impostas pelo horário de funcionamento de aeródromos e por restrições de helicópteros (e.g., impossibilidade de voos após escurecer), pistas de pouso e decolagem únicas nos aeródromos, pontos de pouso únicos nas plataformas, tempos de parada mandatórios para a tripulação, frota heterogênea de helicópteros, entre outras prioridades e restrições a serem consideradas.

Durante a condução desta pesquisa, são propostas diferentes abordagens para modelar e resolver este ARP. Inicialmente, utiliza-se a programação por metas (*Goal Programming*), que é empregada para estabelecer e priorizar critérios essenciais para o reagendamento dos voos, assegurando que aspectos fundamentais fossem considerados de forma preeminente em relação aos outros, sendo estes critérios, em ordem lexicográfica: a minimização de transferência de voos para o dia seguinte; redução de utilização de helicópteros; e redução de atraso. Adicionalmente, são desenvolvidos modelos de otimização multiobjetivo que permitem a avaliação de diversas soluções por meio da atribuição de pesos diferenciados aos objetivos. Essa abordagem possibilita a geração de múltiplas soluções eficientes, cada uma representando um compromisso distinto entre os critérios considerados. Como resultado, é possível identificar diferentes pontos que compõem a superfície de Pareto, fornecendo ao tomador de decisão um conjunto diversificado de alternativas não-dominadas. No presente estudo, os objetivos considerados incluem a realização dos voos, a utilização dos helicópteros e os atrasos, permitindo uma análise abrangente e equilibrada das possíveis soluções. Para complementar as abordagens determinísticas, o estudo incorpora técnicas de modelagem estocástica para lidar com as incertezas associadas ao problema. Em específico, modelos de programação estocástica são propostos para capturar e analisar a variabilidade

e os riscos decorrentes de parâmetros incertos, como o tempo de voo do helicóptero do aeroporto à uma unidade marítima, oferecendo uma visão mais realista das possíveis soluções.

A combinação dessas abordagens determinísticas, tanto a programação por metas quanto os modelos multiobjetivos, com a de programação estocástica, proporciona uma análise abrangente e flexível do ARP. Essas abordagens permitem otimizar os resultados tanto em cenários controlados quanto em condições de incerteza, contribuindo para uma gestão mais eficaz das operações de recuperação de aeronaves.

Em todos os métodos empregados para a resolução do ARP, a formulação do problema é realizada por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos de programação inteira (*Integer Programming*). Além disso, são adotados modelos de tempo discreto, ou seja, o horizonte temporal de programação é segmentado em unidades discretas, em vez de utilizar modelos de tempo contínuo, como é frequentemente abordado na literatura, conforme discutido na revisão do capítulo 2.

1.1 JUSTIFICATIVA

Apesar dos métodos avançados utilizados para a definição dos agendamentos de voos, as operações frequentemente enfrentam interrupções devido a eventos imprevistos. Conforme os dados divulgados pela [Agência Nacional de Aviação Civil \(2022\)](#), em 2017, 25% dos voos tiveram atrasos entre 30 e 60 minutos, 4% enfrentaram atrasos superiores a 60 minutos, e a taxa de cancelamento foi de 9%. Apenas 62% dos voos foram pontuais ou apresentaram atrasos menores que 30 minutos.

De acordo com [Bureau of Transportation Statistics \(2024b\)](#), que apresenta dados sobre a pontualidade das 17 maiores transportadoras aéreas (ver Tabela 1.1), a taxa média de voos atrasados é ligeiramente superior a 17%. Além disso, a média de cancelamentos é de 2,84%. No entanto, é importante destacar que os dados para os anos de 2020 e 2021 mostram exceções significativas, pois esses períodos foram fortemente impactados pelas restrições decorrentes da pandemia de COVID-19.

Os atrasos em voos podem ser atribuídos a uma variedade de fatores que perturbam o agendamento das operações. Segundo [Bureau of Transportation Statistics \(2024a\)](#), os principais motivos para atrasos registrados entre 2015 e maio de 2024 são ilustrados na Fig. 1.1. Durante esse período, o motivo mais frequente de atraso foi o atraso na chegada de aeronaves, que afetou cerca de 6,4% dos voos. O segundo maior motivo foi o atraso causado pelo Sistema Nacional de Aviação, responsável por aproximadamente 5,25% dos atrasos.

Tabela 1.1 – Dados de voos por ano

Ano	Voos pontuais (%)	Voos atrasados (%)	Voos cancelados (%)	Total de voos
2015	78,27%	19,22%	2,25%	2.385.615
2016	82,87%	15,60%	1,30%	2.289.826
2017	79,17%	19,07%	1,53%	2.303.943
2018	80,13%	17,70%	1,95%	2.915.592
2019	78,47%	18,87%	2,40%	2.997.647
2020	78,27%	10,22%	11,36%	2.323.842
2021	86,80%	11,44%	1,56%	2.084.553
2022	76,43%	20,12%	3,22%	2.733.789
2023	77,50%	20,83%	1,43%	2.763.307
2024	77,31%	21,01%	1,43%	2.850.187

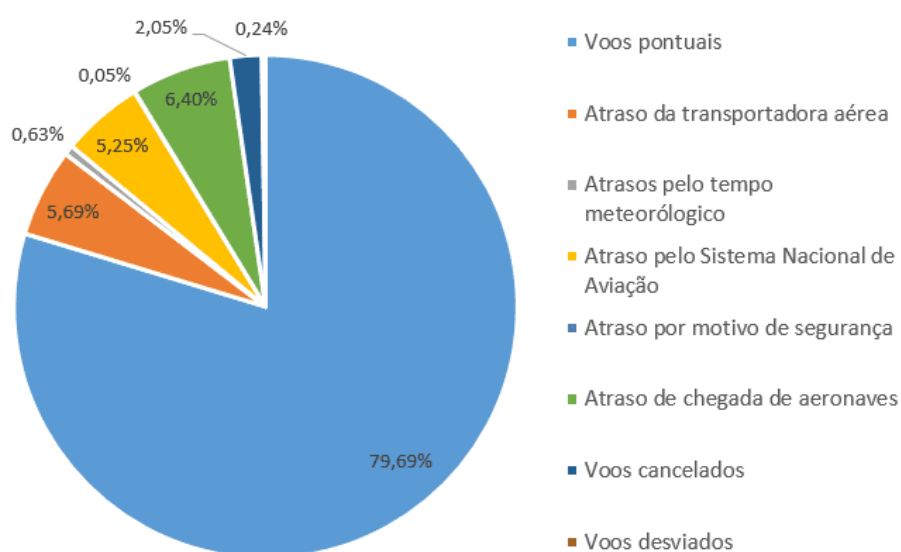


Figura 1.1 – Motivos de atrasos de voos

Os atrasos e cancelamentos de voos resultam em custos adicionais significativos para as empresas. Portanto, é crucial implementar um plano de reagendamento e recuperação de aeronaves bem estruturado para mitigar os impactos dessas interrupções no cronograma de voos. Esses problemas não são exclusivos das empresas aéreas; empresas do setor de petróleo e gás, como a empresa brasileira que inspirou esta pesquisa, enfrentam desafios semelhantes. O transporte eficiente de funcionários entre aeroportos e plataformas *offshore* é fundamental para garantir a continuidade das operações conforme o planejado.

De acordo com o Boletim da Produção de Petróleo e Gás Natural publicado pela [Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis \(2022\)](#), em 2012, aproximadamente 90,9% da produção nacional de petróleo e 76,2% da produção de gás natural foram extraídos de plataformas marítimas. Em 2020, a produção nacional de petróleo e gás natural proveniente de campos marítimos aumentou para 96,8% e 85,8%, respectivamente. Esses dados evidenciam um crescimento significativo na exploração de

recursos naturais em regiões marítimas.

Com o aumento da exploração de petróleo e gás em campos marítimos, a eficiência da logística *offshore* se torna relevante. A movimentação diária de pessoal entre o continente e as plataformas *offshore* é essencial para a realização de trocas de turnos de trabalho, manutenções, e outros, para evitar perdas de produtividade e custos adicionais. Portanto, um plano eficaz de recuperação de voos é fundamental para garantir a continuidade das operações e minimizar as consequências adversas desse crescimento na exploração marítima.

1.2 OBJETIVO

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e implementar modelos matemáticos para otimizar o reagendamento de voos de helicópteros de uma empresa brasileira de óleo e gás, utilizando diferentes metodologias, como programação por metas, otimização multiobjetivo e programação estocástica. O intuito é fornecer alternativas de abordagens de apoio a decisão, permitindo a comparação das abordagens e a seleção da solução mais apropriada para as necessidades específicas da empresa. Para alcançar o objetivo geral deste trabalho, foram definidos os objetivos específicos descritos a seguir:

- a) Desenvolver e aplicar modelos de programação por metas para definir e priorizar critérios essenciais no reagendamento de voos, assegurando que aspectos críticos sejam adequadamente atendidos e priorizados;
- b) Elaborar e aplicar modelos de otimização multiobjetivo para avaliar soluções considerando simultaneamente vários critérios que cercam o problema, assegurando um equilíbrio adequado na priorização desses critérios.
- c) Integrar métodos de programação estocástica para modelar e lidar com incertezas associadas ao problema, como variabilidade nos tempos de voo, oferecendo uma análise mais robusta e realista dos possíveis cenários;
- d) Avaliar e comparar o desempenho das soluções obtidas com diferentes abordagens, destacando suas vantagens e limitações, e fornecer alternativas de programação para o problema, auxiliando na seleção da abordagem mais adequada para otimizar a recuperação de aeronaves e aprimorar a eficiência operacional.

1.3 MÉTODO DE PESQUISA

Para alcançar um conhecimento científico é necessário que haja a possibilidade de verificação e validação, através de técnicas e métodos que resultaram no conhecimento

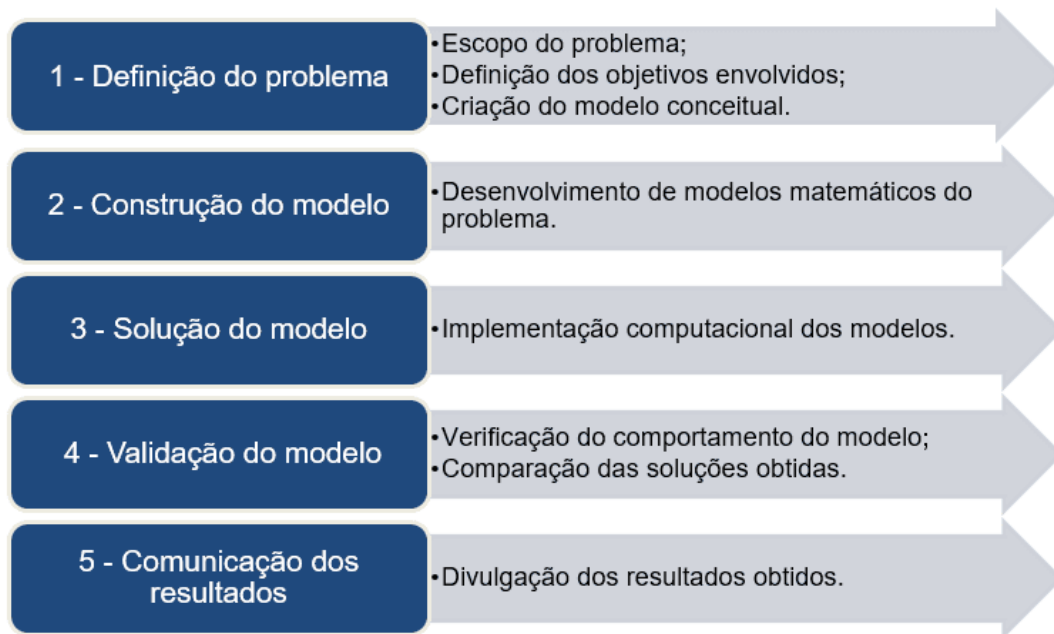
em questão (Gil, 2008). As motivações para condução de uma pesquisa são oriundas da identificação de uma lacuna na teoria ou na existência de uma demanda na prática. Portanto, uma pesquisa de natureza mais teórica, conhecida como pesquisa básica, tem como principal objetivo expandir o conhecimento sobre um determinado tema.

Por outro lado, uma pesquisa aplicada tem como objetivo encontrar resultados para serem utilizados na solução de problemas (Saunders et al., 2007). O presente estudo apresenta características de pesquisa de natureza aplicada, e buscará encontrar soluções para otimizar o reagendamento de voos de helicópteros que sofreram interrupções, motivado pelo problema real de uma empresa petrolífera brasileira.

Quanto à abordagem da pesquisa, é caracterizada como uma pesquisa quantitativa, que, de acordo com Fonseca (2002), é centrada na objetividade do assunto tratado, e utiliza dados brutos para a compreensão da realidade do estudo, recorrendo à linguagem matemática na descrição de seus resultados. Quanto ao delineamento da pesquisa, pode ser classificada como modelagem, que faz a utilização de técnicas matemáticas e computacionais para aprimorar o funcionamento de sistemas reais ou desenvolver representações de situações, com o objetivo de sistematizar o processo de tomada de decisões (Miguel et al., 2012). Em relação à investigação da pesquisa, esta é classificada como uma pesquisa empírica normativa, que segundo Miguel et al. (2012), tem como objetivo conceber conhecimento, através do desenvolvimento de soluções para problemas, por meio de modelos de otimização matemática.

Miguel et al. (2012) propõem cinco passos que devem ser seguidos para uma pesquisa com abordagem sob a ótica de pesquisa operacional. Estes passos consistem em: definir o problema; construir o modelo matemático; solucionar o modelo; validar os resultados obtidos e, por fim, realizar a sua implementação. Como o foco deste trabalho não está na “implementação” do modelo obtido, o último passo (implementação) foi adaptado para “comunicação”, para melhor atender aos objetivos previamente traçados. Este procedimento metodológico é, então, apresentado na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Etapas para a condução da pesquisa



Fonte: Autoria própria (2024).

Com base nas etapas apresentadas na Figura 1.2, a condução da presente pesquisa ficou definida em cinco etapas listadas a seguir:

1) Definição do problema: Primeiramente foi determinado que o objeto de estudo desta pesquisa é o reagendamento de voos de helicópteros de uma empresa petrolífera brasileira, entre aeroportos e plataformas *offshore*, através da aplicação do problema de recuperação de aeronaves. Posteriormente, foi iniciada uma pesquisa na literatura para definir os objetivos da pesquisa e, em seguida, foi realizada a revisão bibliográfica sistemática para verificar o estado da arte sobre o tema. A partir da análise da base de dados, são definidos os métodos a serem utilizados para a resolução do problema.

2) Construção do modelo: O modelo foi desenvolvido com base no problema de recuperação de aeronaves, inicialmente proposto por [Teodorović e Guberinić \(1984\)](#). O modelo de tempo discreto utilizado neste trabalho é inspirado no modelo apresentado por [De La Vega et al. \(2022a\)](#), que também faz uso de variáveis de fluxo para formular o problema. No entanto, ele apresenta diferenças significativas. Especificamente, o problema abordado neste estudo não envolve voos obrigatórios nem intervalos de almoço para a tripulação, o que resulta na exclusão de determinadas restrições presentes no modelo original. Além disso, enquanto o modelo de [De La Vega et al. \(2022a\)](#) utiliza variáveis inteiras não binárias, o modelo proposto neste trabalho não inclui essas variáveis, mas introduz uma nova variável binária. As abordagens de solução também diferem das adotadas por [De La Vega et al. \(2022a\)](#), refletindo as adaptações necessárias para atender

às particularidades do problema em questão.

3) Solução do Modelo: Na terceira etapa, foi realizada a implementação computacional do modelo matemático definido anteriormente, utilizando o *software* Julia 1.7.3 e o solver IBM CPLEX 20.1.0. Inicialmente, o modelo foi resolvido empregando o método de programação de metas hierárquicas, com a priorização dos objetivos mais relevantes, e foram exploradas quatro abordagens distintas. Em seguida, o modelo foi abordado como um problema multiobjetivo, utilizando os métodos de Chebyshev e Lokman e Köksalan para encontrar soluções na fronteira de Pareto, equilibrando os objetivos e tratando-os com a mesma relevância. Por fim, o modelo foi ajustado para considerar incertezas através da programação estocástica, incorporando possíveis cenários.

4) Validação do Modelo: A qualidade da solução depende da precisão com que o modelo representa o problema, portanto, os resultados obtidos são comparados com dados históricos do problema, com o intuito de validar o modelo desenvolvido. O modelo é validado comparando seus resultados com pesquisas semelhantes que abordaram problemas similares e utilizaram os mesmos dados reais e gerados aleatoriamente para estes problemas, presentes nas pesquisas em (De La Vega et al., 2022b; De La Vega et al., 2022a; Vieira et al., 2021; Martin et al., 2025).

5) Comunicação do Resultados: Espera-se que as metodologias utilizadas neste trabalho tragam inovação quanto ao problema de recuperação de aeronaves aplicado no reagendamento de voos de helicópteros de empresas petrolíferas. Já foi publicado um artigo resultante desta pesquisa (Fantazzini et al., 2024), e há planos para a publicação de mais artigos em periódicos científicos. Além disso, pretende-se apresentar os resultados em congressos científicos especializados em pesquisa operacional. Essas ações visam aumentar a visibilidade e a relevância do tema, tanto para as áreas técnicas quanto acadêmicas.

1.4 CONTRIBUIÇÕES

Poucos trabalhos trataram o ARP aplicado a empresas de extração de petróleo e gás. Recentemente, Vieira et al. (2021), De La Vega et al. (2022b) e Martin et al. (2025) abordaram problemas similares, com a colaboração da mesma empresa brasileira de petróleo e gás referida anteriormente, em que desenvolveram modelos matemáticos com horizonte de programação em tempo contínuo e utilizaram métodos exatos e heurísticos para resolução do problema. Pelo conhecimento do autor, apenas De La Vega et al. (2022a) e Vieira (2024) publicaram estudos que abordam o ARP para o reagendamento de voos de helicópteros de empresas petrolíferas e de gás utilizando modelos matemáticos com tempos discretos. Neste estudo, os autores consideram apenas um aeroporto e múltiplas unidades marítimas. Não se tem conhecimento de outros estudos na literatura para o problema

de reagendamento de voos de helicópteros em tempo discreto que utilizem os métodos de programação por metas, multiobjetivo e programação estocástica para resolução do problema. Em [De La Vega et al. \(2022a\)](#), [Vieira \(2024\)](#) e [Martin et al. \(2025\)](#) o problema é tratado apenas com uma abordagem determinística mono-objetivo.

Nesta pesquisa, formulamos o ARP enfrentado pela empresa utilizando diferentes abordagens de modelagem, todas baseadas em um modelo de tempo discreto. Propomos um modelo de programação linear inteira (ILP) com uma função objetivo de prioridades lexicográficas, e adotamos um modelo de tempo discreto inspirado em [De La Vega et al. \(2022a\)](#). Além disso, desenvolvemos um modelo multiobjetivo, gerando soluções na fronteira de Pareto, oferecendo ao tomador de decisão mais opções para considerar diferentes *trade-offs* entre os critérios. Este tipo de abordagem nunca havia sido explorado especificamente para helicópteros, representando uma inovação na literatura. Também desenvolvemos um modelo estocástico, que leva em consideração variações no tempo de voo, uma característica essencial para a realidade operacional da empresa. Essa aplicação de modelos estocásticos ao ARP de helicópteros também é inédita na literatura.

Portanto, as principais contribuições desta pesquisa são: (i) a análise de um problema real, utilizando dados detalhados fornecidos por uma empresa brasileira de petróleo e gás, que podem servir de base para pesquisas futuras; (ii) o desenvolvimento de modelos ILP com função objetivo lexicográfica, incluindo desigualdades válidas e aprimoramentos, além da aplicação de programação de metas hierárquicas para a resolução do modelo matemático; (iii) a introdução de um modelo multiobjetivo, capaz de gerar várias soluções na fronteira de Pareto, proporcionando ao tomador de decisão maior flexibilidade na definição do cronograma; e (iv) a proposta de modelos estocásticos para o ARP de helicópteros, incorporando a variabilidade do tempo de voo, com a utilização de programação de metas hierárquicas para solucioná-lo.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O restante deste texto está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o tema, abordando a fundamentação teórica sobre ARP e fazendo referências às metodologias de programação de metas, programação multiobjetivo e programação estocástica, além de uma revisão sistemática da literatura do ARP para identificar as lacunas que esta pesquisa visa preencher. No Capítulo 3, o problema de recuperação de aeronaves estudado é contextualizado e descrito em detalhe. O Capítulo 4 é dedicado a modelagem matemática determinística e abordagens de programação de metas. O Capítulo 5 formula o problema determinístico por meio de modelagem multiobjetivo e aplica abordagens de programação multiobjetivo. O Capítulo 6 aborda o problema ARP estocástico. Por fim, o Capítulo 7 apresenta as considerações finais e delinea etapas

futuras previstas para esta pesquisa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo é estruturado em duas seções. A Seção 2.1 fornece uma fundamentação teórica sobre a recuperação de linhas aéreas, trabalhos pioneiros, a evolução e alguns conceitos relevantes, além de outros problemas relacionados com o ARP que envolvem empresas petrolíferas e de gás, incluindo problemas de agendamento de voos e programação e roteirização de helicópteros. A Seção 2.2 apresenta uma revisão sistemática da literatura do ARP no período de 2012 a 2024, analisando uma amostra de artigos mais recentes para oferecer uma visão atualizada do estado da arte na área de pesquisa. O foco desta revisão sistemática foi pesquisar o estado atual dos modelos matemáticos e das técnicas empregadas na resolução de problemas de reagendamento do voos e ARPs, além das características, objetivos dos problemas estudados na literatura. Os **apêndices A, B e C** revisam os conceitos de programação por metas, programação multiobjetivo, e detalha os fundamentos da programação estocástica.

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA LITERATURA

O problema de recuperação de linhas aéreas visa reformular uma combinação de fatores que sofreram impactos de eventos imprevistos internos ou externos, impedindo a realização do agendamento de voos previsto. Este problema engloba o problema de recuperação de aeronaves, além dos problemas de recuperação de tripulantes e passageiros, conforme mencionado anteriormente.

Teodorović e Guberinić (1984) foram os primeiros a publicar um estudo sobre um ARP, em que há necessidade de um reagendamento dos voos devido à indisponibilidade de uma ou mais aeronaves, buscando a redução no atraso dos voos. Os autores utilizaram um método *branch-and-bound* e consideraram frota homogênea de aeronaves. Foram feitos experimentos usando uma instância com três aeronaves e oito voos, sendo todos os voos diretos.

Teodorović e Stojković (1990) aprimoraram o modelo anterior em que são considerados horário de funcionamento dos aeroportos e possibilidade de cancelamento de voos. Os autores desenvolveram uma heurística baseada em programação dinâmica, e testaram em algumas instâncias que contêm até 80 voos e 14 aeronaves. Em um trabalho subsequente, os mesmos autores adicionaram restrições relacionadas à equipe de bordo e também sobre o preenchimento de requerimentos de manutenção técnica de aeronaves (Teodorović; Stojković, 1995).

Jarrah et al. (1993) avançaram na pesquisa sobre ARP, com o desenvolvimento de dois novos modelos de otimização, com base em redes de fluxo (*network flow*), sendo um para atraso de voos e outro para cancelamento. Os dois modelos independentes buscam o menor custo ao reparar danos causados por eventos imprevistos, e foram utilizadas instâncias reais de três aeroportos dos EUA para testar os modelos. Cao e Kanafani (1997a), Cao e Kanafani (1997b) apresentaram uma extensão do problema, ao considerarem em um único modelo a possibilidade de atraso e cancelamento. Os autores propuseram a utilização de um modelo de programação quadrático e binário, no qual também pode ser considerada a utilização de voos de balsa (voos com finalidade de retorno à base), e de frota heterogênea.

Outra abordagem para o problema de ARP foi proposta por Yan e Yang (1996), em que são utilizadas redes dinâmicas, também conhecidas por redes de espaço-tempo (*time-space networks*), com arcos representando: (1) conexões de voos entre aeroportos; (2) detenção de aviões em um aeroporto por uma janela de tempo; (3) detenção de aviões durante a noite em um aeroporto; (4) voos de balsa entre dois aeroportos. Foram desenvolvidos quatro modelos matemáticos, considerando uma frota homogênea de aviões e, dentre os modelos, há combinações de possibilidade de atrasos, cancelamento de voos e voos com escalas. Instâncias reais do aeroporto de Taiwan foram utilizadas, e foi empregado o método de relaxação Lagrangiana para solucionar os modelos e obter resultados eficazes e eficientes. Yan e Tu (1997) descreveram modelos similares, porém considerando frotas heterogêneas.

Thengvall et al. (2000) realizaram modificações no modelo proposto por Yan e Yang (1996), incorporando arcos de proteção e considerando interações entre os voos. O primeiro tipo de arco tem o objetivo de preservar o cronograma original de voos, enquanto o segundo permite a realização de voos com a adição de escalas, visando a recuperação de voos cancelados ou atrasados. A implementação do modelo foi baseada em instâncias reais e resolvida utilizando relaxação de programação linear. Quando a integralidade das soluções não é alcançada, são aplicadas heurísticas de arredondamento. Como resultado, as soluções obtidas foram factíveis e próximas da otimalidade, mantendo grande parte dos voos previamente agendados. Os autores estenderam esse trabalho, considerando frotas heterogêneas e o fechamento de centros de conexão de voos em modelos matemáticos, conforme apresentado em (Thengvall et al., 2001; Thengvall et al., 2003).

Bard et al. (2001) apresentaram um modelo de recuperação de aeronaves no qual foram utilizadas redes de espaço tempo, porém com a discretização temporal, que variam de 5 a 30 minutos. Este modelo, chamado de *time-band model*, foi primeiramente introduzido na tese de doutoramento de Arguello (1997). Os autores consideraram apenas

os arcos correspondentes aos voos, deixando de fora os de detenção de aviões nos aeroportos, resultando em um modelo inteiro de fluxo de custo mínimo, que garante que os voos são cancelados ou realizados por apenas uma aeronave. A abordagem foi aplicada em instâncias reais com 162 voos agendados, 27 aeronaves e 30 aeroportos, e foram encontrados resultados satisfatórios com tempo computacional reduzido.

[Eggenebrg et al. \(2007\)](#) também utilizaram modelos com discretização de tempo, porém esta discretização é logarítmica e realizada de forma independente para recuperação de cada aeronave. Este *time-band model* independente facilita a incorporação de tempo de manutenção para as aeronaves. Os autores utilizaram instâncias reais com frota homogênea de até 10 aeronaves, operando até 250 voos semanais e um período de recuperação de voos de até sete dias. Como resultado, foi possível recuperar os cenários de disrupção em curto tempo computacional.

[Rosenberger et al. \(2004\)](#) formularam um ARP como um problema de partição com adição de intervalo de tempo e restrições de capacidade. Os autores apresentaram um modelo com ciclos de voos curtos, através da conectividade entre aeroportos de pequeno e grande porte, com a possibilidade de criação de novas escalas e conexões. O objetivo da recuperação de aeronaves foi reduzir o custo de cancelamentos e o custo de reformulação de rotas. Foi utilizado o *software SimAir* para resolução do modelo e foram aplicadas instâncias reais com até 96 aeronaves e 407 voos em 500 dias de operação, e os resultados foram obtidos em até 16 segundos com taxas de cancelamento de voos muito baixas. A complexidade de um ARP é evidente ao verificar que a maioria dos artigos utilizam heurísticas para solucionar os modelos propostos. A necessidade de obter-se uma resposta rápida para a recuperação de voos limita a consideração de todos os requisitos contidos em um problema real ([Hassan et al., 2021](#)). Entretanto, alguns autores, como [Gao et al. \(2009\)](#) e mais recentemente [Sousa et al. \(2015\)](#), solucionaram problemas muito próximos da realidade com tempo computacional de até um minuto.

Existem estudos de revisão da literatura de ARP e outros problemas relacionados, que compilaram e analisaram o conhecimento desenvolvido nestes problemas até diferentes anos de publicação. Alguns exemplos são os estudos de revisão em [Filar et al. \(2001\)](#), [Kohl et al. \(2007\)](#), [Clausen et al. \(2010\)](#), [Hassan et al. \(2021\)](#), [Santana et al. \(2023\)](#) e [Wu et al. \(2025\)](#). Alguns destes estudos também focaram na gestão de imprevistos e disrupturas de operações de empresas aéreas, revisando os principais fatores que influenciam a instabilidade destas operações de programação e controle aéreo.

O ARP não se limita apenas a problemas envolvendo aeronaves comerciais, mas também pode ser estendido para solucionar desafios relacionados à recuperação de helicópteros, amplamente utilizados por empresas petrolíferas e de gás que operam

com plataformas *offshore*. Os helicópteros são o meio de transporte mais comum entre aeródromos e plataformas *offshore*, e, atualmente, existem poucos sistemas de controle de tráfego aéreo dedicados a esse tipo de transporte, quando comparados aos sistemas de controle de voos comerciais. Além disso, ao contrário do sistema automatizado de agendamento de voos de linhas aéreas, os voos com destino às plataformas *offshore* ainda dependem, em parte, de processos manuais para o seu agendamento (Bastos et al., 2020).

Alguns estudos exploraram problemas reais de agendamento, roteamento e recuperação de voos de empresas petróleo e gás mundialmente, como no México (Romero et al., 2007; Caballero-Morales; Martinez-Flores, 2020), Nigéria (Timlin; Pulleyblank, 1992), no Golfo Pérsico (Abbasi-Pooya; Husseinzadeh Kashan, 2017) e no Brasil (Galvão; Guimarães, 1990; Menezes et al., 2010; Hermeto et al., 2014; Rosa et al., 2016; Vieira et al., 2021; De La Vega et al., 2022b; De La Vega et al., 2022a; Martin et al., 2025), sendo eles detalhados na sequência.

Estudos relacionados, em empresas mexicanas, podem ser encontrados, por exemplo, em Romero et al. (2007), no qual os autores abordaram um problema de coleta e entrega (*pick-up and delivery problem*) para helicópteros de uma empresa petrolífera, problemas estes que foram solucionados através de heurísticas e metaheurísticas e, em Caballero-Morales e Martinez-Flores (2020), que desenvolveram um modelo matemático de roteamento com taxa de falha não determinística para evacuação de helicópteros de múltiplas plataformas de petróleo *offshore*. Timlin e Pulleyblank (1992) abordaram um problema de roteamento e agendamento de voos de helicópteros para uma empresa petrolífera localizada na Nigéria, que conta com 45 plataformas *offshore*, e o problema foi solucionado com a utilização de métodos heurísticos. No Golfo Pérsico, Abbasi-Pooya e Husseinzadeh Kashan (2017) exploraram modelos matemáticos de roteamento de helicópteros e de coleta e entrega de funcionários, através de um algoritmo estratégico de agrupamento.

Dos trabalhos realizados com dados de empresas brasileiras, destaca-se inicialmente o de Galvão e Guimarães (1990). Os autores desenvolveram um algoritmo heurístico com o objetivo de satisfazer a demanda de helicópteros para um período de 11 dias, com 65 voos, e reduzir custos. Como resultado, o algoritmo superou o sistema em vigor em 72% dos casos. Menezes et al. (2010) desenvolveram um modelo matemático de programação inteira mista, com a utilização de algoritmo de geração de colunas para solucionar o modelo em um tempo computacional inferior a uma hora e foi possível reduzir o custo dos voos em 14% e o tempo de voo total em 8%. Hermeto et al. (2014) apresentaram um modelo matemático que tem como objetivo a redução no número de aeródromos e helicópteros a serem utilizados para suprir toda a demanda. O modelo foi implementado

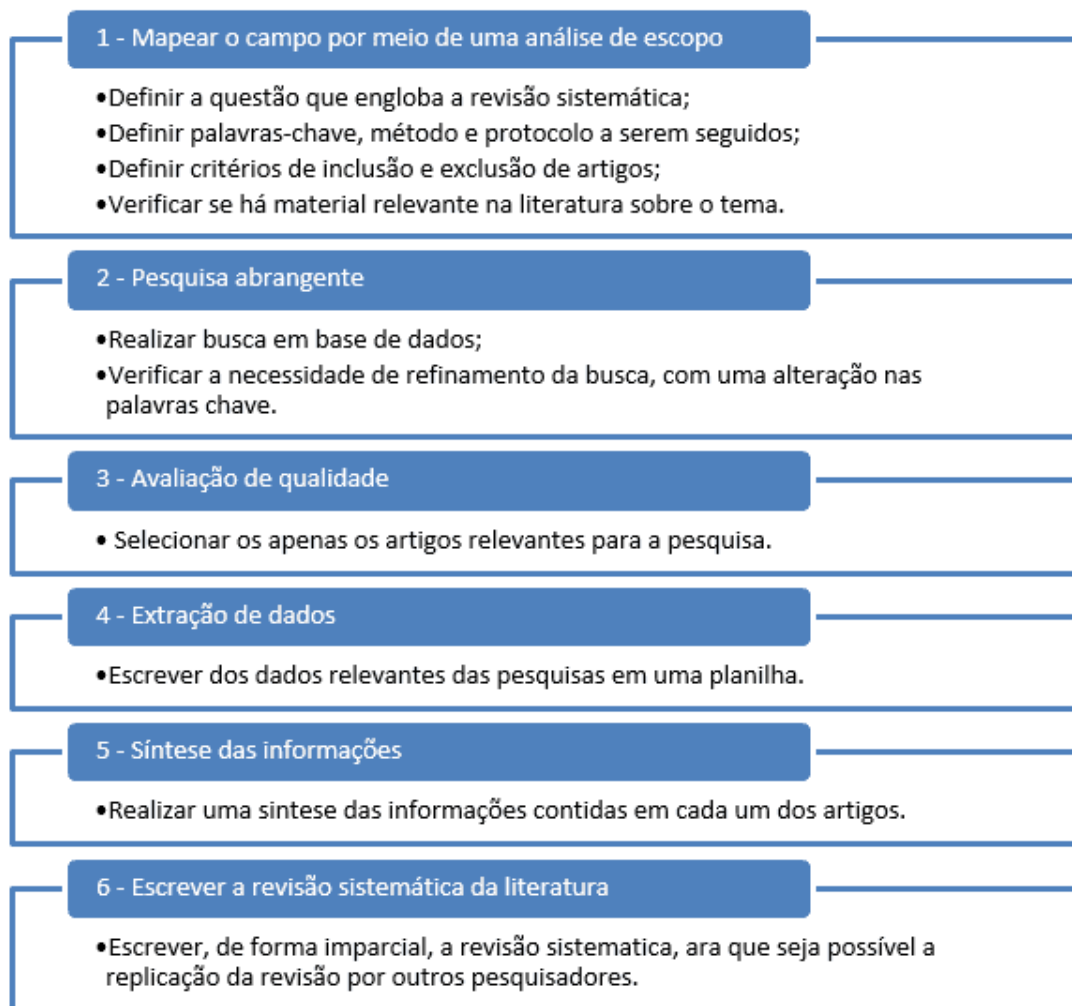
com dados obtidos por meio de uma previsão de demanda da empresa, para um período de 20 anos. [Rosa et al. \(2016\)](#) desenvolveram um modelo matemático para o roteamento de helicópteros e aplicaram metaheurísticas para resolver o problema de otimização associado a esse modelo. Mais recentemente, [Vieira et al. \(2021\)](#), [De La Vega et al. \(2022b\)](#) e [Martin et al. \(2025\)](#) utilizaram métodos exatos e heurísticos em modelos matemáticos de reagendamento de voos de helicópteros e [De La Vega et al. \(2022a\)](#) utilizaram uma modelagem com tempo discreto para um problema semelhante de recuperação de voos de helicópteros.

2.2 REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

Nesta seção, é apresentada a revisão sistemática da literatura recente de ARP relacionada a esta pesquisa. Esta análise considera os principais trabalhos, aplicações e tendências observados sobre o tema abordado a partir do ano de 2012. A análise desses trabalhos foi utilizada para a identificação do estado da arte e, conseqüentemente, a obtenção de um direcionamento para a presente pesquisa.

A revisão sistemática da literatura tem como objetivo localizar e sintetizar pesquisas que abordam uma questão específica, através de procedimentos organizados, transparentes e replicáveis. Esta segue um planejamento detalhado, com objetivos centrais, métodos e conceitos, sendo necessário tomar precauções para redução de erros e vieses ([Littell et al., 2009](#)). [Jesson et al. \(2012\)](#) dividem o processo de desenvolvimento de uma revisão sistemática da literatura em seis passos principais, descritos na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Passos para condução de uma revisão sistemática de literatura



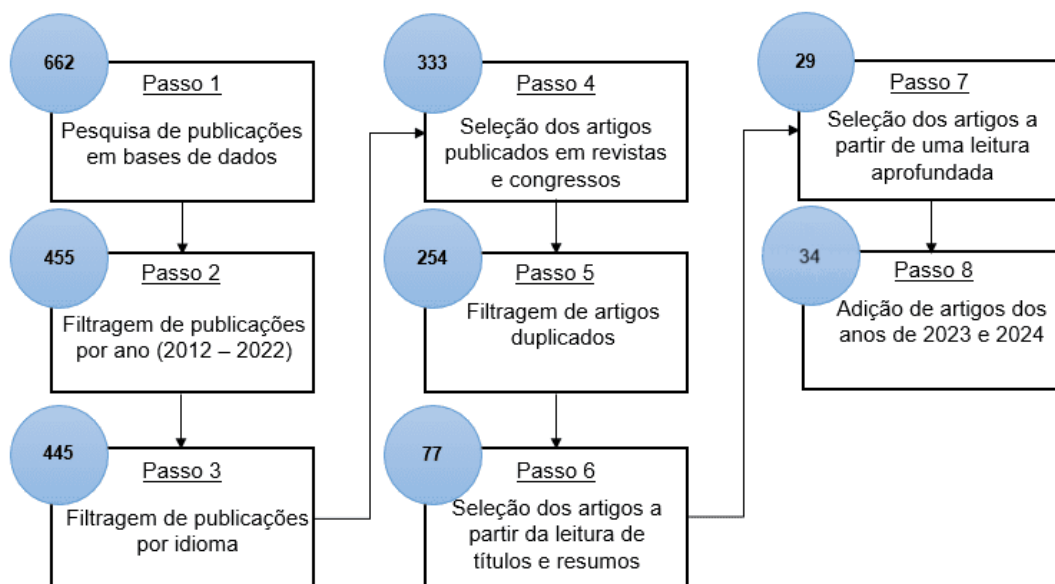
Fonte: Adaptado de (Jesson et al., 2012)

2.2.1 Seleção de artigos

Com o objetivo de delimitar os termos da pesquisa realizada, foi formulada a seguinte questão: Qual é o estado atual dos modelos matemáticos e das técnicas empregadas na resolução de problemas de recuperação de aeronaves? Também procurou-se levantar as características e objetivos dos problemas estudados na literatura.

Com base nesse questionamento, realizou-se uma pesquisa detalhada em três bases de dados reconhecidas: *Scopus*, *Web of Science* e *Science Direct*. O objetivo central dessa investigação foi identificar publicações recentes que explorassem a aplicação de modelos matemáticos e métodos de resolução no contexto do ARP, tanto em situações reais quanto experimentais. A seleção dos artigos relevantes seguiu um processo rigoroso de filtragem, detalhado na Figura 2.2, visando identificar trabalhos alinhados ao escopo da pesquisa.

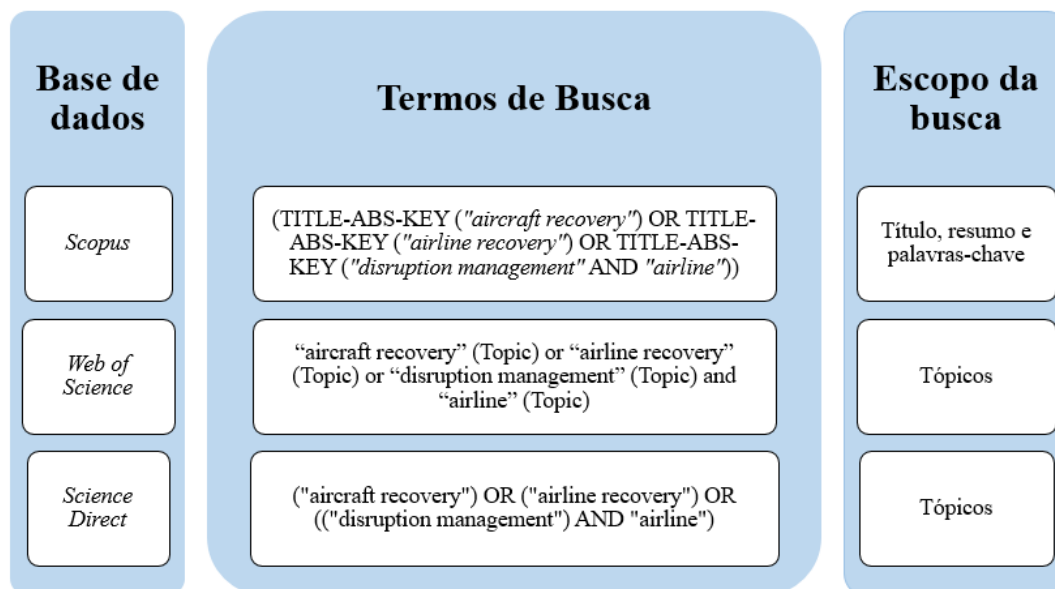
Figura 2.2 – Passos da filtragem de publicações



Fonte: Autoria própria (2024).

Inicialmente, no Passo 1, foram realizadas buscas utilizando os termos “aircraft recovery”, “airline recovery” e “disruption management & airline”, conforme os parâmetros estabelecidos na Figura 2.3. Esse processo resultou na identificação de 662 publicações.

Figura 2.3 – Parâmetros de busca



Fonte: Autoria própria (2024).

No Passo 2, visando manter o foco nas pesquisas mais contemporâneas, os artigos foram filtrados para incluir apenas aqueles publicados em um período de 11 anos (2012-

2022), resultando em 455 publicações. No Passo 3, foi feita uma triagem por idioma, excluindo-se todos os artigos não publicados em inglês, o que reduziu o total para 445 publicações. Posteriormente, no Passo 4, foram eliminados capítulos de livros, patentes e resumos, culminando em 333 artigos publicados em revistas e eventos.

Dando continuidade à triagem, as publicações foram exportadas para o *software* EndNote X7.8, com o intuito de consolidar os artigos provenientes das três bases de dados e facilitar as etapas subsequentes de seleção. No Passo 5, os artigos duplicados foram removidos com o auxílio de ferramentas específicas do *software*, restando 254 publicações.

No Passo 6, realizou-se uma leitura criteriosa dos títulos e resumos, com foco direcionado à pertinência ao tema central da pesquisa. Dessa forma, artigos que não se encaixavam no escopo foram excluídos, e 77 publicações foram selecionadas para análise aprofundada.

Finalmente, no Passo 7, foi feita uma leitura completa dos artigos selecionados para garantir sua relevância ao tema investigado. Excluíram-se, então, aqueles que não apresentavam aplicações ou validações numéricas de modelos matemáticos relacionados ao problema de recuperação de aeronaves, bem como aqueles cujo foco principal divergisse da resolução desses problemas. Ao término desse processo, 29 artigos foram selecionados para a condução da revisão sistemática da literatura.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa de doutorado, foram identificados 5 novos artigos relevantes publicados entre 2023 e 2025, ou seja, depois do período de 2012 a 2022 da revisão sistemática realizada em 2023. Esses artigos, embora não estivessem disponíveis no momento inicial da coleta de dados, foram incorporados à revisão no Passo 8, em virtude de sua contribuição significativa para o entendimento atual dos modelos matemáticos e técnicas aplicadas à recuperação de aeronaves. A inclusão dessas publicações recentes se justifica pela necessidade de manter a revisão atualizada e abrangente, refletindo as inovações e avanços mais recentes na área. Com a adição desses novos trabalhos, o total de artigos analisados na revisão sistemática foi ampliado para 34, proporcionando uma visão ainda mais robusta e completa do estado da arte neste campo de estudo.

2.2.2 Análise do conteúdo dos artigos

Após a realização da análise estatística dos artigos selecionados, procedeu-se a uma revisão aprofundada de seu conteúdo, destacando-se as principais características, abordagens metodológicas e contribuições que cada estudo trouxe em relação à questão central da revisão sistemática. Essa etapa de análise qualitativa permitiu uma compreensão mais detalhada das diversas formas como o problema de recuperação de aeronaves tem

sido abordado na literatura, revelando tanto as estratégias mais consolidadas quanto as inovações emergentes no campo.

Como mencionado anteriormente, o problema de recuperação de linhas aéreas é multifacetado, abrangendo uma série de desafios interligados que são, por vezes, desmembrados em subproblemas específicos para facilitar sua resolução. A análise dos artigos selecionados revelou diversas abordagens para esses subproblemas, cada uma contribuindo de maneira particular para o avanço do conhecimento na área. A seguir, serão discutidos em detalhes os principais achados a partir de 2012, destacando as técnicas utilizadas, os contextos de aplicação e os resultados obtidos, de forma a fornecer uma visão abrangente e crítica sobre o estado da arte.

[Petersen et al. \(2012\)](#) propuseram a aplicação do método de Decomposição de Benders (DB) para resolver modelos matemáticos que abordam de maneira integrada os problemas de recuperação de cronogramas de voos, incluindo ARP, CRP e PRP. O método foi avaliado em instâncias onde a capacidade de fluxo de aeroportos foi reduzida entre 50% e 100% por um período máximo de 75 minutos, resultando em atrasos nos voos. Os resultados demonstraram a eficácia da abordagem, especialmente em cenários de disrupção do fluxo de até 65%. Como alternativa à DB, [Maher \(2015\)](#) e [Maher \(2016\)](#) propuseram uma estratégia combinada de geração de colunas e linhas para resolver o problema integrado, alcançando resultados satisfatórios com um tempo computacional reduzido.

Em 2009, a French Operational Research and Decision Aid Society (ROADEF) lançou um desafio voltado para o gerenciamento de eventos imprevistos em empresas de aviação comercial, com o objetivo de reduzir os custos associados a essas disrupções e minimizar os impactos nos horários de embarque dos passageiros. Em resposta a esse desafio, [Mansi et al. \(2012\)](#) publicaram um artigo no qual aplicaram uma *matheuristic* para resolver o problema, complementando sua abordagem com uma estratégia de oscilação entre intensificação e diversificação para aprimoramento da solução. De forma semelhante, [Jozefowicz et al. \(2013\)](#) também enfrentaram o desafio proposto pela ROADEF, desenvolvendo uma heurística chamada *New Connections and Flights* (NFC), que foi capaz de alcançar soluções ótimas para mais da metade das instâncias, além de apresentar um tempo computacional significativamente reduzido.

Outros pesquisadores que participaram do desafio de 2009 da ROADEF incluem [Sinclair et al. \(2014\)](#), que empregaram a heurística *Large Neighborhood Search* (LNS) para resolver o problema, conseguindo solucionar 21 das 22 instâncias propostas em um tempo computacional de até 10 minutos. Buscando aprimorar a solução, [Sinclair et al. \(2016\)](#) desenvolveram uma heurística de pós-otimização baseada em geração de colunas,

aplicada após o LNS, o que resultou em melhorias significativas. Além disso, [Zhang et al. \(2016\)](#) propuseram uma *matheuristic* composta por três etapas para enfrentar o desafio, alcançando a solução ótima em 72% das instâncias.

[Ng et al. \(2020\)](#) desenvolveram uma heurística baseada em LNS, focada na redução dos custos operacionais na reestruturação do cronograma de voos, alcançando uma melhoria de até 50% na qualidade dos resultados. Em outra abordagem, [Tsai et al. \(2012\)](#) propuseram um algoritmo inovador para otimização, combinando a metaheurística *Parallel Cat Swarm Optimization* (PCSO) com o método Taguchi. Aplicado a um problema de recuperação de aeronaves com dados de um aeroporto em Taiwan e uma frota homogênea, o algoritmo demonstrou eficácia ao alcançar soluções ótimas com tempo computacional reduzido. Ambas as abordagens exemplificam diferentes estratégias para melhorar a eficiência e a qualidade na recuperação de voos e na gestão operacional.

[Le e Wu \(2013\)](#) propuseram uma nova heurística, chamada *Iterative Tree Growing with Node-Combination*, para resolver um problema integrado de recuperação de aeronaves e tripulação. A abordagem foi aplicada a dados reais de uma companhia aérea chinesa de porte médio, operando uma frota heterogênea, e resultou em soluções superiores às obtidas por outros métodos anteriormente propostos. Por outro lado, [Zhang et al. \(2015\)](#) desenvolveram uma heurística de dois estágios para um modelo integrado de recuperação de aeronaves e tripulação, porém o modelo considerava uma frota homogênea de aviões.

[Hu et al. \(2016\)](#) desenvolveram uma heurística baseada no algoritmo *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) para resolver um problema integrado de ARP e PRP. Utilizando instâncias reais de uma companhia aérea chinesa com frota homogênea, os testes realizados com o modelo matemático resultaram em uma redução significativa de custos e atrasos, além de um tempo computacional eficiente. Em seguida, [Zhang \(2017\)](#) propuseram uma heurística de dois estágios baseada em um método de *scoring*, alcançando resultados superiores tanto às decisões operacionais da companhia aérea quanto aos obtidos pelo algoritmo GRASP.

[Lin e Wang \(2018\)](#) propuseram o algoritmo *Fast Variable Neighborhood Search* (FVNS) para resolver um ARP. O algoritmo é estruturado em dois estágios: o primeiro estágio, construtivo, gera uma solução inicial com base no atraso dos voos, enquanto o segundo estágio, de melhoramento, constrói uma estrutura de vizinhança para realizar trocas de voos. Comparado a outros métodos heurísticos, o FVNS demonstrou uma redução significativa no tempo computacional sem comprometer a qualidade da solução.

[Le et al. \(2013\)](#) formularam um problema de recuperação de aeronaves e passageiros baseado no modelo matemático do problema de roteamento de veículos com janela

de tempo. Nesse modelo, as aeronaves são tratadas como veículos, os aeroportos como nós e os passageiros como commodities. Um algoritmo genético foi utilizado para resolver o problema, resultando em soluções factíveis e próximas da otimalidade. Da mesma forma, [Sousa et al. \(2016\)](#) aplicaram uma metaheurística para resolver um problema integrado de recuperação de aeronaves e passageiros, adaptando o algoritmo de *Ant Colony Optimization* (ACO). Utilizando instâncias reais, os autores alcançaram resultados sólidos, evidenciando a eficácia das adaptações propostas.

[Hu et al. \(2015\)](#) desenvolveram um modelo matemático integrado para ARP e PRP, onde o ARP é baseado em uma rede de tempo reduzida em aeroportos, e o PRP considera as opções dos passageiros diante de cenários disruptivos. [Yang e Hu \(2019\)](#) propuseram um modelo matemático integrado para ARP e PRP, com uma função objetivo focada na minimização da insatisfação dos clientes em relação ao novo cronograma de voos gerado após cenários disruptivos. Para resolver esse problema, foi desenvolvido um algoritmo baseado em algoritmo genético, denominado *loop-based multiobjective genetic algorithm*.

[Brunner \(2014\)](#) desenvolveu um modelo matemático para reagendamento de voos considerando conexões de passageiros e tripulação. Para testagem do modelo, foram utilizados dados reais da companhia aérea American Airlines e diferentes cenários com tempos máximos de atraso para analisar a taxa de cancelamento de voos.

[Wu et al. \(2017\)](#) utilizaram um algoritmo desenvolvido por [Dang e Ye \(2015\)](#), *fixed point iterative method*, para resolução do problema de recuperação de aeronaves e foi possível reduzir atrasos em voos de uma companhia aérea taiwanesa mesmo com um número elevado de voos que sofreram interrupções, com tempo computacional reduzido. [Zhao e Chen \(2018\)](#) desenvolveram uma heurística baseada em *weight-table*, em que são definidos pesos iniciais para os voos e depois é encontrada uma solução inicial. A partir desta solução, foi aplicada uma estratégia de otimização local.

[Vink et al. \(2020\)](#) desenvolveram um modelo matemático inteiro para solucionar o problema integrado de ARP e PRP, considerando tempo de manutenção de aeronaves. Os autores desenvolveram um algoritmo de seleção de aeronaves, que possibilitou solucionar o modelo em menos de um minuto e encontrar soluções com, no máximo, uma diferença de 19% em relação à solução ótima.

Adotando um modelo matemático multiobjetivo que considerava a minimização do desvio do cronograma original, a redução de atrasos nos voos e a minimização da troca de aeronaves, [Hu et al. \(2017\)](#) desenvolveram uma heurística baseada no algoritmo LNS, utilizando o método ε -constraints (ε -CM) para resolver o problema em instâncias

reais de uma companhia aérea chinesa com frota homogênea. Em um estudo subsequente, [Eshkevari et al. \(2023\)](#) propõem um modelo bi-objetivo para a recuperação de aeronaves e tripulações, focado na minimização dos custos de recuperação e do tempo de espera da tripulação, enquanto respeitam restrições legais e de manutenção. Esses autores também utilizam o método ε -CM em conjunto com uma heurística baseada em Busca Tabu (*Tabu Search* - TS), demonstrando uma eficiência computacional significativa, com uma melhoria média de 94% no tempo de CPU. A abordagem mostrou-se viável, oferecendo soluções eficazes mesmo ao considerar a opção de cancelamento de voos como alternativa.

[Hu et al. \(2021\)](#) apresentaram um modelo de recuperação integrada para a gestão de interrupções em voos, considerando a disposição dos passageiros em se adaptar a novos itinerários. Utilizando uma heurística baseada em *Variable Neighborhood Search* (VNS) multidirecional e estocástica, os autores buscam soluções quase-ótimas que conciliam os interesses das companhias aéreas e dos passageiros. Os resultados indicam que o modelo proposto supera as abordagens tradicionais, especialmente sob condições de atraso mais rigorosas, ao reduzir as perdas financeiras das companhias e minimizar a insatisfação dos passageiros. A análise empírica, fundamentada em dados reais, destaca que a consideração da flexibilidade dos passageiros em aceitar novas opções de voo resulta em menos cancelamentos e reembolsos, comprovando a eficácia do modelo na melhoria da recuperação de voos durante interrupções.

[Khiabani et al. \(2023\)](#) apresentam um modelo inovador para a recuperação integrada de aeronaves e tripulações, abordando a reprogramação de voos em resposta a interrupções, como atrasos e cancelamentos. Utilizando uma abordagem de programação linear inteira mista e a técnica de decomposição de Benders, o modelo permite a consideração de cada perna de voo individualmente, em vez de se restringir a sequências fixas de voos. Essa metodologia resulta em uma alocação de recursos mais flexível e eficiente, minimizando o impacto das interrupções na operação aérea. Os resultados demonstram uma redução significativa nos custos de recuperação, alcançando uma melhoria de 73,9%. A comparação com modelos tradicionais evidencia que a abordagem proposta não apenas otimiza a programação, mas também oferece soluções mais adaptáveis.

O problema de recuperação de aeronaves não se limita a modelos determinísticos. Em uma pesquisa conduzida por [Zhu et al. \(2015\)](#), foi desenvolvido um modelo estocástico de dois estágios para enfrentar os desafios de recuperação de aeronaves em casos de falhas inesperadas. Os autores propuseram um algoritmo estocástico baseado no método de *Simulated Annealing* para solucionar o modelo. Um aspecto central da pesquisa é a consideração do tempo de restauração das aeronaves como uma variável incerta, ao contrário do tratamento tradicional como um valor fixo em abordagens determinísticas. A

análise computacional, aplicada a um estudo de caso envolvendo uma companhia aérea chinesa, revelou que o modelo estocástico oferece maior robustez e eficiência na recuperação de horários de voos, reduzindo atrasos e cancelamentos em comparação com métodos tradicionais.

A pesquisa de [Zhao et al. \(2023\)](#), apesar de integrar incertezas relacionadas à duração das interrupções e à disponibilidade de informações, não utiliza um modelo estocástico. Em vez disso, apresenta uma metodologia inovadora em duas etapas para otimizar a recuperação de cronogramas de voos durante interrupções operacionais. Na Etapa 1, um modelo de fluxo de um único produto é empregado para eliminar voos e aeronaves não viáveis, criando um cronograma inicial que leva em conta a duração esperada da interrupção. Na Etapa 2, um modelo de fluxo múltiplo ajusta o plano de recuperação com base em informações atualizadas sobre a duração real da interrupção e o status das aeronaves. A metodologia utiliza uma abordagem baseada em cenários que simula diferentes durações de interrupção e momentos de atualização das informações. Os experimentos computacionais mostram que essa abordagem em duas etapas é capaz de encontrar soluções quase ótimas em menos de um segundo, com melhorias de até 35% em comparação com uma abordagem de horizonte rolante.

Pesquisas que abordam problemas semelhantes ao ARP tratado nesta pesquisa, especialmente no contexto de operações com helicópteros, incluem os estudos de [Vieira et al. \(2021\)](#) que abordaram o problema de recuperação de aeronaves aplicado a uma frota de helicópteros operando entre aeroportos e unidades marítimas para uma empresa de óleo e gás. Os autores desenvolveram dois modelos matemáticos com horizonte de programação em tempo contínuo: um baseado em redes e outro em eventos. Essas formulações incorporaram diversas características cruciais, como a priorização diferenciada de voos, a precedência obrigatória para voos com o mesmo destino de pouso, regras específicas para os horários de partida, e a compatibilidade variada entre aeronaves e voos. Além disso, foram propostas diferentes heurísticas de construção e melhoria para resolver os problemas. Os dados utilizados foram extraídos de cenários reais de uma empresa de óleo e gás natural, complementados por instâncias desenvolvidas com base nesses dados, abrangendo até 45 voos e uma frota máxima de 13 helicópteros. A aplicação das heurísticas resultou em uma melhora significativa no tempo computacional.

[De La Vega et al. \(2022b\)](#) também desenvolveram um modelo matemático em tempo contínuo para a recuperação de voos de helicópteros, semelhante ao proposto por [Vieira et al. \(2021\)](#). No entanto, neste modelo, os autores introduziram a possibilidade de transferência de voos entre diferentes aeródromos, utilizando linhas de ônibus para transportar passageiros entre eles, além de modificar as heurísticas para resolver o problema

de forma mais eficiente. Em um estudo subsequente, [De La Vega et al. \(2022a\)](#) apresentaram alterações nos modelos matemáticos em tempo contínuo de [Vieira et al. \(2021\)](#), adaptando-os para o caso de um único aeródromo, com a inclusão de considerações como horário de almoço para a tripulação dos helicópteros. Eles também exploraram um modelo com discretização do tempo, visando reduzir os tempos computacionais necessários para a resolução do problema.

Um artigo já publicado como resultado desta pesquisa de doutorado é o de [Fantazzini et al. \(2024\)](#), no qual é empregada a metodologia de Programação de Metas para solucionar um ARP. Neste estudo, foram apresentadas quatro diferentes abordagens de resolução, todas voltadas para o reagendamento de voos de helicópteros. Na primeira abordagem, os três objetivos foram solucionados simultaneamente em uma única etapa, com pesos atribuídos lexicograficamente, priorizando os objetivos mais importantes. Além dessa estratégia, o artigo explorou três metodologias em que cada objetivo foi resolvido sequencialmente, conforme a ordem de priorização estabelecida. Adicionalmente, foram propostas melhorias no modelo original. Os resultados indicaram que a resolução dos objetivos de forma sequencial resultou em uma redução significativa do tempo computacional, evidenciando a eficiência da Programação de Metas nesse contexto. As melhorias implementadas no modelo também contribuíram para uma diminuição considerável do tempo de processamento, reforçando a eficácia da metodologia adotada. O conteúdo do Capítulo 4 desta tese de doutorado refere-se ao material deste artigo e detalha cada uma destas quatro abordagens de resolução.

A Tabela 2.1 fornece uma visão abrangente dos artigos selecionados sobre ARP a partir do ano de 2012, destacando características, objetivos e métodos de resolução empregados pelos autores para tratar de problemas específicos em cada pesquisa. Ao analisar esta literatura mais recente, percebe-se a diversidade de abordagens adotadas para enfrentar os desafios impostos pelos ARPs, refletindo a complexidade e a variabilidade das situações enfrentadas pelas companhias aéreas. Essas abordagens variam desde o uso de métodos exatos até a aplicação de heurísticas e metaheurísticas, cada uma buscando otimizar diferentes aspectos do problema, como a minimização de atrasos, custos operacionais e cancelamentos de voos.

O primeiro aspecto analisado foi a frota de aeronaves considerada nos estudos. Aproximadamente 58% das pesquisas utilizaram uma frota heterogênea, enquanto 42% trabalharam com uma frota homogênea. A escolha da frota depende das características específicas de cada problema e da disponibilidade das aeronaves pelas companhias aéreas. Em relação às janelas de tempo nos aeroportos, 70% dos estudos consideraram uma janela de tempo para a operação das aeronaves. Este fator é variável, pois muitas companhias

aéreas operam 24 horas por dia, sem intervalos para fechamento.

No que tange aos objetivos dos estudos, 70% dos autores consideraram múltiplos objetivos em suas pesquisas. O objetivo mais recorrente é a redução de atrasos nos voos, presente em 73% dos artigos. De acordo com [Wu et al. \(2017\)](#), eventos inesperados que afetam o cronograma inicial dos voos frequentemente resultam em atrasos, que, se não tratados rapidamente, podem propagar-se para os voos subsequentes, comprometendo todo o cronograma. Este é um dos motivos pelos quais a redução de atrasos é uma prioridade na maioria das pesquisas.

O segundo objetivo mais explorado é a minimização de custos, abordado de diferentes maneiras. Por exemplo, [Manzini et al. \(2014\)](#) focam no custo de realocação de passageiros, enquanto [Zhang et al. \(2015\)](#) e [Zhu et al. \(2015\)](#) discutem os custos relacionados à troca ou necessidade de aeronaves adicionais. Além disso, [Brunner \(2014\)](#) e [Zhang et al. \(2015\)](#) investigam os custos associados à tripulação adicional.

A minimização do cancelamento de voos é outro objetivo importante, presente em 45% dos artigos. Segundo [Hu et al. \(2021\)](#), a priorização das preferências dos passageiros é crucial na resolução de disrupções, e o cancelamento de voos é geralmente uma solução desfavorável. Outro objetivo relevante é a minimização da troca de aeronaves, mencionada em 24% dos artigos. Embora a troca de aeronaves seja considerada uma solução viável para a recuperação de aeronaves por [Ng et al. \(2020\)](#), essa estratégia também exige a realocação da tripulação, o que pode complicar ainda mais o problema. Nenhum dos artigos revisados considerou a minimização da troca de aeronaves como único objetivo.

Outros objetivos explorados incluem a manutenção de conexões de voos ([Brunner, 2014](#); [Zhang et al., 2015](#)), a transferência de passageiros de voos cancelados para outros voos ([Mansi et al., 2012](#)), a minimização do desvio do agendamento original ([Hu et al., 2017](#)), a redução da insatisfação dos passageiros ([Hu et al., 2021](#); [Yang; Hu, 2019](#)), e a utilização de helicópteros adicionais ([De La Vega et al., 2022b](#); [De La Vega et al., 2022a](#); [Vieira et al., 2021](#)), este último também abordado no presente estudo.

Quanto aos métodos de resolução, há uma predominância de métodos heurísticos, utilizados em aproximadamente 76% dos artigos. Muitos desses métodos são heurísticas desenvolvidas pelos próprios autores para resolver os problemas específicos abordados. Além disso, alguns autores empregaram metaheurísticas, como algoritmos genéticos ([Le; Wu, 2013](#); [Yang; Hu, 2019](#)), VNS ([Hu et al., 2021](#)) e LNS ([Hu et al., 2017](#); [Ng et al., 2020](#); [Sinclair et al., 2014](#)). Métodos exatos foram utilizados em 39% dos artigos, com a aplicação de algoritmos e técnicas matemáticas como BD ([Petersen et al., 2012](#)), geração de colunas ([Maher, 2016](#); [Zhu et al., 2015](#)) e programação de restrições ([Martin et al.,](#)

2025). Poucos estudos exploraram a utilização de desigualdades válidas como auxílio na resolução de métodos exatos.

Ao comparar as abordagens presentes na literatura com o presente estudo, observa-se que apenas em [De La Vega et al. \(2022a\)](#) foi empregada a discretização do tempo como estratégia de modelagem para o problema de roteamento de aeronaves (ARP). Embora essa técnica ainda não seja amplamente adotada, demonstrou-se eficaz na redução do tempo computacional, o que ressalta a importância da escolha de métodos de resolução compatíveis com a natureza específica de cada problema. Além disso, não foram identificadas abordagens que utilizem metas hierárquicas para a resolução do ARP, tampouco o uso de métodos multiobjetivo visando à obtenção da fronteira de Pareto no contexto corporativo envolvendo helicópteros. Também não foram encontrados, na literatura consultada, trabalhos que tratem o ARP para helicópteros corporativos utilizando uma abordagem estocástica.

Outro aspecto relevante, não contemplado na Tabela [2.1](#), refere-se ao uso de dados reais: aproximadamente 70% dos estudos analisados fazem uso desse tipo de dado, o que reforça o compromisso com a aplicabilidade prática das propostas apresentadas.

Tabela 2.1 – Comparação de abordagens para ARP

Referência	Características								Métodos de Resolução	
	TF ¹	JTA ⁴	DT ⁵	MZ ⁶	MA ⁷	MT ⁸	MC ⁹	Outros	Heurísticos	Exato
(Petersen et al., 2012)	Het ²	x	-	x	x	x	-	-	-	BD
(Mansi et al., 2012)	Het	x	-	x	-	-	-	Passageiros transferidos de voos cancelados	Heurística	-
(Tsai et al., 2012)	Hom ³	x	-	-	x	-	-	-	PCSO	-
(Jozefowicz et al., 2013)	Het	x	-	x	x	x	-	-	Heurística	-
(Le; Wu, 2013)	Het	-	-	x	x	-	x	-	Heurística	-
(Le et al., 2013)	Hom	x	-	-	x	-	-	-	AG	-
(Sinclair et al., 2014)	Het	x	-	x	x	-	x	-	LNS	SCO ¹⁰
(Brunner, 2014)	Hom	-	-	-	x	-	x	Perda de conexões para tripulação e passageiros	-	SCO
(Maher, 2015)	Hom	x	-	x	-	-	-	-	-	GC
(Zhu et al., 2015)	Hom	x	-	x	x	-	-	-	Heurística; GSA	-
(Zhang et al., 2015)	Het	x	-	-	x	-	x	Perda de conexões para tripulação	Heurística	SCO
(Sousa et al., 2015)	Hom	-	-	x	-	-	-	-	ACO	-
(Hu et al., 2015)	Het	-	-	x	-	-	-	-	-	SCO
(Sinclair et al., 2016)	Het	x	-	x	x	x	-	-	LNS; Heurística	-
(Zhang et al., 2016)	Het	x	-	x	x	-	x	-	Heurística	-
(Hu et al., 2016)	Hom	-	-	x	x	x	-	-	GRASP	-
(Maher, 2016)	Hom	x	-	x	-	-	-	-	-	GC
(Wu et al., 2017)	Hom	-	-	-	x	-	-	-	-	FPIT
(Hu et al., 2017)	Hom	-	-	-	x	x	-	Desvio total do agendamento de voos original	LNS	ε -CM
(Zhang, 2017)	Hom	-	-	x	-	-	-	-	Heurística	-
(Zhao; Chen, 2018)	Hom	x	-	x	-	-	-	-	Heurística	-
(Lin; Wang, 2018)	Het	x	-	-	x	-	-	-	FVNS	-
(Yang; Hu, 2019)	Hom	x	-	x	-	-	-	Insatisfação dos passageiros	AG	-
(Ng et al., 2020)	Hom	-	-	x	-	-	-	-	LNS	-
(Vink et al., 2020)	Het	x	-	x	x	-	-	-	Heurística	-
(Vieira et al., 2021)	Het	x	-	-	x	x	x	Utilização de helicópteros adicionais	Heurística	SCO
(Hu et al., 2021)	Het	-	-	x	x	-	-	Insatisfação dos passageiros	VNS	-
(De La Vega et al., 2022b)	Het	x	-	-	x	x	x	Utilização de helicópteros adicionais	Heurística	-
(De La Vega et al., 2022a)	Het	x	x	-	x	x	x	Utilização de helicópteros adicionais	-	SCO
(Eshkeviri et al., 2023)	Het	x	-	x	x	-	x	Tempo de espera da tripulação	TS	ε -CM
(Zhao et al., 2023)	Het	x	-	x	x	-	x	-	Heurística	-
(Khiabani et al., 2023)	Het	x	-	x	x	-	-	Manutenção da conformidade com regulamentações	-	BD
(Fantazzini et al., 2024)	Het	x	x	-	-	x	x	Utilização de helicópteros adicionais	-	SCO
(Martin et al., 2025)	Het	x	-	-	-	x	x	Utilização de helicópteros adicionais	Heurística	CP ¹¹

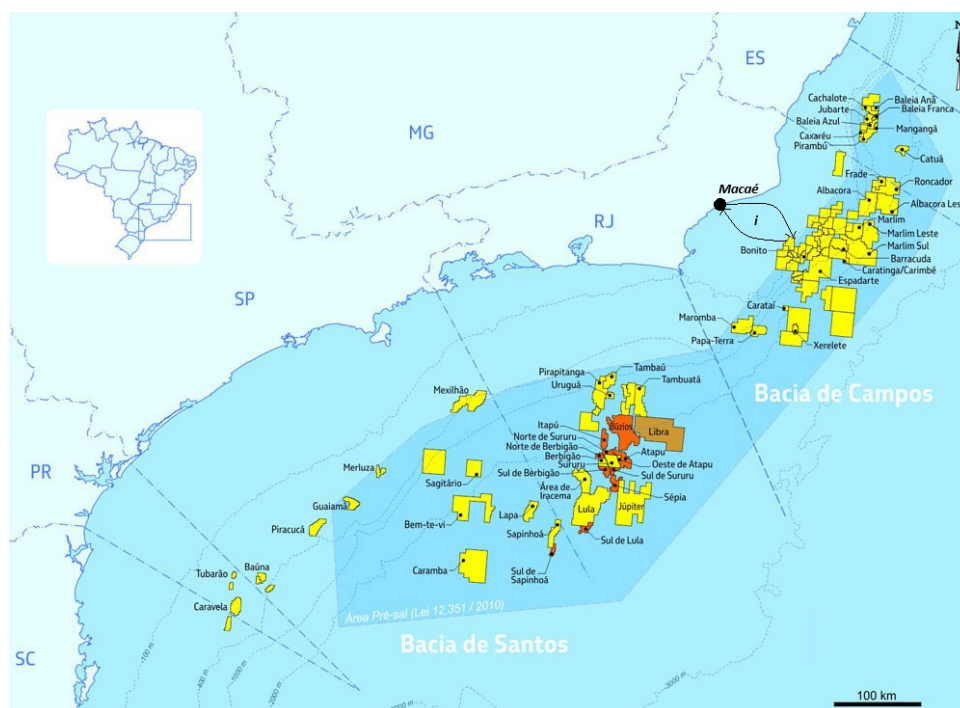
Legenda: **1** Tipo de frota; **2** Heterogênea; **3** Homogênea; **4** Janela de tempo do aeroporto; **5** Discretização do tempo; **6** Minimização de Custo; **7** Minimização de Atraso; **8** Minimização da troca de aeronaves; **9** Minimização do cancelamento de voos; **10** Solver comercial de otimização; **11** Programação de restrições

3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo, é apresentado o problema de pesquisa em questão, destacando suas particularidades. O objeto de estudo é uma empresa de óleo e gás natural, cuja maior parte da matéria-prima (óleo cru ou petróleo) é extraída por meio de plataformas *offshore*. Para garantir o transporte de seus colaboradores e funcionários entre os aeroportos e as unidades marítimas (UM), a empresa conta com uma frota de helicópteros contratados de empresas terceirizadas.

Diariamente, diversos voos são realizados entre aeroportos situados nas costas marítimas e as plataformas *offshore*. Esses voos, operados exclusivamente por helicópteros, transportam grupos de pessoas para as unidades marítimas e, em seguida, retornam com outro grupo ou, em casos excepcionais, com o mesmo grupo. A Figura 4.1 ilustra um dos aeroportos e unidades marítimas onde ocorrem as operações de transporte aéreo abordadas neste estudo, exemplificando um voo típico, identificado como voo *i*.

Figura 3.1 – Mapa de operações de transportes aéreos



Fonte: [Petrobras \(2023\)](#).

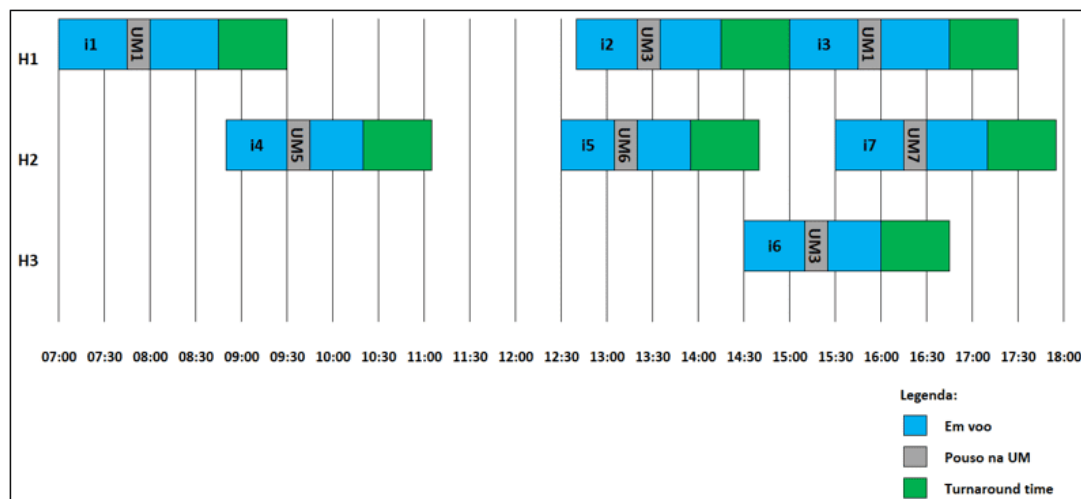
Um cronograma para diversos voos diários é gerado a cada semana, com o intuito de serem executados todos esses voos programados. Entretanto, impactos no cronograma podem ocorrer devido a eventos inesperados, como: manutenção não planejada, falta

de combustível, falha mecânica, falta de membros da equipe de tripulação, condições meteorológicas, controle de tráfego aéreo, atraso de passageiros para embarcar, entre outros. Estes eventos podem impactar no agendamento de voos, gerando atrasos nos horários de suas decolagens, necessidade de realocação de voos em outros helicópteros e, até mesmo, o cancelamento de voos do dia.

Uma vez que todos os voos diários da empresa obrigatoriamente devem ocorrer, mesmo que atrasem ou sejam transferidos pra dias subsequentes, é necessário que sejam realizadas alterações no cronograma de voos. Essas modificações ou reprogramações de voos previamente estabelecidos configuram um problema de recuperação de voos. No caso de necessidade de transferência de voos do dia para serem realizados posteriormente, o cronograma do dia seguinte deve ser revisado para inclusão destes voos. Sempre que houver voos de transferência de um dia para o outro, o cronograma deve ser reformulado.

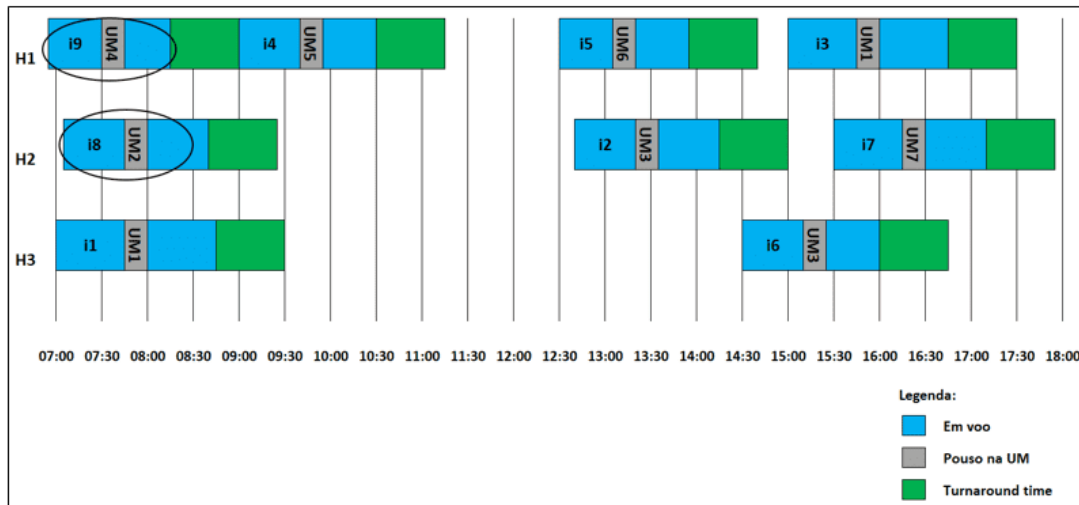
Para melhor ilustrar o problema de reprogramação de voos aplicado à empresa em questão, um exemplo com dados reais foi reproduzido graficamente nas Figuras 3.2 e 3.3. A Figura 3.2 representa o cronograma inicial dos voos para um dia d partindo de um aeroporto para diferentes unidades marítimas. A Figura 3.3 representa uma nova programação para o dia d após a adição de voos transferidos de dias anteriores.

Figura 3.2 – Programação inicial de voos para um dia d



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 3.3 – Reprogramação dos voos com adição de voos transferidos de dias anteriores para o dia (d)



Fonte: Autoria própria (2024).

Na Figura 3.2 têm-se um gráfico de Gantt com representação de um cronograma para um dia normal, com disponibilidade de 3 helicópteros para realização de 7 voos ($i1$ a $i7$) com destino a 7 diferentes unidades marítimas. Todos os voos devem, obrigatoriamente, acontecer e não podem ser adiados em relação aos seus horários inicialmente programados. Os horários programados para a partida de cada voo i estão no encontro do eixo vertical, que indica a janela de tempo do aeroporto, com os voos contidos no eixo horizontal de cada helicóptero ($h1$, $h2$ e $h3$).

O período inicial indicado pelo intervalo azul está relacionado à viagem de ida a UM de destino, e em cinza está o tempo em que o helicóptero permanece nela para o desembarque e embarque de passageiros. A faixa em azul que segue o tempo de permanência do helicóptero na UM representa o tempo de retorno do helicóptero ao aeroporto. A faixa verde é o intervalo de tempo obrigatório ao término de cada voo, correspondente ao tempo de preparação do helicóptero para realizar o próximo voo a ele designado, que é chamado de *turnaround time* (tat).

A janela de tempo do aeroporto para o exemplo em questão é das 06:55 às 18:00; então todos os voos devem ocorrer dentro desta faixa de tempo, sendo que às 18:00 todos os helicópteros devem estar de volta ao aeroporto. Não é possível fazer decolagens simultâneas de helicópteros no aeroporto; eles devem partir com, pelo menos, um intervalo de tempo de 5 minutos entre voos. Na programação original do dia d , o helicóptero $h1$ está designado a fazer os voos $i1$, $i2$ e $i3$, o $h2$ os voos $i4$, $i5$ e $i7$ e o $h3$ um único voo, $i6$. Na ausência de eventos inesperados, os voos $i1$ a $i7$ seguiriam estritamente a programação ilustrada na Figura 3.2.

Entretanto, considerando a ocorrência de eventos inesperados em dias anteriores, parte dos voos programados para o dia $d - 2$ e $d - 1$ foram transferidos para o dia d . O voo $i8$ é um voo de transferência do dia anterior ($d - 1$), e o voo $i9$ é um voo de transferência de dois dias atrás ($d - 2$). Ambos os voos devem ser adicionados à programação original do dia d , com a utilização dos mesmos três helicópteros, obedecendo a janela de tempo do aeroporto e a restrição de não adiantamento dos voos já programados.

Na Figura 3.3 é possível verificar como ficou a nova programação dos voos, com a inclusão dos voos $i8$ e $i9$. O voo $i9$ ocupou o lugar do voo $i1$ no $h1$, com partida programada para às 6:55 e o voo $i8$ foi alocado ao $h2$ com partida às 07:05. Os voos $i3$, $i6$ e $i7$ permaneceram nos mesmos horários, nos mesmos helicópteros da programação inicial, já os voos $i1$, $i2$ e $i5$ permaneceram nos mesmos horários, porém em helicópteros diferentes. Por fim, o voo $i4$ sofreu um atraso de 10 minutos em relação ao cronograma inicial, e também mudou de helicóptero. Deste modo, dependendo do número de voos transferidos de dias anteriores, a reprogramação pode incidir em atrasos dos voos do dia (como em $i4$), troca de helicópteros (como em $i1$, $i2$, $i4$ e $i5$) ou até mesmo na transferência de um ou mais voos para o dia seguinte.

Nesse processo, as seguintes características devem ser levadas em consideração no tocante aos passageiros, ao aeroporto, às UMs, aos voos e aos helicópteros:

- a) Passageiros: Existem três classes de passageiros que necessitam de transporte entre o aeródromo e as UMs. Os passageiros regulares, que são em sua maioria os funcionários que voam em caso de mudança de turno. Os passageiros ocasionais, que são trabalhadores que realizam tarefas não rotineiras nas UMs. Por fim, os passageiros dos voos de comitiva composto por gerentes e demais representantes da empresa, além de representantes de órgãos fiscalizadores.
- b) Voos: Existem quatro categorias de voos com diferentes prioridades a serem consideradas neste estudo. A primeira categoria é composta pelos voos de comitiva, que transportam os passageiros de comitiva descritos anteriormente. A segunda são os voos atrasados de m -dias ($m \geq 2$), que são voos transferidos a partir de 2 dias ou mais. O terceiro são os voos com atrasos de 1 dia, que são voos transferidos do dia anterior. Por fim, existem os voos de tabela, que são os voos pertencentes ao cronograma diário inicial, que transportam passageiros regulares e ocasionais. Os voos são planejados semanalmente, ocasião na qual são definidos os seus horários de partida e unidades de destino. Cada voo parte do aeródromo com um grupo de passageiros para alguma UM e na sua unidade de destino outro grupo de passageiros embarca no helicóptero para regressar ao aeródromo, ou, no caso de voos de comitiva, o helicóptero aguarda o regresso dos mesmos passageiros. Pode haver mais de uma viagem para a mesma

UM no mesmo dia e, se houver voos transferidos e não transferidos para a mesma UM, é obrigatório que o voo transferido seja realizado antes de qualquer outro voo. Os voos de tabela e de comitiva não podem ser antecipados e podem sofrer atrasos de até 4 horas no máximo; caso contrário, terão de ser transferidos para o dia seguinte. Os voos de comitiva impedem a UM de receber outros helicópteros durante sua estadia, que costuma levar o dia inteiro.

- c) Helicópteros: A frota de helicópteros é contratada de uma empresa terceirizada com contrato de um ou mais anos. A frota é heterogênea e conta com helicópteros com diferentes faixas de velocidade, capacidade de passageiros e alcance de voo. Alguns desses helicópteros não conseguem realizar alguns voos devido à distância entre aeródromo e unidade de destino, capacidade de passageiros, ou mesmo por causa de heliportos de pequeno porte nas unidades marítimas. Cada helicóptero pode realizar vários voos no mesmo dia; porém, o tempo entre voos no mesmo helicóptero deve ser de pelo menos 45 minutos, pois o mesmo precisa ser abastecido e uma manutenção preventiva deve ocorrer no aeródromo. A frota de helicópteros contém três categorias de disponibilidade: helicópteros do tipo normal, que consiste em helicópteros prontamente disponíveis no aeródromo e inicialmente atribuídos aos voos diários; helicópteros tipo *pool*, que consiste em helicópteros sobressalentes disponíveis no aeroporto que não foram atribuídos a nenhum voo de tabela e podem ser utilizados para reagendamento de voos com custos adicionais; e os helicópteros tipo *spot*, que não estão disponíveis no aeroporto, mas podem ser transferidos de outros locais e utilizados para reagendamento de voos com custos adicionais mais elevados. Existem diferentes tipos de helicópteros com diferentes capacidades entre as três categorias de disponibilidade.
- d) Aeroporto: Os aeroportos estão localizados em terra e apenas uma aeronave pode decolar por vez e, o tempo de partida entre dois voos de diferentes helicópteros não deve ser inferior a 5 minutos, para que seja realizado o *briefing* de segurança, a pesagem dos passageiros e bagagens. Os voos dos helicópteros não devem ser realizados após o pôr do sol, devido à diminuição da visibilidade, portanto, é estabelecida uma janela de tempo para o aeródromo com base no nascer e no pôr do sol de cada dia.
- e) Unidades Marítimas: A localização das unidades marítimas é conhecida de antemão e é possível estimar o tempo de viagem entre o aeroporto e a UM por um helicóptero, para considerá-lo como um tempo determinístico no modelo. Cada unidade de destino possui um único heliporto para pouso e decolagem, portanto, não é possível que mais de um helicóptero esteja na UM ao mesmo tempo. Em função do desembarque e embarque de passageiros, deve ser respeitado um intervalo de 15 minutos entre os

pousos dos helicópteros na UM. Esse intervalo de tempo também tem impacto no horário de saída do aeroporto, uma vez que voos com a mesma unidade de destino devem respeitar a restrição do heliporto de um helicóptero por vez. Já os voos de comitiva permanecem na UM por mais tempo, bloqueando assim o pouso de outros helicópteros.

Além de encaixar os voos transferidos no cronograma do dia d , o problema de recuperação de voos abordado aqui nesta pesquisa também busca reduzir os impactos gerados por esta reprogramação. No presente trabalho, considera-se que para se obter um resultado satisfatório na reprogramação, três objetivos principais devem ser otimizados: (i) reduzir a transferência de voos para dias seguintes, (ii) reduzir o uso de helicópteros e (iii) reduzir os atrasos nos voos.

Para modelar este problema, foram utilizadas diferentes metodologias para representar o ARP. A programação por metas desempenhou um papel crucial ao estabelecer prioridades entre os objetivos, permitindo que metas críticas fossem priorizadas de acordo com a importância estratégica da operação. Por outro lado, os modelos multiobjetivos foram implementados para resolver os objetivos de forma simultânea, identificando soluções na fronteira de Pareto, onde nenhum objetivo pode ser melhorado sem comprometer outro. Além disso, para lidar com as incertezas inerentes ao ambiente operacional, foram incorporados modelos estocásticos, permitindo a consideração de diferentes cenários. Isso resultou em uma solução mais robusta e adaptativa, capacitando a empresa a responder de maneira eficaz a situações imprevistas e assegurando maior resiliência nas operações de recuperação de aeronaves.

4 MODELO DE PROGRAMAÇÃO POR METAS

Neste capítulo, é apresentada a formulação matemática do modelo do ARP abordado, seguida pela descrição de quatro abordagens propostas para sua resolução, utilizando programação por metas e priorização em ordem lexicográfica, além dos experimentos computacionais realizados.

Considerando o contexto de reprogramação dos voos diários da empresa e os dados reais obtidos para este problema, o tempo foi discretizado em períodos de 5 minutos, que corresponde ao tempo mínimo entre decolagens de helicópteros nos aeroportos. Este período é considerado pelos representantes da empresa como uma discretização do tempo aceitável na prática. Em casos que isso não seja razoável, pode-se utilizar períodos menores que 5 minutos. Se a divisão de algum número presente nas instâncias reais não for divisível por 5, então este é arredondado para cima com o objetivo de manter a factibilidade das soluções com respeito aos dados originais do problema. Por exemplo, se o tempo de duração de um voo for de 47 minutos, este será considerado como um voo contendo 10 períodos de 5 minutos, totalizando 50 minutos.

A seguir, apresenta-se as descrições dos conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão utilizados para todos os modelos aqui apresentados.

Conjuntos e índices:

$\mathcal{T}$ Períodos no horizonte de planejamento, indexados por $t, t' \in \mathcal{T}$;

$\mathcal{I}$ Conjunto de voos, indexados por i e j ;

$\mathcal{H}$ Conjunto de helicópteros, indexado por h ;

$\mathcal{P}$ Conjunto de unidades marítimas, indexadas por p ;

$\mathcal{I}^0$ Subconjunto de voos de tabela;

$\mathcal{I}^1$ Subconjunto de voos transferidos do dia anterior;

$\mathcal{I}^2$ Subconjunto de voos de transferência com 2 ou mais dias de atraso;

$\mathcal{I}^C$ Subconjunto de voos de comitiva;

$\mathcal{I}_h$ Subconjunto de voos que podem ser realizados pelo helicóptero $h \in \mathcal{H}$;

$\mathcal{I}_p$ Subconjunto de voos com destino a mesma UM $p \in \mathcal{P}$.

- $\mathcal{H}^n$ Subconjunto de helicópteros do tipo normal;
- $\mathcal{H}^p$ Subconjunto de helicópteros do tipo *pool*;
- $\mathcal{H}^s$ Subconjunto de helicópteros do tipo *spot*;
- $\mathcal{H}_i$ Subconjunto de helicópteros aptos a realizar o voo $i \in \mathcal{I}$.

Parâmetros:

- r_i Hora de partida programada original do voo $i \in \mathcal{I}$.
- tf_i Tempo de duração do voo $i \in \mathcal{I}$, incluindo a permanência na UM;
- tat *Turnaround time*, ou intervalo de tempo mínimo entre dois voos consecutivos realizados por um mesmo helicóptero;
- tu_i Tempo de permanência na UM para o voo $i \in \mathcal{I}$.
- d Atraso máximo permitido na hora de partida de um voo de tabela ou comitiva;
- c Fator de divisão para discretização do tempo.

Variáveis de decisão:

- X_{ith} 1, se o voo $i \in \mathcal{I}$ inicia no instante $t \in \mathcal{T}$ pelo helicóptero $h \in \mathcal{H}$, 0 caso contrário;
- Y_{th} 1, se o helicóptero $h \in \mathcal{H}$ está sendo utilizado no instante $t \in \mathcal{T}$, 0 caso contrário;
- Z_t 1, se alguma decolagem ocorre no instante $t \in \mathcal{T}$, 0 caso contrário;
- V_h 1, se o helicóptero $h \in \mathcal{H}$ é utilizado, 0 caso contrário;
- K_i 1, se o voo $i \in \mathcal{I}$ não pôde ser agendado para o dia programado, 0 caso contrário.

O modelo de tempo discreto adotado neste trabalho é baseado no modelo proposto por [De La Vega et al. \(2022a\)](#), que também utiliza variáveis de fluxo para formular o problema. No entanto, o modelo aqui desenvolvido apresenta algumas diferenças. Em primeiro lugar, o problema abordado neste estudo não inclui voos obrigatórios nem intervalos de almoço para a tripulação, resultando na exclusão de algumas restrições presentes no modelo original. Além disso, enquanto o modelo de [De La Vega et al. \(2022a\)](#) faz uso de variáveis inteiras não binárias, o modelo proposto neste trabalho não as

utiliza, optando pela introdução de uma nova variável binária. As abordagens de solução investigadas neste estudo também diferem das propostas por [De La Vega et al. \(2022a\)](#), uma vez que são aplicadas estratégias de programação por metas hierárquicas neste capítulo, abordagens multiobjetivo e programação estocástica nos próximos capítulos.

A seguir, detalhamos os componentes da função objetivo do modelo proposto. A expressão (4.1) consiste em minimizar as transferências de voos, a expressão (4.2) busca minimizar o uso de helicópteros, e a expressão (4.3) define a minimização dos atrasos nos voos.

$$\min f_1 = \sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i. \quad (4.1)$$

$$\min f_2 = \sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h. \quad (4.2)$$

$$\min f_3 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith}. \quad (4.3)$$

Adicionalmente, as expressões (4.4) a (4.17) definem as restrições do modelo de tempo discreto proposto, seguindo a descrição do problema apresentada na Seção 2.

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} + K_i = 1, \forall i \in \mathcal{I}; \quad (4.4)$$

$$Z_t = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.5)$$

$$Y_{th} = \sum_{i \in \mathcal{I}_h} \sum_{t' = t, t-1, \dots, \max(r_i, t - (tf_i - 1) - tat)} X_{it'h}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall h \in \mathcal{H}; \quad (4.6)$$

$$Y_{th} \leq |\mathcal{T}| V_h, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.7)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} (t - r_i) X_{ith} \leq d, \forall i \in \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^C; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} t' \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} &\geq t \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} + \frac{tf_i - tu_i}{2} + tu_i - \frac{tf_j - tu_j}{2} \\ &\quad - |\mathcal{T}| \left(2 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} - \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} \right), \\ &\quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall i, j \in \mathcal{I}_p, i \neq j, \forall t, t' \in \mathcal{T}, t' > t; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\sum_{t'=1}^{t-1} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} \leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in (\mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2) \cap \mathcal{I}_p, \forall j \in \mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}_p \forall t \in \mathcal{T} \quad (4.10)$$

$$\sum_{t'=t+1}^{|\mathcal{T}|} X_{jt'h} \leq 1 - X_{ith}, \forall i \in \mathcal{I}^C, \forall j \in \mathcal{I}, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}, \forall h \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j; \quad (4.11)$$

$$\sum_{t'=t+1}^{|\mathcal{T}|} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} \leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in \mathcal{I}^C \cap \mathcal{I}_p, \forall j \in \mathcal{I}_p, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.12)$$

$$X_{ith} \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.13)$$

$$Y_{th} \in \{0, 1\}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.14)$$

$$Z_t \in \{0, 1\}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.15)$$

$$V_h \in \{0, 1\}, \forall h \in \mathcal{H}; \quad (4.16)$$

$$K_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathcal{I}. \quad (4.17)$$

As restrições (4.4) estabelecem que cada voo i deve ser realizado no máximo uma vez, ou, caso necessário, ser transferido para o dia seguinte. As restrições (4.5) determinam se há uma decolagem do aeroporto no período t . As restrições (4.6) especificam se o helicóptero h está sendo utilizado para um voo no período t . As restrições (4.7) determinam se o helicóptero h é utilizado no dia. As restrições (4.8) garantem que os voos de tabela e de comitiva que estão agendados para o dia não excedam o atraso máximo permitido (240 minutos). As restrições (4.9) restringem a ocorrência de sobreposição de voos destinados à mesma unidade marítima, uma vez que cada unidade marítima pode receber apenas um helicóptero por vez. As restrições (4.10) garantem a precedência de um voo atrasado ($\mathcal{I}^2 \cup \mathcal{I}^1$) sobre um voo sem atraso ($\mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^C$) indo para a mesma unidade de destino. As restrições (4.11) bloqueiam o uso de helicópteros que executam voos de comitiva para o resto do dia. As restrições (4.12) garantem que as unidades de destino que receberam um voo de comitiva estejam bloqueadas para outros voos no período restante do dia. As restrições (4.13) a (4.17) representam o domínio das variáveis de decisão, sendo todas elas binárias.

Na implementação computacional do modelo de tempo discreto, são utilizadas algumas restrições de fixação de variáveis, conforme definidas em (4.18) e (4.19). O primeiro conjunto de restrições impede que voos de tabela e de comitiva partam antes do horário agendado, após o atraso máximo ou quando o tempo restante não for suficiente para a conclusão do voo. Além disso, essas restrições garantem que os voos programados

para o dia não excedam o atraso máximo permitido. As restrições (4.19) têm o mesmo objetivo para voos transferidos, com a exceção da condição de atraso máximo permitido.

$$X_{ith} = 0 \quad \text{se } t < r_i \text{ ou } t > r_i + d \text{ ou } t > |\mathcal{T}| - tf_i + 1, \forall i \in \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^C, \quad (4.18)$$

$$\forall h \in \mathcal{H}_i, \forall t \in \mathcal{T};$$

$$X_{ith} = 0 \quad \text{se } t < r_i \text{ ou } t > |\mathcal{T}| - tf_i + 1, \forall i \in \mathcal{I}^2 \cup \mathcal{I}^1, \forall h \in \mathcal{H}_i, \forall t \in \mathcal{T}. \quad (4.19)$$

Para incorporar os critérios lexicográficos (i), (ii) e (iii), definimos as respectivas expressões: a expressão (4.1) consiste em minimizar as transferências de voos, a expressão (4.2) busca minimizar o uso de helicópteros, e a expressão (4.3) define a minimização dos atrasos nos voos. O critério (4.1) domina o critério (4.2), e o critério (4.2) domina o critério (4.3). É importante notar que esses critérios não estão em *trade-off*, uma vez que o critério (i) tem prioridade sobre o (ii), e o (ii) tem prioridade sobre o (iii). Os pesos W_1 a W_4 em (4.1) são parâmetros do modelo definidos pelos representantes da empresa para diferenciar os tipos de voos transferidos no critério (i), com $W_1 > W_2 > W_3 > W_4$. Da mesma forma, os pesos W_5 a W_7 em (4.2) discriminam os tipos de helicópteros no critério (ii), com $W_5 > W_6 > W_7$.

O reagendamento de voos apresenta desafios significativos em comparação com o agendamento inicial de voos, especialmente quando a entrega rápida dos resultados é imperativa. Essa complexidade se deve à necessidade de executar procedimentos de reagendamento no dia anterior aos voos pretendidos, exigindo comunicação oportuna com os passageiros sobre os detalhes atualizados dos voos e garantindo a prontidão operacional dos helicópteros. Para resolver efetivamente o modelo de tempo discreto, definimos quatro abordagens distintas, denominadas de A1 a A4. A principal motivação para a formulação dessas abordagens é otimizar o uso dos recursos computacionais, visando reduzir o tempo de obtenção das soluções sem comprometer sua qualidade. Essa comparação sistemática permite uma avaliação da eficiência e da prontidão no tratamento de cenários de reagendamento.

A abordagem A1 resolve o modelo de tempo discreto como um único modelo inteiro de programação linear (ILP) com uma função objetivo escalada usando penalidades para cada objetivo. A abordagem A2 resolve esse modelo aplicando a estratégia de programação por metas hierárquicas com base em um procedimento de três etapas a ser apresentado. Tanto A1 quanto A2 são eficazes sem perda de otimalidade para resolver o ARP estudado. As abordagens A3 e A4 também são baseadas nesse procedimento de três etapas, mas com algumas modificações e melhorias no modelo matemático, o que pode resultar em perda de otimalidade (ou seja, podem não retornar uma solução ótima

para o ARP estudado); no entanto, podem fornecer soluções de alta qualidade dentro de tempos computacionais mais acessíveis. Elas diferem exclusivamente no último passo da estratégia de programação por metas hierárquicas.

4.1 ABORDAGEM A1

Em vez de resolver os três modelos ILP separadamente, uma alternativa computacionalmente menos onerosa pode ser definir adequadamente penalidades P_1 , P_2 e P_3 para os critérios (4.1), (4.2) e (4.3), respectivamente, com $P_1 \gg P_2 \gg P_3$, e resolver o modelo de tempo discreto como um único modelo ILP definido por uma função objetivo única dada por:

$$\begin{aligned} \min f = & P_1 \left(\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i \right) + \\ & P_2 \left(\sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h \right) + P_3 \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A escolha dos valores das penalidades P_1 , P_2 e P_3 deve garantir as prioridades hierárquicas entre os critérios, ou seja, que o critério (i) prevaleça sobre o critério (ii), e que o critério (ii) prevaleça sobre o critério (iii). Aqui, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, e $\bar{f}_3$ representam os resultados das três funções objetivo envolvidas no modelo. Especificamente, $\bar{f}_1$ é o resultado da primeira função objetivo, $\bar{f}_2$ da segunda função objetivo e $\bar{f}_3$ da terceira função objetivo. Portanto, essa primeira abordagem consiste em resolver o modelo ILP definido pela função objetivo (4.20) e pelas restrições (4.4) a (4.19). A solução ótima obtida, com valor ótimo $\bar{f} = P_1 \bar{f}_1 + P_2 \bar{f}_2 + P_3 \bar{f}_3$, também é ótima para o modelo de tempo discreto original, cujo valor ótimo é dado por (com valor ótimo $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3$).

4.2 ABORDAGEM A2

A segunda abordagem (A2) também utiliza os três critérios apresentados em (4.1), (4.2) e (4.3) e as restrições (4.4) a (4.19), mas aplicando a estratégia de programação por metas hierárquicas. Para fins de comparação com a abordagem A1, também usamos penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivo em (4.1), (4.2) e (4.3), respectivamente.

1. Meta 1: Reduzir os voos transferidos

Primeiramente, resolvemos um modelo ILP com a função objetivo (4.1), sujeito às restrições (4.4) a (4.6) e (4.8) a (4.19). Observe que a única restrição que não é incluída nesta etapa é (4.7), uma vez que não é necessário minimizar a quantidade de helicópteros a serem utilizados nesta primeira etapa. As variáveis V_h , $\forall h \in \mathcal{H}$,

também não são incluídas na primeira meta. A solução ótima obtida nesta primeira etapa do procedimento mostra a quantidade de voos sob os pesos W_1, W_2, W_3, W_4 que não puderam ser agendados para o dia, representada pelas variáveis $K_i, \forall i \in \mathcal{I}$. O valor da função objetivo obtido nesta primeira etapa ($\bar{f}_1$) é imposto como uma nova restrição na próxima etapa, para definir o peso total dos voos que não puderam ser agendados.

Note que se fossem fixadas as variáveis $K_i, \forall i \in \mathcal{I}$, usando os valores encontrados nesta etapa, poderíamos ter perda de otimalidade nas etapas seguintes, devido ao fato de que estamos forçando um voo específico a ser adiado para o dia seguinte sem considerar os outros critérios. Os valores ótimos para todas as variáveis, encontrados nesta etapa, são usados como valores iniciais para resolver o modelo ILP na próxima etapa.

2. Meta 2: Reduzir o uso de helicópteros

Posteriormente, resolvemos um modelo ILP com a função objetivo (4.2), sujeito às restrições (4.4) a (4.18) e variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$, incluídas nesta meta. Para considerar os resultados da Meta 1, a restrição (4.21) é incluída neste modelo, pois garante que a soma ponderada dos voos não agendados para o dia de todos os subconjuntos de voos seja igual ao valor da solução obtida na primeira meta.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i = \bar{f}_1. \quad (4.21)$$

A solução ótima obtida nesta etapa indica o peso total dos helicópteros que serão usados para operar os voos agendados na Meta 1, representado pelas variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$. O valor da função objetivo obtido nesta segunda etapa ($\bar{f}_2$) também é imposto como uma nova restrição na próxima etapa, para definir o peso dos helicópteros usados.

Não podemos garantir a quantidade de helicópteros necessária para executar todos os voos, devido à diferença nos pesos atribuídos aos helicópteros de cada tipo e, na última etapa, os tipos de helicópteros podem ser trocados desde que o valor de $\bar{f}_2$ continue o mesmo. Os valores ótimos para todas as variáveis, encontrados nesta etapa, também são usados como valores iniciais para resolver o modelo ILP na próxima etapa.

3. Meta 3: Reduzir o atraso geral dos voos

Nesta última etapa, resolvemos outro modelo ILP, mas agora usando a função objetivo (4.3), as restrições (4.4) a (4.18), e a restrição (4.21). Também consideramos uma nova restrição (4.22), que garante que o peso total dos helicópteros permaneça no seu valor mínimo para realizar o total de voos agendados na Meta 1.

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h = \bar{f}_2. \quad (4.22)$$

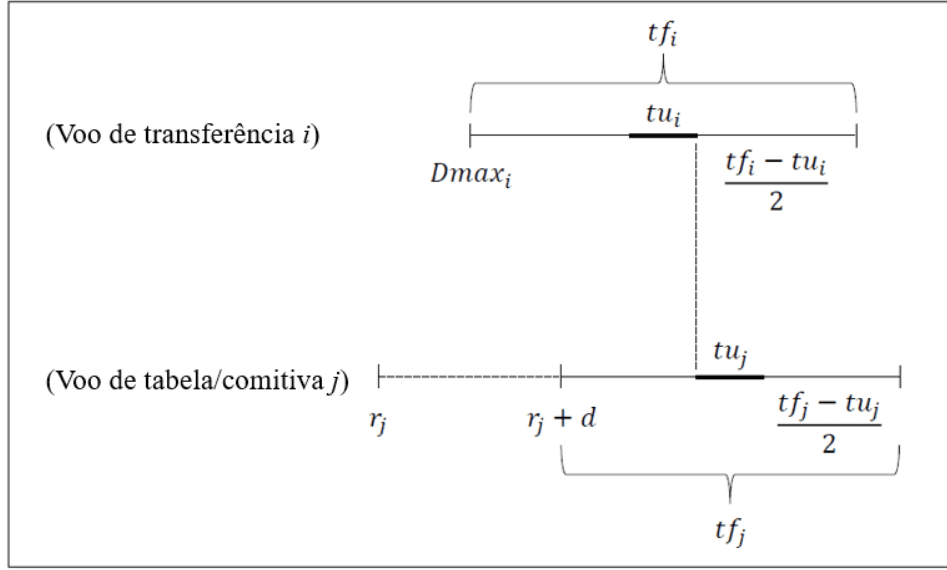
Esta segunda abordagem não resulta em perda de otimalidade, e o valor ótimo resulta da soma de todos os resultados de cada meta ($\bar{f} = P_1 \bar{f}_1 + P_2 \bar{f}_2 + P_3 \bar{f}_3$).

4.3 ABORDAGEM A3

A terceira abordagem (A3) para resolver o modelo em tempo discreto é semelhante à abordagem A2, pois também segue um procedimento de três etapas baseado nos critérios (4.1), (4.2) e (4.3), e nas restrições (4.4) a (4.19). No entanto, ela se baseia em aprimoramentos do modelo, que visam reduzir o tempo computacional para encontrar boas soluções viáveis (não necessariamente ótimas) para o ARP estudado. Esses aprimoramentos têm como objetivo reduzir o número de iterações, aperfeiçoando algumas das restrições.

A primeira melhoria foca no conjunto $\mathcal{T}$ e visa calcular o tempo máximo de partida para cada voo $i \in \mathcal{I}$, denominado $Dmax_i$, de forma a eliminar restrições do modelo. Para calcular $Dmax_i$, consideramos que: a janela de tempo do aeroporto é baseada exclusivamente em operações diurnas; voos de tabela e de comitiva podem ser atrasados por até 4 horas no máximo; e voos transferidos com a mesma unidade de destino que voos não transferidos devem ocorrer antes. O cálculo da primeira melhoria é ilustrado na Figura 4.1 e detalhado pelo Algoritmo 1, onde primeiro determinamos o tempo máximo de partida para voos de tabela ou de comitiva, uma vez que eles podem ocorrer com um atraso máximo de 4 horas e devem respeitar a janela de tempo do aeroporto, e então calculamos o tempo máximo de partida para voos de transferência, que podem partir a qualquer momento dentro da restrição da janela de tempo do aeroporto. Após calcular esses tempos de partida, verificamos se algum voo de transferência está destinado à mesma unidade marítima que um voo de tabela ou de comitiva; assim, podemos recalculá-lo $Dmax_i$, uma vez que os voos de transferência precisam ocorrer antes dos voos de tabela ou de comitiva. Como resultado, temos um novo subconjunto $\mathcal{T}_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$, no qual os períodos são agora personalizados para cada voo i , variando desde o seu tempo de partida agendado (r_i) até o seu tempo máximo possível de partida ($Dmax_i$).

Figura 4.1 – Determinação do valor de $Dmax_i$.



Fonte: Autoria própria (2024).

Observe que a aplicação dessa primeira melhoria pode, em alguns casos, acarretar uma perda de otimalidade. Como os voos de transferência devem ocorrer antes dos voos de tabela ou de comitiva destinados à mesma unidade marítima, o Algoritmo 1 determina um valor para $Dmax_i$, de modo que os voos de transferência sejam realizados antes dos voos de tabela ou de comitiva para a mesma unidade. Esse algoritmo presume que esses voos de tabela ou de comitiva serão programados para o dia. No entanto, caso esses voos não sejam programados, os voos de transferência destinados à mesma unidade marítima ficarão restritos ao intervalo entre r_i e $Dmax_i$, $\forall i \in \mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2$, o que pode comprometer a otimalidade da solução.

Algoritmo 1: TEMPO MÁXIMO PARA DECOLAGEM DO VOO $i \in I$

Entrada: Parâmetros das instâncias

Saída: $Dmax_i$
início

Considere TW_{um} ser o último tempo possível para um voo de tabela ou comitiva pousar na UM p , considerando atraso máximo possível;
 Considere TW_{min} como o tempo mais cedo que um voo não transferido pode pousar na unidade marítima p ;
 Considere aux como uma variável auxiliar para o cálculo de TW_{um}

para $i \in \mathcal{I}$ **faça**

se $i \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C$ **então**
 $Dmax_i = \min(r_i + d, |T| - tf_i + 1)$;
fim
se $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ **então**
 $Dmax_i = (|T| - tf_i + 1)$;
fim

fim

Considere que o voo $j \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C$ e o voo $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ têm como destino a mesma UM p ;

para $p \in \mathcal{P}$ **faça**

para $j \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C \cap I_p$ **faça**
 $aux = \min(r_j + d, |T| - tf_j + 1)$
 $TW_{um} = aux - tu_j - \frac{(tf_j - tu_j)}{2}$
 se $TW_{min} > TW_{um}$ **então**
 $TW_{min} = TW_{um}$
 fim
fim
para $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cap I_p$ **faça**
 $Dmax_i = \lceil TW_{min} + \frac{(tf_i - tu_i)}{2} \rceil$;
fim

fim
fim

A segunda melhoria também se concentra na redução do conjunto $\mathcal{T}$ para algumas restrições, pois calcula o intervalo máximo no qual cada helicóptero pode ser utilizado. Como os voos não podem ser antecipados, os helicópteros só poderão partir no horário programado ou posteriormente. Assim, para calcular a primeira partida possível, determinamos a primeira decolagem agendada do dia para cada helicóptero $h \in \mathcal{H}$, conforme descrito em (4.23). Além disso, utilizamos (4.24) para calcular o último horário possível para o helicóptero operar, que estabelece que o tempo máximo será o maior entre o horário de decolagem máximo $Dmax_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$, somado à duração do voo i , e o tempo mínimo em solo entre voos consecutivos; ou o limite superior da janela de tempo

do aeródromo. Cada helicóptero pode ter uma janela de tempo diferente devido à sua compatibilidade com a execução do voo, o que é representado pelo conjunto $\mathcal{T}_h, \forall h \in \mathcal{H}$.

$$Tmin_h = \min(r_i, \forall i \in \mathcal{I}_h), \forall h \in \mathcal{H}_i; \quad (4.23)$$

$$Tmax_h = \min(Dmax_i + tf_i + tat - 1, |\mathcal{T}|, \forall i \in \mathcal{I}_h), \forall h \in \mathcal{H}_i. \quad (4.24)$$

A terceira (e última) melhoria calcula a precedência obrigatória dos voos. Por exemplo, se o voo $i \in \mathcal{I}$ tem um horário de partida máximo $Dmax_i$ que é menor que a partida programada r_j de outro voo $j \in \mathcal{I}$, então i deve ocorrer antes de j . A precedência dos voos é então calculada como:

$$Prec_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{se } Dmax_i \leq r_j, \forall i, j \in \mathcal{I}, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.25)$$

A abordagem A3 também utiliza algumas desigualdades válidas para tentar melhorar seu desempenho computacional. O tamanho do problema aumenta com o número de voos a serem alocados no mesmo dia. Portanto, estas quatro desigualdades válidas podem ser usadas na abordagem A3:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{i \in \mathcal{I}} X_{ith} \leq 1, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.26)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} Y_{th} \leq t, \forall t \in \mathcal{T}_2; \quad (4.27)$$

$$X_{ith} \leq V_h, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}_i, \forall i \in \mathcal{I}_h; \quad (4.28)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} Z_t \leq |\mathcal{I}|. \quad (4.29)$$

O primeiro conjunto de desigualdades válidas em (4.26) complementa as restrições (4.4), limitando o número de voos por período para ser menor ou igual a um. As desigualdades válidas (4.27) restringem o número de helicópteros em uso nos períodos iniciais ($t \in \mathcal{T}_2$), onde $\mathcal{T}_2$ é o subconjunto de períodos iniciais baseado no comprimento do conjunto $\mathcal{H}$, já que o aeroporto não permite que helicópteros decolem simultaneamente e um intervalo de 5 minutos entre as partidas deve ser respeitado. Assim, esta desigualdade válida permite apenas o número máximo possível de helicópteros em operação para cada $t \in \mathcal{T}_2$, até que o intervalo mínimo necessário para todos os helicópteros estarem em operação seja atendido. As desigualdades (4.28) estabelecem a correlação entre os voos designados para execução pelo helicóptero h através da ativação da variável V_h . O último conjunto de desigualdades válidas, (4.29), assegura que o número de partidas deve ser menor ou igual ao número de voos.

A abordagem A3, assim como a abordagem A2, resolve um modelo ILP em cada um de seus três passos, e os resultados podem então ser usados como valores fixos para

o próximo passo ou manipulados para calcular um novo parâmetro a ser implementado no passo seguinte. As restrições são ajustadas para cada objetivo particular. Para fins de comparação com as abordagens A1 e A2, também utilizamos penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivos em (4.1), (4.2) e (4.3), respectivamente.

1. Meta 1: Reduzir os voos transferidos

Este primeiro passo da abordagem A3 segue de perto as restrições da abordagem A2, mas com modificações que incorporam as melhorias no modelo descritas anteriormente. As restrições resultantes são as seguintes:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t=r_i}^{Dmax_i} X_{ith} + K_i = 1, \forall i \in \mathcal{I}; \quad (4.30)$$

$$Z_t = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.31)$$

$$Y_{th} = \sum_{i \in \mathcal{I}_h} \sum_{t'=t, t-1, \dots, \max(r_i, t-(tf_i-1)-tat)} X_{it'h}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}_h; \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} t' \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} &\geq t \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} \frac{tf_i - tu_i}{2} + tu_i - \frac{tf_j - tu_j}{2} \\ &\quad - |\mathcal{T}| \left(2 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} - \sum_{h \in \mathcal{H}_j} X_{jt'h} \right), \\ &\quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall i, j \in \mathcal{I}_p, Prec_{ij} = 1, i \neq j, \forall t, t' \in \mathcal{T}_i, t' > t; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \sum_{t'=r_j}^{\min(Dmax_j, t-1)} X_{jt'h} &\leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall i \in (\mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2) \cap \mathcal{I}_p, \forall j \\ &\quad \in \mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}_p, Prec_{ij} = 1, \forall t \in \mathcal{T}_i; \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t'=\max(r_j, t+1)}^{Dmax_j} X_{jt'h} &\leq 1 - X_{ith}, \quad \forall i \in \mathcal{I}^C, \forall j \in \mathcal{I}, Prec_{ij} \\ &= 1, j \neq i \forall h \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j \forall t \in \mathcal{T}_i; \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \sum_{t'=\max(r_j, t+1)}^{Dmax_j} X_{jt'h} &\leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith}, \forall p \in \mathcal{P}, \quad \forall i \in \mathcal{I}^C \cap \mathcal{I}_p, \forall j \\ &\quad \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}_p, Prec_{ij} = 1, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}_i; \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$X_{ith} = 0, \quad \text{se } t < r_i \text{ ou } t > Dmax_i, \forall i \in \mathcal{I}, \forall h \in \mathcal{H}_i, \forall t \in \mathcal{T}; \quad (4.37)$$

$$Y_{th} = 0, \quad \text{se } t < Tmin_h \text{ ou } t > Tmax_h, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}. \quad (4.38)$$

As restrições (4.7) não foram incluídas neste primeiro objetivo devido à falta de relevância para o uso de helicópteros na função objetivo em (4.1). As restrições (4.30), (4.34), (4.35) e (4.36) foram atualizadas com a melhoria apresentada no Algoritmo

1. As restrições (4.32) foram atualizadas com as melhorias apresentadas em (4.23) e (4.24). As restrições (4.33) a (4.36) foram atualizadas com o uso das melhorias em (4.25). As restrições (4.13) a (4.17), que representam o domínio das variáveis, também estão incluídas nesta formulação. Quanto às restrições de fixação de variáveis em (4.18) a (4.19), elas foram reduzidas a uma única, que inclui todos os voos e se beneficia da melhoria no Algoritmo 1, mostrado em (4.37), e também adicionamos uma nova restrição de fixação de variáveis em (4.38), baseada na segunda melhoria, que estabelece que os helicópteros não estão sendo usados em períodos fora de sua janela de tempo. As desigualdades válidas em (4.26) a (4.29) também são incluídas no modelo. O modelo ILP usado neste objetivo é então definido pela função objetivo (4.1) e pelas restrições (4.30) a (4.37), (4.26) a (4.29) e (4.13) a (4.17).

A solução ótima obtida para este modelo ILP mostra a quantidade de voos que não puderam ser agendados para o dia, representados pelas variáveis K_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Para o próximo passo deste procedimento, o resultado encontrado para essas variáveis é imposto através da fixação de variáveis. As outras variáveis não são fixadas, mas seus valores ótimos, encontrados neste passo, são sugeridos como valores iniciais para resolver o modelo ILP no próximo passo. É importante notar que se um voo não estiver agendado para o dia na solução ótima deste passo, a abordagem A3 envolve perda de generalidade, uma vez que os voos classificados na mesma categoria (ou seja, tipo de voos) apresentam o mesmo peso, mas podem ter diferentes requisitos de helicópteros, duração e unidade de destino, impactando os dois próximos passos.

2. Meta 2: Reduzir o uso de helicópteros

Este segundo passo visa reduzir o uso de helicópteros. O modelo ILP agora é definido usando a função objetivo (4.2), sujeita a todas as restrições do primeiro passo, incluindo o domínio das variáveis de decisão, restrições de fixação de variáveis e desigualdades válidas. As restrições (4.39) são adicionadas ao modelo, com o mesmo propósito das restrições (4.7) do primeiro modelo, mas são usadas as melhorias no modelo em (4.23) e (4.24) que substituem o conjunto $\mathcal{T}$ pelo subconjunto $\mathcal{T}_h$, considerando apenas os períodos operacionais possíveis para cada helicóptero. Dessa forma temos que:

$$Y_{th} \leq |\mathcal{T}|V_h, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}_h. \quad (4.39)$$

A solução ótima deste modelo ILP é usada no modelo ILP do terceiro passo. As variáveis V_h , $\forall h \in \mathcal{H}$, encontradas aqui referem-se à quantidade total de helicópteros necessários para executar todos os voos agendados para o dia, encontrados no primeiro objetivo.

3. Meta 3: Reduzir o atraso geral dos voos

Este terceiro passo visa reduzir o atraso total dos voos agendados para o dia e isso é traduzido na função objetivo (4.40), que é atualizada com a melhoria definida no Algoritmo 1.

$$\min f_3 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t=r_i}^{Dmax_i} c(t - r_i) X_{ith}. \quad (4.40)$$

O modelo ILP deste passo é definido pela função objetivo (4.40), sujeita a todas as restrições dos primeiros e segundos objetivos, (4.30) a (4.36) e (4.39), além das restrições do domínio das variáveis (4.13) a (4.17), e as restrições de fixação de variáveis (4.37). Também se baseia em todas as desigualdades válidas (4.26) a (4.29).

Para este terceiro passo, usamos os valores das variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$, obtidos na solução ótima da Meta 2 para calcular a quantidade necessária de helicópteros de cada tipo (*spot*, *pool* e *normal*) necessários para realizar todos os voos previamente alocados para o dia. A quantidade ótima de helicópteros é armazenada nos parâmetros tot^s , tot^p e tot^n , que representam, respectivamente, a quantidade total de helicópteros *spot*, *pool* e *normal*. Em seguida, incluímos as restrições (4.41) a (4.43), que se referem à quantidade de helicópteros de cada tipo necessária para executar todos os voos agendados para o dia. Isso leva à perda de otimalidade uma vez que estipulamos a quantidade total para cada tipo de helicóptero e restringimos trocas entre diferentes tipos.

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^s} V_h = tot^s; \quad (4.41)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^p} V_h = tot^p; \quad (4.42)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^n} V_h = tot^n. \quad (4.43)$$

4.4 ABORDAGEM A4

A abordagem A4 é semelhante à A3, pois também incorpora as melhorias e as desigualdades válidas utilizadas na abordagem A3. No entanto, elas diferem exclusivamente na resolução do modelo ILP da Meta 3. As Metas 1 e 2 são calculadas exatamente da mesma maneira descrita na abordagem A3. Contudo, na abordagem A4, os valores de $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$, obtidos na Meta 2 são fixados em seus valores ótimos no modelo ILP para a Meta 3. Além disso, todos os voos $i \in \mathcal{I}$ atribuídos a cada helicóptero no resultado final da Meta 2 são também fixados, impedindo a troca de voos entre diferentes aeronaves e restringindo ainda mais o problema.

A partir da solução ótima obtida na segunda etapa, um novo parâmetro é gerado, vinculando os voos aos helicópteros da solução encontrada. Esse parâmetro é denominado

C_{ih} , e representa a associação entre voos e helicópteros. As restrições (4.44) são então incluídas no modelo ILP da Meta 3, restringindo a troca de voos entre diferentes helicópteros. Assim, o modelo ILP para esta meta é o mesmo utilizado na Meta 3 da abordagem A3, com exceção dos valores fixos das variáveis V_h e da inclusão das restrições (4.44).

$$\sum_{t=r_i}^{Dmax_i} X_{ith} = C_{ih}, \forall h \in \mathcal{H}. \quad (4.44)$$

Em resumo, as abordagens A1 e A2 são exatas para o ARP estudado (assumindo que os modelos ILP correspondentes sejam resolvidos de forma ótima), enquanto as abordagens A3 e A4 são aproximações que podem apresentar perda de otimalidade, mesmo que seus modelos ILP sejam resolvidos de forma ótima.

4.5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação dos modelos matemáticos discutidos anteriormente. Todas as abordagens foram codificadas em Julia e resolvidas utilizando o solver IBM CPLEX 22.1.0 com uma tolerância padrão de 0,01% para o gap de otimalidade. Todos os experimentos foram executados em um PC com Windows, equipado com um processador Intel Core i7-12700 de 2.10 GHz e 16 GB de RAM. Inicialmente, são descritas as instâncias utilizadas para a condução dos experimentos computacionais e características que abrangem todos os modelos.

As instâncias utilizadas para os experimentos computacionais foram fornecidas por uma empresa brasileira de petróleo e gás, com base em circunstâncias reais. Essas instâncias envolvem de 9 a 47 voos diários. A Tabela 4.1 mostra as informações de todas as 15 instâncias utilizadas neste estudo em termos do número total de voos ($|\mathcal{I}|$), número de helicópteros normais ($|\mathcal{H}^n|$), número de helicópteros *pool* ($|\mathcal{H}^p|$), número de helicópteros *spot* ($|\mathcal{H}^s|$), total de UMs ($|\mathcal{P}|$), número de voos de tabela ($|\mathcal{I}^0|$), número de voos transferidos do dia anterior ($|\mathcal{I}^1|$), número de voos transferidos de dois dias ou mais ($|\mathcal{I}^2|$), e número de voos de comitiva ($|\mathcal{I}^C|$). Destacamos as instâncias I27 e I35 no final da tabela por ser não possível agendar todos os voos para o dia.

Todas as metodologias utilizadas consideram a discretização do tempo em intervalos de 5 minutos (ou seja, $c = 5$), e todos os parâmetros utilizados para resolver o modelo foram definidos com base nessa discretização. Os seguintes parâmetros foram fornecidos pela empresa: $tat = 9$ períodos de 5 minutos e $d = 48$ períodos de 5 minutos. A janela de tempo do aeroporto é definida de acordo com as previsões de nascer e pôr do sol para o dia. As instâncias I9, I10, I12 e I15 têm uma janela de tempo das 06:55 às 18:00, ou seja, há 134 períodos de 5 minutos cada, enquanto as demais instâncias têm uma janela de tempo das 06:55 às 19:00, ou seja, há 146 períodos de 5 minutos cada.

Tabela 4.1 – Descrição das 15 instâncias

Instâncias	$ \mathcal{I} $	$ \mathcal{H}^n $	$ \mathcal{H}^p $	$ \mathcal{H}^s $	$ \mathcal{P} $	$ \mathcal{I}^0 $	$ \mathcal{I}^1 $	$ \mathcal{I}^2 $	$ \mathcal{I}^C $
I9	9	2	1	0	7	7	1	1	0
I10	10	2	1	0	7	8	1	1	0
I12	12	3	0	0	9	11	1	0	0
I15	15	3	2	2	11	11	2	1	1
I20	20	5	2	4	16	7	10	2	1
I24	24	5	2	3	19	10	11	2	1
I30	30	7	2	2	21	12	16	1	1
I37	37	11	0	0	17	30	7	0	0
I38	38	11	0	0	24	15	20	3	0
I40	40	5	3	3	24	17	19	3	1
I42	42	9	1	1	26	21	17	4	0
I45	45	11	0	0	27	22	20	3	0
I47	47	7	2	2	29	24	17	6	0
I35	35	12	0	0	26	22	10	2	1
I46	46	6	3	2	32	20	24	1	1

Foi atribuído um limite de tempo de 3600 segundos para cada abordagem. Não há imposição de limite de tempo para um objetivo específico dentro de cada abordagem; o tempo restante para cada objetivo é então utilizado para os objetivos subsequentes até que o tempo total de 3600 segundos seja alcançado.

Após realizar experimentos preliminares, são determinados os valores de penalidade para os três critérios lexicográficos na função objetivo. Especificamente, são selecionados os valores: $P_1 = 100$, $P_2 = 10$ e $P_3 = 0,01$. Estes valores foram escolhidos para impor de forma efetiva os objetivos hierárquicos, nos quais o primeiro critério tem precedência sobre o segundo, e o segundo sobre o terceiro. Também foi considerado o impacto da tolerância ao *gap* de otimalidade do CPLEX na otimização do terceiro objetivo, buscando um equilíbrio adequado. Além disso, os representantes da empresa definiram ainda os seguintes pesos para cada categoria (ou seja, tipos de voos e helicópteros): $W_1 = 320$, $W_2 = 240$, $W_3 = 160$, $W_4 = 80$, $W_5 = 30$, $W_6 = 25$, $W_7 = 20$. Observe que há diferença substancial nos valores entre P_1W_1 , P_1W_2 , P_1W_3 , P_1W_4 em comparação com os valores P_2W_5 , P_2W_6 , P_2W_7 e, também, há grande diferença entre esses valores em relação ao valor P_3 , o que indica a dominância do critério mais relevante sobre os menos importantes, garantindo a ordem lexicográfica estabelecida pelos decisores da empresa. Como mencionado anteriormente, para simplificar a comparação entre os valores de solução $f = P_1f_1 + P_2f_2 + P_3f_3$ da função objetivo (4.20) da abordagem A1 com os valores de solução $f_1 + f_2 + f_3$ das abordagens A2, A3 e A4, consideramos que os pesos nas funções objetivo (4.1), (4.2), (4.3) e (4.40) envolvidas nas abordagens A2, A3 e A4 são P_1W_1 , P_1W_2 , P_1W_3 , $\dots$, P_2W_7 , P_3 , em vez de W_1 , W_2 , W_3 , $\dots$, W_7 , 1. Assim, os resultados de todas as abordagens são estritamente comparáveis.

A Tabela 4.2 mostra os resultados das abordagens A1 a A4, para cada instância e cada abordagem: o limite inferior (f_{LB}), o limite superior (f), o gap de otimalidade (%) calculado como $gap = 100(f - f_{LB})/f$, e o tempo computacional, em segundos, para encontrar os resultados. Ressaltamos que as abordagens A1 e A2 são as únicas que garantem a ausência de perda de otimalidade. A abordagem A2 conseguiu encontrar soluções comprovadamente ótimas dentro do limite de tempo para a maioria das instâncias. As soluções não comprovadamente ótimas obtidas para as instâncias restantes apresentaram um gap muito pequeno, com um máximo de 0,05%. Portanto, utilizamos o limite inferior (f_{LB}) da abordagem A2 para calcular os gaps de otimalidade das soluções das abordagens A3 e A4. Os melhores resultados estão destacados em negrito.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos para as 15 instâncias nas quatro abordagens.

Inst	A1				A2				A3			A4		
	f_{LB}	f	Gap (%)	Tempo	f_{LB}	f	Gap (%)	Tempo	f	Gap (%)	Tempo	f	Gap (%)	Tempo
I9	650,20	650,20	0,00	1	650,20	650,20	0,00	1	650,20	0,00	1	651,90	0,26	1
I10	650,30	650,30	0,00	1	650,30	650,30	0,00	2	650,30	0,00	2	651,35	0,16	1
I12	601,10	601,10	0,00	1	601,10	601,10	0,00	2	601,10	0,00	1	602,55	0,24	1
I15	969,65	969,65	0,00	36	969,65	969,65	0,00	21	969,65	0,00	7	970,05	0,05	5
I20	1134,39	1134,50	0,00	3387	1134,50	1134,50	0,00	178	1134,50	0,00	104	1137,15	0,23	92
I24	1254,95	1254,95	0,00	170	1254,95	1254,95	0,00	162	1254,95	0,00	63	1255,65	0,06	35
I30	1269,95	1269,95	0,00	167	1269,88	1269,95	0,00	116	1270,40	0,04	97	1271,25	0,10	55
I37	1622,75	1622,90	0,00	158	1622,77	1622,90	0,00	153	1622,80	0,00	73	1635,00	0,75	43
I38	1642,73	1679,70	2,20	tl	1678,85	1678,95	0,00	336	1678,85	0,00	259	1681,60	0,16	95
I40	1804,63	2122,95	14,99	tl	1834,62	1835,55	0,05	tl	1834,80	0,00	3012	1837,00	0,13	1320
I42	1829,62	2024,70	9,64	tl	1837,77	1837,95	0,00	1638	1837,95	0,00	999	1841,35	0,19	705
I45	1858,93	1886,30	1,45	tl	1884,09	1884,25	0,01	1251	1884,15	0,00	450	1886,70	0,14	282
I47	1999,56	2285,70	12,52	tl	2097,30	2097,30	0,00	1650	2097,30	0,00	1285	2100,75	0,16	866
I35	9787.51	9834.40	0.48	tl	9834.30	9834.30	0.00	68.70	9834.30	0.00	53.24	9835.80	0.02	47.83
I46	7775.54	10463.35	25.69	tl	10460.29	10461.30	0.00	500.48	10462.30	0.02	262.20	10465.20	0.05	157.60

Como mostrado na Tabela 4.2, as abordagens A1 e A2 demonstram capacidades notáveis, pois ambas alcançam soluções comprovadamente ótimas para as instâncias I9, I10, I12, I15, I20, I24, I30 e I37, evidenciando sua eficácia na resolução dos problemas de otimização correspondentes. No entanto, à medida que a complexidade das instâncias aumenta, as limitações da A1 se tornam evidentes, com lacunas de otimalidade mais elevadas para as soluções das instâncias I40, I42, I46 e I47.

Instâncias com menor número de voos apresentam apenas variações marginais no tempo computacional entre as diferentes abordagens. No entanto, à medida que o volume de voos aumenta, essas disparidades se tornam mais pronunciadas. Ilustrativamente, considere a instância I40, onde ambas as abordagens A1 e A2 alcançaram o limite de tempo sem obter uma solução ótima comprovada. Embora uma declaração definitiva sobre se a abordagem A3 alcançou a solução ótima não possa ser feita, ela superou indiscutivelmente as abordagens A1 e A2, aproximando-se do limite inferior da A2. O tempo necessário para alcançar essa solução foi de quase 3012 segundos. Voltando para a abordagem A4,

uma solução superior à da A1 também foi alcançada, embora ligeiramente inferior às das abordagens A2 e A3. Esse resultado foi obtido dentro de um tempo computacional de apenas 1319 segundos.

As abordagens A3 e A4 introduzem aspectos distintos na análise comparativa. A3 consistentemente produz soluções superiores às da A1, particularmente notáveis nas instâncias I40, I42 e I47. Embora não ofereça uma prova conclusiva de otimalidade, a A3 alcança consistentemente soluções que se alinham estreitamente com os limites inferiores da A2, indicando um possível equilíbrio entre qualidade da solução e eficiência computacional. É possível notar apenas na instância I46 que há uma perda de otimalidade ao utilizar a abordagem A3 em relação à abordagem A2. Nesta instância, mesmo com a resultado ótimo apresentado em A2, não foi possível alocar todos os voos para o dia, e a perda de otimalidade provavelmente se da pela fixação dos voos a serem realizados no dia na primeira meta da abordagem A3, sendo que na abordagem A2 essa fixação não acontece. Por outro lado, a A4 se destaca por sua eficiência computacional, fornecendo soluções competitivas com tempos de processamento significativamente reduzidos.

A Tabela 4.3 detalha os resultados em termos práticos, onde é possível observar a quantidade de voos que precisaram ser transferidos para o dia seguinte, a quantidade de helicópteros necessários para executar todos os voos agendados para o dia e o atraso total dos voos em cada instância. Todas as abordagens apresentaram os mesmos resultados em termos de transferências de voos. As instâncias I35 e I46 destacam cenários específicos onde os voos foram adiados, envolvendo consistentemente os voos da tabela em todas as

Tabela 4.3 – Resultados obtidos em cada objetivo para as quatro abordagens

Inst	Voos Transferidos				Uso de Helicópteros				Atraso Total (min)			
	A1	A2	A3	A4	A1	A2	A3	A4	A1	A2	A3	A4
I9	0	0	0	0	3	3	3	3	20	20	20	190
I10	0	0	0	0	3	3	3	3	30	30	30	135
I12	0	0	0	0	3	3	3	3	110	110	110	255
I15	0	0	0	0	4	4	4	4	1965	1965	1965	2005
I20	0	0	0	0	5	5	5	5	3450	3450	3450	3715
I24	0	0	0	0	5	5	5	5	5495	5495	5495	5565
I30	0	0	0	0	6	6	6	6	6995	6995	7040	7155
I37	0	0	0	0	8	8	8	8	2290	2290	2280	3660
I38	0	0	0	0	8	8	8	8	7895	7895	7885	8160
I40	0	0	0	0	9	8	8	8	7295	8555	8480	8700
I42	0	0	0	0	9	8	8	8	7470	8795	8795	9135
I45	0	0	0	0	9	9	9	9	8468	8425	8415	8605
I47	0	0	0	0	10	9	9	9	8570	9730	9730	10075
I35	1	1	1	1	8	8	8	8	3430	3430	3430	3580
I46	1	1	1	1	10	10	10	10	11335	11130	11230	11520

quatro abordagens.

A divergência entre as abordagens torna-se aparente ao examinar o segundo critério, particularmente nas instâncias I40, I42 e I47. Nesse contexto, a abordagem A1 revela resultados sub-ótimos, ficando aquém dentro do tempo computacional especificado. Tomando novamente a instância I40 como ilustração, A1 aloca 9 helicópteros para 40 voos, enquanto A2, A3 e A4 alcançam maior eficiência ao alocar um conjunto de apenas 8 helicópteros.

Voltando ao critério final, que visa minimizar os atrasos totais dos voos, as abordagens A1, A2 e A3 incorrem em atrasos comparáveis para instâncias menores. Exceções incluem as instâncias I40, I42 e I47, onde a adição de um helicóptero extra nas soluções da abordagem A1 contribui para a redução do atraso total, alinhando-se com as expectativas em que uma maior capacidade de helicópteros pode mitigar os atrasos. Em contraste, a abordagem A4 registra um aumento no atraso para todas as instâncias, destacando-se a I37 com o maior aumento em atraso nesta abordagem.

A Tabela 4.4 fornece informações sobre os tipos de helicópteros (normal, *pool* e *spot*) utilizados em cada instância nas diferentes abordagens. Embora os resultados se alinhem para a maioria das instâncias em todas as abordagens, as instâncias I40, I42 e I47 apresentam algumas distinções. Notavelmente, essas instâncias mostram uma redução de um helicóptero da abordagem A1 para as abordagens A2, A3 e A4. No caso de I40, a solução da abordagem A1 utilizou um helicóptero *spot*, uma divergência não observada nas outras abordagens. Para as instâncias I42 e I47, é possível observar uma diminuição no número de helicópteros do tipo normal, passando de 7 para 6.

As Figuras 4.2a a 4.2d apresentam uma análise comparativa da qualidade das soluções e do tempo necessário para resolver o problema utilizando quatro abordagens distintas. As comparações foram extraídas de instâncias que apresentaram *gaps* de otimalidade significativos na abordagem A1, especificamente as instâncias I40, I42 e I47, e também da instância I35, que, embora não tenha apresentado um *gap* de otimalidade significativo, mostrou uma grande redução no tempo computacional entre as abordagens.

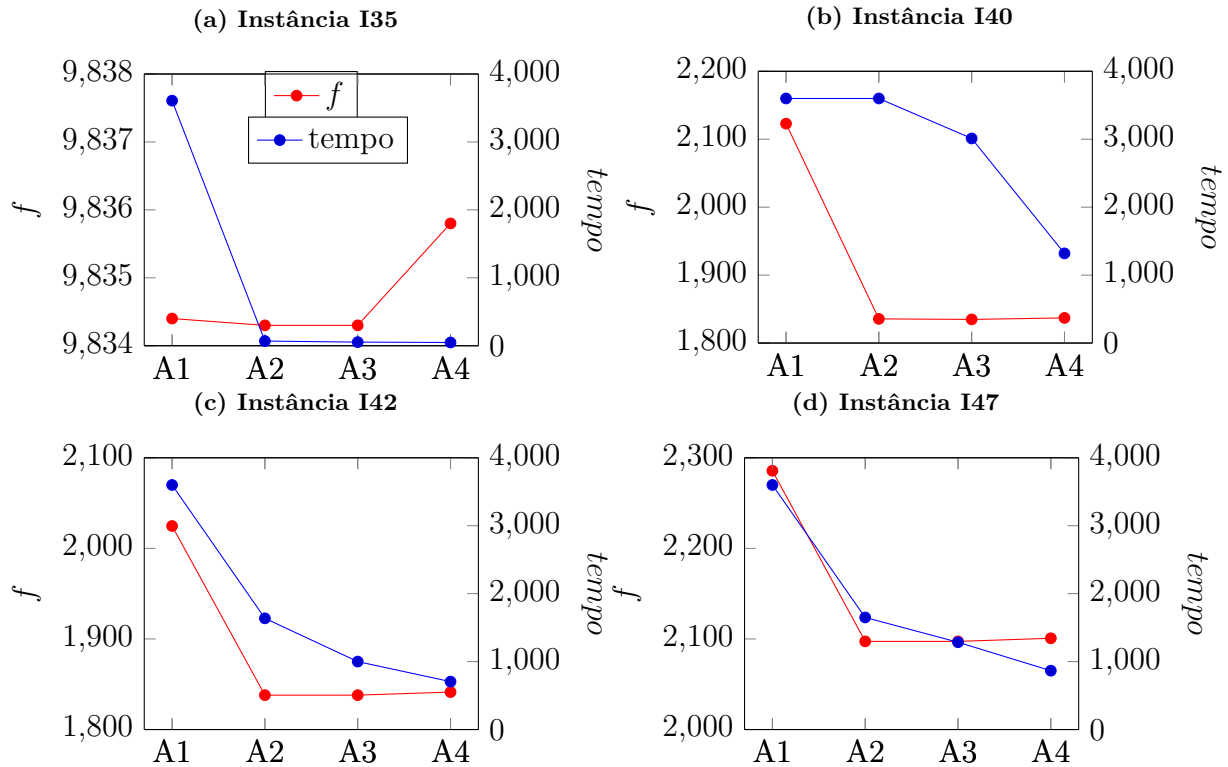
Nas Figuras 4.2b, 4.2c e 4.2d, ao examinar as instâncias I40, I42 e I47, onde um helicóptero adicional foi alocado na abordagem A1, observa-se uma redução notável no valor da solução ao se transitar da abordagem A1 para as abordagens A2, A3 e A4. O tempo computacional para a instância I40 permanece constante nas abordagens A1 e A2, atingindo o limite de 3600 segundos, mas diminui nas abordagens A3 e A4. Em contrapartida, para as instâncias I42 e I47, o tempo computacional diminui gradualmente em todas as quatro abordagens. Na Figura 4.2a, é possível verificar que instância I35

Tabela 4.4 – Resultados obtidos em relação aos tipos de helicópteros utilizados

Inst	A1			A2			A3			A4		
	$ \mathcal{H}_n $	$ \mathcal{H}_p $	$ \mathcal{H}_s $	$ \mathcal{H}_n $	$ \mathcal{H}_p $	$ \mathcal{H}_s $	$ \mathcal{H}_n $	$ \mathcal{H}_p $	$ \mathcal{H}_s $	$ \mathcal{H}_n $	$ \mathcal{H}_p $	$ \mathcal{H}_s $
I9	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
I10	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
I12	3	0	0	3	0	0	3	0	0	3	0	0
I15	2	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1
I20	3	2	0	3	2	0	3	2	0	3	2	0
I24	2	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
I30	6	0	0	6	0	0	6	0	0	6	0	0
I37	8	0	0	8	0	0	8	0	0	8	0	0
I38	8	0	0	8	0	0	8	0	0	8	0	0
I40	5	3	1	5	3	0	5	3	0	5	3	0
I42	7	1	1	6	1	1	6	1	1	6	1	1
I45	9	0	0	9	0	0	9	0	0	9	0	0
I47	7	2	1	6	2	1	6	2	1	6	2	1
I35	8	0	0	8	0	0	8	0	0	8	0	0
I46	5	3	2	5	3	2	5	3	2	5	3	2

atinge o limite de tempo na abordagem A1, mas demonstra uma redução extremamente significativa no tempo computacional a partir da abordagem A2.

Figura 4.2 – Trade-off entre qualidade de solução e tempo computacional das instâncias I35, I40, I42 e I46.



Quanto à qualidade das soluções, verifica-se que as instâncias I40, I42 e I47

apresentam uma melhoria significativa ao comparar a primeira abordagem com as demais, embora haja uma leve piora entre as abordagens A3 e A4. Essa tendência reflete as soluções mais eficientes obtidas nas abordagens A2 a A4, nas quais um helicóptero a menos é empregado na programação. Para a instância I35, a qualidade das soluções permaneceu bastante similar entre as abordagens A1, A2 e A3, com uma leve piora observada na abordagem A4.

A abordagem A3, embora possa apresentar uma perda de otimalidade em instâncias onde não é possível alocar todos os voos para o dia, demonstrou ser mais eficiente na busca de soluções. Com um tempo computacional significativamente reduzido em comparação com a abordagem A2, a A3 conseguiu gerar resultados ótimos ou próximos da otimalidade, o que a torna uma opção vantajosa em termos de desempenho global, especialmente quando a rapidez na obtenção da solução é crucial.

Ao comparar as soluções das quatro abordagens de otimização com as soluções da empresa (sem o uso de qualquer modelo de otimização) para algumas das instâncias do mundo real analisadas, os benefícios das abordagens tornam-se evidentes. Por exemplo, no caso de I10, a solução da empresa conseguiu agendar apenas 9 dos 10 voos ([De La Vega et al., 2022a](#)). O padrão se repete para instâncias maiores como I45, onde a empresa relatou que também não conseguiu agendar todos os voos para o dia, enquanto todas as abordagens A1, A2, A3 e A4 abordaram esse desafio de forma eficaz.

5 MODELO MULTIOBJETIVO

Os modelos multiobjetivos apresentados neste capítulo, ao contrário das abordagens de programação por metas do capítulo anterior, tratam os três objetivos do ARP com igual importância. Esses objetivos, detalhados nas expressões (4.1), (4.2) e (4.3), do capítulo anterior, buscam, respectivamente, minimizar as transferências de voos, minimizar o uso de helicópteros e minimizar os atrasos nos voos. Em vez de priorizar um objetivo sobre os outros, o foco está em encontrar soluções que estejam na superfície de Pareto, garantindo um equilíbrio entre os diferentes critérios envolvidos. Para alcançar isso, foram aplicados no ARP o método de Chebyshev e o método de Lokman e Köksalan. O modelo matemático multiobjetivo apresenta as mesmas características do modelo exposto no início do capítulo anterior.

5.1 MÉTODO DE CHEBYSHEV PONDERADO AUMENTADO

O Método de Chebyshev aplicado ao problema de roteamento de aeronaves (ARP) no presente estudo foi baseado na abordagem proposta por [Aliano Filho et al. \(2023\)](#). Na Fase 1, utiliza-se a ordenação lexicográfica para priorizar os objetivos de forma hierárquica, e são determinados os vetores ideal e anti-ideal. O vetor ideal representa a melhor solução obtida individualmente para cada função objetivo, servindo como referência de desempenho ótimo. Por outro lado, o vetor anti-ideal corresponde à pior solução encontrada para cada objetivo, indicando os limites inferiores de desempenho. Esses vetores são fundamentais para a normalização dos objetivos. Na Fase 2, uma versão linear do método de escalarização Chebyshev aumentado min-max é empregada para identificar soluções de Pareto. Em particular, essa fase permite a identificação de soluções eficientes não suportadas. Essas soluções, embora ótimas em termos de eficiência de Pareto, não pertencem à porção convexa da fronteira de Pareto obtida por métodos de otimização escalar — como a combinação linear ponderada dos objetivos. As soluções não suportadas são caracterizadas por estarem localizadas em regiões côncavas da fronteira e, por isso, não podem ser obtidas por simples variações nos pesos dos objetivos. Ainda assim, elas não são dominadas, ou seja, não existe nenhuma outra solução que seja simultaneamente melhor em todos os critérios considerados, o que justifica sua relevância em contextos de decisão multiobjetivo.

Para determinar os vetores ideais e anti-ideais, aplicou-se a metodologia de programação por metas discutida no Capítulo 4, utilizando especificamente a abordagem A2. Nesta abordagem, os componentes da função objetivo são resolvidos de forma sequencial, seguindo uma ordem lexicográfica, e cada objetivo otimizado, é adicionada uma nova restrição no problema seguinte para conservar os valores obtidos na meta anterior. O

processo de solução foi realizado em seis etapas distintas, cada uma considerando uma ordenação lexicográfica diferente das três funções objetivo (4.1), (4.2) e (4.3).

Na primeira etapa, o modelo foi resolvido utilizando apenas a função objetivo (4.1), sujeita às restrições (4.4) a (4.19). Em seguida, na segunda etapa, a função objetivo (4.2) foi incorporada ao modelo, e uma nova restrição, (4.21), também foi adicionada ao modelo para garantir que o valor da função objetivo (4.1) previamente alcançado fosse mantido. Na terceira etapa, a função objetivo (4.3) foi incluída no modelo, juntamente com a restrição adicional (4.22), que preserva os valores das funções objetivo (4.1) e (4.2) obtidos nas etapas anteriores.

Esse procedimento foi então repetido mais cinco vezes, alterando a ordem das funções objetivo no modelo matemático, de modo a cobrir todas as possíveis combinações. A cada nova ordem de solução, as restrições (4.21), (4.22) e (5.1) foram ajustadas para refletir os objetivos já alcançados.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith} = \bar{f}_3. \quad (5.1)$$

A partir dos resultados obtidos com as seis diferentes formulações, é possível definir os vetores ideal (ν_I) e anti-ideal (ν_A) durante a solução dos modelos lexicográficos. A determinação desses vetores é crucial para a análise do problema sob diferentes perspectivas de prioridade entre as funções objetivo, servindo como referência para identificar soluções de Pareto. Com esses vetores, é possível avaliar tanto soluções suportadas quanto não suportadas, garantindo uma compreensão abrangente do espaço de soluções.

Na última fase do método, são identificadas soluções Pareto-ótimas adicionais utilizando uma versão linear do método de escalarização Chebyshev aumentado. Esse método permite a geração de soluções de compromisso que representam soluções não dominadas e não suportadas.

Os vetores ν_I e ν_A , obtidos na primeira fase, são utilizados para definir as restrições do subproblema. O modelo matemático é então formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } z = \mu + \epsilon \left(\frac{\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i - \nu_{I_1}}{\nu_{A_1} - \nu_{I_1}} \right. \\ \left. + \frac{\sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h - \nu_{I_2}}{\nu_{A_2} - \nu_{I_2}} \right. \\ \left. + \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith} - \nu_{I_3}}{\nu_{A_3} - \nu_{I_3}} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

sujeito a:

restrições (4.4) a (4.19);

$$\frac{\lambda_1 (\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i) - \nu_{I_1}}{\nu_{A_1} - \nu_{I_1}} \leq \mu \quad (5.3)$$

$$\frac{\lambda_2 (\sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h) - \nu_{I_2}}{\nu_{A_2} - \nu_{I_2}} \leq \mu \quad (5.4)$$

$$\frac{\lambda_3 (\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith}) - \nu_{I_3}}{\nu_{A_3} - \nu_{I_3}} \leq \mu \quad (5.5)$$

$$\mu \geq 0, \quad (5.6)$$

sendo ϵ uma constante positiva suficientemente pequena que impede a obtenção de soluções fracamente não-dominadas, que são aquelas soluções que não são dominadas por outras em todos os objetivos, mas podem ser superiores ou inferiores em alguns critérios. A notação μ refere-se a uma variável auxiliar; $\lambda_k > 0$, para $k \in \{1, 2, 3\}$ são parâmetros pré-especificados para representarem pesos às diferentes funções objetivo do problema, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$; ν_{I_k} e ν_{A_k} , para $k \in \{1, 2, 3\}$ são os componentes dos vetores ideal e anti-ideal obtidos nas fases anteriores. A inclusão dos parâmetros λ_k permite a obtenção de diferentes soluções não dominadas que alcançam diversos compromissos entre as funções objetivo. Para solucionar o problema, o modelo matemático completo é composto pela função objetivo em (5.2), sujeita às restrições em (4.4) a (4.19) além das restrições (5.3) a (5.6).

5.2 MÉTODO DE LOKMAN E KÖKSALAN

O algoritmo de Lokman e Köksalan foi desenvolvido para enfrentar as limitações computacionais comumente encontradas na resolução de problemas de programação inteira multiobjetivo, como o ARP abordado nesta pesquisa. Esses problemas, especialmente quando envolvem um grande número de soluções não-dominadas, podem se tornar extre-

mamente desafiadores e exigentes em termos de recursos computacionais. Para superar esses desafios, o algoritmo utiliza uma técnica de decomposição que divide o problema em submodelos menores, permitindo que apenas um subconjunto das restrições adicionais seja necessário para excluir regiões já dominadas por soluções previamente identificadas. Essa abordagem sistemática e eficiente auxilia na exploração do espaço de soluções, garantindo que todas as soluções eficientes possíveis sejam encontradas sem sobrecarregar muito os recursos computacionais.

O primeiro passo na modelagem computacional é definir qual dos objetivos será priorizado na função objetivo. No caso do ARP analisado nesta pesquisa, três objetivos principais são considerados para otimização: (FO1) reduzir a transferência de voos para dias subsequentes, (FO2) minimizar o uso de helicópteros, e (FO3) reduzir os atrasos nos voos. Enquanto o número de voos transferidos e a quantidade de helicópteros disponíveis são parâmetros limitados, em que temos uma quantidade máxima de helicópteros disponíveis e uma quantidade específica de voos a serem realizadas, o atraso nos voos é uma métrica complexa e difícil de quantificar diretamente, tornando-se o aspecto mais desafiador em termos computacionais.

Tabela 5.1 – Tabela de comparação de tempo priorizando as funções objetivo FO1, FO2 e FO3.

Inst.	FO1			FO2			FO3		
	N	ND	Tempo	N	ND	Tempo	N	ND	Tempo
I9	27	9	6,16	23	9	5,07	23	9	5,49
I10	24	10	7,18	23	10	7,28	23	10	7,69
I12	29	10	9,64	21	10	7,33	23	10	8,11
I15	23	10	100,47	22	10	141,3	21	10	37,2
I27	26	10	305,95	17	10	3793,48	19	10	72,54
I30	22	10	19263,69	22	10	5536,55	20	10	307,91
I35	24	10	10737,34	22	10	8443,13	19	10	56,27
I37	24	10	13386,13	23	10	8031,49	19	10	299,52
I38	22	10	40405,43	22	10	1072,37	20	10	422,69
I45	26	10	59665,49	20	10	5072,12	20	10	634,37

[Lokman e Köksalan \(2013\)](#) não especificam qual objetivo deve ser considerado prioritário na aplicação do método. Diante disso, foram realizados testes experimentais priorizando separadamente cada uma das três funções objetivo, com a limitação de geração de até 10 soluções não-dominadas. Os resultados indicam que o tempo computacional foi significativamente menor quando a terceira função objetivo (FO3), associada aos atrasos, foi tratada como principal, em comparação com as demais (FO1 e FO2). A Tabela 5.1 apresenta esses resultados, detalhando: o número de vezes que o modelo foi solucionado (N), a quantidade de soluções não-dominadas encontradas (ND) e o tempo computacional,

em segundos, necessário para a obtenção dos resultados.

Embora a escolha do objetivo prioritário não influencie o conjunto final de soluções, uma vez que todos os pontos da fronteira de Pareto são eventualmente identificados, a priorização da FO3 resulta em uma redução considerável do tempo computacional, tornando o processo mais eficiente do ponto de vista prático.

O modelo matemático utilizado para solucionar o problema com este método é dado pela função objetivo em (5.7), sujeito às restrições originais do modelo em (4.4) a (4.18), com a adição das restrições em (5.8) e (5.9), que definem limites superiores para as funções objetivos de minimizar a utilização de helicópteros e reduzir transferência de voos para dias subsequentes.

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} c(t - r_i) X_{ith} + \epsilon \left(\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i \right. \\ & \left. + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i + \sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

sujeito a:

restrições (4.4) a (4.19);

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^C} W_1 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^2} W_2 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^1} W_3 K_i + \sum_{i \in \mathcal{I}^0} W_4 K_i \leq b_1; \quad (5.8)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}^s} W_5 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^p} W_6 V_h + \sum_{h \in \mathcal{H}^n} W_7 V_h \leq b_2, \quad (5.9)$$

sendo que ϵ é uma constante positiva suficientemente pequena que impede a obtenção de soluções fracamente não-dominadas, e $b = (b_1, b_2)$ define um limite superior para cada um dos critérios. Se (P_b) for inviável, então são atribuídos $z(P_b) = (M, M)$, sendo M um valor suficientemente alto.

A busca iterativa é a etapa central do algoritmo. Em cada iteração, o algoritmo resolve o modelo de otimização em (5.7), sujeito às restrições do modelo (4.4) a (4.19), com adição as restrições (5.8) e (5.9), para identificar um novo ponto não-dominado. Durante essa busca, o objetivo é minimizar uma das funções objetivo enquanto se garante que as demais permaneçam dentro dos limites estabelecidos. Após a identificação de um novo ponto não-dominado, o algoritmo procede para a atualização do conjunto de soluções. Esse ponto é então comparado com os pontos já armazenados para determinar se é, de

fato, um ponto não-dominado em relação aos demais. Se o ponto é não-dominado, ele é adicionado ao conjunto de soluções. Em seguida, os limites das funções objetivo são ajustados para refletir a nova informação. Este processo é melhor detalhado no **Apêndice B**.

Como este método busca todas as soluções não-dominadas para o problema, foram introduzidas duas novas restrições para aproximar o modelo de uma situação real. Em um cenário prático, o tomador de decisão pode preferir opções de soluções que atendam a critérios específicos sem a necessidade de examinar todas as possíveis soluções não-dominadas. Portanto, foram adicionadas restrições para eliminar soluções que não atendem a um mínimo de voos diários.

A primeira restrição (R1) introduz a restrição (5.10), que assegura que uma quantidade mínima de voos, considerando o peso específico dos voos de tabela e de comitiva do dia, seja alocada. A segunda restrição (R2), baseada na quantidade total de voos a serem realizados, é representado pela restrição (5.11). Esta restrição estabelece que o número mínimo de voos a serem realizados deve ser igual à quantidade de voos de tabela e de comitiva da instância analisada.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} X_{ith} \geq |I_C| + |I_0|; \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{I}_C} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} W_1 X_{ith} + \sum_{i \in \mathcal{I}_2} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} W_2 X_{ith} \\ & + \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} W_3 X_{ith} + \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} W_4 X_{ith} \geq W_1 |I_C| + W_4 |I_0|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Essas restrições foram implementadas para permitir que o tomador de decisão explore soluções que ajustem o cronograma para alocar mais voos, ao invés de simplesmente reduzir a quantidade de voos já alocados. Além disso, as restrições podem ser ajustadas para restringir ainda mais o número de soluções a serem encontradas, proporcionando um conjunto mais gerenciável e relevante de alternativas. Para efeito de comparação entre os métodos de Chebyshev e de Lokman e Köksalan, estas restrições foram adicionadas nos dois métodos.

5.3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir dos experimentos computacionais com a utilização das metodologias propostas anteriormente neste capítulo. Primeiramente são expostos os resultados obtidos por meio da utilização do método da

métrica de Chebyshev ponderado aumentado e, depois são expostos os resultados obtidos pelo utilização do método de Lokman e Köksalan e, por fim, uma comparação entre as metodologias, para averiguar se foi possível encontrar os mesmos pontos na superfície de Pareto, e avaliar o desempenho computacional de cada metodologia.

Diferente da programação por metas hierárquicas, nesta seção, os objetivos são tratados com a mesma importância relativa. No entanto, existem prioridades específicas entre os voos a serem realizados e custos diferenciados na utilização de helicópteros. Para refletir essas diferenças, são atribuídos pesos às funções objetivo. Assim como no método anterior, os representantes da empresa definiram os seguintes pesos para cada categoria, que correspondem aos diferentes tipos de voos e helicópteros: $W_1 = 320$, $W_2 = 240$, $W_3 = 160$, $W_4 = 80$, $W_5 = 30$, $W_6 = 25$, $W_7 = 20$.

No método de Chebyshev, foram definidos os valores de ϵ e os pesos λ_1 , λ_2 e λ_3 , conforme apresentados no modelo matemático apresentado em (5.2) a (5.5), com as restrições em (4.4) a (4.19). O valor de $\epsilon = 0,0001$ foi escolhido para evitar a formação fracamente não-dominadas. Os valores de λ_1 , λ_2 e λ_3 são detalhados na Tabela 5.2. Esses pesos são atualizados a cada iteração do método para gerar novas soluções, possibilitando determinar diferentes pontos na fronteira de Pareto. Foram realizadas um total de 10 iterações com o modelo, com o objetivo de identificar soluções na fronteira de Pareto, além das 6 iterações iniciais, que utilizaram os objetivos em ordem lexicográfica para determinar os vetores ideais e anti-ideais. Assim, totalizou-se 16 iterações para obter uma representação abrangente da fronteira de Pareto.

Tabela 5.2 – Valores de λ_1 , λ_2 e λ_3

N	λ_1	λ_2	λ_3
1	0.1	0.1	0.8
2	0.1	0.8	0.1
3	0.8	0.1	0.1
4	0.5	0.3	0.2
5	0.5	0.2	0.3
6	0.3	0.5	0.2
7	0.3	0.2	0.5
8	0.2	0.3	0.5
9	0.2	0.5	0.3
10	0.333	0.333	0.333

As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os resultados obtidos através da aplicação do método de Chebyshev às 15 instâncias previamente especificadas no Capítulo 4. Na Tabela 5.3 são apresentados os resultados sem a utilização das restrições adicionais apresentadas no modelo, e com a utilização das restrições, sendo que a primeira restrição (R1) em (5.10),

garante que ao menos uma quantidade mínima de voos, relacionada ao peso específico dos voos de tabela e de comitiva do dia, seja alocada. A segunda restrição (R2) em (5.11), garante que uma quantidade mínima de voos seja realizada. Esta restrição estipula que o número mínimo de voos a serem realizados deve ser igual à quantidade de voos de tabela e de comitiva da instância analisada. Para a Tabela 5.4 não foram utilizadas estas restrições adicionais, e foram estipulados três diferentes limites de tempo: TL1, TL2 e TL3, correspondendo a 3600, 600 e 300 segundos, respectivamente. As tabelas detalham o número de soluções (N), o número de soluções não-dominadas encontradas (ND), quantidade de soluções ótimas (SO) dentre as soluções não-dominadas, o maior *gap* dentre as soluções não-dominadas, e o tempo computacional requerido para N iterações.

Tabela 5.3 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens sem R1/R2, com R1 e com R2.

Inst.	Sem R1/R2					Com R1				Com R2			
	N	ND	SO	GAP(%)	Tempo	ND	SO	GAP(%)	Tempo	ND	SO	GAP(%)	Tempo
I9	16	8	8	0.00	1	7	7	0.00	1	6	6	0.00	2
I10	16	8	8	0.00	2	6	6	0.00	3	4	4	0.00	2
I12	16	6	6	0.00	2	4	4	0.00	3	4	4	0.00	3
I15	16	14	14	0.00	579	14	14	0.00	512	14	14	0.00	136
I20	16	14	13	2.22	5880	15	14	3.60	4030	16	15	3.86	4249
I24	16	14	8	5.55	21975	15	14	2.66	4227	16	13	3.97	11911
I30	16	14	10	5.66	17774	16	8	9.53	30216	14	7	4.29	26795
I35	16	14	11	9.46	15123	15	10	7.00	21478	15	9	4.72	26795
I37	16	14	10	11.82	17902	14	10	9.07	16455	14	10	3.96	15673
I38	16	14	10	1.85	18193	14	8	4.37	24936	14	7	6.08	31710
I40	16	14	8	6.56	23253	16	10	4.27	21170	15	8	3.54	28126
I42	16	14	8	4.94	25517	16	8	7.22	30740	15	6	7.59	36000
I45	16	14	6	4.64	28997	15	7	5.86	33510	14	6	2.21	36097
I46	16	14	9	3.51	19753	15	8	3.46	28142	15	7	5.57	30266
I47	16	14	8	5.31	23717	15	6	3.65	34299	15	5	5.83	41043

É possível verificar na Tabela 5.3 que, com o modelo sem as restrições adicionais R1 e R2 relacionados ao número mínimo de voos a serem realizados no dia, o número máximo de soluções não-dominadas encontradas entre as instâncias foi 14. Foram geradas 6 soluções com a alternância da priorização das três funções objetivos. Então, quando define-se a redução do número de helicópteros como a primeira função objetivo, o modelo não alocou nenhum helicóptero, independentemente das funções objetivos subsequentes; e quando a redução de atrasos é atribuída como a função objetivo principal, seguida pela redução de helicópteros, o mesmo ocorreu, gerando 3 soluções idênticas, das quais apenas uma foi considerada como solução não-dominada. No entanto, essa limitação não ocorre quando as restrições adicionais R1 ou R2 são inseridas, uma vez que as soluções idênticas não alocam voos, permitindo que, ao introduzir estas restrições, as soluções da abordagem lexicográfica se tornem distintas. Em contrapartida, os pesos utilizados

para λ_1 , λ_2 e λ_3 , conforme mostrado na Tabela 5.2, foram eficazes na geração de soluções variadas na fronteira de Pareto. No entanto, nas instâncias menores, com 9, 10 e 12 voos, não foi possível encontrar 10 soluções não-dominadas, enquanto nas instâncias maiores, o método conseguiu identificar o número esperado de soluções não-dominadas.

Como mostrado na Tabela 5.3, as instâncias menores, com até 15 voos, apresentam resultados ótimos para todas as abordagens. A partir da instância com 20 voos, no entanto, nem todas as soluções ótimas são identificadas entre as soluções não-dominadas. O maior *gap* encontrado foi na Instância I37, com 11,81%, na qual foram encontradas 10 soluções ótimas dentre as 14 soluções não-dominadas. Por outro lado, a instância com o menor número de soluções ótimas foi a I47, que apresentou apenas 5 soluções ótimas dentre as 15 soluções não-dominadas, além de ter registrado o maior tempo computacional, de 41043 segundos. Uma comparação entre resultados obtidos com o modelo sem as restrições adicionais e com a utilização de R1 e R2 não seria adequada, uma vez que as soluções obtidas são fundamentalmente diferentes.

Tabela 5.4 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens TL1, TL2 e TL3.

Inst.	TL1					TL2					TL3				
	N	ND	SO	GAP(%)	Tempo	ND	SO	GAP(%)	Tempo	ND	SO	GAP(%)	Tempo	ND	SO
I9	16	8	8	0.00	1	8	8	0.00	1	8	8	0.00	2		
I10	16	8	8	0.00	2	8	8	0.00	2	8	8	0.00	2		
I12	16	6	6	0.00	2	6	6	0.00	2	6	6	0.00	3		
I15	16	14	14	0.00	579	14	14	0.00	603	14	13	1.26	328		
I20	16	14	13	2.22	5880	14	12	3.95	1926	14	11	4.10	1242		
I24	16	14	8	5.55	21975	14	8	5.67	4032	14	8	5.69	2149		
I30	16	14	10	5.66	17774	14	8	6.52	4229	14	7	9.24	2449		
I35	16	14	11	9.46	15123	14	9	10.09	2744	14	9	10.24	1583		
I37	16	14	10	11.82	17902	14	7	11.94	3472	14	7	11.96	1976		
I38	16	14	10	1.85	18193	14	8	5.60	5075	14	6	6.50	2956		
I40	16	14	8	6.56	23253	14	8	8.11	5147	14	8	11.46	2949		
I42	16	14	8	4.94	25517	14	6	6.02	4724	14	6	6.03	2917		
I45	16	14	6	4.64	28997	14	6	8.72	4905	14	6	8.73	2854		
I46	16	14	9	3.51	19753	14	7	4.23	4453	14	7	6.67	2444		
I47	16	14	8	5.31	23717	14	8	8.86	5281	14	7	8.94	2673		

Devido à urgência do problema de reagendamento de voos, que exige que o agendamento do dia seguinte seja definido ao final do expediente do dia atual, a agilidade de resposta é um fator importante. A Tabela 5.4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com diferentes limites de tempo computacional. Com um limite de 3600 segundos por iteração, o tempo total necessário para resolver instâncias com maior número de voos e helicópteros é elevado. Além disso, a análise revelou que a quantidade de soluções ótimas encontradas com o limite de tempo TL1 foi semelhante àquela encontrada com TL2 e TL3, com uma diferença máxima de apenas duas soluções ótimas a menos

entre TL1 e TL2 e apenas a instância I38 apresentou uma diferença acima de dois valores entre TL1 e TL3, apresentando uma redução de quatro soluções ótimas. Também foi observado que as diferenças no *GAP* computacional entre os diferentes limites de tempo são relativamente pequenas, com variações inferiores a 5%.

Tabela 5.5 – Resultados detalhados para a instância I38.

Sol.	TL1					TL2					TL3				
	FO1	FO2	FO3	GAP	Tempo	FO1	FO2	FO3	GAP	Tempo	FO1	FO2	FO3	GAP	Tempo
1	5120	0	0	0.00	1	5120	0	0	0.00	1	5120	0	0	0.00	1
2	4080	20	1360	0.00	26	4080	20	1360	0.00	28	4080	20	1360	0.00	33
3	3840	100	0	0.00	1	3840	100	0	0.00	1	3840	100	0	0.00	1
4	3200	40	2815	1.84	3600	3200	40	2825	2.02	600	3200	40	2825	2.06	300
5	2800	120	475	1.69	3600	2800	120	475	1.70	600	2800	120	475	1.70	300
6	2720	80	1565	0.00	490	2720	80	1565	0.00	517	2720	80	1570	2.69	300
7	2320	60	4860	0.00	376	2320	60	4860	0.00	383	2320	60	4860	0.38	300
8	2160	80	3385	1.47	3600	2160	80	3385	1.47	600	2160	80	3390	6.50	300
9	2000	120	1895	1.85	3600	2000	120	1895	4.46	600	2000	120	1895	4.49	300
10	1280	100	5205	0.00	1249	1280	100	5205	3.37	600	1280	100	5205	3.37	300
11	1280	140	3080	0.00	240	1280	140	3080	0.00	253	1280	140	3080	0.00	256
12	320	160	5730	0.00	1126	400	160	5660	5.60	600	400	160	5660	5.60	300
13	0	160	7885	0.00	126	0	160	7885	0.00	131	0	160	7885	0.00	120
14	0	220	4945	0.00	146	0	220	4945	0.00	155	0	220	4945	0.00	142

Na Tabela 5.5 são detalhados os resultados da instância I38, avaliados sob diferentes limites de tempo (TL1, TL2 e TL3). Destacados em negrito estão as soluções que sofreram alterações com a redução do tempo computacional. A tabela segue a mesma ordem dos resultados obtidos com os pesos atribuídos aos valores de λ_1 , λ_2 e λ_3 , conforme descrito na Tabela 5.2, e os resultados da programação hierárquica de metas são apresentados na mesma sequência para TL1, TL2 e TL3. Observa-se que a primeira função objetivo, relacionada à redução de transferência de voos, exibe uma única variação: um voo com peso 80 é transferido para o dia seguinte, mas isso resulta em uma redução no atraso em TL2 e TL3. As demais funções objetivo apresentam apenas pequenas variações, com um aumento máximo de 10 minutos entre TL1 e os outros limites de tempo. Notavelmente, a solução 8, que tem o maior GAP computacional em TL3, apresenta um aumento total de apenas 5 minutos em comparação com TL1 e não sofre alterações em relação a TL2.

No método de Lokman e Köksalan foram definidos valores para $\epsilon = 0,0001$ a serem utilizados na função objetivo definida em (5.7). Este método visa buscar todas as soluções não-dominadas, e foi estabelecido um limite de tempo computacional de 3600 segundos para cada solução. Foram analisadas três diferentes abordagens a esta metodologia. Primeiramente, foram encontradas todas as soluções não-dominadas de cada instância. Em seguida, foram adicionadas as restrições adicionais R1 e R2 para gerar

apenas uma parte das soluções na fronteira de Pareto. A R1 introduz a restrição (5.10), que garante que ao menos uma quantidade mínima de voos, relacionada ao peso específico dos voos de tabela e de comitiva do dia, seja alocada. A R2 limita uma quantidade de voos a serem realizados, representada pela restrição (5.11). Esta restrição estipula que o número mínimo de voos a serem realizados deve ser igual à quantidade de voos de tabela e de comitiva da instância analisada. A Tabela 5.6 mostra o número de vezes que o modelo foi solucionado (N); quantidade de soluções não-dominadas encontradas (ND); quantidade de soluções ótimas dentre as não dominadas (SO); maior *GAP* dentre as soluções não ótimas (*GAP*); e o tempo computacional necessário para gerar os resultados.

Tabela 5.6 – Resultados obtidos para as instâncias nas abordagens Sem R1/R2, Com R1 e Com R2.

Inst.	Sem R1/R2					Com R1					Com R2				
	N	ND	SO	GAP (%)	Tempo	N	ND	SO	GAP(%)	Tempo	N	ND	SO	GAP(%)	Tempo
I9	31	12	12	0.00	14	23	9	9	0.00	5	15	6	6	0.00	4
I10	34	13	13	0.00	8	23	9	9	0.00	7	14	5	5	0.00	6
I12	24	9	9	0.00	8	10	4	4	0.00	5	6	2	2	0.00	4
I15	139	59	59	0.00	185	111	48	48	0.00	149	78	32	32	0.00	121
I20	394	176	176	0.00	5852	379	170	170	0.00	5696	371	165	165	0.00	5608
I24	454	199	199	0.00	9019	412	183	183	0.00	8370	410	176	176	0.00	8535
I30	550	251	251	0.00	10622	539	243	243	0.00	10148	507	230	230	0.00	9572
I35	431	195	195	0.00	1685	359	166	166	0.00	1381	233	104	104	0.00	1318
I37	269	118	118	0.00	3905	138	63	63	0.00	2257	118	53	53	0.00	2157
I38	738	340	335	2.42	26609	688	320	315	2.42	26069	661	304	299	2.42	25594
I40	739	329	321	1.14	40521	642	256	250	1.14	30590	587	229	223	1.14	28857
I42	737	324	324	0.00	40251	626	276	276	0.00	35976	579	234	234	0.00	31548
I45	717	326	320	2.28	41406	635	294	288	2.28	37657	577	261	255	2.28	35789
I46	752	359	354	2.14	42568	689	298	293	2.14	40215	602	270	265	2.14	38954
I47	802	385	376	3.12	47521	712	301	294	3.12	42587	674	274	268	3.12	40219

Na Tabela 5.6, observa-se que o número de vezes que o modelo é solucionado é sempre mais do que o dobro da quantidade de soluções não-dominadas encontradas para cada instância, o que está dentro da estimativa prevista pelo método, variando de $ND + 1$ a $\frac{(ND+1)(ND+2)}{2}$. Instâncias maiores, com um número maior de voos e helicópteros, apresentam um maior número de soluções não-dominadas e, conseqüentemente, demandam mais tempo computacional. A variação no número de soluções não-dominadas entre o método completo e os métodos com as restrições adicionais é significativa em algumas instâncias. Por exemplo, na instância I20, a aplicação de R1 reduz o número de soluções não-dominadas em 6, e com R2 reduz em 11, essa variação modesta é atribuída à quantidade de voos de tabela e comitiva na instância, que representa menos da metade dos voos totais, limitando assim a eficácia da utilização das restrições adicionais. Em contraste, na instância I37, há uma redução drástica no número de soluções não-dominadas, passando de 118 para apenas 53 com a aplicação da restrição R2. O tempo computacional também diminui consideravelmente em algumas instâncias, como I40 e I45, evidenciando a eficiência da utilização das restrições adicionais na redução do espaço de busca e no tempo necessário

para encontrar soluções.

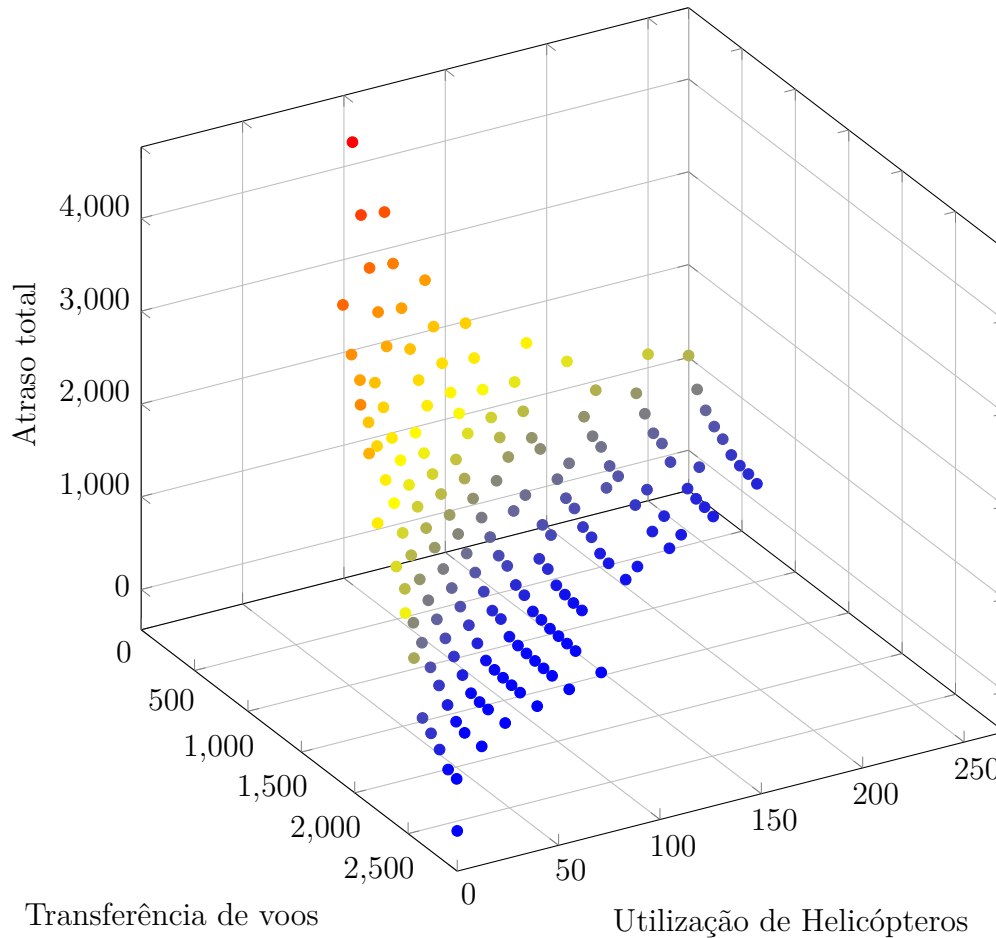
A Tabela 5.6 também destaca a quantidade de soluções ótimas encontradas para cada instância, evidenciando que todas as soluções não dominadas foram identificadas nas instâncias com menos de 37 voos, bem como na instância I42. Em contraste, as instâncias I38, I40, I45, I46 e I47 apresentaram algumas soluções com *gap* de otimalidade diferente de 0. Dentre elas, a instância I47 destacou-se por ter a maior proporção de soluções não ótimas, com apenas 9 soluções em um total de 385 soluções não-dominadas encontradas, apresentando um *GAP* máximo de 3,12%.

A Figura 5.1 apresenta todos os pontos não-dominados obtidos a partir do método de Lokman e Köksalan para a instância I20, sem a utilização das restrições adicionais R1 e R2. O gráfico tridimensional ilustra a relação entre a quantidade de voos transferidos, a utilização de helicópteros e o atraso total. Essa visualização oferece uma perspectiva clara das opções disponíveis para o tomador de decisão, possibilitando a avaliação de diferentes estratégias operacionais. O tomador de decisão pode escolher usar menos helicópteros, o que implicaria em maiores atrasos, ou, em situações de maior urgência, optar por aumentar o número de helicópteros para reduzir os atrasos. O gráfico também permite a avaliação da transferência de voos para dias subsequentes, o que pode reduzir atrasos em outros voos ou minimizar o número de helicópteros necessários. Assim, a figura proporciona uma compreensão detalhada das alternativas viáveis, ajudando na escolha da solução mais adequada às necessidades da instância analisada. Na Figura 5.1, o atraso é expresso em minutos, e a utilização de helicópteros é calculada com base nos pesos atribuídos a cada helicóptero, conforme descrito no início desta seção.

A Figura 5.2, por sua vez, também ilustra os pontos não-dominados da instância I20, porém obtidos a partir do método de Chebyshev, sem a utilização das restrições adicionais R1 e R2. Com esse método, foram encontrados 14 pontos, e ao compará-los com os pontos obtidos pelo método de Lokman e Köksalan, observou-se que 13 deles coincidem. Apenas um ponto se diferenciou, o que pode ser explicado pelo *gap* de otimalidade de 2,22% em uma das soluções obtidas pelo método de Chebyshev, conforme apresentado na Tabela 5.4. Ao comparar as duas figuras, é possível notar similaridades na forma geral, embora a figura obtida pelo método de Lokman e Köksalan apresente 176 pontos na superfície de Pareto, enquanto a do método de Chebyshev contém apenas 14 pontos.

Tanto o método de Chebyshev ponderado aumentado quanto o método de Lokman e Köksalan oferecem soluções eficientes para o problema em questão, cada um com suas características e vantagens específicas. O primeiro método proporciona maior flexibilidade ao permitir o controle sobre o número de execuções do modelo, ajustando os pesos atribuídos às funções objetivo. Isso possibilita uma definição mais precisa da região de

Figura 5.1 – Pontos não-dominados para a instância I20 com a utilização do método de Lokman e Köksalan

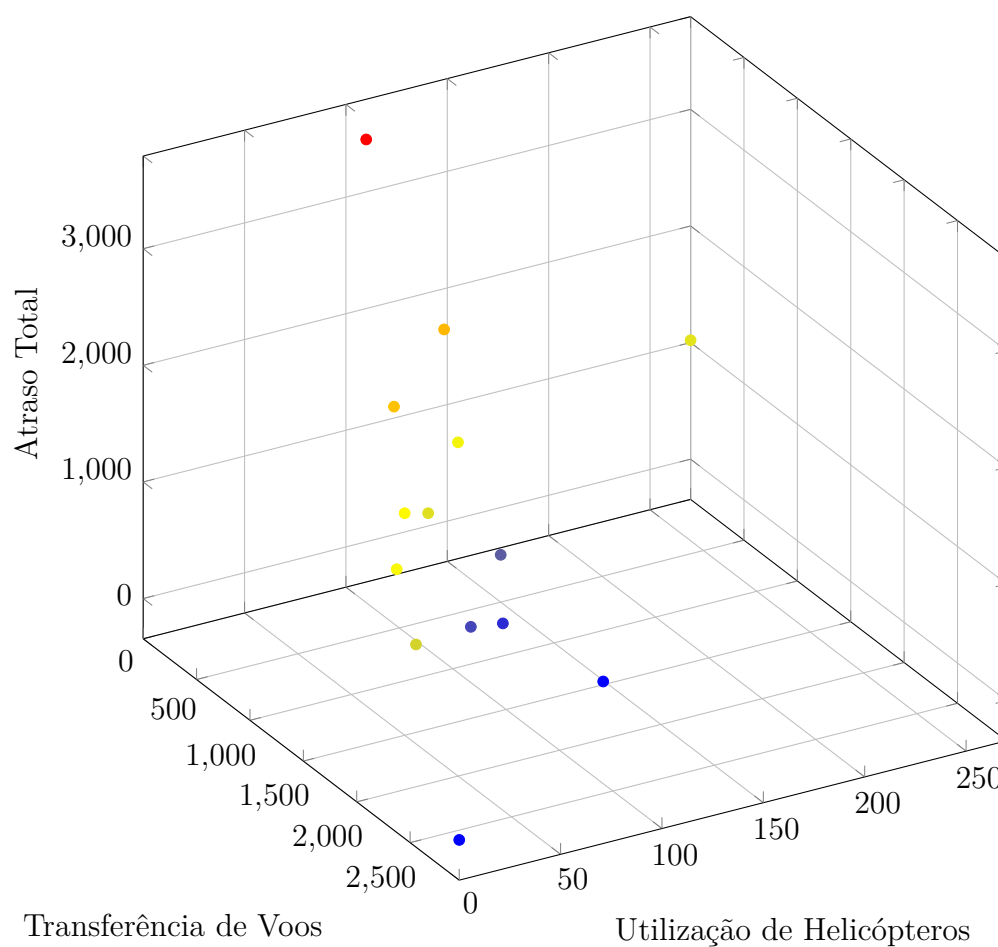


Pareto em que se deseja focar, permitindo ao tomador de decisão escolher a solução de acordo com as preferências específicas. Além disso, a utilização de restrições adicionais, como as restrições R1 e R2 apresentadas em (5.10) e (5.11), no modelo pode ser uma ferramenta adicional para refinar o processo e concentrar as soluções nas regiões mais relevantes.

Por outro lado, o método de Lokman e Köksalan é eficaz em encontrar todas as soluções não-dominadas para o problema, o que, embora seja vantajoso em termos de abrangência, pode resultar em uma quantidade excessiva de opções para o tomador de decisão. Em contextos como o de reagendamento de voos de helicópteros, onde a agilidade na resposta é essencial, a grande quantidade de alternativas pode tornar o processo de tomada de decisão mais complexo e demorado. Assim, a introdução de restrições específicas para instâncias particulares surge como uma abordagem desejável para otimizar o processo decisional, tornando-o mais eficiente e alinhado com as exigências práticas do problema.

Em suma, a escolha do método e das abordagens adicionais, como a utilização de restrições para limitar o espaço de soluções, dependerá das necessidades específicas do

Figura 5.2 – Pontos não-dominados para a instância I20 com a utilização do método de Chebyshev



problema e da capacidade de balancear a precisão das soluções com a eficiência computacional exigida, especialmente em cenários com alta urgência, como o reagendamento de voos.

6 MODELO MATEMÁTICO ESTOCÁSTICO

Neste capítulo, aborda-se uma versão estocástica do presente ARP, considerando incerteza nos tempos de voo dos helicópteros entre aeroportos e unidades marítimas, assim como nos tempos de retorno destes helicópteros aos aeroportos. O tempo de voo de um helicóptero pode variar significativamente devido a fatores como condições meteorológicas adversas, tipo da aeronave e variações no peso. Se essas incertezas não forem adequadamente incorporadas ao modelo matemático, podem ocorrer disrupções operacionais, resultando em soluções com inviabilidade de alguns voos, com impactos negativos na pontualidade das operações. Para lidar com essas incertezas, foram utilizados modelos matemáticos de programação estocástica com cenários, que permitem explorar diferentes possíveis realizações das variáveis aleatórias. Neste capítulo, são explorados dois diferentes modelos de programação estocástica que fazem uso dessa abordagem de cenários.

O primeiro modelo (M1) consiste em um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso. No primeiro estágio, são tomadas decisões antecipadas, determinando quais voos serão realizados e quais helicópteros serão escolhidos para atendê-los. No segundo estágio, após a realização da variável aleatória (ou seja, a ocorrência de um cenário ω para o problema), são definidos os horários de partida dos voos escolhidos no primeiro estágio e, se necessário, caso os helicópteros escolhidos no primeiro estágio não sejam suficientes para atendê-los, pode-se recorrer à utilização de helicópteros adicionais, aqui denominados emergenciais. Esses helicópteros emergenciais representam ações de contingência, acionadas apenas em cenários ω que demandam recursos adicionais para garantir a execução dos voos planejados no primeiro estágio. Contudo, a utilização destes helicópteros emergenciais implica um custo significativamente mais elevado em comparação com os helicópteros disponíveis no primeiro estágio. Dessa forma, o segundo estágio permite a adaptação dos cronogramas de voo às condições específicas de cada cenário, assegurando a viabilidade operacional mesmo diante de incertezas.

O modelo M1 incorpora todos os conjuntos e parâmetros do modelo determinístico apresentado no Capítulo 4. Em relação às suas variáveis, mantêm-se aquelas relacionadas à alocação de voos ($K_i \forall i \in \mathcal{I}$) e à utilização de helicópteros ($V_h \forall h \in \mathcal{H}$), que representam as decisões do primeiro estágio. Adicionalmente, o modelo introduz variáveis de replanejamento específicas para cada cenário $\omega \in \Omega$, onde Ω é o conjunto de cenários possíveis. Essas variáveis incluem a utilização de helicópteros emergenciais, que são acionados apenas em cenários onde a demanda operacional excede a capacidade dos helicópteros alocados no primeiro estágio, garantindo a execução dos voos alocados no primeiro estágio. Além

disso, os valores das variáveis relacionadas aos horários de partida dos voos são definidos no segundo estágio, permitindo que os cronogramas de voos sejam ajustados de acordo com as condições específicas de cada cenário $\omega \in \Omega$. Essa flexibilidade é essencial para garantir que os voos alocados no primeiro estágio sejam executados de maneira viável após a realização das variáveis aleatórias do segundo estágio, mesmo diante de incertezas nos tempos de voo ou na disponibilidade de recursos. Essa estrutura de dois estágios permite que o modelo responda de forma flexível às incertezas, assegurando a viabilidade operacional mesmo em situações adversas, enquanto minimiza os custos associados ao uso de recursos emergenciais. Abaixo estão descritos os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão do modelo:

Conjuntos:

Ω Conjunto de todos os cenários ω .

$\mathcal{H}_e$ Subconjunto de helicópteros emergenciais h .

Parâmetros:

$\bar{P}_\omega$ Probabilidade de ocorrer um cenário ω .

$\bar{t}f_i^\omega$ Duração do voo $i \in \mathcal{I}$ para o cenário $\omega \in \Omega$, incluindo o tempo gasto na unidade marítima do voo.

Variáveis de Decisão:

Variáveis de Replanejamento; para cada $\omega \in \Omega$

$\bar{X}_{ith}^\omega$ 1 se o voo $i \in \mathcal{I}$ for realizado pelo helicóptero $h \in \mathcal{H}$ e partir no período $t \in \mathcal{T}$, 0 caso contrário;

$\bar{Y}_{th}^\omega$ 1 se o helicóptero $h \in \mathcal{H}$ estiver realizando um voo no período $t \in \mathcal{T}$, 0 caso contrário;

$\bar{Z}_t^\omega$ 1 se uma decolagem do aeroporto ocorrer no período $t \in \mathcal{T}$, 0 caso contrário;

$\bar{V}_h^\omega$ 1 se o helicóptero $h \in \mathcal{H}_e$ for utilizado, 0 caso contrário.

O modelo M1 apresenta um novo parâmetro P_ω referente à probabilidade de ocorrer cada cenário $\omega \in \Omega$. As variáveis de planejamento são V_h e K_i (primeiro estágio)

e as variáveis de replanejamento $\bar{X}_{ith}^\omega$, $\bar{Y}_{th}^\omega$, $\bar{Z}_t^\omega$ e $\bar{V}_h^\omega$ (segundo estágio). A seguir, são apresentados os componentes da função objetivo do modelo estocástico M1. A expressão (6.1) consiste em minimizar as transferências de voos, a expressão (6.2) busca minimizar o uso de helicópteros dos tipos *normal*, *pool* e *spot* definidos no primeiro estágio e helicópteros *emergenciais* para cada cenário $\omega \in \Omega$ no segundo estágio, e a expressão (6.3) define a minimização dos atrasos em relação aos cenários $\omega \in \Omega$. A redução de atrasos e a nova variável relativa aos helicópteros adicionais são ponderadas pela probabilidade de ocorrência de cada cenário, com o objetivo de otimizar a alocação de recursos e garantir a viabilidade das operações. As restrições do modelo são apresentadas nas expressões (6.4) a (6.17).

$$\min f_1 = W_1 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} K_i + W_2 \sum_{i \in \mathcal{I}^2} K_i + W_3 \sum_{i \in \mathcal{I}^1} K_i + W_4 \sum_{i \in \mathcal{I}^0} K_i \quad (6.1)$$

$$\min f_2 = W_5 \sum_{h \in \mathcal{H}^s} V_h + W_6 \sum_{h \in \mathcal{H}^p} V_h + W_7 \sum_{h \in \mathcal{H}^n} V_h + W_8 \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{h \in \mathcal{H}^e} p_\omega \bar{V}_h^\omega \quad (6.2)$$

$$\min f_3 = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} p_\omega c(t - r_i) \bar{X}_{ith}^\omega \quad (6.3)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega + K_i = 1, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.4)$$

$$\bar{Z}_t^\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.5)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} (t - r_i) \bar{X}_{ith}^\omega \leq d, \forall i \in \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^C, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.6)$$

$$\bar{Y}_{th}^\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_h} \sum_{t' = t, t-1, \dots, \max(r_i, t - (\bar{f}_i^\omega - 1) - tat)} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall t \in \mathcal{T}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.7)$$

$$\bar{Y}_{th}^\omega \leq |\mathcal{T}| V_h, \forall h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_e, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.8)$$

$$\bar{Y}_{th}^\omega \leq |\mathcal{T}| \bar{V}_h^\omega, \forall h \in \mathcal{H}_e, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
t' \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega &\geq t \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^s + \frac{\bar{t}f_i^\omega - tu_i}{2} + tu_i - \frac{\bar{t}f_j^\omega - tu_j}{2} \\
&\quad - |\mathcal{T}| \left(2 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega - \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega \right), \\
&\quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall i, j \in \mathcal{I}_p, i \neq j, \forall t, t' \in \mathcal{T}, t' > t, \forall \omega \in \Omega;
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t'=1}^{t-1} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega &\leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in (\mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2) \cap \mathcal{I}_p, \\
&\quad \forall j \in \mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}_p \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega;
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t'=t+1}^{|\mathcal{T}|} \bar{X}_{jt'h}^\omega &\leq 1 - \bar{X}_{ith}^\omega, \forall i \in \mathcal{I}^C, \forall j \in \mathcal{I}, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}, \\
&\quad \forall h \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j, \forall \omega \in \Omega;
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t'=t+1}^{|\mathcal{T}|} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega &\leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in \mathcal{I}^C \cap \mathcal{I}_p, \\
&\quad \forall j \in \mathcal{I}_p, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega;
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\bar{X}_{ith}^\omega \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \tag{6.14}$$

$$\bar{Y}_{th}^\omega \in \{0, 1\}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \tag{6.15}$$

$$\bar{Z}_t^\omega \in \{0, 1\}, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \tag{6.16}$$

$$\bar{V}_h^\omega \in \{0, 1\}, \forall h \in \mathcal{H}_e, \forall \omega \in \Omega; \tag{6.17}$$

$$\bar{V}_h^\omega \in \{0, 1\}, \forall h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_e, \forall \omega \in \Omega; \tag{6.18}$$

As restrições descritas em (6.4) a (6.18) mantêm as mesmas características das restrições do modelo determinístico, conforme apresentado no Capítulo 4. No entanto, as variáveis de replanejamento utilizadas são específicas para cada cenário. A única adição no modelo foi a restrição (6.9), que estabelece a quantidade de helicópteros emergenciais a serem alocados em cada cenário. Além disso, as restrições de domínio de variáveis do modelo determinístico, apresentadas em (4.17), que definem as variáveis de planejamento ($K_i, \forall i \in \mathcal{I}$), também são incorporadas no modelo estocástico M1.

O modelo estocástico também apresenta restrições de fixação de variáveis, em (6.19) e (6.20), semelhantes às do modelo determinístico de Capítulo 4, porém, novamente, são específicas por cenário.

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ith}^\omega = 0 \quad & \text{se } t < r_i \text{ or } t > r_i + d \text{ or } t > |\mathcal{T}| - \bar{t}f_i^\omega + 1, \\ & \forall i \in \mathcal{I}^0 \cup \mathcal{I}^C, \forall h \in \mathcal{H}_i, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega; \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ith}^\omega = 0 \quad & \text{se } t < r_i \text{ or } t > |\mathcal{T}| - \bar{t}f_i^\omega + 1, \forall i \in \mathcal{I}^2 \cup \mathcal{I}^1, \forall h \in \mathcal{H}_i, \\ & \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (6.20)$$

O segundo modelo (M2) também é um modelo de programação estocástica de dois estágios com recurso, mas com uma abordagem distinta em relação ao manejo dos recursos. No primeiro estágio, são tomadas decisões antecipadas, determinando quais voos serão realizados e alocando os helicópteros necessários para atender a esses voos. Contudo, ao contrário do Modelo M1, neste caso admite-se que não há helicópteros emergenciais disponíveis para situações imprevistas neste modelo M2. No segundo estágio, após a realização da incerteza (ou seja, a ocorrência de um cenário $\omega \in \Omega$), ajustam-se os cronogramas dos voos, levando em consideração a quantidade de helicópteros inicialmente alocada no primeiro estágio. Caso um voo não possa ser atendido com os recursos disponíveis, ele não será realizado no dia e será transferido para o dia seguinte. Essa abordagem, por um lado, elimina a necessidade de recorrer a helicópteros emergenciais da abordagem anterior, mas, por outro lado, impõe uma limitação mais rígida quanto à viabilidade da execução dos voos, uma vez que não há ações de contingência relacionadas ao uso de recursos adicionais para lidar com imprevistos.

O Modelo M2 mantém os mesmos conjuntos, parâmetros e variáveis do modelo M1, com exceção dos conjuntos e variáveis associadas aos helicópteros emergenciais. Em vez disso, são introduzidas novas variáveis para representar a transferência de voos não atendidos para o dia seguinte, caso os recursos alocados no primeiro estágio não sejam suficientes. Esses voos transferidos são considerados no segundo estágio, respeitando as limitações dos helicópteros escolhidos no primeiro estágio. Abaixo estão apresentadas as novas variáveis.

Variáveis de Decisão:

Variáveis de Replanejamento; para cada $\omega \in \Omega$

$\bar{K}_i^\omega$ 1 se o voo $i \in \mathcal{I}$ for transferido para o dia seguinte, 0 caso contrário.

A seguir são apresentados os componentes da função objetivo (6.21) (6.22) (6.23) e restrições (6.24) do modelo M2.

$$\begin{aligned} \min f_1 = & W_1 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} K_i + W_2 \sum_{i \in \mathcal{I}^2} K_i + W_3 \sum_{i \in \mathcal{I}^1} K_i + W_4 \sum_{i \in \mathcal{I}^0} K_i \\ & + \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left[W_9 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} \bar{K}_i^\omega + W_{10} \sum_{i \in \mathcal{I}^2} \bar{K}_i^\omega + W_{11} \sum_{i \in \mathcal{I}^1} \bar{K}_i^\omega + W_{12} \sum_{i \in \mathcal{I}^0} \bar{K}_i^\omega \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\min f_2 = W_5 \sum_{h \in \mathcal{H}^s} V_h + W_6 \sum_{h \in \mathcal{H}^p} V_h + W_7 \sum_{h \in \mathcal{H}^n} V_h \quad (6.22)$$

$$\min f_3 = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} p_\omega c(t - r_i) \bar{X}_{ith}^\omega \quad (6.23)$$

O primeiro componente da função objetivo em (6.21) busca minimizar a transferência de voos para o dia seguinte, sendo estes voos categorizados de primeiro e segundo estágio. As variáveis de primeiro estágio determinam se os voos dos tipos comitiva, transferência e de tabela serão transferidos para o dia seguinte, e as variáveis de segundo estágio determinam se em algum cenário os voos de cada tipo serão transferidos para o dia seguinte. A segunda expressão em (6.22) da função objetivo busca reduzir a utilização de helicópteros, e a última expressão em (6.23) define a minimização dos atrasos em relação aos cenários $\omega \in \Omega$. Além disso, a redução de atrasos e a nova variável de transferência de voos são ajustadas para refletir as características de cada cenário específico, sendo ponderadas pela probabilidade de ocorrência de cada cenário, com o objetivo de otimizar a alocação de recursos no primeiro estágio e garantir a viabilidade das operações.

Em relação às restrições do modelo, este está sujeito às mesmas condições do Modelo M1. No entanto, a restrição (6.9), que se referia aos helicópteros emergenciais, foi removida. Além disso, a restrição (6.4) foi substituída pela (6.24), para acomodar a transferência de voos para o dia seguinte, considerando as especificidades de cada cenário. E as restrições em (6.17) e (6.18) referentes ao domínio da variável de helicópteros emergenciais foram removidas e no lugar delas foi adicionada a restrição (6.25) referente ao domínio da nova variável associada à transferência de voos nos diferentes cenários. Portanto o modelo M2 apresenta as expressões (6.21), (6.22) e (6.23) como funções objetivo, sujeito às restrições em (6.5) a (6.8), (6.10) a (6.17), (6.19), (6.20), (6.24), (6.25), (4.16) e (4.17)

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega + K_i + \bar{K}_i^\omega = 1, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.24)$$

$$\bar{K}_i^\omega \in \{0, 1\}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega. \quad (6.25)$$

Assim como no modelo determinístico apresentado no Capítulo 4, foram adotados critérios lexicográficos para os modelos estocásticos. Inicialmente, no modelo M1, foram incorporados os critérios lexicográficos (i) , (ii) e (iii) nas expressões da função objetivo. A hierarquização da função objetivo foi definida da seguinte maneira: (i) a expressão em (6.1), que se refere às transferências de voos para o dia seguinte; (ii) a expressão em (6.2), relacionada à utilização de helicópteros, tanto de primeiro quanto de segundo estágio; e, por fim, (iii) a expressão (6.3), que aborda o atraso total, definido para cada cenário $\omega \in \Omega$. O critério (i) tem prioridade sobre o critério (ii) , que, por sua vez, tem prioridade sobre o critério (iii) , sendo que não há *trade-off* entre eles. Os pesos W_1 a W_4 em (6.1) são parâmetros do modelo, responsáveis por diferenciar os tipos de voos transferidos no critério (i) , com a hierarquia $W_1 > W_2 > W_3 > W_4$. De maneira análoga, os pesos W_5 a W_8 são utilizados para distinguir os tipos de helicópteros no critério (ii) . Neste contexto, os helicópteros emergenciais do modelo M1 recebem um peso maior, dado que eles são alocados em cenários como ação de contingência, sendo necessários em situações emergenciais. Assim, a hierarquia de pesos é definida como $W_8 > W_5 > W_6 > W_7$.

No segundo modelo estocástico (M2) também foram incorporados critérios lexicográficos (i) , (ii) e (iii) do modelo determinístico nas expressões da função objetivo. Definidos da seguinte maneira: (i) a expressão em (6.21), que se refere às transferências de voos para o dia seguinte, com variáveis de primeiro e segundo estágio; (ii) a expressão em (6.22), relacionada à utilização de helicópteros; e, finalmente, (iii) a expressão (6.23), que aborda o atraso total, definido para cada cenário $\omega \in \Omega$. A prioridade de (i) sobre (ii) e de (ii) sobre (iii) permanece inalterada, sem a existência de *trade-off* entre eles. Os pesos W_1 a W_4 e W_9 a W_{12} em (6.21) são parâmetros do modelo, responsáveis por diferenciar os tipos de voos transferidos no critério (i) , novamente as variáveis de segundo estágio tem um peso maior, pois referem-se a ações de contingência. A hierarquia é $W_9 > W_{10} > W_{11} > W_{12} > W_1 > W_2 > W_3 > W_4$. Da mesma forma, os pesos W_5 a W_7 são utilizados para distinguir os tipos de helicópteros no critério (ii) , assim, a hierarquia de pesos é definida como $W_5 > W_6 > W_7$.

O reagendamento de voos apresenta desafios significativos em comparação com o agendamento inicial de voos, especialmente quando a entrega rápida de uma boa solução é imperativa. Essa complexidade se deve à necessidade de executar procedimentos de reagendamento no dia anterior aos voos pretendidos, exigindo comunicação oportuna com os passageiros sobre os detalhes atualizados dos voos e garantindo a prontidão operacional dos helicópteros. Para resolver efetivamente o modelo de tempo discreto, definimos duas abordagens distintas para cada modelo estocástico M1 e M2, denominadas de M1-E1, M1-E2, M2-E1, M2-E2. A principal motivação para a formulação dessas abordagens é otimizar o uso dos recursos computacionais, visando reduzir o tempo de obtenção das

soluções sem comprometer muito sua qualidade. Essa comparação sistemática permite uma avaliação da eficiência e da prontidão no tratamento de cenários de reagendamento.

As abordagens M1-E1 e M2-E1 tratam o modelo de tempo discreto como um único problema de programação linear inteira (ILP), utilizando uma função objetivo escalada com penalidades associadas a cada objetivo. Por outro lado, as abordagens M1-E2 e M2-E2 abordam o problema por meio de uma estratégia de programação por metas hierárquicas baseada nas abordagens do Capítulo 4, fundamentada em um procedimento de três etapas, com modificações e aprimoramentos no modelo matemático. Embora essa abordagem possa resultar em uma perda de otimalidade, ela pode oferecer soluções de alta qualidade com tempos computacionais reduzidos.

6.1 ABORDAGEM M1-E1

A abordagem M1-E1 é baseada na abordagem A1 apresentada no Capítulo 4. Ao invés de solucionar as três funções objetivo do modelo de forma separada, uma alternativa é definir adequadamente penalidades P_1 , P_2 e P_3 para os critérios (6.1), (6.2) e (6.3), respectivamente, com $P_1 \gg P_2 \gg P_3$, e resolver como um único modelo ILP definido por uma única função objetivo, dada por:

$$\begin{aligned} \min f = & P_1(W_1 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} K_i + W_2 \sum_{i \in \mathcal{I}^2} K_i + W_3 \sum_{i \in \mathcal{I}^1} K_i + W_4 \sum_{i \in \mathcal{I}^0} K_i) \\ & + P_2(W_5 \sum_{h \in \mathcal{H}^s} V_h + W_6 \sum_{h \in \mathcal{H}^p} V_h + W_7 \sum_{h \in \mathcal{H}^n} V_h + W_8 \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{h \in \mathcal{H}^e} p_\omega \bar{V}_h^\omega) \\ & + P_3(\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} p_\omega c(t - r_i) \bar{X}_{ith}^\omega). \end{aligned} \quad (6.26)$$

A determinação dos valores das penalidades P_1 , P_2 e P_3 é crucial para assegurar que as prioridades hierárquicas entre os critérios sejam adequadamente respeitadas. Em outras palavras, é necessário garantir que o critério (i) tenha prioridade sobre o critério (ii), e este, por sua vez, sobre o critério (iii). No modelo, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ e $\bar{f}_3$ correspondem aos resultados das três funções objetivo, sendo que $\bar{f}_1$ refere-se ao valor associado ao primeiro critério, $\bar{f}_2$ ao segundo, e $\bar{f}_3$ ao terceiro critério. Assim, a primeira abordagem consiste em resolver o modelo ILP definido pela função objetivo (6.26), juntamente com as restrições de (6.4) a (6.20) e (4.17). O valor ótimo obtido, expresso como $\bar{f} = P_1 \bar{f}_1 + P_2 \bar{f}_2 + P_3 \bar{f}_3$, também se aplica ao modelo de tempo discreto original, cujo valor ótimo é dado por $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3$.

6.2 ABORDAGEM M1-E2

A abordagem M1-E2 também utiliza os três critérios apresentados em (6.1), (6.2) e (6.3) e as restrições (6.4) a (6.20) e (4.17), mas aplicando a estratégia de programação por metas hierárquicas, baseada na abordagem A3 do Capítulo 4. Para fins de comparação com a abordagem M1-E1, também usamos penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivo em (6.1), (6.2) e (6.3), respectivamente. No entanto, um aprimoramento é utilizado no modelo estocástico M1 com o objetivo de redução do tempo computacional.

Este aprimoramento é uma adaptação da primeira melhoria apresentada no Capítulo 4, na abordagem A3 para o modelo determinístico. O objetivo principal é na redução do conjunto $\mathcal{T}$ e visa calcular o tempo máximo de partida para cada voo $i \in \mathcal{I}$ em cada cenário $\omega \in \Omega$, denominado $Dmax_i^\omega$, de forma a eliminar restrições do modelo. Para calcular $Dmax_i^\omega$, consideramos que: a janela de tempo do aeroporto é aberta exclusivamente para operações diurnas; voos de tabela e de comitiva podem ser atrasados por até 4 horas no máximo; e voos transferidos com a mesma unidade de destino que voos não transferidos devem ocorrer antes.

Assim como no modelo determinístico, este aprimoramento pode, em alguns casos, acarretar uma perda de otimalidade. Como os voos de transferência devem ocorrer antes dos voos de tabela ou de comitiva destinados à mesma unidade marítima, o Algoritmo 2, apresentado a seguir, determina um valor para $Dmax_{i,\omega}$, de modo que os voos de transferência sejam realizados antes dos voos de tabela ou de comitiva para a mesma unidade. Esse algoritmo presume que esses voos de tabela ou de comitiva serão programados para o dia. No entanto, caso esses voos não sejam programados, os voos de transferência destinados à mesma unidade marítima ficarão restritos ao intervalo entre r_i e $Dmax_{i,\omega}$, $\forall i \in \mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2, \omega \in \Omega$, o que pode comprometer a otimalidade da solução.

Algoritmo 2: TEMPO MÁXIMO PARA DECOLAGEM DO VOO $i \in I$ NO

 CENÁRIO $\omega \in \Omega$

Entrada: Parâmetros das instâncias**Saída:** $Dmax_i^\omega$ **início**

Considere $TWum$ ser o último tempo possível para um voo de tabela ou comitiva pousar na UM p , considerando atraso máximo possível;
 Considere $TWmin$ como o tempo mais cedo que um voo não transferido pode pousar na unidade marítima p ;

Considere aux como uma variável auxiliar para o cálculo de $TWum$

para $i \in \mathcal{I}$ **faça**
para $\omega \in \Omega$ **faça**
se $i \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C$ **então**
 $| \quad Dmax_i^\omega = \min(r_i + d, |T| - \overline{tf}_i^\omega + 1);$
fim
se $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ **então**
 $| \quad Dmax_i^\omega = (|T| - \overline{tf}_i^\omega + 1);$
fim**fim****fim**

Considere que o voo $j \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C$ e o voo $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ têm como destino a mesma UM p ;

para $\omega \in \Omega$ **faça**
para $p \in \mathcal{P}$ **faça**
para $j \in \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_C \cap I_p$ **faça**
 $aux = \min(r_j + d, |T| - \overline{tf}_j^\omega + 1)$
 $TWum = aux - tu_j - \frac{(\overline{tf}_j^\omega - tu_j)}{2}$
se $TWmin > TWum$ **então**
 $| \quad TWmin = TWum$
fim**fim**
para $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cap I_p$ **faça**
 $| \quad Dmax_i^\omega = \lceil TWmin + \frac{(\overline{tf}_i^\omega - tu_i)}{2} \rceil$
fim**fim****fim****fim**

A abordagem M1-E2 resolve um modelo ILP em cada um de seus três passos, e os resultados obtidos são usados como valores fixos para o próximo passo. As restrições são ajustadas para cada objetivo particular. Para fins de comparação com a abordagem

M1-E1, também são utilizadas penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivo em (6.1), (6.2) e (6.3), respectivamente.

1. Meta 1: Reduzir os voos transferidos

Este primeiro passo da abordagem M1-E2 segue de perto as restrições da abordagem M1-E1, com algumas modificações que incorporam as melhorias no modelo descritas anteriormente. As restrições (6.4) e (6.11) a (6.13) foram ajustadas para refletir o aprimoramento do modelo. Além disso, as restrições de fixação de variáveis em (6.19) e (6.20) foram substituídas por uma única restrição em (6.31). Por fim, a restrição (6.6) foi excluída, pois o valor de $Dmax_i^\omega$ já cobre essa condição, garantindo que voos de tabela e de comitiva não sofram atrasos superiores a 4 horas. As restrições resultantes são as seguintes:

$$\sum_{t=r_i}^{Dmax_i^\omega} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega + K_i = 1, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega; \quad (6.27)$$

$$\sum_{t'=r_j}^{\min(Dmax_j^\omega, t-1)} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega \leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in (\mathcal{I}^1 \cup \mathcal{I}^2) \cap \mathcal{I}_p, \quad (6.28)$$

$$\forall j \in \mathcal{I}^0 \cap \mathcal{I}_p \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega;$$

$$\sum_{t'=\max(r_j, t+1)}^{Dmax_j^\omega} \bar{X}_{jt'h}^\omega \leq 1 - \bar{X}_{ith}^\omega, \forall i \in \mathcal{I}^C, \forall j \in \mathcal{I}, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (6.29)$$

$$\forall h \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j, \forall \omega \in \Omega;$$

$$\sum_{t'=\max(r_j, t+1)}^{Dmax_j^\omega} \sum_{h \in \mathcal{H}_j} \bar{X}_{jt'h}^\omega \leq 1 - \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega, \forall p \in \mathcal{P}, \forall i \in \mathcal{I}^C \cap \mathcal{I}_p, \quad (6.30)$$

$$\forall j \in \mathcal{I}_p, j \neq i, \forall t \in \mathcal{T}, \forall \omega \in \Omega;$$

$$\bar{X}_{ith}^\omega = 0, \quad \text{se } t < r_i \text{ ou } t > Dmax_i^\omega, \forall i \in \mathcal{I}, \forall h \in \mathcal{H}, \forall \omega \in \Omega. \quad (6.31)$$

Nesta primeira meta da abordagem M1-E2, não são incluídas às variáveis V_h , $\forall h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_e$ e $\bar{V}_h^\omega$, $\forall h \in \mathcal{H}_e$, referentes aos helicópteros devido à falta de relevância para o uso de helicópteros na função objetivo em (6.1), portanto as restrições (6.8), (6.9), (6.17) e (4.16) relacionadas a estas variáveis, não foram incluídas aqui. Então, nesta meta, resolvemos um modelo ILP com a função objetivo (6.1), sujeito às restrições em (6.5), (6.7), (6.10), (6.14) a (6.16), as restrições modificadas (6.27) a (6.31) e uma restrição de domínio de uma variável de planejamento, do modelo determinístico (4.17).

A solução ótima obtida para este modelo ILP mostra a quantidade de voos que não puderam ser agendados para o dia, representados pelas variáveis K_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Para o

próximo passo deste procedimento, o resultado encontrado para essas variáveis é imposto através da fixação de variáveis. As outras variáveis não são fixadas, mas seus valores ótimos, encontrados neste passo, são sugeridos como valores iniciais para resolver o modelo ILP no próximo passo. É importante notar que se um voo não conseguir ser agendado para o dia na solução ótima deste passo, pode haver perda de otimalidade, uma vez que os voos classificados na mesma categoria (ou seja, tipo de voos) apresentam o mesmo peso, mas podem ter diferentes requisitos de helicópteros, duração e unidade de destino, impactando as próximas metas hierárquicas.

2. Meta 2: Reduzir o uso de helicópteros

Esta segunda etapa tem como objetivo reduzir o uso de helicópteros. O modelo ILP é agora definido utilizando a função objetivo (6.2), sujeito a todas as restrições do primeiro passo, incluindo o domínio das variáveis de decisão e as restrições de fixação de variáveis. Além disso, as restrições (6.8), (6.9), (6.17) e (6.18) são adicionadas ao modelo.

A solução ótima deste modelo ILP é então utilizada no modelo do terceiro passo. As variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_e$ são fixadas para a próxima etapa, assim como as variáveis $\bar{V}_h^\omega, \forall h \in \mathcal{H}_e$. As variáveis determinadas na primeira etapa permanecem fixadas com os valores obtidos anteriormente. As demais variáveis não são fixadas, mas seus valores ótimos, encontrados nesta etapa, são sugeridos como valores iniciais para a resolução da próxima meta. É importante observar que a fixação dessas variáveis pode resultar em uma perda de otimalidade, pois, embora os helicópteros do mesmo tipo possuam o mesmo peso, na modelagem matemática, eles podem ter diferentes compatibilidades com os voos, o que pode impactar a última etapa hierárquica do modelo.

3. Meta 3: Reduzir o atraso geral dos voos

Com a definição dos voos a serem realizados e dos helicópteros que serão utilizados, resta, nesta terceira etapa, definir os horários de partida dos voos e também a designação de voos para helicópteros. Portanto, esta terceira meta visa reduzir o atraso total dos voos agendados para o dia e isso é traduzido na função objetivo (6.3).

Nesta última etapa os cenários são solucionados separadamente, com a pré-definição da quantidade de helicópteros e os voos a serem realizados. É possível fazer esta separação dos cenários pois já foram tomadas todas as decisões de primeiro estágio, relacionadas às variáveis $K_i, \forall i \in \mathcal{I}$ e $V_h, \forall h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_e$ que englobam todos os cenários. Então, aqui, são solucionados Ω modelos determinísticos, referente a quantidade de cenários existentes. Os parâmetros com incertezas do modelo estocástico, que são os

tempos de voo $\overline{tf}_i^\omega \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$ são, então, traduzidos em uma quantidade Ω do parâmetro tf_i , utilizado no modelo determinístico.

Em relação às variáveis de segundo estágio, associadas aos cenários, elas deixam de depender diretamente dos cenários e assumem o formato do modelo determinístico. Na etapa anterior, definimos a quantidade de helicópteros emergenciais necessários, que são variáveis de segundo estágio relacionadas aos cenários, e essas variáveis são fixadas nesta etapa. Assim, a fixação ocorre para cada modelo determinístico. Ou seja, a fixação de $\overline{V}_h^\omega, \forall h \in \mathcal{H}_e, \forall \omega \in \Omega$ será realizada para cada $V_h, \forall h \in \mathcal{H}_e$, em cada um dos cenários de Ω . A melhoria implementada nesta etapa, no que diz respeito ao $Dmax_i^\omega \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$, também é convertida para um formato determinístico, o qual acaba sendo idêntico ao utilizado na abordagem A3 do capítulo 4.

A função objetivo em (6.3) é então alterada para um formato determinístico, em (6.32), com a adição da melhoria apresentada no Algoritmo 2. A única referência a cenários neste modelo é em relação ao parâmetro que determina a probabilidade do cenário ocorrer.

$$\min f_3 = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t=r_i}^{Dmax_i} p_\omega c(t - r_i) X_{ith}. \quad (6.32)$$

Os modelos de ILP desta meta são definidos pela função objetivo em (6.32), sujeito às restrições do modelo determinístico em (4.30) a (4.39) e os domínios das variáveis em (4.13) a (4.17). O valor ótimo resulta da soma de todos os resultados de cada meta, sendo que a última meta é solucionada Ω vezes e todas são consideradas.

6.3 ABORDAGEM M2-E1

A abordagem M2-E1 é semelhante à abordagem M1-E1 apresentada na seção 6.1. Ao invés de solucionar as três funções objetivo do modelo estocástico M2 de forma separada, uma alternativa seria definir adequadamente penalidades P_1 , P_2 e P_3 para os critérios (6.21), (6.22) e (6.23), respectivamente, com $P_1 \gg P_2 \gg P_3$, e resolver como um único modelo ILP definido por uma única função objetivo, dada por:

$$\begin{aligned} \min f = & P_1 \left(W_1 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} K_i + W_2 \sum_{i \in \mathcal{I}^2} K_i + W_3 \sum_{i \in \mathcal{I}^1} K_i + W_4 \sum_{i \in \mathcal{I}^0} K_i + \right. \\ & \left. \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left[W_9 \sum_{i \in \mathcal{I}^C} \overline{K}_i^\omega + W_{10} \sum_{i \in \mathcal{I}^2} \overline{K}_i^\omega + W_{11} \sum_{i \in \mathcal{I}^1} \overline{K}_i^\omega + W_{12} \sum_{i \in \mathcal{I}^0} \overline{K}_i^\omega \right] \right) + \quad (6.33) \\ & P_2 \left(W_5 \sum_{h \in \mathcal{H}^s} V_h + W_6 \sum_{h \in \mathcal{H}^p} V_h + W_7 \sum_{h \in \mathcal{H}^n} V_h \right) + P_3 \left(\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \sum_{t \in \mathcal{T}} p_\omega c(t - r_i) \overline{X}_{ith}^\omega \right) \end{aligned}$$

A determinação dos valores das penalidades P_1 , P_2 e P_3 é crucial para assegurar que as prioridades hierárquicas entre os critérios sejam adequadamente respeitadas. Novamente, assim como na abordagem M1-E1 é necessário garantir que o critério (i) tenha prioridade sobre o critério (ii), e este, por sua vez, sobre o critério (iii). No modelo, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ e $\bar{f}_3$ correspondem aos resultados das três funções objetivo, sendo que $\bar{f}_1$ refere-se ao valor associado ao primeiro critério, $\bar{f}_2$ ao segundo, e $\bar{f}_3$ ao terceiro critério. Assim, a primeira abordagem consiste em resolver o modelo ILP definido pela função objetivo (6.34), juntamente com todas as restrições do modelo M2, de (6.5) a (6.8), (6.10) a (6.17), a (6.19) (6.20), (6.24), (6.24), (4.16) e (4.17). O valor ótimo obtido, expresso como $\bar{f} = P_1\bar{f}_1 + P_2\bar{f}_2 + P_3\bar{f}_3$.

6.4 ABORDAGEM M2-E2

A abordagem M2-E2 adota os três critérios apresentados nas equações (6.21), (6.22) e (6.23), assim como as restrições do modelo M2, mas implementa a estratégia de programação por metas hierárquicas, do Capítulo 4. Para fins de comparação com a abordagem M1-E1, também são aplicadas penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivo definidas nas equações (6.21), (6.22) e (6.23). Da mesma forma que na abordagem M1-E2, esta abordagem utiliza o aprimoramento descrito no Algoritmo 2.

Esta abordagem resolve modelos ILP em cada uma das suas três metas hierárquicas, utilizando os resultados obtidos como valores fixos para o próximo passo. As restrições são ajustadas de acordo com cada objetivo específico. Para fins de comparação com a abordagem M2-E1, também são aplicadas penalidades P_1 , P_2 e P_3 sobre as funções objetivo descritas nas expressões (6.21), (6.22) e (6.23), respectivamente.

1. Meta 1: Reduzir os voos transferidos

Nesta primeira meta temos algumas alterações nas restrições do modelo M2 para considerar o aprimoramento. As restrições em (6.4) foi alterada para:

$$\sum_{t=r_i}^{Dmax_i^\omega} \sum_{h \in \mathcal{H}_i} \bar{X}_{ith}^\omega + K_i + \bar{K}_i^\omega = 1, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega \quad (6.34)$$

As outras restrições que sofreram alterações foram as mesmas apresentadas na abordagem M1-E2. Aqui, têm-se como função objetivo a expressão em (6.21), que busca reduzir a quantidade de voos transferidos para os próximos dias. Aqui não são incluídas as variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$ referentes aos helicópteros, portanto as restrições referentes a estas variáveis também não estão neste ILP. Este modelo está sujeito às restrições em (6.5), (6.7), (6.10), (6.14) a (6.16), (6.25), as restrições modificadas

(6.28) a (6.31), (6.34) e uma restrição de domínio de uma variável de planejamento, do modelo determinístico (4.17).

A solução ótima obtida para este modelo ILP mostra a quantidade de voos que não puderam ser agendados para o dia, representados pelas variáveis de primeiro estágio K_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ e as de segundo estágio, $\bar{K}_i^\omega \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$. Para o próximo passo deste procedimento, o resultado encontrado para essas variáveis é imposto através da fixação de variáveis. As outras variáveis não são fixadas, mas seus valores ótimos, encontrados neste passo, são sugeridos como valores iniciais para resolver o modelo ILP no próximo passo. Assim como na abordagem M1-E2, é importante notar que se um voo não conseguir ser agendado para o dia na solução ótima deste passo, pode haver perda de otimalidade pelos mesmos motivos previamente apresentados.

2. Meta 2: Reduzir o uso de helicópteros

Esta segunda etapa tem como objetivo reduzir o uso de helicópteros, com a ressalva de que, no modelo M2, helicópteros emergenciais não são considerados. O modelo ILP é agora formulado com base na função objetivo apresentada em (6.22), sujeito a todas as restrições definidas na primeira meta desta abordagem, incluindo o domínio das variáveis de decisão e as restrições de fixação de variáveis. Além disso, as restrições (6.8) e (6.18), relacionadas aos helicópteros, são incorporadas ao modelo.

A solução ótima obtida para este modelo ILP é então utilizada na terceira meta. As variáveis $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$ são fixadas para a próxima fase. As variáveis determinadas na primeira etapa permanecem fixadas com os valores obtidos previamente. As demais variáveis não são fixadas, mas seus valores ótimos, obtidos nesta etapa, são sugeridos como pontos iniciais para a resolução da próxima meta. Assim como na segunda meta da abordagem M1-E2, é importante ressaltar que a fixação dessas variáveis pode acarretar uma perda de otimalidade, pelos mesmos motivos já expostos anteriormente.

3. Meta 3: Reduzir o atraso geral dos voos

Nesta etapa já estão definidas todas as variáveis de primeiro estágio $K_i, \forall i \in \mathcal{I}$ e $V_h, \forall h \in \mathcal{H}$ que englobam todos os cenários. Portanto, assim como na meta 3 da abordagem M1-E2, nesta etapa, os cenários são solucionados separadamente com a quantidade de helicópteros e os voos a serem realizados já definidos. Então, aqui, são solucionados $|\Omega|$ modelos determinísticos, referentes a quantidade de cenários existentes. Os parâmetros com incertezas do modelo estocástico, que são os tempos de voo $\bar{t}f_i^\omega \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$ são, novamente, traduzidos em uma quantidade $|\Omega|$ do parâmetro tf_i , utilizado no modelo determinístico.

Em relação às variáveis $\bar{K}_i^\omega, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$, que são utilizadas como recursos no modelo estocástico, têm os valores correspondentes a cada cenário $\omega \in \Omega$ fixados.

Assim, os modelos determinísticos associados a cada cenário consideram a informação específica desse cenário, no que diz respeito à quantidade de voos alocados.

Os modelos de ILP desta meta são definidos pela função objetivo em (6.32), sujeito às restrições do modelo determinístico em (4.30) a (4.39) e os domínios das variáveis em (4.13) a (4.17). O valor ótimo resulta da soma de todos os resultados de cada meta, sendo que a última meta é solucionada $|\Omega|$ vezes e todas são consideradas.

6.5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação dos modelos matemáticos estocásticos discutidos anteriormente. Assim como nos capítulos anteriores, todas as abordagens foram codificadas em Julia e resolvidas utilizando o solver IBM CPLEX 22.1.0 com uma tolerância padrão de 0,01% para o *gap* de otimalidade. Todos os experimentos foram executados em um PC com Windows, equipado com um processador Intel Core i7-12700 de 2.10 GHz e 16 GB de RAM. Inicialmente, são descritas as instâncias utilizadas para a condução dos experimentos computacionais e características que abrangem todos os modelos.

Em virtude da complexidade computacional envolvida na resolução dos modelos estocásticos apresentados previamente, as instâncias utilizadas nesta análise diferem daquelas apresentadas nos capítulos anteriores, por terem um número reduzido de voos. Essas instâncias foram elaboradas com base em dados reais fornecidos por uma empresa brasileira do setor de petróleo e gás, visando reproduzir cenários que refletem as condições do mundo real. As instâncias envolvem de 5 a 25 voos diários. A Tabela 6.1 mostra as informações de todas as 15 instâncias utilizadas em termos do número total de voos ($|\mathcal{I}|$), número de helicópteros normais ($|\mathcal{H}^n|$), número de helicópteros *pool* ($|\mathcal{H}^p|$), número de helicópteros *spot* ($|\mathcal{H}^s|$), total de UMs ($|\mathcal{P}|$), número de voos de tabela ($|\mathcal{I}^0|$), número de voos transferidos do dia anterior ($|\mathcal{I}^1|$), número de voos transferidos de dois dias anteriores ou mais ($|\mathcal{I}^2|$), e número de voos de comitiva ($|\mathcal{I}^C|$).

Utilizando a abordagem de programação de metas hierárquicas, conforme descrito no Capítulo 4, foram definidos os mesmos valores de penalidade para os três critérios lexicográficos na função objetivo: $P_1 = 100$, $P_2 = 10$ e $P_3 = 0,01$. Esses valores foram escolhidos de forma a garantir a efetiva imposição da hierarquia de objetivos, em que o primeiro critério tem prioridade sobre o segundo, e o segundo tem prioridade sobre o terceiro. Todas as abordagens utilizaram destes valores de penalidades nas funções objetivo.

Os tomadores de decisão da empresa definiram os seguintes pesos para cada categoria de voo e helicóptero: $W_1 = 320$, $W_2 = 240$, $W_3 = 160$, $W_4 = 80$, $W_5 = 30$,

Tabela 6.1 – Descrição das 15 instâncias utilizadas nos modelos estocásticos

Instâncias	$ \mathcal{I} $	$ \mathcal{H}^n $	$ \mathcal{H}^p $	$ \mathcal{H}^s $	$ \mathcal{P} $	$ \mathcal{I}^0 $	$ \mathcal{I}^1 $	$ \mathcal{I}^2 $	$ \mathcal{I}^C $
I5	5	2	0	0	4	3	1	1	0
I9	9	2	1	0	7	7	1	1	0
I10	10	2	1	0	7	8	1	1	0
I12	12	3	0	0	9	11	1	0	0
I14	14	4	2	1	11	7	4	2	1
I15	15	3	2	2	11	11	2	1	1
I17	17	5	2	1	11	9	5	1	1
I18	18	4	1	1	14	6	10	2	0
I19	19	4	2	2	15	11	5	2	1
I20	20	7	2	3	16	7	10	2	1
I21	21	6	1	2	11	12	6	2	1
I22	22	5	3	1	16	7	13	1	1
I23	23	6	1	3	17	9	11	2	1
I24	24	6	2	2	16	12	7	4	1
I25	25	5	2	3	17	14	9	2	0

$W_6 = 25$, e $W_7 = 20$. Em relação aos pesos das variáveis estocásticas, após a realização de testes computacionais, foi determinado aqui neste trabalho que, para o modelo M1, o peso dos helicópteros emergenciais seria o dobro dos helicópteros do tipo *spot*, resultando em $W_8 = 60$. Além disso, em cada instancia admitiu-se a possibilidade de utilização de até 2 helicópteros emergenciais. Para o modelo M2, os pesos das variáveis de segundo estágio, relacionadas aos voos não agendados para o dia, foram definidos aqui simplesmente como o dobro dos pesos dos voos correspondentes a cada tipo. Assim, os valores para essas variáveis foram definidos como: $W_9 = 640$, $W_{10} = 480$, $W_{11} = 320$ e $W_{12} = 160$. Optou-se por atribuir valores mais altos a essas variáveis de segundo estágio, pois estão relacionadas a recursos que podem ser necessários em cenários específicos, como o aumento da demanda por helicópteros ou o cancelamento de voos previamente agendados, caso tais situações ocorram.

Todas as metodologias do modelo estocástico consideram a discretização do tempo em intervalos de 5 minutos (ou seja, $c = 5$), e todos os parâmetros utilizados para resolver o modelo foram definidos com base nessa discretização. Os seguintes parâmetros foram fornecidos pela empresa: $tat = 9$ períodos de 5 minutos e $d = 48$ períodos de 5 minutos. A janela de tempo do aeroporto é definida de acordo com as previsões de nascer e pôr do sol para o dia. As instâncias I5, I9, I10, I12, I14 e I15 têm uma janela de tempo das 06:55 às 18:00, ou seja, há 134 períodos de 5 minutos cada, enquanto as demais instâncias têm uma janela de tempo das 06:55 às 19:00, ou seja, há 146 períodos de 5 minutos cada.

Devido à limitação de dados históricos disponíveis, foi necessário adotar uma abordagem que refletisse a incerteza associada ao tempo de voo $\bar{t}f_i^\omega, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$ de maneira prática. Embora o volume de dados fosse restrito, observou-se uma repetição significativa de determinados valores para o tempo de voo de um aeroporto a uma mesma

UM, indicando uma concentração de tempos de voo em torno de uma moda bem definida. De acordo com essa observação, verificou-se que as flutuações no tempo de voo em torno da moda estavam restritas a uma variação de até 30% para mais ou para menos. Essa constatação sugeriu que uma distribuição triangular, capaz de capturar essas flutuações, seria apropriada para representar a incerteza associada ao parâmetro incerto. O valor de $\overline{tf}_i^\omega, \forall i \in \mathcal{I}, \forall \omega \in \Omega$ leva em consideração o tempo de parada na UM, denotado por $tu_i, \forall i \in \mathcal{I}$. No entanto, ao incorporar a variação do tempo de voo, o valor do tempo de parada na UM permanece como um parâmetro constante. Ou seja, enquanto a variação no tempo de voo reflete incertezas nos tempos de deslocamento, o tempo de parada na UM é considerado um valor fixo, não sendo influenciado diretamente por essas flutuações.

6.5.1 Geração de Cenários

Como há uma escassez de dados históricos disponibilizados pela empresa, foi necessária a geração de novos dados. Conforme descrito por [Birge e Louveaux \(2011\)](#), métodos de geração de cenários são amplamente empregados na otimização estocástica para aproximar distribuições de probabilidade e representar os possíveis resultados de parâmetros estocásticos, que variam aleatoriamente. Nesse sentido, a geração de cenários foi realizada por meio de simulação de Monte Carlo, utilizando distribuições triangulares. Nessa simulação, os tempos de voo foram modelados com variações de até 30% em relação à moda, refletindo a incerteza observada nos dados. Essa abordagem possibilitou a criação de um conjunto de cenários relativamente adequado para capturar as flutuações nos tempos de voo e alimentar o modelo de forma realista, mesmo diante das limitações de dados reais.

No contexto da otimização estocástica, a grande quantidade de cenários necessária para representar adequadamente a incerteza subjacente frequentemente constitui uma barreira significativa para a obtenção de soluções numéricas eficientes. Isso motiva o uso de técnicas de redução de cenários, em que busca-se identificar um subconjunto menor de cenários, porém ainda representativos, reduzindo a complexidade computacional. [Keutchan et al. \(2023\)](#) aponta que uma das abordagens mais populares é o algoritmo *k-means*, que visa minimizar a soma das distâncias quadráticas dentro de cada *cluster* (i.e., agrupamento de cenários). O centroide de cada *cluster* é representado pela média dos cenários pertencentes ao grupo, o que pode resultar em um ponto que não pertence ao conjunto original de cenários.

A partir das amostras geradas por simulação de Monte Carlo, foi realizada uma comparação entre a seleção aleatória de cenários e a utilização da metodologia *k-means* para definir esses cenários. Num experimento inicial, foram amostrados 500 cenários para as instâncias I5, I9 e I14, com diferentes tempos de voo, variando até 30% em relação

à sua moda. Foram realizados testes com os dois modelos M1 e M2. Com essa amostra, comparamos duas abordagens: (1) selecionar aleatoriamente k cenários dentre todos os cenários gerados e (2) aplicar a técnica de redução de cenários k -means para gerar k cenários a partir de todos os cenários gerados. Foram realizadas 30 rodadas de teste, em cada uma delas foram gerados 500 cenários aleatórios dos quais foram calculados os resultados *in-sample* e *out-of-sample* (e.g., Figura 6.1). O resultado *in-sample* corresponde ao desempenho obtido utilizando os k cenários, sejam aleatórios ou gerados pelo k -means. O valor *out-of-sample* foi calculado ao fixar as variáveis de primeiro estágio, encontradas na amostra de k cenários, e rodar o modelo estocástico, com estas variáveis de primeiro estágio fixas, para todos os 500 cenários gerados em cada rodada pela simulação de Monte Carlo, em que foram considerados todos os cenários com mesma probabilidade de ocorrer. Os testes foram realizados para valores de $k = 1$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 12$ e $k = 15$. Não foram realizados testes com um número maior de cenários devido ao alto custo computacional. A Tabela 6.2 apresenta a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) das 30 rodadas de teste com a utilização do modelo M1 e a instância I14, mostrando os resultados *in-sample* e *out-of-sample* e a diferença da média entre os dois, para as amostras aleatórias e para os cenários gerados pelo k -means. Os resultados obtidos com o modelo M2 para esta instância e com os modelos M1 e M2 para outras instâncias foram semelhantes.

Tabela 6.2 – Comparação das métricas entre os métodos Aleatório e K -means para o modelo M1 na instância I14

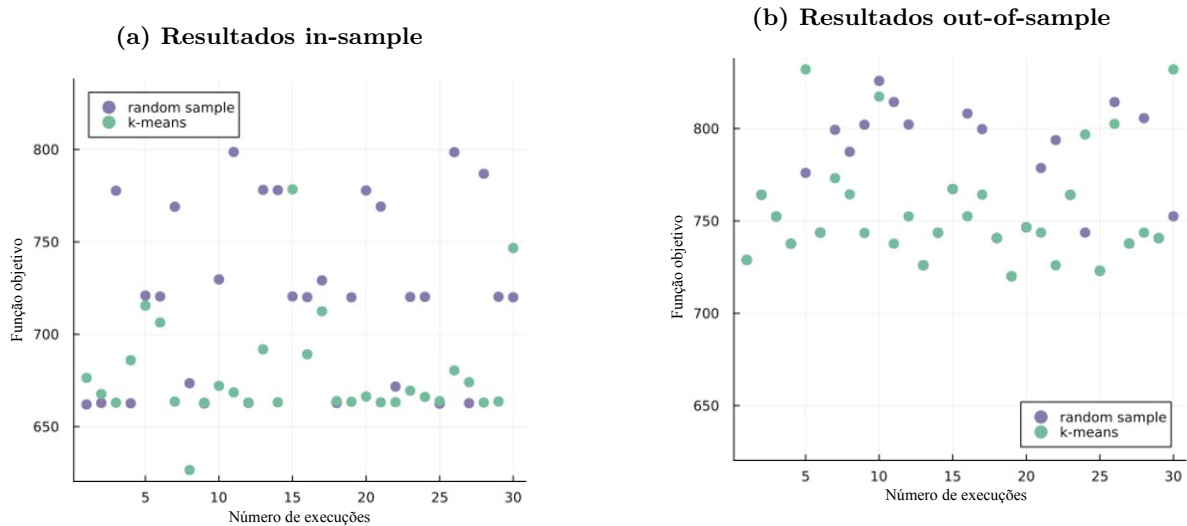
K	Métrica	In-sample		Out-of-sample		Diferença (Out - In)	
		Aleatório	K-means	Aleatório	K-means	Aleatório	K-means
1	Média	641,78	625,73	791,30	800,16	149,52	174,43
	Desvio Padrão	47,71	7,86	24,49	16,82		
	CV (%)	7,43	1,26	3,09	2,10		
5	Média	713,30	666,36	789,68	757,96	76,38	91,60
	Desvio Padrão	59,62	20,76	37,02	23,77		
	CV (%)	8,36	3,12	4,69	3,14		
10	Média	720,72	678,46	768,00	757,28	47,29	78,82
	Desvio Padrão	47,73	29,02	32,11	30,57		
	CV (%)	6,62	4,28	4,18	4,04		
12	Média	741,05	684,47	779,19	759,53	38,14	75,07
	Desvio Padrão	43,36	28,95	37,27	29,75		
	CV (%)	5,85	4,23	4,78	3,92		
15	Média	724,39	690,62	761,14	759,92	36,75	69,30
	Desvio Padrão	38,07	28,93	32,79	31,41		
	CV (%)	5,26	4,19	4,31	4,13		

A partir dos resultados apresentados na Tabela 6.2, observa-se que, ao comparar o método aleatório com o k -means, o desvio padrão e o CV dos resultados obtidos nas 30

rodadas de teste é consistentemente maior no método aleatório, em comparação ao método de clusterização das amostras. Esse padrão é observado tanto nos resultados *in-sample* quanto nos *out-of-sample*. Por exemplo, nos resultados *in-sample*, podemos verificar que com $k = 10$, tem-se um desvio padrão de 47,73 no método de seleção aleatório, enquanto no método *k-means* o desvio padrão é de 29,02. Já nos resultados *out-of-sample* as diferenças são um pouco menores entre os dois métodos, como no mesmo exemplo de $k = 10$, porém, ainda assim, o desvio padrão é menor no método com clusterização da amostra.

Uma análise dos resultados obtidos pelo método *k-means* em relação ao número de cenários k , conforme mostrado, novamente, na Tabela 6.2, revela que o menor desvio padrão ocorre quando $k = 1$. Isso acontece porque, ao reduzir os 500 cenários a apenas um, o valor dos tempos de voo é calculado como a média do tempo de todos os cenários, que variam até 30% em torno da moda. Como consequência, os 30 experimentos realizados produzem resultados muito semelhantes entre si, o que pode levar à falsa impressão de que essa é a melhor escolha para o número de cenários. No entanto, ao comparar as médias dos resultados *in-sample* e *out-of-sample*, observa-se uma grande diferença entre elas. Essa disparidade indica que, ao fixar as variáveis de primeiro estágio, obtidas ao calcular o *in-sample*, para todos os 500 cenários, são necessários helicópteros emergenciais em diversos cenários, o que aumenta significativamente a média nos resultados *out-of-sample*.

Figura 6.1 – Resultado dos 30 experimentos com a instância I14 com $k = 10$

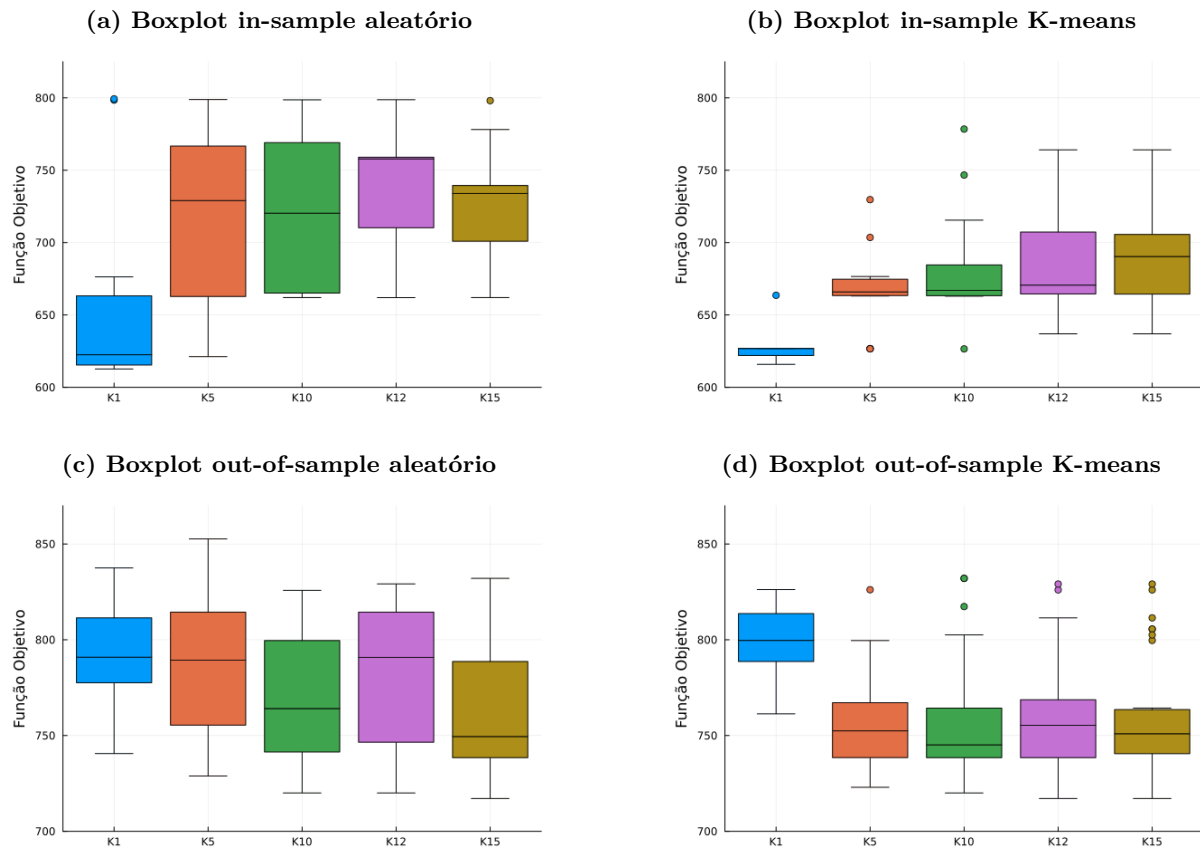


Aumentar o número de cenários considerados reduz a diferença entre a média das soluções, permitindo que, em um cenário com $k = 500$, o resultado *in-sample* iguale ao *out-of-sample*. No entanto, o custo computacional de se trabalhar com 500 cenários é elevado. Høyland e Wallace (2001) ressaltam que, para construir uma árvore de cenários de qualidade, é essencial garantir estabilidade e precisão no valor da função objetivo. Assim, a estabilidade do desvio padrão entre as soluções dos testes realizados a na Tabela 6.2

é fundamental para a validade dos resultados obtidos. Ao comparar os desvios padrão obtidos com $k = 10$, $k = 12$ e $k = 15$ têm-se uma estabilidade no método de clusterização *k-means*, com os valores *in-sample* variando de 28,93 a 29,02 e os valores *out-of-sample* variando de 29,75 a 31,41. Com base nessa análise, foi decidido que a utilização de 10 cenários seria razoavelmente adequada, considerando a complexidade computacional dos modelos estocásticos M1 e M2, e garantindo um bom equilíbrio entre precisão e eficiência computacional

As Figuras 6.1a e 6.1b ilustram os resultados obtidos a partir dos métodos de amostragem aleatória e de clusterização com *k-means*, com $k=10$. O eixo x dos gráficos representa as 30 execuções de teste do modelo estocástico M1, enquanto o eixo y exibe o resultado ótimo obtido em cada experimento, para ambas as amostras. Em alguns casos, os pontos dos dois métodos coincidem, e a cor verde se destaca em relação à cor roxa nessas situações. Há uma maior dispersão nos resultados da amostra aleatória em comparação com o método de clusterização, tanto nos resultados *in-sample* quanto *out-of-sample*.

Figura 6.2 – Comparação entre aleatório e *k-means* - *in-sample* e *out-of-sample*



As Figuras 6.2a, 6.2b, 6.2c e 6.2d apresentam gráficos *boxplot* dos resultados das 30 execuções de teste, com o eixo x representando os valores de k ($k = 1$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 12$ e $k = 15$). Esses gráficos comparam os métodos de seleção de cenários aleatória e *k-means*, tanto *in-sample* quanto *out-of-sample*. Eles ilustram de forma clara os resultados

apresentados na Tabela 6.2 e destacam as diferenças na variação dos resultados obtidos por cada método. Observa-se que as variações são significativamente menores quando o método *k-means* é utilizado, em comparação com o método aleatório para a escolha de cenários.

6.5.2 Resultados Obtidos com os Modelos Estocásticos

A seguir, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação dos dois modelos estocásticos, cada um implementado com suas respectivas abordagens, e uma comparação entre os métodos é realizada. A geração de 1.000 cenários foi realizada por meio de simulação de Monte Carlo, considerando variações de 30% para mais e para menos no tempo de voo em relação à moda. Em seguida, a técnica de clusterização *k-means* foi utilizada para reduzir a amostra a apenas 10 cenários representativos em função dos resultados observados nas seções anteriores. Foi estipulado um limite de tempo de 3600 segundos para a execução de cada abordagem. Para as abordagens que utilizam programação de metas hierárquicas, não há um limite de tempo específico para cada objetivo dentro da abordagem. O tempo restante para cada objetivo é redistribuído para os objetivos subsequentes, até que o tempo total de 3600 segundos seja alcançado.

As Tabelas 6.3 e 6.4 apresentam, para cada instância: o resultado ótimo do modelo determinístico, considerando a moda dos tempos de voo (Det.), o limite inferior (f_{LB}) da primeira abordagem, o limite superior (f), o *gap* de otimalidade (%) calculado como $gap = 100(f - f_{LB})/f$, e o tempo computacional, em segundos, para encontrar os resultados. As abordagens M1-E1 e M2-E1 não apresentam perda de otimalidade, portando foram utilizados os (f_{LB}) destas abordagens para calcular os *gaps* de otimalidade das soluções das abordagens M1-E2 e M2-E2, respectivamente.

Na Tabela 6.3 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do modelo M1, que considera helicópteros emergenciais como recurso no segundo estágio. Ao comparar as duas abordagens, observa-se que, para instâncias com menor número de voos, ambas as abordagens foram capazes de encontrar soluções ótimas ou próximas à otimalidade de forma rápida. No entanto, para instâncias mais desafiadoras, com maior quantidade de voos, a primeira abordagem, que integra todos os critérios em uma única função objetivo, atingiu o limite de tempo de 3600 segundos e apresentou *gaps* de até 16,45%. Por outro lado, a abordagem M1-E2 foi capaz de encontrar boas soluções dentro do tempo computacional estipulado. Embora a otimalidade não possa ser garantida nessa abordagem, ao calcular o *gap* utilizando o limitante inferior obtido na primeira abordagem, observou-se um *gap* menor. Vale destacar que esse *gap* pode ser ainda menor em relação à solução ótima, uma vez que ele foi calculado com base em um limitante inferior para o valor da solução ótima proveniente de soluções factíveis que atingiram o tempo limite

Tabela 6.3 – Tabela de Resultados do Modelo Estocástico M1

Inst.	Det.	Abordagem M1-E1				Abordagem M1-E2		
		f_{LB}	f	GAP	Tempo(s)	f	GAP	Tempo(s)
I5	211,70	313,62	313,62	0,00	22	313,62	0,00	4
I9	402,60	553,01	553,01	0,00	119	553,01	0,00	6
I10	650,30	650,38	650,39	0,00	98	650,38	0,00	8
I12	601,10	601,22	601,22	0,00	123	601,22	0,00	8
I14	626,85	786,77	786,80	0,00	1867	786,83	0,01	802
I15	870,10	1088,69	1212,89	10,24	3600	1112,89	2,17	1082
I17	827,10	928,23	972,41	4,54	3600	972,41	4,54	1411
I18	835,68	801,86	896,74	10,58	3600	836,55	4,15	790
I19	829,75	880,62	880,62	0,00	3248	880,62	0,00	714
I20	1033,8	981,41	1136,38	13,64	3600	1034,68	5,15	609
I21	1029,25	1184,05	1318,14	10,17	3600	1217,94	2,78	2800
I22	1046,00	1021,33	1120,04	8,81	3600	1047,24	2,47	2487
I23	1099,39	1086,68	1298,85	16,34	3600	1100,72	1,28	2568
I24	1048,55	1201,65	1338,11	10,20	3600	1237,97	2,93	1769
I25	1203,13	1164,59	1393,86	16,45	3600	1204,76	3,33	2730

sem prova de otimalidade. Ao compararmos as soluções dos modelos estocásticos com o modelo determinístico, verificamos que os resultados encontrados das soluções dos modelos estocásticos são sempre maiores, assim vemos oportunidade na utilização do método estocástico.

Tabela 6.4 – Tabela de Resultados do Modelo Estocástico M2

Inst.	Det.	Abordagem M2-E1				Abordagem M2-E2		
		f_{LB}	f	GAP	Tempo(s)	f	GAP	Tempo(s)
I5	211,7	402,99	402,99	0,00	17	402,99	0,00	2
I9	402,6	650,21	650,21	0,00	15	650,21	0,00	4
I10	650,3	650,38	650,38	0,00	20	650,38	0,00	5
I12	601,1	601,22	601,22	0,00	83	601,22	0,00	4
I14	626,85	815,51	815,51	0,00	1124	815,54	0,00	620
I15	870,1	1112,86	1112,86	0,00	2041	1112,89	0,00	403
I17	827,1	1015,76	1015,76	0,00	1456	1015,78	0,00	262
I18	835,68	836,55	836,55	0,00	1858	836,55	0,00	351
I19	829,75	880,62	880,62	0,00	2874	880,62	0,00	627
I20	1033,8	1015,4	1034,72	1,87	3600	1034,68	1,86	560
I21	1029,25	1217,92	1238,04	1,63	3600	1217,94	0,00	1058
I22	1045,96	1046,79	1086,87	3,69	3600	1047,24	0,04	1114
I23	1099,4	1088,89	1290,77	15,64	3600	1100,72	1,07	1248
I24	1048,51	1237,87	1484,36	16,61	3600	1237,97	0,01	1312
I25	1203,25	1166,7	1393,42	16,27	3600	1204,76	3,16	1456

A Tabela 6.4 apresenta os resultados do modelo M2, considerando as abordagens M2-E1 e M2-E2, sem a utilização de helicópteros emergenciais e com a transferência de voos para o dia seguinte como recurso de segundo estágio. Os resultados seguem um padrão semelhante ao observado no modelo M1 em relação às duas abordagens. No entanto, no

modelo M2, a primeira abordagem foi capaz de resolver mais instâncias de forma ótima, sugerindo que a introdução de helicópteros emergenciais no modelo M1 tornou mais difícil a obtenção de soluções comprovadamente ótimas. Para as instâncias maiores, ainda foram observados *gaps* de otimalidade de até 16,61%. Por outro lado, na segunda abordagem, os *gaps* de otimalidade foram consideravelmente menores, e as soluções ótimas encontradas até a instância I19 na abordagem M2-E1 se repetem ou são muito próximas na M2-E2, indicando que a perda de otimalidade foi mínima. Ao comparar os resultados dos modelos estocásticos com os do modelo determinístico também é possível ver um aumento nos resultados, assim como no modelo M1.

Ao compararmos os dois modelos, com base nas Tabelas 6.3 e 6.4, é possível observar que em algumas instâncias a otimalidade é comprovada em ambos os modelos. Exemplos disso são as instâncias I5, I9 e I14, nas quais os resultados obtidos pelo modelo estocástico M1 foram menores do que os do modelo estocástico M2. Essa diferença pode ser explicada pelo fato de que, em alguns cenários do modelo M1, o helicóptero emergencial foi utilizado como recurso. No modelo M2, como a transferência de voos para o dia seguinte é considerada hierarquicamente mais relevante do que o uso de helicópteros, o modelo opta por adicionar um helicóptero adicional no primeiro estágio, evitando assim a necessidade de transferir voos em qualquer um dos cenários. Como exemplo, na instância I5, o modelo determinístico utiliza apenas um helicóptero normal para realizar todos os 5 voos. Já no modelo estocástico, alguns cenários exigem 2 helicópteros. No modelo M1, helicópteros emergenciais são designados para esses cenários específicos, enquanto no modelo M2, são alocados 2 helicópteros normais para todos os cenários, uma vez que o custo de transferir um voo para o dia seguinte é muito elevado. Outro ponto a ser observado ao comparar os dois modelos estocásticos com o modelo determinístico é que, em algumas instâncias, como I10 e I12, os resultados são muito semelhantes. Isso indica que foi possível alocar a mesma quantidade de voos utilizando a mesma quantidade de helicópteros em todos os cenários, incluindo no cenário determinístico.

A Tabela 6.5 apresenta os cálculos do Valor Esperado de Informação Perfeita (EVPI) e do Valor da Solução Estocástica (VSS), definidos no **apêndice C**, das abordagens com programação de metas dos dois modelos, que apresentaram o menor *gap* de otimalidade. É possível observar que, em algumas soluções, os valores de EVPI e VSS são próximos de zero, indicando que, nestas instâncias, não há grande ganho ao se utilizar o método estocástico. Nessas situações, todos os cenários apresentaram o mesmo número de voos transferidos para o dia seguinte e utilizaram a mesma quantidade de helicópteros. Por outro lado, nas instâncias em que os valores de EVPI e VSS são maiores, nota-se que, em alguns cenários, foi necessário utilizar mais helicópteros para atender aos voos programados. Ao analisar o modelo M1, observamos um custo significativo ao não adotar o modelo

Tabela 6.5 – Tabela de Resultados dos Modelos M1 e M2 com EVPI e VSS

Inst.	Modelo Estocástico. M1-E2		Modelo Estocástico M2-E2	
	EVPI	VSS	EVPI	VSS
I5	63,42	16,58	152,79	3007,76
I9	76,3	28,7	173,50	4551,87
I10	0,00	0,00	0,00	0,00
I12	0,01	0,01	0,01	0,01
I14	86,70	369,71	115,40	14207,52
I15	0,01	349,98	0,01	15753,15
I17	72,04	384,35	115,41	14207,50
I18	0,01	0,00	0,00	0,01
I19	20,02	302,19	20,02	9547,09
I20	0,00	0,00	0,01	0,00
I21	91,54	223,51	91,55	11008,60
I22	0,04	0,04	0,03	0,40
I23	0,04	0,04	0,03	0,01
I24	65,30	280,80	65,29	12607,76
I25	0,02	0,02	0,02	0,14

estocástico. Já no modelo M2, a ausência de helicópteros emergenciais resulta em um custo ainda maior, pois a transferência de voos para o dia seguinte acarreta custos elevados. Assim, embora em algumas instâncias o modelo estocástico não se mostre vantajoso, em outras ele é essencial para a obtenção de soluções mais efetivas para o problema diante de incertezas.

7 CONCLUSÕES

A presente pesquisa investigou modelos matemáticos aplicados ao problema de reagendamento de voos de uma empresa brasileira de óleo e gás, em tempo discreto e no contexto de múltiplas plataformas *offshore*, partindo de um único aeroporto. Num primeiro momento, os modelos foram desenvolvidos admitindo um único objetivo escalonado e também com múltiplas metas: (i) minimizar a transferência de voos para o dia seguinte, (ii) minimizar o uso de helicópteros e (iii) minimizar atraso total, por meio da abordagem hierárquica de programação de metas. Durante o desenvolvimento dos modelos, foram explorados aprimoramentos, desigualdades válidas e algumas técnicas na resolução de programação de metas para acelerar a obtenção de uma solução, e foram obtidos resultados ótimos ou próximos da otimalidade, com *gaps* computacionais próximos de 0, e com tempos computacionais reduzidos e possivelmente toleráveis na prática para instâncias contendo até cerca de 50 voos diários.

Além disso, foram analisadas metodologias multiobjetivos, com destaque para a métrica de Chebyshev ponderada aumentada e a abordagem de Lokman e Köksalan. Essas metodologias permitiram a análise dos objetivos de forma conflitante, sem a imposição de uma ordem lexicográfica, e demonstraram eficácia na solução do problema de reagendamento de voos, possibilitando a identificação de soluções não-dominadas. Nos dois métodos utilizados foi possível encontrar soluções ótimas para instâncias com poucos voos e, e as instâncias maiores apresentaram gaps de até 12% para o método de Chebyshev e 3% para o método de Lokman e Köksalan. Foi verificado também que a redução do limite de tempo computacional de 3600 segundos para apenas 600 segundos, não impactou muito no gap da solução final do método de Chebyshev

Adicionalmente, foram avaliadas metodologias de otimização multiobjetivo, com ênfase na métrica de Chebyshev ponderada aumentada e na abordagem proposta por Lokman e Köksalan. Tais métodos possibilitaram a consideração simultânea de objetivos conflitantes, sem a necessidade de impor uma ordem de prioridade entre eles, como ocorre na ordenação lexicográfica. Ambas as abordagens demonstraram eficácia na resolução do problema de reagendamento de voos, permitindo a identificação de soluções não-dominadas. Os resultados indicaram que, para instâncias com menor número de voos, ambos os métodos foram capazes de encontrar soluções ótimas. Em contrapartida, para instâncias de maior porte, observaram-se gaps de até 12% para a métrica de Chebyshev e de até 3% para o método de Lokman e Köksalan. Verificou-se ainda que a redução do tempo limite de execução de 3600 segundos para 600 segundos não impactou significativamente o gap final obtido pelo método de Chebyshev. Para complementar, foram introduzidos

cortes com restrições adicionais, com o objetivo de adaptar o problema à realidade prática de um tomador de decisão, que precisa definir um cronograma de reagendamento para ser implementado.

A pesquisa também abordou modelos baseados em programação estocástica, considerando diferentes recursos e abordagens. Entre os recursos utilizados, destacaram-se a ação de contingência de utilizar helicópteros emergenciais além dos helicópteros disponíveis no início da reprogramação, e a ação de contingência de suspender voos agendados no dia e transferi-los para o dia seguinte. Adicionalmente, foi empregado um método de redução de cenários baseado no algoritmo de *k-means*, e, após diversos testes, determinou-se a quantidade ideal de cenários para os modelos estocásticos, a fim de garantir a eficácia computacional. A aplicação de programação de metas hierárquica, previamente desenvolvida para resolver o modelo determinístico, mostrou-se eficiente também para resolver os modelos estocásticos. A análise dos valores de EVPI e VSS destacou a relevância dos modelos estocásticos, evidenciando que, em algumas instâncias, a utilização de soluções dos modelos estocásticos trouxe benefícios significativos em comparação com as soluções dos modelos determinísticos. É importante mencionar que, inicialmente, foi desenvolvido um modelo baseado em técnicas de otimização robusta para lidar com as incertezas, porém este modelo mostrou-se eficaz apenas para o cenário do pior caso. Em resposta a essa limitação, migrou-se para o desenvolvimento de modelos de programação estocástica, que oferecem uma abordagem mais adequada para as variabilidades presentes.

Em conclusão, diversas abordagens de solução foram aplicadas ao problema de ARP discutido neste trabalho, proporcionando uma análise abrangente e detalhada do problema sob diferentes perspectivas. As soluções propostas englobaram tanto métodos determinísticos, com programação de metas hierárquicas e multiobjetivas, quanto abordagens estocásticas também baseadas em programação de metas hierárquicas, oferecendo uma base sólida para a tomada de decisões no contexto do reagendamento de voos em cenários com incertezas. As metodologias desenvolvidas e avaliadas ao longo deste estudo não só avançam a teoria, mas também oferecem contribuições práticas significativas, particularmente para empresas do setor de óleo e gás.

Como sugestões para pesquisas futuras, seria interessante explorar modelos matemáticos multiobjetivos e estocásticos, incorporando a utilização de múltiplos aeroportos. Além disso, poderia ser investigada a variação do problema com um único aeroporto, onde, além da recuperação de aeronaves, fosse considerada a recuperação de passageiros. Nesse contexto, uma possibilidade seria alocar passageiros de voos transferidos em helicópteros com destino à mesma unidade marítima ou permitir que um único helicóptero visite duas UMs em um único voo, para desembarcar e embarcar novos passageiros antes de

retornar ao aeroporto. Em relação aos métodos de solução, para o modelo multiobjetivo, o desenvolvimento de heurísticas e meta-heurísticas seria uma abordagem interessante para reduzir o tempo computacional. Para o modelo estocástico, seria relevante investigar outros métodos de redução de cenários, assim como a utilização de técnicas como a decomposição de Benders, a fim de melhorar a rapidez na resolução.

REFERÊNCIAS

Abbasi-Pooya, A.; Husseinazadeh Kashan, A. New mathematical models and a hybrid Grouping Evolution Strategy algorithm for optimal helicopter routing and crew pickup and delivery. **Computers and Industrial Engineering**, v. 112, p. 35–56, 2017. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2017.08.007>>.

Agência Nacional de Aviação Civil. **Percentuais de atrasos e cancelamentos**. 2022. Acessado em 13 de Julho de 2022. Disponível em: <<https://www.gov.br/anac/pt-br/assuntos/dados-e-estatisticas/percentuais-de-atrasos-e-cancelamentos>>.

Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis. **Percentuais de atrasos e cancelamentos**. 2022. Acessado em 13 de Julho de 2022. Disponível em: <<https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins-anp/boletins/boletim-mensal-da-producao-de-petroleo-e-gas-natural>>.

Aliano Filho, A. **Novas Extensões de Técnicas de Escalarizações no Problema de Corte Unidimensional Inteiro Multiobjetivo**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

Aliano Filho, A.; A Oliveira, W.; Melo, T. Multi-objective optimization for integrated sugarcane cultivation and harvesting planning. **European Journal of Operational Research**, v. 309, n. 1, p. 330–344, 2023. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221722009778>>.

Aliano Filho, A.; Morabito, R. An effective approach for bi-objective multi-period touristic itinerary planning. **Expert Systems with Applications**, v. 240, p. 122437, 2024. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417423029391>>.

Antunes, C.; Alves, M.; Climaco, J. **Multiobjective Linear and Integer Programming**. Springer International Publishing, 2016. (EURO Advanced Tutorials on Operational Research). ISBN 9783319287461. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Qdv7CwAAQBAJ>>.

Arguello, M. F. Framework for exact solutions and heuristics for approximate solutions to airlines' irregular operations control aircraft routing problem. **Dissertation**, Ph.D. Thes, n. The University of Texas at Austin, p. 274, 1997. ISSN 061239378X.

Bard, J. F.; Yu, G.; Arguello, M. F. Optimizing aircraft routings in response to groundings and delays. **IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)**, v. 33, n. 10, p. 931–947, 2001. ISSN 15458830.

Bastos, Y. B.; Fleck, J. L.; Martinelli, R. A stochastic programming approach for offshore flight scheduling. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier Ltd, v. 53, n. 4, p. 478–484, 2020. ISSN 24058963. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.04.068>>.

Birge, J. R.; Louveaux, F. **Introduction to Stochastic Programming**. 2. ed. [S.l.]: Springer New York, NY, 2011. 485 p. (Springer Series in Operations Research and

Financial Engineering). Published: 27 June 2011 (Hardcover), 15 June 2011 (eBook). ISBN 978-1-4614-0236-7.

Bouarfa, S.; Blom, H. A.; Curran, R.; Hendriks, K. V. A study into modeling coordination in disruption management by Airline Operations Control. **AIAA AVIATION 2014 -14th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations Conference**, n. June, p. 1–11, 2014.

Brunner, J. O. Rescheduling of flights during ground delay programs with consideration of passenger and crew connections. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier Ltd, v. 72, p. 236–252, 2014. ISSN 13665545. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tre.2014.10.004>>.

Bureau of Transportation Statistics. **Airline On-Time Statistics and Delay Causes**. 2024. Acessado em 19 de agosto de 2024. Disponível em: <https://www.transtats.bts.gov/OT_Delay/OT_DelayCause1.asp>.

Bureau of Transportation Statistics. **On-Time Performance - Reporting Operating Carrier Flight Delays at a Glance**. 2024. Acessado em 19 de agosto de 2024. Disponível em: <<https://www.transtats.bts.gov/HomeDrillChart.asp>>.

Caballero-Morales, S. O.; Martinez-Flores, J. L. Helicopter routing model with non-deterministic failure rate for evacuation of multiple oil platforms. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier, v. 139, n. xxxx, p. 105669, 2020. ISSN 03608352. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.043>>.

Cao, J. M.; Kanafani, A. Real-time decision support for integration of airline flight cancellations and delays part I: Mathematical formulation. **Transportation Planning and Technology**, v. 20, n. 3, p. 183–199, 1997. ISSN 03081060.

Cao, J. M.; Kanafani, A. Real-time decision support for integration of airline flight cancellations and delays part II: Algorithm and computational experiments. **Transportation Planning and Technology**, v. 20, n. 3, p. 201–217, 1997. ISSN 03081060.

Chang, C.-T. Multi-choice goal programming. **Omega**, v. 35, n. 4, p. 389–396, 2007. ISSN 0305-0483. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048305000988>>.

Chugh, T. Scalarizing functions in bayesian multiobjective optimization. In: **2020 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 1–8.

Clarke, M. D. D. Irregular airline operations : a review of the state-of-the-practice in airline operations control centers. **Journal of Air Transport Management**, v. 4, p. 67–76, 1998.

Clausen, J.; Larsen, A.; Larsen, J.; Rezanova, N. J. Disruption management in the airline industry—concepts, models and methods. **Computers Operations Research**, v. 37, n. 5, p. 809–821, 2010. ISSN 0305-0548. Disruption Management. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054809000914>>.

Collette, Y.; Siarry, P. **Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies**. Springer Berlin Heidelberg, 2004. (Decision Engineering). ISBN 9783540401827. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XNYF4hltoF0C>>.

Dang, C.; Ye, Y. A fixed point iterative approach to integer programming and its distributed computation. **Fixed Point Theory and Applications**, Dang and Ye, v. 2015, n. 1, 2015. ISSN 16871812. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1186/s13663-015-0429-8>>.

De La Vega, J.; Santana, M.; Pureza, V.; Morabito, R.; Bastos, Y.; Ribas, P. C. Model-based solution approach for a short-term flight rescheduling problem in aerial passenger transportation to maritime units. **International Transactions in Operational Research**, v. 29, n. 6, p. 3400–3434, 2022. ISSN 14753995.

De La Vega, J.; Vieira, T.; Santana, M.; Pureza, V.; Morabito, R.; Tavares, R.; Bastos, Y.; Ribas, P. C. Helicopter recovery in an oil and gas industry: Model and solution approaches. **EURO Journal on Transportation and Logistics**, Elsevier B.V., v. 11, n. July 2021, 2022. ISSN 21924384.

Eggenebrg, N.; Salani, M.; Bierlaire, M. **A column generation algorithm for disrupted airline schedules**. 1–38 p. Tese (Doutorado), 2007.

Eshkevari, M. L.; Komijan, A. R.; Baradaran, V. A bi-objective model for aircraft and crew recovery considering individual flight legs and maintenance requirements. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–27, 2023.

Fantazzini, T. M.; Vieira, T.; Morabito, R.; Munari, P. Hierarchical goal programming approaches to solve a discrete-time formulation for the aircraft recovery problem of a brazilian oil and gas company. **International Transactions in Operational Research**, n/a, n. n/a, 2024.

Filar, J. A.; Manyem, P.; White, K. How airlines and airports recover from schedule perturbations: A survey. **Annals of Operations Research**, v. 108, n. 1, p. 315–333, 2001. ISSN 1572-9338. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1016079600083>>.

Fonseca, J. J. S. Metodologia da pesquisa científica. **São Carlos: Serviço de Biblioteca e Informação ...**, p. 1–127, 2002.

Galvão, R. D.; Guimarães, J. The control of helicopter operations in the Brazilian oil industry: Issues in the design and implementation of a computerized system. **European Journal of Operational Research**, v. 49, n. 2, p. 266–270, 1990. ISSN 03772217.

Gao, Q.; Tang, X. W.; Zhu, J. F. Research on greedy simulated annealing algorithm for irregular flight schedule recovery model. **2009 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services, GSIS 2009**, p. 1469–1475, 2009.

Gil, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. v. 264. 216 p. ISSN 9788522457588. ISBN 9788522451425.

Gütmen, S.; Roy, S. K.; Weber, G.-W. An overview of weighted goal programming: A multi-objective transportation problem with some fresh viewpoints. **Central European Journal of Operations Research**, Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, v. 32, n. 3, p. 557–568, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10100-023-00861-5>>.

Hassan, L. K.; Santos, B. F.; Vink, J. Airline disruption management: A literature review and practical challenges. **Computers and Operations Research**, The Author(s), v. 127, p. 105137, 2021. ISSN 03050548. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105137>>.

Hermeto, N. D. S. S.; Ferreira Filho, V. J. M.; Bahiense, L. Logistics network planning for offshore air transport of oil rig crews. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 75, n. 1, p. 41–54, 2014. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2014.05.021>>.

Hu, Y.; Liao, H.; Zhang, S.; Song, Y. Multiple objective solution approaches for aircraft rerouting under the disruption of multi-aircraft. **Expert Systems with Applications**, Elsevier Ltd, v. 83, p. 283–299, 2017. ISSN 09574174.

Hu, Y.; Song, Y.; Zhao, K.; Xu, B. Integrated recovery of aircraft and passengers after airline operation disruption based on a GRASP algorithm. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier Ltd, v. 87, p. 97–112, 2016. ISSN 13665545. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tre.2016.01.002>>.

Hu, Y.; Xu, B.; Bard, J. F.; Chi, H.; Gao, M. Optimization of multi-fleet aircraft routing considering passenger transiting under airline disruption. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 80, p. 132–144, 2015. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2014.11.026>>.

Hu, Y.; Zhang, P.; Fan, B.; Zhang, S.; Song, J. Integrated recovery of aircraft and passengers with passengers' willingness under various itinerary disruption situations. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 161, n. August, p. 107664, 2021. ISSN 03608352. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107664>>.

Høyland, K.; Wallace, S. Generating scenario trees for multistage decision problems. **Management Science**, v. 47, p. 295–307, 02 2001.

Jarrah, A. I.; Yu, G.; Krishnamurthy, N.; Rakshit, A. Decision support framework for airline flight cancellations and delays. **Transportation Science**, v. 27, n. 3, p. 266–280, 1993. ISSN 00411655.

Jesson, J.; Matheson, L.; Lacey, F. **Doing Your Literature Review – Traditional and Systematic Techniques**. 2012.

Jozefowicz, N.; Mancel, C.; Mora-Camino, F. A heuristic approach based on shortest path problems for integrated flight, aircraft, and passenger rescheduling under disruptions. **Journal of the Operational Research Society**, Nature Publishing Group, v. 64, n. 3, p. 384–395, 2013. ISSN 14769360. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1057/jors.2012.20>>.

KEUTCHAYAN, J.; ORTMANN, J.; REI, W. Problem-driven scenario clustering in stochastic optimization. **Computational Management Science**, v. 20, n. 1, p. 13, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10287-023-00446-2>>.

Khiabani, A.; Komijan, A.; Ghezavati, V.; Bidhandi, H. M. A mathematical model for integrated aircraft and crew recovery after a disruption: a benders' decomposition approach. **Journal of Modelling in Management**, v. 18, n. 6, 08 2023.

Kohl, N.; Larsen, A.; Larsen, J.; Ross, A.; Tiourine, S. Airline disruption management—perspectives, experiences and outlook. **Journal of Air Transport Management**, v. 13, n. 3, p. 149–162, 2007. ISSN 0969-6997. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969699707000038>>.

Le, M.; Gao, J.; Zhan, C. Solving the airline recovery problem based on vehicle routing problem with time window modeling and genetic algorithm. **Proceedings - International Conference on Natural Computation**, p. 822–828, 2013. ISSN 21579555.

Le, M. L.; Wu, C. C. Solving airlines disruption by considering aircraft and crew recovery simultaneously. **Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)**, v. 18, n. 2, p. 243–252, 2013. ISSN 10071172.

Lin, H.; Wang, Z. Fast Variable Neighborhood Search for Flight Rescheduling after Airport Closure. **IEEE Access**, IEEE, v. 6, p. 50901–50909, 2018. ISSN 21693536.

Littell, J. H.; Corcoran, J.; Pillai, V. **Systematic Reviews and Meta-Analysis**. [S.l.: s.n.], 2009. v. 9780195326. 1–210 p. ISBN 9780199864959.

Lokman, B.; Köksalan, M. Finding all nondominated points of multi-objective integer programs. **Journal of Global Optimization**, Springer, v. 57, p. 347–365, 2013.

Löhndorf, N. An empirical analysis of scenario generation methods for stochastic optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 255, n. 1, p. 121–132, 2016. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221716303411>>.

Maher, S. J. A novel passenger recovery approach for the integrated airline recovery problem. **Computers and Operations Research**, Elsevier, v. 57, p. 123–137, 2015. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2014.11.005>>.

Maher, S. J. Solving the integrated airline recovery problem using column-and-row generation. **Transportation Science**, v. 50, n. 1, p. 216–239, 2016. ISSN 15265447.

Malucelli, A.; Castro, A. J. M.; Oliveira, E. Crew and Aircraft Recovery Through a Multi-Agent Airline Electronic Market. **Proceedings of IADIS International Conference on e-Commerce 2006**, Eds. Sandeep Krishnamurthy, Pedro Isaias, Barcelona, Spain, December 9-11 2006, n. December, p. 51–58, 2006.

Mansi, R.; Hanafi, S.; Wilbaut, C.; Clautiaux, F. Disruptions in the airline industry: Math-heuristics for re-assigning aircraft and passengers simultaneously. **European Journal of Industrial Engineering**, v. 6, n. 6, p. 690–712, 2012. ISSN 17515262.

Mansour, I. B.; Alaya, I.; Tagina, M. Chebyshev-based iterated local search for multi-objective optimization. In: **2017 13th IEEE International Conference on Intelligent Computer Communication and Processing (ICCP)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 163–170.

Manzini, R.; Accorsi, R.; Bortolini, M. Operational planning models for distribution networks. **International Journal of Production Research**, v. 52, n. 1, p. 89–116, jan 2014. ISSN 0020-7543. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207543.2013.828168>>.

Martin, M.; Alvarez, A.; De La Vega, J.; Morabito, R. A constraint programming model and a hybrid iterated local search algorithm for solving an aircraft recovery problem in the oil and gas industry. **Journal of the Operational Research Society**, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 1–13, 2025.

Martins, M. F. **Introdução à programação linear multiobjetivo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Coimbra, 2017.

Menezes, F.; Porto, O.; Reis, M. L.; Moreno, L.; De Aragão, M. P.; Uchoa, E.; Abeledo, H.; Do Nascimento, N. C. Optimizing helicopter transport of oil rig crews at Petrobras. **Interfaces**, v. 40, n. 5, p. 408–416, 2010. ISSN 00922102.

Miguel, P. A. C.; Fleury, A.; Mello, C. H. P.; Nakano, D. N.; Lima, E. P. de; Turrioni, J. B.; Ho, L. L.; Morabito, R.; Martins, R. A.; Sousa, R.; Costa, S. E. G. da; Pureza, V. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. ISBN 9788535248500.

Naz Yetimoğlu, Y.; Selim Aktürk, M. Aircraft and passenger recovery during an aircraft's unexpected unavailability. **Journal of Air Transport Management**, v. 91, n. March 2020, 2021. ISSN 09696997.

Nedjati, A.; Izbirak, G.; Arkat, J. Bi-objective covering tour location routing problem with replenishment at intermediate depots: Formulation and meta-heuristics. **Computers & Industrial Engineering**, v. 110, p. 191–206, aug 2017. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360835217302565>>.

Ng, K. K.; Keung, K. L.; Lee, C. K.; Chow, Y. T. A large neighbourhood search approach to airline schedule disruption recovery problem. **IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management**, v. 2020-Decem, n. January, p. 600–604, 2020. ISSN 2157362X.

Petersen, J. D.; Sölveling, G.; Clarke, J. P.; Johnson, E. L.; Shebalov, S. An optimization approach to airline integrated recovery. **Transportation Science**, v. 46, n. 4, p. 482–500, 2012. ISSN 15265447.

Petrobras. **Descoberta de um campo de petróleo e gás natural em cinco passos**. 2023. Acesso em: 18 dez. 2024. Disponível em: <<https://comunicabaciadesantos.petrobras.com.br/w/descoberta-de-um-campo-de-petroleo-e-gas-natural-em-cinco-passos-1>>.

Romero, M.; Sheremetov, L.; Soriano, A. A genetic algorithm for the pickup and delivery problem: An application to the helicopter offshore transportation. **Advances in Soft Computing**, v. 42, p. 435–444, 2007. ISSN 16153871.

Rosa, R. d. A.; Machado, A. M.; Ribeiro, G. M.; Mauri, G. R. A mathematical model and a Clustering Search metaheuristic for planning the helicopter transportation of employees to the production platforms of oil and gas. **Computers and Industrial Engineering**, v. 101, p. 303–312, 2016. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2016.09.006>>.

Rosenberger, J. M.; Johnson, E. L.; Nemhauser, G. L. A robust fleet-assignment model with hub isolation and short cycles. **Transportation Science**, v. 38, n. 3, p. 357–368, 2004. ISSN 00411655.

Ruszczyński, A.; Shapiro, A. Stochastic programming models. **Handbooks in Operations Research and Management Science**, North-Holland Publ Co, v. 10, n. C, p. 1–64, 2003. ISSN 0927-0507.

Santana, M.; De La Vega, J.; Morabito, R.; Pureza, V. The aircraft recovery problem: A systematic literature review. **EURO Journal on Transportation and Logistics**, v. 12, p. 100117, 2023. ISSN 2192-4376. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2192437623000146>>.

Saunders, M.; LEWIS, P.; TORNHILL, A. **Research Methods for Business Students**. 4. ed. England: Pearson Education, 2007. 652 p. ISSN 0047-2875. ISBN 978-0-273-70148-4.

Silva, A. F. da; Marins, F. A. S. Revisão da literatura sobre modelos de programação por metas determinística e sob incerteza. **Production**, FEG/UNESP, Guaratinguetá, SP, Brasil, v. 25, n. 1, p. 92–112, jan./mar. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132014005000003>>.

Sinclair, K.; Cordeau, J. F.; Laporte, G. Improvements to a large neighborhood search heuristic for an integrated aircraft and passenger recovery problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier B.V., v. 233, n. 1, p. 234–245, 2014. ISSN 03772217. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.034>>.

Sinclair, K.; Cordeau, J. F.; Laporte, G. A column generation post-optimization heuristic for the integrated aircraft and passenger recovery problem. **Computers and Operations Research**, Elsevier, v. 65, p. 42–52, 2016. ISSN 03050548. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2015.06.014>>.

Sousa, H.; Teixeira, R.; Cardoso, H.; Oliveira, E. Airline Disruption Management: Dynamic Aircraft Scheduling with Ant Colony Optimization. **Universidade do Porto**, p. 31, 2016. ISSN 01409883.

Sousa, H.; Teixeira, R.; Cardoso, H. L.; Oliveira, E. Airline disruption management: Dynamic aircraft scheduling with ant colony optimization. **ICAART 2015 - 7th International Conference on Agents and Artificial Intelligence, Proceedings**, v. 2, n. January, p. 398–405, 2015.

Su, Y.; Xie, K.; Wang, H.; Liang, Z.; Art Chaovalitwongse, W.; Pardalos, P. M. Airline Disruption Management: A Review of Models and Solution Methods. **Engineering**, v. 7, n. 4, p. 435–447, 2021. ISSN 20958099.

Teodorović, D.; Guberinić, S. Optimal dispatching strategy on an airline network after a schedule perturbation. **European Journal of Operational Research**, v. 15, n. 2, p. 178–182, 1984. ISSN 03772217.

Teodorović, D.; Stojković, G. Model for operational daily airline scheduling. **Transportation Planning and Technology**, v. 14, n. 4, p. 273–285, 1990. ISSN 0308-1060.

Teodorović, D.; Stojković, G. Model to reduce airline schedule disturbances. **Journal of Transportation Engineering**, v. 121, n. 4, p. 324–331, 1995. ISSN 0733947X.

Thengvall, B. G.; Bard, J. F.; Yu, G. Balancing user preferences for aircraft schedule recovery during irregular operations. **IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)**, v. 32, n. 3, p. 181–193, 2000. ISSN 0740817X.

Thengvall, B. G.; Bard, J. F.; Yu, G. A bundle algorithm approach for the aircraft schedule recovery problem during hub closures. **Transportation Science**, v. 37, n. 4, p. 392–407, 2003. ISSN 00411655.

Thengvall, B. G.; Yu, G.; Bard, J. F. Multiple fleet aircraft schedule recovery following hub closures. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 35, n. 4, p. 289–308, 2001. ISSN 09658564.

Timlin, M. T. F.; Pulleyblank, W. R. Precedence Constrained Routing and Helicopter Scheduling: Heuristic Design. **Interfaces**, v. 22, n. 3, p. 100–111, 1992. ISSN 0092-2102.

Tsai, P. W.; Pan, J. S.; Chen, S. M.; Liao, B. Y. Enhanced parallel cat swarm optimization based on the Taguchi method. **Expert Systems with Applications**, Elsevier Ltd, v. 39, n. 7, p. 6309–6319, 2012. ISSN 09574174. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2011.11.117>>.

Vieira, T.; De La Vega, J.; Tavares, R.; Munari, P.; Morabito, R.; Bastos, Y.; Ribas, P. C. Exact and heuristic approaches to reschedule helicopter flights for personnel transportation in the oil industry. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, v. 151, n. May 2020, 2021. ISSN 13665545.

Vieira, T. J. dos S. **Optimization of Aircraft Routing with Crew Pairing for Non-Scheduled Air Transportation**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2024.

Vink, J.; Santos, B. F.; Verhagen, W. J.; Medeiros, I.; Filho, R. Dynamic aircraft recovery problem - An operational decision support framework. **Computers and Operations Research**, Elsevier Ltd, v. 117, p. 104892, 2020. ISSN 03050548. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104892>>.

Wen, X.; Ma, H. L.; Chung, S. H.; Khan, W. A. Robust airline crew scheduling with flight flying time variability. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, Elsevier Ltd, v. 144, n. November, p. 102132, 2020. ISSN 13665545. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tre.2020.102132>>.

Wu, S.; Liu, E.; Cao, R.; Bai, Q. Airline recovery problem under disruptions: A review. **Computers Operations Research**, v. 175, p. 106915, 2025. ISSN 0305-0548. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054824003873>>.

Wu, Z.; Gao, Q.; Li, B.; Dang, C.; Hu, F. A Rapid Solving Method to Large Airline Disruption Problems Caused by Airports Closure. **IEEE Access**, v. 5, p. 26545–26555, 2017. ISSN 21693536.

Yan, S.; Tu, Y. P. Multifleet routing and multistop flight scheduling for schedule perturbation. **European Journal of Operational Research**, v. 103, n. 1, p. 155–169, 1997. ISSN 03772217.

Yan, S.; Yang, D. H. A decision support framework for handling schedule perturbation. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 30, n. 6, p. 405–419, 1996. ISSN 01912615.

Yang, T.; Hu, Y. Considering Passenger Preferences in Integrated Postdisruption Recoveries of Aircraft and Passengers. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2019, 2019. ISSN 15635147.

Zhang, C. Two-Stage Heuristic Algorithm for Aircraft Recovery Problem. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 2017, 2017. ISSN 1607887X.

Zhang, D.; Henry Lau, H. Y.; Yu, C. A two stage heuristic algorithm for the integrated aircraft and crew schedule recovery problems. **Computers and Industrial Engineering**, Elsevier Ltd, v. 87, p. 436–453, 2015. ISSN 03608352. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2015.05.033>>.

Zhang, D.; Yu, C.; Desai, J.; Lau, H. Y. A math-heuristic algorithm for the integrated air service recovery. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier Ltd, v. 84, p. 211–236, 2016. ISSN 01912615.

Zhao, A.; Bard, J. F.; Bickel, J. E. A two-stage approach to aircraft recovery under uncertainty. **Journal of Air Transport Management**, Elsevier, v. 111, p. 102421, 2023.

Zhao, T.; Chen, X. A weight-table based heuristic algorithm for aircraft recovery problem. **Chinese Control Conference, CCC**, Technical Committee on Control Theory, Chinese Association of Automation, v. 2018-Janua, p. 2242–2246, 2018. ISSN 21612927.

Zhu, B.; Zhu, J. F.; Gao, Q. A Stochastic Programming Approach on Aircraft Recovery Problem. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2015, 2015. ISSN 15635147.

APÊNDICE A - PROGRAMAÇÃO POR METAS

Programação por Metas (*Goal Programming* - GP) é uma técnica eficaz dentro da otimização multiobjetivo, que permite aos tomadores de decisão resolver problemas complexos considerando múltiplos objetivos. A simplicidade e a flexibilidade da GP a tornam uma ferramenta valiosa em diversas áreas, incluindo marketing, engenharia, análise locacional, modelos econômicos, gestão de estoques, recursos humanos, controle de qualidade e gestão de produção e operações. Esta seção se baseia principalmente nos estudos de [Gütmen et al. \(2024\)](#), [Silva e Marins \(2015\)](#), [Chang \(2007\)](#), que oferecem uma visão abrangente sobre GP e suas diversas aplicações.

Nos modelos determinísticos de Pesquisa Operacional, assume-se que os dados utilizados são confiáveis, mesmo que possam haver incertezas inerentes à sua natureza, como custos de matéria-prima e previsões de demanda. Nessas situações, a análise de sensibilidade e a análise paramétrica são frequentemente usadas para entender como alterações nos dados podem afetar a solução obtida.

Dentro desse contexto, GP oferece várias abordagens determinísticas para a otimização multiobjetivo:

- **Programação por Metas Ponderada (WGP):** Esta é a forma mais tradicional de GP, onde são atribuídos pesos aos desvios das metas estabelecidas para os objetivos. O objetivo é minimizar esses desvios, ponderando-os de acordo com sua importância relativa.
- **Programação por Metas com Priorização (LGP):** Também conhecida como *Preemptive Goal Programming*, essa abordagem ordena os objetivos por ordem de prioridade, definida a priori pelo decisor. Cada objetivo é otimizado em sequência, respeitando a hierarquia estabelecida. Quando se otimiza um objetivo de prioridade inferior, os objetivos de prioridade superior mantêm seus valores ótimos, transformando-se em restrições adicionais no modelo.
- **Programação por Metas Min-max (Min-max GP):** Foca na minimização do desvio máximo em relação às metas estabelecidas. É útil quando o objetivo é garantir que o maior desvio entre os objetivos seja o menor possível.
- **Programação por Metas Estendida (EGP):** Combina as abordagens de WGP, LGP e Min-max GP, permitindo uma flexibilidade maior na modelagem de problemas multiobjetivo.

- **Programação por Metas Inteira (IGP):** Envolve a utilização de funções de penalidade para tratar desvios em problemas onde as variáveis são restritas a valores inteiros.
- **Programação por Metas Binária (BGP):** Utiliza variáveis inteiras binárias para decidir se uma meta deve ou não ser atingida, sendo especialmente útil em problemas de decisão onde o cumprimento ou não de uma meta é crítico.
- **Programação por Metas e Análise por Envoltória de Dados (GPDEA):** Integra a GP com a Análise por Envoltória de Dados, melhorando a discriminação de Unidades Tomadoras de Decisão (*Decision Making Units* - DMUs) em cenários onde o número de DMUs é inferior ao número de variáveis de entrada e saída.

A LGP, também conhecida como programação por metas lexicográfica é uma abordagem específica dentro de GP, que permite a ordenação dos objetivos de acordo com níveis de prioridade previamente estabelecidos. Nesta técnica, os objetivos são hierarquizados, e a otimização é realizada de maneira sequencial, respeitando essa hierarquia. Cada objetivo é atribuído a um nível de prioridade, e a otimização de cada objetivo ocorre conforme essa ordem. Quando um objetivo de prioridade inferior é otimizado, os valores ótimos dos objetivos de prioridade superior são preservadas e transformadas em restrições adicionais no modelo subsequente. [Chang \(2007\)](#) apresenta o modelo matemático da LGP da seguinte forma:

$$\text{Lex Min} \left(\sum_{i \in h_1} (\alpha_i d_i^+ + \beta_i d_i^-), \sum_{i \in h_2} (\alpha_i d_i^+ + \beta_i d_i^-), \dots \right) \quad (7.1)$$

Sujeito a:

$$f_i(X) - d_i^+ + d_i^- = g_i, \quad \forall i \in h_r, \text{ com } r = 1, 2, \dots, Q; \quad (7.2)$$

$$X \in F, \quad d_i^+, d_i^- \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

Nesta formulação:

- X vetor de variáveis de decisão;
- $f_i(X)$ denota a i -ésima função objetivo;

- g_i representa a meta estabelecida para o i -ésimo objetivo;
- h_r identifica a hierarquia das funções objetivo, associadas ao r -ésimo nível de prioridade;
- Q é a quantidade de funções objetivos do problema;
- d_i^+ e d_i^- correspondem aos desvios positivos e negativos, respectivamente, em relação à meta g_i ;
- F é o conjunto de soluções viáveis.

Cada objetivo i recebe um nível de prioridade P_i , com $P_1 > P_2 > P_3 > \dots > P_n$. Otimiza-se o primeiro objetivo P_1 , obtendo-se uma solução ótima. Ao otimizar o próximo objetivo P_2 , o valor ótimo de P_1 é mantida como uma restrição adicional, e assim por diante. As variáveis d_i^+ e d_i^- representam, respectivamente, os desvios para mais e para menos em relação à meta g_i associada ao objetivo $f_i(X)$, o valor de $d_i^+ = \max(0, f_i(X) - g_i)$ e $d_i^- = \max(0, g_i - f_i(X))$. Essa estrutura hierárquica garante que os objetivos mais importantes sejam alcançados em primeiro lugar, e as soluções encontradas respeitam a ordem de prioridade definida. Isso faz da LGP uma técnica valiosa quando há uma clara hierarquia entre os objetivos, permitindo que os decisores alcancem as metas mais críticas antes de considerar outras menos prioritárias.

A GP é, portanto, uma ferramenta versátil e eficaz para a resolução de problemas complexos de otimização multicritério. A variedade de abordagens dentro da GP, como a ponderada, com priorização, min-max, entre outras, oferece aos tomadores de decisão um conjunto rico de opções para modelar e resolver problemas de acordo com as necessidades específicas de cada situação. A capacidade de incorporar prioridades explícitas através da LGP e a flexibilidade em lidar com múltiplas metas tornam a GP uma escolha ideal para muitas aplicações em diferentes áreas.

APÊNDICE B - OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Um problema de otimização é definido como a busca pelo mínimo ou máximo de uma função, podendo envolver restrições que limitam as variáveis a uma área específica do espaço de busca, caracterizando um problema de otimização com restrições. Esses problemas podem ser classificados de acordo com várias características, como o número de variáveis de decisão, que pode ser única ou múltipla, e o tipo de variável, que pode ser contínua, inteira ou discreta. Além disso, a função objetivo pode ser linear, quadrática ou não linear, e o problema pode ser com ou sem restrições. Embora muitos problemas de otimização sejam definidos com uma única função objetivo, em muitos casos práticos, é necessário satisfazer múltiplos objetivos simultaneamente, como maximizar o nível de serviço oferecido, enquanto se minimiza o consumo de energia, caracterizando um problema de otimização multiobjetivo ([Collette; Siarry, 2004](#)).

A programação multiobjetivo expande a programação de um único objetivo para situações em que múltiplas funções objetivo devem ser consideradas simultaneamente. Quando essas funções são conflitantes, não há uma única solução que seja ótima para todos os objetivos, pois otimizar um objetivo pode prejudicar outro. Em vez disso, o problema busca um conjunto de soluções de compromisso, nas quais diferentes trade-offs são feitos para equilibrar os objetivos. Esse conjunto de soluções oferece alternativas que permitem ao decisor escolher a mais adequada de acordo com suas preferências e prioridades, em vez de uma única solução ótima. As definições abaixo sobre programação multiobjetivo foram retiradas de [Antunes et al. \(2016\)](#), [Martins \(2017\)](#) e [Aliano Filho \(2016\)](#).

Um problema geral de otimização multiobjetivo é usualmente formulado, sem perda de generalidade, da seguinte forma:

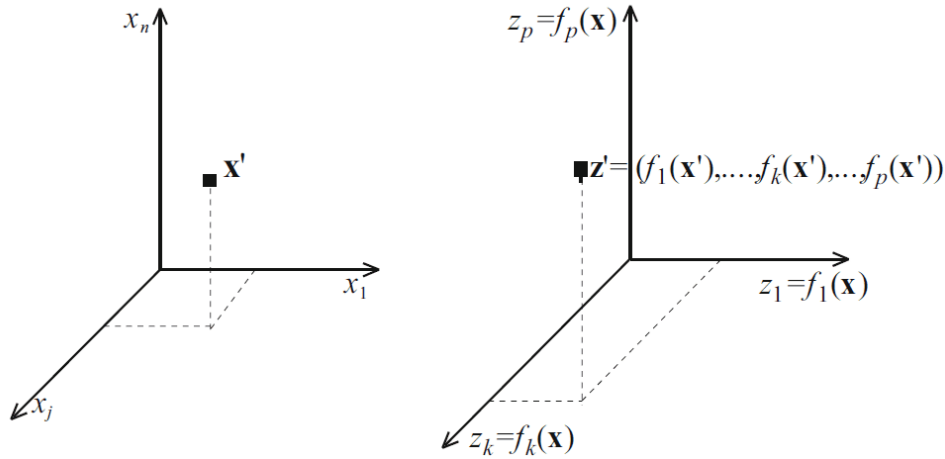
$$\begin{aligned} \min & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeito a} & \quad x \in X, \end{aligned} \tag{7.4}$$

sendo que $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, denominam-se por funções objetivo e $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto das soluções admissíveis.

Na otimização de uma única função objetivo, uma solução factível no espaço de decisão $x \in X$ é mapeada para um único valor em $\mathbb{R}$. No entanto, na otimização multiobjetivo, cada solução no espaço de decisão é mapeada para um espaço p -dimensional $Z = \{z = f(x) \in \mathbb{R}^p \mid x \in X\}$, que é conhecido como o espaço das funções objetivo ou espaço dos critérios. Neste espaço, cada solução potencial $x \in X$ é representada por um vetor $z = (z_1, z_2, \dots, z_p) = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$, onde cada componente do

vetor corresponde ao valor das funções objetivo para a solução x na região viável (Fig. 7.1).

Figura 7.1 – Espaço da variável de decisão e da função objetivo.



Fonte: [Antunes et al. \(2016\)](#)

Em problemas de otimização multiobjetivo, a eficiência de uma solução é um conceito central. Considerando um problema de otimização multiobjetivo, onde $f(x) = (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x))$ são as funções objetivo, e X é o conjunto de soluções admissíveis, podemos definir diferentes níveis de eficiência da seguinte forma:

1. **Solução Eficiente:** Uma solução $\hat{x} \in X$ é eficiente se não existe nenhuma outra solução $x \in X$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$ e $f(x) \neq f(\hat{x})$. Isso implica que não há uma solução que seja melhor ou igual em todos os objetivos e estritamente melhor em pelo menos um deles. O vetor $\hat{z} = f(\hat{x})$ correspondente é chamado de *não dominado*.
2. **Solução Fracamente Eficiente:** Uma solução $\hat{x} \in X$ é considerada fracamente eficiente se não existe nenhuma outra solução $x \in X$ tal que $f(x) < f(\hat{x})$. Isso significa que não há nenhuma solução $x \in X$ que melhore todos os objetivos simultaneamente em relação a $\hat{x}$. O vetor $\hat{y} = f(\hat{x})$ correspondente é então chamado de *fracamente não dominado*.
3. **Solução Propriamente Eficiente:** A solução $\hat{x}$ é chamada de propriamente eficiente se, além de ser eficiente, existe um número real $M \geq 0$ tal que, para qualquer i onde $f_i(x) < f_i(\hat{x})$, existe algum outro índice j onde $f_j(x) > f_j(\hat{x})$ e a razão das diferenças $\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M$. Essa condição adicional impede que uma solução eficiente seja obtida com pioras extremas em algum dos objetivos, assegurando um compromisso equilibrado entre as melhorias e pioras nos objetivos.

Outro conceito fundamental na otimização multiobjetivo é o de dominância que é utilizado para comparar diferentes soluções com base em múltiplos critérios ou objetivos. Sumariamente, uma solução x_1 domina outra solução x_2 , ambas pertencentes ao conjunto X , se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. **Não ser pior em nenhum objetivo:** A solução x_1 não deve ser pior do que x_2 em nenhum dos objetivos, ou seja, $f_k(x_1) \leq f_k(x_2)$ para todos os objetivos k , ou seja, x_1 não tem pior desempenho em relação a x_2 em nenhum dos objetivos considerados. Isso é um requisito fundamental para que x_1 possa dominar x_2 , pois x_1 não deve ser pior em nenhum aspecto.
2. **Ser estritamente melhor em pelo menos um objetivo:** Além de não ser pior em nenhum objetivo, x_1 deve ser estritamente melhor do que x_2 em pelo menos um dos objetivos. Isso significa que existe pelo menos um índice $\bar{k}$ tal que $f_{\bar{k}}(x_1) < f_{\bar{k}}(x_2)$.

Se ambas as condições forem satisfeitas, diz-se que a solução x_1 domina a solução x_2 , denotado por $x_1 \prec x_2$. No entanto, pode ocorrer que x_1 não domine x_2 e x_2 também não domine x_1 , indicando que as soluções são incomparáveis em termos de dominância. A dominância é essencial para identificar as soluções eficientes, já que uma solução dominada por outra é necessariamente uma solução satisfatória.

A otimalidade de Pareto é essencial em problemas de otimização multiobjetivo, pois identifica soluções que não podem ser melhoradas em um objetivo sem prejudicar outro. Formalmente, uma solução x^* é considerada ótima de Pareto se não existir outra solução $x \in X$ tal que $f_k(x) \leq f_k(x^*)$ para todos os objetivos k , com desigualdade estrita em pelo menos um objetivo. Em situações onde as funções objetivo são conflitantes, o conceito de eficiência de Pareto determina soluções em que não é possível melhorar um objetivo sem impactar negativamente outro, resultando na formação do fronteira de Pareto. Essas soluções, também denominadas não dominadas ou não inferiores, representam os melhores compromissos entre os objetivos conflitantes e são cruciais em processos decisórios, permitindo que o tomador de decisão selecione a alternativa que melhor se alinha com seus critérios, levando em consideração os *trade-offs* entre os diferentes objetivos.

Para avaliar efetivamente as soluções em problemas com múltiplos objetivos, é importante conhecer os valores máximos que as funções objetivo podem atingir na região em que não há solução dominada. O vetor nadir é uma ferramenta que fornece essas informações, ajudando a identificar os limites superiores dos valores das funções objetivo dentro do conjunto de soluções eficientes. O vetor nadir, denotado por z^N , é um vetor no espaço das funções objetivo que representa os maiores valores das funções objetivo

dentro do conjunto de soluções eficientes. Já o vetor ideal, denotado por z^I , representa os menores valores possíveis para cada uma das funções objetivo, servindo como uma referência para os melhores valores teóricos que poderiam ser alcançados. Juntos, os vetores nadir e ideal ajudam a avaliar a qualidade e a dispersão das soluções eficientes no problema multiobjetivo.

Ao lidar com problemas de otimização que envolvem múltiplos objetivos, o objetivo principal é encontrar todas as soluções que são eficientes, com cada solução sendo considerada igualmente importante. Em situações com variáveis contínuas, o número de possíveis soluções é infinito, enquanto em casos com variáveis discretas, ele é limitado e finito. As técnicas para abordar esses problemas devem se concentrar em garantir que as soluções obtidas estejam distribuídas de forma diversificada ao longo da fronteira de Pareto. Portanto, um bom método de otimização multiobjetivo precisa equilibrar a eficácia das soluções com uma distribuição ampla e variada delas.

O procedimento mais comum para calcular soluções eficientes/não dominadas em problemas de otimização multiobjetivo é o uso de técnicas de escalarização. Essas técnicas consistem em transformar o problema original em um problema de objetivo único, que pode ser resolvido repetidamente com diferentes pesos nos objetivos ou restrições que os limitem. As funções utilizadas nesse processo, chamadas de funções de escalarização, agregam temporariamente as múltiplas funções objetivo do modelo original em uma única dimensão. Importante destacar que as funções de escalarização servem como um meio operacional para gerar soluções não dominadas, que posteriormente são apresentadas ao tomador de decisão.

Existem três principais técnicas de escalarização usadas para calcular soluções não dominadas. A primeira é a técnica ϵ -*constraint*, onde otimiza-se uma das funções objetivo enquanto as outras são tratadas como restrições. A segunda técnica é a soma ponderada, que consiste em otimizar uma soma ponderada das funções objetivo. Por fim, a terceira técnica envolve a minimização de uma função de distância a um ponto de referência, como a solução ideal, utilizando métricas como Chebyshev, para calcular a solução mais próxima ou que atenda a aspirações específicas do tomador de decisão.

Embora as técnicas de escalarização sejam amplamente utilizadas e eficazes na identificação de soluções não dominadas, a resolução de problemas multiobjetivos de programação inteira apresenta desafios adicionais. Esses problemas combinatórios, conhecidos como problemas de otimização combinatória multiobjetivo, têm se tornado um campo de pesquisa crescente devido à sua complexidade. Diferentemente dos problemas de objetivo único, os problemas multiobjetivos exigem abordagens mais sofisticadas devido ao aumento polinomial da complexidade computacional. A quantidade de pontos não

dominados pode crescer rapidamente, tornando a identificação das soluções não dominadas uma tarefa difícil e muitas vezes impraticável.

Para enfrentar essas dificuldades, novas abordagens têm sido desenvolvidas, incluindo o trabalho de [Lokman e Köksalan \(2013\)](#). Eles introduziram métodos que aprimoram a eficiência na resolução de problemas multiobjetivos, oferecendo soluções que ajudam a gerenciar a complexidade e melhorar a praticidade das análises. Esses métodos são projetados para lidar com a complexidade dos problemas de programação inteira, tornando a identificação de soluções não dominadas mais gerenciável e eficiente. A seguir, discutiremos a métrica de Chebyshev e o método de Lokman e Köksalan, que são exemplos de técnicas avançadas para resolver tais problemas.

O Método da Métrica de Chebyshev

A métrica de Chebyshev, amplamente utilizada em problemas de otimização multiobjetivo, é uma abordagem eficaz para converter múltiplos objetivos em um único problema escalar. Em vez de depender de ponderações convexas, a métrica de Chebyshev emprega uma norma ponderada l_β para calcular a distância entre o vetor objetivo de uma solução viável x e um vetor de referência z^I , definido no início deste anexo, com ajuste através do parâmetro $\beta = \infty$. Esse método busca minimizar a maior distância ponderada entre os objetivos, proporcionando uma análise direta e flexível para problemas com múltiplos objetivos.

A formulação do problema com a métrica de Chebyshev pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \text{Min } z_w &= \left(\sum_{k=1}^r w_k |f_k(x) - z_k^I|^\beta \right)^{1/\beta} \\ \text{sujeito a } & x \in X, \end{aligned} \quad (7.5)$$

sendo β um parâmetro que pode ser escolhido pelo usuário com os valores de 1 a ∞ ; w_k é o valor do peso atribuído à função objetivo k , sendo que $\sum_{k=1}^r w_k = 1$ e $w_k > 0$. Quando $\beta = \infty$, a métrica adotada é a métrica de Chebyshev, formulada como:

$$\begin{aligned} \text{Min } z_w &= \max_{1 \leq k \leq r} \left(w_k |f_k(x) - z_k^I| \right) \\ \text{sujeito a } & x \in X. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Esta abordagem é particularmente notável pela introdução da variável auxiliar u , que permite uma reformulação do problema original em uma forma linear e diferenciável:

$$\text{Min } z_w = u \quad (7.7)$$

$$\text{sujeito a } x \in X,$$

$$w_k(f_k(x) - z_k^I) \leq u \text{ para } k = 1, \dots, r. \quad (7.8)$$

[Chugh \(2020\)](#) aponta que embora a métrica de Chebyshev ofereça uma abordagem consistente, ela pode gerar soluções fracas e não dominadas, o que é frequentemente indesejável em otimização multiobjetivo. Para superar essa limitação, a função de Chebyshev ponderada aumentada foi introduzida. Este método adiciona um termo ℓ_1 , multiplicado por ρ , à função original para evitar a geração de soluções não dominadas. A função de Chebyshev ponderada aumentada é formulada como:

$$\text{AugWT}(x|\lambda, r^*) = \min WT(x|\lambda, r^*) + \rho \sum_{k=1}^m \{\lambda_k |r_k^* - f_k(x)|\} \quad (7.9)$$

$$\text{sujeito a } x \in X,$$

sendo que x é a solução a ser avaliada, e $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_m^*)$ é o ponto ideal, definido como $r_k^* = \min\{f_k(x) \mid x \in X\}$ para cada $k = 1, 2, \dots, r$. Este ponto r^* representa os valores ótimos individuais de cada função objetivo $f_k(x)$ dentro do conjunto de soluções viáveis X . $\rho \geq 0$ é geralmente um número positivo pequeno que garante pontos não dominados. A inclusão do termo ℓ_1 permite que a função ajuste a análise para evitar a geração de soluções fracas, melhorando a capacidade de encontrar pontos não dominados.

A função de Chebyshev ponderada aumentada garante que todos os pontos não dominados possam ser identificados, ajustando adequadamente os vetores de peso, e evita a geração de pontos fracos não dominados. Essa abordagem é particularmente útil em problemas complexos onde a fronteira de Pareto pode incluir regiões não convexas. Estudos como os de [Mansour et al. \(2017\)](#), [Aliano Filho et al. \(2023\)](#), [Aliano Filho e Morabito \(2024\)](#) demonstram a eficácia e a aplicabilidade dessa métrica em diferentes contextos de otimização, reforçando seu valor como uma escolha robusta para a resolução de problemas multiobjetivo complexos e combinatórios.

Método de Lokman e Köksalan

O algoritmo de [Lokman e Köksalan \(2013\)](#) foi desenvolvido com o objetivo de abordar as limitações computacionais frequentemente encontradas na resolução de problemas de programação inteira multiobjetivo. Esses problemas, especialmente quando apresentam um número elevado de soluções não-dominadas, podem se tornar excessivamente complexos e exigentes em termos de recursos computacionais. Para enfrentar esses

desafios, o algoritmo de Lokman e Köksalan utiliza uma técnica de decomposição e divide o problema em submodelos menores. Essa abordagem permite que apenas um subconjunto das restrições adicionais seja necessário para excluir regiões já dominadas por soluções previamente identificadas, otimizando o processo de busca.

O algoritmo de Lokman e Köksalan opera de forma sistemática para explorar o espaço de soluções de um problema multiobjetivo, mantendo um registro contínuo das soluções não-dominadas que são identificadas ao longo do processo. O objetivo principal é encontrar todas as soluções eficientes possíveis, mas sem a necessidade de consumir recursos computacionais em excesso. Para isso, o algoritmo segue uma série de etapas que se inter-relacionam e se reforçam mutuamente. O modelo é dado por:

$$\text{Min } z_p(x) + \rho \sum_{j=1}^{p-1} z_j(x) \quad (7.10)$$

sujeito a:

$$z_j(x) \leq b_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p-1 \quad (7.11)$$

$$x \in X, \quad (7.12)$$

sendo que $z_p(x)$ representa uma das funções objetivo do problema e $z_j(x), \forall j \in 1, \dots, p-1$ são as outras funções do problema multiobjetivo. Em (7.10), ρ é uma constante positiva suficientemente pequena que impede a obtenção de soluções fracamente não-dominadas, e $b = (b_1, b_2, \dots, b_{p-1})$ define um limite inferior para cada um dos primeiros $p-1$ critérios. Se (P_b) for inviável, então atribuímos $z(P_b) = (M, M, \dots, M)$.

Primeiramente é definida uma função objetivo para ser a principal na otimização do modelo, os autores não determinam a forma de escolha dessa função objetivo, porém a escolha não interfere nos resultados obtidos. Após a definição desta função objetivo $z_p(x)$, o processo começa com a definição dos limites iniciais para cada função objetivo, exceto a função $z_p(x)$. Esses limites, que influenciam diretamente a direção da busca, são inicialmente estabelecidos de forma ampla, com os limites inferiores definidos como $-\infty$ e os superiores como $+\infty$.

A busca iterativa é a etapa central do algoritmo. Em cada iteração, o algoritmo resolve um modelo de otimização para identificar um novo ponto não-dominado. Durante essa busca, o objetivo é minimizar uma das funções objetivo enquanto se garante que as demais permaneçam dentro dos limites estabelecidos. Um ponto $z(x')$ é considerado dominante em relação a $z(x)$ se:

$$z_i(x) \leq z_i(x') \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \quad \text{e} \quad z(x') \neq z(x). \quad (7.13)$$

Caso não exista tal x' , x é classificado como eficiente, e $z(x)$ como um ponto não-dominado.

Após a identificação de um novo ponto não-dominado, o algoritmo procede para a atualização do conjunto de soluções. Esse ponto é então comparado com os pontos já armazenados no conjunto de soluções para determinar se é, de fato, um ponto não-dominado em relação aos demais. Se o ponto for considerado não-dominado, ele é adicionado ao conjunto de soluções. Em seguida, os limites das funções objetivo são ajustados (L_i é o limitante inferior e U_i é o limitante superior):

$$L_i = \max(L_i, z_i(x')) \quad \text{e} \quad U_i = \min(U_i, z_i(x')). \quad (7.14)$$

Essa atualização é fundamental, pois refina o espaço de busca, direcionando o algoritmo para regiões mais promissoras do espaço de soluções, onde a probabilidade de encontrar novos pontos não-dominados é maior.

O processo de busca e atualização continua até que o algoritmo não consiga mais encontrar novos pontos não-dominados dentro dos limites atuais, momento em que o algoritmo termina. Essa condição de término é verificada ao se observar se o último modelo resolvido resultou ou não em um ponto que possa ser adicionado ao arquivo.

Para problemas com p objetivos, o número de modelos resolvidos pelo algoritmo pode variar dependendo do número total de pontos não-dominados N . No pior caso, o algoritmo pode precisar resolver até $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ modelos, quando não é possível prever a solução ótima sem resolver cada modelo individualmente, utilizando apenas a informação armazenada. No melhor caso, onde a informação dos pontos não-dominados já identificados permite prever o próximo ponto não-dominado, o número de modelos necessários pode ser reduzido a $N + 1$. O valor de p pode impactar no número de pontos não-dominados N , influenciando indiretamente na quantidade de vezes que o modelo deve ser solucionado.

Assim, o número total de modelos resolvidos, denotado por M_S , pode variar entre $N + 1$ e $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$. Para avaliar a eficiência do algoritmo, consideramos o número médio de modelos resolvidos por ponto não-dominado, que é dado por M_S/N .

O algoritmo de Lokman e Köksalan oferece várias vantagens, destacando-se por sua eficiência, flexibilidade e escalabilidade. Ao focar em limites em vez de restrições adicionais, ele simplifica o problema e reduz a quantidade de modelos a serem resolvidos. Além disso,

sua aplicação não é limitada a um número específico de objetivos, tornando-o versátil para uma ampla gama de problemas de otimização multiobjetivo. Sua escalabilidade permite lidar com problemas maiores sem um aumento significativo no ônus computacional.

O algoritmo de Lokman e Köksalan representa um avanço significativo no campo da otimização multiobjetivo, particularmente no contexto de problemas de programação inteira. Sua capacidade de identificar todos os pontos não-dominados de forma eficiente, aliada à sua adaptabilidade e robustez, o torna uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas complexos em diversas áreas de aplicação.

APÊNDICE C - PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

A programação estocástica é uma técnica amplamente utilizada para tratar incertezas em problemas de otimização. Tradicionalmente, modelos de otimização, incluindo o ARP, assumem que todos os parâmetros de entrada são determinísticos e conhecidos. No entanto, essa suposição muitas vezes não reflete a realidade operacional, onde atrasos devido a condições climáticas, problemas com aeronaves, ou indisponibilidade de tripulações e passageiros podem impactar significativamente a execução das rotas planejadas.

No ARP, planejar com base em dados médios ou fixos, como tempos de voo ou janelas de manutenção, pode resultar em soluções que, apesar de ótimas na teoria, são inviáveis na prática. Pequenas variações nos dados podem tornar uma solução teoricamente ótima inviável, levando a custos adicionais e interrupções operacionais. Isso ocorre porque essas soluções tendem a utilizar ao máximo os recursos disponíveis, deixando pouca margem para ajustes quando ocorrem variações inesperadas.

Incorporar a incerteza no planejamento das rotas e na alocação de recursos no ARP é essencial para mitigar os impactos de dados imprecisos e promover soluções mais robustas. A programação estocástica permite considerar múltiplos cenários possíveis, oferecendo soluções mais resistentes e adaptáveis a variações nos dados. Isso melhora a resiliência das operações, minimizando os custos associados a imprevistos e aumentando a eficiência e a pontualidade dos voos.

A programação estocástica é uma ferramenta eficiente para lidar com problemas de decisão sob incerteza, onde os parâmetros que influenciam as decisões não são conhecidas com certeza, mas seguem distribuições de probabilidade. Esses modelos permitem que os tomadores de decisão considerem a incerteza de forma sistemática, incorporando-a diretamente nos modelos de otimização. A abordagem clássica divide as decisões em dois estágios: uma decisão inicial, antes que a incerteza se revele, e uma decisão subsequente, ajustada com base nas informações que se tornam disponíveis. Esta seção foi elaborada com base nas contribuições de [Høyland e Wallace \(2001\)](#), [Ruszczyński e Shapiro \(2003\)](#), [Birge e Louveaux \(2011\)](#), [Löhndorf \(2016\)](#), cujas obras proporcionam uma compreensão aprofundada da programação estocástica e de suas aplicações práticas.

O modelo matemático básico de um problema de programação estocástica de dois estágios pode ser expresso como:

$$\min z = c^T x + E_\xi[Q(x, \xi)] \quad (7.15)$$

sujeito a:

$$Ax = b, \quad (7.16)$$

$$x \geq 0, \quad (7.17)$$

sendo que $Q(x, \xi)$ representa o valor ótimo da função objetivo no segundo estágio, dado o vetor de decisão x e a realização da incerteza ξ . A é a matriz de coeficientes das restrições, b é o vetor de constantes do lado direito das restrições e c^T é o vetor transposto dos coeficientes dos custos associados às variáveis de decisão. A formulação completa do segundo estágio é dada por:

$$Q(x, \xi) = \min q(\xi)^T y \quad (7.18)$$

sujeito a:

$$W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, \quad y \geq 0. \quad (7.19)$$

Nesta formulação, o primeiro estágio envolve a tomada de decisões x , enquanto o segundo estágio ajusta as decisões y com base na realização da incerteza ξ . A expectativa na função objetivo reflete a média ponderada dos possíveis resultados, levando em conta as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias. $W(\xi)$ é uma matriz que depende da incerteza ξ e representa a relação entre as variáveis de decisão y e a realização da incerteza. $h(\xi)$ é um vetor que depende de ξ e representa os recursos ou limitações no segundo estágio, ajustados pela incerteza. $T(\xi)$ é uma matriz que depende de ξ e relaciona as variáveis de decisão do primeiro estágio x com os termos do segundo estágio.

Os problemas de programação estocásticos de dois estágios são classificados de acordo com a estrutura do problema de recurso (*recourse*), que define como as decisões no segundo estágio são ajustadas após a realização da incerteza. Os principais tipos de recurso incluem:

1. **Recurso fixo:** Aqui, a matriz $W(\xi)$ é constante para todas as realizações de ξ , ou seja, $W(\xi) = W$. Isso implica que o problema de recurso é sempre o mesmo, independentemente da realização da incerteza.

2. **Recurso simples:** Neste caso, W é a matriz identidade, simplificando a condição de viabilidade do recurso para $y = h(\xi) - T(\xi)x$. Isso significa que o recurso é diretamente o desvio entre as realizações da incerteza e as decisões da primeira fase.

3. **Recurso completo:** Relaciona-se à viabilidade do problema de recurso. Um programa estocástico tem recurso completo se, para todas as realizações de ξ , o problema de recurso tem uma solução viável, ou seja, $Q(x, \xi) < \infty$ para todo ξ em Ξ .

4. **Recurso relativamente completo:** Neste caso, a viabilidade do problema de recurso é condicionada a $x \in X$. Isso significa que o problema de recurso é viável para todas as realizações de ξ , desde que x pertença ao conjunto viável X . Formalmente, temos:

$$Q(x, \xi) < \infty, \forall \xi \in \Xi, x \in X \quad (7.20)$$

ou

$$\{y : W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, y \geq 0\} \neq \emptyset, \forall \xi \in \Xi, x \in X. \quad (7.21)$$

A solução de um problema de programação estocástica depende da modelagem da incerteza, frequentemente representada por meio de cenários que descrevem as possíveis realizações das variáveis aleatórias. A geração de cenários é uma parte crucial do processo de modelagem, pois a qualidade dos cenários influencia diretamente a qualidade da solução obtida.

Cenários são representações discretas do processo estocástico original e permitem transformar um problema estocástico em um equivalente determinístico tratável. Um dos métodos de geração de cenários envolve a criação de uma árvore de cenários ξ , onde cada nó da árvore representa uma possível realização da incerteza em um dado estágio. Cada cenário ξ_s é um caminho através da árvore que corresponde a uma sequência de realizações das variáveis estocásticas ao longo dos estágios.

A geometria de uma árvore de cenários é governada por dois parâmetros principais: a profundidade H , que é o número de estágios, e a largura $|\xi_t|$, que é o número de realizações por estágio. Quanto maior a profundidade e a largura da árvore, mais adaptável é o modelo à informação revelada e mais precisa é a descrição da incerteza. No entanto, isso também aumenta a complexidade computacional. O modelo de dois estágios apresentado em (7.15) a (7.19) possui $H = 2$.

Geração de cenários e métricas

A geração de cenários em um modelo estocástico envolve a criação de representações de possíveis resultados futuros, com base nas incertezas presentes nos parâmetros do modelo. Cada cenário representa uma realização específica dos variáveis aleatórias envolvidas, como demanda, tempo ou custos, e serve para simular diferentes condições de operação ou alternativas de decisão. A qualidade dos cenários gerados é crucial, pois

afeta a precisão das soluções e a robustez do modelo. Os métodos de geração de cenários incluem:

1. **Amostragem:** Uso de técnicas como a amostragem de Monte Carlo para gerar cenários que refletem as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias.

2. **Matching de momentos:** Geração de cenários que correspondem a momentos estatísticos (média, variância, etc.) das distribuições desejadas.

3. **Métodos baseados em métricas:** Redução do conjunto de cenários enquanto minimiza alguma métrica de distância probabilística, como em técnicas de *clustering*.

A qualidade da árvore de cenários pode ser avaliada em termos de erro de aproximação e estabilidade, que medem a precisão e a consistência das soluções obtidas a partir de diferentes conjuntos de cenários.

Com sua estrutura de duas fases e métodos robustos de geração de cenários, a programação estocástica oferece uma abordagem eficaz para a tomada de decisões em ambientes incertos. Ela permite que os tomadores de decisão considerem a incerteza de maneira sistemática e informada, proporcionando soluções que são não apenas otimizadas, mas também resilientes diante da variabilidade inerente dos sistemas reais.

O Valor Esperado da Informação Perfeita (EVPI) e o Valor da Solução Estocástica (VSS) são métricas fundamentais na avaliação do impacto das incertezas em modelos de programação estocástica, como em problemas de dois estágios com recurso.

O EVPI indica o valor máximo que um tomador de decisão estaria disposto a pagar para obter informações perfeitas sobre as incertezas. Formalmente, o EVPI é calculado como a diferença entre o valor esperado das soluções de "esperar para ver" (*wait-and-see* - WS), que é obtido ao resolver o problema com informação perfeita, e o valor ótimo da solução do problema estocástico original sem essa informação:

$$EVPI = WS - z^*. \quad (7.22)$$

Aqui, WS representa o valor esperado das soluções ótimas z_s^* obtidas em cada cenário s , e z^* é o valor da solução ótima do modelo estocástico original. Quanto maior o EVPI, maior é o impacto das incertezas na solução do problema, sugerindo que a informação perfeita tem um valor significativo.

O VSS quantifica o ganho esperado ao resolver um problema estocástico em vez de

um determinístico, onde as variáveis aleatórias são substituídas pelos seus valores esperados. O VSS é dado pela diferença entre o valor da solução ótima do modelo estocástico z^* e o valor esperado EEV ao usar a solução do problema determinístico:

$$VSS = z^* - EEV. \quad (7.23)$$

Neste caso, EEV é calculado como o valor esperado de adotar a solução do problema determinístico para os diferentes cenários. Um VSS alto indica que a abordagem estocástica oferece uma solução substancialmente melhor do que a determinística, justificando o uso de modelos mais complexos.

Tanto o EVPI quanto o VSS fornecem informações importantes para a tomada de decisão em ambientes incertos. O EVPI avalia o valor da informação adicional, enquanto o VSS mede os benefícios de uma modelagem estocástica. Esses valores ajudam a guiar o tomador de decisão na escolha da abordagem mais apropriada, equilibrando a complexidade do modelo com a necessidade de precisão na solução. Essas métricas de avaliação se aplicam aos cenários utilizados para construir o modelo estocástico. Caso sejam empregadas técnicas de redução de cenários, os valores de EVPI e VSS serão válidos para o conjunto reduzido, mas é importante notar que esse conjunto reduzido de cenários está fortemente correlacionado com os valores do conjunto original.